(2) الف

$$E[Y_t] = \overbrace{E[X_t]}^{=0} * h_t = 0$$

ب

$$S_Y(f) = S_X(f)\,|H(f)|^2 = \mathcal{F}\{R_X(\tau)\}\,|H(f)|^2 = \frac{2}{1+(2\pi f)^2}\,|H(f)|^2 = \begin{cases} \dfrac{2(1+4\pi^2 f^2)}{1+(2\pi f)^2} & |f| \leq 2 \\ 0 & |f| \geq 2 \end{cases}$$

$$S_Y(f) = \begin{cases} 2 & |f| < 2 \\ 0 & |f| > 2 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\{S_Y(f)\} = \frac{\sin 4t}{4t} = R_Y(\tau)$$

پ

$$E[Y_t^2] = R_Y(\tau) + E[Y(t)]^2 = R_Y(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\sin 4t}{4t} = 1$$

~~Hopital~~

قضیه سروف

4

$$f(x|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta}{(1+x_i)^{\theta+1}} = \frac{\theta^n}{\underbrace{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^{\theta+1}}_{T}} \Rightarrow h(\theta)\, g(T(x))$$

آماره کافی

$$T = \prod_{i=1}^{n} (1+x_i)^{\theta+1}$$

$Y = \frac{1}{X} \Rightarrow X = \frac{1}{Y} \Rightarrow \left|\frac{\partial x}{\partial y}\right| = \left|\frac{-1}{y^2}\right| = y^{-2}$

الف

$f_y(y; \alpha, \beta) = \frac{f_x(x, \alpha, \beta)}{\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|} = \frac{\left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha - 1} \exp\left(-\frac{\beta}{y}\right) \beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\, y^2} = \frac{y^{-\alpha + 1} \exp\left(-\frac{\beta}{y}\right) \beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \Rightarrow$

$f_y(x; \alpha, \beta) = \frac{x^{-\alpha - 1} \exp\left(-\frac{\beta}{x}\right) \beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}$

$$p(\sigma^2 | x, \mu) = p(x | \mu, \sigma^2)\, p(\sigma^2)$$

الف) ب) ابتدا θ را σ^2 درنظر میگیریم پس داریم

$$p(\theta | y, \mu) \propto \prod_{i=1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp\left(\frac{-(x_i-\mu)^2}{2\theta}\right) \times \frac{B^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \theta^{-(\alpha_0+1)} \exp\left(\frac{-B}{\theta}\right) \propto$$

$$\prod_{i=1}^{n} \theta^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\theta}\right) \theta^{-(\alpha+1)} \exp\left(\frac{-B}{\theta}\right) = \theta^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\theta}\right) \theta^{-(\alpha+1)} \exp\left(\frac{-B}{\theta}\right)$$

$$= \theta^{-(\alpha+\frac{n}{2}+1)} \exp\left(-\left(\frac{B}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\theta}\right)\right) = \theta^{-(\alpha+\frac{n}{2}+1)} \exp\left(-\frac{2B + 2\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)}{2\theta}\right)$$

$$= \theta^{-(\alpha+\frac{n}{2}+1)} \exp\left(-\frac{B + \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\theta}\right) \Rightarrow$$

$$\alpha_{new} = \alpha + \frac{n}{2}$$

$$B_{new} = B + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2}$$

$$\text{posterior} \propto \text{invgamma}(\alpha_{new}, B_{new})$$

$$= \text{invgamma}\left(\alpha + \frac{n}{2},\ B + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2}\right)$$

6 الف

پس داریم

$$f_x(x_1,\dots,x_n;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^n} & 0<x_1,\dots,x_n<\theta \\ 0 & ow\end{cases}$$

پس تعریف می‌کنیم

$$I_{(a,b)}=\begin{cases}1 & b>a \\ 0 & ow\end{cases}$$

$$f_x(x_1\dots x_n|\theta)=\frac{1}{\theta^n}I_{(0,\min x)}I_{(\max x,\theta)}=h(x)\,g_\theta(T)$$

که

$$h(x)=I_{(0,\min x)} \quad , \quad g_\theta(T)=\frac{1}{\theta^n}I_{(\max x,\theta)}$$

پس داریم

$$T(x_1,\dots,x_n)=\max(x_1,\dots,x_n)$$

حال که T یک آماره کافی است برای کامل بودن آن داریم

$$E_\theta[g(T)]=0 \Rightarrow P_\theta(g(T)=0)=1$$

$$\hookrightarrow \int_0^\theta g(t)\frac{nt^{n-1}}{\theta^n}dt=0 \Rightarrow \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta g(t)t^{n-1}dt=0 \xRightarrow{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\int_0^\theta g(t)t^{n-1}dt=0$$

$$\Rightarrow g(\theta)\theta^{n-1}=0 \Rightarrow g(\theta)=0 \Rightarrow P_\theta(g(T)=0)=1$$

پس T یک CSS (Complete Sufficient statistic) است.

۶) ب) آماره کافی برای توزیع یونیفرم $(0,\theta)$ X_n است بنابراین یک آماره کافی برای این مسئله $(X_{m:m}, Y_{n:n})$

است. دوما برای پیدا کردن یک آماره unbiased داریم

$$E_{\theta}[X_{m:m}] = \frac{m}{m+1}\theta_x \quad , \quad E_{\theta_y}[Y_{n:n}^{-1}] = \frac{n}{n-1}\theta_y^{-1}$$

بنابراین یک تخمین‌گر بدون بایاس برای θ_x/θ_y یا $\theta_x \theta_y^{-1}$ برابر است با

$$\frac{m}{m+1}\,\frac{n-1}{n}\,X_{m:m}\,Y_{n:n}^{-1}$$

است.

3 الف

$P(x > 950) = ?$

x_i : احتمال اینکه بشقی i بسته داشته باشد

$$x = x_1 + x_2 + x_3$$

$$x_i \sim \text{Pois}(10 \times 8 \times 9 \times P_i \times i)$$

می دانیم $\text{Pois}(\lambda_1) + \text{Pois}(\lambda_2) = \text{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$ است پس داریم

$$X \sim \text{Pois}(720 \times (0.6 + 0.3 \times 2 + 0.1 \times 3)) = \text{Pois}(1080) \rightarrow \begin{cases} Var[x] = \sigma^2 = 1080 \\ E[x] = \mu = 1080 \end{cases}$$

حال این را با توزیع نرمال تخمین می زنیم چون محاسبه سخت است

$$P[x \geq 950] = P\left[N(0,1) \geq \frac{950 - 1080}{\sqrt{1080}}\right] = P[N(0,1) \geq -3{,}95]$$

ب

$$P(S_1 = s \mid N_t = 2) = \frac{P(S_1 = s, N_t = 2)}{P[N_t = 2]} = \frac{P[S_1 = s]\, P[N_{t-s} = 1]}{P[N_t = 2]} =$$

$$\frac{\lambda \exp(-\lambda s_1)\, \lambda^{t-s_1} \exp(-\lambda(t - s_1))}{\frac{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}}{2!}} = \frac{2(t - s_1)}{t^2}$$

$$\Rightarrow E[S_1 \mid N_t = 2] = \int_0^t s_1 \frac{2(t - s_1)}{t^2}\, ds_1 = \frac{s_1^2}{t}\Big]_0^t = \cancel{\frac{2}{3} \frac{s_1^3}{t^2} = \frac{2}{3} \frac{s_1^3}{t^2}}$$

$$\frac{s_1^2}{t}\Big]_0^t - \frac{2}{3} \frac{s_1^3}{t^2} = \boxed{\frac{1}{3} t}$$

3) ب) ادامه

$$P[S_2 | N_t=2] = \frac{P[S_2, N_t=2]}{P[N_t=2]} = \frac{P[S_2]\,P[N_{t-S_2}=0]}{P[N_t=2]} =$$

$$* \quad \frac{P(S_2)\, e^{-\lambda(t-S_2)}}{\frac{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}}{2!}} = *$$

توزیع S_2 یک توزیع گاما است.

$$P(S_2) \propto \text{gamma}) = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda t} t}{1!} = \lambda^t t e^{-\lambda t}$$

$$* = \frac{2\lambda^2 e^{-\lambda t} t \; e^{-\lambda(t-S_2)}}{(\lambda t)^2 e^{-\lambda t}} = \frac{2S_2}{t^2}$$

بنابراین

$$E[S_2 | N_t=2] = \int_0^t S_2 \frac{2S_2}{t^2}\, dt = \int_0^t \frac{2S_2^2}{t^2}\, dt = \frac{2S_2^3}{3t^2}\Big]_0^t = \boxed{\frac{2}{3}t}$$

$$\boxed{E[S_1 | N_t=2] = \frac{1}{3}t \;,\quad E[S_2 | N_t=2] = \frac{2}{3}t}$$

ج

ب 8

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta_0$ $\rightarrow$ $H_0: \mu_1 = \mu_2$

$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0$ $\rightarrow$ $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

$$\Rightarrow Z_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} = \frac{\frac{25}{30} - \frac{15}{30}}{0.09} = \frac{0.83 - 0.5}{0.09} = 3/6$$

$\alpha = 0.05 \rightarrow Z_\alpha = 1/94 \rightarrow 3/6 > 1/94$

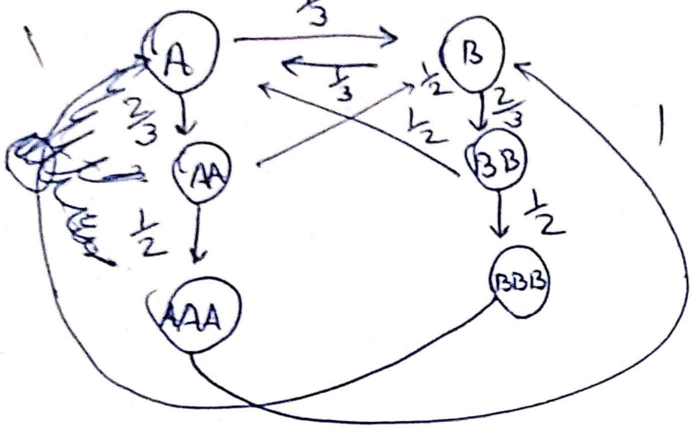
بنابراین به طور معناداری تفاوت دارند

ج 8

$$t_c = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \delta}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{\frac{25}{30} - \frac{15}{30}}{0.09} = 3/6$$

$t_\alpha = 1/7$

بنابراین به طور معناداری تفاوت دارند.



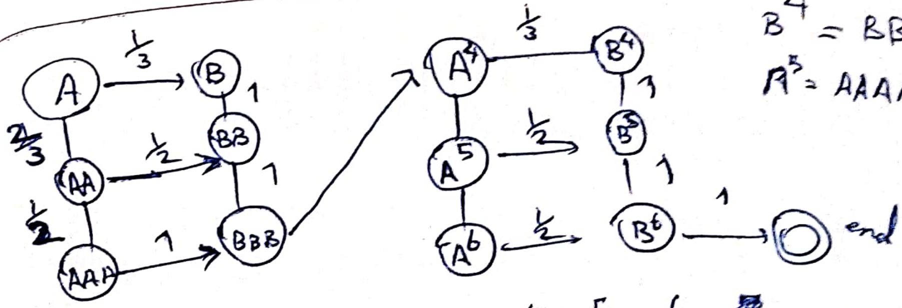
الف

Transition

	A	AA	AAA	B	BB	BBB
A	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0
AA	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
AAA	0	0	0	1	0	0
B	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{2}{3}$	0
BB	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
BBB	1	0	0	0	0	0

ماتریس انتشار =

	A	B
A	1	0
AA	1	0
AAA	1	0
B	0	1
BB	0	1
BBB	0	1



$B^4 = BBBB$

$A^5 = AAAAA$

ب

Transition

	A_1	AA	AAA	B	BB	BBB	A^4	A^5	A^6	B_4	B_5	B_6	end
A_1	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AA	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
AAA	0	0	0	0	0	1	0	0	…	…	…	…	…
B	0	0	0	0	1	0	0	0	…	…	…	…	…
BB	0	0	0	0	0	1	0	0	…	…	…	…	…
BBB	0	0	0	0	0	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	…	…	…	…
A^4	0	0	…	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
A^5	0	…	…	…	…	…	0	0	0	1	…	…	…
A^6													
B^4	0	…	…	…	…	…	…	…	1	0			
B^5	…	…	…	…	…	…	…	…	0	1			
B^6	…												
end													

۱) الف) درست

y(t) و y(t+c) مستقل هستند زیرا از X گفته شده و توزیع نیز برابر است پس SSS است

حال چون X در مثال ثابت است صرفا شکل یک ثابت const است پس کل SSS می شود

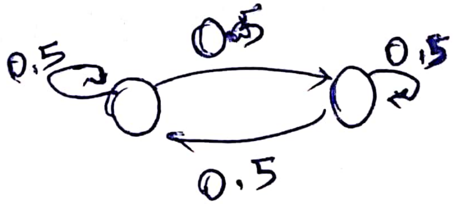
ب) بله زیرا

$$\sum_{i=0}^{p(t)} G_i \sim N\left(0, \frac{1}{p(t)}\right)$$

پ) ✗ زیرا اگر مجموع باشد هر توزیع که یک پارامتر پنهان دارد در واقع هر کدام یک گیسانی داشته باشیم

آنها گاوسی نیز خواهد بود که مخالف تعریف های خوانده شده است

ت) ✓ درست



ث) ✗ چون ممکن است مسیر دیگری وجود داشته باشد

۵ الف چون تعداد آزمایش‌ها زیاد است $n=30$ بنابراین طبق CLT داریم که

$$\mu_\alpha \propto N(\hat{\mu}_\alpha , \sigma_\alpha^2)$$

$$\mu_B \propto N(\hat{\mu}_\alpha , \sigma_B^2) \Rightarrow \mu_\alpha - \mu_B \propto N(\hat{\mu}_\alpha - \hat{\mu}_B , \sigma_\alpha^2 - \sigma_B^2)$$