1

$$S_Y(\omega) = \frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}$$

الف

به ازای $\boxed{\omega = 2}$ ← $S_Y(2) = \frac{1-4}{1+4} = \frac{-3}{5}$

پس چون $S_Y(2) \leq 0$ این تابع نمی‌تواند یک تابع درست PSD باشد

نیازی به بررسی اولی نیست چون دومی اشتباه بود!

X

ب

$$S_\omega = \frac{2}{4+\omega^2} \Rightarrow R_x(\tau) = \frac{1}{2} e^{-2|\tau|}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-2|\tau|} d\tau = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} e^{2\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-2\tau} d\tau$$

$$= \left[\frac{1}{4} - 0\right] + \left[0 + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$

ج

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(\omega)}{4\pi^2} e^{-j\omega t} d\omega$$

$$Q(\omega)\,\delta(\omega - s) \xrightarrow{F^{-1}} \frac{1}{2\pi} \int Q(\omega)\,\delta(\omega - s)\, e^{-j\omega t} d\omega \overset{\omega = s}{=}$$

$$\frac{1}{2\pi} Q(s) e^{-jst} \Rightarrow \frac{1}{2\pi} Q(\omega - s)$$

X

الف 2

$$Cov(N(t_1), N(t_2)) = Cov\left(N(t_1), N(t_1) + [N(t_2) - N(t_1)]\right)$$

$$= Cov\{N(t_1), N(t_1)\} + \underbrace{Cov\{N(t_1), N(t_2) - N(t_1)\}}_{0 \text{ independent}} \qquad t_1 \leq t_2$$

$$= var\{N(t_1)\}$$

$$= t_1 \lambda$$

if $t_1 \geq t_2 \Rightarrow \lambda t_2 \Rightarrow \quad Cov(N(t_1), N(t_2)) = \lambda \min\{t_1, t_2\}$

$$\boxed{Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]}$$

۲ ب

$$E\left[\left[\tilde{N}(t_1,t_2)+\tilde{N}(t_2,t_3)\right]\times\left[\tilde{N}(t_2,t_3)+\tilde{N}(t_3,t_4)\right]\right]$$

$$=E\left[\tilde{N}(t_1,t_2)\tilde{N}(t_2,t_3)\right]+E\left[\tilde{N}(t_1,t_2)\tilde{N}(t_3,t_4)\right]$$

$$+E\left[\tilde{N}^2(t_2,t_3)\right]+E\left[\tilde{N}(t_2,t_3)\tilde{N}(t_3,t_4)\right]$$

$$=\lambda^2(t_2-t_1)(t_3-t_2)+\lambda^2(t_2-t_1)(t_4-t_3)$$

$$+\lambda(t_3-t_2)+\lambda^2(t_3-t_2)^2+\lambda^2(t_3-t_2)(t_4-t_3)$$

$$\cancel{=\lambda(t_3-t_2)(t_2-t_1+1+t_3-t_2+t_4-t_3)+\lambda^2(t_2-t_1)(t_4-t_3)}$$

$$\cancel{=\lambda^2(t_3-t_2)(t_4-t_1+1)+\lambda^2(t_2-t_1)(t_4-t_3)}$$

$$=\lambda(t_3-t_2)+\lambda^2(t_3-t_2)(\cancel{t_2}-t_1+\cancel{t_3}-\cancel{t_2}+t_4-\cancel{t_3})+\lambda^2(t_2-t_1)(t_4-t_3)$$

$$=\lambda(t_3-t_2)+\lambda^2(t_3-t_2)(t_4-t_1)+\lambda^2(t_2-t_1)(t_4-t_3)$$

ب ۲

$$P_{N(t),\,N(t+s)}(t,s) = \mathbb{P}\left[N(t)=n_1,\ N(t+s)=n_2\right] =$$

$$\mathbb{P}\left[N(t)=n_1,\ N(t)+N(s)=n_2\right] =$$

$$\mathbb{P}\left[N(t)=n_1,\ N(s)=n_2-n_1\right] =$$

$$\mathbb{P}\left[N(t)=n_1\right]\ \mathbb{P}\left[n(s)=n_2-n_1\right]$$

$$\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n_1}}{n_1!} \times \cancel{\frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^{n_2-n_1}}{(n_2-n_1)!}}\ \frac{e^{-\lambda s}(\lambda s)^{n_2-n_1}}{(n_2-n_1)!}$$

۲ ت

$$E\left[N(t)\left(N(t)+N(s)\right)\right] =$$

$$E\left[N^2(t)\right] + E\left[N(t)N(s)\right] =$$

$$\mathrm{Var}(N(t)) + E[N(t)]^2 + E[N(t)]\,E[N(s)]$$

$$= \lambda t + \lambda^2 t^2 + \lambda^2 t s$$

~~مستقل نیستند~~ ۲ ب

0–1	1–2	2–4
0	2	1
1	1	2
2	0	3

$$e^{-\lambda} \times \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!} \times e^{-2\lambda}(2\lambda)^1$$

$$+ e^{-\lambda}\lambda \times e^{-\lambda}\lambda \times \frac{e^{-2\lambda}(2\lambda)^2}{2!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!} \times e^{-\lambda} \times \frac{e^{-2\lambda}(2\lambda)^3}{3!}$$

$$= e^{-4\lambda}\lambda^3 + 2e^{-4\lambda}\lambda^4 + e^{-4\lambda}\lambda^5\,\frac{4}{3}$$

$$= e^{-4\lambda}\lambda^3\left(1 + 2\lambda + \frac{4}{3}\lambda^2\right)$$

۳

$\lambda_1 = 1$

$$X_2 \sim \lambda_1^2 t e^{-\lambda_1 t} = t e^{-t} = f_X(t)$$

$$Y_3 \sim \frac{\lambda_2^3 t^2 e^{-\lambda_2 t}}{2} = 4t^2 e^{-2t} = f_Y(t)$$

$$P(X_2 < Y_3) = \int_0^{\infty} \int_0^{t_2} f_X(t_1) f_Y(t_2)\, dt_1\, dt_2$$

$$= \int_0^{\infty} f_Y(t_2)\left[1-(t_2+1)e^{-t_2}\right] dt_2 = 11/27 \cong 0.4$$

4) به ازای $t=0$، $t=1$، $t=k$، این یک متغیر تصادفی نرمال است.

$x(0) = 0 \rightarrow N(0, 0)$

$x(1) = A \sim N(0, 1)$

$x(2) = 2A \sim N(0, 4)$

$x(3) = 3A \sim N(0, 9)$

چون تک تک متغیرها نرمال هستند و مستقل داریم نمی گوییم ~~[illegible]~~ توزیع joint اینها نیز نرمال است پس یک فرایند تصادفی گاوسی داریم.

$E[At] = tE[A] = 0$

$C_{xx}(t) = E[A t_1 \, A t_2] = t_1 t_2 E[A^2] = t_1 t_2$

۱,۹۱۴,۱۵۳,۸۱۳

جمع صفحه :

5 الف

$\cancel{\#}$ $s=0 \Rightarrow x_t = N(0, \sqrt{t})$

$Cov(x_s, x_t) = E[x_t x_s] = \frac{1}{4} E\left[(x_s+x_t)^2 - (x_s-x_t)^2\right] = *$

$x_s + x_t \sim N(0+0, \sqrt{s}+\sqrt{t}+2\,\overset{cov}{\cancel{E}}(x_s, x_t))$

$x_s - x_t \sim N(0, \sqrt{s-t})$

$* = \frac{1}{4}(\sqrt{s}+\sqrt{t}+2E[x_s, x_t]) + \frac{1}{4}(\sqrt{s-t})$

$\Rightarrow E[x_s x_t] = \frac{1}{4}\sqrt{s} + \frac{1}{4}\sqrt{t} + \frac{E[x_s x_t]}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{s-t}$

$\Rightarrow \frac{E[x_s x_t]}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{s} + \frac{1}{4}\sqrt{t} + \frac{1}{4}\sqrt{s-t}$

$\Rightarrow E[x_s x_t] = \frac{1}{2}(\sqrt{s}+\sqrt{t}+\sqrt{s-t})$

(ج) (ب) ← برای مشخص کردن توزیع $t_1, \dots, t_n$

یک بردار η و یک ماتریس کوواریانس نیاز داریم بردار η

به شکل زیر است

$$\eta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$\operatorname{cov}(x_i, x_j) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{s} + \sqrt{t} + \sqrt{s-t}\right)$$

پس یک توزیع نرمال با مشخصات بالا داریم.

۴

الف

$P(N(t) \geq n) = P($ از لحظه ۰ تا t حداقل n رویداد مشاهده شده باشد $)$

$= P($ رویداد n ام در لحظه قبل t اتفاق افتاده است $) =$

$= P(S_n \leq t)$

(۴) (ب)

می دانیم توزیع S_n $\quad f_{S_n}(t)=\dfrac{\lambda^n t^{n-1}\exp(-\lambda t)}{(n-1)!}$ است.

این توزیع را می توان از ~~[illegible]~~ خواص زیر بدست آورد ولی مناسب بالاتر

هم اثبات کرد

$$f_{S_1}(s_1)=\lambda e^{-\lambda s_1}=f_{X_1}(x_1)$$

$$f_{S_2|S_1}(s_2|s_1)=\lambda e^{-\lambda(s_2-s_1)}$$ زیرا از زمان ۰ (s_2 و s_1) در نظر گرفته می شود.

$$f_{S_3|S_2}(s_3|s_2)=\lambda e^{-\lambda(s_3-s_2)}$$

$\Downarrow$ الی

$$f_{S_n|S_{n-1}}(s_n|s_{n-1})=\lambda e^{-\lambda(s_n-s_{n-1})}$$

$\Downarrow$

$$f_{S_2}(s_2)=\lambda^2 s_2 \exp(-\lambda s_2)$$

$\vdots$

$$f_{S_n}(s_n)=\frac{\lambda^n t^{n-1}\exp(-\lambda t)}{(n-1)!}$$

۴) ب) ادامه) حال با اثبات استقراء ثابت می‌کنیم

$$f_{S_1, \dots S_n}(s_1, \dots s_n) = \lambda^n \exp(-\lambda s_n)$$

for $s_1 \Rightarrow f_{s_1} = \lambda \exp(-\lambda s_1)$ ✓

~~for s_{n+1}~~

for s_{n+1} : $f_{S_1 \dots S_{n+1}}(s_1 \dots s_{n+1}) = f_{S_{n+1}|S_1, \dots, S_n}(s_{n+1}|s_1 \dots s_n)\, f_{S_1 \dots S_n}(s_1 \dots s_n)$

$$= \lambda \exp(-\lambda(s_{n+1} - s_n))\, \lambda^n \exp(-\lambda s_n) = \lambda^{n+1} \exp(-\lambda s_{n+1})$$ ✓

حال قسمت ب اثبات شد

~~۴) ب) ۲~~

$$Pr(S_1, \dots S_{n-1} \mid S_n = t) = \frac{Pr(S_1, \dots, S_n = t)}{Pr(S_n = t)} =$$

$$\frac{Pr(S_n = t \mid S_1 \dots S_{n-1})\, P(S_1 \dots S_{n-1})}{P(S_n = t)} =$$

$$\frac{Pr(S_n = t \mid S_1 \dots S_{n-1})\, P(S_1 \dots S_{n-1})}{P(S_n = t)} = \frac{\lambda \exp(-\lambda(t - S_{n-1}))\, \lambda^{n-1} \exp(-S_{n-1})}{\frac{\lambda^n t^{n-1} \exp(-\lambda t)}{(n-1)!}}$$

$$= \frac{\exp(-\lambda t)(n-1)!}{t^{n-1} \exp(-\lambda t)} = \frac{(n-1)!}{t^{n-1}}$$

الف ii v

$T_1 \sim exp(\lambda_v)$

$T_2 \sim T_1 + exp(\lambda_u)$

$E[T_2|T_1] = E[T_2|T_1=t_1] = E[T_1+exp(\lambda_u)|T_1=t_1] =$

$t_1 + \frac{1}{\lambda_u}$

v ii الف

$f_{T_1}(t_1) = \lambda_u e^{-\lambda_u t_1}, \ t_1 \geq 0$

$V = T_1^2 \Rightarrow T_1 = \sqrt{v}, \quad f_V(v) = f_{T_1}(\sqrt{v}) \frac{1}{2\sqrt{v}} = \frac{\lambda_u}{2\sqrt{v}} exp(-\lambda_u \sqrt{v})$

$T_1' = \frac{1}{2\sqrt{v}}$

iii الف v

$f_{T_1,T_2}(t_1,t_2) = f_{T2|T1}(t2|t_1) f_{T_1}(t_1) =$

اثبات درسی ب

$\lambda_u e^{-\lambda_u(t_2-t_1)} \times \lambda_u e^{-\lambda_u t_1} = \lambda^2 e^{\lambda t_2}, \quad 0 < t_1 < t_2$

$$[0,2] \xrightarrow{U} 2\lambda u \qquad Z = U + V$$

$$[0,2] \xrightarrow{V} \lambda v$$

ب V

$$P(Z=z) = \sum_{z=-\infty}^{+\infty} P_{U,V}(u, z-u) = \sum_{z=-\infty}^{+\infty} P(U=u)\, P(V=z-u)$$

$$= \sum_{z=0}^{+\infty} \frac{e^{-2\lambda u} (2\lambda u)^{u}}{u!} \times \frac{e^{-\lambda v} (\lambda v)^{z-u}}{(z-u)!} = \frac{e^{-(2\lambda u + \lambda v)}}{z!} \sum_{z=0}^{\infty} \frac{(2\lambda u)^{u} (\lambda v)^{z-u} (z!)}{(u!)\,(z-u)!}$$

$$= \frac{e^{-(2\lambda u + \lambda v)}}{z!} \sum_{z=0}^{\infty} \binom{z}{u} (2\lambda u)^{u} (\lambda v)^{z-u} = \frac{e^{-(2\lambda u + \lambda v)} (2\lambda u + \lambda v)^{z}}{z!}$$

$$= \mathrm{Pois}(2\lambda u + \lambda v)$$