بسمه تعالی

فرآیندهای تصادفی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

نیم‌سال اول ۰۱-۰۰
دکتر ربیعی

تمرین سوم | Power Spectrum, Point Process, Poisson Process, Gaussian Process | زمان تحویل: ۹ آذر

۱. درست یا نادرست بودن عبارات زیر را با ذکر دلیل بیان کنید.

آ) $S_X(\omega) = e^{-|\omega|}|sin(\omega)|$ و $S_Y(\omega) = \frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}$ PSD[1]هایی معتبر برای فرایندهای X و Y است.
(این دو فرایند WSS هستند)

ب) تابع اتوکوواریانس یک فرآیند WSS با $S(\omega) = \frac{2}{4+\omega^4}$ در نامساوی $\int_{-\infty}^{+\infty} R_X(u)du \leq \frac{\pi}{2}$ صدق می‌کند.

پ) عکس تبدیل فوریه‌ی یک نویز سفید[2] با میانگین صفر و اتوکوواریانس $Q(t)\delta(t-s)$ دارای طیف توان[3] $\frac{Q(\omega)}{4\pi^2}$ است.

جواب:

آ) نادرست.

چون زمانی PSD است که به ازای هر ω مقدار $S(\omega)$ بزرگتر از صفر و مقداری حقیقی باشد اما برای $S_Y(\omega)$ صدق نمی‌کند.

ب) درست است. چون $S(0) = \frac{2}{4} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(u)du \leq \frac{\pi}{2}$

پ) نادرست.

عکس تبدیل فوریه را x می‌نامیم. حال داریم:

$$
\begin{aligned}
R(v_1, v_2) &= E[\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(s)e^{jtv_1}e^{-jsv_2}dtds] \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E[x(t)x^*(s)]e^{jtv_1}e^{-jsv_2}dtds \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)\delta(t-s)e^{jtv_1}e^{-jsv_2}dtds \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Q(t)e^{jt(v_1-v_2)}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(t)}{2\pi}e^{jt(v_1-v_2)}dt
\end{aligned}
$$

با توجه به تعریف power spectrum نتیجه میگیریم که برابر با $\frac{Q(t)}{2\pi}$ است.

[1] power spectral density
[2] white noise
[3] power spectrum

۲. اگر $N(t), t \in [0, \infty)$ یک فرایند پواسون با نرخ λ باشد.

آ) تابع کوواریانس $N(t)$ را محاسبه کنید. $(Cov(N(t_1), N(t_2)))$

ب) اگر $\tilde{N}(t, \tau)$ تعداد رخدادها در بازه‌ی $[t, \tau)$ باشد. $E[\tilde{N}(t_1, t_3).\tilde{N}(t_2, t_4)]$ را محاسبه کنید $(t_1 < t_2 < t_3 < t_4)$.

پ) تابع جرم احتمال توام[4] $N(t)$ و $N(t+s)$ را محاسبه کنید. $(s > 0)$

ت) $E[N(t)N(t+s)]$ ، $s > 0$

ث) احتمال وقوع دو رخداد[5] در بازه‌ی $[0, 2)$ و سه رخداد در $[1, 4)$ را محاسبه کنید.

جواب:

آ) فرض کنیم $t_1 \geq t_2 \geq 0$. و با خاصیت independent increment در فرایندهای پواسون برای دو متغیر تصادفی $N(t_1) - N(t_2)$ و $N(t_2)$ داریم:

$$
\begin{aligned}
C(t_1, t_2) = Cov(N(t_1), N(t_2)) &= Cov(N(t_1)N(t_2) + N(t_2), N(t_2)) \\
&= Cov(N(t_1)N(t_2), N(t_2)) + Cov(N(t_2), N(t_2)) \\
&= Cov(N(t_2), N(t_2)) = Var(N(t_2)) \\
&= t_2
\end{aligned}
$$

برای حالت $t_2 \geq t_1 \geq 0$ داریم $C(t_1, t_2) = t_1$ در نتیجه

$C(t_1, t_2) = min(t_1, t_2), for t_1, t_2 \in [0, \infty)$

ب)

$$
\begin{aligned}
E[\tilde{N}(t_1, t_3)\tilde{N}(t_2, t_4)] &= E[\tilde{N}(t_1, t_2)\tilde{N}(t_2, t_4)] + E[\tilde{N}(t_2, t_3)N(\tilde{t_2}, t_3)] + E[\tilde{N}(t_2, t_3)\tilde{N}(t_3, t_4)] \\
&= \lambda^2(t_2 - t_1)(t_4 - t_2) + \lambda^2(t_3 - t_2)^2 + \lambda(t_3 - t_2) + \lambda^2(t_3 - t_2)(t_4 - t_3) \\
&= \lambda^2(t_3 - t_1)(t_4 - t_2) + \lambda(t_3 - t_2)
\end{aligned}
$$

پ)

$$
\begin{aligned}
P_{N(t)N(t+s)}(n, m) = PrN(t) = nPr\tilde{N}(t, t+s) = m - n \\
= \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}\frac{(\lambda s)^{m-n} e^{-\lambda s}}{(m-n)!}
\end{aligned}
$$

ت)

$$
\begin{aligned}
N(t+s) = N(t) + \tilde{N}(t, t+s) \\
E[N(t)N(t+s)] = E[N^2(t)] + E[N(t)\tilde{N}(t, t+s)] \\
= E[N^2(t)] + E[N(t)]E[N(s)] = \lambda t + \lambda^2 t^2 + \lambda t \lambda s
\end{aligned}
$$

ث)

[4] joint probability mass funciton

[5] arrival

با توجه به اینکه بازه‌ها از هم مجزا نیستند در نتیجه نمیتوان احتمالات مربوط به هر بازه را در بازه‌ی دیگر ضرب کرد. برای حل این مشکل بازه‌ها را به این سه بازه تقسیم میکنیم. $(0,1], (1,2], (2,4]$ که به ترتیب X,Y,Z رخدادهای مربوط به این بازه‌ها هستند. در نتیجه میتوان هر کدام از آن‌ها را یک فرایند پواسون دانست. $X \sim Poisson(\lambda)$ ، $Y \sim Poisson(\lambda)$ و $Z \sim Poisson(2\lambda)$ پس داریم:

$$\begin{aligned}
P(X+Y=2, Y+Z=3) &= \sum_{k=0} P(X+Y=2, Y+Z=3|Y=k)P(Y=k) \\
&= P(X=2, Z=3|Y=0)P(Y=0) + P(X=1, Z=2|Y=1) \\
&\quad P(Y=1) + P(X=0, Z=1|Y=2)P(Y=2) \\
&= P(X=2, Z=3)P(Y=0) + P(X=1, Z=2)P(Y=1) + P(X=0, Z=1)P(Y=2) \\
&= P(X=2)P(Z=3)P(Y=0) + P(X=1)P(Z=2)P(Y=1) + P(X=0)P(Z=1)P(Y=2) \\
&= \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2}\frac{e^{-2\lambda}2\lambda^3}{6}e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda}\frac{e^{-2\lambda}2\lambda^2}{2}\lambda e^{-\lambda} + e^{-\lambda}2\lambda e^{-2\lambda}\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2}
\end{aligned}$$

۳. اگر X و Y دو فرآیند تصادفی پواسون مستقل با نرخ‌های $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 2$ باشند. احتمال اینکه دومین رخداد در X قبل از سومین رخداد در Y اتفاق بیافتد را بیابید.

جواب:

یک فرایند پواسون با نرخ $\lambda = 1 + 2 = 3$ در نظر میگیریم. که به دو فرایند با نرخ‌های ۱ و ۲ تقسیم میکنیم. برای هر رخداد یک سکه پرتاب میکنیم که با احتمال $\frac{1}{3}$ رو می‌اید. در صورت آمدن رو رخداد را به الین فرایند می‌دهیم در غیر اینصورت به دومین فرایند فرستاده می‌شود. در نتیجه $\lambda p = 1$ و $\lambda(1-p) = 2$ نرخ‌های فرایند اول و دوم هستند. پس میتوانیم بگوییم خواسته‌ی مساله همان احتمال دیدن حداقل دو رو در چهار بار انداختن سکه است:

$$\sum_{k=2}^{4} = \binom{4}{k}(\frac{1}{3})^k(\frac{2}{3})^{4-k}$$

۴. اگر برای فرایند $X(t)$ داشته باشیم: $X(t) = At, t \in R, A \sim N(0,1)$

آ) نشان دهید که $X(t)$ یک فرایند گاوسی است.

ب) مقدار امید ریاضی و اتو کوواریانس این فرایند را به دست آورید.

جواب:

آ)

با توجه به تعریف و خواص فرایند گاووسی و تعریف jointly gaussian random vector و $A \sim N(0,1)$ بنابراین مجموعه متغیرهای $X(t_i) i = 1, ..., k$ که $X(t_i) = t_i A$ مشترکا گاووسی هستند بنابرایت فرایند $\{X(t); t \in R\}$ یک فرایند نرمال است.

ب)

$$\mu(t) = E[X(t)] = E[tA] = 0$$
$$Cov(X(t_1), X(t_2)) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[t_1 A t_2 A] = t_1 t_2 var(A) = t_1 t_2$$

۵. اگر یک فرایند گاووسی به صورت $(G_t)_{t\in[۰,\infty)}$ داشته باشیم و این فرایند خصوصیات زیر را داشته باشد

۱) با احتمال یک $X_. = ۰$ است.

۲) $۰ \leq s \leq t$ ، $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(۰, \sqrt{t-s})$

با توجه به این خصوصیات‌ها به سوالات زیر پاسخ دهید.

آ) مقدار $cov(X_s, X_t), ۰ \leq s \leq t$ را محاسبه کنید.

ب) توزیع $(X_{t_۱}, X_{t_۲}, ..., X_{t_n})$ را مشخص کنید. $۰ \leq t_۱ \leq t_۲ \leq ... \leq t_n$

جواب: آ) از آنجایی که با حتمال ۱ $X_. = ۰$ است. می‌توانیم بنویسیم.

$$
\begin{aligned}
&۰ \leq s \leq t, X_t - X_s \sim \mathcal{N}(۰, \sqrt{t-s}) \\
&X_t = X_t - ۰ = X_t - X_t - X_. \sim \mathcal{N}(۰, \sqrt{t}) \\
&\mathbb{E}X_t^۲ = \sqrt{t} \\
&\mathbb{E}(X_t - X_s)^۲ = \mathbb{E}_t^۲ - ۲cov(X_t, X_s) + \mathbb{E}X_s^۲ \\
cov(X_t, X_s) = &\frac{۱}{۲}(\mathbb{E}X_t^۲ + \mathbb{E}_s^۲ - \mathbb{E}(X_t - X_s)^۲) = \frac{۱}{۲}(\sqrt{t} + \sqrt{s} - \sqrt{t-s})
\end{aligned}
$$

در نتیجه برای $۰ < t_۱ < t_۲ < ... < t_n$ بردار $(X_{t_۱}, ..., X_{t_n})$ با توجه به گوسی بودن فرایند X دارای توزیع نرمال چند متغیره با میانگین و واریانس زیر است.

$$
\begin{aligned}
&m = (۰, ۰, ..., ۰) \\
\Sigma = (&\frac{۱}{۲}(\sqrt{t_i} + \sqrt{t_j} - \sqrt{|t_i - t_j|}))_{i,j=۱,۲,۳,...,n}
\end{aligned}
$$

۶. فرایند تصادفی ورود را دنباله ای از متغیرهای تصادفی صعودی به صورت $۰ < S_۱ < S_۲ < ... < S_n$ تعریف میکنیم که هر S_i زمان وقوع رخداد i ام است. این فرایند را میتوان به دو شیوه دیگر نمایش داد: ۱ـ دنباله متغیرهای تصادفی X_i که فاصله زمانی میان رخداد i و $i-۱$ است ۲ـ متغیر $N(t)$ که برابر تعداد رخدادها در در بازه زمانی $[۰, t]$ است.

الف) نشان دهید که $P(S_n \leq t) = P(N(t) \geq n)$

ب) فرض کنید $X_۱, X_۲, ...$ متغیرهای تصادفی iid با تابع چگالی $f_X(x) = \lambda exp(-\lambda x)$ هستند و برای $n \geq ۱$ داریم $S_n = X_۱ + X_۲ + ... + X_n$. نشان دهید که برای $۰ < s_۱ < s_۲ < .. < s_n$ داریم:

$$f_{S_۱,S_۲,...,S_n}(s_۱, s_۲, ..., s_n) = \lambda^n exp(-\lambda s_n)$$

پ) برای یک فرایند پواسون با نرخ λ مقدار $Pr(S_۱, S_۲, ..., S_{n-۱}|S_n = t)$ را به دست آورید.

جواب :

آ) با توجه به تعاریف این قسمت را به وضوح می‌توان دید.

ب) با استقرا پیش می‌رویم.

$$
\begin{aligned}
&f_{S_۱,S_۲,...,S_{n+۱}}(s_۱, s_۲, ..., s_{n+۱}) \\
= f_{S_۱,S_۲,...,S_n}&(s_۱, s_۲, ..., s_n) f_{S_{n+۱}|S_۱,S_۲,...,S_n}(s_{n+۱}|s_۱, s_۲, ..., s_n) \\
&= \lambda^n e^{-\lambda s_n} f_{S_{n+۱}|S_۱,S_۲,...,S_n}(s_{n+۱}|s_۱, s_۲, ..., s_n) \\
&S_{n+۱} = S_n + X_{n+۱} \\
&X_{n+۱}\ is\ indep.\ of\ S_۱, ..., S_n \\
f_{S_{n+۱}|S_۱,S_۲,...,S_n}&(s_{n+۱}|s_۱, s_۲, ..., s_n) = \lambda e^(-\lambda s_{n+۱} - s_n)
\end{aligned}
$$

پ)

$$Pr(S_1, S_2, ..., S_{n-1}|S_n = t) = \frac{Pr(S_1, S_2, ..., S_{n-1}, S_n = t)}{Pr(S_n = t)} = \frac{\lambda^n e^{(-\lambda S_n)}}{\frac{e^{(-\lambda t)}(\lambda t)^n}{n!}} = \frac{n!}{t^n}$$

۷. دو پستچی U و V در اداره‌ی پست در زمان‌های صفر و یک حاضر می‌شوند. زمان تحویل بسته‌های هر یک از دو پستچی یک فرایند پواسون(مستقل) با نرخ‌های λ_U و λ_V است.

آ) اگر T_1 و T_2 زمان‌هایی باشند که پستچی U بسته‌های اول و دوم را تحویل داده است.

i) امیدریاضی شرطی $E[T_2|T_1]$ را محاسبه کنید.

ii) تابع توزیع چگالی[۶] T_1^2 را بدست بیاورید.

iii) تابع توزیع چگالی توام[۷] T_1 و T_2 را بدست آورید.

ب) تابع جرم احتمال تعداد کل بسته‌های تحویل داده شده توسط هر دو پستچی در بازه‌ی $[0, 2]$ را بدست بیاورید.

جواب:

آ)

$$T_2 = T_1 + T$$

$$E[T_2|T_1] = E[T_1 + T|T_1] = T_1 + E[T] = T_1 + \frac{1}{\lambda_U}$$

$$Z = T_1^2$$

$$F_Z(z) = P(T_1^2 \leq z) = P(-\sqrt{z} \leq T_1 \leq \sqrt{z}) = \begin{cases} 1 - exp(-\lambda_U \sqrt{z}) & z \geq 0 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} \frac{\lambda_U}{2\sqrt{z}} exp(-\lambda_U \sqrt{z}) & z \geq 0 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

$$f_{T_1,T_2}(t_1, t_2) = f_{T_1}(t_1) f_{T_2|T_1}(t_2|t_1) = f_{T_1}(t_1) f_T(t_2 - t_1) = \lambda_U e^{-\lambda_U t_1} \lambda_U e^{-\lambda_U (t_2 - t_1)} t_2 \geq t_1 \geq 0$$

ب)

اگر K را تعداد همه‌ی بسته‌های تحویل داده شده در نظر بگیریم. و K_1 تعداد همه‌ی بسته‌های تحویلی در بازه‌ی $[0, 1)$ و K_2 مربوط به بازه‌ی $[1, 2]$ باشد. در نتیجه $K_1 \sim Poisson(\lambda_U)$ و $K_2 \sim \lambda_U + \lambda_V$ است و چون جمع دو فرایند پواسون یک فرایند پواسون است در نتیجه $K \sim Poisson(2\lambda_U + \lambda_V)$ است. پس:

$$p_K(k) = \frac{(2\lambda_U + \lambda_V)^k e^{-(2\lambda_U + \lambda_V)}}{k!}$$

[۶] PDF
[۷] joint PDF