بسمه تعالی

فرآیندهای تصادفی

نیم‌سال اول ۰۱-۰۰
دکتر ربیعی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

تمرین چهارم — زمان تحویل: ۳۰ آذر

۱. نمونه‌های X_1 تا X_n را از یکی از توزیع‌های زیر در نظر بگیرید.

(آ) یک آماره کافی برای θ بدست آورید.

$$p_\theta(x) = \theta x^{\theta-1} \quad where\ 0 < x < 1\ and\ \theta > 0$$

(ب) در حالتی که a را بدانیم، یک آماره کافی برای θ بدست آورید.

$$p_\theta(x) = \theta a x^{a-1} e^{-\theta x^a} \quad where\ a > 0,\ x > 0,\ \theta > 0$$

(ج) به ترتیب برای حالتی که θ یا a را بدانیم، برای متغییر دیگر آماره کافی را بدست آورید.

$$p_\theta(x) = \theta a^\theta x^{-(\theta+1)} \quad where\ a > 0,\ x > a,\ \theta > 0$$

۲. اگر فضای پارامتر را Θ در نظر بگیریم و فرض کنیم متناهی باشد:

(آ) فرض کنید آماره‌ی $T(X)$ این ویژگی را داشته باشد که برای هر توزیع پیشین روی θ ، تابعیت توزیع پسین روی θ به X، تنها از طریق این آماره است. نشان دهید این آماره، یک آماره‌ی کافی است.

(ب) حال نشان دهید اگر $T(X)$ یک آماره‌ی کافی باشد آنگاه برای هر توزیع پیشین، تابعیت توزیع پسین به X، تنها از طریق این آماره است.

۳. نمونه‌های X_1 تا X_n را از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ در نظر بگیرید، و فرض کنید σ^2 را می‌دانیم. آنگاه $UMVUE$ را برای μ^3 بیابید.

۴. نمونه‌های X_1 تا X_n را از توزیعی با تابع چگالی زیر در نظر بگیرید:

$$f(x, \theta) = \theta^{-2} x e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad where\ x > 0,\ \theta > 0$$

(آ) تخمینگر بیشینه درست‌نمایی را تشکیل دهید. با افزایش تعداد نمونه‌ها درست‌نمایی چطور تغییر می‌کند؟ چرا؟

(ب) تخمینگر متد گشتاور را تشکیل دهید. این تخمینگر، با تخمینگر قسمت پیشین چه ارتباطی دارد؟
راهنمایی: تابع چگالی احتمال یک متغییر تصادفی نمایی بصورت زیر است:

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x > 0,\ \theta > 0$$

همچنین گشتاورهای این توزیع توسط رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شوند:

$$E[X^k] = \int_0^\infty \frac{x^k}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}\, dx = k!\, \theta^k$$

۵. نمونه‌های X_1 تا X_n را از توزیعی با تابع چگالی زیر با پارامتر θ در نظر بگیرید:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}} \;\; where\ \theta > 0$$

میانگین مربعات خطای تخمین‌گر $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |X_i|$ را محاسبه کنید.

۶. فرض کنید توزیع $P(\theta;\alpha)$ یک $conjugate\ prior$ برای توزیع $P(x|\theta)$ باشد. نشان دهید توزیع زیر هم یک $conjugate\ prior$ برای $P(x|\theta)$ می‌باشد.

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i P(\theta;\alpha_i), \;\; s.t.\ \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1$$

۷. یک تاس ناهمگن در اختیار داریم که احتمال وجه‌های آن متناظر با توزیع $Categorical(\beta)$ می‌باشد. توزیع پیشین بر روی پارامتر β بصورت زیر می‌باشد:

$$P(\beta;\alpha_1;\alpha_2) = \frac{1}{3} Dir(\beta;\alpha_1) + \frac{2}{3} Dir(\beta;\alpha_2)$$

تابع چگالی احتمال توزیع Dir:

$$f(x_1,\ldots,x_K;\alpha_1,\ldots,\alpha_K) = \frac{1}{\mathrm{B}(\boldsymbol{\alpha})} \prod_{i=1}^{K} x_i^{\alpha_i - 1} \;\; where\ \sum_{i=1}^{K} x_i = 1 \text{ and } x_i \geq 0 \text{ all for } i \in \{1,\ldots,K\}$$

که در آن B برحسب تابع گاما بصورت زیر است:

$$\mathrm{B}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\prod_{i=1}^{K} \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{K} \alpha_i\right)}, \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_K)$$

توزیع پیشگویانه برای مشاهده $n+1$ـام را به کمک رویکرد بیزین، برحسب مشاهدات قبلی، α_1 و α_2 بدست آورید.