



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY

DISPERZE SVĚTLA

LIGHT DISPERSION

SEMESTRÁLNÍ PROJEKT

TERM PROJECT

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. ONDŘEJ PAVELA

BRNO 2020

Abstrakt

Práce se zabývá fyzikální problematikou disperzního jevu se zaměřením na jeho projevy v optice. Jsou představeny základní fyzikální zákony zodpovědné za vznik tohoto jevu spolu s odpovídajícími rovnicemi. Důraz je kladen na popis disperzních médií, jejich disperzních křivek, vysvětlení principu fázové a grupové rychlosti. Dále práce rozebírá chromatickou disperzi, Snellův zákon a separaci světla na hranolu. Součástí práce je demonstrační interaktivní program simulující tento jev v paprskové optice pomocí algoritmu sledování paprsku.

Klíčová slova

Disperze světla, chromatická disperze, disperzní médium, disperzní křivka, fázová rychlost, grupová rychlost, anomální disperze, normální disperze, index lomu, Snellův zákon, spektroskopie

Obsah

1	Úvod	4
2	Disperze	4
2.1	Disperze v optice	4
2.2	Disperzní médium a disperzní křivky	6
2.3	Chromatická disperze	12
2.4	Využití disperze	16
3	Demonstrační program	16
4	Záver	17
	Literatura	18

1 Úvod

Disperze je všudypřítomný fyzikální jev jehož dopady jsou pro nás často nežádoucí, ale existuje i mnoho praktických aplikací, které naopak tohoto jevu s výhodou využívají. Tato práce představuje konkrétně problematiku disperze světla a přináší základní vhled do fyzikální teorie za tímto jevem. Jsou zde představeny základní fyzikální zákony, kterými se disperze světla řídí a tak je nutné poznamenat, že se často jedná o zjednodušený popis a mnohé rovnice pouze hrubě aproximují skutečné jevy. Cílem této práce ovšem nebyl detailní rozbor tohoto fyzikálního jevu a zájemcům o hlubší vhled do této problematiky se tedy doporučuje vyhledat odbornou literaturu.

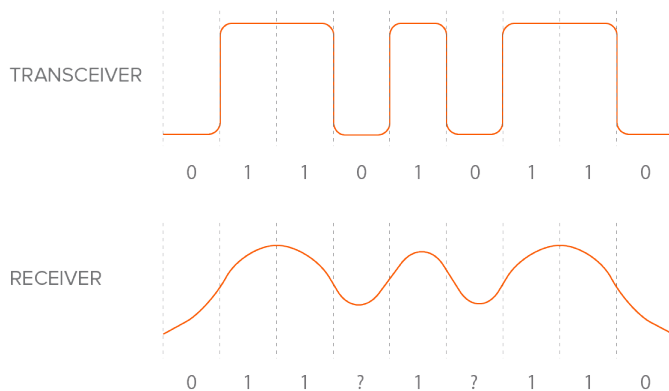
2 Disperze

Na úvod je nutné poznamenat, že disperze jakožto fyzikální jev je velmi široký pojem, který se netýká pouze optiky a separace polychromatického světla na jednotlivé složky v důsledku rozdílných indexů lomu je pouze jedním z mnoha projevů disperze. Projevy disperze je tedy možné pozorovat například i u mechanického nebo zvukového vlnění a nikoliv pouze u elektromagnetického vlnění či viditelného světla. Tento text se ovšem ze zřejmých důvodů zabývá pouze disperzí a jejími projevy u světla.

2.1 Disperze v optice

V základní podobě se jedná jev, kdy *fázová rychlost* vlny závisí na její frekvenci, což nastává pokud se vlna šíří v takzvaném *disperzním prostředí*. Pro jednoduché monochromatické vlny by se mohlo zdát, že nám tento jev nezpůsobí příliš mnoho problémů. Jakmile ovšem začneme uvažovat například o přenosu informace pomocí obdélníkových pulzů, zjistíme, že situace není zdaleka tak jednoduchá. Dokonalé obdélníkové pulzy se totiž skládají z nekonečně mnoha harmonických složek o různých frekvencích, jak je možné ukázat pomocí Fourierovy analýzy. Jeve disperze ovšem není limitován pouze na teoretické úvahy a lze demonstrovat i na produkovatelných nedokonalých obdélníkových pulzech, které se skládají z konečného počtu harmonických složek.

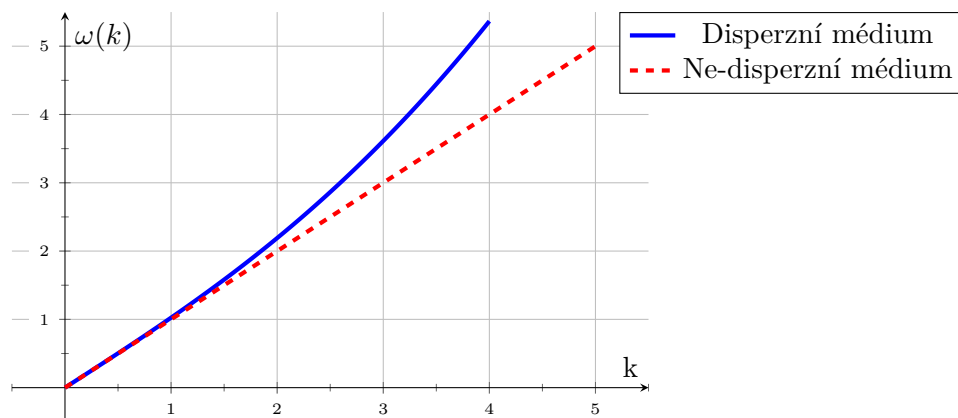
Efekt disperze u takového pulzu je znázorněn na obrázku 1, kde *transceiver* křivka odpovídá výchozí podobě signálu u zdroje a *receiver* křivka odpovídá signálu detekovanému u přijímače po průchodu disperzním médiem. Zde je možné pozorovat, že na straně příjí-



Obrázek 1: Znázornění disperzního jevu u obdélníkových pulzů

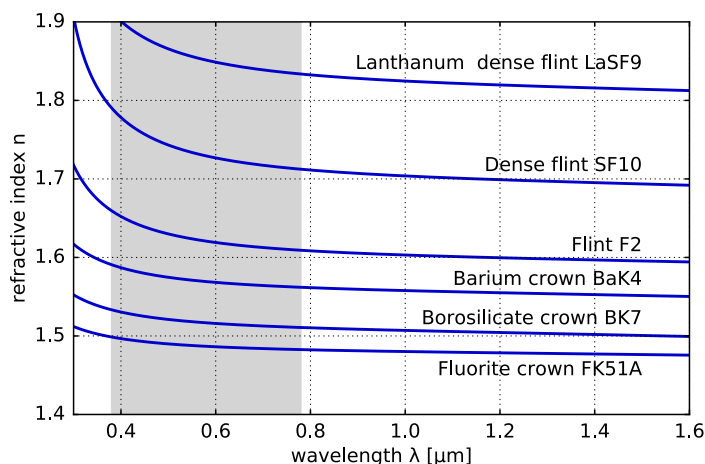
mače signál ztratil svůj původní tvar, konkrétně došlo ke ztrátě vysokofrekvenčních změn v signálu a obdélníkové pulzy se rozprostřely v čase. Důvodem je právě skutečnost, že se pulzy skládají z mnoha harmonických složek o různých frekvencích, které médiem putují s rozdílnými fázovými rychlostmi, což se projevuje například tak, že složky s vyššími frekvencemi mají vyšší fázovou rychlost a předbíhají tak původní pulz. Naproti tomu složky s nižšími frekvencemi mají nižší fázovou rychlost a opoždují se tedy oproti původnímu pulzu. Výsledkem je poté degradovaný signál z obrázku 1, kde došlo k nežádoucímu rozptření energie v čase. Konkrétní příklad postupné disperze Gaussova pulzu v čase je možné pozorovat zde.

Nezbytnou podmínkou disperzního jevu je tedy průchod disperzním médiem, jehož materiálové charakteristiky způsobují disperzi. Materiálovou disperzi můžeme popsat tzv. *disperzní závislostí*, na základě které jsme schopni určit, jakou fázovou rychlost budou mít jednotlivé složky o různých frekvencích, viz obrázek 2. Disperzní závislost bude detailněji popsána v následující kapitole.



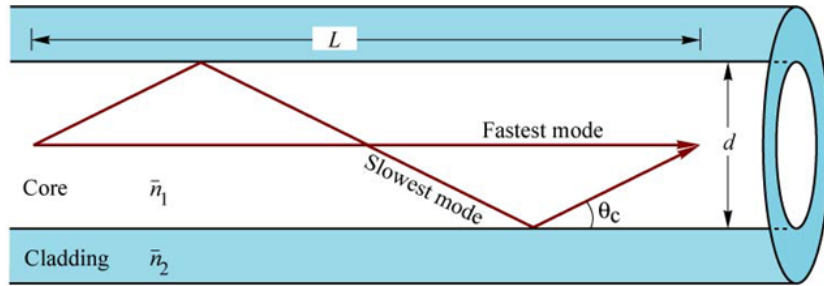
Obrázek 2: Křivka disperzní závislosti pro určení fázové rychlosti

Často se také materiálová disperze popisuje disperzní křivkou, která určuje, jak se mění index lomu materiálu na základě vlnové délky, viz obrázek 3. Z obrázku je patrné, že pro různé materiály jsou křivky odlišné, přičemž šedá oblast odpovídá viditelné části spektra.



Obrázek 3: Disperzní křivka udávající vztah mezi vlnovou délkou a indexem lomu materiálu

Kromě toho existuje i tzv. vlnovodová disperze, se kterou se nejčastěji setkáme při práci s optickými vlákny a která k celkové disperzi přispívá nezanedbatelnou částí. Obecně se vlnovodová disperze může projevit při šíření vlny libovolným materiálem s nehomogenní strukturou, např. fotonickým krystalem, který se dnes již také využívá v optických vláknech [1]. Běžně se ovšem vlnovodová disperze odvíjí od geometrických charakteristik vlákna, přesněji od poměru mezi vlnovou délkou světla a poloměrem jádra vlákna a také od profilu indexu lomu. Dle citace: „*Tedy i za podmínek nulové materiálové disperze je skupinové zpoždění a konstanta šíření každého vidu funkcí vlnové délky. Tento jev označujeme jako vlnovodovou disperzi. Při přenosu nemonochromatického záření přispívá ke zkreslení signálu stejným způsobem jako disperze materiálová.*“ [5]. V případě optických vláken je nutné brát v potaz mnoho dalších faktorů, které jsou ovšem mimo rámec této práce. Pro představu dochází dále k tzv. vidové disperzi ve vícevidových vláknech, která je způsobená rozdílnou délkou dráhy každého vidu, což má za následek zkreslení přenášeného signálu, jelikož energie každého vidu dorazí na konec vlákna v jiný časový okamžik, viz obrázek 4 pro lepší představu.



Obrázek 4: Vidová disperze ve vícevidových optických vláknech

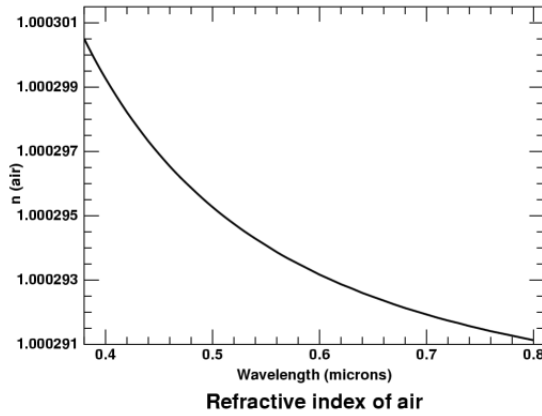
Jak je vidět, disperze má v optice mnoho podob a projevuje se různými způsoby, které nemusí nutně souviset se separací složek světla pomocí hranolu. Pro příklad, dříve zmíněná vidová disperze nastává i u monochromatického světla a nemá tedy nic společného s chromatickou disperzí, která nastává při lomu světla na optickém hranolu.

2.2 Disperzní médium a disperzní křivky

Nejprve je nutné vysvětlit podstatu média bez disperze a jak je možné na základě disperzní křivky určit fázovou rychlost vlny, aby bylo později jasné, jak, v čem, a proč se disperzní médium liší. Jako příklad média bez disperze lze uvést vakuum pro elektromagnetické vlny [8]. Typicky se také vzduch považuje za médium bez disperze pro viditelné spektrum světla, což však není tak úplně pravda. Ve skutečnosti i vzduch způsobuje disperzi světla, která je ovšem tak nepatrná, že dle [15] není za většiny běžných situací lidským okem viditelná. Pro představu je na obrázku 5 zobrazena křivka udávající index lomu vzduchu podle konkrétní vlnové délky za určitých standardních podmínek, viz [15]. Běžně se vzduch považuje za médium bez disperze také pro zvukové vlny ve frekvenčním rozsahu, který je slyšitelný lidským uchem. Nicméně vzduch obsahuje molekuly CO_2 a je disperzní například pro ultrazvuk [6].

Obecně se disperzní závislost pro libovolný fyzikální systém bez disperze získá vyřešením následující vlnové rovnice, která ovšem popisuje pouze situace, kdy máme jeden prostorový rozměr x :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$



Obrázek 5: Disperzní křivka vzduchu

Člen $c \in \mathbb{R}$ je zde kladná konstanta, která závisí na různých parametrech konkrétního systému [14]. Řešením této rovnice je libovolná funkce ve tvaru $f(x - ct)$, často se ovšem řešení sestavují z exponenciálních funkcí následujícího tvaru: $\psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$. Dosazením exponenciální funkce tohoto tvaru do vlnové rovnice získáme po úpravě následující triviální disperzní závislost [3], která odpovídá např. elektromagnetickým vlnám ve vakuu:

$$\omega^2 = c^2 k^2 \longrightarrow \omega(k) = ck,$$

kde c je konstanta (nezávislá na ω i k) odpovídající *fázové rychlosti* vlny. Triviální z toho důvodu, že se jedná o lineární závislost, která odpovídá systému bez disperze, jak uvidíme dále a jak je možné již vytušit z faktu, že c je konstantní. Rychlost se nazývá *fázová*, abychom ji byli schopni odlišit od *grupové* rychlosti, kterou představíme později, a také proto, že ve skutečnosti popisuje jak rychle se u sinusoidy $\sin(kx - \omega t)$ pohybuje bod s konstantní fází $kx - \omega t$. Vztah pro fázovou rychlost je možné odvodit následujícím způsobem:

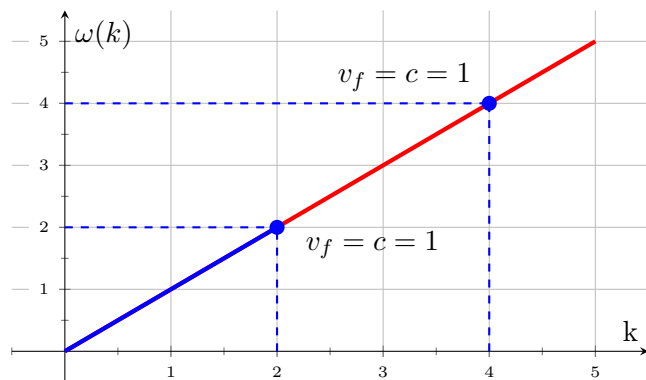
$$kx - \omega t = C \implies \frac{d(kx - \omega t)}{dt} = 0 \implies k \frac{dx}{dt} - \omega = 0 \implies \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v_f.$$

Obrázek 6 obsahuje křivku předchozí disperzní závislosti, která je lineární a jedná se tedy o přímku. Dále obrázek demonstruje, že *fázová* rychlost vlny graficky odpovídá sklonu přímky procházející počátkem a konkrétním bodem na přímce. Sklon přímky je dán její směrnici, což je v tomto případě $c = \frac{\omega(k)}{k}$. Jak můžeme dále vidět, pro libovolný bod na této křivce získáváme stejný poměr $\frac{\omega(k)}{k}$ a tedy i stejnou fázovou rychlost v_f , která je konstantní a nezávislá na úhlové frekvenci či vlnovém čísle. Zobrazená křivka tedy opravdu odpovídá médiu bez disperze. Z toho dále vyplývá, že ať už máme jakkoliv složitý pulz (nebo vlnu), tak *fázová* rychlost libovolné složky z mnoha harmonických složek nám popisuje i společnou rychlost celého pulzu a není tedy potřeba zavádět nový druh rychlosti.

Problém ovšem nastává, pokud pracujeme se systémem, který zahrnuje disperzi. Příkladem mohou být vlny na tuhé struně, které popisuje následující vlnová rovnice [2]:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \cdot \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \right),$$

kde T je síla napětí ve struně, μ je hmotnost struny na jednotku délky a $\alpha \in \mathbb{R}$ je kladná konstanta odvíjející se od typu struny. Řešením této vlnové rovnice je poté následující

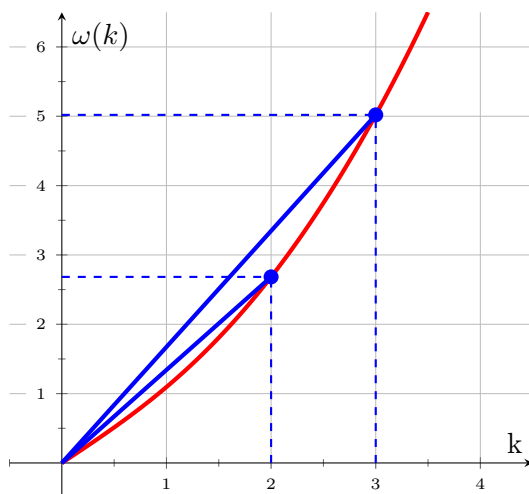


Obrázek 6: Lineární disperzní závislost $\omega(k) = ck$

vlnová funkce $\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$. Po jejím dosazení do vlnové rovnice a dodatečných úpravách získáváme tuto disperzní závislost:

$$\omega^2 = \frac{T}{\mu}(k^2 + \alpha k^4) \quad \longrightarrow \quad \omega(k) = \sqrt{\frac{T}{\mu}} k \sqrt{1 + \alpha k^2}.$$

Tato disperzní závislost je na první pohled nelineární a její křivka pro konkrétní hodnoty parametrů struny je zobrazena na obrázku 7. Jak je vidět, pro různé body na křivce (různé



Obrázek 7: Nelineární disperzní závislost $\omega(k) = \sqrt{\frac{T}{\mu}} k \sqrt{1 + \alpha k^2}$

hodnoty úhlové frekvence) získáváme přímky s různými směrnici, což se graficky projeví na sklonu přímky, který se pro každý bod na křivce liší. Zároveň zde platí dříve odvozený vztah pro lineární disperzní závislost a sklon přímky je tedy opět roven *fázové* rychlosti sinusoidy s danou frekvencí.

Otázkou ovšem je, zda je nyní možné nalézt nějakou „společnou“ rychlost, která charakterizuje vlnu s dvěma a více harmonickými složkami, jestliže se každá z nich pohybuje vlastní rychlostí. Odpověď je ano, přičemž tuto společnou rychlost nazýváme *grupovou*. Nyní si demonstrujeme, jak je možné jednoduše odvodit vztah pro grupovou rychlost složením pouhých dvou sinusoid a jak je možné ji určit graficky z disperzní křivky. Uvažujme tedy,

že máme následující dvě vlny:

$$\psi_1(x, t) = A \cos(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$\psi_2(x, t) = A \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

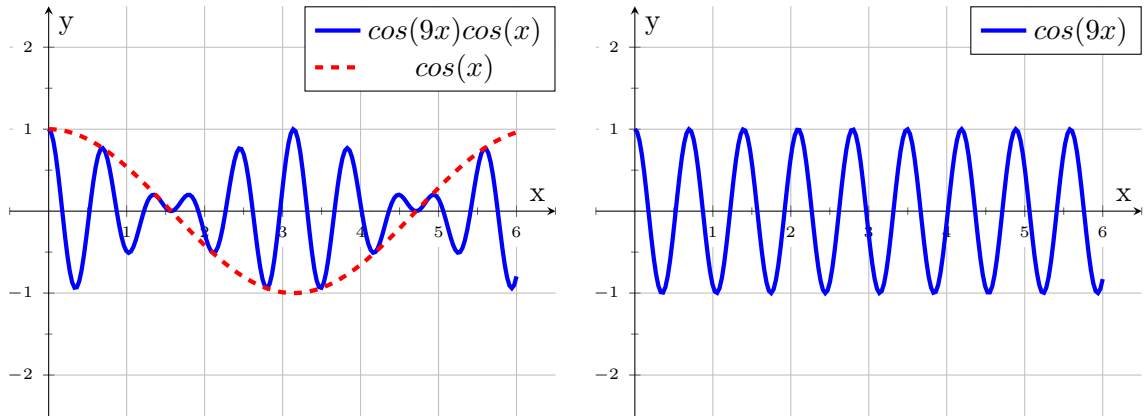
Jestliže tyto vlny složíme dohromady s využitím trigonometrického vzorečku:

$$\cos \theta + \cos \varphi = 2 \cos \left(\frac{\theta + \varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta - \varphi}{2} \right),$$

získáme následující složenou vlnu:

$$\psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) = 2A \cos \left(\bar{k}x - \bar{\omega}t \right) \cos \left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t \right),$$

kde $\bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2}$, $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, $\Delta k = k_1 - k_2$ a $\Delta \omega = \omega_1 - \omega_2$. Obrázek 8 ukazuje prostorový průběh této vlny s parametry $k_1 = 10$ a $k_2 = 8$ zachycený v čase $t = 0$. Z obrázku je patrné, že výsledná vlna je produktem dvou vln s různými vlnovými délkami, které jsou odlišné od původních vlnových délek.



Obrázek 8: Moment složené vlny pro časový okamžik $t = 0$

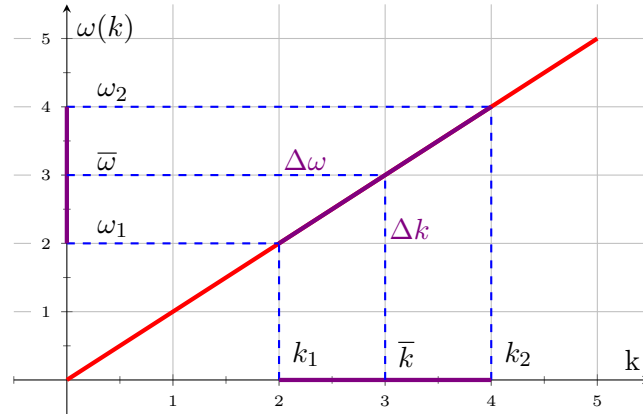
Složka $\cos \left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t \right)$ odpovídá červené, pomalu se měnící vlně. Její rychlost šíření v čase lze odvodit stejným způsobem jako dříve pomocí obecného vzorce pro rychlost šíření sinusoidy:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v \quad \longrightarrow \quad v_1 = \frac{\frac{\Delta \omega}{2}}{\frac{\Delta k}{2}} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k}$$

Pro tento konkrétní příklad lze rychlost v_1 označit za grupovou, přičemž k obecnějšímu a běžně používanému vztahu pro grupovou rychlost se dopracujeme za chvíli. Červená vlna svým způsobem provádí „amplitudovou modulaci“ a často se označuje jako *obálka* výsledné vlny. Naopak složka $\cos \left(\bar{k}x - \bar{\omega}t \right)$ odpovídá modré, rychle se měnící vlně, kterou lze pozorovat v pravém grafu obrázku 8. Její rychlost v_2 odvodíme stejným způsobem a v tomto konkrétním příkladu odpovídá fázové rychlosti složené vlny: $v_2 = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$.

Pokud bychom se na okamžik vrátili zpět k médiu bez disperze, tak můžeme na obrázku 9 pozorovat, že rychlost šíření obou složek je konstantní a shodná s původními fázovými rychlostmi obou vln:

$$v_{f1} = v_{f2} = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} = v_2 = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} = v_1.$$



Obrázek 9: Fázová a grupová rychlost složené vlny v médiu bez disperze

To je opět dáno tím, že závislost je lineární a poměr mezi průměrnými hodnotami pro rychlost v_2 i mezi rozdíly pro rychlost v_1 je totožný s poměry mezi parametry původních vln ψ_1 a ψ_2 což demonstruje obrázek 9. Nyní uvažujme, že k_1 vlny ψ_1 je téměř shodné s k_2 vlny ψ_2 , neboli $k_1 \approx k_2$, což znamená, že i kruhové frekvence obou vln jsou téměř totožné $\omega_1 \approx \omega_2$. Pak platí následující:

$$\frac{k_1 + k_2}{2} \approx k_1 \approx k_2 \quad \wedge \quad \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \approx \omega_1 \approx \omega_2 \quad \longrightarrow \quad v_2 = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} = \frac{\omega}{k} = v_{f1} = v_{f2}$$

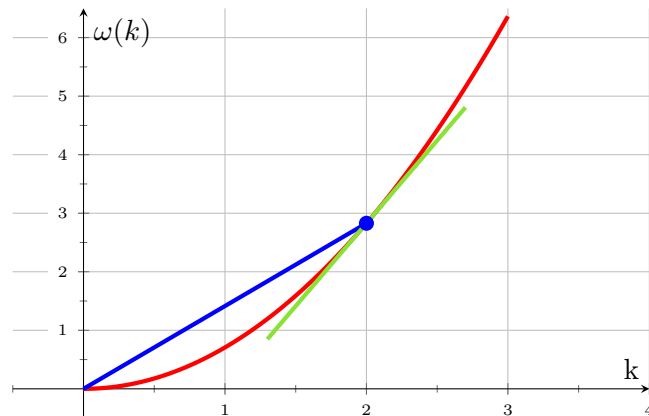
Tím jsme se dopracovali k tomu, že *fázová* rychlost složené vlny v_2 je v podstatě shodná s původními fázovými rychlostmi vln ψ_1 a ψ_2 . Zajímavější je ovšem vztah pro rychlost v_1 . Pokud se k_1 limitně blíží ke k_2 , pak se Δk limitně blíží k nule (to stejné platí i pro $\Delta\omega$) a vzorec pro rychlost v_2 pak v podstatě odpovídá derivaci:

$$\lim_{k_1 \rightarrow k_2} \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \quad \longrightarrow \quad v_2 = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk} = v_g$$

Derivace skutečně odpovídá obecnému vzorci pro *grupovou* rychlost a graficky odpovídá sklonu (směrnici) tečny v konkrétním bodě disperzní křivky. Je tedy zřejmé, že pro médium bez disperze je grupová rychlost sinusoidy konstantní a shodná s její fázovou rychlostí, což ovšem neplatí pro disperzní médium viz obrázek 10.

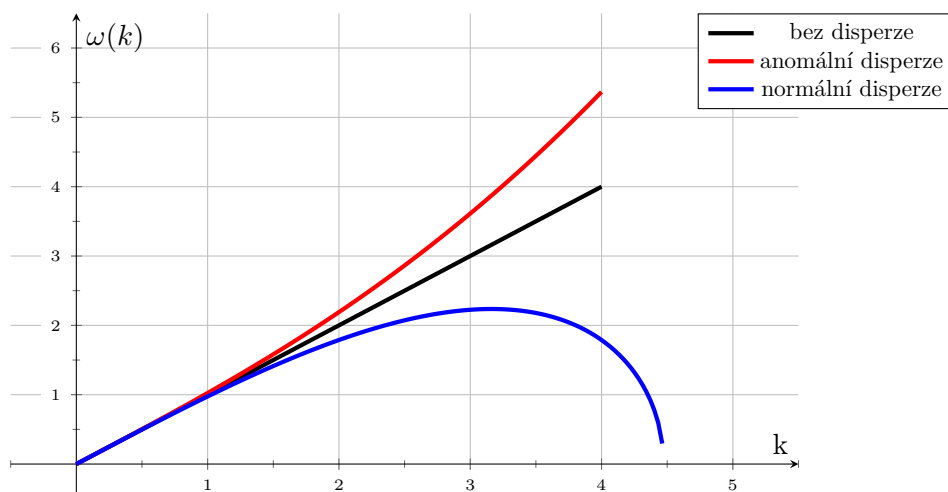
Mohou tedy nastat tři různé situace, které se v našem jednoduchém příkladu s dvěma vlnami projeví následovně:

- $v_g > v_f$: *anomální disperze*, která vzniká pokud máme *konvexní* disperzní křivku. Jednoduše řečeno odpovídá situaci, kdy se rychlost šíření vlny v médiu zvyšuje se zvyšující se frekvencí. Červená vlna z obrázku 8 tvořící obálku se v tomto případě šíří v čase rychleji než modrá vlna. Modrá vlna ovšem stále respektuje tvar obálky.
- $v_g = v_f$: médium bez disperze, neboli lineární disperzní závislost. Obě složky se v čase šíří stejnou rychlostí.
- $v_g < v_f$: *normální disperze*, která vzniká pokud máme *konkávní* disperzní křivku. Tato varianta odpovídá situaci, kdy se rychlost šíření vlny v médiu snižuje se zvyšující se frekvencí. Modrá vlna se v tomto případě propaguje obálkou vyšší rychlostí a respektuje její tvar.



Obrázek 10: Vizuální reprezentace fázové a grupové rychlosti vlny pro disperzní médium

Jednotlivé varianty lze pozorovat na obrázku 11. Zajímavá je například situace, kdy je křivka klesající, což znamená, že *grupová* rychlost je záporná. To se projeví tak, že obálka (červená vlna) se v čase šíří ve směru záporné osy x , přičemž modrá vlna se stále pohybuje v kladném směru osy x , jelikož její rychlost je kladná. Tuto situaci lze připodobnit ke



Obrázek 11: Typy disperze a jejich křivky

známému tanečnímu pohybu *Moonwalk*, který proslavil Michael Jackson, kdy je vytvořena iluze pohybu vpřed, ovšem samotné tělo se stále pohybuje vzad. Toto přirovnání je poměrně trefné, jelikož v praxi je právě *grupová* rychlost to, co nás zajímá, protože odpovídá rychlosti, kterou se přenáší energie vlněním [9] a tedy i informace, pokud se bavíme například o optických kabelech. Grupová rychlost tedy nemůže být větší než rychlost světla ve vakuu, na rozdíl od fázové rychlosti, viz dále.

V našem triviálním příkladu s dvěma vlnami bylo jednoznačné, pomocí které složky se určí grupová rychlost. V praxi se ovšem často pracuje se složitějšími pulzy, které jsou tvořeny složením mnoha harmonických složek a vyvstává tak otázka, pro kterou frekvenci (vlnové číslo) bychom měli vyhodnotit $v_g = \frac{d\omega}{dk}$, jelikož nejsme schopni nalézt jednu společnou grupovou rychlost, jako tomu bylo možné v našem triviálním případě s dvěma složkami.

Dle [3] se často pro vyhodnocení volí dominantní frekvence, kterou jsme schopni nalézt pomocí Fourierovy transformace nad daným pulzem.

Poslední zajímavostí je fakt, že při vhodné disperzní závislosti je možné docílit toho, že fázová rychlost vlny překročí rychlost světla c . To nám ovšem nevadí, protože ve skutečnosti nedochází k přenosu energie a není tak porušena teorie relativity. Aby došlo k přenosu energie, musíme způsobit změnu ve vlně a každý takový signál se může šířit pouze tak rychle jako čelní hrana této změny, která již je limitována rychlostí světla. Ve skutečnosti i grupová rychlost může ve speciálních případech, jako je například anomální disperze, překročit rychlost světla, což nám ovšem opět nevadí, protože samotný přenos energie tuto hranici nepřekročí. Dokument [3] poskytuje detailnější popis této problematiky.

2.3 Chromatická disperze

Jedním z nejznámějších projevů disperze je separace jednotlivých složek polychromatického světla pomocí hranolu z vhodného disperzního materiálu. Přesněji se jedná o takzvanou *chromatickou* disperzi a separace světla je pouze jejím důsledkem. Jak bylo ukázáno v předchozí kapitole, *fázová* i *grupová* rychlost šíření vlny v disperzním prostředí je závislá na vlnové délce, případně frekvenci vlny a můžeme tedy říci, že se ve skutečnosti jedná o funkce: $v_p(\lambda)$, $v_g(\lambda)$. Tento fakt úzce souvisí s vzorcem pro tzv. *absolutní* index lomu n , který udává poměr mezi rychlostí šíření elektromagnetického vlnění ve vakuu c a rychlostí šíření v libovolném jiném médiu v : $n = \frac{c}{v}$.

Často se ovšem nespecifikuje, že pro určení indexu lomu se využívá *fázová* rychlost vlny. Z toho logicky vyplývá, že i index lomu je pro disperzní média ve skutečnosti funkcí vlnové délky a přesnější vzorec by tedy mohl vypadat například následovně: $n(\lambda) = \frac{c}{v_p(\lambda)}$. Pro lepší představu se často index lomu popisuje jako koeficient udávající zpomalení oproti rychlosti světla ve vakuu, pokud vyjádříme ze vzorce rychlost: $v_p(\lambda) = \frac{c}{n(\lambda)}$. Index lomu lze vyjádřit také pomocí poměru vlnových délek: $n = \frac{\lambda_0}{\lambda}$, kde λ_0 je vlnová délka vlny ve vakuu a λ je vlnová délka v daném médiu. Důležité je poznamenat, že při přechodu z jednoho média do druhého dochází ke změně vlnové délky i rychlosti šíření tak, aby platil vztah $v = \lambda f$, ale ke změně frekvence vlnění *nikdy* nedochází. To jsme schopni pozorovat i prakticky, jelikož při lomu monochromatického světla na hranolu nedochází ke změně okem vnímané barvy, která je závislá právě na frekvenci vlnění. Pro úplnost, vakuum má index lomu roven 1. Kromě klasického indexu lomu, který je definován pro *fázovou* rychlost vlny, existuje i *grupový index lomu*. Ten je definován stejným způsobem jako klasický index lomu, akorát pro *grupovou* rychlost vlnění: $n_g(\lambda) = \frac{c}{v_g(\lambda)}$.

V minulé kapitole bylo zmíněno, že při vhodné disperzní závislosti může fázová rychlost vlny překonat rychlost světla, aniž by došlo k porušení teorie relativity, jelikož nedochází k přenosu informace. To ovšem znamená, že index lomu ve skutečnosti může být nižší než 1. Zajímavým příkladem média s takovým indexem lomu může být ionosféra země, která je tvořena plazmatem. Při vstupu vlny do takového média a refrakci dochází k odklonu vlnění od normály. Toho se využívá například při rádiové komunikaci na velké vzdálenosti [11]. Dokonce existují i materiály, jejichž index lomu je záporný [10] a dochází tak k negativní refrakci, se kterou se běžně nesetkáváme.

Klíčové pro separaci barev ovšem je, že index lomu ovlivňuje úhel lomu při přechodu vlnění z jednoho prostředí do druhého. Jelikož index lomu závisí na vlnové délce, pak i samotný úhel lomu je závislý na vlnové délce, což ve výsledku způsobuje dříve zmíněnou a dobře známou separaci bílého světla na jednotlivé složky při průchodu hranolem pod vhodným úhlem. Opět je vhodné zdůraznit, že *disperzí* nazýváme konkrétně závislost indexu

lomu na vlnové délce a separace složek světla je pouze jedním z *důsledků* disperze. Dalším a tentokrát nepříjemným příkladem důsledků disperze je závislost ohniskové vzdálenosti čočky na vlnové délce. Tento jev je jedním z typů tzv. *chromatické aberace* [7], což je ve většině případů nežádoucí efekt, který se často musí různými způsoby (například i pomocí software) alespoň částečně eliminovat. Na obrázku 12 můžeme pozorovat praktický projev aberace, kdy jednotlivé barevné složky měly při pořízení fotky posunutá ohniska, což způsobilo rozostření a separaci barev na výsledné fotce.



Obrázek 12: Chromatická aberace v praxi. Při pořízení fotky byly použity čočky zvýrazňující efekt aberace.

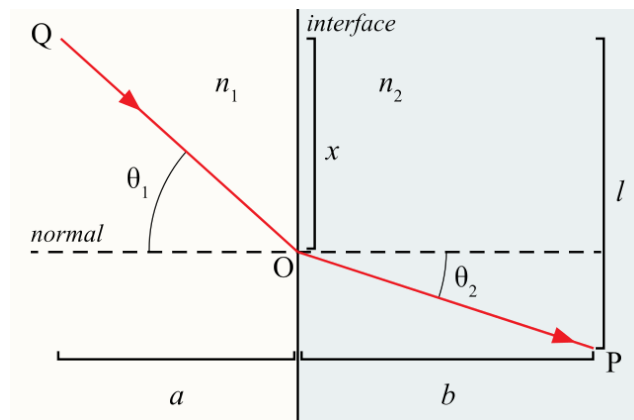
Jak konkrétně se světlo na rozhraní mezi prostředími láme lze poté určit pomocí tzv. *Snellova zákona* [12], který popisuje vztah mezi úhlem dopadu a lomu při přechodu vlnění z jednoho prostředí s indexem lomu n_1 do druhého prostředí s indexem lomu n_2 . Konkrétně, pokud paprsek při dopadu na rozhraní svírá s normálou povrchu úhel θ_1 , pak úhel θ_2 , který bude svírat lomený paprsek lze vypočítat pomocí následujícího Snellova zákona:

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2} \quad \longrightarrow \quad \theta_2 = \arcsin \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \right)$$

Na obrázku 13 lze pozorovat situaci, která nastane, pokud světlo přechází z tzv. opticky řidšího prostředí do opticky hustšího, což znamená, že $n_2 > n_1$. V tomto případě se světlo láme směrem k normále, ale pokud bychom měli opačný případ, kdy $n_1 > n_2$, pak by se světlo lámalo naopak směrem od normály. Kromě toho nám Snellův zákon slouží také k určení tzv. úhlu totálního odrazu. Totální odraz je jev, při kterém dochází k odrazu veškerého dopadajícího světla, pokud jsou splněny dvě podmínky:

1. Vlnění přechází z prostředí opticky hustšího do prostředí opticky řidšího, $n_1 > n_2$.
2. Úhel, který dopadající paprsek svírá s normálou je větší než tzv. *kritický úhel* θ_c

Úplného odrazu se v optice hojně využívá, zejména v optických kabelech, které by bez úplného odrazu nemohly fungovat. Výpočet kritického úhlu θ_c je založen na principu, že Snellův zákon by v některých případech vyžadoval, aby sinus úhlu lomu byl větší než 1, což samozřejmě není možné. V takových případech k lomu nedochází a místo toho dochází k úplnému odrazu na rozhraní. Pro výpočet kritického úhlu stačí spočítat hodnotu úhlu θ_1 ,

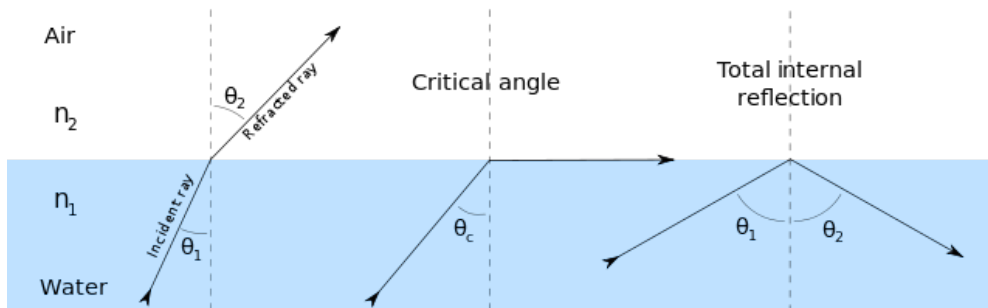


Obrázek 13: Přechod paprsku z opticky řidšího prostředí do opticky hustšího. Úhel lomu θ_2 lze vypočítat pomocí Snellova zákona.

pro kterou je úhel θ_2 roven 90° :

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1} \sin \theta_2\right) = \arcsin \frac{n_2}{n_1},$$

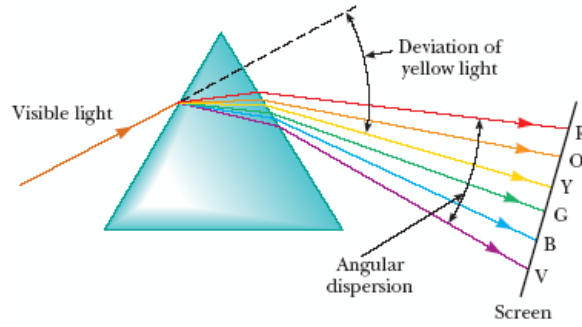
kde $\sin \theta_2 = \sin(90^\circ) = 1$. Kritický úhel vlastně odpovídá největšímu možnému úhlu dopadu, kdy ještě dojde k lomu světla, přičemž v tomto případě se lomený paprsek šíří na rozhraní obou prostředí. Obrázek 14 demonstuje tři možné situace, které mohou nastat.



Obrázek 14: Tři možné situace při přechodu světla z opticky hustšího do opticky řidšího prostředí.

S těmito znalostmi by již mělo být jasné, proč dochází k separaci barev bílého světla na hranolu a jak můžeme jednoduše určit úhel lomu jednotlivých barev. Obrázek 15 ilustruje tuto situaci a je vidět, že červené světlo s největší vlnovou délkou má nejvyšší úhel lomu (nejmenší úhel deviace). Naopak fialové světlo s nejmenší vlnovou délkou má nejmenší úhel lomu (největší úhel deviace). Jakým způsobem a jak moc se světlo bude lámat opět záleží na konkrétním materiálu a zda $n_1 > n_2$ nebo naopak. U běžných materiálů s *normální disperzí* jako je sklo, se index lomu snižuje se zvyšující se vlnovou délkou a úhel lomu se tím pádem zvyšuje. Pokud bychom měli hranol z materiálu s *anomální disperzí*, pak by bylo pořadí barev otočené.

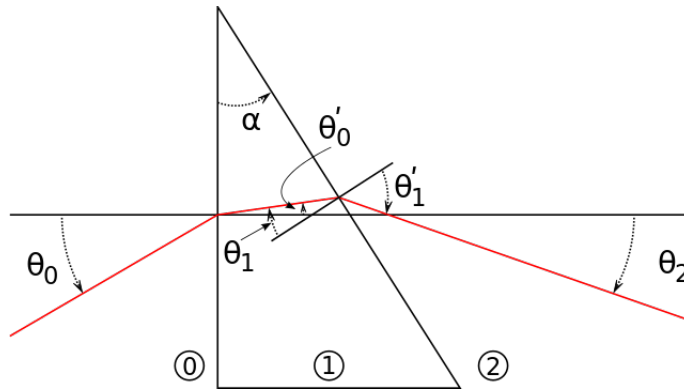
Často potřebujeme znát *úhel deviace* paprsku, případně *disperzní úhel*, což je úhel, který svírají paprsky s extrémními úhly deviace (minimální / maximální pro všechny obsažené vlnové délky v bílém světle), v našem případě červený a fialový paprsek na obrázku 15. Vzor pro úhel deviace lze odvodit na základě geometrických vlastností hranolu, trojúhelníku



Obrázek 15: Separace bílého světla pomocí hranolu; znázornění *úhlu deviace* a *disperzního úhlu*, který svírá paprsek červeného světla s paprskem fialového světla.

a čtyřúhelníku, viz [4][str. 331], kde je vzorec detailně odvozen. Výsledný vzorec pro úhel deviace δ vypadá následovně: $\delta = i + e - \alpha$, kde i je úhel dopadu paprsku vstupujícího do hranolu, e je úhel lomu paprsku opouštějícího hranol a α je vrcholový úhel hranolu.

Vrcholový úhel α i úhel dopadu i známe, ale neznáme úhel lomu e , který je potřeba vypočíst. Výpočet tohoto úhlu je založený na jednoduchém trasování paprsku a využití Snellova zákona. Obrázek 16 demonstruje průchod červeného paprsku hranolem a popisuje veškeré úhly, které jsou při výpočtu potřeba. V tomto případě platí $i = \theta_0$ a $e = \theta'_1$. Paprsek nejprve dopadá na první rozhraní pod úhlem θ_0 a dochází k refrakci. Úhel θ'_0



Obrázek 16: Refrakce paprsku při průchodu hranolem

lomeného paprsku proto spočteme následovně:

$$\theta'_0 = \arcsin\left(\frac{n_0}{n_1} \sin \theta_0\right),$$

kde n_0 je index lomu média nalevo od hranolu a n_1 je index lomu hranolu. Pomocí geometrie se dále můžeme dopracovat k následujícímu vzorci pro druhý úhel dopadu $\theta_1 = \alpha - \theta'_0$. Jakmile známe druhý úhel dopadu, můžeme opětovně aplikovat Snellův zákon a získat druhý úhel lomu:

$$\theta'_1 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1\right).$$

Výsledný úhel deviace δ je roven součtu úhlů θ_0 a θ_2 , kde $\theta_2 = \theta'_1 - \alpha$, což odpovídá obecnému vzorci $\delta = i + e - \alpha$. Pro získání finálního vzorce tedy stačí složit dohromady

odvozené rovnice, přičemž pro zjednodušení uvažujeme, že $n_0 = n_2$:

$$\delta = \theta_0 + \theta_2 = \theta_0 + \arcsin \left(\frac{n_1}{n_0} \sin \left[\alpha - \arcsin \left(\frac{n_0}{n_1} \sin \theta_0 \right) \right] \right) - \alpha$$

Důležité je uvědomit si, že indexy lomu použité v rovnicích jsou ve skutečnosti opět funkcemi vlnové délky a zde byly pouze pro lepší čitelnost zvoleny indexy lomu n_0 , n_1 a n_2 pro konkrétní vlnové délky. Konečně, pro určení *disperzního úhlu* pak stačí pouze odečíst od největšího dosaženého úhlu deviace nejmenší dosažený úhel deviace jak bylo zmíněno dříve, tedy $\Phi = \delta_{max} - \delta_{min}$. Na obrázku 15 se jedná o úhly deviace fialového a červeného paprsku, ale v obecném případě se jedná o maximální a minimální úhly, jelikož opět záleží na zvoleném materiálu, který může způsobovat anomální disperzi.

2.4 Využití disperze

Přestože jsou projevy disperze v mnoha situacích, jako například u optických vláken, nežádoucí a je nutné je různými způsoby zmírňovat či dokonce eliminovat, existuje mnoho aplikací, pro které jsou projevy disperze naopak klíčové.

Obecně se disperze využívá ve spektroskopii, což je studium interakce mezi hmotou a elektromagnetickým zářením [13]. Existují různé druhy spektroskopie, které se odvíjí například od toho, jaké části elektromagnetického spektra se při experimentech využívají. Velmi důležitá je potom tzv. infračervená (IR) spektroskopie, která je klíčová zejména pro studium látek v organické chemii. Velmi zjednodušeně se využívá toho, že molekuly absorbují určité frekvence v závislosti na tom, jaká je jejich struktura. Typický spektroskopický experiment poté spočívá v systematickém ozařování daného studovaného vzorku (látky) pomocí elektromagnetických vln s rozdílnými frekvencemi (souvisí s energií záření). Různé frekvence záření jsou poté hmotou různě ovlivněny a dochází k emisi světla. Toto světlo je poté zachycováno na detektoru, který produkuje tzv. emisní spektrum jež se dále studuje.

Součástí detektoru je poté buď spektrometr a nebo spektrograf, což jsou nástroje, které přímo využívají disperzního jevu pro separaci světla na jednotlivé složky o různých frekvencích, čímž produkují požadované spektrum. Dříve se pro tyto účely využívalo jednoduchých optických hranolů, které byly později nahrazeny tzv. difrakčními mřížkami.

Technika spektroskopie je velmi rozmanitá a má využití v mnoha dalších odvětvích jako například v biomedicině, či astronomii při studiu složení hvězd, přičemž na pozadí vždy v nějaké podobě figuruje disperzní jev. Dalo by se tedy říci, že spektroskopie obecně je jednou z hlavních aplikací disperzního jevu.

3 Demonstrační program

Součástí tohoto semestrálního projektu byla implementace programu, který vhodným způsobem interaktivně demonstruje disperzní jev a umožňuje uživateli experimentovat s různými parametry daného optického systému. Konkrétně byla implementována vizualizace chromatické disperze z pohledu paprskové optiky, jelikož se pravděpodobně jedná o nejznámější a nejvýraznější projev disperze světla v optice.

Jádrem projektu je implementace algoritmu sledování paprsku, který může procházet různými optickými hranoly s různými disperzními vlastnostmi. Uživatel může manipulovat s počátkem či orientací jednotlivých paprsků a nastavovat jejich vlnové délky. Dále je možné manipulovat s velikostí, pozicí a rotací optických hranolů a měnit body disperzní křivky materiálů hranolů i prostředí. Díky tomu lze nasimulovat jak normální, tak anomální disperzi,

vnější i vnitřní úplný odraz a obecně i chování, které běžné existující materiály nevykazují. Index lomu mezi jednotlivými body disperzní křivky je lineárně interpolován, což sice neodpovídá žádnému reálnému materiálu, nicméně pro účely demonstrace disperzního jevu je snad dostačující. K dispozici jsou ovšem na výběr i reálné materiály s přesnými (neinterpolovanými) disperzními křivkami, které byly převzaty ze stránky [RefractiveIndex.INFO](#).

Program je z důvodu jednoduché přenositelnosti implementován jako webová aplikace v jazyce *JavaScript* s využitím knihovny *PixiJS*, která slouží pro efektivní vykreslování na *HTML5* plátno s využitím *WebGL* API a grafické karty na pozadí. Demonstrační program lze tedy spustit pomocí libovolného internetového prohlížeče otevřením souboru *index.html*. Program byl částečně testován ve více prohlížečích, ale pro optimální fungování se doporučuje použití pokud možno nejnovější verze prohlížeče *Google Chrome*, pomocí kterého byl program vyvíjen a souběžně testován.

4 Závěr

V rámci této práce byl nejprve obecně představen disperzní jev a jeho nejčastější projevy v optice. Dále se text poměrně detailně zabývá problematikou disperzních médií a křivek, fázovou a grupovou rychlostí a jejich spojitostí s disperzí. Dále se text zabývá konkrétně chromatickou disperzí, Snellovým zákonem lomu a separací chromatického světla na optickém hranolu. Závěr práce je věnován krátkému přehledu praktických aplikací disperze v různých vědních oborech.

Literatura

- [1] Dočkal, M. *Fotonická krystalická vlákna* 2011. Vedoucí práce Jan Šporik. Dostupné z: <https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=39260>.
- [2] Lee, Y.-J. : Dispersive Medium, Phase Velocity, Group Velocity. online, MIT OpenCourseWare. Dostupné z: <<https://youtu.be/QxemLb8-5AA>>
- [3] Morin, D. : Dispersion. online. Dostupné z: <https://scholar.harvard.edu/files/david-morin/files/waves_dispersion.pdf>
- [4] NCERT : *Ray optics and optical instruments*. NCERT. Dostupné z: <<http://ncert.nic.in/NCERTS/l/leph201.pdf>>.
- [5] Rouča, T. *Limitující faktory optického vlákna na přenosovou kapacitu optických tras* 2010. Vedoucí práce Pavel Reichert. Dostupné z: <https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=30808>.
- [6] Wikibooks : Acoustics/Sound Speed. online, Červenec 2017. Dostupné z: <https://en.wikibooks.org/wiki/Acoustics/Sound_Speed>
- [7] Wikipedia : Chromatic aberration. online, Duben 2020. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/Chromatic_aberration>
- [8] Wikipedia : Dispersion relation. online, Duben 2020. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/Dispersion_relation>
- [9] Wikipedia : Group velocity. online, Duben 2020. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/Group_velocity>
- [10] Wikipedia : Negative-index metamaterial. online, Duben 2020. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/Negative-index_metamaterial>
- [11] Wikipedia : Refractive index. online, Duben 2020. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/Refractive_index>
- [12] Wikipedia : Snell's law. online, Duben 2020. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/Snell%27s_law>
- [13] Wikipedia : Spectroscopy. online, Duben 2020. Dostupné z: <<https://en.wikipedia.org/wiki/Spectroscopy>>
- [14] Wikipedia : Wave equation. online, Duben 2020. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/Wave_equation>

- [15] Young, A. T. : Dispersion. online, 2014. Dostupné z:
<<https://aty.sdsu.edu/explain/optics/disp.html>>