



## فرآیندهای تصادفی

نیم سال اول ۰۰-۰۱

دکتر ربیعی

زمان تحویل: ۲۰ آبان ماه

دوره‌ی احتمال و سیگنال و سیستم‌ها

تمرین اول

۱. علی بیشتر وقت خود را صرف تایپ و ارسال ایمیل می‌کند. زمان ارسال ایمیل‌های وی از توزیع پواسون با پارامتر  $\lambda_A$  در ساعت پیروی می‌کند. الف. احتمال اینکه وی در بازه‌ی زمانی  $[1, 2]$  دقیقاً ۳ ایمیل ارسال کند، چقدر است؟ ب. فرض کنیم  $Y_1, Y_2$  زمان ارسال ایمیل اول و دوم باشد.

(آ) مقدار  $E[Y_2|Y_1]$  را محاسبه کنید.(ب)  $PDF$  مربوط به  $Y_1^2$  را محاسبه کنید.(ج)  $PDF$  مربوط به توزیع تجمعی  $Y_1$  و  $Y_2$  را محاسبه کنید.

ج. شما در زمان ۱ مشاهده می‌کنید که علی دقیقاً یک ایمیل تا الان تایپ کرده‌است.

(آ) امید ریاضی  $Y_2$  به شرط اطلاعات بالا چقدر است.(ب) امید ریاضی  $Y_1$  به شرط اطلاعات بالا چقدر است.

د. محمد در زمان ۱ به علی ملحق می‌شود و شروع به تایپ ایمیل می‌کند؛ زمان ارسال ایمیل‌های وی از توزیع پواسون با پارامتر  $\lambda_B$  در ساعت پیروی می‌کند.

(آ)  $PMF$  جمع ارسال‌های این دو نفر در بازه‌ی زمانی  $[0, 2]$  چقدر است؟

(ب) امید ریاضی زمان کل تایپ توسط علی در زمانی که محمد به علی می‌پیوندد چقدر است (منظور از زمان کل، زمان قبل و بعد از آمدن محمد است).

(ج) با فرض اینکه در مجموع ۱۰ ایمیل در بازه  $[0, 2]$  ارسال شده، احتمال اینکه ۴ ایمیل توسط علی فرستاده شده باشد، چقدر است؟

ه. فرض کنیم  $\lambda_A = 4$  باشد، از نامساوی چبی شف استفاده کنید تا یک حد بالا برای احتمال اینکه علی حداقل ۵ ایمیل در بازه  $[0, 1]$  ارسال کرده باشد، مشخص کنید. آیا نامساوی مارکوف یک حد بهتر مشخص می‌کند؟ و. دلالی داریم که نشان می‌دهد  $\lambda_A$  یک عدد بزرگ است. اگر  $N$  تعداد ایمیل‌های ارسال شده در بازه  $[0, 1]$  باشد، ثابت کنید که چرا قضیه حد مرکزی قابل اعمال کردن به  $N$  می‌باشد و یک عبارت دقیق راجع به قضیه حد مرکزی در این مورد ارائه کنید.

ز. با فرض اینکه  $\lambda_A$  یک توزیع نمایی با پارامتر ۲ باشد،  $E[N^2]$  را محاسبه کنید.

۲. حاصل کانولوشن‌های زیر را محاسبه کنید.

الف.  $x(t) = e^{-at}u(t); h(t) = e^{-bt}u(t) \quad b \neq a$ ب.  $x(t) = e^{-at}u(t) \quad a \neq 0; h(t) = u(t)$ ج.  $x(t) = u(t); h(t) = u(t)$ 

۳. موارد زیر پاسخ ضربه مربوط به یک سیستم گسسته یا پیوسته  $LTI$  هستند. از بین آنها مشخص کنید کدام علی و کدام پایدار  $stable$  هستند. دلیل خود را برای هر مورد مشخص کنید (به تفکیک علی و پایدار)

الف.  $h[n] = (\frac{1}{5})^n u[n]$ ب.  $h[n] = .8^n u[n+2]$ ج.  $h[n] = (\frac{1}{2})^n u[-n]$

د.  $h[n] = 5^n u[3 - n]$   
 ه.  $h(t) = e^{-4t} u(t - 2)$   
 و.  $h(t) = e^{-6t} u(3 - t)$   
 ز.  $h(t) = e^{-2t} u(t + 50)$

۴. در هر یک از موارد زیر، خطی بودن، علی بودن، تغییرناپذیری بازمان، پایدار بودن و بی حافظه بودن را با دلیل مشخص کنید.

الف.  $y(t) = x(t - 2) + x(2 - t)$

ب.  $y(t) = \cos(3t)x(t)$

ج.  $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(t) dt$

د.  $y(t) = x(\frac{t}{3})$

ه.  $y(t) = \begin{cases} x(t) + x(t - 2), & \text{if } t \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

و.  $y(t) = \begin{cases} x(t) + x(t - 2), & \text{if } x(t) \geq 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

۵. تابع اتوکورلیشن  $R_X(\tau)$  متناظر با هر یک از  $PSD$  های زیر را مشخص کنید.

الف.  $\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)$

ب.  $e^{-\omega^2/2}$

ج.  $e^{-|\omega|}$