

MAC 5711 - Análise de Algoritmos

Rodrigo Augusto Dias Faria
Departamento de Ciência da Computação - IME/USP

13 de novembro de 2015

Lista 7

1. (CRLS 22.2-1) Simule o funcionamento da BFS no grafo da Figura 22.2(a) do CLRS (segunda edição) a partir do vértice 3, determinando os valores de d e π para cada vértice.

Resposta: Inicializamos os atributos *color*, d e π de cada vértice $v \in V$ do grafo com WHITE, ∞ e NIL, respectivamente, conforme a primeira iteração do algoritmo BFS, exceto para o nó 3 que é o parâmetro s neste caso, cujo $d = 0$ e sua cor é GRAY, conforme pode ser visto em **a**).

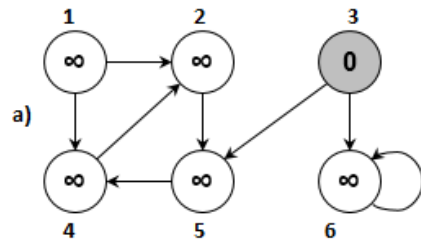
Colocamos s na fila e, então, visitamos a lista de adjacências de cada vértice a partir de s , sendo que u é o vértice retirado da pilha - aquele cuja cor é BLACK ao final do *for* da linha 12.

Note que o valor de d está dentro de cada vértice do grafo e, a cada novo vértice que descobrimos a partir de u , ou seja, aquele que ainda tem a cor WHITE, marcamos em seu atributo π o seu antecessor - o próprio u - que destacamos em laranja.

Note, também, que há casos em que nenhum novo vértice é descoberto, como em **d**), por exemplo.

Quando a pilha estiver vazia, concluímos a execução do algoritmo. Note que, neste caso, o vértice 1 não pode ser atingido a partir de 3 e, portanto, seu antecessor π fica marcado como NIL. O vértice s também tem seu antecessor NIL, já que é a entrada da busca no grafo e isso ocorre sempre.

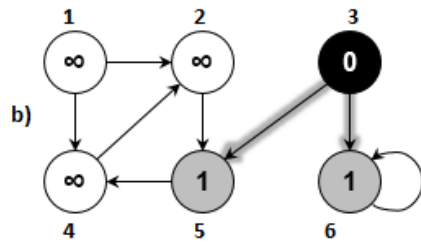
As arestas que estão destacadas formam a *breadth-first tree* e o antecessor de cada nó da árvore é dado pelo atributo π de cada vértice.



Q

3

V	1	2	3	4	5	6
π	nil	nil	nil	nil	nil	nil

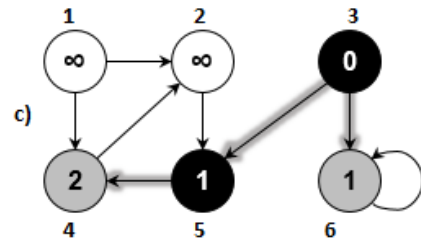


Q

5	6
---	---

V	1	2	3	4	5	6
π	nil	nil	nil	nil	3	3

$u = 3$



Q

6	4
---	---

V	1	2	3	4	5	6
π	nil	nil	nil	5	3	3

$u = 5$

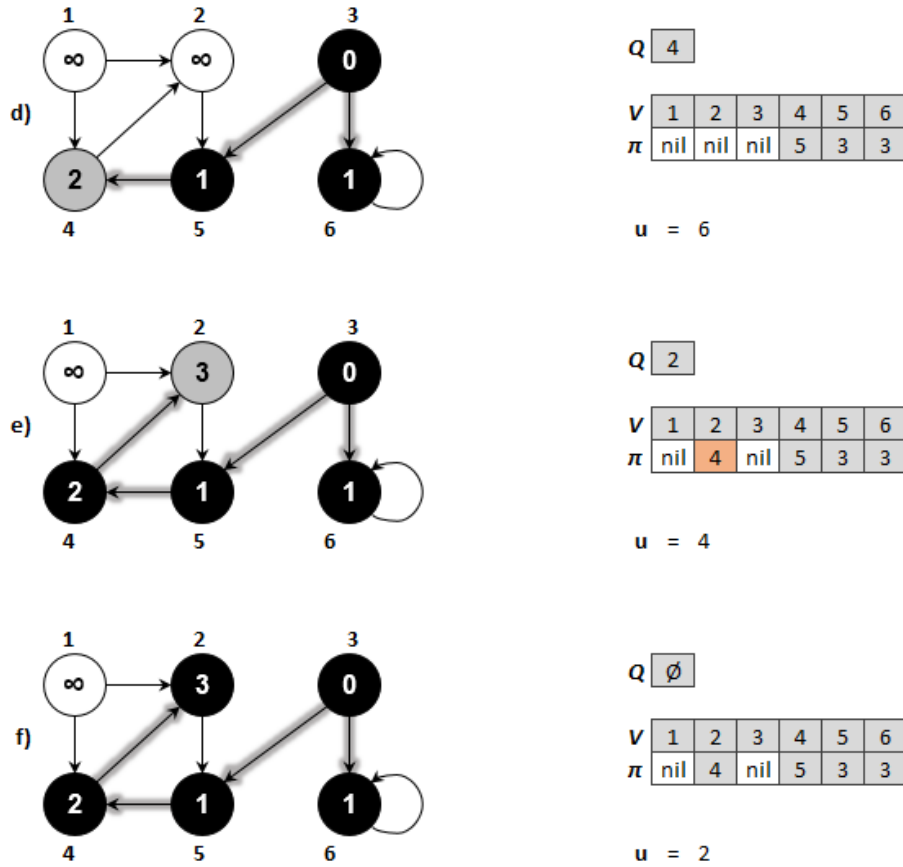
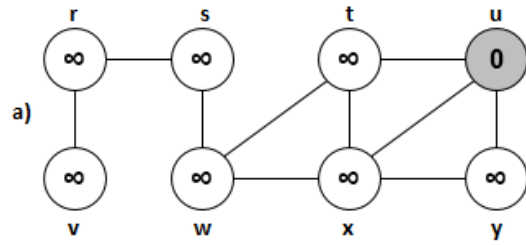


Figura 1: Sequência das operações do algoritmo BFS, sendo $s = 3$.

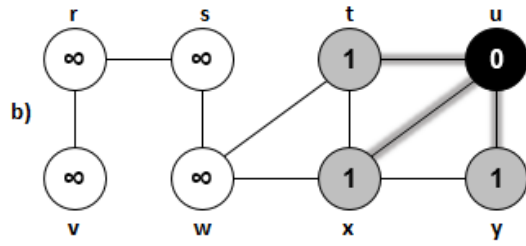
2. (CRLS Ex. 22.2-2) Simule o funcionamento da BFS no grafo da Figura 22.3 do CLRS (segunda edição) a partir do vértice u , determinando os valores de d e π para cada vértice.

Resposta: A mesma analogia aplicada na questão anterior pode ser utilizada aqui, mesmo tratando-se de um grafo não orientado, o algoritmo BFS funciona em ambos os casos, conforme vimos em sala/CLRS.



Q [u]

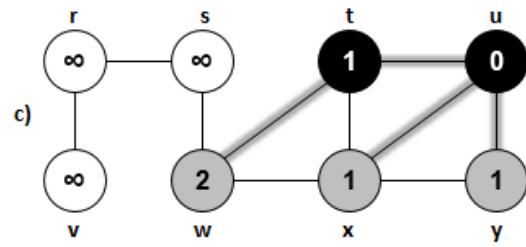
V	r	s	t	u	v	w	x	y
π	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil



Q [t x y]

V	r	s	t	u	v	w	x	y
π	nil	nil	u	nil	nil	nil	u	u

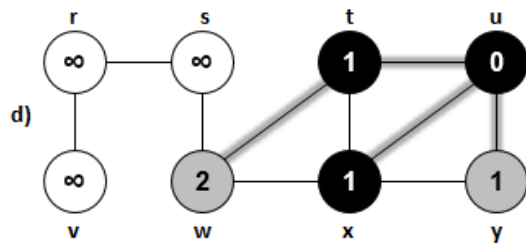
u = u



Q [x y w]

V	r	s	t	u	v	w	x	y
π	nil	nil	u	nil	nil	t	u	u

u = t



Q [y w]

V	r	s	t	u	v	w	x	y
π	nil	nil	u	nil	nil	t	u	u

u = x



Figura 2: Sequência das operações do algoritmo BFS, sendo $s = u$.

3. (CRLS 22.2-4) Argumente que o valor de $d[u]$ atribuído ao vértice u na BFS é independente da ordem em que os vértices das listas de adjacências são dados. Por outro lado, mostre, usando o exemplo da Figura 22.3 do CLRS, que a árvore BFS depende da ordem dos vértices nas listas de adjacências.

Se tomarmos, por exemplo, o vértice u do exercício anterior, de qualquer forma que organizarmos a sua lista de adjacências ($\{t, x, y\}, \{x, y, t\}, \{y, t, x\}$), o atributo d de cada um destes vértices sempre será 1, o que nos mostra que eles estão em um nível imediatamente abaixo de u na árvore.

i)

Graph structure and node values:

Node	Value
r	4
s	3
t	1
u	0
v	5
w	2
x	1
y	1

Adjacency list representation:

Node	Neighbors
r	s, v
s	r, t, w
t	s, u, x
u	t, y
v	r, w
w	s, v, x
x	t, w, y
y	u, x

Q: \emptyset

v	r	s	t	u	v	w	x	y
π	s	w	u	nil	r	x	u	u

u = v

4. (CRLS 22.2-5) Considere um grafo orientado $D = (N, A)$. Dê um exemplo de um conjunto $A_\pi \subseteq A$ de arcos em D que formam uma árvore tal que, entre quaisquer dois nós u e v em D , o único caminho entre u e v em A_π é um caminho mínimo em D entre u e v , porém, A_π jamais seria produzida por uma execução da BFS em D , independente da ordem dos nós nas listas de adjacências de D e do nó inicial s .

```

graph LR
    s((s)) --> t((t))
    s((s)) --> u((u))
    t((t)) --> v((v))
    t((t)) --> x((x))
    u((u)) --> v((v))
    u((u)) --> x((x))

```

Note que, independente da ordem dos elementos adjacentes a s , t e u , essa representação jamais poderá ser obtida pela BFS. A ordem das listas de adjacências dos elementos t e u também não influenciam na forma com que a árvore será gerada. A figura 5 mostra o resultado da execução da BFS, bem como a lista de adjacências em ordens diferentes em cada caso.

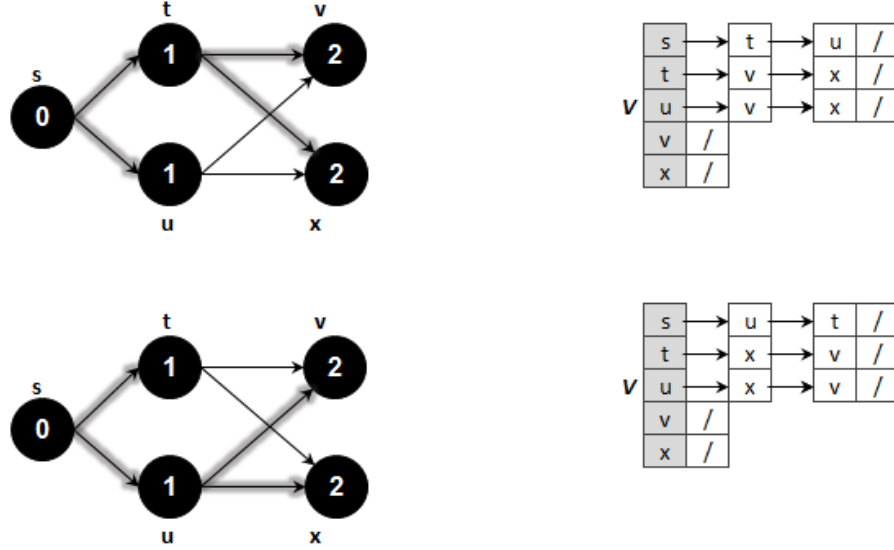


Figura 5: Execução da BFS no grafo orientado $D = (N, A)$ com a lista de adjacências em duas ordens distintas.

5. Escreva uma versão não recursiva da busca em profundidade.

Resposta: Podemos utilizar uma pilha como apoio para aprofundar na lista de adjacências de cada nó da árvore, substituindo a recursão.

Além disso, nós usamos uma fila FIFO para a lista de adjacências de cada vértice u e, assim que um novo vértice v adjacente à u é encontrado e ele ainda não foi visitado, nós o visitamos e empilhamos v em S .

Note que nós somente retiramos u da pilha (linha 11 da DFS-VISIT) quando todos os vértices da lista de adjacências dele foram visitados, ou seja, o momento em que devemos marcar u como finalizado (sub-rotina BLACKEN).

Outro ponto importante é que, como visto na linha 12 da ITERATIVE-DFS, o vértice s que dá origem à busca tem seu ancestral como nil , o que garante o funcionamento da mesma forma que a DFS original. Isso também garante que a busca funciona nos casos em que tivermos mais de uma componente conexa no grafo.

Consumo de tempo: O *loop* das linhas 2-8 da ITERATIVE-DFS tomam $\Theta(V)$ para inicializar cada vértice $u \in V[G] + \Theta(E)$ para montar a fila de adjacências de cada vértice u . As sub-rotinas BLACKEN, GRAYEN, bem como as operações na fila/pilha tomam $\Theta(1)$. O *loop* das linhas 10-13 consome tempo $\Theta(V)$, ou seja, executa no máximo uma vez para cada vértice $v \in G$, já que DFS-VISIT é executado apenas em vértices que ainda não foram descobertos - àqueles que ainda são brancos. Como a fila de adjacências é visitada no máximo uma vez na sub-rotina DFS-VISIT e a soma do comprimento da fila de adjacências de cada vértice v é $\Theta(E)$, o tempo gasto na DFS-VISIT é $O(E)$.

Portanto, o consumo de tempo total será $O(V + E)$, o que mantém o comportamento assintótico original da DFS.

ITERATIVE-DFS(G)

```
1  // let  $S$  be an empty stack
2  for each vertex  $u \in V[G]$ 
3       $color[u] = \text{WHITE}$ 
4       $\pi[u] = \text{NIL}$ 
5       $n = Adj[u].length$ 
6      for  $i = n$  to 1
7           $v = Adj[u][i]$ 
8          ENQUEUE( $Qadj[u], v$ )
9   $time = 0$ 
10 for each vertex  $u \in V[G]$ 
11     if  $color[u] == \text{WHITE}$ 
12         GRAYEN( $u, \text{NIL}$ )
13         DFS-VISIT( $u$ )
```

DFS-VISIT(s)

```
1  PUSH( $S, s$ )
2  while  $S \neq \emptyset$ 
3       $u = \text{TOP}(S)$ 
4      if  $Qadj[u] \neq \emptyset$ 
5           $v = \text{DEQUEUE}(Qadj[u])$ 
6          if  $color[v] == \text{WHITE}$ 
7              GRAYEN( $v, u$ )
8              PUSH( $S, v$ )
9      else
10         BLACKEN( $u$ )
11         POP( $S$ )
```

GRAYEN(v, u)

```
1   $color[v] = \text{GRAY}$ 
2   $time = time + 1$ 
3   $d[v] = time$ 
4   $\pi[v] = u$ 
```

BLACKEN(u)

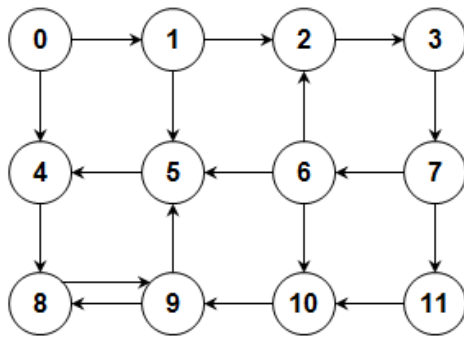
```
1   $color[u] = \text{BLACK}$ 
2   $time = time + 1$ 
3   $f[u] = time$ 
```

6. Execute uma busca em profundidade a partir do vértice 0 no grafo orientado dado pelas listas de adjacência a seguir. Exiba o rastreamento da busca.

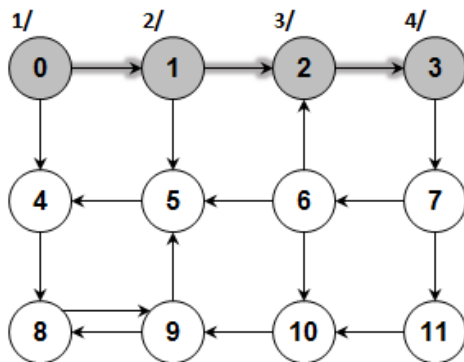
```
0: 1 4
1: 2 5
2: 3
```


3: 7
 4: 8
 5: 4
 6: 5 10 2
 7: 11 6
 8: 9
 9: 5 8
 10: 9
 11: 10

Resposta: A figura 6 mostra o grafo formado pela lista de adjacências dada, bem como o rastreamento no momento em que o vértice 3, 6 e 8 são descobertos, e o resultado final da DFS ao final de todas as chamadas recursivas, respectivamente. Os tempos d e f estão no vetor à direita e, também, acima de cada vértice.



v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
π	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil
d												
f												



v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
π	nil	0	1	2	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil
d	1	2	3	4								
f												

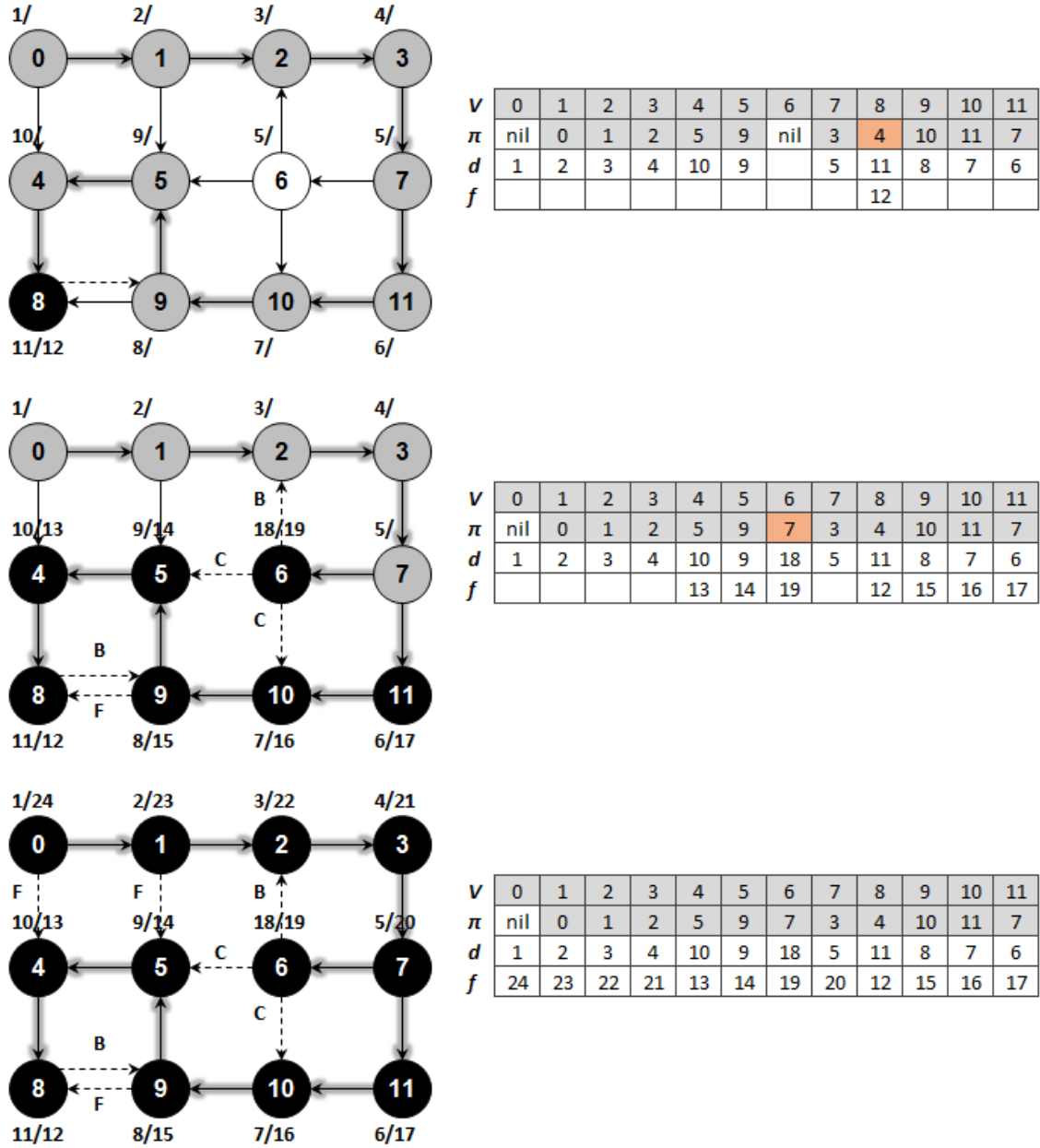


Figura 6: Rastreamento da DFS na lista de adjacências dada.

7. (CRLS 22.3-1) Desenhe uma tabela 3×3 , com as linhas e colunas indexadas pelas cores branco, cinza e preto. Em cada entrada (i, j) , indique se, em qualquer ponto durante uma DFS de um grafo orientado, pode existir um arco de um nó de cor i para um nó de cor j . Para cada arco possível, indique as classificações que ele pode ter (de árvore, de retorno, para frente, cruzado). Faça um segundo quadro considerando um grafo não orientado.

As tabelas 1 e 2 mostram as classificações dos arcos para o grafo orientado e não orientado, respectivamente.

As siglas significam *Tree*, *Back*, *Cross* e *Forward edge*.

	White	Gray	Black
White	x	x	x
Gray	T	B	F/C
Black	x	x	B

Tabela 1: Classificação dos arcos no grafo orientado para a DFS.

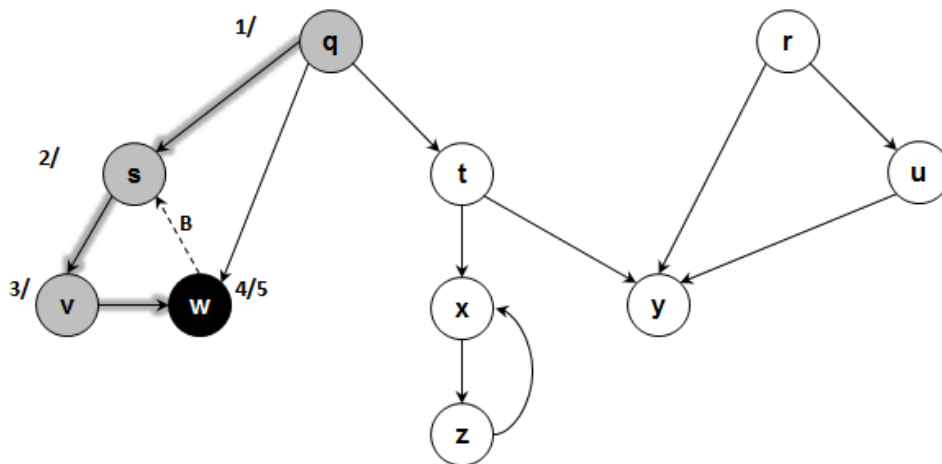
	White	Gray	Black
White	x	x	x
Gray	T	B	x
Black	x	B	B

Tabela 2: Classificação dos arcos no grafo não orientado para a DFS.

8. (CRLS 22.3-2) Mostre como a DFS funciona no grafo da Figura 22.6 do CLRS (segunda edição). Assuma que o laço das linhas 5-7 da DFS visitam os vértices em ordem alfabética, e que os vértices se encontram em ordem alfabética nas listas de adjacências. Mostre os valores de d e f para cada vértice ao final da DFS.

Resposta: A figura 7 mostra o rastreamento da DFS em 3 momentos distintos: quando todos os vértices adjacentes à w são visitados, todos os vértices adjacentes à t são visitados e a árvore com todas as chamadas recursivas concluídas, respectivamente.

Os valores d e f , bem como o antecessor de cada vértice dado por π estão na tabela de rastreamento abaixo de cada imagem. Os tipos de arestas também estão devidamente destacados.



v	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
π	nil	nil	q	nil	nil	s	v	nil	nil	nil
d	1		2			3	4			
f							5			

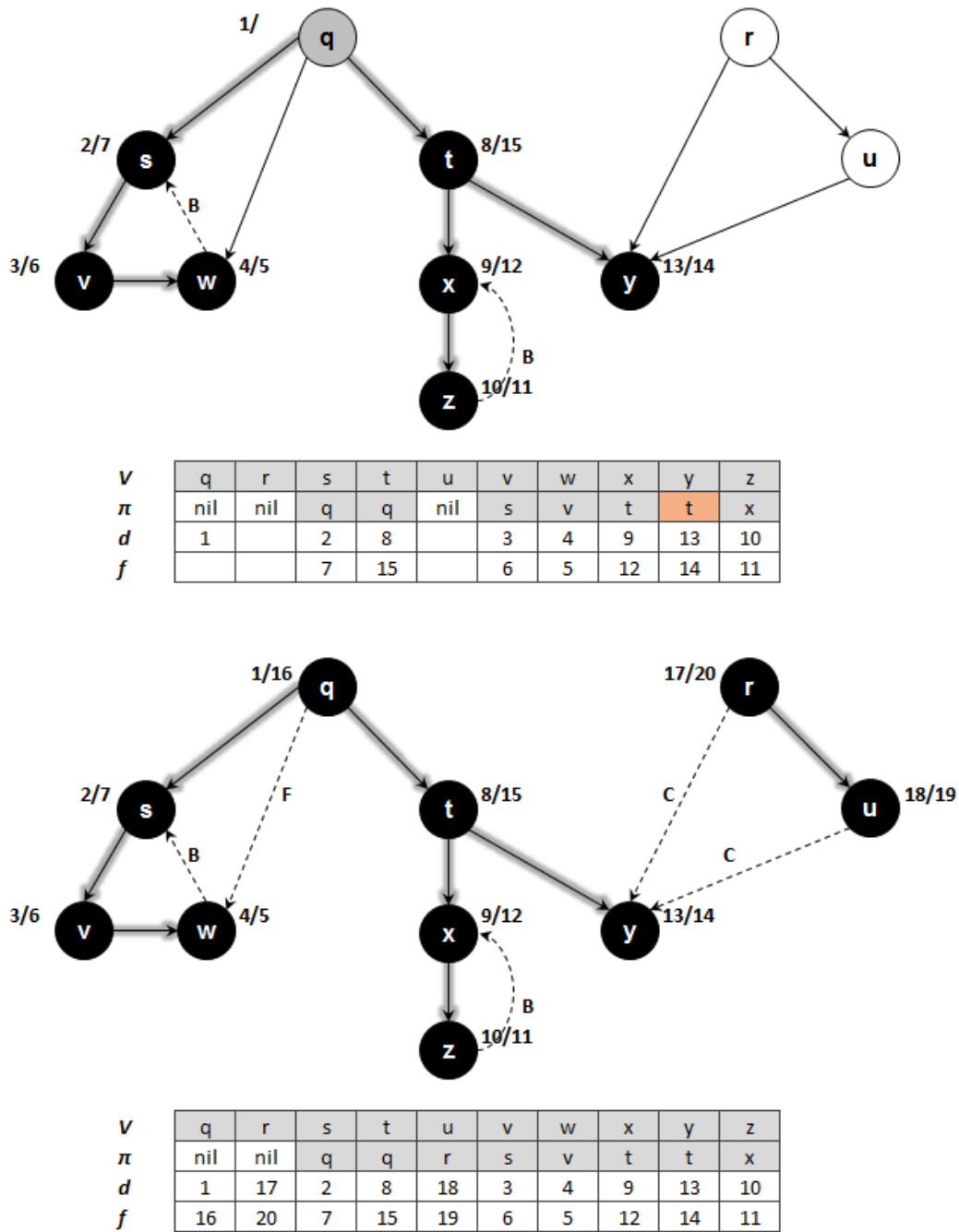


Figura 7: Rastreamento da DFS na figura 22.6 do CLRS.

9. (CRLS 22.3-7) Mostre um contraexemplo para a conjectura que se existe um caminho de u a v em um grafo orientado G , e se $d[u] < d[v]$ numa DFS de G , então v é descendente de u na floresta DFS produzida.

Podemos observar a própria árvore à esquerda da figura 22.5 (c) do CLRS como um contraexemplo. Seja a DFS produzida a partir de s , se tomarmos os vértices x e w , $d[x] < d[w]$, existe um caminho de x a w , mas w não é descendente de x .

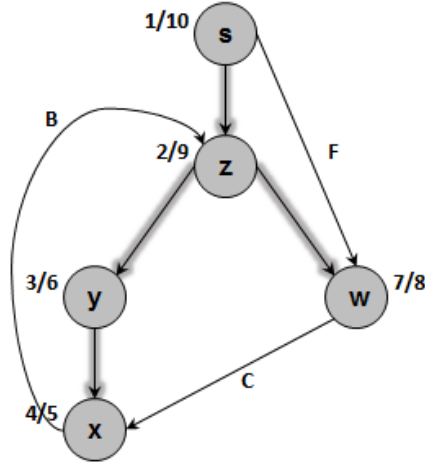


Figura 8: Contraexemplo utilizando parte do grafo da figura 22.5 (c) do CLRS.

10. (CRLS 22.3-8) Mostre um contraexemplo para a conjectura que se existe um caminho de u a v em um grafo orientado G , então qualquer DFS deve resultar em $d[v] \leq f[u]$.

A figura 9 mostra um contraexemplo da conjectura. Temos um caminho de u a v no grafo, porém, aplicando a DFS a partir de s , temos que $d[v] > f[u]$.

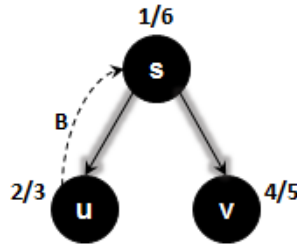


Figura 9: Contraexemplo da conjectura dada.

11. (CRLS 22.3-10) Mostre como um vértice u num grafo orientado pode terminar sozinho numa árvore de uma floresta DFS mesmo tendo arcos saindo e entrando dele em G .

A figura 10 mostra um exemplo onde o vértice u pode ficar sozinho numa árvore de uma floresta DFS gerada a partir do vértice s .

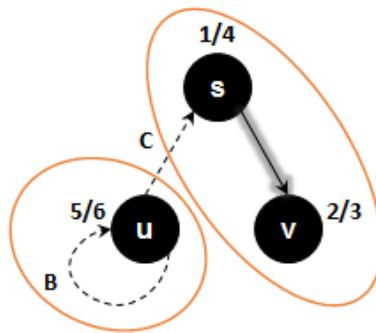


Figura 10: Exemplo onde o vértice u pode ficar isolado.

Um outro exemplo pode ser visto na figura 11, sendo que cada árvore é formada por um único vértice, já que a busca começa em v .

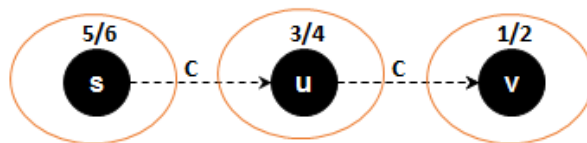


Figura 11: Segundo exemplo onde o vértice u pode ficar isolado.

14. Escreva um algoritmo que decida se um grafo é conexo. Analise o seu consumo de tempo.

Resposta: Um grafo é conexo se e somente se, para cada par s e t de seus vértices, existe um caminho com origem s e término t .

Podemos fazer uma alteração no algoritmo da DFS para contar o número de componentes conexas do grafo e executar a DFS usando cada vértice $u \in V[G]$ como origem da busca. Se houver uma única componente conexa para a busca a cada execução, o grafo é conexo.

Os vértices estão organizados em uma pilha, utilizamos as rotinas POP e PUSH-LEFT, para remover um elemento da última posição da pilha e inseri-lo na primeira posição, respectivamente, de modo que todos os vértices sejam origem da busca uma vez.

Consumo de tempo: A mudança em CONNECTED-DFS não muda o comportamento assintótico original do algoritmo, que permanece $\Theta(V + E)$.

A criação da pilha na linha 2 na rotina GRAPH-CONNECTED toma tempo $\Theta(V)$. Já as operações na pilha gastam $\Theta(1)$, bem como as demais instruções. Como nós fazemos a busca uma vez para cada vértice, temos que o consumo de tempo total será $\Theta(V(V + E))$.

GRAPH-CONNECTED(G)

```

1   $n = |V[G]|$ 
2   $S = V[G]$  //  $S$  is a stack with the vertices of  $G$ 
3  while  $n > 1$ 
4       $count = \text{CONNECTED-DFS}(G)$ 
5      if  $count > 1$ 
6          return FALSE
7       $u = \text{POP}(S)$ 
8       $\text{PUSH-LEFT}(S, u)$ 
9       $n = n - 1$ 
10 return TRUE

```

CONNECTED-DFS(G)

```
1  for each vertex  $u \in V[G]$ 
2       $color[u] = \text{WHITE}$ 
3       $\pi[u] = \text{NIL}$ 
4   $time = 0$ 
5   $count = 0$ 
6  for each vertex  $u \in V[G]$ 
7      if  $color[u] == \text{WHITE}$ 
8           $count = count + 1$ 
9          DFS-VISIT( $u$ )
10 return  $count$ 
```

15. Escreva um algoritmo que determine o número de componentes conexas de um grafo. Analise o seu consumo de tempo.

Resposta: A rotina CONNECTED-DFS do exercício 7-14 já retorna a quantidade de componentes conexas de um grafo G .

O consumo de tempo é o mesmo da DFS original, ou seja, $\Theta(V + E)$.

16. Um grafo $G = (V, E)$ é bipartido se seu conjunto de vértices V pode ser bipartido em dois conjuntos disjuntos de vértices A e B e toda aresta de E tem uma ponta em A e outra em B . Escreva um algoritmo que, dado um grafo, determine se o grafo é ou não bipartido. Analise o seu consumo de tempo.

Resposta: Podemos efetuar uma alteração na BFS, de modo que quando um vértice u encontra um vértice v que já foi visitado, ou seja, já está GRAY, verificamos se a profundidade tanto de u quanto de v é par, ou se ambas são ímpar.

Isso implica que $d[u]$ e $d[v]$ têm a mesma paridade e, portanto, o grafo **não é bipartido**.

Consumo de Tempo: A modificação não altera o comportamento assintótico original da BFS que permanece $O(V + E)$.

BFS-PARTITE(G, s)

```

1  for each vertex  $u \in V[G] - \{s\}$ 
2       $u.color = \text{WHITE}$ 
3       $u.d = \infty$ 
4       $u.partition = 0$ 
5   $s.color = \text{GRAY}$ 
6   $s.d = 0$ 
7   $s.partition = 1$ 
8   $Q = \emptyset$ 
9  ENQUEUE( $Q, s$ )
10 while  $Q \neq \emptyset$ 
11      $u = \text{DEQUEUE}(Q)$ 
12     for each  $v \in G.Adj[u]$ 
13         if  $u.partition == v.partition$ 
14             return FALSE
15         else
16             if  $v.color == \text{WHITE}$ 
17                  $v.color = \text{GRAY}$ 
18                  $v.d = u.d + 1$ 
19                  $v.partition = 3 - u.partition$ 
20                 ENQUEUE( $Q, v$ )
21      $u.color = \text{BLACK}$ 
22 return TRUE

```

17. (CLRS 22.2-8) Dada uma árvore $T = (V, E)$, o diâmetro de T é o número $\max\{d(u, v) : u, v \in V\}$, onde $d(u, v)$ é a distância entre u e v em T . Escreva um algoritmo que, dado T , determine o diâmetro de T . Analise o seu consumo de tempo.

Resposta: Conforme enunciado, o diâmetro de uma árvore T é a distância mais longa entre quaisquer dois nós u e v da árvore.

Para calcular o diâmetro podemos executar a BFS usando cada vértice $v \in V$ como fonte da busca, retornando o maior valor de d para cada busca. A maior distância será, então, o diâmetro de T .

A linha 18 deve retornar o número de vértices que tem o caminho mais longo de u a v . Repare que somamos 1 devido à inicialização de $s.d = 0$.

Consumo de Tempo: A inclusão da linha 18 não muda o consumo de tempo da BFS, que continua $O(V + E)$. Como executamos a BFS uma vez para cada vértice no *loop* da linha 3 da rotina TREE-DIAMETER, temos que o tempo total será $O(V(V + E))$.

TREE-DIAMETER(T)

```

1   $diameter = 0$ 
2  for each  $u \in T$ 
3       $max\_d = \text{BFS}(T, u)$ 
4      if  $max\_d > diameter$ 
5           $diameter = max\_d$ 
6  return  $diameter$ 

```



```

BFS( $T, s$ )
1  for each vertex  $u \in V[T] - \{s\}$ 
2       $u.color = \text{WHITE}$ 
3       $u.d = \infty$ 
4       $u.\pi = \text{NIL}$ 
5   $s.color = \text{GRAY}$ 
6   $s.d = 0$ 
7   $s.\pi = \text{NIL}$ 
8   $Q = \emptyset$ 
9  ENQUEUE( $Q, s$ )
10 while  $Q \neq \emptyset$ 
11      $u = \text{DEQUEUE}(Q)$ 
12     for each  $v \in T.Adj[u]$ 
13         if  $v.color == \text{WHITE}$ 
14              $v.color = \text{GRAY}$ 
15              $v.d = u.d + 1$ 
16              $v.\pi = u$ 
17             ENQUEUE( $Q, v$ )
18      $u.color = \text{BLACK}$ 
19 return  $u.d + 1$ 

```

CLRS (Outros)

A.1-7 Avalie o produtório $\prod_{k=1}^n 2(4^k)$.

$$\prod_{k=1}^n 2(4^k) = \prod_{k=1}^n 2((2^2)^k) = \prod_{k=1}^n 2(2^{2k}) = \prod_{k=1}^n 2^{2k+1}$$

Se avaliarmos o produtório para $n = 3$, por exemplo:

$$\prod_{k=1}^3 2^{2k+1} = 2^{2+1} \times 2^{4+1} \times 2^{6+1}$$

Percebemos que o expoente de 2 cresce em uma série aritmética:

$$\sum_{k=1}^n 2k + 1 = \sum_{k=1}^n 2k + \sum_{k=1}^n 1 = 2 \sum_{k=1}^n k + n = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + n = n(n+2)$$

Portanto:

$$\prod_{k=1}^n 2(4^k) = 2^{n(n+2)}$$