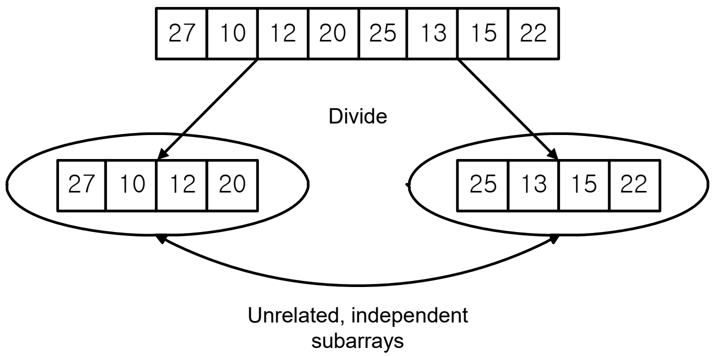
기본 알고리즘
제4장

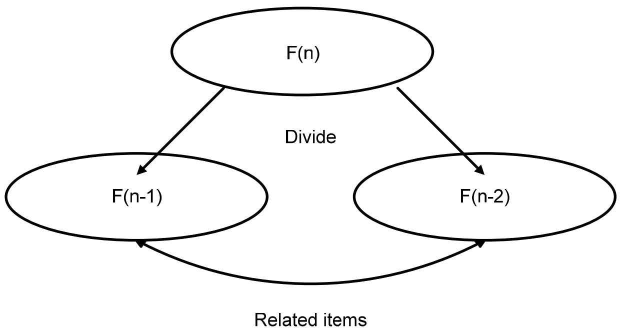
2017-Fall

국민대학교 컴퓨터공학부 최준수

동적계획법

- 동적계획법
  - 분할정복기법 (Divide-and-Conquer)과 유사
    - 문제를 여러 개의 subproblem 으로 나누고, 각 subproblem을 해결한 후, 각 subproblem의 해답을 이용하여 원래 문제의 해답을 계산함
    - 그러나, 각 subproblem 이 독립적이지 않고, 서로 연관되어 있는 경우에는 매우 많은 반복연산이 이루어지고, 이로 하여금 많은 수행시간이 필요함.





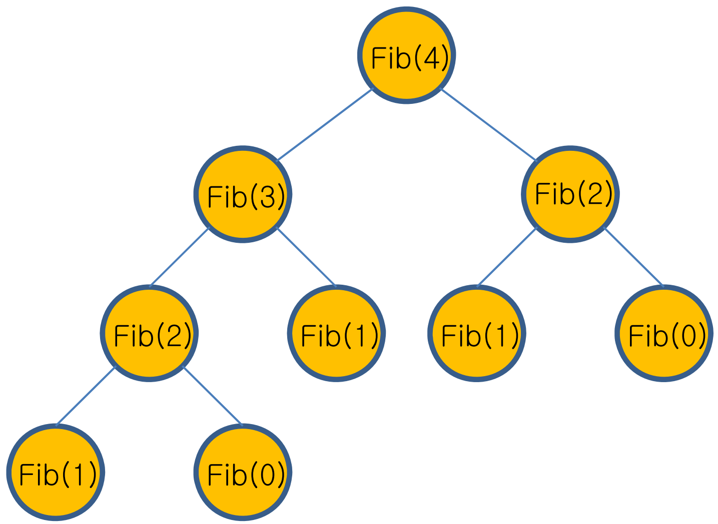
동적계획법 (2)

- 예
  - Fibonacci 수 계산

$$
Fib(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \quad \text{(base case)} \\ 1 & n = 1 \quad \text{(base case)} \\ Fib(n-1) + Fib(n-2) & n > 1 \quad \text{(recursive step)} \end{cases}
$$

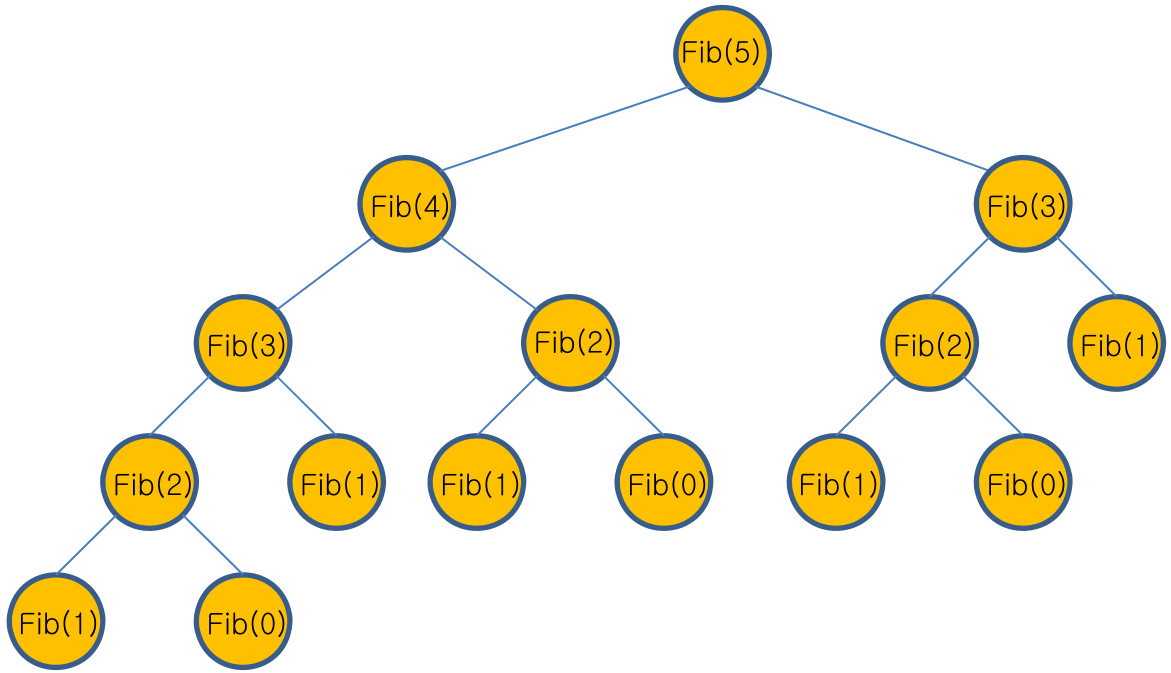
```
int fib(int n)
{
    if (n <= 1) /* base case */
        return n;
    else        /* recursive step */
        return fib(n-1)+fib(n-2);
}
```

```
int main()
{
    fib(4);
}
```



동적계획법 (3)

- 예
  - Fibonacci 수 계산



동적계획법 (3)

- Fib(100) 계산시간은?

$$Fib(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \quad \text{(base case)} \\ 1 & n = 1 \quad \text{(base case)} \\ Fib(n-1) + Fib(n-2) & n > 1 \quad \text{(recursive step)} \end{cases}$$

  - T(n) : Fib(n)을 계산할 때, 덧셈의 횟수

$$T(n) = \begin{cases} 0 & n = 0,1 \quad \text{(base case)} \\ T(n-1) + T(n-2) + 1 & n > 1 \quad \text{(recursive step)} \end{cases}$$

  - T(n) : Fib(n)을 계산할 때, 시간 (sec)

$$T(n) = \begin{cases} 10^{-9} & n = 0,1 \quad \text{(base case)} \\ T(n-1) + T(n-2) + 10^{-9} & n > 1 \quad \text{(recursive step)} \end{cases}$$

동적계획법 (3)

- Fib(100) 계산시간은?

```c
#include <stdio.h>
#include <time.h>

int fib(int n)
{
    if (n <= 1)
        return n;
    else
        return fib(n-1) + fib(n-2);
}

void main(void)
{
    int i, value;
    time_t startTime, finishTime;
    clock_t startClock, finishClock;

    for(i=0;i<=100; i++)
    {
        time(&startTime); startClock = clock();
        value = fib(i);
        time(&finishTime); finishClock = clock();

        printf("Fib(%d): %d\n", i, value);
        printf("elapsed time: %.2lf sec\n",
            (double)(finishClock - startClock)/CLOCKS_PER_SEC);
    }
}
```

동적계획법 (3)

- Fib(100) 계산시간은?

```
C:\Windows\system32\cmd.exe
Fib(20): 6765
elapsed time: 0.00 sec
Fib(21): 10946
elapsed time: 0.00 sec
Fib(22): 17711
elapsed time: 0.00 sec
Fib(23): 28657
elapsed time: 0.00 sec
Fib(24): 46368
elapsed time: 0.01 sec
Fib(25): 75025
elapsed time: 0.01 sec
Fib(26): 121393
elapsed time: 0.01 sec
Fib(27): 196418
elapsed time: 0.02 sec
Fib(28): 317811
elapsed time: 0.03 sec
Fib(29): 514229
elapsed time: 0.05 sec
Fib(30): 832040
elapsed time: 0.09 sec
Fib(31): 1346269
```

```
C:\Windows\system32\cmd.exe
Fib(33): 3524578
elapsed time: 0.32 sec
Fib(34): 5702887
elapsed time: 0.52 sec
Fib(35): 9227465
elapsed time: 0.82 sec
Fib(36): 14930352
elapsed time: 1.37 sec
Fib(37): 24157817
elapsed time: 2.28 sec
Fib(38): 39088169
elapsed time: 3.54 sec
Fib(39): 63245986
elapsed time: 5.55 sec
Fib(40): 102334155
elapsed time: 9.49 sec
Fib(41): 165580141
elapsed time: 15.08 sec
Fib(42): 267914296
elapsed time: 24.33 sec
Fib(43): 433494437
elapsed time: 44.05 sec
```

동적계획법 (3)

- Fib(100) 계산시간은?

n	근사실행시간 (sec)	참고	n	근사실행시간 (year)	참고
35	1	Fib(1)	71	1	Fib(1)
36	1	Fib(2)	72	1	Fib(2)
37	2	Fib(3)	73	2	Fib(3)
38	3	Fib(4)	74	3	Fib(4)
39	5	Fib(5)	75	5	Fib(5)
72	39,088,169	Fib(38)	100	832,040	Fib(30)

기준

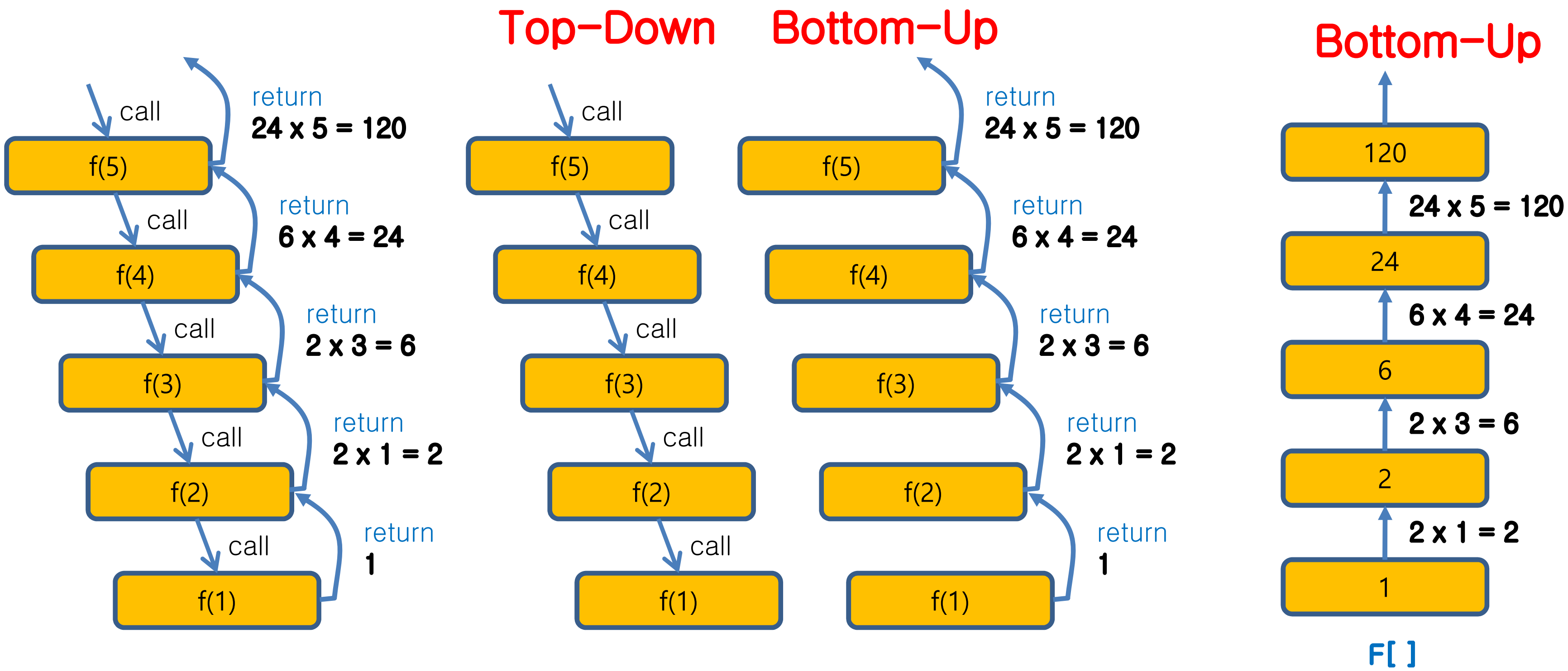
기준

1년 = 31,536,000초

동적계획법 (4)

- 문제해결 방법
  - 반복연산의 제거 (Bottom-Up Approach)
    - 작은 문제부터 시작
    - 작은 문제를 해결한 후, 그 해답을 테이블에 저장
    - 큰 문제를 해결하면서 작은 문제를 해결할 필요가 있는 경우에는, 테이블에 저장된 작은 문제의 해답을 사용

- 문제해결 방법
  - Bottom-Up Approach

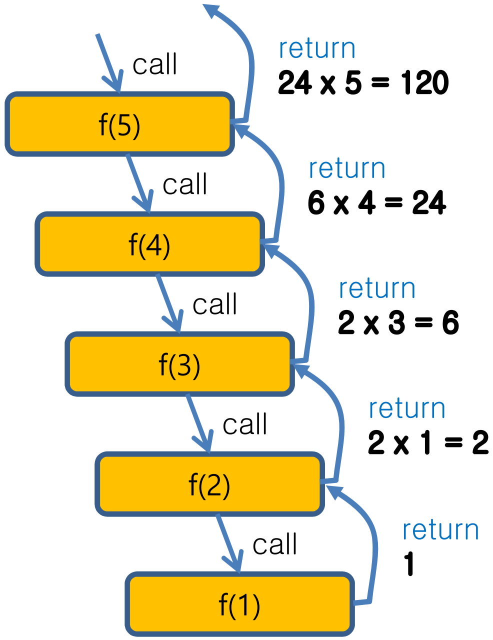


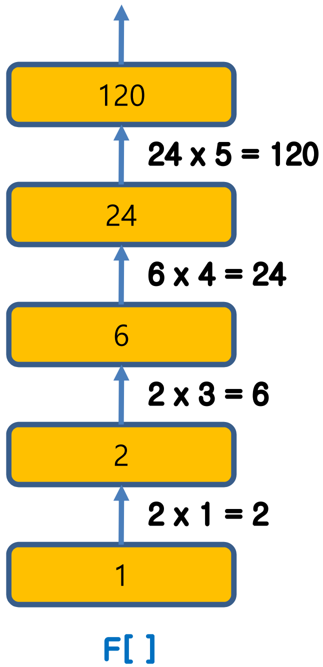
동적계획법 (6)

- 문제해결 방법
  - Bottom-Up Approach

```
int f(int n)
{
    if (n <= 1)  /* base case */
        return 1;
    else
        return n*f(n-1);
}
```

```
int f(int n)
{
    int i, F[100];

    F[0] = 1;         /* base case */

    for(i=1; i<=n; i++)
        F[i] = i * F[i-1];

    return F[n];
}
```





동적계획법 (7)

- 동적계획법으로 해결하는 문제의 형태
  - 최적화문제 (Opimization Problem)
    - 문제를 해결하는 해답이 여러 개 있지만, 그 중에서도 특정한 조건이 최대가 되는 혹은 최소가 되는 해답을 구하는 문제.
    - 예 : 동전교환문제
      - 동전의 종류에 1원, 5원, 10원, 25원, 50원이 있을 때, 거스름돈 137원을 동전으로 교환해 주고자 한다.
      - 거스름돈을 동전으로 교환하는 방법에는 여러 가지가 있다.
      - 그 방법 중에서, 동전의 개수가 최소가 되도록 교환하는 동전 그룹을 계산하시오.
      - 해답 : 동전 6개, 동전 그룹 : [50, 50, 25, 10, 1, 1]
    - 최적화 문제의 해답
      - 최적값 (위의 예에서는 동전의 최소개수, 6개)
      - 최적값을 가질 때의 해답 (위의 예에서는 동전의 그룹)
      - 어떤 경우에는 최적값만 필요한 경우도 있다.

동적계획법 (8)

- 동적계획법으로 문제를 해결하는 시나리오

(단계 1) 최적의 해답의 구조를 분석.

- 최적값 혹은 최적해답의 어떻게 구할 수 있는지를 분석함.
  - 이때, 많이 사용하는 방법이 "working backward" 기법이다.
  - "Working backward" 기법을 이용하면, 문제의 해답을 top-down 방법으로 분석할 수 있다.

(단계 2) 최적의 해답의 최적값을 재귀식으로 정의.

- 위 단계 1에서 "working backward" 기법으로 최적값을 top-down 방식으로 분석하면, 최적값을 재귀식으로 정의할 수 있다.

(단계 3) 상향식으로 최적값을 계산.

- 위 단계 2에서 재귀식으로 정의된 최적값을 상향식(bottom-up)으로 계산한다.
- 상향식으로 계산한다는 의미는 가장 작은 데이터에 대한 해답부터 계산하여 점차 큰 데이터의 해답을 계산해 나간다는 것을 나타낸다.
- 이때, 이미 계산한 작은 데이터에 대한 해답은 테이블에 저장해 두고, 필요한 경우에는 다시 계산하지 않고 테이블에 저장된 해답을 바로 사용하도록 한다.

동적계획법 (9)

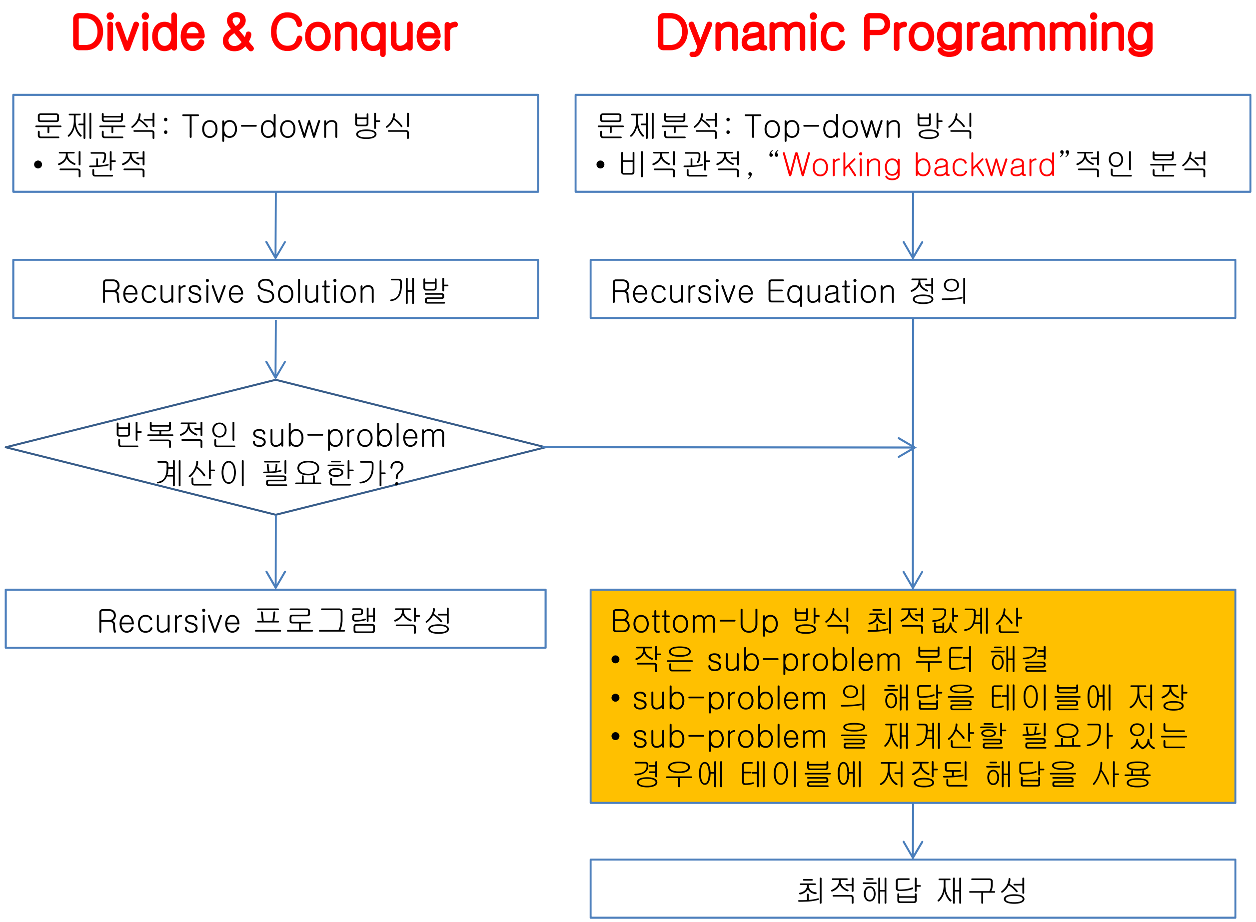
- 동적계획법으로 문제를 해결하는 방법

  (단계 4) 최적의 해답계산

  - 위 단계 3에서는 최적값을 계산하는 과정이고, 단계4에서는 최적해답을 계산하는 단계이다.
  - 예를 들어, 동전교환문제에서 단계3에서는 최소동전의 개수를 계산하고, 단계4에서 최소개수의 동전그룹을 계산한다.
  - 단계 4에서 최적의 해답을 계산하기 위해서는 단계 3에서 최적값을 계산하는 과정에서 발생하는 정보를 이용한다. 이를 위해서는 단계 3에서 최적값을 계산하는 테이블 이외에 이 정보를 저장하는 테이블을 따로 만들고, 정보가 만들어질 때마다 테이블에 저장해 둔다. 이 테이블에 저장된 정보를 이용하여 단계 4에서 최적의 해답을 계산하게 된다.
  - 단계 4에서 최적의 해답은 단계3에서 만들어 둔 정보를 이용하여 계산하기 때문에, 최적해답을 재구성(reconstruct), 혹은 구성(construct)한다라고도 한다.

동적계획법 (10)

- 분할정복기법과 동적계획법



1차 동적계획법

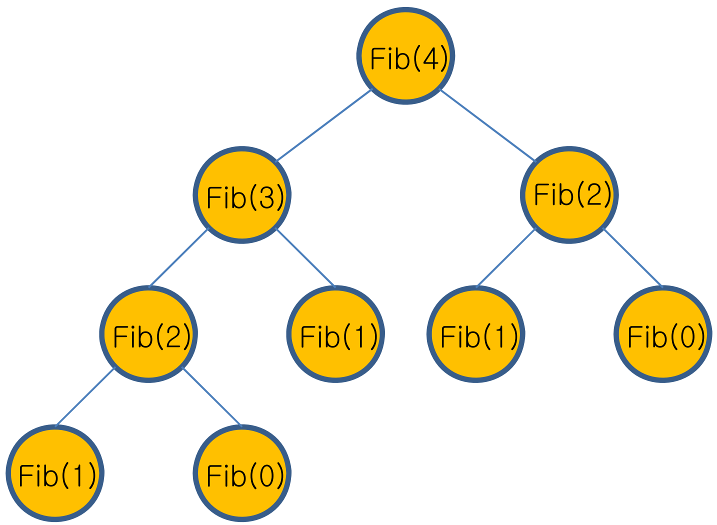
- 1차 동적계획법
  - 재귀식에서 1개의 변수가 필요한 문제
  - 1차원 배열로 동적계획법 구현
  - 예
    - Fibonacci 수 계산
    - 동전교환 (coin exchange) 문제
    - 기타

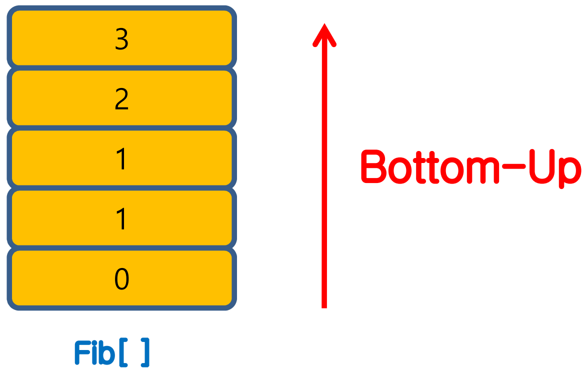
Fibonacci 수 계산

– Fibonacci 수 계산

```
int fib(int n)
{
    if (n <= 1) /* base case */
        return n;
    else        /* recursive step */
        return fib(n-1)+fib(n-2);
}
```

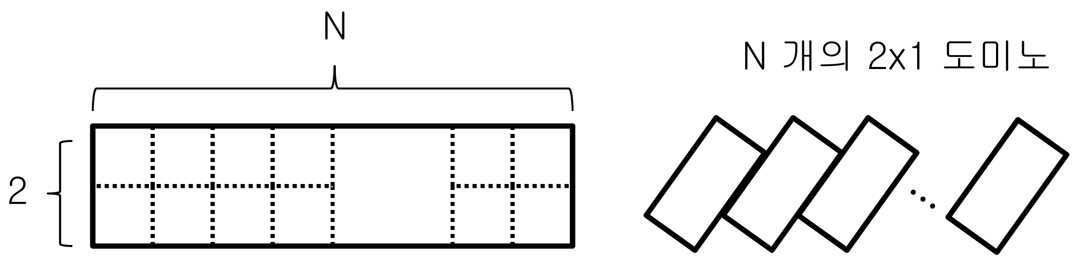
```
int fib(int n)
{
    int i, Fib[100];

    Fib[0] = 0;
    Fib[1] = 1;/* base case */

    for(i=2; i<=n; i++)
        Fib[i] = Fib[i-1] + Fib[i-2];

    return F[n];
}
```



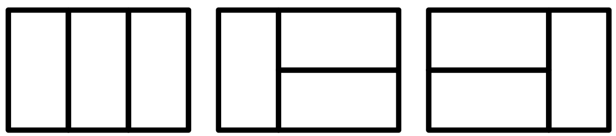


2xN 직사각형 타일 채우기 문제

- 2xN 직사각형 타일 채우기 문제
  - 크기가 2xN 인 직사각형이 주어졌을 때, 이 직사각형을 크기가 2x1 인 도미노 타일로 채우는 가지수를 계산하시오.

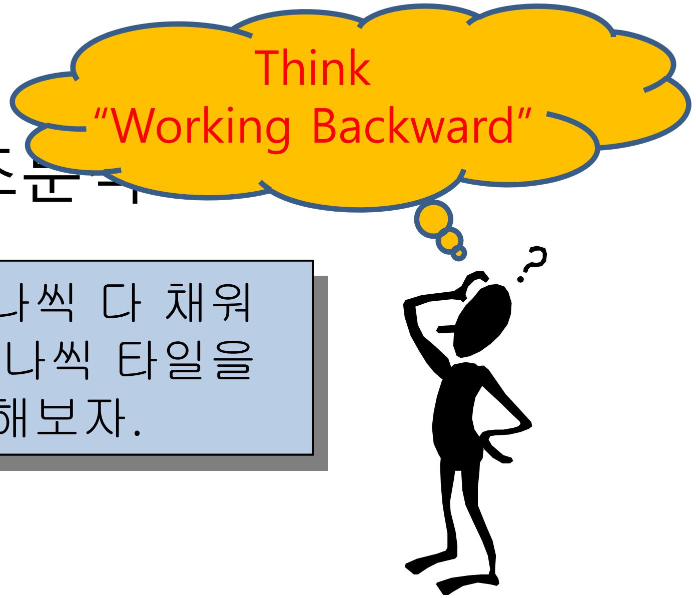


  - 예
    - 2x3 직사각형을 채우는 방법 : 3가지

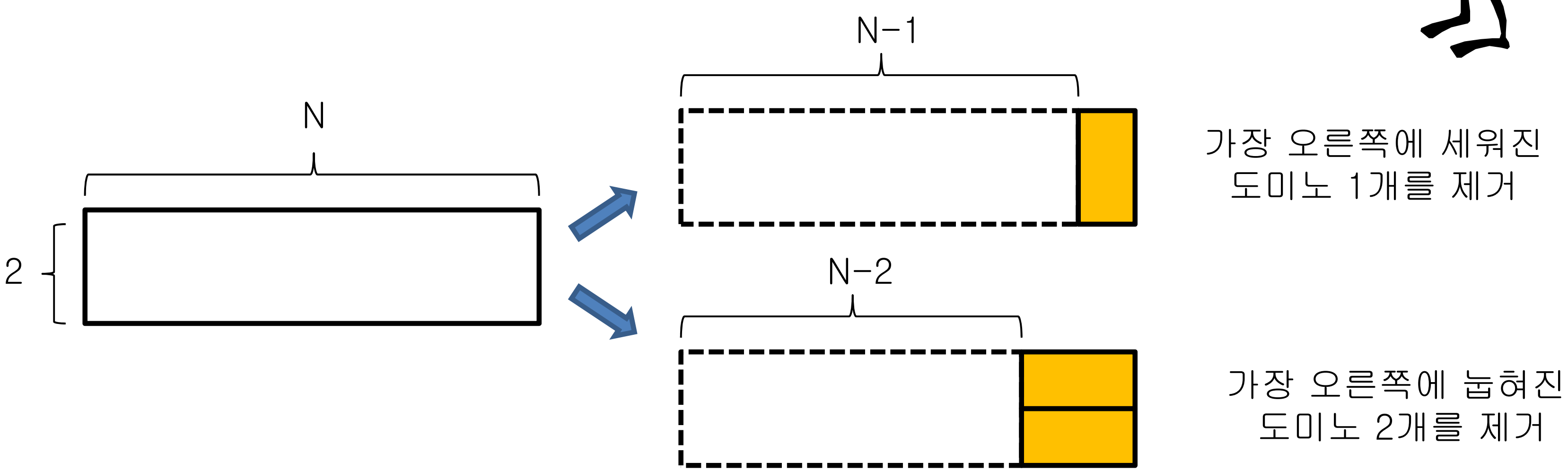


2xN 직사각형 타일 채우기 문제 (2)

- 단계 1:
  - 도미노 타일로 채우는 방법의 구조분석

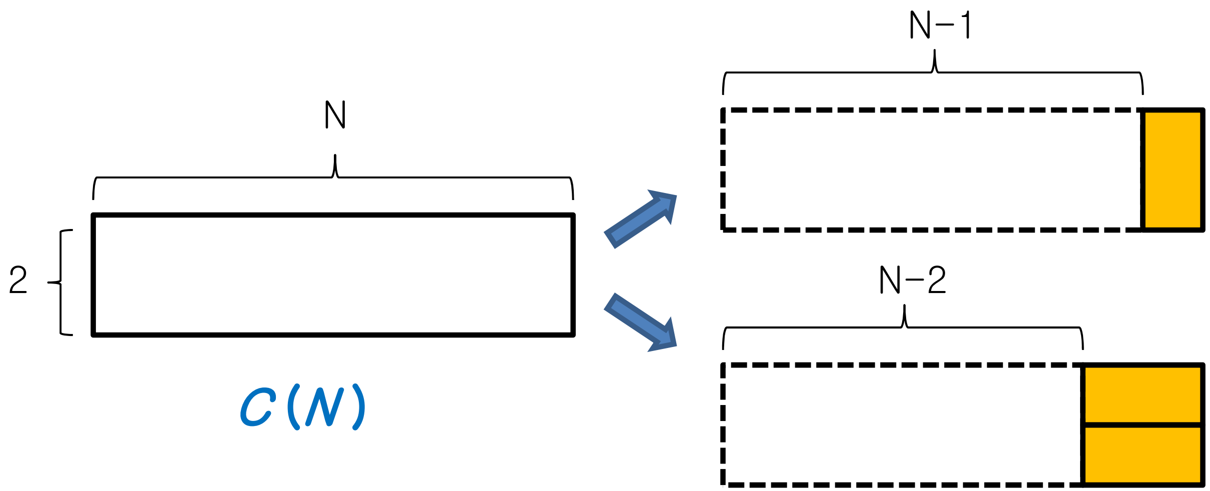


직사각형을 타일로 오른쪽에서 왼쪽으로 하나씩 다 채워 놓았다고 생각하고, 오른쪽에서 왼쪽으로 하나씩 타일을 빼 나갈 때,어떤 형태가 나타나는 지를 분석해보자.



2xN 직사각형 타일 채우기 문제 (3)

- 단계 2: 재귀식
  - C(N) : 2xN 직사각형을 도미노 타일로 채우는 방법의 수



$C(N)$

가장 오른쪽에 세워진
도미노 1개를 제거

$C(N-1)$

가장 오른쪽에 눕혀진
도미노 2개를 제거

$C(N-2)$

$$C(N) = C(N-1) + C(N-2)$$

2xN 직사각형 타일 채우기 문제 (4)

- 단계 2: 재귀식
  - C(N) : 2xN 직사각형을 도미노 타일로 채우는 방법의 수

$$C(N) = \begin{cases} 1 & N = 1 \quad \text{(base case)} \\ 2 & N = 2 \quad \text{(recursive step)} \\ C(N-1) + C(N-2) & N > 2 \quad \text{(recursive step)} \end{cases}$$

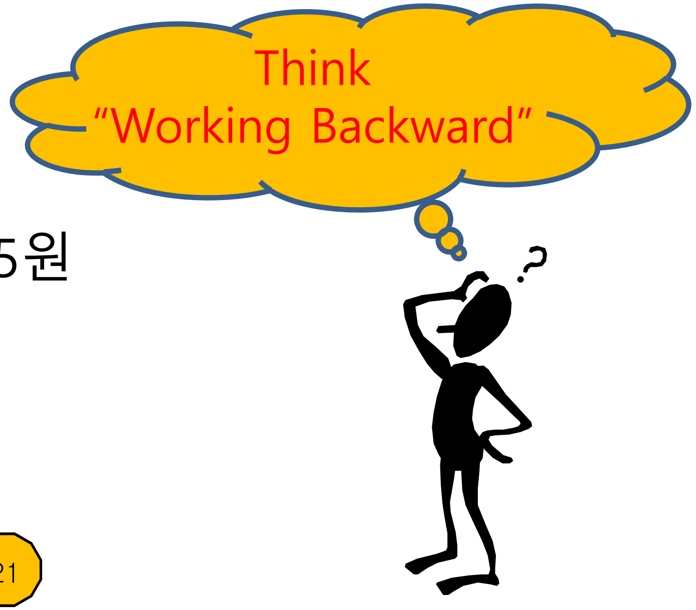
Fibonacci 수와 같음

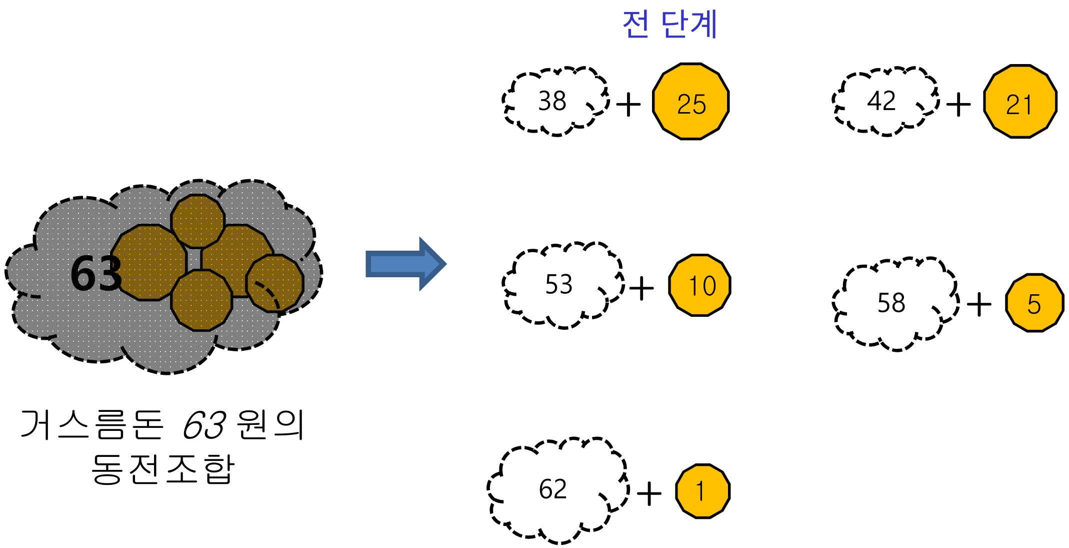
동전교환문제

- 동전교환문제
  - 서로 다른 단위의 동전이 주어졌을 때, 거스름돈을 동전의 개수가 최소가 되도록 교환해 주려고 한다. 이때 교환해 주는 동전의 최소 개수와 교환해 주는 동전의 조합을 계산하시오. 단, 모든 단위의 동전은 무수히 많다고 가정한다.
  - 예
    - 동전의 종류 : 1원, 5원, 10원, 21원, 25원
    - 거스름 돈 63원
      - 최소동전개수 : 3개
        - » {21, 21, 21}

동전교환문제 (2)

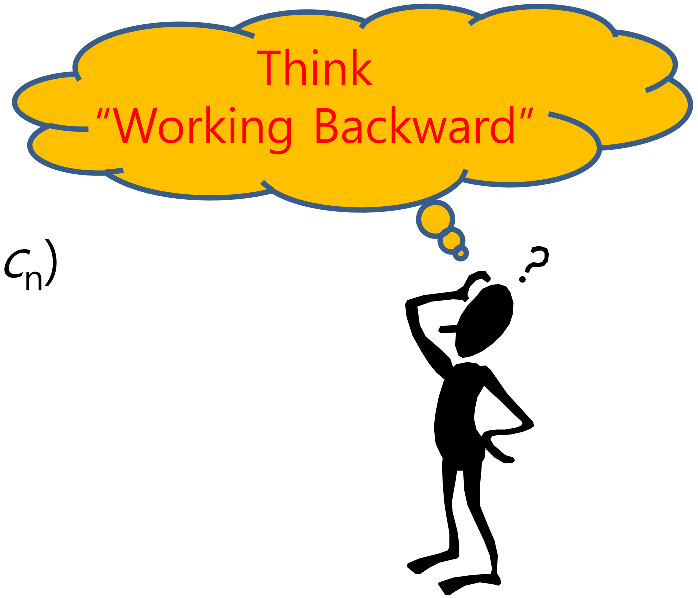
- 단계 1:
  - 동전조합의 구조분석
    - 동전의 종류 : 1원, 5원, 10원, 21원, 25원
    - 거스름 돈 : 63 원

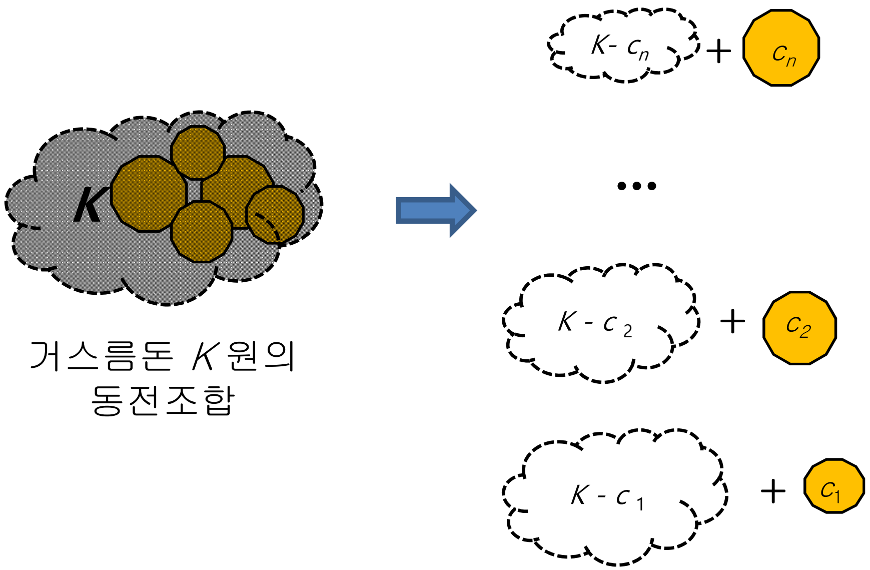




동전교환문제 (3)

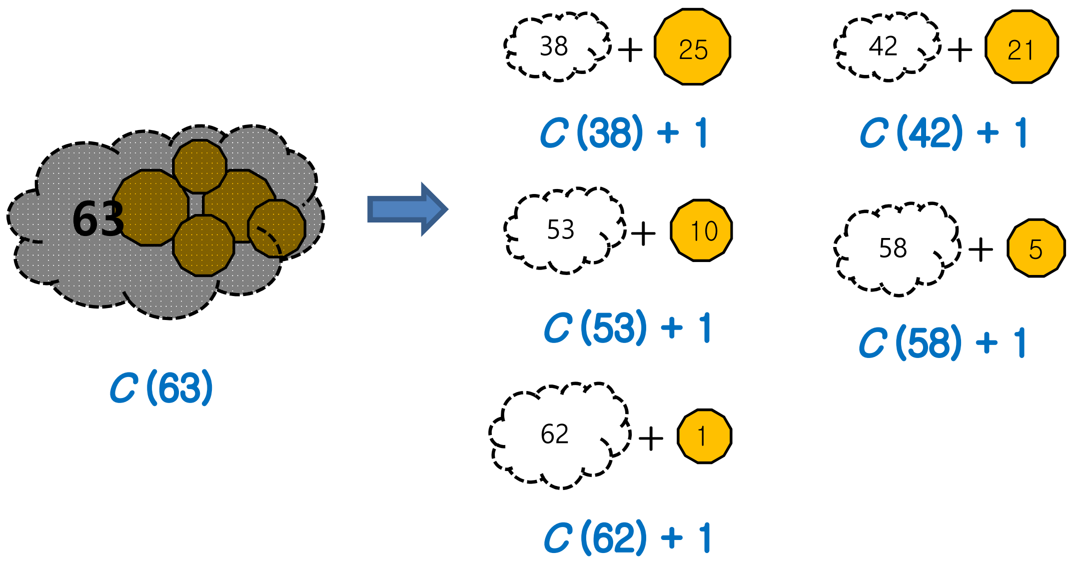
- 단계 1:
  - 동전조합의 구조분석
    - 동전의 종류 : n 가지 (c_1 < c_2 < … < c_n)
    - 거스름 돈 : K 원





동전교환문제 (4)

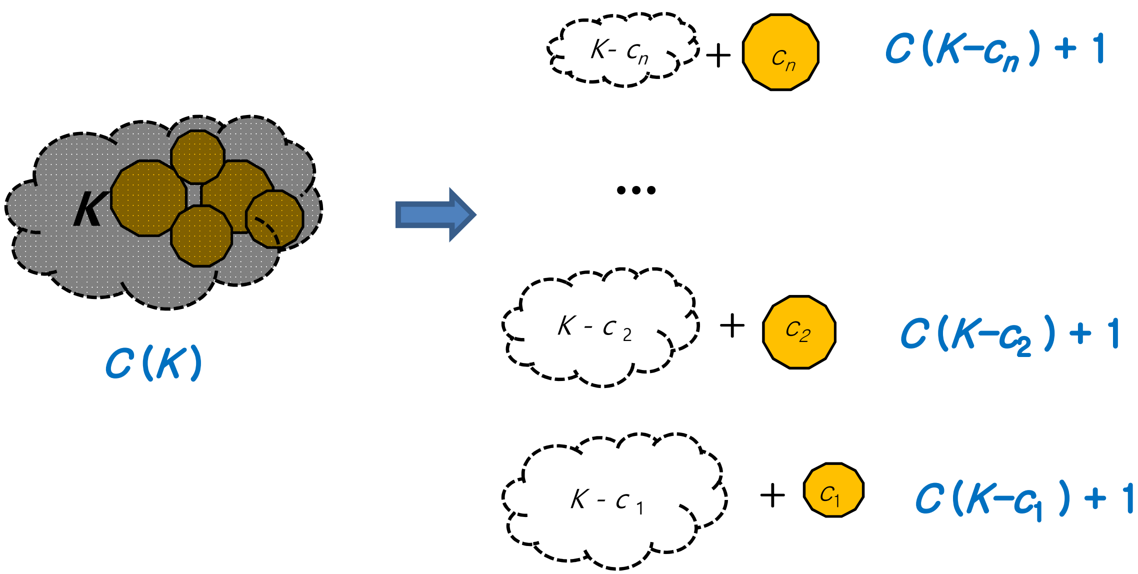
- 단계 2: 재귀식
  - $C(k)$: k 원을 바꿀 때, 최소 동전의 개수



$$C(63) = \min\{C(38)+1,\ C(42)+1,\ C(53)+1,\ C(58)+1,\ C(62)+1\}$$
$$= \min\{C(38),\ C(42),\ C(53),\ C(58),\ C(62)\} + 1$$

동전교환문제 (5)

- 단계 2: 재귀식
  - $C(k)$: k 원을 바꿀 때, 최소 동전의 개수



$$C(K) = \min_{1 \le i \le n} C(K - c_i) + 1$$

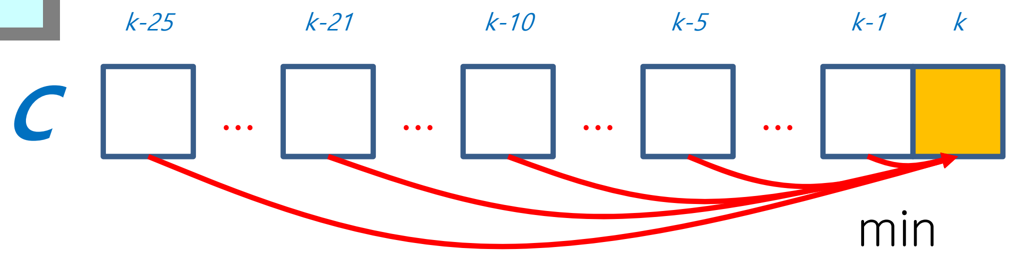
동전교환문제 (6)

- 단계 3: 최소동전의 개수 계산
  - $C[k]$: k 원을 바꿀 때, 최소 동전의 개수 저장

$$C[k] = \begin{cases} \infty & k < 0 \\ 0 & k = 0 \\ \min\{C[k-25], C[k-21], C[k-10], C[k-5], C[k-1]\} + 1 & k > 0 \end{cases}$$

*가짓수

$$C[k] = \begin{cases} \infty & k < 0 \\ 0 & k = 0 \\ \min_{1 \le i \le n} C[k - c_i] + 1 & k > 0 \end{cases}$$



마지막으로 더한 돈 종류

$S[k]$: 최소 개수의 거스름돈 동전을 계산하기 위하여
위의 $C[k]$ 를 계산할 때, 최소값으로 선택된 동전 c_i 를 저장

동전교환문제 (7)

- 단계 3: 최소동전의 개수 계산
  - 동전의 종류 : 1원, 5원, 10원, 21원, 25원
  - 거스름 돈 : 21 원

Compute
"Bottom Up"

작은 값에서->큰값

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	0	1	2	3	4	1	2	3	4	5	1
S	0	1	1	1	1	5	1	5	1	5	10

k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
C	2	3	4	5	2	3	4	5	6	2	1
S	1	10	10	1	5	1	5	10	1	10	21

동전교환문제 (8)

- 단계 3: 최소동전의 개수 계산

Compute
“Bottom Up”

동전종류개

c s

```
void coinExchange(int coins[], int numDiffCoins, int change,
                  int coinsUsed[], int lastCoin[])
{
    int cents, j;

    /* coinsUsed = C, lastCoin = L */
    coinsUsed[0]=lastCoin[0]=0;

    for(cents = 1; cents <= change; cents++)
    {
        int minCoins, newCoin;

        minCoins = cents;
        newCoin = 1;
        for(j=0; j<numDiffCoins; j++)
        {
            if (coins[j] > cents)
                continue;
            if (coinsUsed[cents-coins[j]] + 1 < minCoins)
            {
                minCoins = coinsUsed[cents-coins[j]] + 1;
                newCoin = coins[j];
            }
        }

        coinsUsed[cents] = minCoins;
        lastCoin[cents] = newCoin;
    }
}
```

동전교환문제 (9)

- 단계 4: 최소동전의 집합 계산 (recursive)
  - 1차원 배열 L[ ] 이용

```
/* coinsUsed = C, lastCoin = L */
void reconstruct(int change, int lastCoin[])
{
    if(change > 0)
    {
        reconstruct(change-lastCoin[change], lastCoin);
        printf("%d ", lastCoin[change]);
    }
}
```

2차 동적계획법

- 2차 동적계획법
  - 재귀식에서 2개의 변수가 필요한 문제
  - 2차원 배열로 동적계획법 구현
  - 예
    - 이항계수 (binomial coefficient) 계산문제
    - 동전교환 (coin exchange) 문제
    - 최장공통부분수열 (longest common subsequence)
    - 대부분의 동적계획법 문제

이항계수 계산문제

- Binomial Coefficient (이항계수)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{20}{15} = \frac{20!}{15!\,5!} = \frac{2432902008176640000}{1307674368000 \times 120} = 15504$$

이항계수 계산문제 (2)

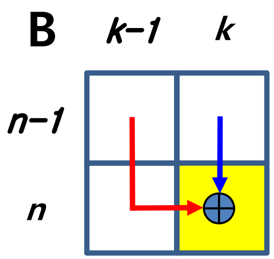
- 단계 1, 단계 2:
  - 이항계수의 구조분석 및 재귀식
    - by Pascal

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & k = 0 \quad \text{or} \quad k = n \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & 0 < k < n \end{cases}$$

이항계수 계산문제 (3)

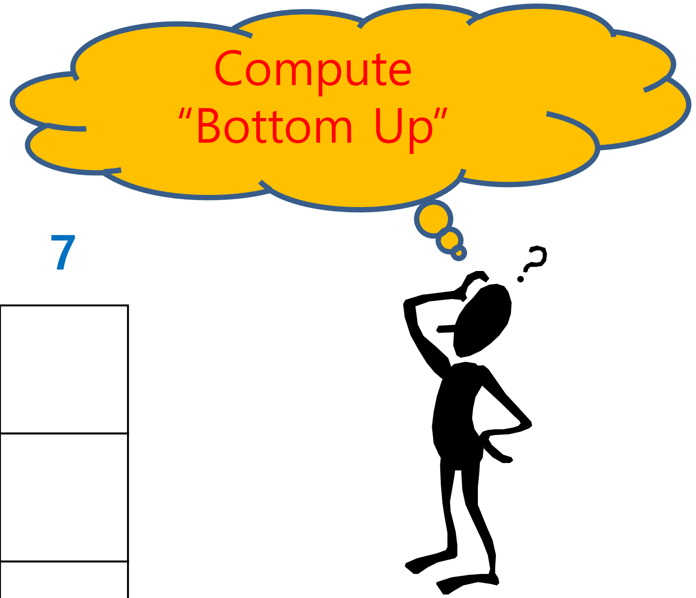
- 단계 3 : 이항계수 계산
  - 2차원 배열 B[n][k]
  - B[n][k] : store $\binom{n}{k}$

$$B[n][k] = \begin{cases} 1 & k = 0 \quad \text{or} \quad k = n \quad \text{(base case)} \\ B[n-1][k-1] + B[n-1][k] & 0 < \mathrm{k} < \mathrm{n} \quad \text{(recursive step)} \end{cases}$$



이항계수 계산문제 (4)

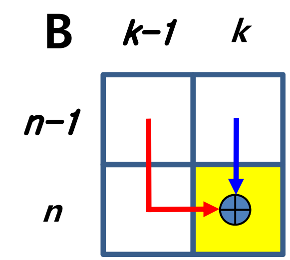
- 단계 3 : 이항계수 계산



k

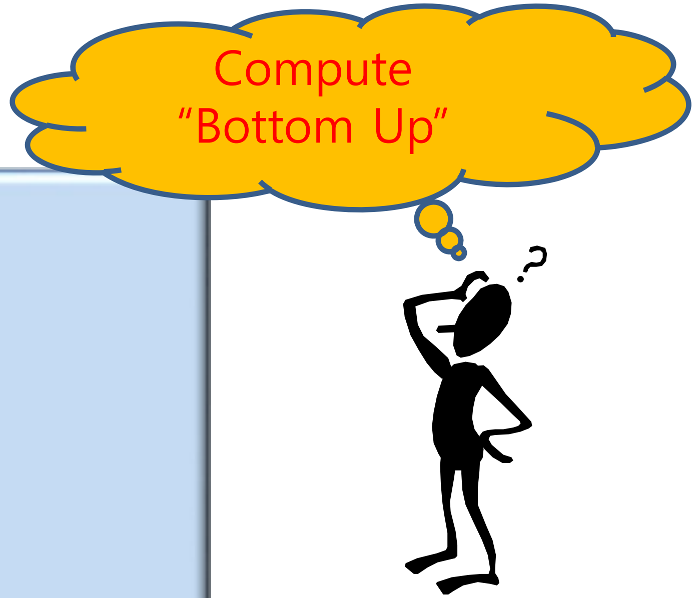
n

B	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5			
6	1	6	15	20	15			



이항계수 계산문제 (5)

- 단계 3 : 이항계수 계산



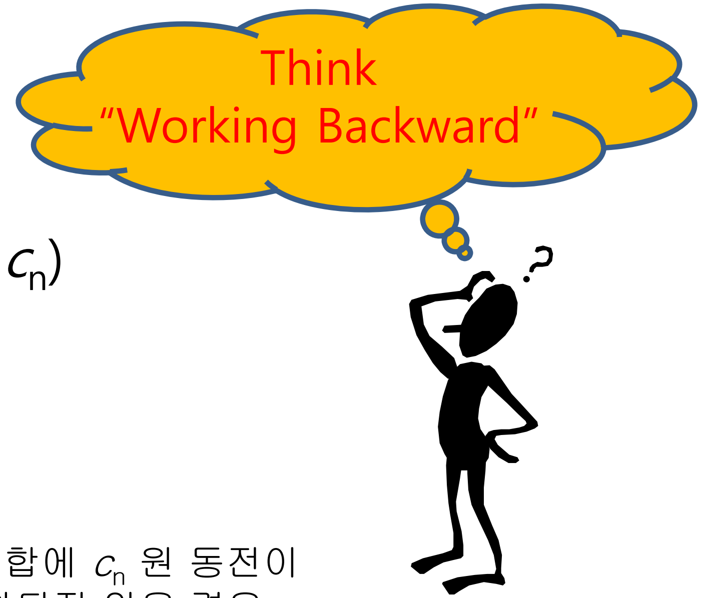

```
#define MAX 30

#define MIN(a,b) ((a)<(b)?(a):(b))

int binCoeff(int n, int k)
{
    int i, j;
    int B[MAX][MAX];

    for(i=0; i<=n; i++)
        for(j=0; j<=MIN(i,k); j++)
            if(j==0 || j==i)
                B[i][j] = 1; /* base case */
            else
                B[i][j] = B[i-1][j-1]+B[i-1][j];

    return B[n][k];
}
```

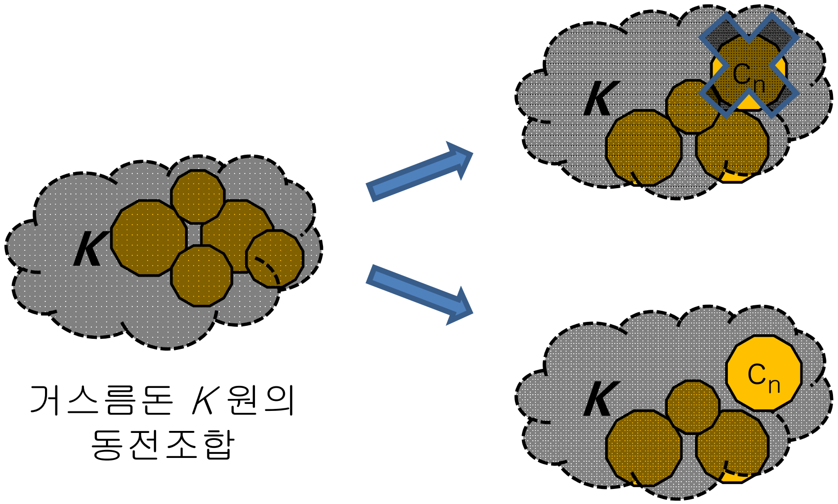
동전교환문제-2

- 동전교환문제-2
  - 서로 다른 단위의 동전이 주어졌을 때, 거스름돈을 교환해 주는 동전의 조합의 수를 계산하시오. 단, 모든 단위의 동전은 무수히 많다고 가정한다.
  - 예
    - 동전의 종류 : 1원, 2원, 3원
    - 거스름 돈 4원
      - 교환방법 : 4가지
        - » {1, 1, 1, 1}, {1, 1, 2}, {2, 2}, {1, 3}

동전교환문제-2 (2)

- 단계 1:
  - 동전조합의 구조분석
    - 동전의 종류 : n 가지 (c_1 < c_2 < … < c_n)
    - 거스름 돈 : K 원





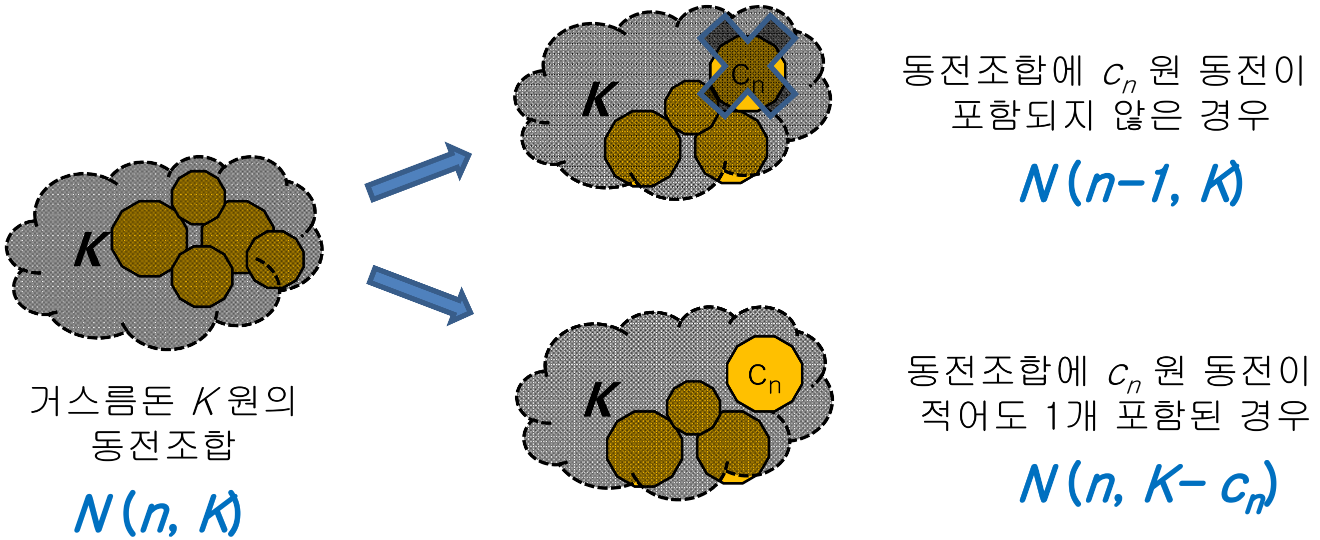
거스름돈 K 원의 동전조합

동전조합에 c_n 원 동전이 포함되지 않은 경우

동전조합에 c_n 원 동전이 적어도 1개 포함된 경우

동전교환문제-2 (3)

- 단계 2:
  - 재귀식
    - $N(n, K)$: 거스름돈 K 원을 n 개의 동전 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 으로 교환하는 동전조합의 수



$$N(n, K) = N(n-1, K) + N(n, K-c_n)$$

동전교환문제-2 (4)

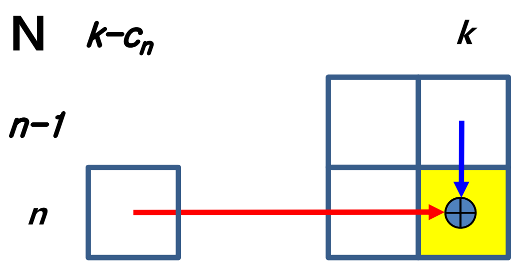
- 단계 2:
  - 재귀식
    - $N(n, K)$: 거스름돈 K 원을 n 개의 동전 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 으로 교환하는 동전조합의 수

$$N(n,K)=\begin{cases} 0 & n=0 \ \text{and} \ K>0 & \text{(base case)} \\ 1 & K=0 & \text{(base case)} \\ 0 & K<0 & \text{(base case)} \\ N(n-1,K)+N(n,K-c_n) & \text{otherwise} & \text{(recursive step)} \end{cases}$$

동전교환문제-2 (5)

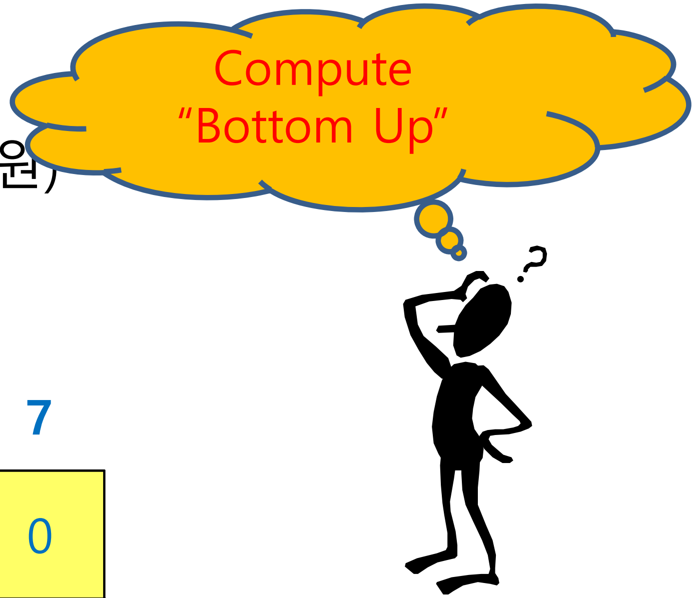
- 단계 3: 동전조합의 수 계산
  - 2차원 배열 : N[n][k]
    - N[n][k] : 거스름돈 k 원을 n 개의 동전 c_1, c_2, …, c_n 으로 교환하는 동전조합의 수

$$N[n][k] = \begin{cases} 0 & n = 0 \text{ and } K > 0 & \text{(base case)} \\ 1 & K = 0 & \text{(base case)} \\ 0 & K < 0 & \text{(base case)} \\ N[n-1][k] + N[n][k-c_n] & \text{otherwise} & \text{(recursive step)} \end{cases}$$

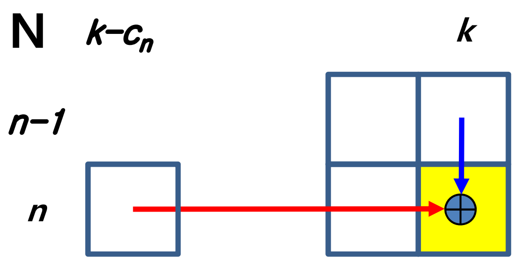


동전교환문제-2 (6)

- 단계 3: 동전조합의 수 계산
  - 동전의 종류 : 4가지 (1원, 2원, 3원, 5원)
  - 거스름돈 : 7원



N (n \ k)	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	3	3	4	4
3	1	1	2	3	4	5	7	8
4	1	1	2	3	4	6	8	10



동전교환문제-2 (7)

- 단계 3 : 동전조합의 수 계산

```
#define MAX_COINS 101
#define MAX_CHANGE 1001

int countCoinExchange(int coins[], int numDiffCoins, int change)
{
    int i, j, numComb;
    int N[MAX_COINS][MAX_CHANGE] = {0};

    /* base cases */
    for(i = 1; i <= numDiffCoins; i++)
        N[i][0] = 1;
    for(i = 1; i <= change; i++)
        N[0][i] = 0;

    for(i = 1; i <= numDiffCoins; i++)
        for(j = 1; j <= change; j++)
        {
            if (j-coins[i] < 0) /* base case */
                numComb = 0;
            else
                numComb = N[i][j-coins[i]];
            N[i][j] = N[i-1][j] + numComb;
        }

    return N[numDiffCoins][change];
}
```

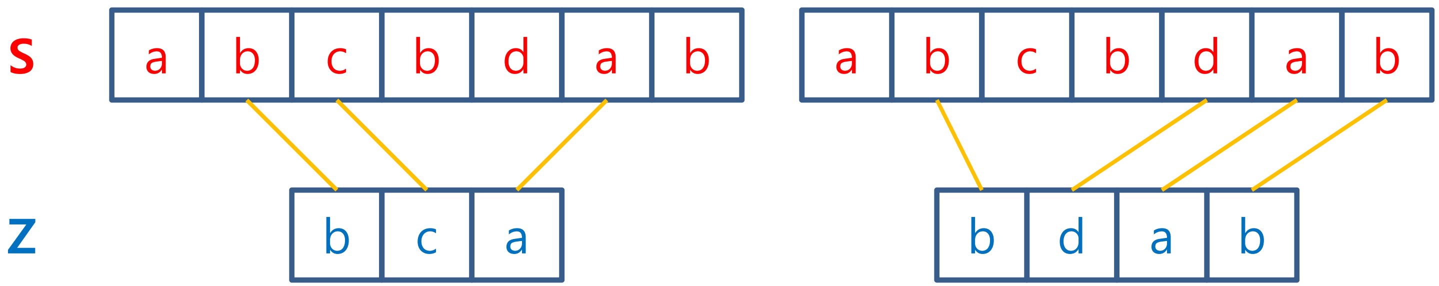
Longest Common Subsequence

최적화문제

- Longest Common Subsequence (Substring)
  (최장 공통 부분수열/부분스트링) 부분이면서 순서적으로.. (연속일필요는 없어)
- Notations:
  - Sequence $S = S_m = <s_1, s_2, \ldots, s_m>$
  - Subsequence of S : Z

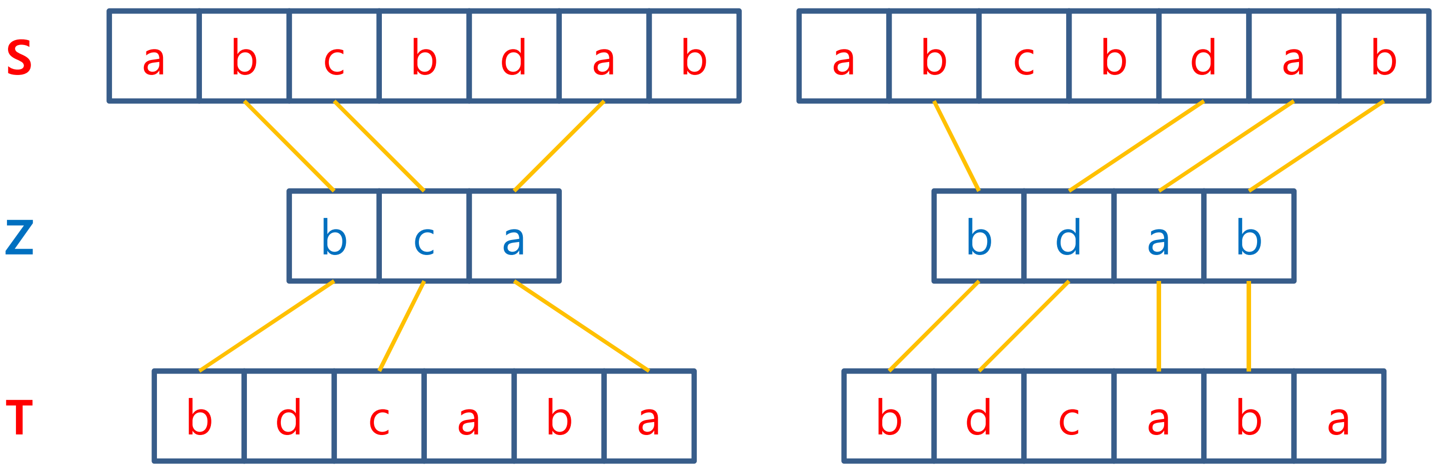
$$Z = Z_k = <z_1, z_2, \ldots, z_k> \text{ such that}$$

$$z_1 = s_{i_1}, z_2 = s_{i_2}, \ldots, z_k = s_{i_k} \ (i_1 < i_2 < \ldots < i_k)$$



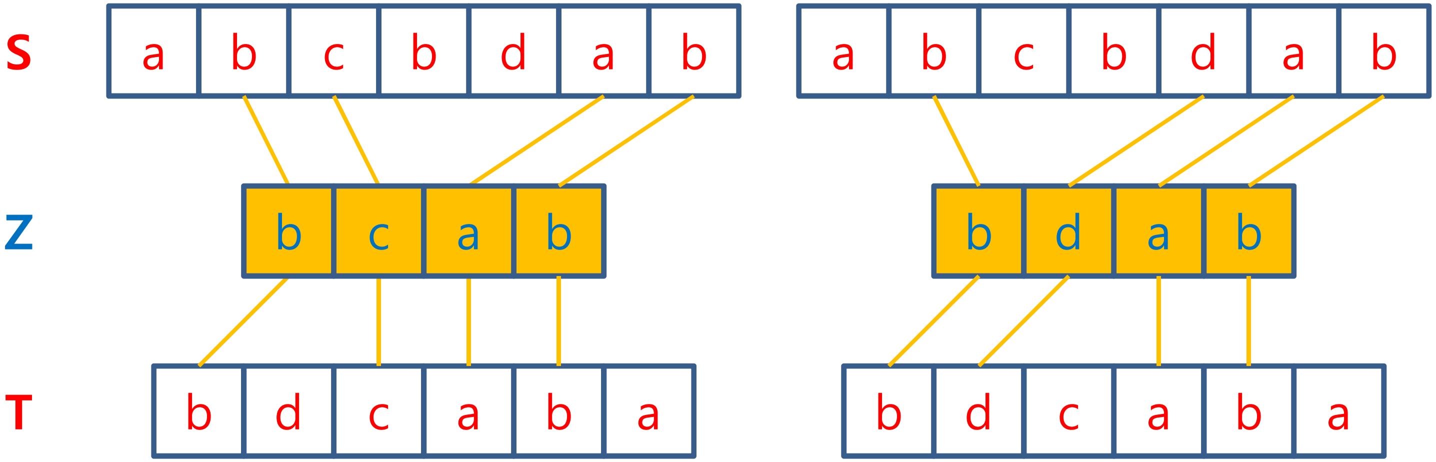
Longest Common Subsequence (2)

- Notations
  - Sequences
    - $S = S_m = \langle s_1, s_2, \ldots, s_m \rangle$
    - $T = T_n = \langle t_1, t_2, \ldots, t_n \rangle$
  - Common Subsequence of S, T : Z



Longest Common Subsequence (3)

- Notations
  - Longest common subsequence of *S*, *T*
    - Not unique



Longest Common Subsequence (4)

- Longest Common Subsequence Problem
  - Given two sequences S, T
    - $S = S_m = <s_1, s_2, ..., s_m>$
    - $T = T_n = <t_1, t_2, ..., t_n>$

    find a longest common subsequence of S and T.

Optimization Problem
(최적화문제)

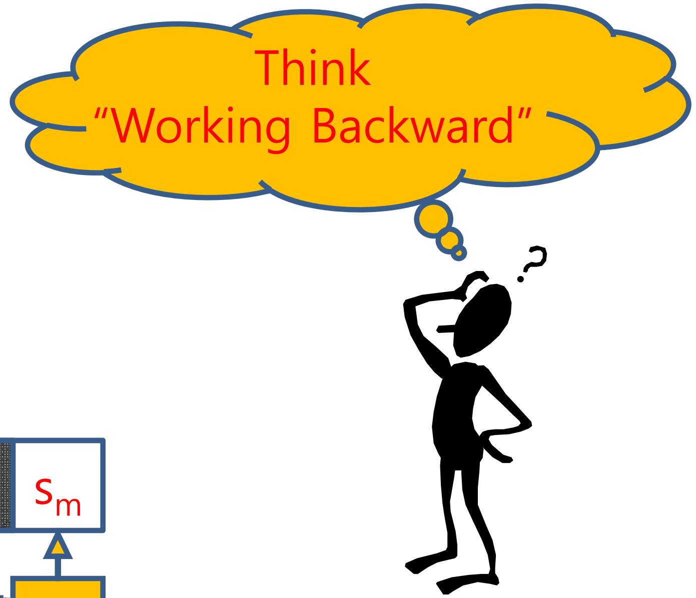
Dynamic Programming

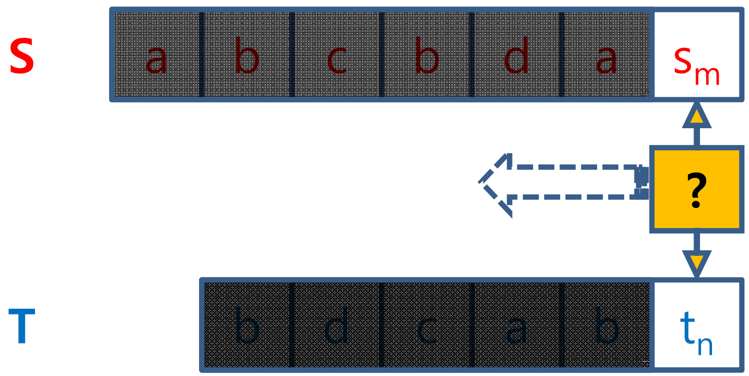
*뒤부터!!

(1) Find the **length** of the longest common subsequence
(2) Find a longest common subsequence

Longest Common Subsequence (5)

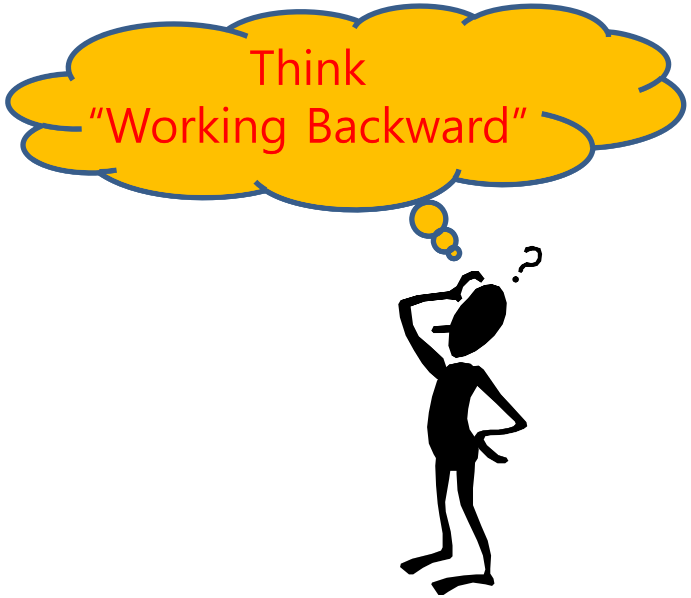
- 단계 1:
  - 최장공통부분수열의 구조분석

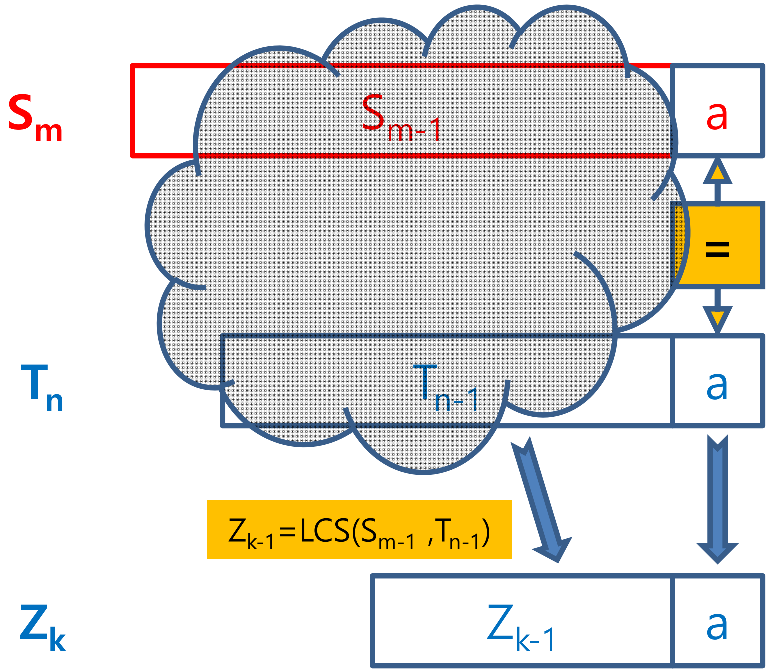




Longest Common Subsequence (6)

- 단계 1:
  - 최장공통부분수열의 구조분석



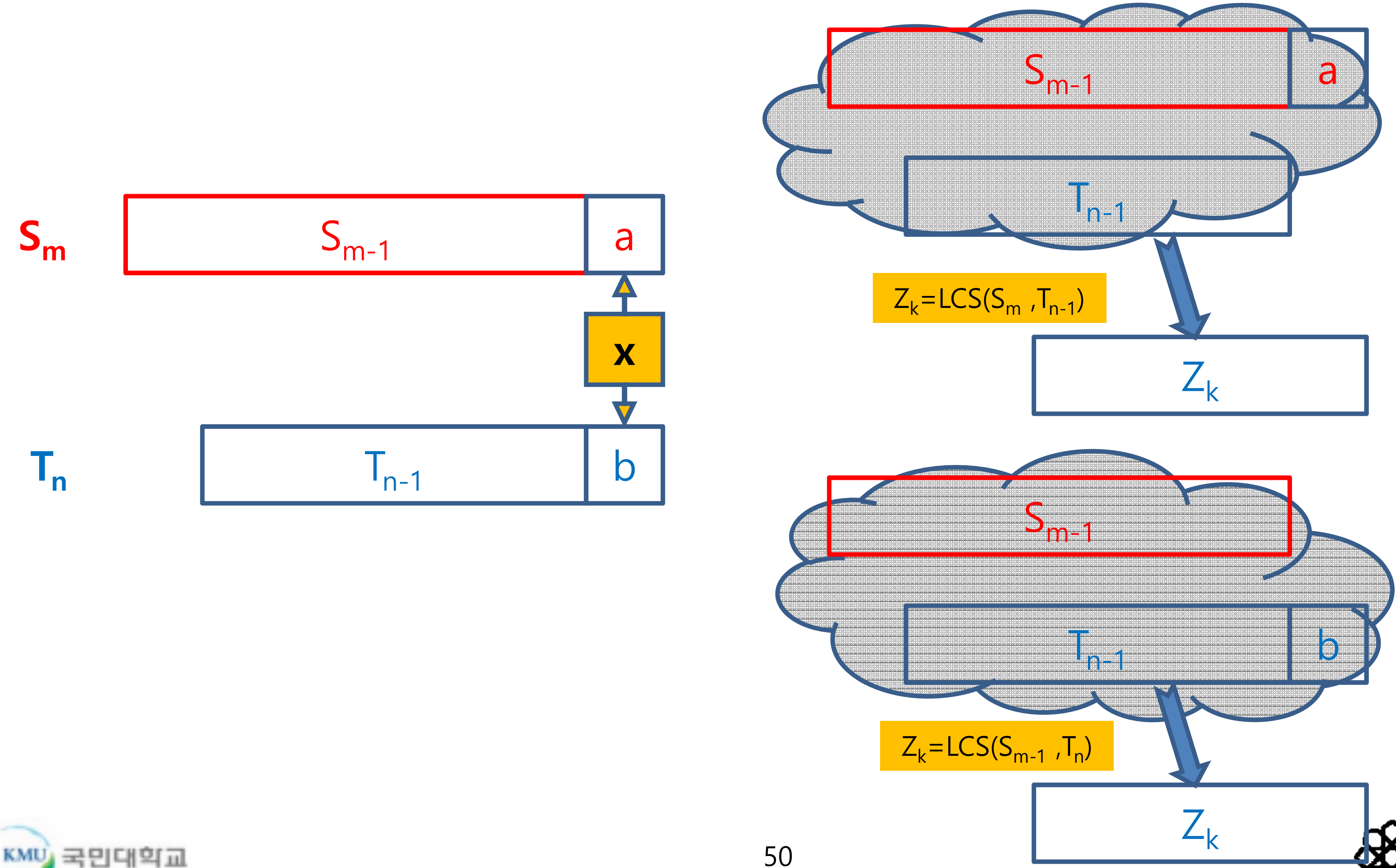


* 같으면 반드시 포함

* 다르면 1) 위에꺼 뺀고 다음 수행 2)아래꺼 뺀고 다음 수행

Longest Common Subsequence (7)

- 단계 1: 최장공통부분수열의 구조분석



Longest Common Subsequence (8)

- 단계 2: 재귀식
  - L(m, n) : Length of a LCS of S_m and T_n

$$L(m,n)=\begin{cases} 0 & m=0 \ \text{ or } \ n=0 & \text{(base case)} \\ L(m-1,n-1)+1 & m,n>0 \text{ and } s_m=t_n & \text{(recursive step)} \\ \max\{L(m,n-1),L(m-1,n)\} & m,n>0 \text{ and } s_m\neq t_n & \text{(recursive step)} \end{cases}$$

Longest Common Subsequence (9)

- 단계 3: LCS 길이계산

  L테이블 : 최대 서브시컨트 개수

  S테이블: 0,1,2로 어디로부터온건지표시(정답인 스트링 뽑을때)

  – 2차원 배열 L[m][n], S[m][n]

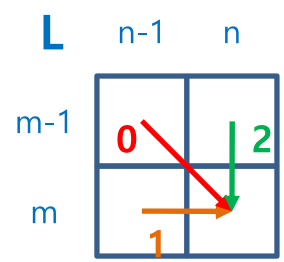
  – L[m][n] : Store length of a LCS of S_m and T_n

  * 가장 길이가 긴 것을 저장시킴.

$$L[m][n] = \begin{cases} 0 & m = 0 \quad \text{or} \quad n = 0 & \text{(base case)} \\ L[m-1][n-1]+1 & m, n > 0 \ \text{and} \ s_m = t_n & \text{(recursive step)} \\ \max\{L[m][n-1], L[m-1][n]\} & m, n > 0 \ \text{and} \ s_m \neq t_n & \text{(recursive step)} \end{cases}$$

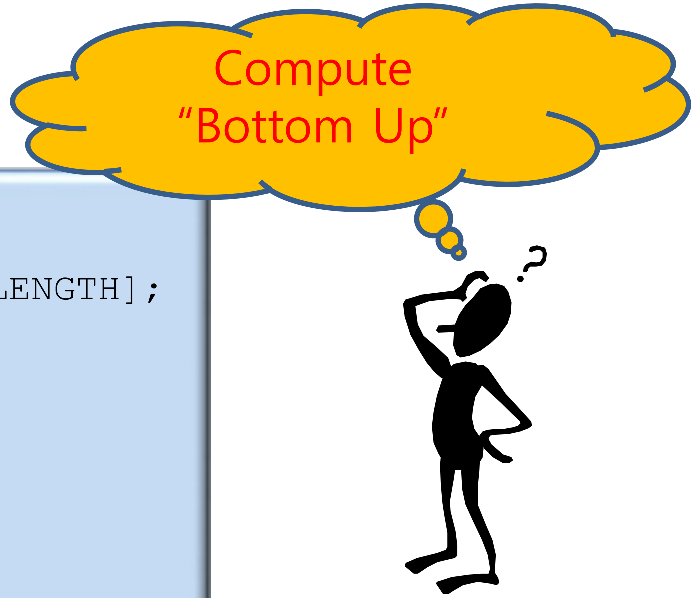
  – S[m][n] : S_m and T_n 의 LCS 를 구하기 위한 정보 저장

$$S[m][n] = \begin{cases} 0 \quad \text{if } L[m][n] = L[m-1][n-1] \quad (s_m = t_n) \\ 1 \quad \text{if } L[m][n] = L[m][n-1] \\ 2 \quad \text{if } L[m][n] = L[m-1][n] \end{cases}$$



Longest Common Subsequence (10)

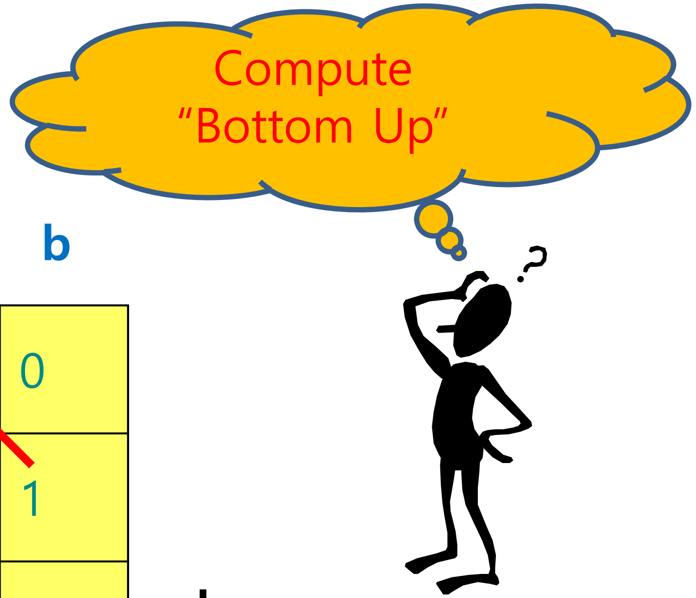
- 단계 3: LCS 길이계산 구현




```
#define MAX_LENGTH 101
#define MAX(a,b)  ((a)>(b)?(a):(b))

int L[MAX_LENGTH][MAX_LENGTH], S[MAX_LENGTH][MAX_LENGTH];

int lengthLCS(char s[], char t[], int m, int n)
{
    int i, j;

    /* base cases */
    for(i = 0; i <= m; i++)
        L[i][0] = 0;
    for(i = 0; i <= n; i++)
        L[0][i] = 0;

    for(i = 1; i <= m; i++)
        for(j = 1; j <= n; j++)
            if (s[i-1] == t[j-1]){
                L[i][j] = L[i-1][j-1]+1;
                S[i][j] = 0;
            }
            else{
                L[i][j] = MAX(L[i][j-1], L[i-1][j]);
                if (L[i][j] == L[i][j-1])
                    S[i][j] = 1;
                else
                    S[i][j] = 2;
            }

    return L[m][n];
}
```

Longest Common Subsequence (11)

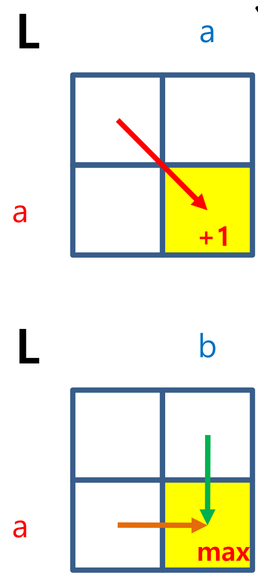
- 단계 3: LCS 길이계산 구현



T

L		a	b	c	b	d	a	b
	0	0	0	0	0	0	0	0
b	0	0	1	1	1	1	1	1
d	0	0	1	1	1	2	2	2
c	0	0	1	2	2	2	2	2
a	0	1	1	2	2	2	3	3
b	0	1	2	2	3	3	3	4
a	0	1	2	2	3	3	4	4

S



Longest Common Subsequence (12)

- 단계 4: LCS 계산

L		T: a	b	c	b	d	a	b
	0	0	0	0	0	0	0	0
S: b	0	0	1	1	1	1	1	1
d	0	0	1	1	1	2	2	2
c	0	0	1	2	2	2	2	2
a	0	1	1	2	2	2	3	3
b	0	1	2	2	3	3	3	4
a	0	1	2	2	3	3	4	4

Longest Common Subsequence (13)

- 단계 4: LCS 계산 (recursive)

```
void printLCS(char s[], char t[], int m, int n)
{
    if(m==0 || n==0)
        return;
    if(S[m][n] == 0)
    {
        printLCS(s, t, m-1, n-1);
        printf("%c", s[m-1]);
    }
    else if(S[m][n] == 1)
        printLCS(s, t, m, n-1);
    else if(S[m][n] == 2)
        printLCS(s, t, m-1, n);
}
```

Chained Matrix Multiplication

- Matrix Multiplication

  $A = [a_{ij}]$: matrix of size $p \times q$
  $B = [b_{ij}]$: matrix of size $q \times r$

  – Then $AB = C([c_{ij}])$ is a matrix of size $p \times r$ such that

  $$c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}$$

  – To compute $C=AB$, it takes

  $$p \times q \times r$$

  multiplications.

Chained Matrix Multiplication

- Matrix Multiplication
  - Example:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 35 & 41 & 38 \\ 74 & 89 & 104 & 83 \end{bmatrix}$$

Chained Matrix Multiplication

- Chained Matrix Multiplication
  - Note that matrix multiplication is associative

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

  - How many multiplication of elements are needed to compute *(AB)C* and *A(BC)* ?

A : matrix of size $p \times q$

B : matrix of size $q \times r$

C : matrix of size $r \times s$

$(AB)C : pqr + prs$

$A(BC) : qrs + pqs$

❖ Even $(AB)C = A(BC)$, the number of multiplications of elements are different.

Chained Matrix Multiplication

- Example:
  - Multiplication of the following 4 matrices

$$\begin{array}{ccccccc} A & \times & B & \times & C & \times & D \\ 20\times 2 & & 2\times 30 & & 30\times 12 & & 12\times 8 \end{array}$$

  - The number of elementary multiplication of the following order of matrix multiplications:

A(B(CD))	$30\times12\times8$	+	$2\times30\times8$	+	$20\times2\times8$	=	3,680
(AB)(CD)	$20\times 2\times30$	+	$30\times12\times8$	+	$20\times30\times8$	=	8,880
A((BC)D)	$2\times30\times12$	+	$2\times12\times8$	+	$20\times2\times8$	=	1,232
((AB)C)D	$20\times 2\times30$	+	$20\times30\times12$	+	$20\times12\times8$	=	10,320
(A(BC))D	$2\times30\times12$	+	$20\times 2\times12$	+	$20\times12\times8$	=	3,120

  - Therefore A((BC)D) is the optimal order for the multiplication ABCD of four matrices.

Chained Matrix Multiplication

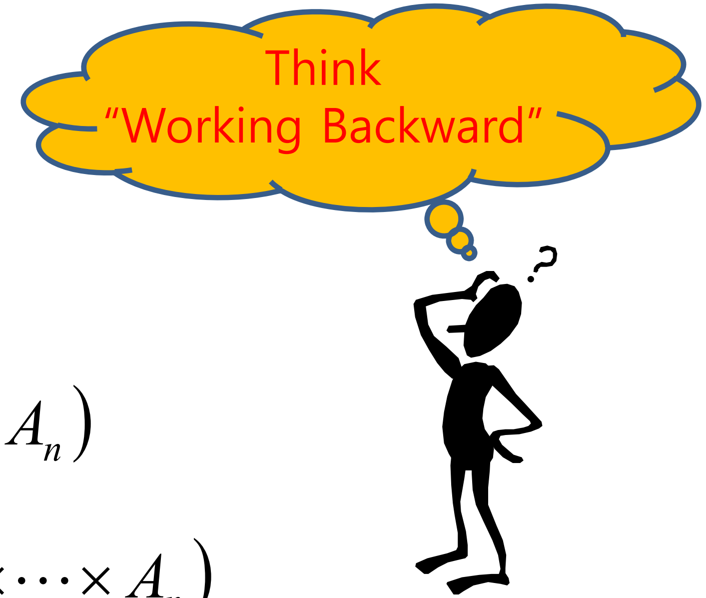
- Definition
  - We are given matrices A_1 A_2 … A_n , where the dimensions of A_i are $d_{i-1} \times d_i$.
  - How should we compute

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

and what is the minimum number of elementary multiplications needed?

Chained Matrix Multiplication

- 단계 1:
  - 연속행렬곱셈의 구조분석



$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{l}
(A_1) \times (A_2 \times \cdots \times A_n) \\
(A_1 \times A_2) \times (A_3 \times \cdots \times A_n) \\
\cdots \\
(A_1 \times \cdots \times A_k) \times (A_{k+1} \times \cdots \times A_n) \\
\cdots \\
(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n-1}) \times (A_n)
\end{array}$$

Chained Matrix Multiplication

- 단계 1:
  - 연속행렬곱셈의 구조분석

Think
"Working Backward"

$$A_i \times A_{i+1} \times \cdots \times A_j \quad \Rightarrow$$

$$(A_i) \times (A_{i+1} \times \cdots \times A_j)$$

$$(A_i \times A_{i+1}) \times (A_{i+2} \times \cdots \times A_j)$$

$$\cdots$$

$$(A_i \times \cdots \times A_k) \times (A_{k+1} \times \cdots \times A_j)$$

$$\cdots$$

$$(A_i \times A_{i+1} \times \cdots \times A_{j-1}) \times (A_j)$$

Chained Matrix Multiplication

- 단계 1:
  - Suppose the matrices are factored as follows:

$$(A_i \times \cdots \times A_k) \times (A_{k+1} \times \cdots \times A_j)$$

  - The dimensions of the two factor matrices are $d_{i-1} \times d_k$ and $d_k \times d_j$.
  - Recursively calls to find out how many multiplications are needed for each factor.
  - But what is the best choice for k ?
  - Since we do not know the best place to split the sequence of matrices into two factors, we minimize overall choices for k.

Chained Matrix Multiplication

- 단계 2:
  - 재귀식
    - $M(i, j)$: the minimum number of multiplications needed to compute $A_i \times \ldots \times A_j$, for $1 \le i \le j \le n$.
    - Then we have the following recurrence relation:

$$M(i,j) = \begin{cases} \min\limits_{i \le k \le j-1} \left(M(i,k) + M(k+1,j) + d_{i-1} d_k d_j \right) & \text{if } 1 \le i < j \le n \\ 0 & \text{if } i = j \end{cases}$$

$$\underbrace{\left(A_i \times \cdots \times A_k\right)}_{d_{i-1} \times d_k \text{ matrix}} \times \underbrace{\left(A_{k+1} \times \cdots \times A_j\right)}_{d_k \times d_j \text{ matrix}}$$

$$\underbrace{d_{i-1} \times d_k \text{ matrix} \qquad d_k \times d_j \text{ matrix}}_{d_{i-1} d_k d_j \text{ multiplications}}$$

Chained Matrix Multiplication

- 단계 2:
  - 재귀식

$$M(i,j)=\begin{cases}\min\limits_{i\le k\le j-1}\left(M(i,k)+M(k+1,j)+d_{i-1}d_kd_j\right) & \text{if } 1\le i<j\le n\\ 0 & \text{if } i=j\end{cases}$$

  - Recursive (divide-and-conquer) algorithm ?
    - Recurrence relation?
    - Emmm, solve it with a recursive function.
    - But wait for a moment!
    - Some subproblems do overlap!
    - Example:

$$[A_i\times\cdots\times A_k]\times[(A_{k+1}\times\cdots\times A_g)\times(A_{g+1}\times\cdots\times A_j)]$$

$$[(A_i\times\cdots\times A_k)\times(A_{k+1}\times\cdots\times A_g)]\times[A_{g+1}\times\cdots\times A_j]$$

Chained Matrix Multiplication

- 단계 2:
  - 재귀식

$$M(i,j)=\begin{cases}\min\limits_{i\le k\le j-1}\left(M(i,k)+M(k+1,j)+d_{i-1}d_kd_j\right) & \text{if } 1\le i<j\le n\\ 0 & \text{if } i=j\end{cases}$$

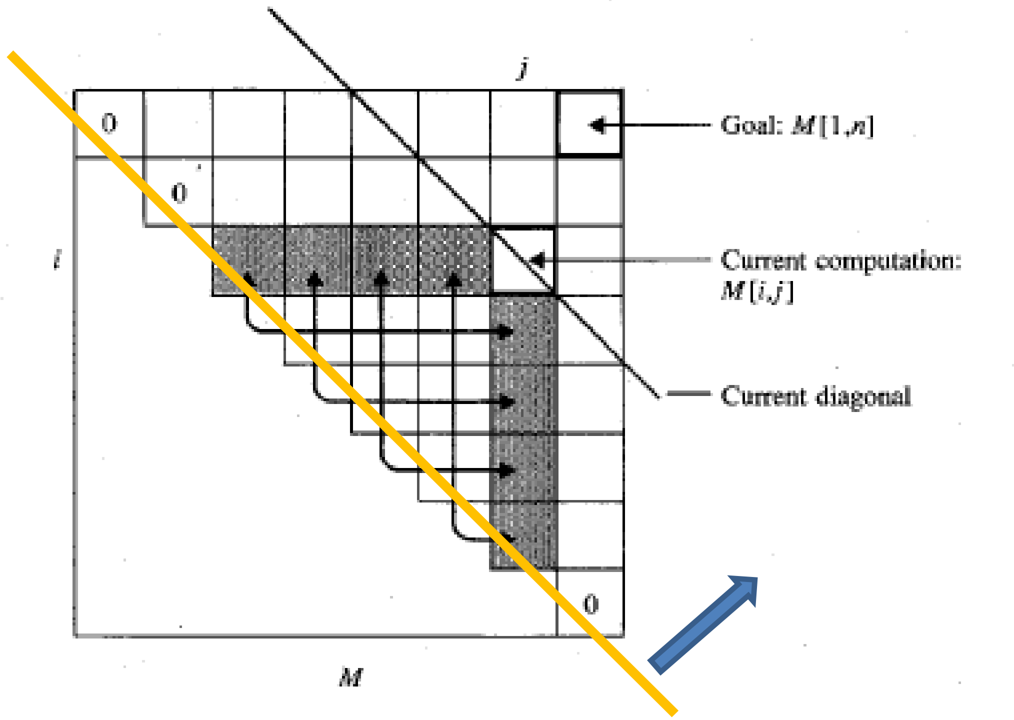
  - Table
    - Let $M[i][j]$ be store $M(i, j)$ which is the minimum number of multiplications needed to compute $A_i \times \ldots \times A_j$, for $1 \le i \le j \le n$.

$$M[i][j]=\begin{cases}\min\limits_{i\le k\le j-1}\left(M[i][k]+M[k+1][j]+d_{i-1}d_kd_j\right) & \text{if } 1\le i<j\le n\\ 0 & \text{if } i=j\end{cases}$$

Chained Matrix Multiplication

- 단계 3:

$$M[i][j] = \begin{cases} \min\limits_{i \le k \le j-1} \left(M[i][k] + M[k+1][j] + d_{i-1} d_k d_j \right) & \text{if } 1 \le i < j \le n \\ 0 & \text{if } i = j \end{cases}$$



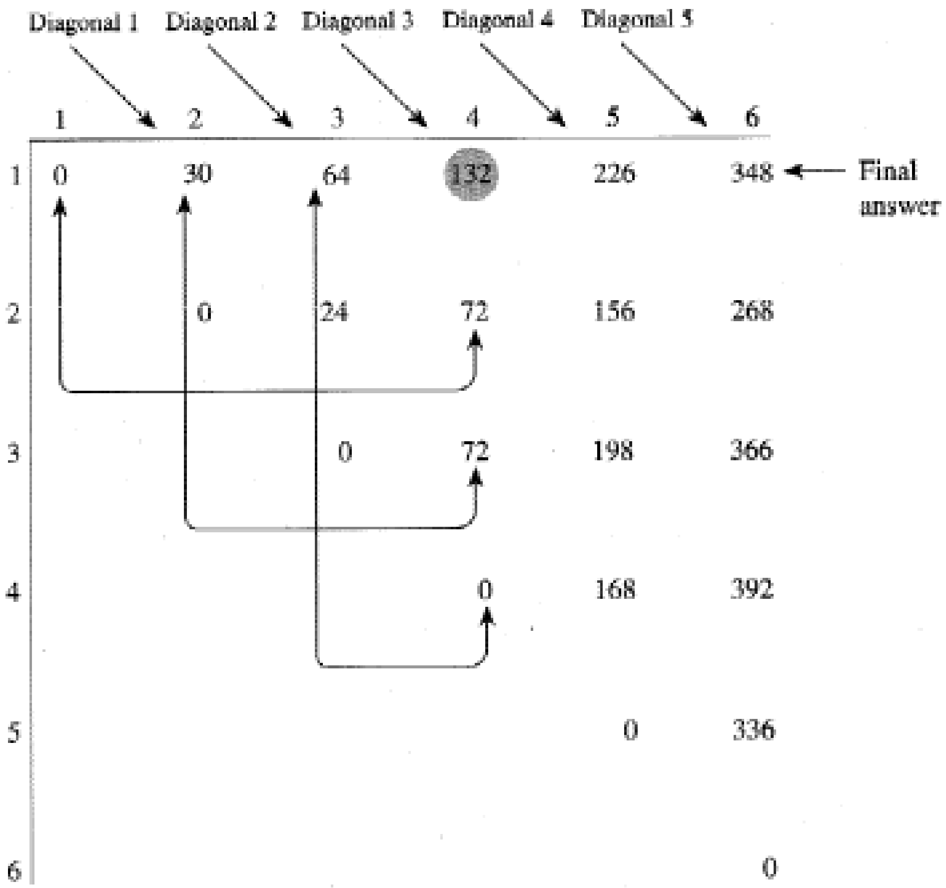
KMU 국민대학교 KOOKMIN UNIVERSITY

Algorithmic Engineering Laboratory

Chained Matrix Multiplication

- 단계 3:
  - Example

$$\begin{array}{cccccccccccc} A_1 & \times & A_2 & \times & A_3 & \times & A_4 & \times & A_5 & \times & A_6 \\ 5\times 2 & & 2\times 3 & & 3\times 4 & & 4\times 6 & & 6\times 7 & & 7\times 8 \\ d_0\ d_1 & & d_1\ d_2 & & d_2\ d_3 & & d_3\ d_4 & & d_4\ d_5 & & d_5\ d_6 \end{array}$$



Chained Matrix Multiplication

- 단계 3:
  - Example
    - Diagonal 0

$$\begin{array}{ccccccccccc} A_1 & \times & A_2 & \times & A_3 & \times & A_4 & \times & A_5 & \times & A_6 \\ 5\times 2 & & 2\times 3 & & 3\times 4 & & 4\times 6 & & 6\times 7 & & 7\times 8 \\ d_0\ d_1 & & d_1\ d_2 & & d_2\ d_3 & & d_3\ d_4 & & d_4\ d_5 & & d_5\ d_6 \end{array}$$

$$M[i][i] = 0, \qquad \text{for } 1 \le i \le 6$$

    - Diagonal 1

$$\begin{aligned} M[1][2] &= \min_{1\le k\le 1}(M[1][k] + M[k+1][2] + d_0 d_k d_2) \\ &= M[1][1] + M[2][2] + d_0 d_1 d_2 \\ &= 0 + 0 + 5\times 2\times 3 = 30 \end{aligned}$$

$M[2][3]$

$M[3][4]$

$M[4][5]$

$M[5][6]$

Chained Matrix Multiplication

- 단계 3:
  - Example

$$\begin{array}{cccccccccccc} A_1 & \times & A_2 & \times & A_3 & \times & A_4 & \times & A_5 & \times & A_6 \\ 5\times 2 & & 2\times 3 & & 3\times 4 & & 4\times 6 & & 6\times 7 & & 7\times 8 \\ d_0\ d_1 & & d_1\ d_2 & & d_2\ d_3 & & d_3\ d_4 & & d_4\ d_5 & & d_5\ d_6 \end{array}$$

    - Diagonal 2

$$\begin{aligned} M[1][3] &= \min_{1\le k\le 2}(M[1][k] + M[k+1][3] + d_0 d_k d_3) \\ &= \min(M[1][1] + M[2][3] + d_0 d_1 d_3, \\ &\qquad M[1][2] + M[3][3] + d_0 d_2 d_3) \\ &= 64 \end{aligned}$$

$M[2][4]$

$M[3][5]$

$M[4][6]$

    - Diagonal 1

$$\begin{aligned} M[1][4] &= \min_{1\le k\le 3}(M[1][k] + M[k+1][4] + d_0 d_k d_4) \\ &= \min(M[1][1] + M[2][4] + d_0 d_1 d_4, \\ &\qquad M[1][2] + M[3][4] + d_0 d_2 d_4, \\ &\qquad M[1][3] + M[4][4] + d_0 d_3 d_4) \\ &= 132 \end{aligned}$$

$M[2][5]$

$M[3][6]$

Chained Matrix Multiplication

- 단계 3:
  - Example
    - Diagonal 4

$$M[1][5]$$
$$M[2][6]$$

    - Diagonal 5

$$M[1][6]$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} A_1 & \times & A_2 & \times & A_3 & \times & A_4 & \times & A_5 & \times & A_6 \\ 5\times 2 & & 2\times 3 & & 3\times 4 & & 4\times 6 & & 6\times 7 & & 7\times 8 \\ d_0\ d_1 & & d_1\ d_2 & & d_2\ d_3 & & d_3\ d_4 & & d_4\ d_5 & & d_5\ d_6 \end{array}$$

Chained Matrix Multiplication

- 단계 3:
  - Algorithm:

```
int minmult (int n,
             const int d[],
             index P[][])
{                                   p=k를 저장..
  index i, j, k, diagonal;
  int M[1..n][1..n];

  for (i = 1; i <= n; i++)
    M[i][i] = 0;
  for (diagonal = 1; diagonal <= n - 1; diagonal++)   // Diagonal-1 is just
    for (i = 1; i <= n - diagonal; i++) {             // above the main
      j = i + diagonal;                               // diagonal.
      M[i][j] = minimum (M[i][k] + M[k + 1][j] + d[i - 1]*d[k]*d[j]);
               i<=k<=j-1
      P[i][j] = a value of k that gave the minimum;
    }
  return M[1][n];
}
```

Chained Matrix Multiplication

- 단계 3:
  - Time Complexity Analysis
    - Basic operation:
    - Input size : *n*, the number of matrices

$$T(n) = \sum_{diagonal=1}^{n-1} [(n - diagonal) \times diagonal]$$

$$= \frac{n(n-1)(n+1)}{6} \in \Theta(n^3)$$

```
for (i = 1; i <= n; i++)
  M[i][i] = 0;
for (diagonal = 1; diagonal <= n - 1; diagonal++)   // Diagonal-1 is just
  for (i = 1; i <= n - diagonal; i++) {             // above the main
    j = i + diagonal;                               // diagonal.
    M[i][j] = minimum (M[i][k] + M[k + 1][j] + d[i - 1]*d[k]*d[j]);
             i≤k≤j-1
    P[i][j] = a value of k that gave the minimum;
  }
return M[1][n];
}
```

Chained Matrix Multiplication

- 단계 4: (Reconstruction)
  - How an optimal order can be obtained?
    - In the above example, the optimal order is

$$(A_1((((A_2A_3)A_4)A_5)A_6)$$

    - The matrix *P[ ][ ]* in the algorithm can be used to print the optimal order:
    - *P[i][j]* contains the value of *k* that gives the minimum, i.e., factorization is as follows:

$$A_iA_{i+1}\cdots A_{j-1}A_j = (A_iA_{i+1}\cdots A_k)(A_{k+1}\cdots A_{j-1}A_j)$$

Chained Matrix Multiplication

- 단계 4: (Reconstruction)
  - Algorithm printing optimal order

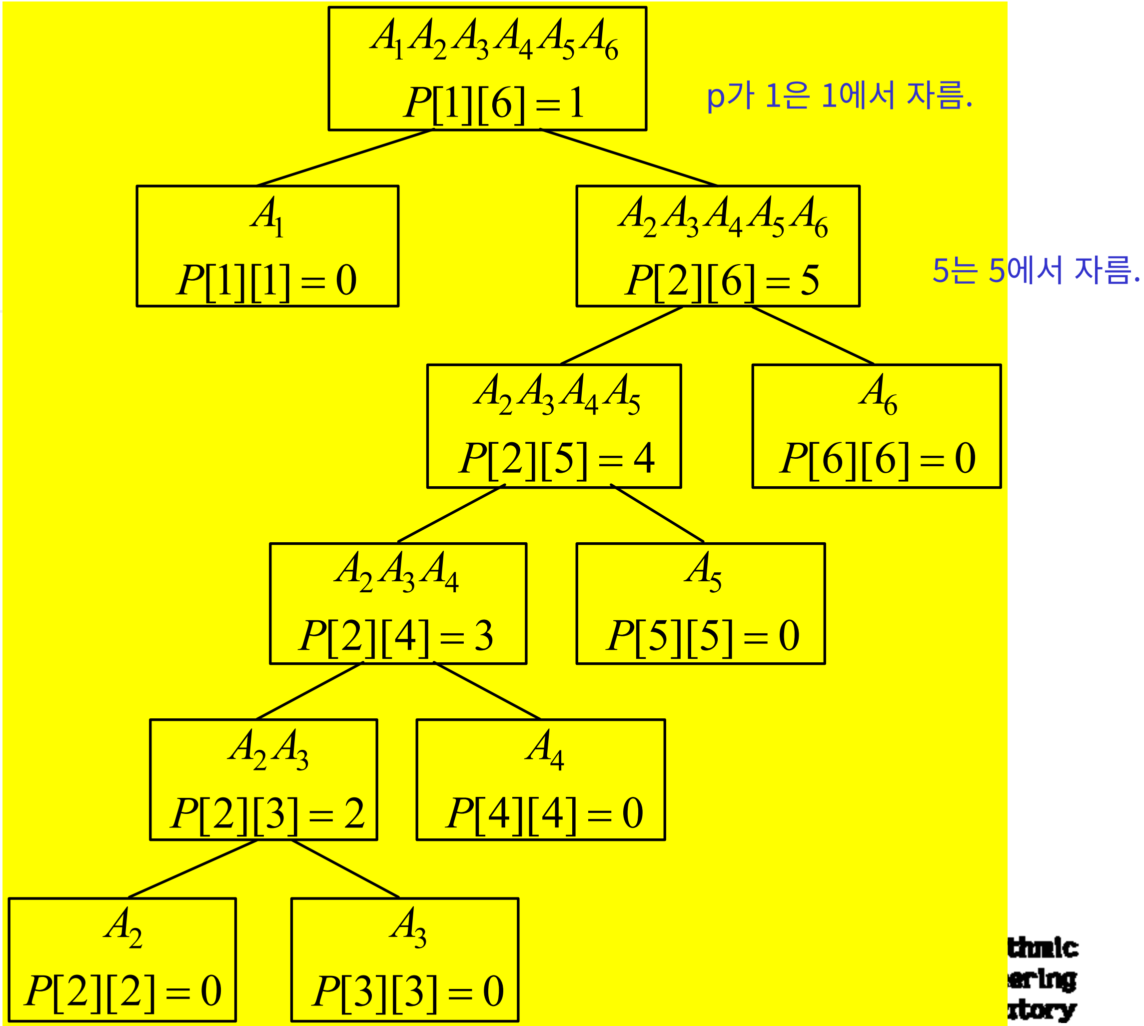
```
void order (index i, index j)
{
   if (i == j)
      cout << "A" << i;
   else {
      k = P[i][j];
      cout << "(";
      order(i, k);
      order(k + 1, j);
      cout << ")";
   }
}
```

Note that *order()* is a divide-and-conquer algorithm.

Chained Matrix Multiplication

- 단계 4: (Reconstruction)
  - Example

	1	2	3	4	5	6
1		1	1	1	1	1
2			2	3	4	5
3				3	4	5
4					4	5
5						5



Homework

- Merging Files (파일합치기)
  - ICPC2015 (Korea, Internet Contest)

Term Project

- Term Project
  - Sudoku
    - Solve with Dancing Link Data Structure
  - Crossword Puzzle

  - 진행방안
    - 조편성 : 6인 (경시대회 2팀을 합쳐)
    - 제안서 (Due Date : 11월 11일)
    - 최종보고서 (Due Date : 최종발표일 당일 제출)
    - 최종발표일 일정 및 장소
      - 최종발표 : 12월21일(월) 오후 6:00 – 오후 9:00
      - 장소 : 7호관 1층 114호실