پاسخ پرسش ۱:

$$E[y^2(t)] = R_y(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_y(w).dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(w).|H(w)|^2\,dw$$
$$\leq \frac{|H(w_m)|^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(w).dw = |H(w_m)|^2.E[x^2(t)] = 12\,|H(w_m)|^2$$

در رابطه بالا $|H(w_m)|$ مقدار بیشینه $|H(w)|$ است که به صورت زیر بدست می آید:

$$H(jw) = \frac{1}{(jw)^3 + 6(jw)^2 + 11(jw) + 6} = \frac{1}{(6-6w^2) - j(w^3 - 11w)} \Rightarrow |H(w)|^2$$
$$= \frac{1}{(6-6w^2)^2 + (w^3-11w)^2} = \frac{1}{w^6 + 18w^4 + 49w^2 + 36}$$

برای بیشینه شدن مقدار بالا باید مخرج کمینه شود که این امر در w=0 اتفاق می افتد و داریم:

$$|H(w_m)|^2 = \frac{1}{36} \Rightarrow \max\{E[y^2(t)]\} = \frac{1}{3}$$

پاسخ پرسش ۲:

الف)

$$R_y(\tau) = E[y(t)y(t+\tau)] = E\big[\big(x(t+a) - x(t-a)\big)\big(x(t+\tau+a) - x(t+\tau-a)\big)\big]$$
$$= E[x(t+a).x(t+\tau+a)] - E[x(t+a).x(t+\tau-a)] - E[x(t-a).x(t+\tau+a)]$$
$$+ E[x(t-a).x(t+\tau-a)] = R_x(\tau) - R_x(\tau-2a) - R_x(\tau+2a) + R_x(\tau)$$
$$= 2R_x(\tau) - R_x(\tau-2a) - R_x(\tau+2a)$$

ب)

$$R_y(\tau) = 2R_x(\tau) - R_x(\tau-2a) - R_x(\tau+2a) \Rightarrow S_y(w)$$
$$= 2F\{R_x(\tau)\} - F\{R_x(\tau-2a)\} - F\{R_x(\tau+2a)\}$$
$$= 2S_x(w) - \big(S_x(w)e^{-jw2a} + S_x e^{jw2a}\big) = 2S_x(w) - S_x(w)(2\cos(2aw))$$
$$= 2S_x(w)(1-\cos(2aw)) = 4S_x(w)\sin^2 aw$$

پاسخ پرسش ۳:

با توجه به فرض distribution-ergodic بودن داریم:

$$\frac{1}{T}\int_0^T F(x,x;\tau)\,d\tau \xrightarrow{T\to\infty} F^2(x)$$

همچنین با توجه به اینکه فرایند نرمال است داریم:

$$\frac{1}{T}\int_0^T\left(\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(\frac{-\left(\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right)^2}{2(1-\rho^2)}\right)\right)d\tau$$
$$\xrightarrow{T\to\infty}\left(\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_1-\mu_n)^2}{2\sigma^2}}dx_1\right)\left(\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_2-\mu_n)^2}{2\sigma^2}}dx_2\right)$$

از رابطه بالا نتیجه میگیریم:

$$\frac{1}{T}\int_0^T\rho \xrightarrow{T\to\infty} 0$$

که در نتیجه فرایند mean-ergodic است.

پاسخ پرسش ۴:

الف و ب)

ابتدا از دو طرف معادله دیفرانسیل فوریه می‌گیریم تا رابطه پاسخ ضربه را بیابیم:

$$jwY(w)+2Y(w)=X(w)\Rightarrow Y(w)=\frac{X(w)}{2+jw}\Rightarrow x(t)=\delta(t)\Rightarrow X(w)=1\Rightarrow H(w)=\frac{1}{2+jw}$$
$$\Rightarrow h(t)=e^{-2t}u(t)$$

به این ترتیب داریم:

$$R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-\tau) = C_{XX}(\tau) * h(-\tau) = \delta(\tau) * h(-\tau) + 4e^{-|\tau|} * h(-\tau)$$
$$= h(-\tau) + \int_{-\infty}^{+\infty} 4e^{-|t|}.h(t-\tau)dt = h(-\tau) + \int_{-\infty}^{+\infty} 4e^{-|t|}.e^{-2(t-\tau)}u(t-\tau)dt$$
$$= h(-\tau) + 4\int_{\tau}^{+\infty} e^{-|t|-2(t-\tau)}\,dt = \begin{cases} h(-\tau) + 4\left(\int_{\tau}^{0} e^{-t+2\tau}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-3t+2\tau}\,dt\right) & ;\tau < 0 \\ h(-\tau) + 4\left(\int_{\tau}^{\infty} e^{-3t+2\tau}\,dt\right) & ;\tau \ge 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} e^{2\tau} + 4\left(\int_{\tau}^{0} e^{-t+2\tau}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-3t+2\tau}\,dt\right) & ;\tau < 0 \\ 0 + 4\left(\int_{\tau}^{\infty} e^{-3t+2\tau}\,dt\right) & ;\tau \ge 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 4e^{\tau} - \frac{5}{3}e^{2\tau} & ;\tau < 0 \\ \frac{4}{3}e^{-\tau} & ;\tau \ge 0 \end{cases} = 4e^{\tau}u(-\tau) - \frac{5}{3}e^{2\tau}u(-\tau) + \frac{4}{3}e^{-\tau}u(\tau)$$
$$\Rightarrow S_{XY}(w) = \frac{4}{1-jw} - \frac{\frac{5}{3}}{2-jw} + \frac{\frac{4}{3}}{1+jw}$$

پاسخ پرسش ۵:

$$R_{y_1y_2}(\tau) = E[y_1(t+\tau).y_2(t)] = E\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau-a).h_1(a)\,da\right)y_2(t)\right]$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} E[x(t+\tau-a).h_1(a)y_2(t)]\,da = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy_2}(\tau-a).h_1(a)\,da$$
$$= R_{xy_2}(\tau) * h_1(\tau)$$

$$R_{xy_2}(\tau) = E[x(t+\tau).y_2(t)] = E\left[x(t+\tau)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-a).h_2(a)\,da\right)\right]$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} E[x(t+\tau).x(t-a).h_2(a)]\,da = \int_{-\infty}^{+\infty} E[x(t+\tau).x(t-a)]h_2(a)\,da$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau+a).h_2(a)\,da = R_{xx}(\tau) * h_2(-\tau)$$

بنابراین داریم:

$$R_{y_1y_2}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h_2(-\tau) * h_1(\tau)$$

پس:

$$S_{y_1y_2}(w) = S_{xx}(w).H_2(-w).H_1(w)$$

همچنین می‌دانیم:

$$\mu_{y_1} = \mu_x \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t)dt = 0 \quad \& \quad \mu_{y_2} = \mu_x \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t)dt = 0$$

بنابراین:

$$C_{y_1y_2}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h_2(-\tau) * h_1(\tau)$$

پاسخ پرسش ۶:

طبق فرمول‌های تبدیل فوریه داریم:

$$S_X(w) = F\{R_X(\tau)\} = \frac{4\sin^2\left(\frac{w}{2}\right)}{w^2}$$

$$S_Y(w) = F\{R_Y(\tau)\} = \begin{cases} 1 & ;\ |w| < \pi \\ 0 & ;|w| > \pi \end{cases} = u(\pi - w) - u(-\pi - w)$$

همچنین می‌دانیم:

$$S_Y(w) = S_X(w).|H(w)|^2$$

به این ترتیب:

$$|H(w)| = \begin{cases} \dfrac{w}{2\sin\frac{w}{2}} & ;\ |w| < \pi \\ 0 & ;|w| > \pi \end{cases}$$

پاسخ پرسش ۷:

ابتدا با استفاده از تبدیل فوریه اندازه پاسخ ضربه را بدست می‌آوریم:

$$(2(jw)^2 + 2(jw) + 4)Y(w) = (3(jw)^2 - 3(jw) + 6)X(w) \Rightarrow H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)}$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right)\frac{-w^2 + 2 + jw}{-w^2 + 2 - jw} \Rightarrow |H(w)| = \frac{3}{2}$$

با استفاده از فرمول‌های تبدیل فوریه می‌دانیم:

$$S_X(w) = F\{R_X(\tau)\} = \frac{1}{\pi} rect\left(\frac{w}{2\pi^2}\right)$$

$$S_Y(w) = S_X(w).\,|H(w)|^2 = \frac{9}{4\pi} rect\left(\frac{w}{2\pi^2}\right) \Rightarrow R_Y(\tau) = \frac{9}{4} sinc(\pi\tau)$$