

# MAC 5711 - Análise de Algoritmos

Rodrigo Augusto Dias Faria  
Departamento de Ciência da Computação - IME/USP

16 de setembro de 2015

## Lista 1

1. Lembre-se que  $\lg n$  denota o logaritmo na base 2 de  $n$ . Usando a definição de notação  $O$ , prove que

- (a)  $3n$  não é  $O(2^n)$
- (b)  $\log_{10} n$  é  $O(\lg n)$
- (c)  $\lg n$  é  $O(\log_{10} n)$

## Lista 2

2. Escreva um algoritmo que ordena uma lista de  $n$  itens dividindo-a em três sublistas de aproximadamente  $n/3$  itens, ordenando cada sublista recursivamente e intercalando as três sublistas ordenadas. Analise seu algoritmo concluindo qual é o seu consumo de tempo.

Para este exercício, devemos efetuar uma alteração no MERGESORT para a divisão do vetor  $A$  em três partições utilizando o MERGE duas vezes ao final para intercalar as três partes ordenadas em um único vetor.

MERGESORT3( $A, p, r$ )

```
1  if  $p < r$ 
2       $k = \lfloor (p + r)/3 \rfloor$ 
3       $m = k + 1 + \lfloor (p + r)/3 \rfloor$ 
4      MERGESORT3( $A, p, k$ )
5      MERGESORT3( $A, k + 1, m$ )
6      MERGESORT3( $A, m + 1, r$ )
7      MERGE( $A, p, k, m$ )
8      MERGE( $A, p, m, r$ )
```

### Consumo de tempo

As linhas 1-3 consomem  $\Theta(1)$ . As linhas 4-5 têm consumo  $T(\lceil n/3 \rceil)$  e a linha 6 tem consumo  $T(n - \lceil 2n/3 \rceil)$ , já que a terceira partição não tem tamanho exatamente de  $\lceil n/3 \rceil$ . Sabemos que o consumo do MERGE é  $\Theta(n)$ , logo:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lceil n/3 \rceil) + T(n - 2\lceil n/3 \rceil) + \Theta(n) + \Theta(n) \\ &= 2T(\lceil n/3 \rceil) + T(\lceil n/3 \rceil) + \Theta(2n) \\ &= 3T(\lceil n/3 \rceil) + \Theta(2n) \end{aligned}$$

Como  $\Theta(2n)$  é  $\Theta(n)$ :

$$T(n) = 3T(\lceil n/3 \rceil) + \Theta(n)$$

Simplificando a recorrência, temos:

$$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 3T\left(\frac{n}{3}\right) + n, & n \geq 2 \text{ potência de } 2 \end{cases}$$

Por expansão:

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3T\left(\frac{n}{3}\right) + n \\
&= 3\left(3T\left(\frac{n}{3^2}\right) + \left(\frac{n}{3}\right)\right) + n &= 3^2T\left(\frac{n}{3^2}\right) + n + n \\
&= 3^2\left(3T\left(\frac{n}{3^3}\right) + \left(\frac{n}{3^2}\right)\right) + n + n &= 3^3T\left(\frac{n}{3^3}\right) + n + n + n \\
&= \dots \\
&= 3^kT\left(\frac{n}{3^k}\right) + kn
\end{aligned}$$

Assumindo  $k = \log_3 n$  e  $3^k = n$ :

$$\begin{aligned}
T(n) &= nT\left(\frac{n}{n}\right) + \log_3 n \\
&= T(1)n + \log_3 n(n) \\
&= n + n(\log_3 n)
\end{aligned}$$

Portanto,  $T(n) = n + n(\log_3 n)$  é  $\Theta(n \log n)$ .

*Demonstração.* Prova por indução em  $k$ .

**Base:** para  $n = 1$

$$T(1) = 1 = 1 + 1(\log_3 1) = 1 + 0 = 1$$

**Hipótese de Indução:** Assuma que  $T(x) = x + x(\log_3 x)$  vale para  $1 \leq x < n$

**Passo:** para  $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
T(n) &= 3T\left(\frac{n}{3}\right) + n = 3\left(\left(\frac{n}{3}\right) + \left(\frac{n(\log_3 \frac{n}{3})}{3}\right)\right) + n && \text{(por HI)} \\
&= 3\left(\frac{n}{3}\right) + 3\left(\left(\frac{n}{3}\right) \log_3 \frac{n}{3}\right) + n \\
&= n + n + n \log_3 \frac{n}{3} \\
&= 2n + n \log_3 n - n \\
&= n + n \log_3 n
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar!

□

### Lista 3

2. Qual é o consumo de espaço do QUICKSORT no pior caso?

A avaliação de um algoritmo quanto ao consumo de espaço está relacionada com a necessidade de alocação de espaço adicional na pilha de recursão.

No pior caso, o QUICKSORT será executado uma vez para cada elemento da lista dada de tamanho  $n$ , ou seja, teremos  $n$  chamadas recursivas.

Isso significa que, com uma lista de  $n$  elementos,  $n$  novas chamadas serão adicionadas à pilha no pior caso, o que nos leva a uma complexidade de espaço  $O(n)$ .

3. Quando um algoritmo recursivo tem como último comando executado, em algum de seus casos, uma chamada recursiva, tal chamada é denominada recursão de calda (*tail recursion*). Um exemplo de recursão de calda acontece no QUICKSORT.

QUICKSORT( $A, p, r$ )

```
1  q = PARTITION(A, p, r)
2  QUICKSORT(A, p, q - 1)
3  QUICKSORT(A, q + 1, r)
```

Toda recursão de calda pode ser substituída por uma repetição. No caso do QUICKSORT, obtemos o seguinte:

QUICKSORT( $A, p, r$ )

```
1  while p < r
2      q = PARTITION(A, p, r)
3      QUICKSORT(A, p, q - 1)
4      p = q + 1
```

Mostre como essa ideia pode ser usada (de uma maneira mais esperta) para melhorar significativamente o consumo de espaço no pior caso do QUICKSORT.

O benefício da utilização do loop ao invés da recursão de cauda é que, geralmente, precisamos de menos memória na pilha para ordenar todos os elementos do vetor  $A$ , já que a implementação sem a recursão de cauda reusa o ambiente da pilha (variáveis locais, parâmetros, etc) a cada iteração.

A profundidade das chamadas recursivas está relacionada com a ordem em que os elementos se encontram. Se, por exemplo, o vetor  $A$  está em ordem decrescente, teremos a execução no pior caso. Isso implica na forma em que cada partição é gerada.

Para ter um resultado ainda mais eficiente, os intervalos podem ser comparados para se certificar de que a maior partição é sempre processada de forma iterativa e a menor de forma recursiva, o que garante a menor profundidade de recursão possível para um determinado vetor de entrada e pivô.

HALF-TAIL-QUICKSORT( $A, p, r$ )

```

1  while  $p < r$ 
2       $q = \text{PARTITION}(A, p, r)$ 
3      if  $(q - p) < (r - q)$ 
4          HALF-TAIL-QUICKSORT( $A, p, q - 1$ )
5           $p = q + 1$ 
6      else
7          HALF-TAIL-QUICKSORT( $A, q + 1, r$ )
8           $r = q - 1$ 

```

4. Considere o seguinte algoritmo que determina o segundo maior elemento de um vetor  $v[1..n]$  com  $n \geq 2$  números positivos distintos.

**Algoritmo Máximo** ( $v, n$ )

```

1.  $maior \leftarrow 0$ 
2.  $segundo\_maior \leftarrow 0$ 
3. para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
4.     se  $v[i] > maior$ 
5.         então  $segundo\_maior \leftarrow maior$ 
6.          $maior \leftarrow v[i]$ 
7.     senão se  $v[i] > segundo\_maior$ 
8.         então  $segundo\_maior \leftarrow v[i]$ 
9. devolva  $segundo\_maior$ 

```

Suponha que a entrada do algoritmo é uma permutação de 1 a  $n$  escolhida uniformemente dentre todas as permutações de 1 a  $n$ . Qual é o número esperado de comparações executadas na linha 6 do algoritmo? Qual é o número esperado de atribuições efetuadas na linha 7 do algoritmo?

Vamos calcular  $E[X]$  para o algoritmo dado. Seja:

A = número de vezes que a linha 5 do algoritmo foi executada

B = número de vezes que a linha 8 do algoritmo foi executada

$$X = A + B$$

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se A ou B} \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$$

Logo:

$$E[X_i] = 0 * Pr\{X_i = 0\} + 1 * Pr\{X_i = 1\} = Pr\{X_i = 1\}$$

Sabemos que a execução da linha 8 depende da avaliação da linha 5, logo:

$$E[X_i] = Pr\{A\} + (1 - Pr\{A\}) * Pr\{B|\bar{A}\}$$

Como já vimos para a versão original do algoritmo MÁXIMO é  $Pr\{A\} = \frac{1}{i}$ .  
 Para a probabilidade de execução da linha 8, temos que:  
 $Pr\{B|\bar{A}\} = \frac{1}{1-i}$

Portanto:

$$\begin{aligned} E[X_i] &= \left(\frac{1}{i}\right) + \left(1 - \frac{1}{i}\right) \left(\frac{1}{i-1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{i}\right) + \left(\frac{i-1}{i}\right) \left(\frac{1}{i-1}\right) \\ &= \frac{2}{i} \end{aligned}$$

É fato que a linha 5 sempre será executada na primeira iteração, assumindo que  $v[1..n]$  contenha apenas inteiros positivos e  $n \geq 2$ . Logo:

$$E[X_i] = 1 + \sum_{i=2}^n \frac{2}{i} = 1 + 2 \sum_{i=2}^n \frac{1}{i}$$

6. (**CLRS 8.4-3**) Seja  $X$  uma variável aleatória que é igual ao número de caras em duas jogadas de uma moeda justa. Quanto vale  $E[X^2]$ ? Quanto vale  $E[X]^2$ ?

Como temos dois lançamentos, o espaço amostral é dado por:

$$S = \{CC, CK, KC, KK\}$$

Sabendo que a  $Pr\{X = cara\} = 1/4$ , temos que  $E[X]$ :

$$\begin{aligned} E[X] &= 2 * \frac{1}{4} + 1 * \frac{1}{4} + 1 * \frac{1}{4} + 0 * \frac{1}{4} \\ &= \frac{2+1+1}{4} + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Logo, para  $E[X^2]$ , temos:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= 2^2 * \frac{1}{4} + 1^2 * \frac{1}{4} + 1^2 * \frac{1}{4} + 0^2 * \frac{1}{4} \\ &= \frac{4+1+1}{4} + 0 \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

e para  $E^2[X]$ , temos o produto das esperanças de  $X$ :

$$\begin{aligned} E^2[X] &= E[X] * E[X] \\ &= 1 * 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

## Lista 4

1. Escreva uma função que recebe um vetor com  $n$  letras A's e B's e, por meio de trocas, move todos os A's para o início do vetor. Sua função deve consumir tempo  $O(n)$ .

Resposta

3. Sejam  $X[1..n]$  e  $Y[1..n]$  dois vetores, cada um contendo  $n$  números ordenados. Escreva um algoritmo  $O(\lg n)$  para encontrar uma das medianas de todos os  $2n$  elementos nos vetores  $X$  e  $Y$ .

Sabemos que a mediana de  $X$  e  $Y$  está em  $i = \lfloor q/2 \rfloor$  e  $j = \lfloor s/2 \rfloor$ , respectivamente. Note que  $n = q + s$  é par, e é por isso que nós estamos usando a função **piso**.

Se  $X[i]$  é maior do que  $Y[j]$ , significa que a mediana global está à direita de  $X[i]$  e à esquerda de  $Y[j]$ . Se  $X[i]$  é menor ou igual a  $Y[j]$ , nós procuramos a mediana à direita de  $Y[j]$  e à esquerda de  $X[i]$ .

A condição de parada dá-se quando  $p == q$ , o que significa que a mediana global está dentro do vetor  $X$ . Caso contrário, se  $r == s$ , a mediana está em  $Y$ .

O pseudocódigo FIND-MEDIAN mostra a operação descrita acima que, também, é o resultado do exercício 9.3-8 CLRS 3ed.

FIND-MEDIAN( $X, Y, p, q, r, s$ )

```
1  if  $p == q$ 
2    // We have found the median between p, q and r
3    return  $X[p]$ 
4  elseif  $r == s$ 
5    // We have found the median between q, r and s
6    return  $Y[r]$ 
7   $i = p + (q - p)/2$ 
8   $j = r + (s - r)/2$ 
9  if  $X[i] > Y[j]$ 
10      $q = i$ 
11      $r = j$ 
12 else
13      $p = i$ 
14      $s = j$ 
15 return FIND-MEDIAN( $X, Y, p, q, r, s$ )
```

4. (**CLRS 9.3-5**) Para esta questão, vamos dizer que a mediana de um vetor  $A[p..r]$  com números inteiros é o valor que ficaria na posição  $A[\lfloor (p + r)/2 \rfloor]$  depois que o vetor  $A[p..r]$  fosse ordenado.

Dado um algoritmo linear “caixa-preta” que devolve a mediana de um vetor, descreva um algoritmo simples, linear, que, dado um vetor  $A[p..r]$  de inteiros distintos e um inteiro  $k$ , devolve o  $k$ -ésimo mínimo do vetor. (O  $k$ -ésimo mínimo de um vetor de inteiros distintos é o elemento que estaria na  $k$ -ésima posição do vetor se ele fosse ordenado.)

Resposta

8. (**CLRS 8.3-2**) Quais dos seguintes algoritmos de ordenação são estáveis: insertionsort, mergesort, heapsort, e quicksort. Descreva uma maneira simples de deixar qualquer algoritmo de ordenação estável. Quanto tempo e/ou espaço adicional a sua estratégia usa?

Os algoritmos estáveis são o insertionsort e o mergesort (versão do Cormen). Os demais não são estáveis.

Uma forma simples de deixar qualquer algoritmo de ordenação estável é criar um mecanismo de indexação que mantenha a ordem em que os elementos aparecem originalmente, ou seja, basta termos um índice para cada elemento de um vetor de  $n$  elementos.

Esse mecanismo necessita de  $\Theta(n)$  espaço extra para armazenar os  $n$  índices do vetor de  $n$  elementos.