بسمه تعالی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

فرآیندهای تصادفی

نیم‌سال اول ۰۰-۰۱

دکتر ربیعی

تمرین پنجم | آزمون فرضیه، زنجیره‌ی مارکوف، مدل مارکوف پنهان | زمان تحویل: ۱۶ دی

۱. فردی پس از این چندین بار تلاش متوجه شد که نمی‌تواند با ورزش کردن وزن خودش را کم کند، بنابراین تصمیم گرفت تا طرز دیدش را تغییر دهد و به دنبال این بگردد که میانگین وزن در جامعه را به دست آورد تا شاید بتواند خودش را تسکین دهد.

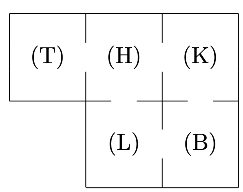
(آ) اگر او حالت میانگین بیشتر از ۸۶/۹ کیلوگرم را بعنوان فرضیه در نظر گرفته باشد، H_0 و H_1 هرکدام چه خواهند بود؟ این تست آماری از نوع one-sided است؟

(ب) اگر در یک نمونه‌ی ۳۰۰۰۰۰ تایی از جامعه میانگین ۸۷/۰ کیلوگرم و واریانس ۱۵/۰ به دست آمده باشد. با اجرای تست t توضیح دهید که چه نتیجه‌ای از این آزمایش می‌توان گرفت؟ p-value در این آزمایش چقدر و به چه معناست؟ $\alpha = ۰/۰۵$

۲. برای نمونه‌های تصادفی $x_1, ... x_n$ از پارامتر توزیع برنولی $Bernoulli(p)$ فرض صفر $H_0 : p = ۰/۴۹$ در مقابل $H_1 : p = ۰/۵۱$ لحاظ شده. با استفاده از قضیه‌ی حد مرکزی [1] تعداد تقریبی نمونه‌ها برای این که احتمال هر دو خطای نوع یک و دو کمتر از یک درصد بشود را به دست آورید.

۳. دو نوع داروی X و Y به دو گروه مختلف از مراجعان به بیمارستانی تجویز شده. پس از گذشت مدتی، وزن پنج نفر حاضر در گروه اول به ترتیب ۶۰, ۴۲, ۴۱, ۳۹, ۳۸ بوده و هفت نفر حاضر در گروه دوم هم دارای وزن‌های ۶۹, ۶۸, ۶۴, ۶۲, ۵۶, ۴۲, ۳۸ هستند. آیا می‌توان نتیجه گرفت که این دو دارو اثر متفاوتی روی وزن افراد می‌گذارد؟ این فرضیه را بیازمایید.

۴. یک موش در یک خانه زندگی می‌کند در هر مرحله‌ی زمانی $n = ۱, ۲, ...$ تصمیم می‌گیرد تا به یکی از اتاق‌های مجاور اتاق فعلی اش برود. در دو اتاق K و B تله‌هایی کار گذاشته شده که اگر موش به آنجا وارد شود در آن‌ها گیر می‌افتد و دیگر جابجا نمی‌شود.



شکل ۱: نقشه‌ی خانه‌ای که موش در آن زندگی می‌کند.

(آ) اگر اتاقی که موش در آن در لحظه‌ی n حاضر است را با X_n نشان بدهیم، حالات مختلف، گراف و ماتریس absorption زنجیره‌ی مارکوف $X = (X_n, n \in N)$ را بنویسید.

(ب) اگر از اتاق L یک راه فرار به خارج از ساختمان به وجود آمده که در آن صورت موش دیگر به درون خانه بر نمی‌گردد (و طبیعتا درون تله‌ای هم گیر نمی‌افتد). احتمال این‌که موش بتواند قبل از در تله افتادن از خانه فرار کند چقدر است؟

(ج) اگر راه فرار موش به خارج از خانه بسته شده و تمامی تله‌ها هم برداشته شوند و موش هر ساعت یک بار به اتاق‌های مجاورش جابجا شود، در درازمدت چه مدت زمانی را در هرکدام از اتاق‌های خانه سپری خواهد کرد؟

[1] central limit theorem

۵. ماتریس پنج در پنج جابجایی زیر را در نظر بگیرید که در آن هر المان (i, j) نشانگر احتمال جابجایی از حالت i به j در هر زمانی است و هرکدام از i و j مقادیر ۰ تا ۴ را می‌توانند به خود بگیرند.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ p & ۰ & q & ۰ & ۰ \\ ۰ & p & ۰ & q & ۰ \\ ۰ & ۰ & p & ۰ & q \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

(آ) اگر امید ریاضی زمانی رسیدن به حالات نهایی ۰ یا ۴ با شروع از حالت n را $f(n)$ بنامیم. ثابت کنید که $f(n)$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$f(n) = \begin{cases} n(۴ - n) & p = \frac{۱}{۲} \\ \frac{n}{q-p} - \frac{۴}{q-p}\frac{۱-(\frac{q}{p})^n}{۱-(\frac{q}{p})^۴} & o.w. \end{cases}$$

۶. ماتریس انتقال $P = (p_{ij})_{i,j=۱}^{K}$ با فضای حالت محدود $S = ۱, ..., K$ را تصادفی-دوگانه [2] می‌گوییم اگر برای همه‌ی $j = ۱, ..., K$ ، $\sum_{i=۱}^{K} P_{ij} = ۱$ باشد. ثابت کنید که حالت ایستای چنین ماتریس انتقالی یک توزیع یکنواخت خواهد داشت.

۷. HMM داده شده زیر را در نظر بگیرید.

Probability	State
۹۹.۰	A
۰۱.۰	B

جدول ۱: احتمالات حالت اولیه

$P(S_۲ \vert S_۱)$	$S_۲$	$S_۱$
۰/۹۹	A	A
۰/۰۱	B	A
۰/۰۱	A	B
۰/۹۹	B	B

جدول ۲: احتمالات انتقال

$P(O \vert S)$	O	S
۰/۸	۰	A
۰/۲	۱	A
۰/۱	۰	B
۰/۹	۱	B

جدول ۳: احتمالات انتقال

[2] doubly stochastic

(آ) اگر k حالت مختلف وجود داشته و مجموعا m بار بتوانیم مشاهده روی تمام حالات انجام بدهیم، چه تعداد پارامتر برای نشان دادن چنین مدلی نیاز داریم؟

(ب) با استفاده از الگوریتم رو به جلو [۳] و جدول‌های داده شده احتمال وقوع توالی وقایع ۰ ,۱ ,۰ را به دست آورید.

(ج) این بار با استفاده از الگوریتم رو به عقب [۴] احتمال وقایع قسمت قبل را محاسبه کنید. پاسخ را با پاسخ قسمت قبل مقایسه کرده و آن را توجیه کنید.

(د) با استفاده از الگوریتم viterbi محتمل‌ترین توالی حالات پیش آمده را به دست آورید.

[۳] forward
[۴] backward