(١) (الف) بله one-sided است.

$H_0: \mu \leq 86.9$

$H_1: \mu > 86.9$

$$t\text{-value} = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{87-86.9}{\sqrt{15}/\sqrt{300{,}000}} = \frac{0.1 \times 100}{\sqrt{\frac{15}{30}}} = 14.14$$

$$P\text{-value} = P(t \geq 14.14) < 0.00001$$

$\boxed{\text{نتایج significant است}}$

(٣)

از t-test با unpooled variances استفاده می‌کنیم

زیرا واریانس‌ها برابر نیستند

$\bar{x}_1 = \cancel{42}$ $S_1^2 = 82.5$ $S_1 = 9.08$ $n_1 = 5$

$\bar{x}_2 = 57$ $S_2^2 = 154$ $S_2 = 12.42$ $n_2 = 7$

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

$$t^* = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{44-57}{\sqrt{\frac{82.5}{5} + \frac{154}{7}}} = -2.09$$

$$\text{Degrees of freedom} = \frac{(n_1-1)(n_2-1)}{(n_2-1)C^2 + (n_1-1)(1-C)^2} = 9.49 \simeq 10$$

$$C = \frac{\frac{S_1^2}{n_1}}{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} = 0.28$$

DF = 10

t-test = −2.09

two tailed

$\Rightarrow$ p-value = 0.06

$\alpha = .05 \rightarrow$ not significant

$\alpha = 0.10 \rightarrow$ significant

تست آماری سوال ۱

تغییر داده شد به z-test

Z-test

$\bar{x} = 87$

$S = 15$

$\alpha = 0.05$

$\xrightarrow[\text{one-tailed}]{}$ p-value $= 0.49$

$$Z\text{-test} = \frac{87 - 86.9}{\sqrt{15}\,\cancel{/300{,}000}} = 0.02$$

بنابراین نتایج significant نیست

جواب نهایی این است

سوال ۳ — این سوال با دو روش حل می‌شود: روش قبلی مربوط به قبل پاسخ TA در Quera است که فرض کردیم واریانس ها برابر نیستند اما اینجا فرض می‌کنیم واریانس ها برابرند.

$$\begin{cases} H_0 = \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \end{cases}$$

$\bar{x}_1 = 44 \quad s_1^2 = 82.5 \quad s = 9.08 \quad n_1 = 5$

$\bar{x}_2 = 57 \quad s_2^2 = 154 \quad s = 12.42 \quad n_2 = 7$

$s_1 \overset{\text{تقریبا}}{\approx} s_2$ Degree of freedom $= n_1 + n_2 - 2 = 10$

$$\hat{\sigma}^2 = s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = 149/05 \Rightarrow s_p = 12/20$$

$$T = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 0}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = -1/81 \Rightarrow \text{نامساوی } T > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(10)$$

p-value is 0.100402

بنابراین نتایج تست significant نیست و میانگین دو گروه تفاوت ندارد (با احتمال زیاد) و دارو تاثیر خاصی ندارد

جواب نهایی این است

type I error $\Rightarrow$ P(null is rejected when true) = α

type II error $\rightarrow$ P(null is accepted when false) = β

Bernouli $\Rightarrow$ $\begin{cases} \bar{x} = np \\ var = p(1-p) \end{cases}$ $\quad P_0 = 0/49 \quad P_1 = 0.51 \quad \Rightarrow \quad Z = \dfrac{x - nP_0}{\sqrt{nP_0(1-P_0)}}$

$$P(x < k \mid H_0) \leq \alpha \Rightarrow P\left(Z < \frac{k - nP_0}{\sqrt{nP_0(1-P_0)}}\right) \leq 0.01$$

$$\Rightarrow \frac{k - n(0/49)}{\sqrt{n(0/49)(0.51)}} \leq -2/325$$

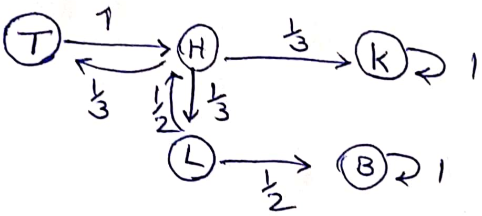
$$P(x > k \mid H_1) \leq \beta \Rightarrow P\left(Z > \frac{k - 0.51n}{\sqrt{n(0/49)(.51)}}\right) \leq 0.01$$

$$\Rightarrow \frac{k - 0.51n}{\sqrt{n(0/49)(0.51)}} \geq 2/325$$

$n \geq 13500$ (جواب تقریبی) حل در متلب انجام

۴

الف

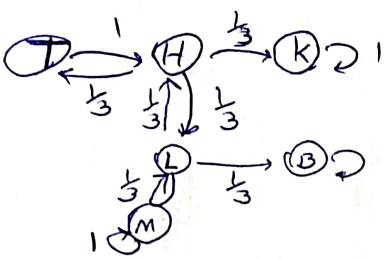


$$\begin{array}{c|ccccc} & K & B & T & H & L \\ \hline K & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ T & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ H & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ L & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A & B \end{bmatrix}$$

$$F = \text{Fundamental Matrix} = (I-B)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$FA = \begin{array}{c|cc} & K & B \\ \hline T & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ H & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ L & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}$$

ب



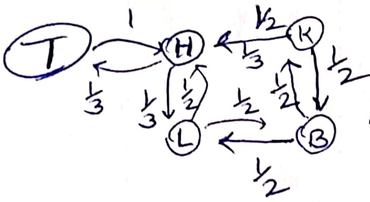
$$\begin{array}{c|cccccc} & K & B & M & T & H & L \\ \hline K & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ T & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ H & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ L & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}$$

$$F = (I-B)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 8 & 9 & 3 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$FA = \begin{array}{c|ccc} & K & B & M \\ \hline T & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ H & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ L & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{array}$$

احتمال مورد نظر $\frac{1}{5}$ است.

ج



$$P = \begin{array}{c|ccccc} & T & H & L & K & B \\ \hline T & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ H & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ L & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ K & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ B & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \rightarrow$$

$$\pi P = \pi \Rightarrow \begin{cases} \pi_T + \pi_H + \pi_L + \pi_K + \pi_B = 1 \\ 1-\ \pi_T = \pi_H \\ 2-\ \pi_H = \frac{1}{3}\pi_T + \frac{1}{3}\pi_L + \frac{1}{3}\pi_K \\ 3-\ \pi_L = \frac{1}{2}\pi_H + \frac{1}{2}\pi_B \\ 4-\ \pi_K = \frac{1}{2}\pi_H + \frac{1}{2}\pi_B \\ 5-\ \pi_B = \frac{1}{2}\pi_L + \frac{1}{2}\pi_K \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overset{3,4}{} \pi_L + \pi_K = \pi_H + \pi_B$$

$$\overset{4}{} \pi_L + \pi_K = 2\pi_K$$

$$\pi_L = \pi_K \overset{5}{\Rightarrow} \pi_B = \pi_L = \pi_K \overset{2}{\Rightarrow} \pi_B = \pi_L = \pi_K = \pi_H = \pi_T$$

$$\pi_B + \pi_L + \pi_K + \pi_H + \pi_T = 1 \Rightarrow \pi = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

(5) اگر $q = p = \frac{1}{2}$ باشد داریم: (البته می‌دانیم m_{iA} زمان مورد انتظار برای رسیدن از state i به یکی از state های A است)

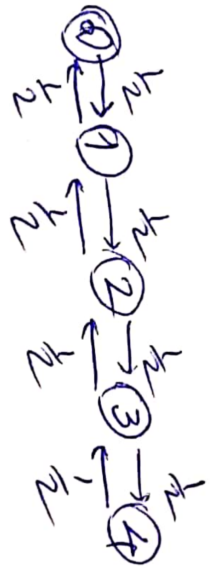
$A = \{0, 4\}$

$m_{0A} = 0$, $m_{1A} = 1 + \frac{1}{2} m_{0A} + \frac{1}{2} m_{2A} = 1 + \frac{1}{2} m_{2A}$

$m_{4A} = 0$, $m_{2A} = 1 + \frac{1}{2} m_{1A} + \frac{1}{2} m_{3A}$

$m_{3A} = 1 + \frac{1}{2} m_{2A} + \frac{1}{2} m_{4A} = \frac{1}{2} m_{2A} + 1$

$m_{1A} = m_{3A}$



$\Rightarrow m_{2A} = 1 + m_{1A} = 1 + 1 + \frac{1}{2} m_{2A} \Rightarrow m_{2A} = 4$

$m_{1A} = 1 + 2 = 3 = m_{3A}$

$f(۰) = ۰$

$f(۱) = ۳$

$f(۲) = ۴$

$f(۳) = ۳$

$f(۴) = ۰$

بنابراین در این حالت معادله تایید می‌شود:

$$0 \underset{p}{\overset{q}{\rightleftarrows}} 1 \underset{p}{\overset{q}{\rightleftarrows}} 2 \underset{p}{\overset{q}{\rightleftarrows}} 3 \underset{p}{\overset{q}{\rightleftarrows}} 4$$

$$\boxed{p+q=1 \rightarrow q=1-p}$$

5 در حالت کلی و دنبال داریم

$$m_{0A}=0\,,\quad m_{1A}=1+p\,m_{0A}+q\,m_{2A}=1+q\,m_{2A}$$

$$m_{4A}=0\,,\quad m_{2A}=1+p\,m_{1A}+q\,m_{3A}$$

$$m_{3A}=1+p\,m_{2A}+q\,m_{4A}=1+p\,m_{2A}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \overset{1-p}{-q} & 0 \\ -p & 1 & -q \\ 0 & -p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{1A} \\ m_{2A} \\ m_{3A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_{1A} \\ m_{2A} \\ m_{3A} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-2p+2p^2} \begin{bmatrix} 1-p+1-2p+p^2+1-p+p^2 \\ 1+1-p+p \\ p+p^2+1-p+p^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1-2p+2p^2} \begin{bmatrix} 2p^2-4p+3 \\ 2 \\ 2p^2+1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{n}{q-p} - \frac{4}{q-p}\left(\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^4}\right) = \frac{n}{q-p} - \frac{4}{q-p}\,\frac{\frac{p^n-q^n}{p^n}}{\frac{p^4-q^4}{p^4}} =$$

ساده‌سازی f(n)

ادامه 5

$$\frac{n}{q-p} - \frac{4p^{4-n}(p^n-q^n)}{(q-p)(p^4-q^4)} = \frac{n}{q-p} - \frac{4p^{4-n}(p^n-q^n)}{(q-p)(p+q)(p-q)(p^2+q^2)} =$$

$$\frac{n}{q-p} - \frac{4p^{4-n}\cancel{(p-q)}(p^{n-1}+p^{n-2}q+\cdots+q^{n-1})}{(q-p)\underbrace{(p+q)}_{1}\cancel{(p-q)}(p^2+q^2)} \overset{q=1-p}{=} \boxed{\frac{n}{1-2p} - \frac{4p^{4-n}\left(p^{n-1}+p^{n-2}(1-p)+\cdots+(1-p)^{n-1}\right)}{(1-2p)(2p^2-2p+1)} = f(n)}$$

$$\xRightarrow[q=1-p]{n=1} \frac{1}{1-2p} - \frac{4p^{4-1}}{(1-2p)(p^2+(1-p)^2)} = \frac{2p^2+1}{2p^2-2p+1} \quad ✓$$

$$\xRightarrow{n=2} \frac{2}{1-2p} - \frac{4p^2(p+(1-p))}{(1-2p)(2p^2-2p+1)} = \frac{2}{2p^2-2p+1} \quad ✓$$

$$\xRightarrow{n=3} \frac{3}{1-2p} - \frac{4p(p^2+p(1-p)+(1-p)^2)}{(1-2p)(2p^2-2p+1)} = \frac{2p^2-4p+3}{2p^2-2p+1} \quad ✓$$

(6) اول باید ثابت کنیم که π_j یک جواب یکتا برای $\sum_{i=0}^{M}\pi_i = 1 \ , \ \pi_j = \sum_{i=0}^{M}\pi_i P_{ij}$ است.

Amin Pourmand

حال چون می دانیم doubly stochastic است $\Leftarrow \sum_{i=0}^{M} P_{ij} = 1$

$$\left.\begin{aligned} \pi_j &= \sum_{i=0}^{M} \pi_i P_{ij} \\ \sum_{i=0}^{M} P_{ij} &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1-\pi_j = \sum_{i=0}^{M}(1-\pi_j)P_{ij} \Rightarrow \frac{1-\pi_j}{M} = \sum_{i=0}^{M}\frac{1-\pi_i}{M}P_{ij}$$

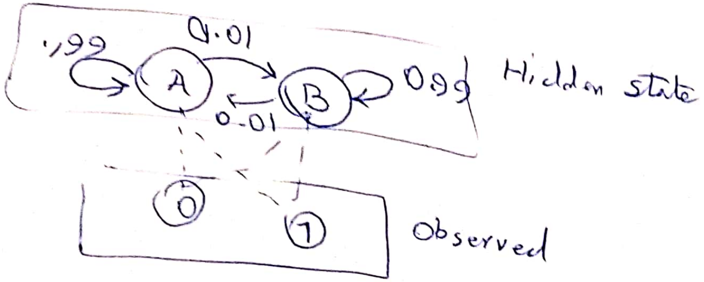
بنابراین متوجه می شویم که $\left(\frac{1-\pi_0'}{M}, \frac{1-\pi_1'}{M}, \dots, \frac{1-\pi_M'}{M}\right)$ یک جواب برای معادله بالای صفحه است اگر $(\pi_0', \dots, \pi_M')$ نیز یک جواب باشد. به علت این که جواب یکتا است داریم:

$$\frac{1-\pi_j}{M} = \pi_j \Rightarrow \boxed{\pi_j = \frac{1}{M+1}}$$

به ازای هر j این رابطه برقرار خواهد بود.

7

الف



سه جدول داریم که هر کدام تعدادی پارامتر دارد.

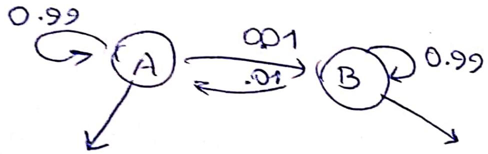
جدول اول (initial prob) = k پارامتر

جدول دوم (transition matrix) = k^2 پارامتر

جدول سوم (emission matrix) = km

(می‌توانند k-1 هم باشد) $\Leftarrow k^2+km+k$

ب



$\pi=(0.99 \quad .01)$

$$\begin{bmatrix} P(0|A) \\ P(1|A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .8 \\ .2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} P(0|B) \\ P(1|B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .1 \\ .9 \end{bmatrix}$$

یک برنامه‌ریزی پویا داریم.

$O_1=0,\ O_2=1,\ O_3=0 \Rightarrow O=\{010\}$

$$\begin{cases} \alpha_1(A) = \pi_A b_A(O_1) = 0.99\times 0.8 = 0.792 \\ \alpha_1(B) = \pi_B b_B(O_1) = 0.01\times 0.1 = 0.001 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2(A) = \alpha_1(A)\times 0.99\times 0.2 + \alpha_1(B)\times 0.01\times 0.2 = 0.156 \\ \alpha_2(B) = \alpha_1(B)\times 0.99\times 0.9 + \alpha_1(A)\times 0.01\times 0.9 = 0.008 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_3(A) = (\alpha_2(A)\times 0.99 + \alpha_2(B)\times 0.01)\times 0.8 = 0.124 \\ \alpha_3(B) = (\alpha_2(B)\times 0.99 + \alpha_2(A)\times 0.01)\times 0.1 = 0.0009 \\ P(O=\{0,1,0\}) = P(O_1=0, O_2=1, O_3=0) = \alpha_3(A)+\alpha_3(B) = 0.125 \end{cases}$$

ج

initialization

$B_3(A) = B_3(B) = 1$

$B_2(A) = B_3(A)\times 0.99\times 0.8 + B_3(B)\times 0.01\times 0.1 = 0.793$

$B_2(B) = B_3(A)\times 0.01\times 0.8 + B_3(B)\times 0.99\times 0.1 = 0.107$

$B_1(A) = B_2(B)\times 0.01\times 0.9 + B_2(A)\times 0.99\times 0.2 = 0.15$

$B_1(B) = B_2(A)\times 0.01\times 0.2 + B_2(B)\times 0.99\times 0.9 = 0.142$

$P(O_1=0, O_2=1, O_3=0) = B_1(A)\times 0.8\times 0.99 + B_1(B)\times 0.1\times 0.01 = 0.12$

تقریبا برابر است زیرا اساس هردو الگوریتم یکی است و تفاوت محسوسی وجود ندارد.

د

$V_1(A) = 0.99\times 0.8 = 0.792$, $V_1(B) = 0.01\times 0.1 = 0.001$

$V_2(A) = 0.2\times .792\times .99 = 0.156$

$V_2(B) = 0.9\times 0.792\times 0.01 = 0.007$

$V_3(A) = 0.8\times 0.156\times 0.99 = 0.124$

$V_3(B) = 0.1\times 0.007\times 0.99 = 0.0007$

طبق این محاسبات، احتمال رخداد دنباله AAA از بقیه بیشتر است.