

기본 알고리즘

제3장



2017- Fall

국민대학교 컴퓨터공학부 최준수

분할정복기법

- Divide & Conquer
 - Recursion 기반 해결기법
 - 분할정복기법의 문제해결 시나리오
 - (1) 분할 (Divide)
 - 주어진 문제를 두 개 혹은 그 이상의 같은 형식의 작은 문제로 나눈다.
 - (2) 정복 (Conquer)
 - 나누어진 작은 문제는 재귀적으로 해결한다. 즉, 나누어진 작은 문제는 더 이상 나누어서 문제를 해결할 필요가 없이 직접 문제를 해결할 수 있을 때 까지 재귀적으로 계속 분할해가면서 문제를 해결한다.
 - (3) 통합 (Combine)
 - 한 개 이상의 작은 문제들로부터 구한 모든 해답들을 서로 통합해서 원래 문제의 해답을 만든다.

분할정복기법 (2)

- Divide & Conquer

- 분할정복기법은 Top-Down 문제해결 방법

- 초기에 큰 문제가 주어졌을 때, 직접 이 문제를 해결할 수 없으므로, 이 문제를 적절한 크기의 작은 문제로 분할하여 해결하는 방법이다. 이러한 방법을 top-down 방법이라고 한다.

- Recursion 으로 알고리즘 구현

- Top-down 방법에 의하여 분할된 작은 문제들 또한 직접 문제를 해결할 수 없는 경우에는 또 다시 더 작은 문제로 분할한다.
 - 작은 문제는 문제를 직접 해결할 수 있을 때 까지 계속 분할한다.
 - 이러한 해결 방법은 recursion 으로 쉽게 구현할 수 있다.

분할정복기법 (3)

- Divide & Conquer
 - 분할정복기법 알고리즘의 정확성 증명
 - 수학적 귀납법 사용
 - 분할정복기법 알고리즘의 시간복잡도 계산
 - 시간복잡도 $T(n)$ 을 알고리즘으로 부터 재귀식으로 유도하고, 이 재귀식(점화식)을 풀어서 구함

수학적 귀납법

– 수학적 귀납법(Mathematical Induction)의 원리

Theorem: Principles of Mathematical Induction

- Let $P(n)$ be a statement that is defined for integers n , and let a be a fixed integer.
- Suppose the following two statements are true:
 - $P(a)$ is true
 - For all integers $k \geq a$, if $P(k)$ is true then $P(k+1)$ is true.
- Then the statement
 - For all integers $n \geq a$, $P(n)$ is true.

수학적 귀납법 (2)

– 수학적 귀납법에 의한 증명방법

1. Base Step

- Prove $P(a)$

2. Inductive Hypothesis

- Suppose $P(k)$ is true for $k \geq a$

3. Inductive Step

- Prove $P(k+1)$ is true using the inductive hypothesis.

수학적 귀납법 (3)

- 예

- P(n) : For all integers $n \geq 1$, $\sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} i^2 = n(n+1)/2$

- 증명:

- (1) Base step: P(1)

- Left Part : 1

- Right Part : 1

- Therefore P(1) is true

- (2) Inductive Hypothesis

- Suppose that P(k) is true for $k \geq 1$

수학적 귀납법 (4)

- 예

- P(n) : For all integers $n \geq 1$, $\sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} i^2 = n(n+1)/2$

(3) Inductive Step: Prove that $P(k+1)$ is true

From the left part of $P(k+1)$, we have

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{k+1-i} i^2 &= (k+1)^2 + \sum_{i=1}^k (-1)^{k+1-i} i^2 \\ &= (k+1)^2 - \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} i^2 \\ &= (k+1)^2 - P(k) \\ &= (k+1)^2 - k(k+1)/2 \\ &= (k+1)(k+2)/2\end{aligned}$$

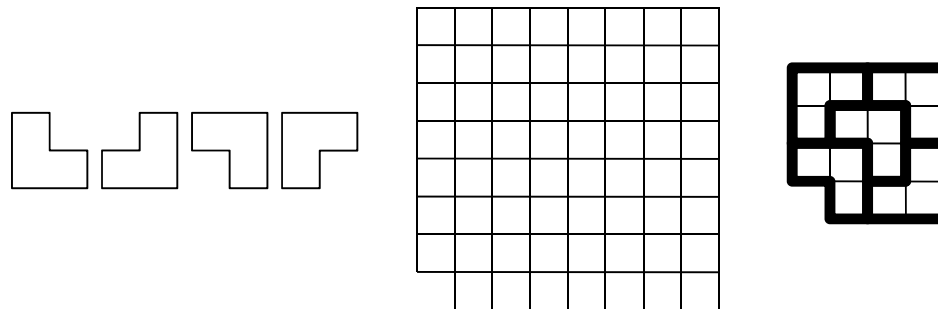
Thus part is equal to the right part of $P(k+1)$.

(결론) Therefore we conclude that the theorem is true by the *theorem of mathematical induction*.

Tromino 타일 채우기

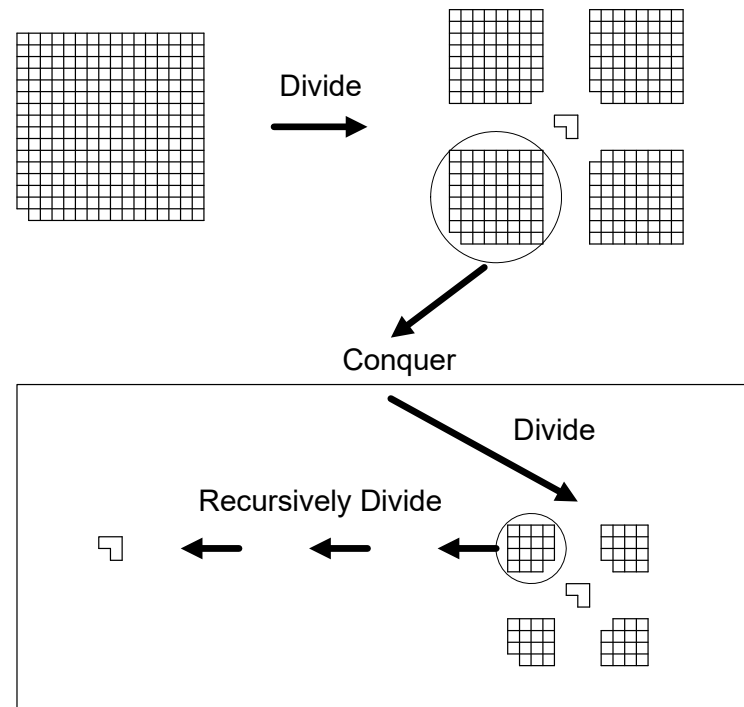
– 문제

- 트로미노(tromino)는 다음 그림과 같이 크기가 1×1 인 정사각형 세 개로 기억자 모양으로 만들어진 모양으로서, 모양을 회전시키면 아래와 같은 네 가지 모양을 가지고 있다.
- 크기가 $N \times N$ ($N=2^k$) 이고, 한 쪽 모퉁이에 1×1 크기의 격자가 떨어져 나간 바둑판 모양의 격자판이 주어졌을 때, 이 격자판을 트로미노 타일로 빈 공간없이, 또한 타일이 서로 겹치지 않게, 모든 격자판을 채우는 방법을 고안하시오. 예를 들어 $N=4$ 인 경우는 아래 그림과 같이 채울 수 있다.



Tromino 타일 채우기 (2)

– 해결 알고리즘: (Divide & Conquer)



Tromino 타일 채우기 (3)

– 알고리즘의 정확성 증명

- 위 알고리즘에 의해서는 귀퉁이가 떨어져나간 $2^n \times 2^n$ ($n \geq 1$) 크기의 격자판은 항상 트로미노 타일로 채울 수 있다.

- 수학적 귀납법에 의한 증명

(1) Base case : $n=1$ 인 경우

귀퉁이가 떨어져나간 2×2 크기의 격자판은 1개의 트로미노 타일로 채울 수 있다.



(2) Inductive Hypothesis: $n=k$ 인 경우

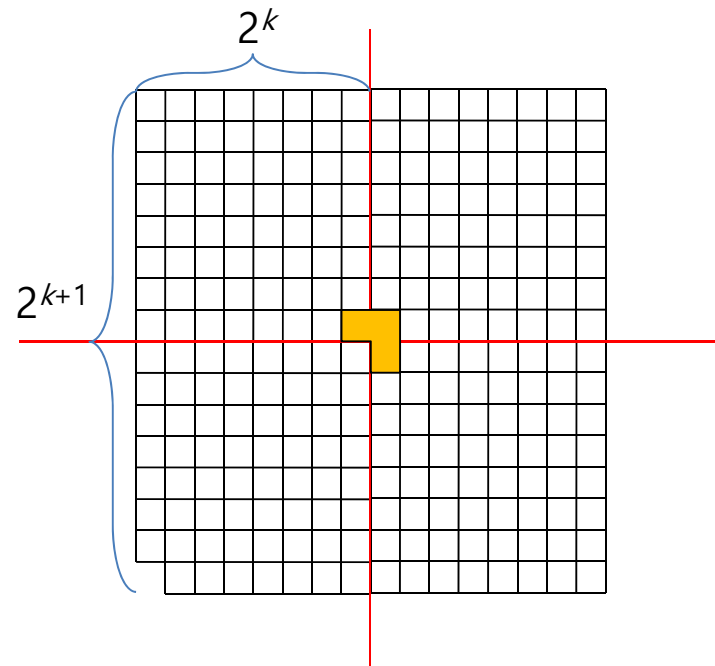
귀퉁이가 떨어져나간 $2^k \times 2^k$ 크기의 격자판은 항상 트로미노 타일로 채울 수 있다라고 가정하자.

Tromino 타일 채우기 (4)

– 알고리즘의 정확성 증명

(3) Inductive Step : $n=k+1$ 인 경우

(2) 번 단계의 가정을 이용하여, 귀퉁이가 떨어져나간 $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ 크기의 격자판은 다음과 같이 트로미노 타일로 채울 수 있다라고 증명할 수 있다.

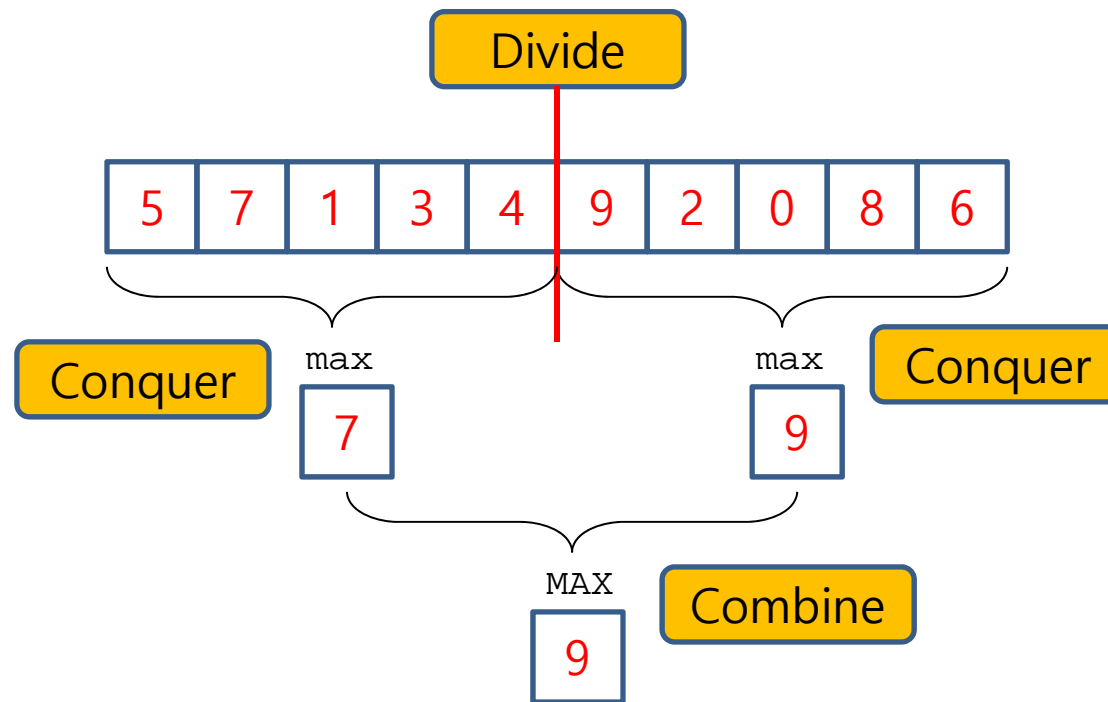


(결론) 따라서 모든 $2^n \times 2^n$ ($n \geq 1$) 크기의 격자판은 위 알고리즘에 따라 트로미노로 채울 수 있다.

Finding Max

- Finding Max(recursive)

$$\max([a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n]) = \begin{cases} a_1 & n = 1 \\ \text{MAX}(\max([a_1, \dots, a_k]), \max([a_{k+1}, \dots, a_n])) & n > 1 \end{cases}$$



Finding Max (2)

- Finding Max (Divide & Conquer)

$$\max([a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n]) = \begin{cases} a_1 & n = 1 \\ \text{MAX}(\max([a_1, \dots, a_k]), \max([a_{k+1}, \dots, a_n])) & n > 1 \end{cases}$$

```
#define MAX_SIZE 100
#define MAX(a,b) ((a)>(b)?(a):(b))
int recurMax(int a[], int left, int right)
{
    int half;
    if (left == right)
        return a[left];
    else
    {
        half = (left+right)/2;
        return MAX(recurMax(a, left, half),
                   recurMax(a, half+1, right));
    }
}
```

```
void main(void)
{
    int v[MAX_SIZE] = { 5, 3, 9, 2, 4, 8, 1, 6, 0, 7 };
    printf("%d\n", recurMax(v, 0, 9));
}
```

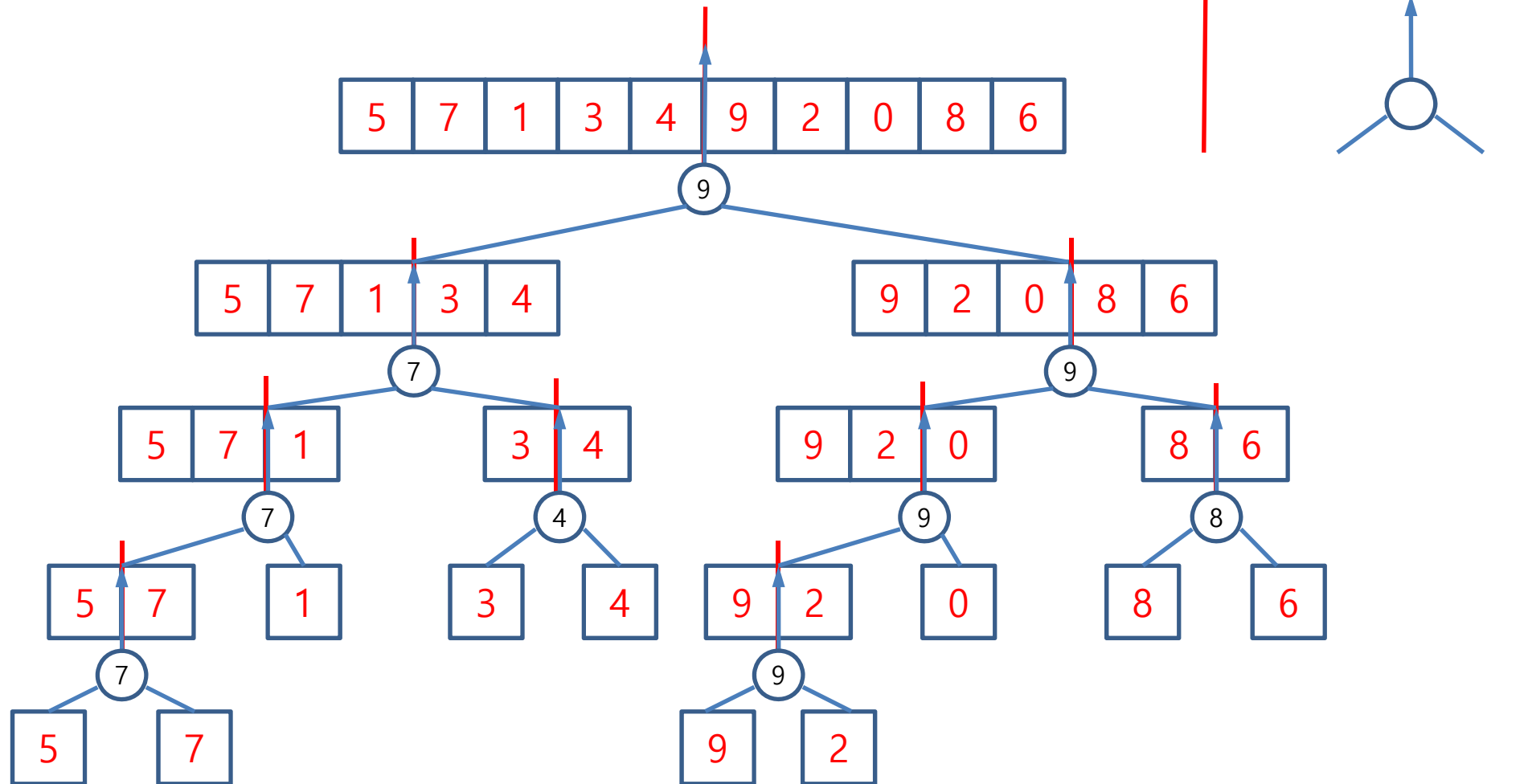
Divide

Conquer

Combine

Finding Max

- Finding Max(recursive)



Finding Max (3)

- Finding Max (Divide & Conquer)

- Analysis

- Basic operation : MAX()에서 두 수를 비교하는 연산자
 - $T(n)$: n 개의 정수 중에서 최대값을 구할 때, basic operation 의 수행 횟수.

$$T(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1 & n > 1 \end{cases}$$

$$T(n) = n - 1$$

Binary Search

- Binary Search

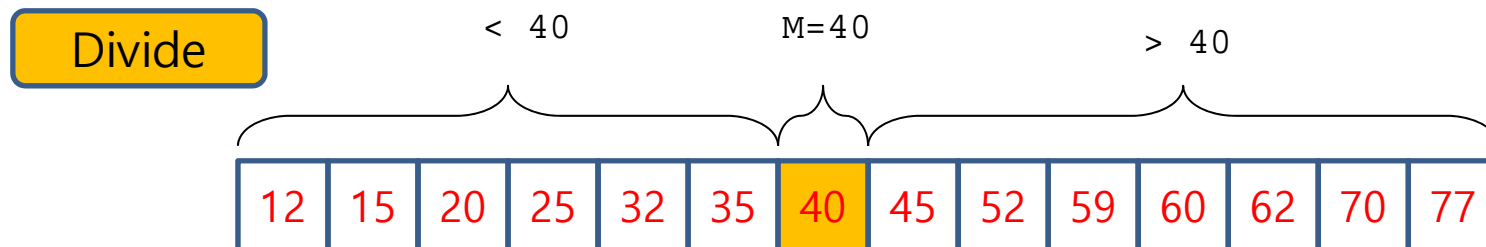
- 문제

- 오름차순으로 정렬된 n 개의 정수가 저장된 1차원 배열에 주어진 정수 x 가 들어 있는지를 검사하시오.



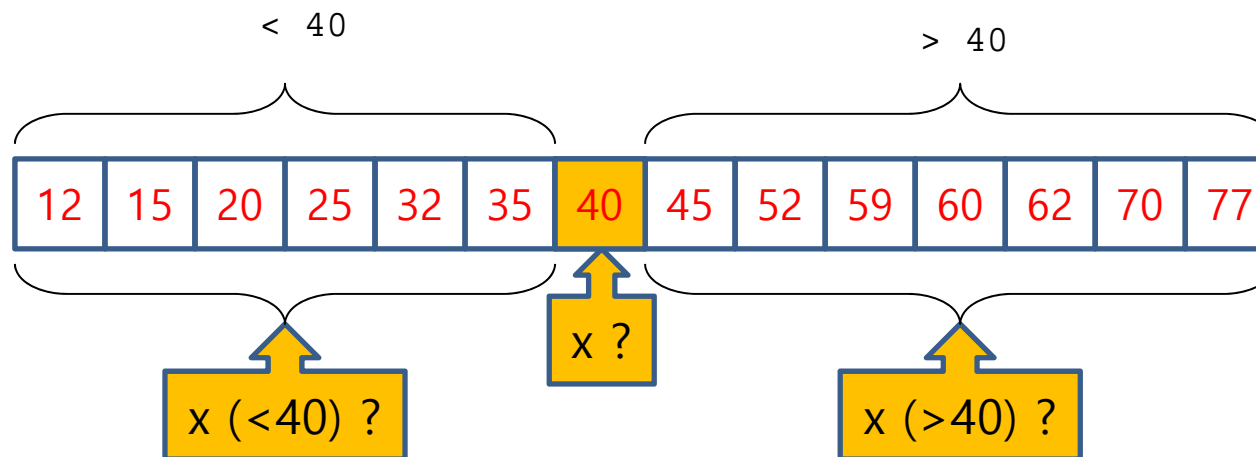
Binary Search (2)

- Binary Search
 - Divide & Conquer 알고리즘
 - Divide
 - 가장 중앙에 있는 정수 M과 M을 중심으로 M 보다 작은 그룹과 M 보다 큰 그룹 등의 세 그룹으로 나눈다



Binary Search (3)

- Conquer
 - $x = M$
 - » 가장 중앙에 있는 정수 M 과 찾고자 하는 정수 x 를 비교한다.
 - » 두 수가 같은 경우에는 종료한다.
 - $x < M$
 - » M 보다 작은 그룹에서 x 를 재귀적으로 검색한다.
 - $x > M$
 - » M 보다 큰 그룹에서 x 를 재귀적으로 검색한다.



Binary Search (4)

- Combine
 - Conquer 단계에서 분할된 작은 문제들에 대하여 구한 해답을 원래 문제의 해답으로 정한다.

```
int binarySearch(int a[], int left, int right, int value)
{
    int mid;
    if (left > right)
        return -1; /* not found */
    else
    {
        mid = (left+right)/2;
        if (a[mid] == value)
            return mid;
        else if (a[mid] > value)
            return binarySearch(a, left, mid-1, value);
        else
            return binarySearch(a, mid+1, right, value);
    }
}
```

```
void main(void)
{
    int v[] = { 1, 3, 4, 7, 9, 11, 15 };
    printf("%d\n", binarySearch(v, 0, 6, 11));
}
```

Binary Search (5)

– Analysis

- basic operation : x 와 배열에 있는 수를 비교하는 연산
- $T(n)$: n 개의 정수에서 x 를 검색할 때의 basic operation 수

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ \max \left\{ T\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right), T\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right) \right\} + 1 & n > 1 \end{cases}$$

– 위 식은 아래와 같이 단순화하여 생각할 수 있다.

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ T(n/2) + 1 & n > 1 \end{cases}$$

Binary Search (6)

– Analysis

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ T(n/2) + 1 & n > 1 \end{cases}$$

- 위 식은, $n = 2^k$ 일 때, 아래와 같이 order 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} T(2^k) &= T(2^{k-1}) + 1 \\ &= T(2^{k-2}) + 1 + 1 \\ &= T(2^{k-3}) + 1 + 1 + 1 \\ &\dots \\ &= T(2^{k-k}) + 1 + \dots + 1 \\ &= k + 1 \\ &= \log n + 1 \\ &\in O(\log n) \end{aligned}$$

Find Peak Value

- Find Peak Value
 - 오르내리막 수열
 - 최고점 (Peak Value)

12	15	20	25	32	35	40	45	31	26	12	9	7	3
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	---	---

- n 개의 정수로 구성된 오르내리막 수열이 있을 때, 이 수열의 최고점을 빠르게 계산하는 알고리즘을 제시하시오.

Merge Sorting

- Merge Sorting

- 1차원 배열에 저장된 n 개의 데이터를 오름차순으로 정렬

- Divide

- 배열을 각각 $n/2$ 개의 데이터로 만들어진 두 개의 부분배열로 분할한다.

- Conquer

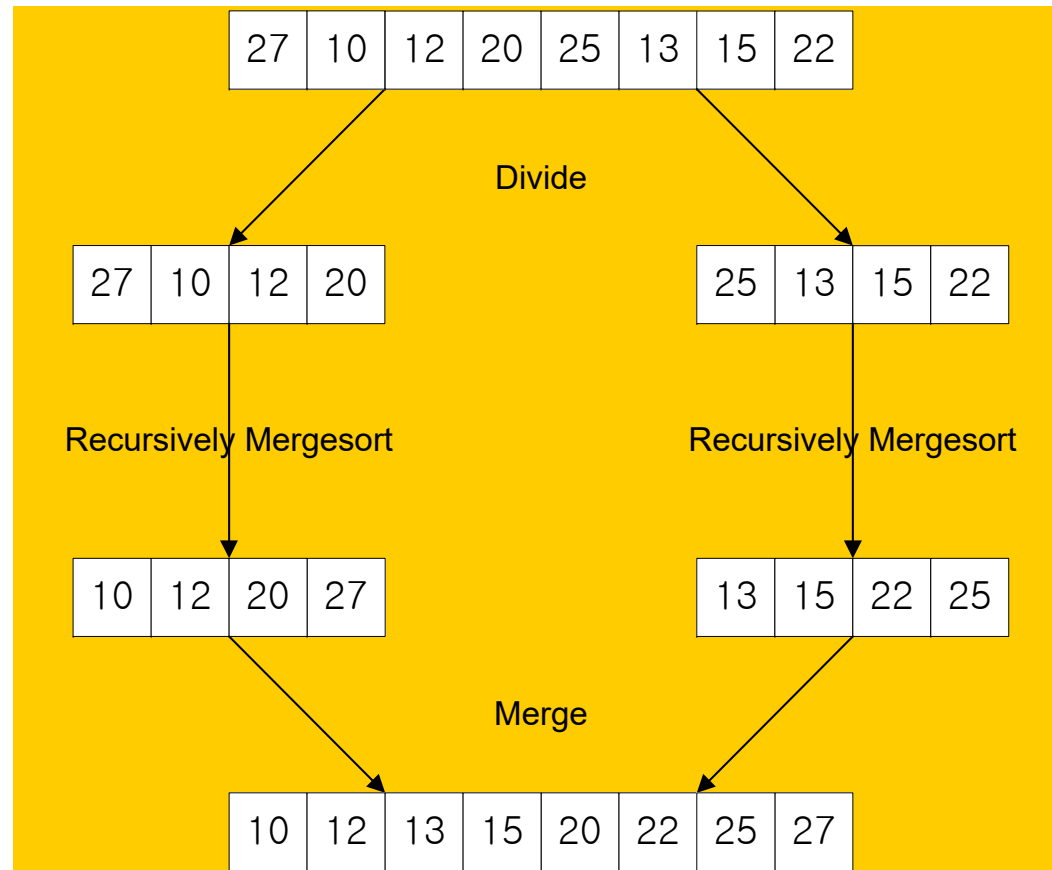
- 나누어진 부분배열에 대하여 재귀적으로 합병 정렬을 수행한다.
 - 단, 데이터의 개수가 1개인 경우에는 그 자체로 정렬된 상태이다.

- Combine (Merge)

- 두 개의 이미 정렬된 부분배열을 통합하여 n 개의 정렬된 배열로 만든다.

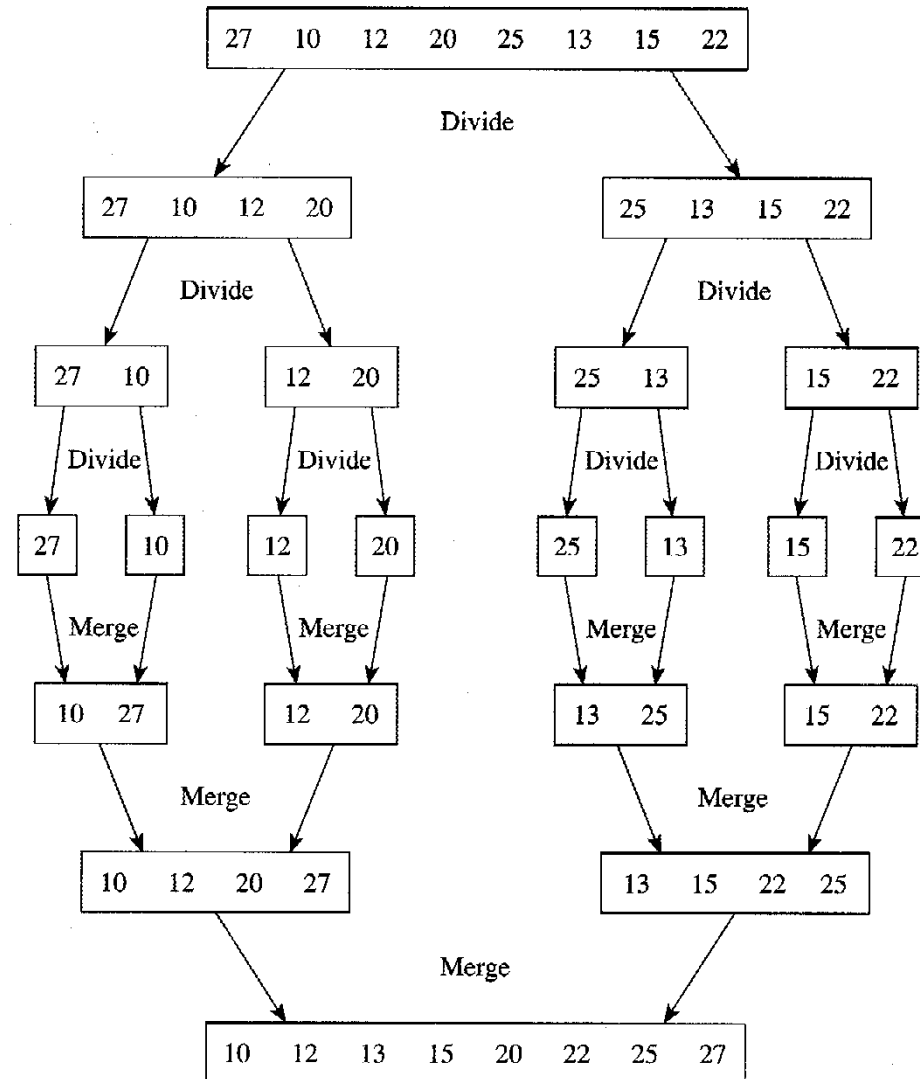
Merge Sorting (2)

- 예



Merge Sorting (3)

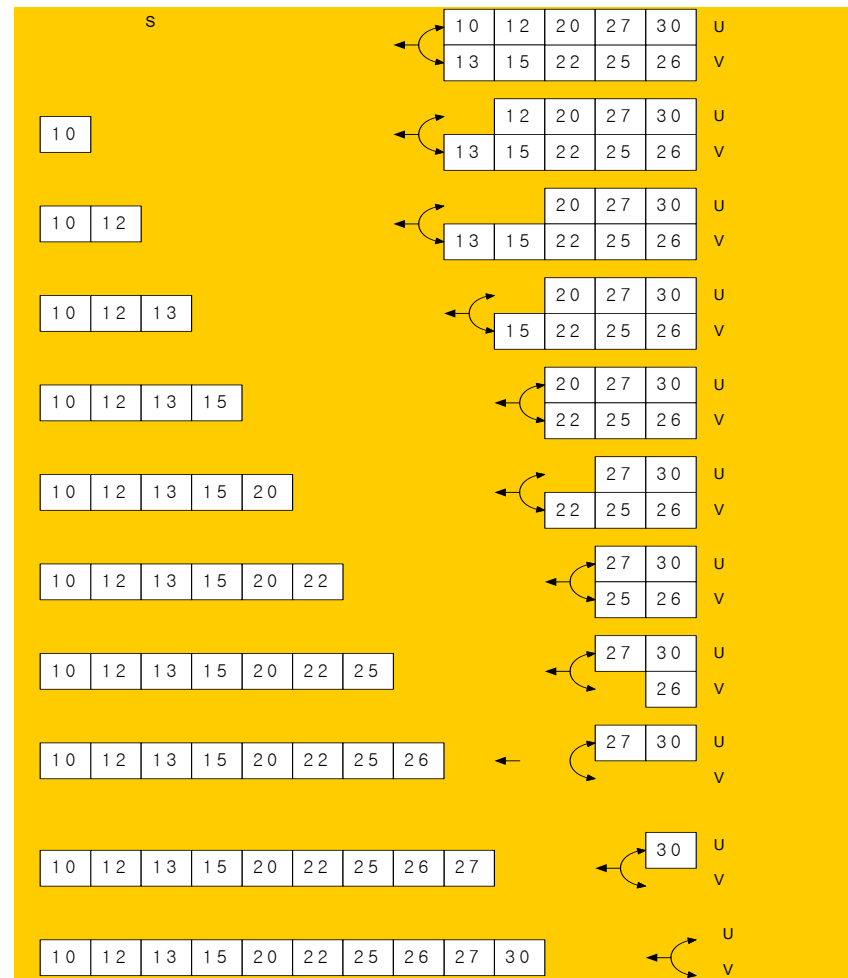
- 예



Merge Sorting (4)

– Merge

- 이미 정렬된 두 개의 배열이 주어졌을 때, 이 두 배열을 합쳐서 정렬함.



Merge Sorting (5)

– Merge

- 이미 정렬된 두 개의 배열이 주어졌을 때, 이 두 배열을 합쳐서 정렬함.

```
#define MAX_SIZE 100

void merge(int a[], int low, int mid, int high)
{
    int i, j, k;
    int tmp[MAX_SIZE];

    for(i=low; i<=high; i++)
        tmp[i] = a[i];

    i = k = low;
    j = mid+1;

    while(i<=mid && j<=high)
        if(tmp[i] <= tmp[j])
            a[k++] = tmp[i++];
        else
            a[k++] = tmp[j++];

    while(i<=mid)
        a[k++] = tmp[i++];
    while(j<=high)
        a[k++] = tmp[j++];
}
```

Merge Sorting (6)

– Merge Sorting

```
void mergeSort(int v[], int low, int high)
{
    int mid;

    if(low == high)
        return; /* base case */

    mid = (low + high) / 2;

    mergeSort(v, low, mid);
    mergeSort(v, mid+1, high);
    merge(v, low, mid, high);
}
```

```
void main(void)
{
    int i, v[MAX_SIZE] = { 5, 6, 9, 4, 0, 2, 1, 7, 3, 8 };

    mergeSort(v, 0, 9);
}
```

Merge Sorting (7)

– Analysis

- basic operation : merge() 에서 배열에 있는 두 수를 비교하는 연산
- $T(n)$: n 개의 정수를 merge sorting 할 때의 basic operation 수

$$T(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + (n-1) & n > 1 \end{cases}$$

– 위 식은 아래와 같이 단순화하여 생각할 수 있다.

$$T(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ 2T(n/2) + n & n > 1 \end{cases}$$

Merge Sorting (8)

– Analysis

$$T(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ 2T(n/2) + n & n > 1 \end{cases}$$

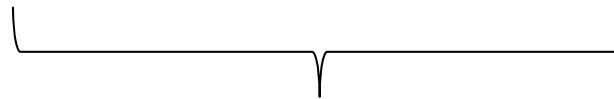
- 위 식은, $n = 2^k$ 일 때, 아래와 같이 order 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/2) + n = 2\{2T(n/4) + n/2\} + n \\ &= 4T(n/4) + 2n = 4\{2T(n/8) + n/4\} + 2n \\ &= 8T(n/8) + 3n \\ &\dots \\ &= nT(1) + (\log n)n \\ &= n \log n \\ &\in O(n \log n) \end{aligned}$$

Max. Conti. Subseq. Sum (MCSS)

- Maximum Contiguous Subsequence Sum
 - n 개의 정수 a_1, a_2, \dots, a_n 이 주어졌을 때, 연속적인 부분 수열의 합 $\sum_{k=i}^j a_k$ 이 최대가 되는 구간 (i, j) 와 그 구간의 합을 계산하시오.

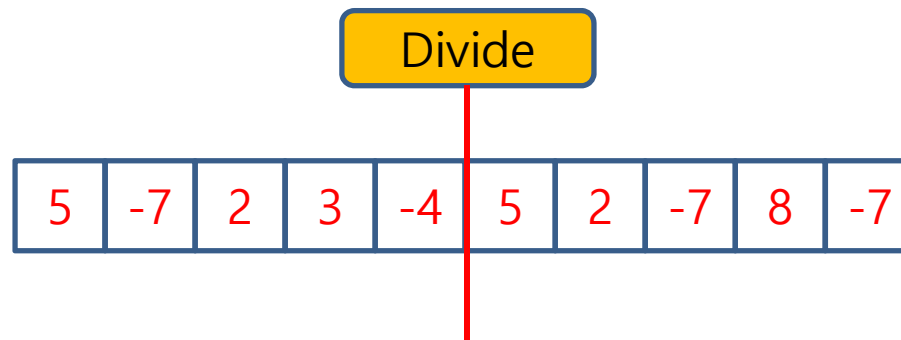
5	-7	2	3	-4	5	2	-7	8	-7
---	----	---	---	----	---	---	----	---	----



$$\sum_{k=3}^9 a_k = 9$$

Max. Conti. Subseq. Sum (MCSS) (2)

- Divide & Conquer
 - Divide :
 - n 개의 정수배열을 크기가 각각 $n/2$ 개인 부분배열로 나눈다.

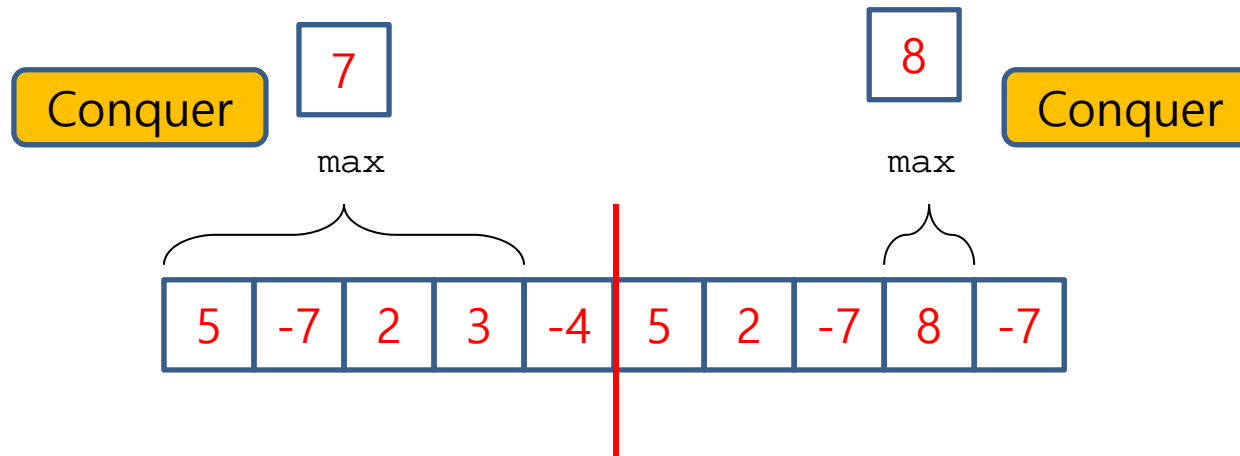


Max. Conti. Subseq. Sum (MCSS) (3)

- Divide & Conquer

- Conquer:

- 크기가 각각 $n/2$ 개인 부분배열에 대하여 recursive 하게 문제를 해결한다.

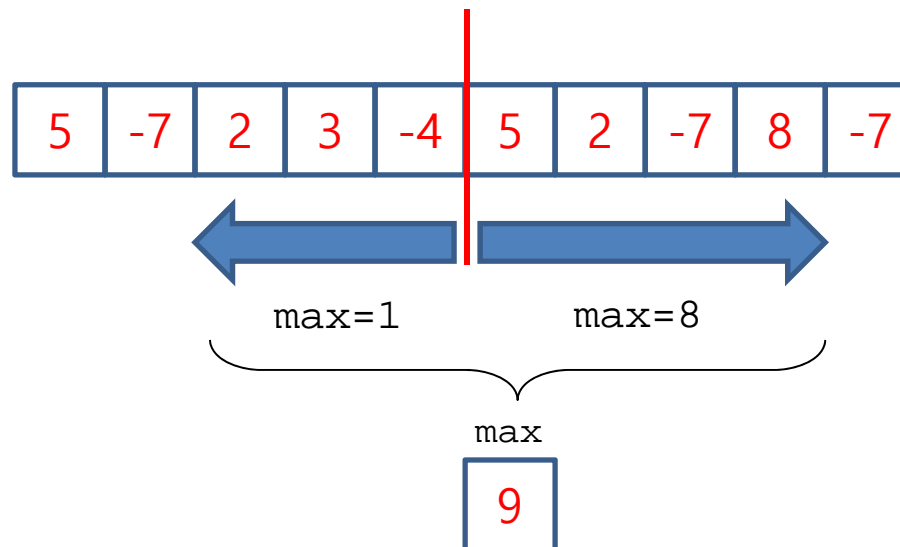


Max. Conti. Subseq. Sum (MCSS) (4)

- Divide & Conquer

- Combine:

- “Conquer” 단계에서 계산한 값과 다음과 같이 연속된 구간이 중앙을 걸쳐서 존재할 수 있으므로 이런 경우도 해결하여야 한다.
 - 이를 위해서는 중앙을 중심으로 왼쪽으로 연속적으로 최대가 되는 값과 중앙을 중심으로 오른쪽으로 연속적으로 최대가 되는 값을 구하여 합한다.

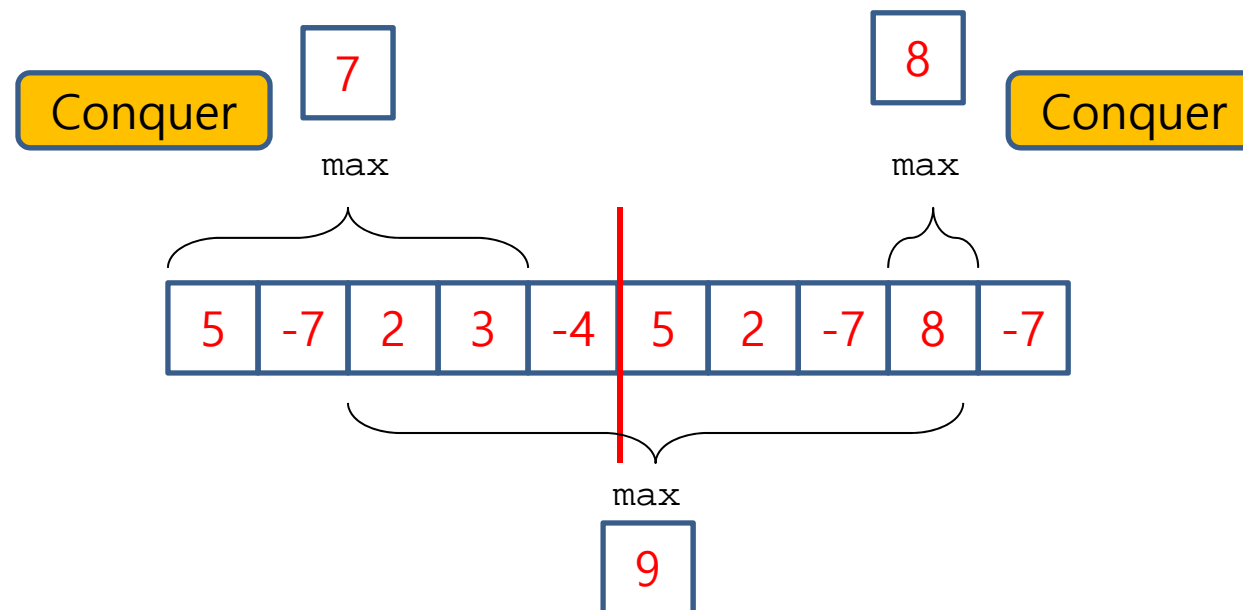


Max. Conti. Subseq. Sum (MCSS) (5)

- Divide & Conquer

- Combine:

- 따라서, 전체 데이터 중에서 최대의 합을 만드는 연속적인 구간은 다음 세 값 중의 하나다.
 - 왼쪽 $n/2$ 데이터에서 최대연속구간의 합
 - 오른쪽 $n/2$ 데이터에서 최대연속구간의 합
 - 중앙에 걸쳐서 최대연속구간의 합



Max. Conti. Subseq. Sum (MCSS) (6)

- Divide & Conquer

- Analysis

- basic operation : 배열의 숫자를 더하는 연산
 - 이 알고리즘의 "combine" 단계에서 중앙을 거쳐서 최대가 되는 연속구간을 계산하는 데 걸리는 basic operation 은 $n-1$ 번 수행된다.
 - 따라서, 이 알고리즘의 time complexity는 다음과 같이 "merge sorting"과 같은 재귀식으로 나타난다.

$$T(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + (n-1) & n > 1 \end{cases}$$

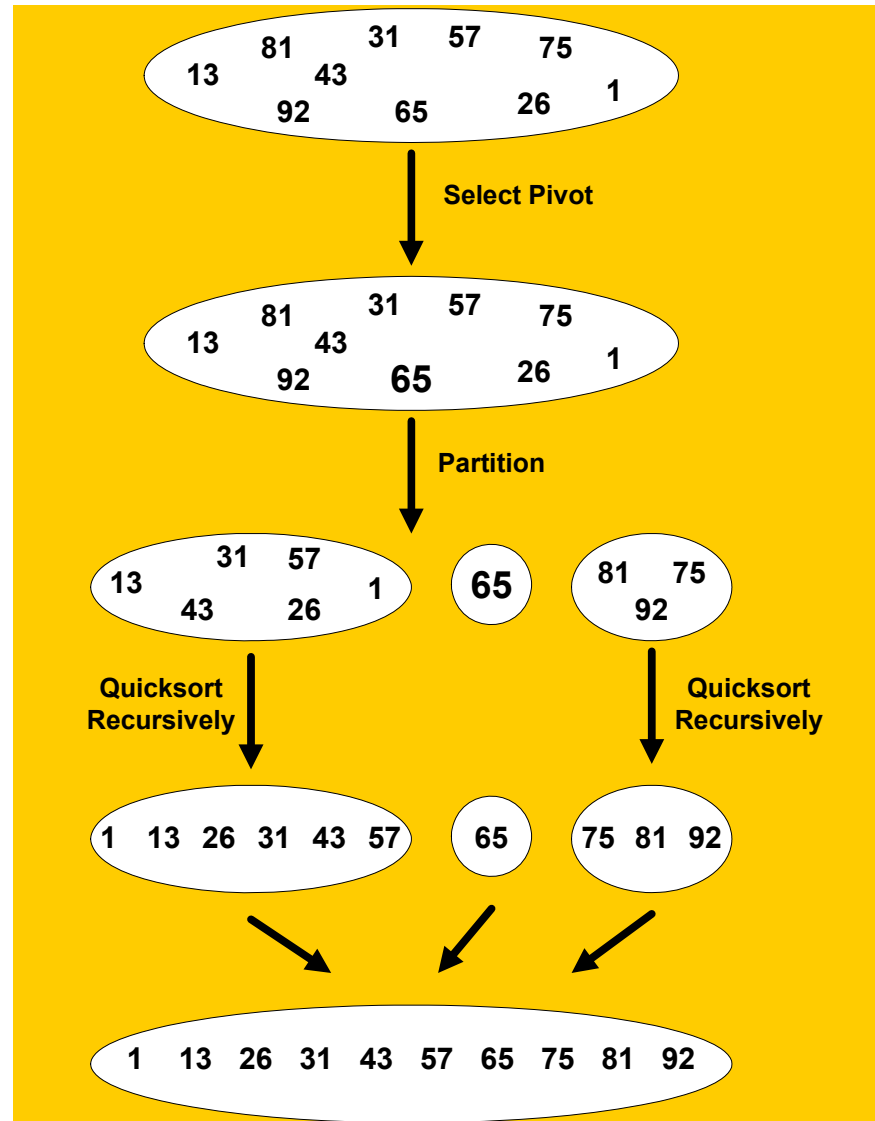
- 결과적으로, 본 알고리즘의 time complexity 는 "merge sorting"의 time complexity $O(n \log n)$ 과 동일하다.

Quick Sorting

- Quick Sorting
 - Divide & Conquer 알고리즘
 - Divide
 - 먼저 배열 중에 임의의 데이터를 pivot (피벗)으로 선택한다.
 - 배열에 있는 데이터들을 pivot 보다 작은 데이터 그룹과 pivot 보다 큰 데이터 그룹으로 나눈다.
 - Conquer
 - Pivot 을 중심으로 나누어진 두 그룹을 recursive 하게 quick sorting 을 수행한다.
 - Combine
 - Combine 작업은 따로 필요하지 않다 (왜?)

Quick Sorting (2)

- 예



Quick Sorting (3)

– Divide

- Quick sorting 의 divide 부분을 특별히 “partition”이라고 부른다.
- 먼저 pivot 데이터를 선택한다.
 - 가장 간단하게는 가장 왼쪽에 있는 데이터를 선택
 - Random 하게 선택하고 가장 왼쪽 데이터와 교환
 - 가장 왼쪽, 가장 오른쪽, 가장 중앙에 있는 세 데이터 중에 크기가 가장 중간인 데이터를 선택하고 가장 왼쪽에 있는 데이터와 교환

Quick Sorting (4)

– Divide (partition)

```
int partition(int a[], int low, int high)
{
    int i, j;
    int pivot, pivotPos, tmp;

    pivot = a[low];
    j = low;

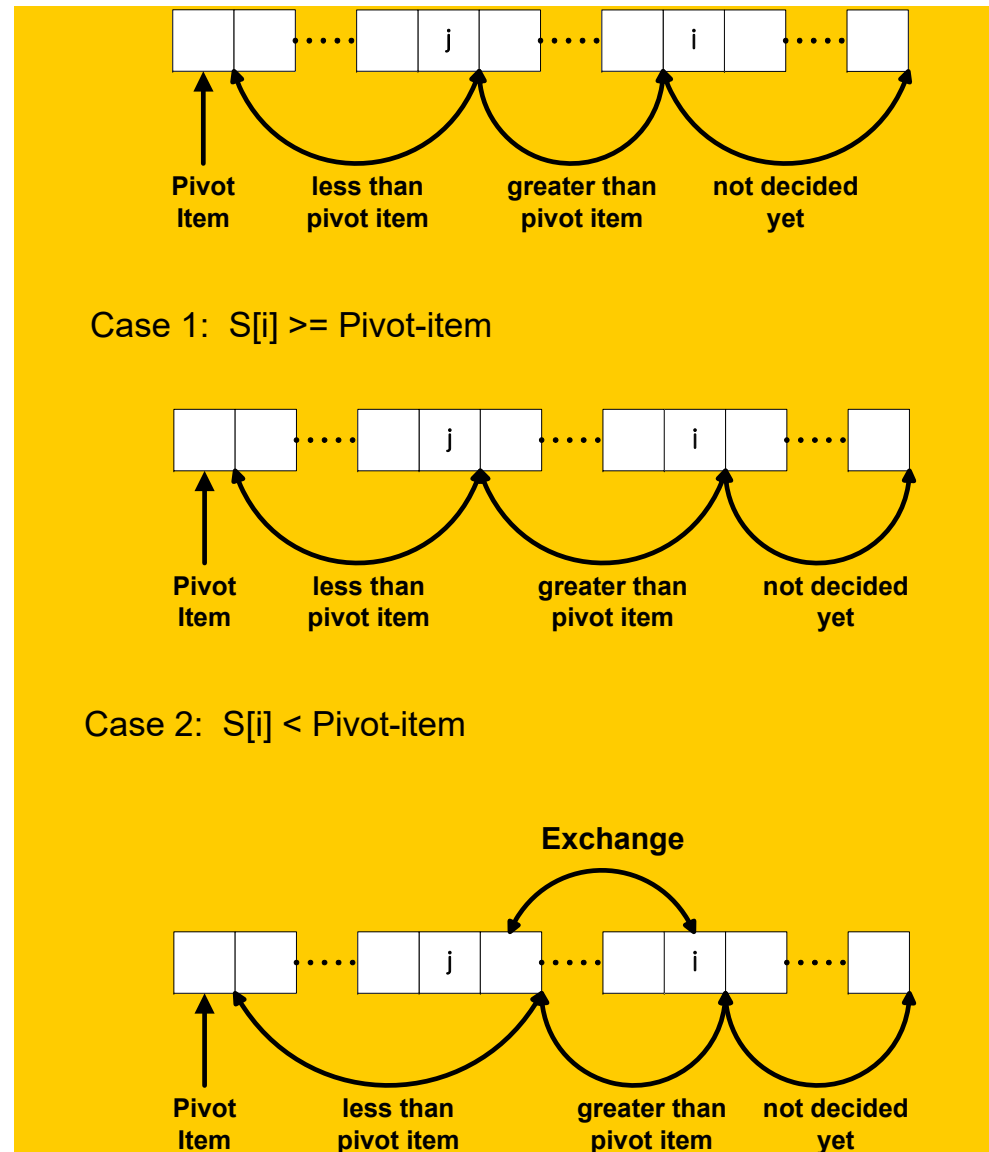
    for(i=low+1; i<=high; i++)
    {
        if(a[i] < pivot)
        {
            j++;
            /* swap */
            tmp = a[i]; a[i] = a[j]; a[j] = tmp;
        }
    }

    pivotPos = j;
    tmp = a[low]; a[low] = a[pivotPos]; a[pivotPos] = tmp;

    return pivotPos;
}
```

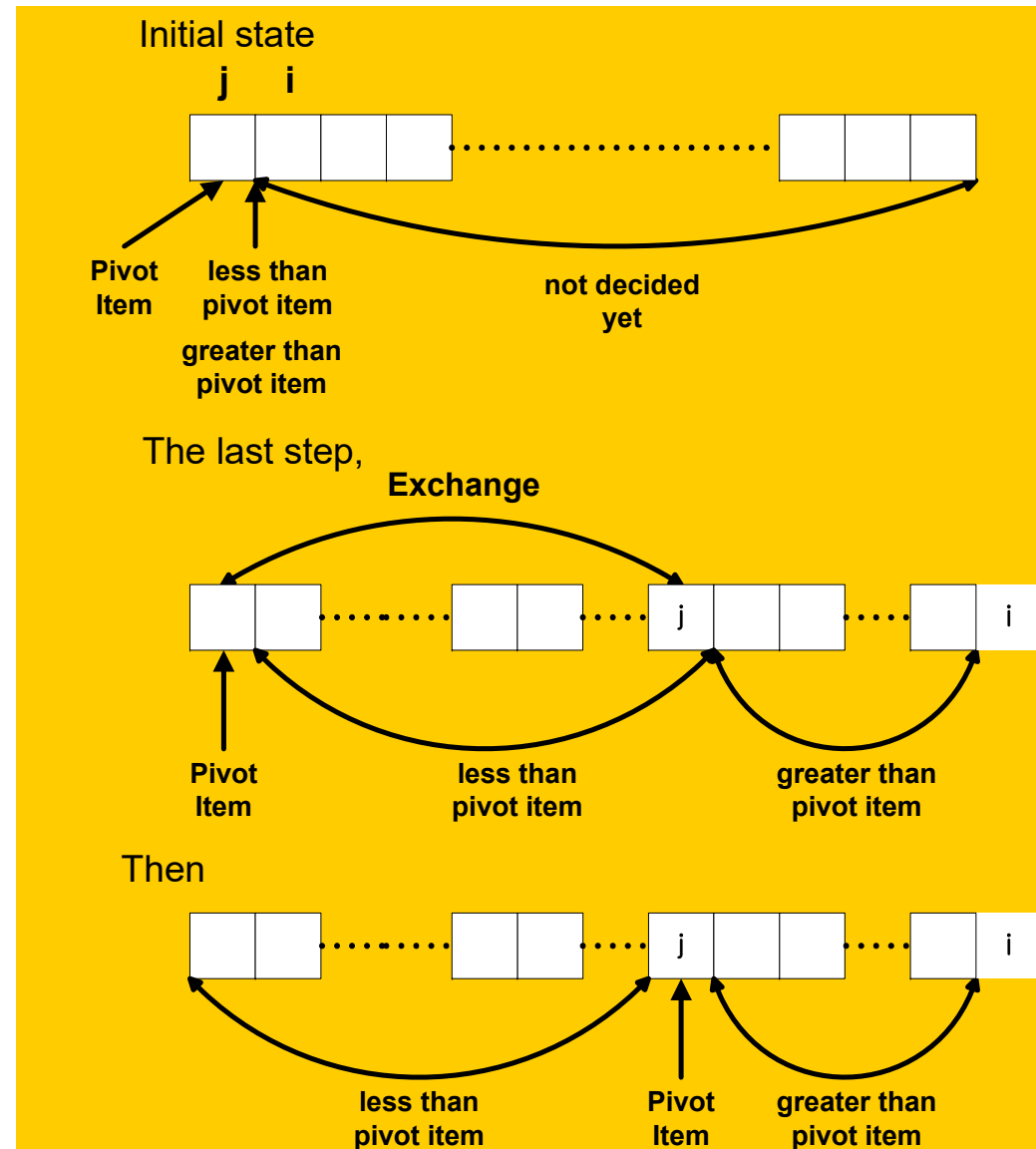
Quick Sorting (5)

– Divide (partition)



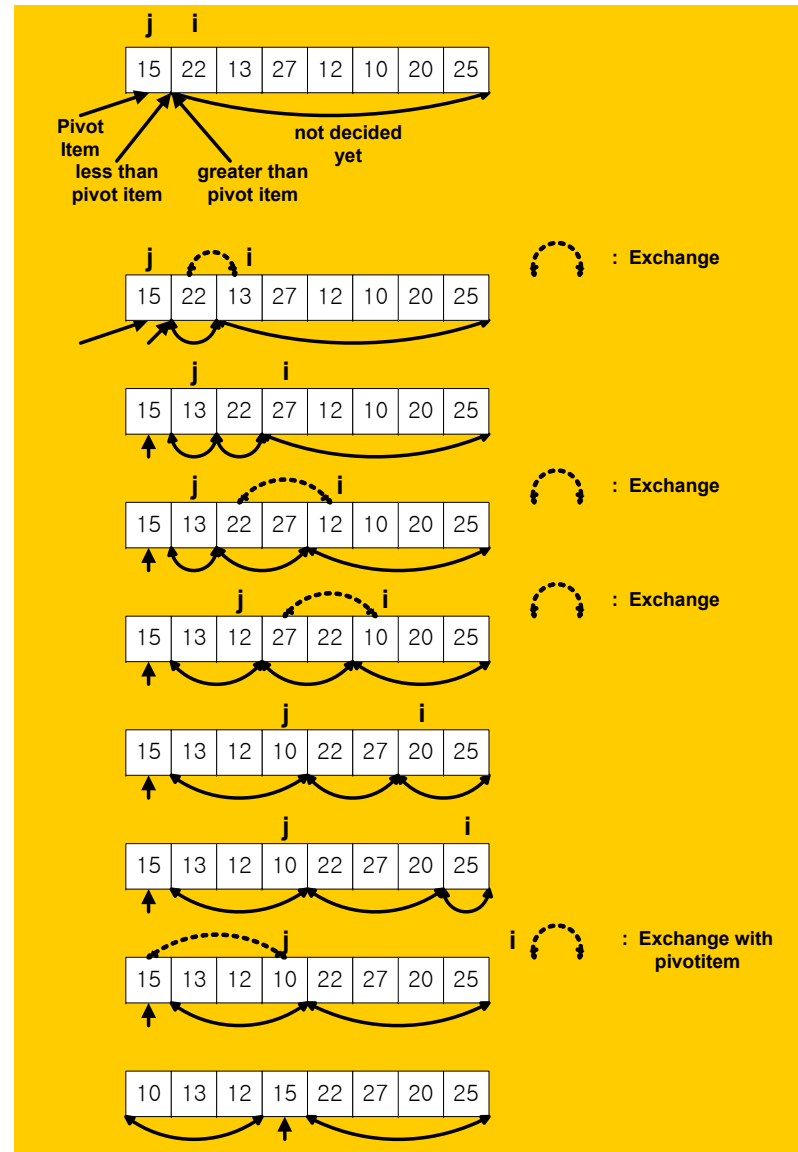
Quick Sorting (6)

– Divide (partition)



Quick Sorting (7)

– Divide (partition)



Quick Sorting (8)

– Divide (partition)

- Analysis

- Basic operation : 배열에 저장된 데이터와 pivot 과 비교하는 연산
- $T(n)$: n 개의 데이터에 대하여 partition 작업을 수행하는 basic operation 의 횟수

$$T(n) = n-1$$

Quick Sorting (9)

– Quick Sorting 알고리즘

```
void quickSort(int v[], int low, int high)
{
    int pivotPos;

    if(high > low)
    {
        pivotPos = partition(v, low, high);
        quickSort(v, low, pivotPos-1);
        quickSort(v, pivotPos+1, high);
    }
}
```

```
void main(void)
{
    int i, v[MAX_SIZE] = { 5, 6, 9, 4, 0, 2, 1, 7, 3, 8 };

    quickSort(v, 0, 9);
}
```

Quick Sorting (10)

– Quick Sorting 알고리즘

- Analysis

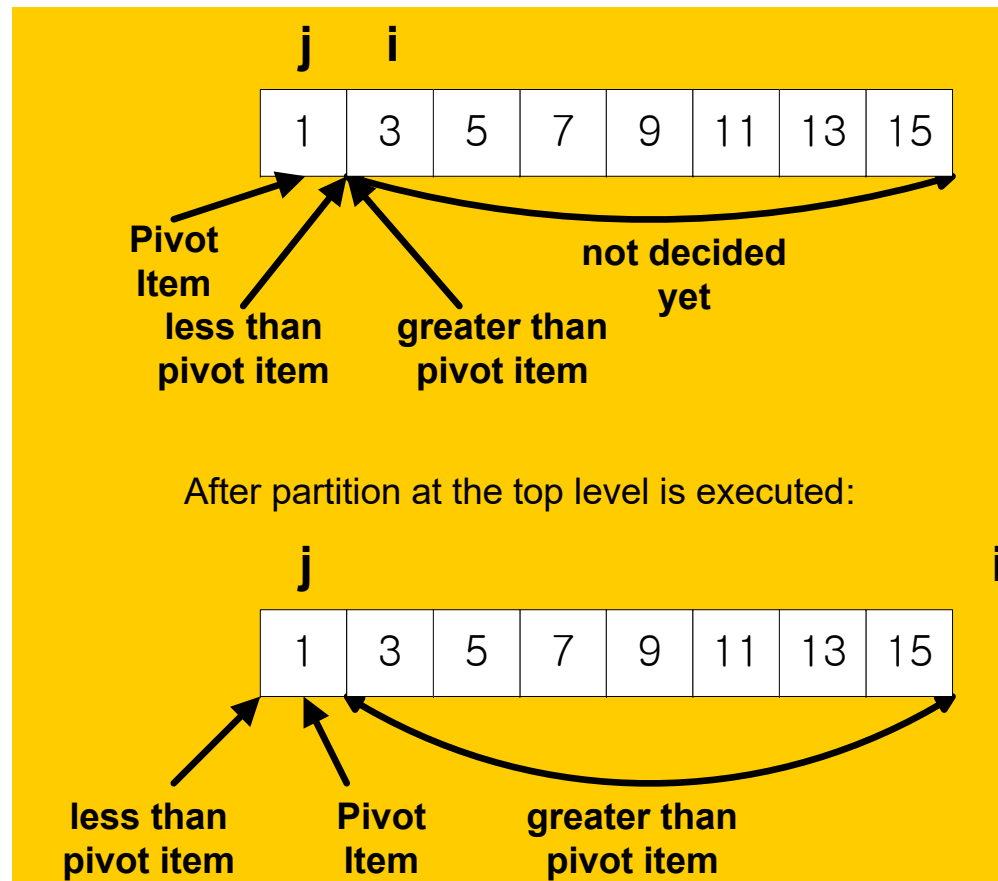
- Basic operation : 배열에 저장된 데이터와 pivot 과 비교하는 연산
- $T(n)$: n 개의 데이터에 대하여 quick sorting 을 수행하는 basic operation 의 횟수
- worst case 데이터는 미리 정렬된 데이터가 입력되는 경우이다.

Quick Sorting (11)

– Quick Sorting 알고리즘

- Worst-Case Analysis

- worst case 데이터는 미리 정렬된 데이터가 입력되는 경우이다.



Quick Sorting (12)

– Quick Sorting 알고리즘

- Worst-Case Analysis

- worst case 데이터는 미리 정렬된 데이터가 입력되는 경우이다.

- $T(n) = T(0) + T(n-1) + n-1$

Time to sort
left subarray

Time to sort
right subarray

Time to
partition

$$T(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ T(n-1) + n - 1 & n > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1) + (n-1) \\ &= T(n-2) + (n-2) + (n-1) \\ &\dots \\ &= T(1) + 1 + \dots + (n-2) + (n-1) \\ &= n(n-1)/2 \in O(n^2) \end{aligned}$$

Quick Sorting (13)

– Quick Sorting 알고리즘

- Best-Case Analysis

- best case 는 merge sorting 에서와 같이 나누어지는 부분배열의 크기가 각각 $n/2$ 인 경우이다. 즉, 똑 같은 크기의 두 부분배열로 계속 나누어지는 경우이다.
- 이 경우의 time complexity 는 merge sorting의 time complexity와 같으므로 그 order는 $O(n \log n)$ 이다.

- Average-Case Analysis

- 배열에 속하는 데이터가 모두 같은 확률로 Pivot 으로 선택된다고 가정하여 분석함.
- 이 경우의 order는 $O(n \log n)$ 임. (생략)

Merge / Quick Sorting

– Merge Sorting, Quick Sorting 비교

	Merge Sorting	Quick Sorting
Divide	<ul style="list-style-type: none">• 매우 간단함• 단순히 반으로 나눈다	<ul style="list-style-type: none">• Partition() 수행• Pivot 을 중심으로, Pivot 보다 작은 데이터그룹과 큰 데이터 그룹 두 부분으로 나눔• $O(n)$ 시간을 요함
Conquer	Recursive 작업	Recursive 작업
Combine	<ul style="list-style-type: none">• Merge() 수행• Conquer 단계에서 정렬된 두 배열을 병합하는 작업 수행• $O(n)$ 시간을 요함	<ul style="list-style-type: none">• 필요없음

Bolts & Nuts 문제

- Bolts & Nuts

- 문제

- 크기가 모두 다른 n 개의 너트와 각 너트의 크기에 꼭 맞는 n 개의 볼트가 마구 섞여져 있다. 다음과 같은 작업만이 가능하다고 할 때, 크기가 꼭 맞는 n 개의 볼트-너트 조합을 만드시오.
 - 한 개의 너트와 한 개의 볼트를 끼워보고, 너트가 볼트에 비해 크기가 크다, 작다, 혹은 꼭 맞다를 판별할 수 있다.
 - 그러나, 너트끼리 그 크기를 비교할 수 없으며, 또한 볼트끼리도 그 크기를 비교할 수 없다.

- 해결 알고리즘

- Quick sorting 알고리즘과 유사한 방법을 사용

Homework

- qsort() source code 를 분석
 - Hand-writing report
 - Source code 를 line-by-line 으로 분석하여 각 line의 내용을 comment 하시오.
 - 구현된 Partition 알고리즘을 설명하시오.
 - qsort() 와 강의에서 학습한 quicksort() 의 차이점을 가장 중요한 요소부터 차례로 10가지 이상 설명하시오.
 - Coding (채점서버 제출)
 - qsort() 의 source code 중에서 partition 알고리즘을 강의에서 학습한 partition 알고리즘으로 교체하여 구현하여, 새로운 함수를 qqsort()로 명명하여, 다음 프로그램을 작성하여 채점 서버에 제출하시오.

Homework

– qqsort()

```
#include <stdlib.h>

void qqsort( void *base, size_t nel, size_t width,
             int (*compare)(const void *, const void *))
{
}

int icompare(const void *a, const void *b)
{
    return *(int *)a - *(int *)b;
}
```

```
#define MAX_SIZE 10000
int data[MAX_SIZE];
void main()
{
    FILE *fp;
    int numTest, numData;
    int i, j;

    fp = fopen("input.txt", "r");
    if (fp == NULL) {
        fprintf(cerr, "file open error.\n");
        exit(1);
    }
}
```

Homework

– qqsort()

```
fscanf("%d", &numTest);
for(i=0; i<numTest; i++)
{
    fscanf("%d", &numData);
    for(j=0; j<numData; j++)
        fscanf("%d", &data[j]);

    qqsort(data, sizeof(ints)/sizeof(ints[0]), sizeof(int),
icompare);

    for(j=0; j<numData; j++)
        printf("%d ", data[i]);
    printf("\n");
}
```

Another Partition Algorithm

```
int partition(int a[], int low, int high)
{
    int i, j;
    int pivot;

    pivot = a[low];
    swap( a[low], a[high] ); // move the pivot to the end

    i = low - 1;
    j = high;

    while (true) {
        // move index markers i, j toward center
        // until we find a pair of mis-partitioned elements
        while (a[++i] <= pivot);
        while (a[--j] >= pivot);

        if (i < j)
            swap( a[i], a[j] );
        else
            break;
    }

    return i;
}
```


Another Partition Algorithm

```
int partition(int a[], int low, int high)
{
    int i, j;
    int pivot;

    pivot = a[low];
    swap( a[low], a[high] ); // move the pivot to the end

    i = low - 1;
    j = high;

    while (true) {
        // move index markers i, j toward center
        // until we find a pair of mis-partitioned elements
        do { i++; } while (i < j && a[i] < pivot);
        do { j--; } while (i < j && a[j] > pivot);

        if (i < j)
            swap( a[i], a[j] );
        else
            break;
    }

    return i;
}
```

Quick Sort **Faster** Than Merge Sort

- Both quick sort and merge sort take $O(N \log N)$ in the average case.
- But quick sort is faster in the average case:
 - The inner loop consists of an increment/decrement (by 1, which is fast), a test and a jump.
 - There is no extra juggling as in merge sort.

```
while (true) {  
    // move index markers i,j toward center  
    // until we find a pair of mis-partitioned elements  
    while (a[++i] <= pivot);  
    while (a[--j] >= pivot);  
  
    if (i < j)  
        swap( a[i], a[j] );  
    else  
        break;  
}
```

inner loop

Example

- Quiz Example

Assume that the median of three elements (first, middle, and last) is chosen as the pivot.

Sorting practice problem

- Consider the following array:
[7, 17, 22, -1, 9, 6, 11, 35, -3]
- Each of the following is a view of a sort-in-progress on the elements. Which sort is which?
 - (If the algorithm is a multiple-loop algorithm, the array is shown after a few of these loops have completed. If the algorithm is recursive, the array is shown after the recursive calls have finished on each sub-part of the array.)
 - Assume that the quick sort algorithm chooses the **first** element as its pivot at each pass.
- (a) [-3, -1, 6, 17, 9, 22, 11, 35, 7]
- (b) [-1, 7, 17, 22, -3, 6, 9, 11, 35]
- (c) [9, 22, 17, -1, -3, 7, 6, 35, 11]
- (d) [-1, 7, 6, 9, 11, -3, 17, 22, 35]
- (e) [-3, 6, -1, 7, 9, 17, 11, 35, 22]
- (f) [-1, 7, 17, 22, 9, 6, 11, 35, -3]