بسمه تعالی

فرآیندهای تصادفی

نیم‌سال اول ۰۱-۰۰
دکتر ربیعی

دانشکده مهندسی کامپیوتر

تمرین سوم | Power Spectrum, Point Process, Poisson Process, Gaussian Process | زمان تحویل: ۱۱آذر

۱. درست یا نادرست بودن عبارات زیر را با ذکر دلیل بیان کنید.

آ) $S_X(\omega) = e^{-|\omega|}|sin(\omega)|$ و $S_Y(\omega) = \frac{1-\omega^2}{1+\omega^2}$ PSD[1] هایی معتبر برای فرایندهای X و Y است.
(این دو فرایند WSS هستند)

ب) تابع اتوکوواریانس یک فرآیند WSS با $S(\omega) = \frac{2}{4+\omega^4}$ در نامساوی $\int_{-\infty}^{+\infty} R_X(u)du \leq \frac{\pi}{2}$ صدق می‌کند.

پ) عکس تبدیل فوریه‌ی یک نویز سفید [2] با میانگین صفر و اتوکوواریانس $Q(t)\delta(t-s)$ دارای طیف توان[3] $\frac{Q(\omega)}{4\pi^2}$ است.

۲. اگر $N(t), t \in [0, \infty)$ یک فرایند پواسون با نرخ λ باشد.

آ) تابع کوواریانس $N(t)$ را محاسبه کنید. $(Cov(N(t_1), N(t_2)))$

ب) اگر $\tilde{N}(t,\tau)$ تعداد رخدادها در بازه‌ی $[t,\tau)$ باشد. $E[\tilde{N}(t_1,t_3).\tilde{N}(t_2,t_4)]$ را محاسبه کنید$(t_1 < t_2 < t_3 < t_4)$.

پ) تابع جرم احتمال توام[4] $N(t)$ و $N(t+s)$ را محاسبه کنید.$(s > 0)$

ت) $E[N(t)N(t+s)]$ ، $s > 0$

ث) احتمال وقوع دو رخداد [5] در بازه‌ی $[0,2)$ و سه رخداد در $[1,4)$ را محاسبه کنید.

۳. اگر X و Y دو فرآیند تصادفی پواسون مستقل با نرخ‌های $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 2$ باشند. احتمال اینکه دومین رخداد در X قبل از سومین رخداد در Y اتفاق بیافتد را بیابید.

۴. اگر برای فرایند $X(t)$ داشته باشیم: $X(t) = At, t \in R, A \sim N(0,1)$

آ) نشان دهید که $X(t)$ یک فرایند گاوسی است.

ب) مقدار امید ریاضی و اتو کوواریانس این فرایند را به دست آورید.

[1] power spectral density
[2] white noise
[3] power spectrum
[4] joint probability mass funciton
[5] arrival

۵. اگر یک فرایند گاووسی به صورت $(G_t)_{t\in[۰,\infty)}$ = داشته باشیم و این فرایند خصوصیات زیر را داشته باشد

۱) با احتمال یک $X_۰ = ۰$ است.

۲) $۰ \le s \le t$ ، $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(۰, \sqrt{t-s})$

با توجه به این خصوصیات‌ها به سوالات زیر پاسخ دهید.

آ) مقدار $cov(X_s, X_t), ۰ \le s \le t$ را محاسبه کنید.

ب) توزیع $(X_{t_۱}, X_{t_۲}, ..., X_{t_n})$ را مشخص کنید. $۰ \le t_۱ \le t_۲ \le ... \le t_n$

۶. فرایند تصادفی ورود را دنباله ای از متغیرهای تصادفی صعودی به صورت $۰ < S_۱ < S_۲ < ... < S_n$ تعریف میکنیم که هر S_i زمان وقوع رخداد i ام است. این فرایند را میتوان به دو شیوه دیگر نمایش داد: ۱ــ دنباله متغیرهای تصادفی X_i که فاصله زمانی میان رخداد i و $i-۱$ است ۲ــ متغیر $N(t)$ که برابر تعداد رخدادها در در بازه زمانی $[۰, t]$ است.

الف) نشان دهید که $P(S_n \le t) = P(N(t) \ge n)$

ب) فرض کنید $X_۱, X_۲, ...$ متغیرهای تصادفی iid با تابع چگالی $f_X(x) = \lambda exp(-\lambda x)$ هستند و برای $n \ge ۱$ داریم $S_n = X_۱ + X_۲ + ... + X_n$. نشان دهید که برای $۰ < s_۱ < s_۲ < .. < s_n$ داریم:

$$f_{S_۱,S_۲,...,S_n}(s_۱, s_۲, ..., s_n) = \lambda^n exp(-\lambda s_n)$$

پ) برای یک فرایند پواسون با نرخ λ مقدار $Pr(S_۱, S_۲, ..., S_{n-۱}|S_n = t)$ را به دست آورید.

۷. دو پستچی U و V در اداره‌ی پست در زمان‌های صفر و یک حاضر می‌شوند. زمان تحویل بسته‌های هر یک از دو پستچی یک فرایند پواسون(مستقل) با نرخ‌های λ_U و λ_V است.

آ) اگر $T_۱$ و $T_۲$ زمان‌هایی باشند که پستچی U بسته‌های اول و دوم را تحویل داده است.

i) امیدریاضی شرطی $E[T_۲|T_۱]$.را محاسبه کنید

ii) تابع توزیع چگالی[۶] $T_۱^۲$ را بدست بیاورید.

iii) تابع توزیع چگالی توام[۷] $T_۱$ و $T_۲$ را بدست آورید.

ب) تابع جرم احتمال تعداد کل بسته‌های تحویل داده شده توسط هر دو پستچی در بازه‌ی $[۰, ۲]$ را بدست بیاورید.

[۶] PDF
[۷] joint PDF