

MAC 5711 - Análise de Algoritmos

Rodrigo Augusto Dias Faria
Departamento de Ciência da Computação - IME/USP

5 de novembro de 2015

Lista 7

1. (CRLS 22.2-1) Simule o funcionamento da BFS no grafo da Figura 22.2(a) do CLRS (segunda edição) a partir do vértice 3, determinando os valores de d e π para cada vértice.

Resposta: Inicializamos os atributos *color*, d e π de cada vértice $v \in V$ do grafo com *WHITE*, ∞ e *NIL*, respectivamente, conforme a primeira iteração do algoritmo BFS, exceto para o nó 3 que é o parâmetro s neste caso, cujo $d = 0$ e sua cor é *GRAY*, conforme pode ser visto em **a**).

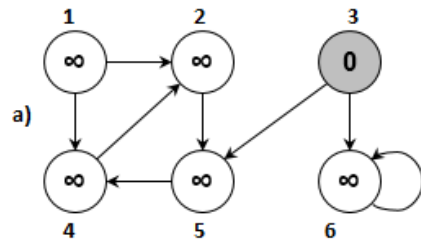
Colocamos s na fila e, então, visitamos a lista de adjacências de cada vértice a partir de s , sendo que u é o vértice retirado da pilha - aquele cuja cor é *BLACK* ao final do *for* da linha 12.

Note que o valor de d está dentro de cada vértice do grafo e, a cada novo vértice que descobrimos a partir de u , ou seja, aquele que ainda tem a cor *WHITE*, marcamos em seu atributo π o seu antecessor - o próprio u - que destacamos em laranja.

Note, também, que há casos em que nenhum novo vértice é descoberto, como em **d**), por exemplo.

Quando a pilha estiver vazia, concluímos a execução do algoritmo. Note que, neste caso, o vértice 1 não pode ser atingido a partir de 3 e, portanto, seu antecessor π fica marcado como *NIL*. O vértice s também tem seu antecessor *NIL*, já que é a entrada da busca no grafo e isso ocorre sempre.

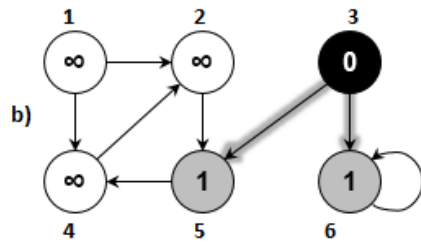
As arestas que estão destacadas formam a *breadth-first tree* e o antecessor de cada nó da árvore é dado pelo atributo π de cada vértice.



Q

3

V	1	2	3	4	5	6
π	nil	nil	nil	nil	nil	nil

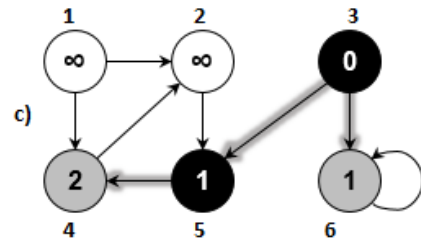


Q

5	6
---	---

V	1	2	3	4	5	6
π	nil	nil	nil	nil	3	3

$u = 3$



Q

6	4
---	---

V	1	2	3	4	5	6
π	nil	nil	nil	5	3	3

$u = 5$

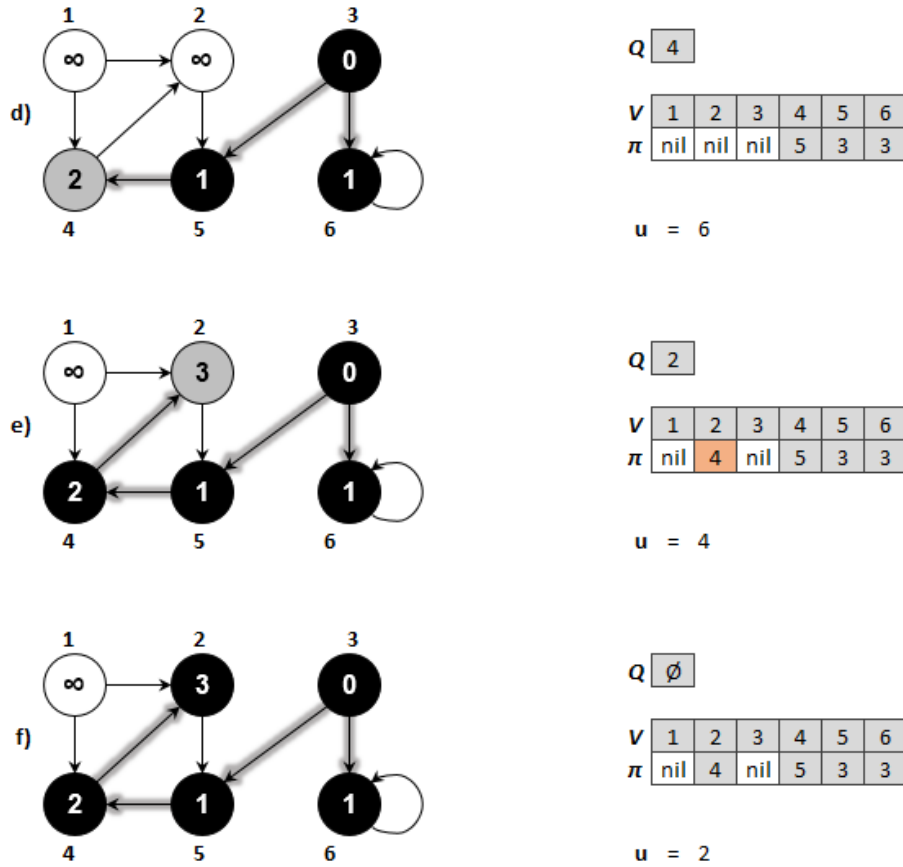
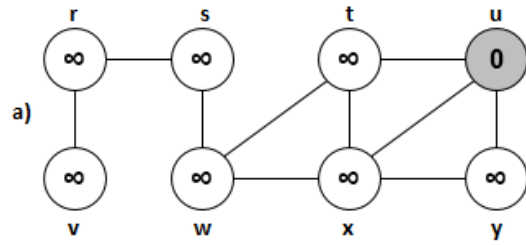


Figura 1: Sequência das operações do algoritmo BFS, sendo $s = 3$.

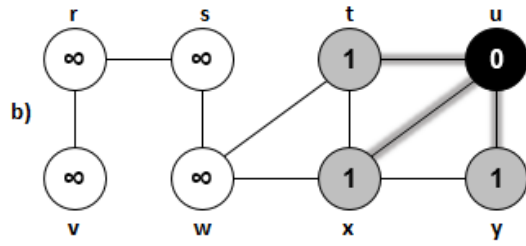
2. (CRLS Ex. 22.2-2) Simule o funcionamento da BFS no grafo da Figura 22.3 do CLRS (segunda edição) a partir do vértice u , determinando os valores de d e π para cada vértice.

Resposta: A mesma analogia aplicada na questão anterior pode ser utilizada aqui, mesmo tratando-se de um grafo não orientado, o algoritmo BFS funciona em ambos os casos, conforme vimos em sala/CLRS.



Q [u]

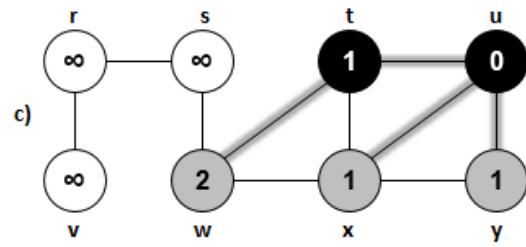
V	r	s	t	u	v	w	x	y
π	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil



Q [t x y]

V	r	s	t	u	v	w	x	y
π	nil	nil	u	nil	nil	nil	u	u

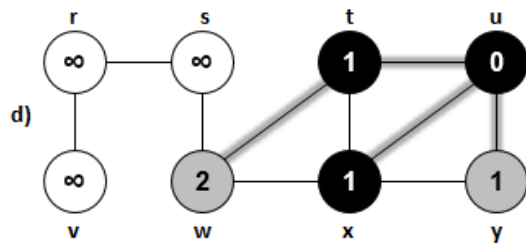
u = u



Q [x y w]

V	r	s	t	u	v	w	x	y
π	nil	nil	u	nil	nil	t	u	u

u = t



Q [y w]

V	r	s	t	u	v	w	x	y
π	nil	nil	u	nil	nil	t	u	u

u = x



Figura 2: Sequência das operações do algoritmo BFS, sendo $s = u$.

3. (CRLS 22.2-4) Argumente que o valor de $d[u]$ atribuído ao vértice u na BFS é independente da ordem em que os vértices das listas de adjacências são dados. Por outro lado, mostre, usando o exemplo da Figura 22.3 do CLRS, que a árvore BFS depende da ordem dos vértices nas listas de adjacências.

Se tomarmos, por exemplo, o vértice u do exercício anterior, de qualquer forma que organizarmos a sua lista de adjacências ($\{t, x, y\}, \{x, y, t\}, \{y, t, x\}$), o atributo d de cada um destes vértices sempre será 1, o que nos mostra que eles estão em um nível imediatamente abaixo de u na árvore.

i)

Graph structure:

- Nodes: r (4), s (3), t (1), u (0) in the top row; v (5), w (2), x (1), v (1) in the bottom row.
- Edges: (r,s) , (s,t) , (t,u) , (r,v) , (v,w) , (w,x) , (x,v) , (s,w) , (t,x) , (u,v) .

Q \emptyset

V	r	s	t	u	v	w	x	y
π	s	w	u	nil	r	x	u	u

u = v

4. (CRLS 22.2-5) Considere um grafo orientado $D = (N, A)$. Dê um exemplo de um conjunto $A_\pi \subseteq A$ de arcos em D que formam uma árvore tal que, entre quaisquer dois nós u e v em D , o único caminho entre u e v em A_π é um caminho mínimo em D entre u e v , porém, A_π jamais seria produzida por uma execução da BFS em D , independente da ordem dos nós nas listas de adjacências de D e do nó inicial s .

```

graph LR
    s((s)) --> t((t))
    s((s)) --> u((u))
    t((t)) --> v((v))
    t((t)) --> x((x))
    u((u)) --> v((v))
    u((u)) --> x((x))

```

Note que, independente da ordem dos elementos adjacentes a s , t e u , essa representação jamais poderá ser obtida pela BFS. A ordem das listas de adjacências dos elementos t e u também não influenciam na forma com que a árvore será gerada. A figura 5 mostra o resultado da execução da BFS, bem como a lista de adjacências em ordens diferentes em cada caso.

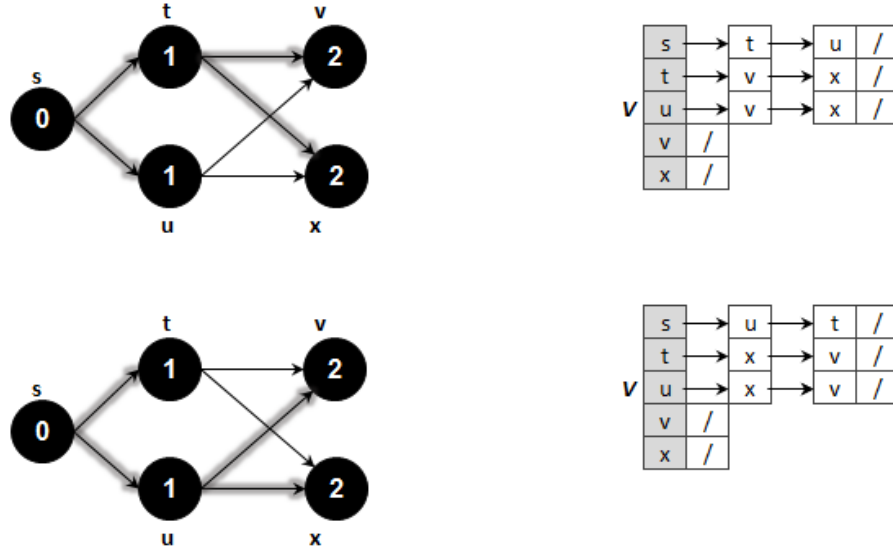


Figura 5: Execução da BFS no grafo orientado $D = (N, A)$ com a lista de adjacências em duas ordens distintas.

5. Escreva uma versão não recursiva da busca em profundidade.

Resposta: Podemos utilizar uma pilha como apoio para aprofundar na lista de adjacências de cada nó da árvore.

Ainda incompleto, precisa marcar os vértices de preto.

DFS(G)

```

1  // let  $S$  be an empty stack
2  for each vertex  $u \in V[G]$ 
3       $color[u] = \text{WHITE}$ 
4       $\pi[u] = \text{NIL}$ 
5      if  $s == \text{NIL}$ 
6           $s = u$  //  $s$  is the source of the search.
7   $time = 0$ 
8  MARK( $s$ )
9  PUSH( $S, s$ )
10 while  $S \neq \emptyset$ 
11      $u = \text{POP}(S)$ 
12     for each  $v \in Adj[u]$ 
13         if  $color[v] == \text{WHITE}$ 
14             MARK( $v$ )
15              $\pi[v] = u$ 
16             PUSH( $S, v$ )
17
```

MARK(v)

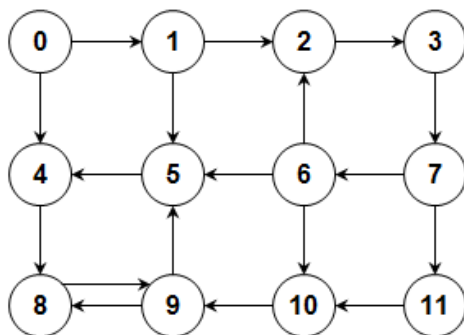
```

1   $color[v] = \text{GRAY}$ 
2   $time = time + 1$ 
3   $d[v] = time$ 
```

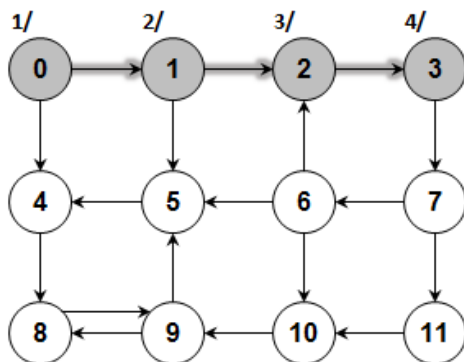
6. Execute uma busca em profundidade a partir do vértice 0 no grafo orientado dado pelas listas de adjacência a seguir. Exiba o rastreamento da busca.

0: 1 4
 1: 2 5
 2: 3
 3: 7
 4: 8
 5: 4
 6: 5 10 2
 7: 11 6
 8: 9
 9: 5 8
 10: 9
 11: 10

Resposta: A figura 6 mostra o grafo formado pela lista de adjacências dada, bem como o rastreamento no momento em que o vértice 3, 6 e 8 são descobertos, e o resultado final da DFS ao final de todas as chamadas recursivas, respectivamente. Os tempos d e f estão no vetor à direita e, também, acima de cada vértice.



v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
π	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil
d												
f												



v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
π	nil	0	1	2	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil
d	1	2	3	4								
f												

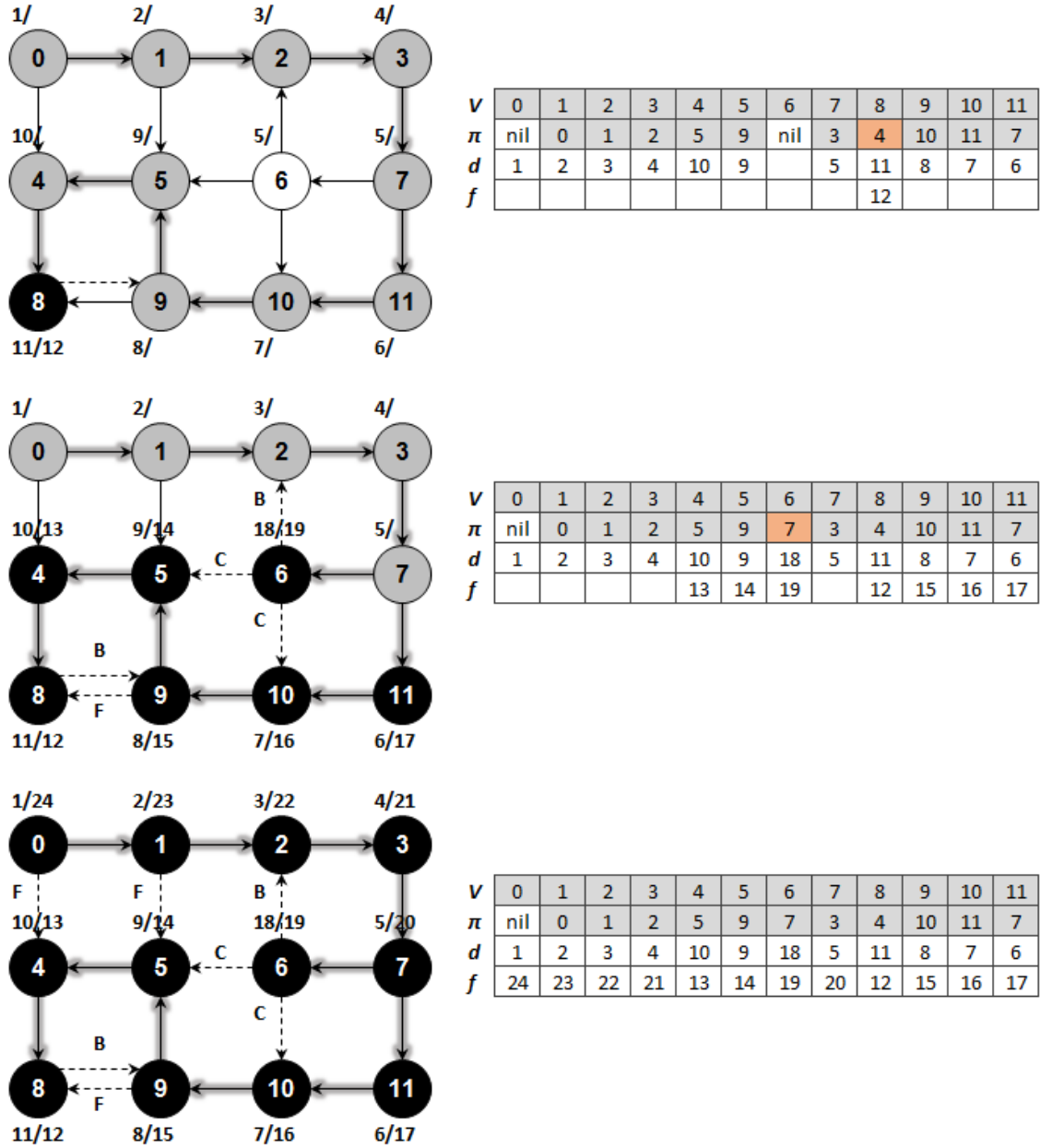


Figura 6: Rastreamento da DFS na lista de adjacências dada.

7. (CRLS 22.3-1) Desenhe uma tabela 3×3 , com as linhas e colunas indexadas pelas cores branco, cinza e preto. Em cada entrada (i, j) , indique se, em qualquer ponto durante uma DFS de um grafo orientado, pode existir um arco de um nó de cor i para um nó de cor j . Para cada arco possível, indique as classificações que ele pode ter (de árvore, de retorno, para frente, cruzado). Faça um segundo quadro considerando um grafo não orientado.

As tabelas 1 e 2 mostram as classificações dos arcos para o grafo orientado e não orientado, respectivamente.

As siglas significam *Tree*, *Back*, *Cross* e *Forward edge*.

	White	Gray	Black
White	x	x	x
Gray	T	B	F/C
Black	x	x	B

Tabela 1: Classificação dos arcos no grafo orientado para a DFS.

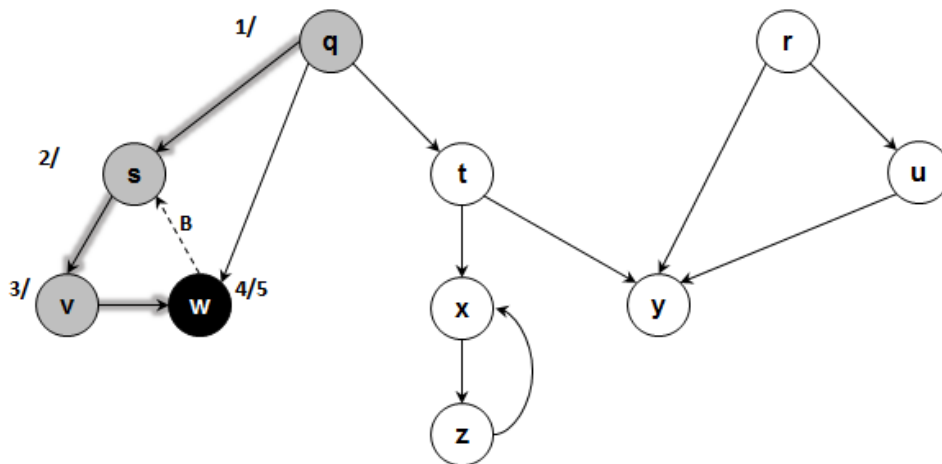
	White	Gray	Black
White	x	x	x
Gray	T	B	x
Black	x	B	B

Tabela 2: Classificação dos arcos no grafo não orientado para a DFS.

8. (CRLS 22.3-2) Mostre como a DFS funciona no grafo da Figura 22.6 do CLRS (segunda edição). Assuma que o laço das linhas 5-7 da DFS visitam os vértices em ordem alfabética, e que os vértices se encontram em ordem alfabética nas listas de adjacências. Mostre os valores de d e f para cada vértice ao final da DFS.

Resposta: A figura 7 mostra o rastreamento da DFS em 3 momentos distintos: quando todos os vértices adjacentes à w são visitados, todos os vértices adjacentes à t são visitados e a árvore com todas as chamadas recursivas concluídas, respectivamente.

Os valores d e f , bem como o antecessor de cada vértice dado por π estão na tabela de rastreamento abaixo de cada imagem. Os tipos de arestas também estão devidamente destacados.



v	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
π	nil	nil	q	nil	nil	s	v	nil	nil	nil
d	1		2			3	4			
f							5			

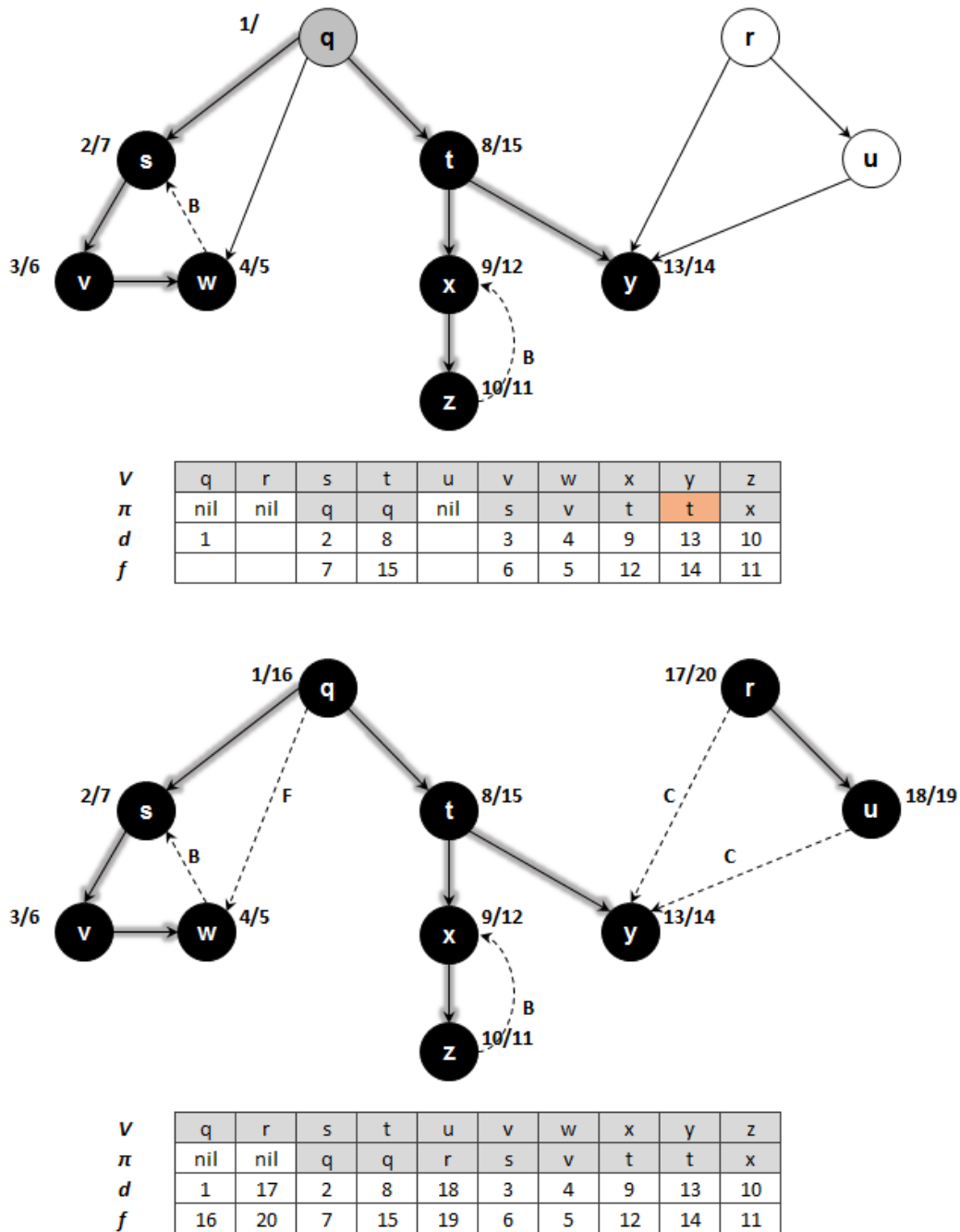


Figura 7: Rastreamento da DFS na figura 22.6 do CLRS.

9. (CRLS 22.3-7) Mostre um contraexemplo para a conjectura que se existe um caminho de u a v em um grafo orientado G , e se $d[u] < d[v]$ numa DFS de G , então v é descendente de u na floresta DFS produzida.

Podemos observar a própria árvore à esquerda da figura 22.5 (c) do CLRS como um contraexemplo. Seja a DFS produzida a partir de s , se tomarmos os vértices x e w , $d[x] < d[w]$, existe um caminho de x a w , mas w não é descendente de x .

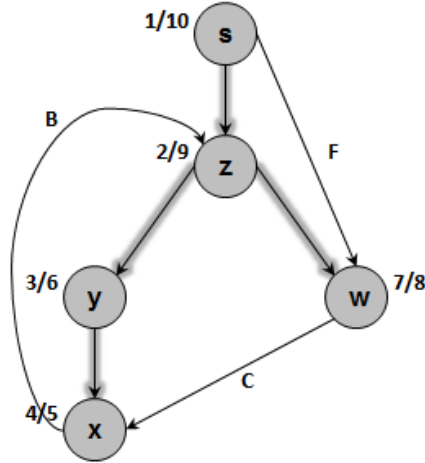


Figura 8: Contraexemplo utilizando parte do grafo da figura 22.5 (c) do CLRS.

10. (CRLS 22.3-8) Mostre um contraexemplo para a conjectura que se existe um caminho de u a v em um grafo orientado G , então qualquer DFS deve resultar em $d[v] \leq f[u]$.

A figura 9 mostra um contraexemplo da conjectura. Temos um caminho de u a v no grafo, porém, aplicando a DFS a partir de s , temos que $d[v] > f[u]$.

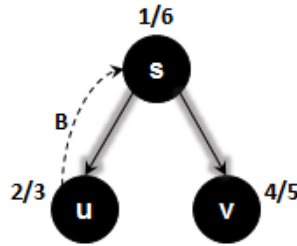


Figura 9: Contraexemplo da conjectura dada.

11. (CRLS 22.3-10) Mostre como um vértice u num grafo orientado pode terminar sozinho numa árvore de uma floresta DFS mesmo tendo arcos saindo e entrando dele em G .

A figura 10 mostra um exemplo onde o vértice u pode ficar sozinho numa árvore de uma floresta DFS gerada a partir do vértice s .

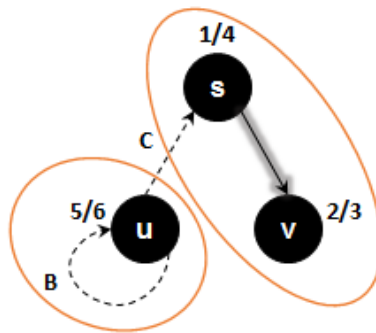


Figura 10: Exemplo onde o vértice u pode ficar isolado.

Um outro exemplo pode ser visto na figura 11, sendo que cada árvore é formada por um único vértice, já que a busca começa em v .

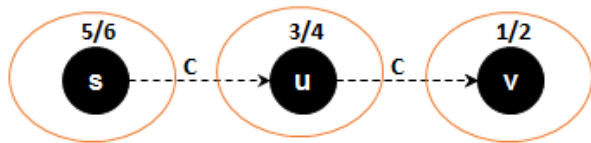


Figura 11: Segundo exemplo onde o vértice u pode ficar isolado.

CLRS (Outros)

A.1-7 Avalie o produtório $\prod_{k=1}^n 2(4^k)$.

$$\prod_{k=1}^n 2(4^k) = \prod_{k=1}^n 2((2^2)^k) = \prod_{k=1}^n 2(2^{2k}) = \prod_{k=1}^n 2^{2k+1}$$

Se avaliarmos o produtório para $n = 3$, por exemplo:

$$\prod_{k=1}^3 2^{2k+1} = 2^{2+1} \times 2^{4+1} \times 2^{6+1}$$

Percebemos que o expoente de 2 cresce em uma série aritmética:

$$\sum_{k=1}^n 2k + 1 = \sum_{k=1}^n 2k + \sum_{k=1}^n 1 = 2 \sum_{k=1}^n k + n = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + n = n(n+2)$$

Portanto:

$$\prod_{k=1}^n 2(4^k) = 2^{n(n+2)}$$