درست

1) الف) طبق خاصیت stationary increment توزیع $N(t+1)-N(1) \sim N(t)$ همان توزیع $N(t)$ است

✓ زیرا نقطه به طول بازه بستگی دارد و از طرفی توزیع $N(t)$ همان توزیع پواسون است

ب) نادرست

✗

$$x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$E[x_3(t)] = E[x_1(t)] + E[x_2(t)] = \eta_1 + \eta_2$$

$$E[x_3(t_1)x_3(t_2)] = E[(x_1(t_1)+x_2(t_1))(x_1(t_2)+x_2(t_2))] = E[x_1(t_1)x_1(t_2)] + E[x_2(t_1)x_2(t_2)]$$

$$+ E[x_1(t_1)x_2(t_2)] + E[x_2(t_1)x_1(t_2)] = R_{x_1}^{t_1-t_2}(\tau) + R_{x_2}(t_1-t_2) + E[x_1(t_1)x_2(t_2)] + E[x_2(t_1)x_1(t_2)]$$

✗ پس نیست

$$\frac{6}{9+w^2} \Leftrightarrow e^{-a|\tau|} \Rightarrow \frac{6\times 5}{6(9+w^2)} = \frac{5}{6}e^{-3|\tau|}$$

پ) ✓

$$\frac{1}{T}\int_0^T c(\tau)\,d\tau = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{5}{6}e^{-3|\tau|}d\tau = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{5}{6}e^{-3\tau}d\tau + \frac{1}{T}\int_{-T}^0 \frac{5}{6}e^{+3\tau}d\tau =$$

$$\frac{5}{6}\times\frac{1}{T}\times\frac{1}{-3}e^{-3\tau}\Big]_0^T + \frac{5}{6}\frac{1}{T}\times\frac{1}{3}e^{3\tau}\Big]_{-T}^0 = \frac{-5}{18T}(e^{-3T}-1) + \frac{5}{18T}(1-e^{-3T}) = \frac{5}{18T}(e^{-3T}-1) \Rightarrow$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{5}{18T}(e^{-3T}-1) = \lim_{T\to\infty}\frac{5}{18T}(-1) = 0$$

پس یک فرآیند mean ergodic حساب می‌شود

ب ۱

$$S_x(\omega)=\frac{1}{1-(\omega-2)^2}+\frac{1}{1+(\omega+2)^2}$$

$$F^{-1}\left\{\frac{1}{1-\omega^2}=\frac{1}{1+(j\omega)^2}\right\}=u(t)\sin(t)$$

$$F^{-1}\left\{\frac{1}{2}\frac{2}{1+\omega^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|t|}$$

$$R_x(t)=e^{j2t}u(t)\sin(t)+\frac{1}{2}e^{-j2t}e^{-|t|}$$

برابر نیست پس غلط است

برابر نیست زیرا

$$R(\theta=0)=0$$

$$R_x(0)=0+\frac{1}{2}(1)=\frac{1}{2}$$

2

$$\begin{cases} Y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-\tau}^{t} x(\tau)\, d\tau \xRightarrow{F} \frac{1}{T}\int_{t-\tau}^{t} \delta(t)\, d\tau = \frac{1}{T}\left(u(t-\tau) - u(t)\right) \\ R_{xx}(\tau) = \sigma_x^2\, \delta(\tau) \end{cases}$$

$$R_{YY}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h^*(-\tau) * h(\tau) = \sigma_x^2\, \delta(\tau) * \frac{1}{T}\left(u(\overset{-T-\tau}{\cancel{\quad}}) - u(-\tau)\right) * \frac{1}{T}\left(u(\overset{t-\tau}{\cancel{\quad}}) - u(\tau)\right)$$

٤ ~~فرض کنید~~ برای آنکه $A(t)$ ، $C_A(t)$ شرط زیر را دارد.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T C_A(\tau)\, d\tau = 0 \Rightarrow \lim \frac{1}{T}\int_0^T R_A(\tau)\, d\tau - \eta_A^2 = 0$$

الف)

$$K(t) = y A(t) \Rightarrow R_K(\tau) = E[yA(\tau)\, yA(t+\tau)] = E[y^2]\, R_A(\tau) = var(y)\, R_A(\tau)$$

$$\Rightarrow C_K(\tau) = var(y)\, R_A(\tau) - \eta_K^2$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T C_K(\tau)\, d\tau = \lim_{T\to\infty} \frac{var(y)}{T}\int_0^T R_A(\tau)\, d\tau - \frac{1}{T}\int_0^T \eta_K^2\, d\tau = \lim_{T\to\infty} \frac{var(y)}{T}\int_0^T R_A(\tau)\, d\tau - \eta_K^2$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{var(y)\,\eta_A^2}{T} - \eta_K^2 = -\eta_K^2 \neq 0$$

ب)

$$R_K(\tau) = \lim \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} K(t+\tau)K(\tau)\, d\tau = \lim \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} y^2 A(t+\tau)\, A(\tau)\, d\tau =$$

$$\lim \frac{y^2}{2T}\underbrace{\int_{-T}^{T} A(t+\tau)\, A(\tau)\, d\tau}_{\text{Autocorrelation ergodic}} = y^2\, R_A(\tau) \neq var(y)\, R_A(\tau)$$

چون مساوی نیستند پس نیست.

۳) الف

$$R_x(t_1,t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] = E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i \sin(\cdot) \times \sum_{j=1}^{n} a_j \sin(\cdot)\right] =$$

$$E\left[\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n} a_{k_1}a_{k_2}\frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi k_1}{n}t_1+\varphi_{k_1}-\frac{2\pi k_2}{n}t_2-\varphi_{k_2}\right)-\cos\left(\frac{2\pi k_1}{n}t_1+\varphi_{k_1}+\frac{2\pi k_2}{n}t_2+\varphi_{k_2}\right)\right]$$

$$=\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\frac{a_{k_1}a_{k_2}}{2}\left[E[\cos(\cdot)]-E[\cos(\cdot)]\right]=$$

$\cos(A+B)$

$$E\left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}(k_1t_1-k_2t_2)+\varphi_{k_1}-\varphi_{k_2}\right)\right]=E\left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}(k_1t_1-k_2t_2)\right)\cos(\varphi_{k_1}-\varphi_{k_2})-\sin\left(\frac{2\pi}{n}(k_1t_1-k_2t_2)\right)\sin(\varphi_{k_1}-\varphi_{k_2})\right]$$

$$=\underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{n}(k_1t_1-k_2t_2)\right)}_{\alpha_1}E[\cos(\varphi_1-\varphi_2)]-\underbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{n}(k_1t_1-k_2t_2)\right)}_{\alpha_2}E[\sin(\varphi_{k_1}-\varphi_{k_2})]$$

$$=\alpha_1 E[\cos(\varphi_1-\varphi_2)]-\alpha_2 E[\sin(\varphi_1-\varphi_2)]=0$$

$$E[\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)-\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)]=0$$

$$E[\cos(\varphi_1)]=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\varphi_1)\,d\varphi_1=\sin\pi-\sin(-\pi)=0$$

$$E[\sin(\varphi_1)]=\int_{-\pi}^{\pi}\sin\varphi_1\,d\varphi_1=-\cos\varphi_1\Big]_{-\pi}^{\pi}=0$$

به طور مشابه دومی نیز صفر می شود پس کلا

$$R_x(t_1,t_2)=0$$

ب)

$$E[x(t)]=\sum_{i=1}^{n}a_i E\left[\sin\left(\frac{2\pi i t}{n}+\varphi_i\right)\right]=$$

تمامی موارد صفر هستند

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\sin(K+\varphi_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i E[(\sin K\cos\varphi_i)]+E[\cos K\sin\varphi_i)]=0$$

پس WSS است.

س ب

$e^{-2t}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2+j\omega} = H(\omega)$

$S_{XY}(\omega) = S_{XX} H(\omega)$

$F\{R_{XX}(t)\} = 0$

$S_{XY}(\omega) = 0 \times \frac{1}{2+j\omega} = 0$

$S_{YY}(\omega) = S_{XX}(\omega) |H(\omega)|^2 = 0 \times \left(\frac{1}{2+j\omega}\right)^2$

۷ ب) ~~انتظار ابتدا را به شکل گاوسی می‌نویسیم~~

~~$\mathbb{E}[x_t] = E[x_t - x_0] = 0$~~

۷ ب)

$$\Sigma = \begin{pmatrix} w_{t_1} - w_{t_0} \\ \vdots \\ w_{t_n} - w_{t_{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ & & \cdots & & & & & \\ & & & & & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{t_0} \\ \vdots \\ w_{t_n} \end{pmatrix}$$

حال چون $[w_{t_0}, \ldots, w_{t_n}]$ یک گوسی جوینت است می‌توانیم بفهمیم Σ هم گوسی است

پس فقط کافی است نشان دهیم یک ترکیب خطی از Σ وجود دارد که ماتریس همان شود که به دست آمدن ماتریس با قطر پایین کار ساده‌ای است.

پس چون قانون جوینت گاوسی داریم پس متغیرها از هم مستقل هستند و ترکیب خطی آن‌ها نیز مستقل است.

۷ پ) خیر mean-ergodic نیست.

۷ الف) شرط الف جاهای تعریف مستقل بودن است و می‌توان اثبات کرد که با کرنل گوسی چون توزیع شرطی $x(t_2)|x(t_1)$ یک توزیع خوش‌تعریف می‌شود پس استقلال فرآیندهای $x(t_1), x(t_3) \,|\, x(t_2)$ قطعی است اثبات در صفحه بعد

۸ خب تعداد نقاط دایره ها

$\sim \text{Poisson}(\lambda S(R_i))$

مساحت دایره

$\boxed{p^{z}(r)\,\pi}$

الف

$$z(x,y) = z(x,y \mid k)\; P(r=k) = \frac{(\lambda S R_i)^{z} e^{-\lambda S R_i}}{z!} \quad p(r)$$

$$= \frac{(\lambda S R_i)^{z} e^{-\lambda S R_i}}{z!} \quad \delta(r)$$

حال چون:

$$\cancel{P(x(t)=-1) = P(x(0)=-1)\sum_{k=0}^{\infty} P(N(t)=2k) + P(x(0)=1)\sum_{k=0}^{\infty} P(N(t)=2k+1)}$$

تعداد تغییر زوج

$$P(x(t)=1) = P(x(0)=1)\sum_{k=0}^{\infty} P(N(t)=2k) + P(x(0)=-1)\sum_{k=0}^{\infty} P(N(t)=2k+1)$$

تعداد تغییر فرد

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} P(N(t)=2k) + \frac{1}{2} P(N(t)=2k+1) = P(x(t)=-1) \Rightarrow$$

$$\boxed{P(x(t)=1) = P(x(t)=-1)}$$

$$E[x(t)] = 1 \times P(x(t)=1) + (-1)\, P(x(t)=-1) = 0$$

$$R_x(t_1,t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] = E\left[\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2} P(N(t_1)=2k) + \frac{1}{2} P(N(t_1)=2k+1)\right]\left[\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{2} P(N(t_2)=2k + \frac{1}{2} P(N(t_2)=2k+1)\right]$$

$$\cancel{= \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} E[P(N(t_1)=2k_1)]\, E[N(t_2)=2k_2] + E[P(N(t_2)=k_2)\, P(N(t_2)=k_1)] + E}$$

$$\frac{1}{2} E\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} P(N(t_1)=k_1)\, P(N(t_2)=k_1) + P(N(t_1)=k_2)\, N(t_2=k_2)$$
$$+ P(N(t_2)=k_1)\, P(N(t_1)=k_2) + P(N(t_2)=k_2)\, P(N(t_2=k_1)$$

$$= \frac{1}{2} E\left[\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} P(N(t_1-t_2)=0) + P(N(t_1-t_2)=0\right.$$
$$+ P(N(t_1-t_2)=k_1-k_2) + P(N(t_1-t_2)=k_2-k_1)$$

همگی برحسب $t_1 - t_2$

۶ الف یعنی در بازه 0 تا 8 ، 0 اتفاق ~~[illegible]~~ نیفتد.

$\lambda = \frac{1}{8} \Rightarrow 8\lambda = 1$

$Poisson(N == 0) = e^{-1}$

ب ~~[illegible]~~ یعنی یا ۰ اتفاق یا ۱ اتفاق در این بازه داریم.

$\lambda = \frac{1}{8} \Rightarrow \lambda t = 16\lambda = 2$

$Poiss(N=0) + Poiss(N=1) = e^{-2} + \frac{e^{-2}\,2}{1!} = 3e^{-2}$

ج دو حالت داریم یا اینکه در بازه ۰ تا ۸ ، ۱ خودرو رد شود و در بازه ۸ تا ۱۶ ، ۱ خودرو رد شود

یا در بازه ۰ تا ۸ ، ۰ خودرو و در بازه ۸ تا ۱۶ ، ۲ خودرو.

$e^{-1} \times e^{-1} + e^{-1} \times \frac{e^{-1}(1)^2}{2!} = e^{-2} + \frac{1}{2}e^{-2} = \frac{3}{2}e^{-2}$