MAC 5711 - Análise de Algoritmos

Rodrigo Augusto Dias Faria
Departamento de Ciência da Computação - IME/USP

20 de novembro de 2015

Lista 7

1. (CRLS 22.2-1) Simule o funcionamento da BFS no grafo da Figura 22.2(a) do CLRS (segunda edição) a partir do vértice 3, determinando os valores de d e π para cada vértice.

Resposta: Inicializamos os atributos $color$, d e π de cada vértice $v \in V$ do grafo com WHITE, ∞ e NIL, respectivamente, conforme a primeira iteração do algoritmo BFS, exceto para o nó 3 que é o parâmetro s neste caso, cujo $d = 0$ e sua cor é GRAY, conforme pode ser visto em **a)**.

Colocamos s na fila e, então, visitamos a lista de adjacências de cada vértice a partir de s, sendo que u é o vértice retirado da pilha - aquele cuja cor é BLACK ao final do for da linha 12.

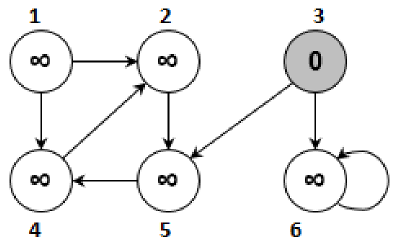
Note que o valor de d está dentro de cada vértice do grafo e, a cada novo vértice que descobrimos a partir de u, ou seja, aquele que ainda tem a cor WHITE, marcamos em seu atributo π o seu antecessessor - o próprio u - que destacamos em laranja.

Note, também, que há casos em que nenhum novo vértice é descoberto, como em **d)**, por exemplo.

Quando a pilha estiver vazia, concluímos a execução do algoritmo. Note que, neste caso, o vértice 1 não pode ser atingido a partir de 3 e, portanto, seu antecessor π fica marcado como NIL. O vértice s também tem seu antecessor NIL, já que é a entrada da busca no grafo e isso ocorre sempre.

As arestas que estão destacadas formam a *breadth-first tree* e o antecessor de cada nó da árvore é dado pelo atributo π de cada vértice.

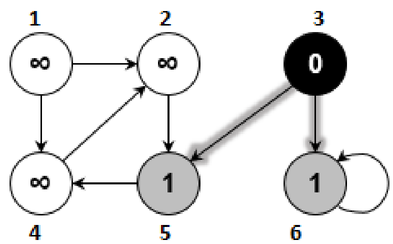
a)



Q: 3

V	1	2	3	4	5	6
π	nil	nil	nil	nil	nil	nil

b)

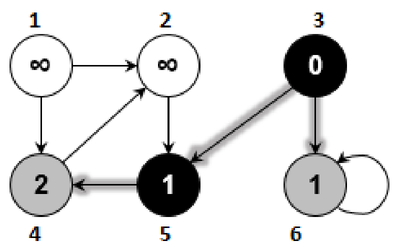


Q: 5, 6

V	1	2	3	4	5	6
π	nil	nil	nil	nil	3	3

u = 3

c)



Q: 6, 4

V	1	2	3	4	5	6
π	nil	nil	nil	5	3	3

u = 5

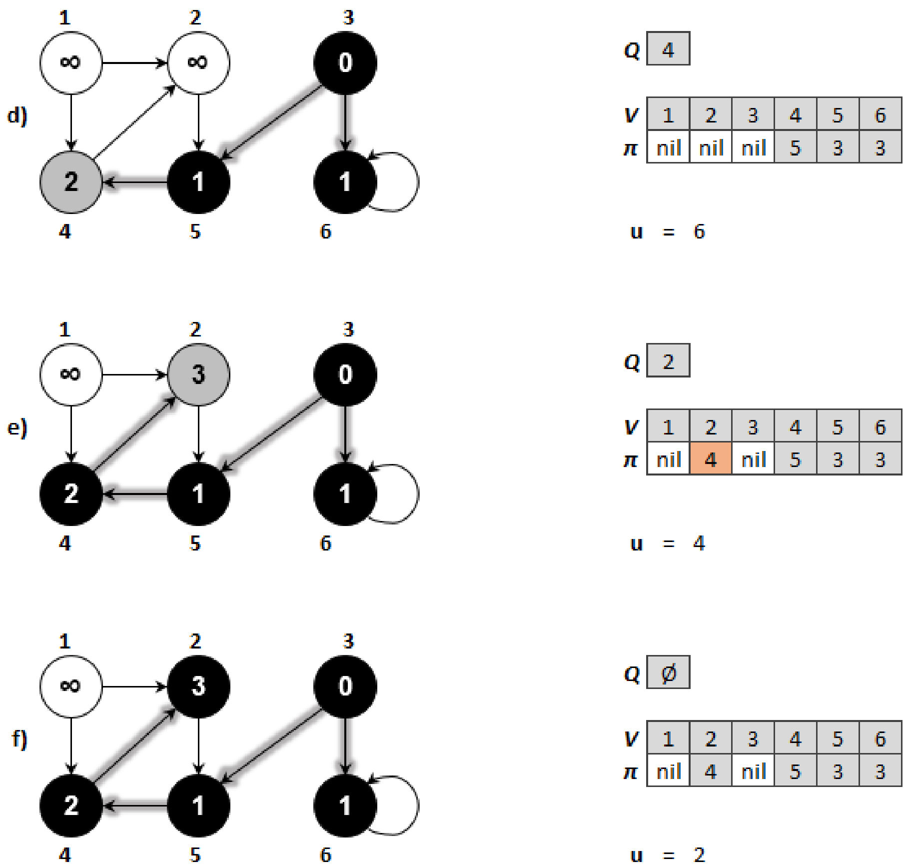
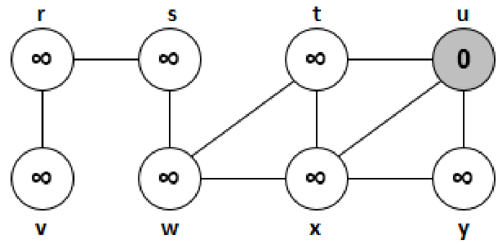


Figura 1: Sequência das operações do algoritmo BFS, sendo $s = 3$.

2. (CRLS Ex. 22.2-2) Simule o funcionamento da BFS no grafo da Figura 22.3 do CLRS (segunda edição) a partir do vértice u, determinando os valores de d e π para cada vértice.

Resposta: A mesma analogia aplicada na questão anterior pode ser utilizada aqui, mesmo tratando-se de um grafo não orientado, o algoritmo BFS funciona em ambos os casos, conforme vimos em sala/CLRS.

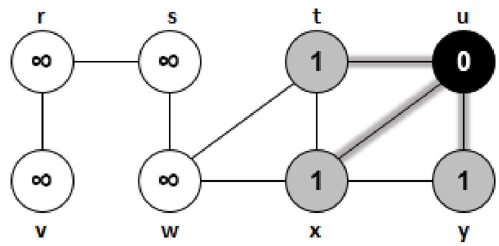
a)



Q								
	u							

V	r	s	t	u	v	w	x	y
π	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil

b)

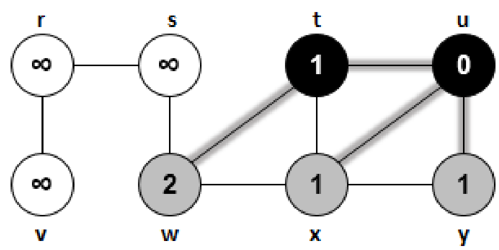


Q			
	t	x	y

V	r	s	t	u	v	w	x	y
π	nil	nil	u	nil	nil	nil	u	u

u = u

c)

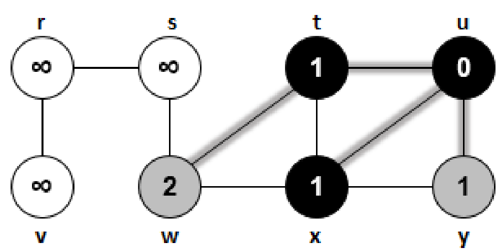


Q			
	x	y	w

V	r	s	t	u	v	w	x	y
π	nil	nil	u	nil	nil	t	u	u

u = t

d)



Q		
	y	w

V	r	s	t	u	v	w	x	y
π	nil	nil	u	nil	nil	t	u	u

u = x

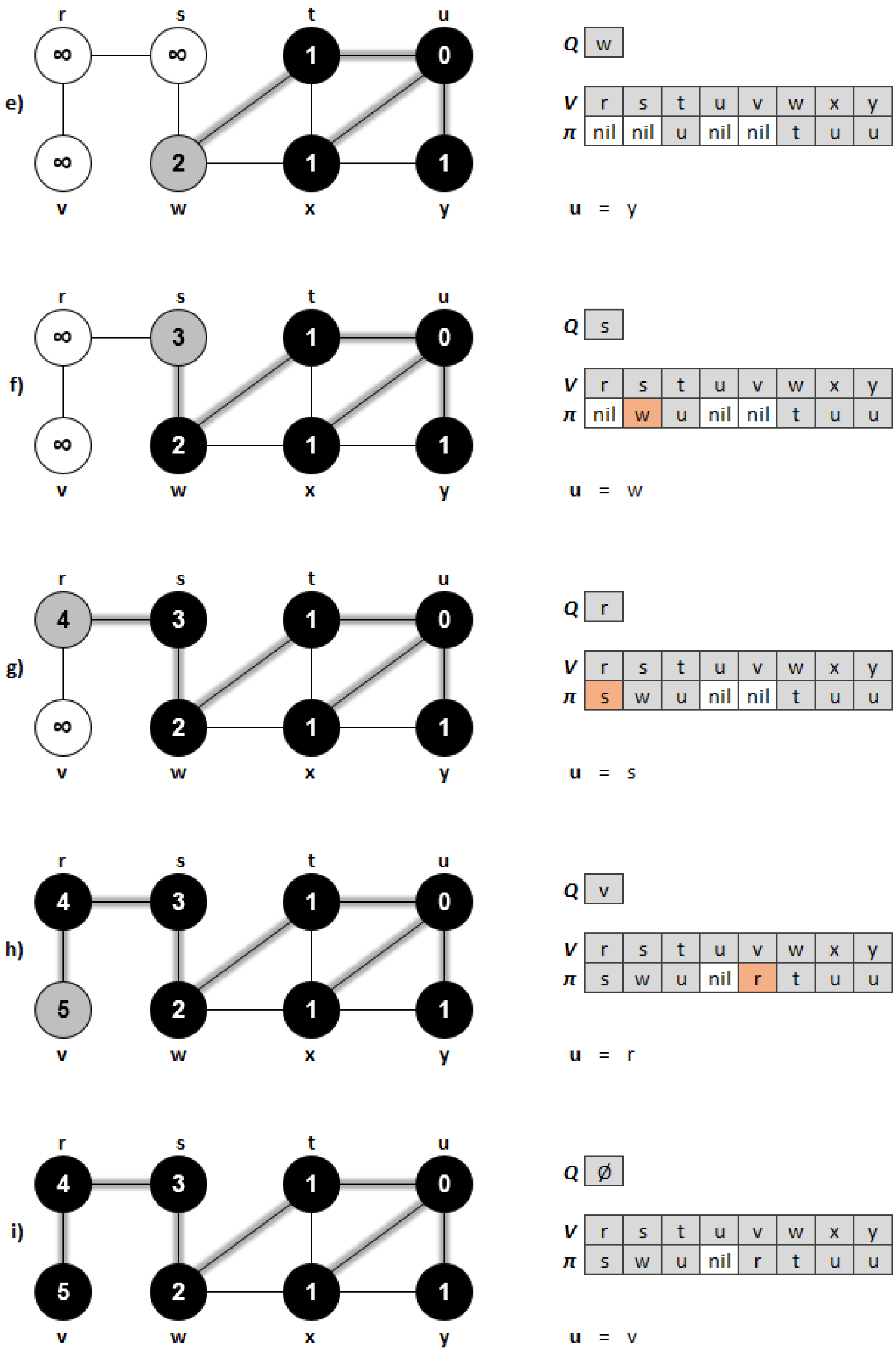


Figura 2: Sequência das operações do algoritmo BFS, sendo $s = u$.

3. (CRLS 22.2-4) Argumente que o valor de $d[u]$ atribuído ao vértice u na BFS é independente da ordem em que os vértices das listas de adjacências são dados. Por outro lado, mostre, usando o exemplo da Figura 22.3 do CLRS, que a árvore BFS depende da ordem dos vértices nas listas de adjacências.

Resposta: O atributo d de cada vértice v é calculado uma única vez na linha 15, sendo que este valor é incrementado a cada nível da árvore que algoritmo descobre a partir de s.

Se tomarmos, por exemplo, o vértice u do exercício anterior, de qualquer forma que organizarmos a sua lista de adjacências ($\{t,x,y\}$, $\{x,y,t\}$, $\{y,t,x\}$), o atributo d de cada um destes vértices sempre será 1, o que nos mostra que eles estão em um nível imediatamente abaixo de u na árvore.

Por outro lado, a ordem da lista de adjacências influencia na árvore resultante após a aplicação do algoritmo. Usando o mesmo exemplo que citamos no caso anterior, se tomarmos a lista de adjacências de u na ordem $\{x,y,t\}$, a sub-árvore do segundo nível terá, agora, o vértice x como a raiz, e não mais t, como visto no exercício 2. Consequentemente, o atributo π do vértice w também muda, já que x, agora, passa a ser o seu antecessor.

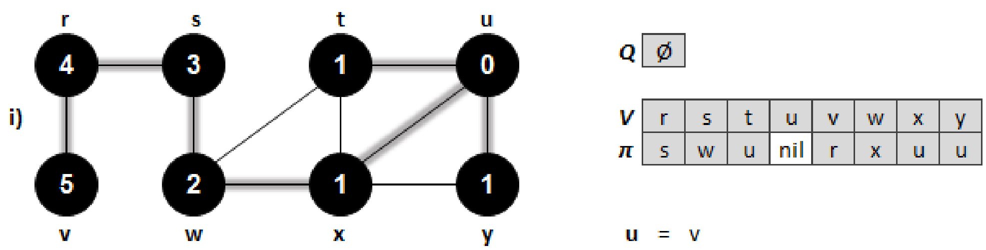


Figura 3: Árvore resultante do algoritmo BFS, sendo $s = u$ e a lista de adjacências na ordem $\{x,y,t\}$.

4. (CRLS 22.2-5) Considere um grafo orientado $D = (N, A)$. Dê um exemplo de um conjunto $A_\pi \subseteq A$ de arcos em D que formam uma árvore tal que, entre quaisquer dois nós u e v em D, o único caminho entre u e v em A_π é um caminho mínimo em D entre u e v, porém, A_π jamais seria produzida por uma execução da BFS em D, independente da ordem dos nós nas listas de adjacências de D e do nó inicial s.

Resposta: Seja o conjunto de arcos A_π destacados no grafo da figura 4.

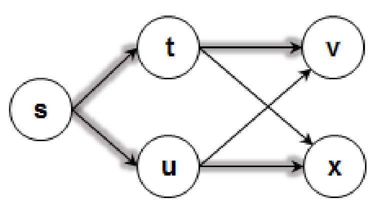


Figura 4: Grafo orientado $D = (N, A)$.

Note que, independente da ordem dos elementos adjacentes a s, t e u, essa representação jamais poderá ser obtida pela BFS. A ordem das listas de adjacências dos elementos t e u também não influenciam na forma com que a árvore será gerada. A figura 5 mostra o resultado da execução da BFS, bem como a lista de adjacências em ordens diferentes em cada caso.

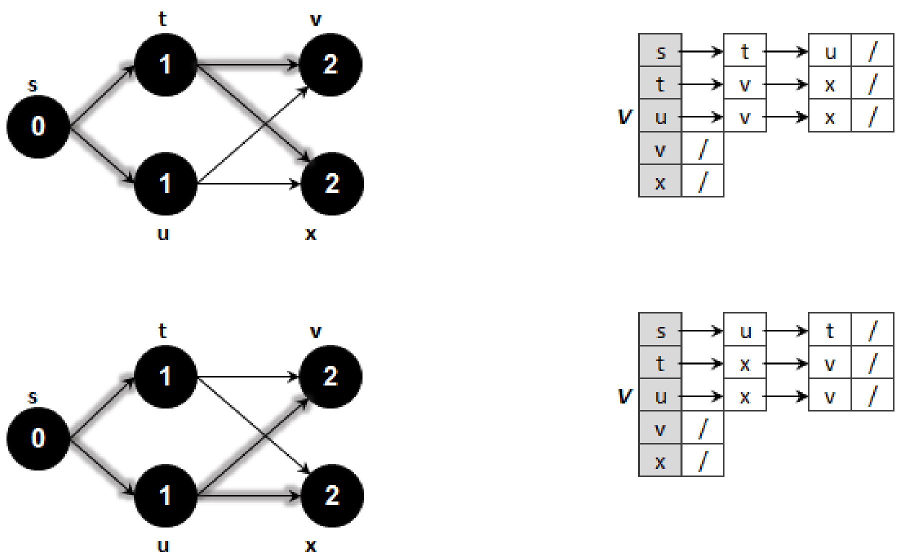


Figura 5: Execução da BFS no grafo orientado $D = (N, A)$ com a lista de adjacências em duas ordens distintas.

5. Escreva uma versão não recursiva da busca em profundidade.

Resposta: Podemos utilizar uma pilha como apoio para aprofundar na lista de adjacências de cada nó da árvore, substituindo a recursão.

Além disso, nós usamos uma fila FIFO para a lista de adjacências de cada vértice u e, assim que um novo vértice v adjacente à u é encontrado e ele ainda não foi visitado, nós o visitamos e empilhamos v em S.

Note que nós somente retiramos u da pilha (linha 11 da DFS-VISIT) quando todos os vértices da lista de adjacências dele foram visitados, ou seja, o momento em que devemos marcar u como finalizado (sub-rotina BLACKEN).

Outro ponto importante é que, como visto na linha 12 da ITERATIVE-DFS, o vértice s que dá origem à busca tem seu ancestral como *nil*, o que garante o funcionamento da mesma forma que a DFS original. Isso também garante que a busca funciona nos casos em que tivermos mais de uma componente conexa no grafo.

Consumo de tempo: O *loop* das linhas 2-8 da ITERATIVE-DFS tomam $\Theta(V)$ para inicializar cada vértice $u \in V[G]$ + $\Theta(E)$ para montar a fila de adjacências de cada vértice u. As sub-rotinas BLACKEN, GRAYEN, bem como as operações na fila/pilha tomamm $\Theta(1)$. O *loop* das linhas 10-13 consome tempo $\Theta(V)$, ou seja, executa no máximo uma vez para cada vértice $v \in G$, já que DFS-VISIT é executado apenas em vértices que ainda não foram descobertos - àqueles que ainda são brancos. Como a fila de adjacências é visitada no máximo uma vez na sub-rotina DFS-VISIT e a soma do comprimento da fila de adjacências de cada vértice v é $\Theta(E)$, o tempo gasto na DFS-VISIT é $O(E)$.

Portanto, o consumo de tempo total será $O(V + E)$, o que mantém o comportamento assintótico original da DFS.

```
ITERATIVE-DFS(G)
// let S be an empty stack
for each vertex u ∈ V[G]
    color[u] = WHITE
    π[u] = NIL
    n = Adj[u].length
    for i = n to 1
        v = Adj[u][i]
        ENQUEUE(Qadj[u], v)
time = 0
for each vertex u ∈ V[G]
    if color[u] == WHITE
        GRAYEN(u, NIL)
        DFS-VISIT(u)
```

```
DFS-VISIT(s)
PUSH(S, s)
while S ≠ ∅
    u = TOP(S)
    if Qadj[u] ≠ ∅
        v = DEQUEUE(Qadj[u])
        if color[v] == WHITE
            GRAYEN(v, u)
            PUSH(S, v)
    else
        BLACKEN(u)
        POP(S)
```

```
GRAYEN(v, u)
color[v] = GRAY
time = time + 1
d[v] = time
π[v] = u
```

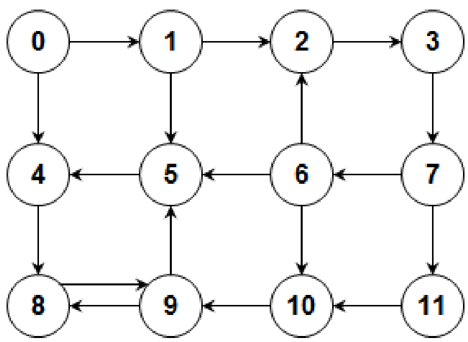
```
BLACKEN(u)
color[u] = BLACK
time = time + 1
f[u] = time
```

6. Execute uma busca em profundidade a partir do vértice 0 no grafo orientado dado pelas listas de adjacência a seguir. Exiba o rastreamento da busca.

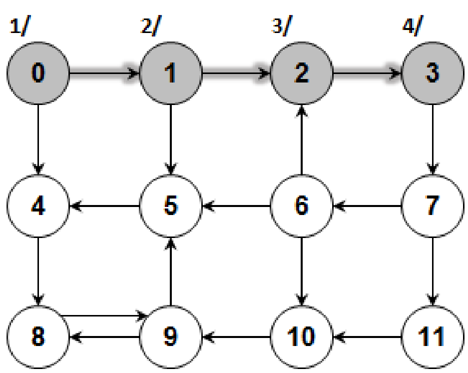
0: 1 4
1: 2 5
2: 3

3: 7
4: 8
5: 4
6: 5 10 2
7: 11 6
8: 9
9: 5 8
10: 9
11: 10

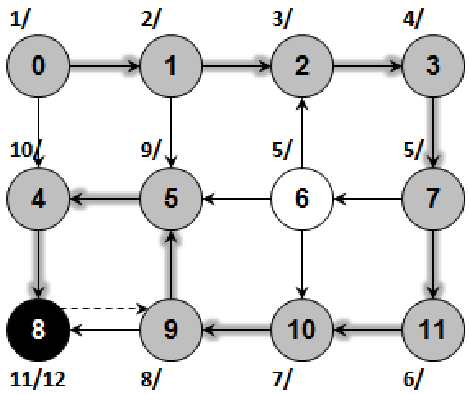
Resposta: A figura 6 mostra o grafo formado pela lista de adjacências dada, bem como o rastreamento no momento em que o vértice 3, 6 e 8 são descobertos, e o resultado final da DFS ao final de todas as chamadas recursivas, respectivamente. Os tempos d e f estão no vetor à direita e, também, acima de cada vértice.



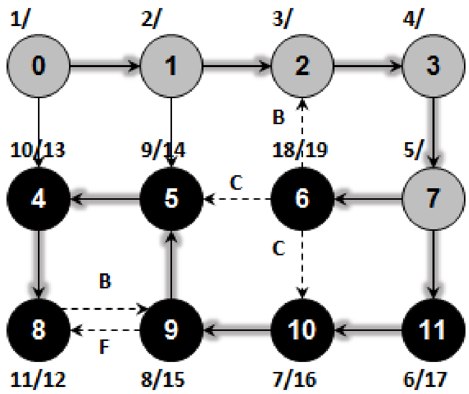
V	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
π	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil
d												
f												



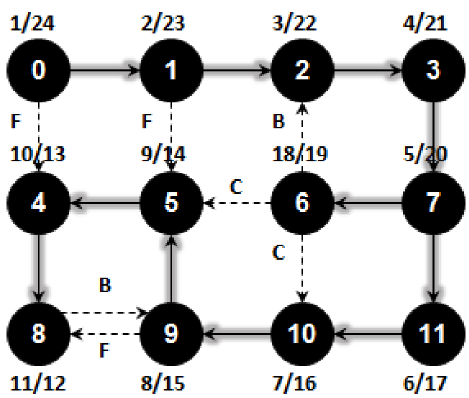
V	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
π	nil	0	1	2	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil	nil
d	1	2	3	4								
f												



v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
π	nil	0	1	2	5	9	nil	3	4	10	11	7
d	1	2	3	4	10	9		5	11	8	7	6
f									12			



v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
π	nil	0	1	2	5	9	7	3	4	10	11	7
d	1	2	3	4	10	9	18	5	11	8	7	6
f					13	14	19		12	15	16	17



v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
π	nil	0	1	2	5	9	7	3	4	10	11	7
d	1	2	3	4	10	9	18	5	11	8	7	6
f	24	23	22	21	13	14	19	20	12	15	16	17

Figura 6: Rastreamento da DFS na lista de adjacências dada.

7. (CRLS 22.3-1) Desenhe uma tabela $3x3$, com as linhas e colunas indexadas pelas cores branco, cinza e preto. Em cada entrada (i, j), indique se, em qualquer ponto durante uma DFS de um grafo orientado, pode existir um arco de um nó de cor i para um nó de cor j. Para cada arco possível, indique as classificações que ele pode ter (de árvore, de retorno, para frente, cruzado). Faça um segundo quadro considerando um grafo não orientado.

As tabelas 1 e 2 mostram as classificações dos arcos para o grafo orientado e não orientado, respectivamente.

As siglas significam ***T****ree*, ***B****ack*, ***C****ross* e ***F****orward edge*.

	White	Gray	Black
White	x	x	x
Gray	T	B	F/C
Black	x	x	B

Tabela 1: Classificação dos arcos no grafo orientado para a DFS.

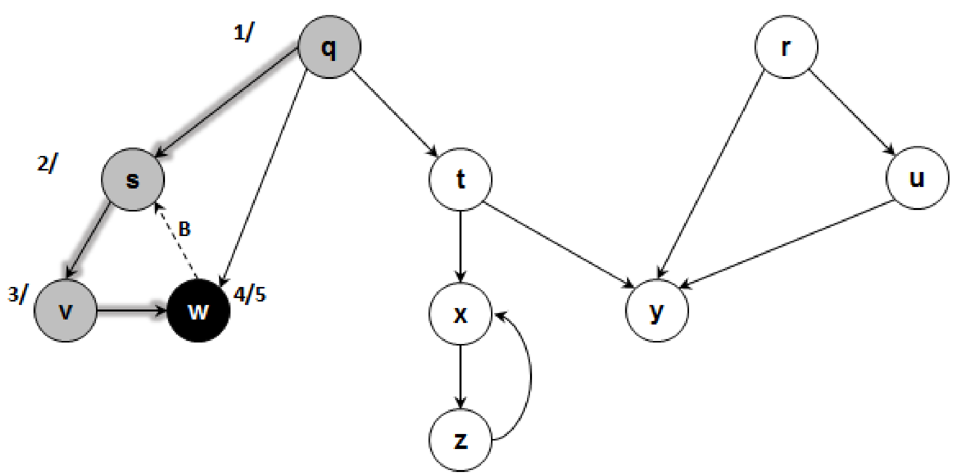
	White	Gray	Black
White	x	x	x
Gray	T	B	x
Black	x	B	B

Tabela 2: Classificação dos arcos no grafo não orientado para a DFS.

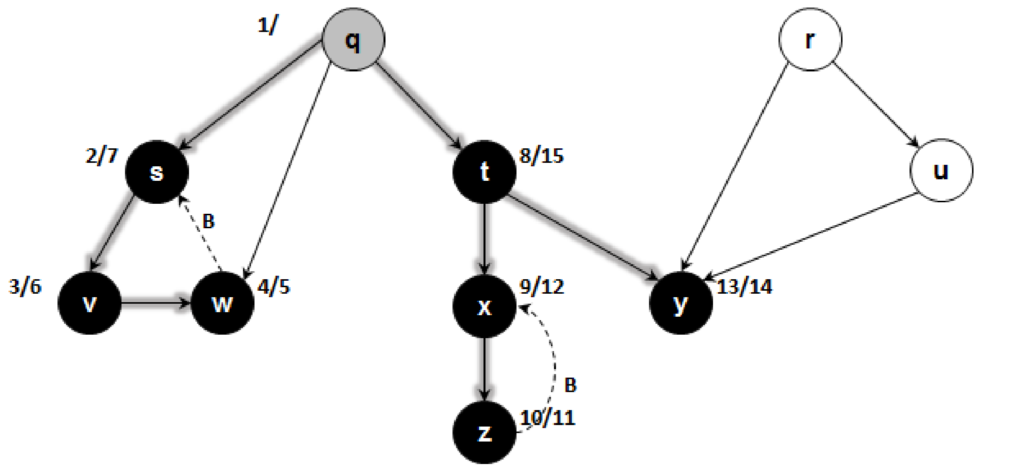
8. (CRLS 22.3-2) Mostre como a DFS funciona no grafo da Figura 22.6 do CLRS (segunda edição). Assuma que o laço das linhas 5-7 da DFS visitam os vértices em ordem alfabética, e que os vértices se encontram em ordem alfabética nas listas de adjacências. Mostre os valores de d e f para cada vértice ao final da DFS.

Resposta: A figura 7 mostra o rastreamento da DFS em 3 momentos distintos: quando todos os vértices adjacentes à w são visitados, todos os vértices adjacentes à t são visitados e a árvore com todas as chamadas recursivas concluídas, respectivamente.

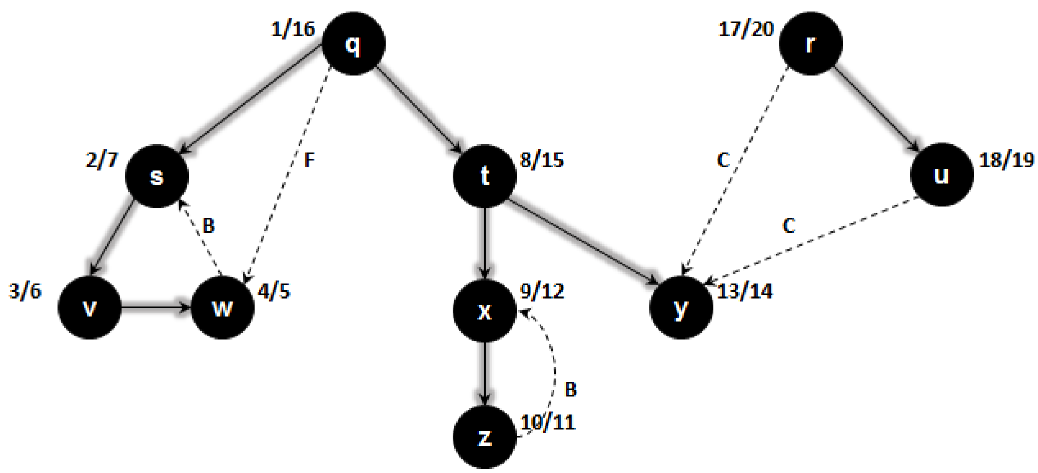
Os valores d e f, bem como o antecessor de cada vértice dado por π estão na tabela de rastreamento abaixo de cada imagem. Os tipos de arestas também estão devidamente destacados.



V	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
π	nil	nil	q	nil	nil	s	v	nil	nil	nil
d	1		2			3	4			
f							5			



V	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
π	nil	nil	q	q	nil	s	v	t	t	x
d	1		2	8		3	4	9	13	10
f			7	15		6	5	12	14	11



V	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
π	nil	nil	q	q	r	s	v	t	t	x
d	1	17	2	8	18	3	4	9	13	10
f	16	20	7	15	19	6	5	12	14	11

Figura 7: Rastreamento da DFS na figura 22.6 do CLRS.

9. (CRLS 22.3-7) Mostre um contraexemplo para a conjectura que se existe um caminho de u a v em um grafo orientado G, e se $d[u] < d[v]$ numa DFS de G, então v é descendente de u na floresta DFS produzida.

Podemos observar a própria árvore à esquerda da figura 22.5 (c) do CLRS como um contraexemplo. Seja a DFS produzida a partir de s, se tomarmos os vértices x e w, $d[x] < d[w]$, existe um caminho de x a w, mas w não é descendente de x.

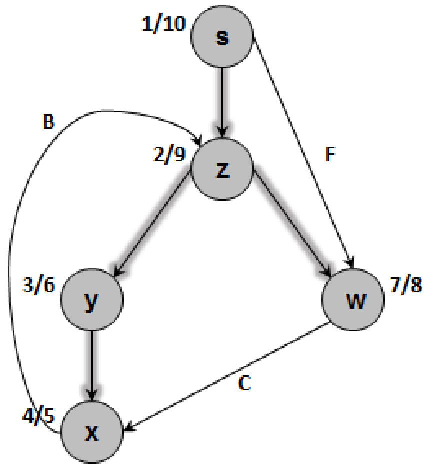


Figura 8: Contraexemplo utilizando parte do grafo da figura 22.5 (c) do CLRS.

10. (CRLS 22.3-8) Mostre um contraexemplo para a conjectura que se existe um caminho de u a v em um grafo orientado G, então qualquer DFS deve resultar em $d[v] \leq f[u]$.

A figura 9 mostra um contraexemplo da conjectura. Temos um caminho de u a v no grafo, porém, aplicando a DFS a partir de s, temos que $d[v] > f[u]$.

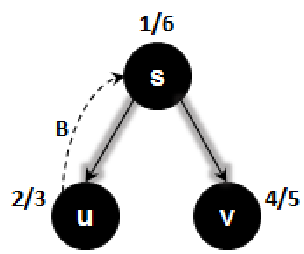


Figura 9: Contraexemplo da conjectura dada.

11. (CRLS 22.3-10) Mostre como um vértice u num grafo orientado pode terminar sozinho numa árvore de uma floresta DFS mesmo tendo arcos saindo e entrando dele em G.

A figura 10 mostra um exemplo onde o vértice u pode ficar sozinho numa árvore de uma floresta DFS gerada a partir do vértice s.

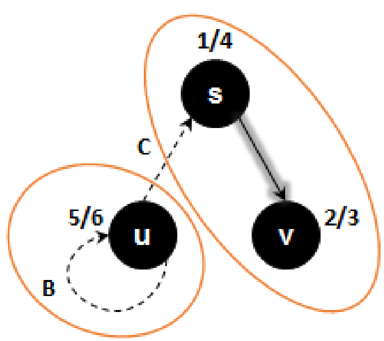


Figura 10: Exemplo onde o vértice u pode ficar isolado.

Um outro exemplo pode ser visto na figura 11, sendo que cada árvore é formada por um único vértice, já que a busca começa em v.

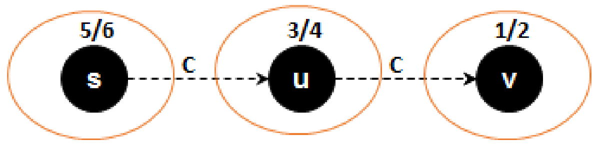


Figura 11: Segundo exemplo onde o vértice u pode ficar isolado.

14. Escreva um algoritmo que decida se um grafo é conexo. Analise o seu consumo de tempo.

Resposta: Um grafo é conexo se e somente se, para cada par s e t de seus vértices, existe um caminho com origem s e término t.

Podemos fazer uma alteração no algoritmo da DFS para contar o número de componentes conexas do grafo e executar a DFS usando cada vértice $u \in V[G]$ como origem da busca. Se houver uma única componente conexa para a busca a cada execução, o grafo é conexo.

Os vértices estão organizados em uma pilha, utilizamos as rotinas Pop e Push-Left, para remover um elemento da última posição da pilha e inseri-lo na primeira posição, respectivamente, de modo que todos os vértices sejam origem da busca uma vez.

Consumo de tempo: A mudança em Connected-DFS não muda o comportamento assintótico original do algoritmo, que permanece $\Theta(V + E)$.

A criação da pilha na linha 2 na rotina Graph-Connected toma tempo $\Theta(V)$. Já as operações na pilha gastam $\Theta(1)$, bem como as demais instruções. Como nós fazemos a busca uma vez para cada vértice, temos que o consumo de tempo total será $\Theta(V(V + E))$.

```
Graph-Connected(G)
1   n = |V[G]|
2   S = V[G]  // S is a stack with the vertices of G
3   while n > 1
4       count = Connected-DFS(G)
5       if count > 1
6           return FALSE
7       u = Pop(S)
8       Push-Left(S, u)
9       n = n − 1
10  return TRUE
```

```
CONNECTED-DFS(G)
for each vertex u ∈ V[G]
      color[u] = WHITE
      π[u] = NIL
time = 0
count = 0
for each vertex u ∈ V[G]
      if color[u] == WHITE
            count = count + 1
            DFS-VISIT(u)
return count
```

15. Escreva um algoritmo que determine o número de componentes conexas de um grafo. Analise o seu consumo de tempo.

Resposta: A rotina CONNECTED-DFS do exercício 7-14 já retorna a quantidade de componentes conexas de um grafo G.

O consumo de tempo é o mesmo da DFS original, ou seja, $\Theta(V + E)$.

16. Um grafo $G = (V, E)$ é bipartido se seu conjunto de vértices V pode ser bipartido em dois conjuntos disjuntos de vértices A e B e toda aresta de E tem uma ponta em A e outra em B. Escreva um algoritmo que, dado um grafo, determine se o grafo é ou não bipartido. Analise o seu consumo de tempo.

Resposta: Podemos efetuar uma alteração na BFS, de modo que quando um vértice u encontra um vértice v que já foi visitado, ou seja, já está GRAY, verificamos se a profundidade tanto de u quanto de v é par, ou se ambas são ímpar.

Isso implica que $d[u]$ e $d[v]$ têm a mesma paridade e, portanto, o grafo **não é bipartido**.

Consumo de Tempo: A modificação não altera o comportamento assintótico original da BFS que permanece $O(V + E)$.

```
BFS-PARTITE(G, s)
 1  for each vertex u ∈ V[G] − {s}
 2      u.color = WHITE
 3      u.d = ∞
 4      u.partition = 0
 5  s.color = GRAY
 6  s.d = 0
 7  s.partition = 1
 8  Q = ∅
 9  ENQUEUE(Q, s)
10  while Q ≠ ∅
11      u = DEQUEUE(Q)
12      for each v ∈ G.Adj[u]
13          if u.partition == v.partition
14              return FALSE
15          else
16              if v.color == WHITE
17                  v.color = GRAY
18                  v.d = u.d + 1
19                  v.partition = 3 − u.partition
20                  ENQUEUE(Q, v)
21      u.color = BLACK
22  return TRUE
```

17. (CLRS 22.2-8) Dada uma árvore $T = (V, E)$, o diâmetro de T é o número $\max\{d(u, v) : u, v \in V\}$, onde $d(u, v)$ é a distância entre u e v em T. Escreva um algoritmo que, dado T, determine o diâmetro de T. Analise o seu consumo de tempo.

Resposta: Conforme enunciado, o diâmetro de uma árvore T é a distância mais longa entre quaisquer dois nós u e v da árvore.

Para calcular o diâmetro podemos executar a BFS usando cada vértice $v \in V$ como fonte da busca, retornando o maior valor de d para cada busca. A maior distância será, então, o diâmetro de T.

A linha 18 deve retornar o número de vértices que tem o caminho mais longo de u a v. Repare que somamos 1 devido à inicialização de $s.d = 0$.

Consumo de Tempo: A inclusão da linha 18 não muda o consumo de tempo da BFS, que continua $O(V + E)$. Como executamos a BFS uma vez para cada vértice no *loop* da linha 3 da rotina TREE-DIAMETER, temos que o tempo total será $O(V(V + E))$.

```
TREE-DIAMETER(T)
1  diameter = 0
2  for each u ∈ T
3      max_d = BFS(T, u)
4      if max_d > diameter
5          diameter = max_d
6  return diameter
```

```
BFS(T, s)
for each vertex u ∈ V[T] − {s}
    u.color = WHITE
    u.d = ∞
    u.π = NIL
s.color = GRAY
s.d = 0
s.π = NIL
Q = ∅
Enqueue(Q, s)
while Q ≠ ∅
    u = Dequeue(Q)
    for each v ∈ T.Adj[u]
        if v.color == WHITE
            v.color = GRAY
            v.d = u.d + 1
            v.π = u
            Enqueue(Q, v)
    u.color = BLACK
return u.d + 1
```

Lista 8

1. (CRLS 23.1-1) Seja e uma aresta de custo mínimo em um grafo G com custos nas arestas. É verdade que e pertence a alguma MST de G? É verdade que e pertence a toda MST de G?

Resposta: Seja A um subconjunto de arestas de alguma MST T, tal que $(u, v) \notin A$. Para escolher uma aresta para ser adicionada em A, todas as arestas que atravessam um corte $(S, V - S)$ são consideradas. Como o corte deve respeitar A e a aresta (u, v) tem peso mínimo, ela será escolhida para ser incluída em A, o que dá origem a uma nova MST T', onde $A \cup \{(u, v)\} \subseteq T'$.

É verdade que e pertence a toda MST de G? Não é verdade. Se tomarmos uma aresta $(u, v) \in E$ de uma MST T que tenha custo mínimo k e substituirmos por outra (u, w) que não está em T de custo $k = l$, teremos uma nova MST T', ou seja, é o caso onde há empate na escolha da aresta segura para ser incluída na árvore. Portanto, e não pertence a toda MST de G.

Na figura 12, basta substituirmos a aresta (b, c) pela (b, d) e teremos uma nova MST de mesmo custo mínimo.

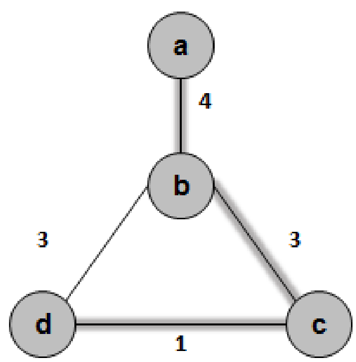


Figura 12: MST com mais de uma aresta de mesmo custo.

2. Suponha que os custos das arestas de um grafo conexo são distintos dois a dois (ou seja, não há duas arestas com o mesmo custo). Mostre que o grafo tem uma única MST.

Resposta: Seja m a quantidade de arestas em um grafo ponderado $G(V, E, w)$. Como não há arestas com pesos iguais, temos que os pesos são estritamente crescentes, ou seja, $w_1 < w_2 < w_3 < \ldots < w_m$.

Prova por contradição:

Vamos assumir que existem duas MST's T e T' no grafo. Seja e_1 uma aresta de menor custo que aparece em uma dessas MST's. Sem perda de generalidade, digamos que $e_1 \in T$. Como T' é uma MST, $T' \cup \{e_1\}$ contém um ciclo C e, portanto, uma das arestas deste ciclo, digamos e_2, não está em T.

Note que $w(e_1) < w(e_2)$ e $T'' = T' \cup \{e_1\} \setminus \{e_2\}$ é uma árvore geradora. O peso total de T'' é menor que o peso total de T', mas isso é uma contradição, já que nós assumimos que T' é uma MST. Em outras palavras, para que T e T' fossem MST's, deveríamos ter $w(e_1) = w(e_2)$, mas isso é impossível, já que os pesos são diferentes.

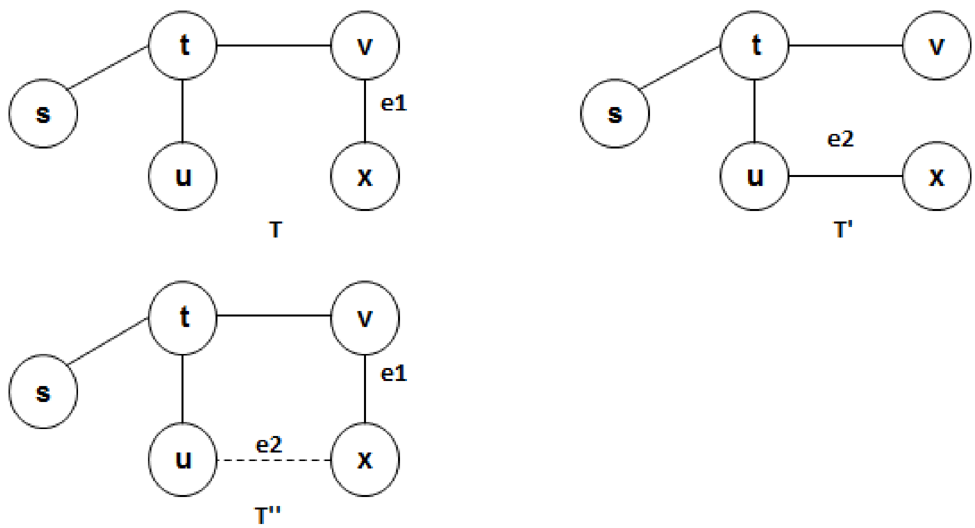


Figura 13: Exemplo de grafo com uma única MST com pesos nas arestas diferentes.

3. Suponha que os custos das arestas de um grafo conexo são distintos dois a dois. Seja C um ciclo não trivial. É verdade que a aresta de custo mínimo em C pertence à (única) MST do grafo?

Resposta: Sim, é verdade. Seja e a aresta de custo mínimo em C. Se e não estivesse na única MST do grafo, ao removermos qualquer outra aresta do ciclo C de custo maior para incluir e, teríamos uma MST de custo menor.

4. (CRLS 23.1-2) Prove ou desprove a seguinte afirmação: Dado um grafo G com pesos nas arestas, um conjunto de arestas A de G, e um corte que respeita A, toda aresta que cruza o corte e que é segura para A tem peso mínimo dentre todas as arestas desse corte.

Resposta: Seja A formado pelas arestas $\{(t, s), (t, u)\}$, como pode ser visto na figura 14.

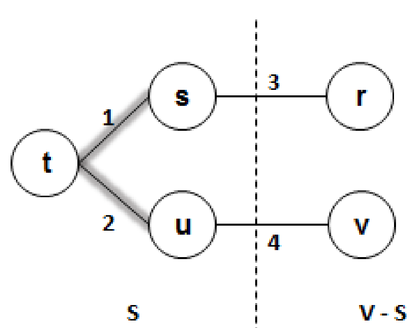


Figura 14: Exemplo de grafo com uma única MST contendo aresta de não peso mínimo no corte.

O corte $(S, V - S)$ respeita A. (u, v) é uma aresta que atravessa o corte $(S, V - S)$ e é segura para A, ou seja, $A \cup \{(u, v)\} \subseteq T$, porém, não é de custo mínimo (*light edge*).

5. (CRLS 23.1-3) Prove ou desprove a seguinte afirmação: Se uma aresta está contida em alguma MST, então tem peso mínimo dentre todas as arestas de algum corte no grafo.

Resposta: Seja T uma MST que contém a aresta (u, v). Se tirarmos (u, v) da árvore, teremos um corte $(S, V - S)$ que particiona os vértices em dois conjuntos disjuntos S e $V - S$. A aresta (u, v) atravessa esse corte e ela é uma aresta de custo mínimo pois, do contrário, outra aresta de custo menor poderia ser adicionada em T substituindo (u, v), o que produziria uma outra MST T', onde $w(T') < w(T)$, contradizendo o fato de que T é uma MST.

Portanto, (u, v) é uma aresta de custo mínimo para o corte $(S, V - S)$.

5.1. (CLRS 23.1-4) Dê um exemplo simples de um grafo tal que o conjunto de arestas $\{(u, v)$: existe um corte $(S, V - S)$ tal que (u, v) é uma aresta de custo mínimo atravessando o corte$\}$ não forma uma MST.

Resposta: Basta pensarmos em um triângulo com 3 vértices conectados por arestas de mesmo peso $w(e_1) = w(e_2) = w(e_3)$. Independente do corte, nós sempre teremos uma aresta de custo mínimo que não estará na MST pois, do contrário, teríamos um ciclo.

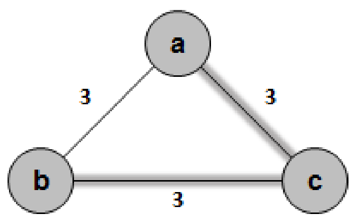


Figura 15: Exemplo de grafo onde uma aresta de custo mínimo não pertence à MST.

6. (CRLS 23.1-7) Prove que se todos os pesos nas arestas são positivos, então qualquer subconjunto de arestas que conectam todos os vértices e tem peso total mínimo forma uma árvore. A propriedade vale se alguns pesos são negativos?

Resposta:
7. Seja T uma MST de um grafo com pesos positivos e distintos nas arestas. Suponha que substituímos cada peso pelo seu quadrado. Verdadeiro ou falso: T ainda é uma MST para o novo grafo.

Resposta: Verdadeiro. Substituir os pesos das arestas em um grafo ponderado G pelo quadrado dos mesmos não muda a MST T do grafo.

Prova por contradição:
Vamos assumir que a alteração dos pesos w muda a MST T de G para uma outra T' em G', já que pelo menos uma aresta, digamos e, de T deve ser substituída por uma outra e' na nova árvore T' de G' com w^2. Isso implica que $w(e) < w(e')$ e $w(e)^2 \geq w(e')^2$, o que é uma contradição.

8. Dado um grafo conexo G, dizemos que duas $MSTsT$ e T' são vizinhas se T contém exatamente uma aresta que não está em T', e T' contém exatamente uma aresta que não está em T. Vamos construir um novo grafo (muito grande) $\mathcal{H}$ como segue. Os vértices de $\mathcal{H}$ são as $MSTs$ de G, e existe uma aresta entre dois vértices em $\mathcal{H}$ se os correspondentes $MSTs$ são vizinhas. É verdade que $\mathcal{H}$ sempre conexo? Prove ou dê um contra-exemplo

Resposta: Seja G um grafo e $\mathcal{H}$ o grafo que tem como vértices todas $MSTs$ de G e dois vértices de $\mathcal{H}$ são adjacentes se e somente se as $MSTs$ que eles representam são vizinhas. Queremos provar que $\mathcal{H}$ é conexo.

Se para qualquer par de $MSTs$ T e T' de G, as árvores são vizinhas então não temos nada a provar, $\mathcal{H}$ é conexo.

Se existem T e T' não vizinhos então achamos um caminho de T a T' em $\mathcal{H}$ da seguinte forma.

Sabemos que uma árvore tem $n-1$ vértices para $n = |V(G)|$ e se inserimos uma aresta a mais nessa árvore geraremos um ciclo, então podemos montar um caminho de T a T' em $\mathcal{H}$, inserindo uma aresta e' em T tal que $e' \in E(T'), e' \notin E(T)$ e $e' \in E(G)$ formando assim um ciclo em T então removemos uma aresta e desse ciclo em T, tal que $e \in E(T), e \notin E(T')$ e $e \in E(G)$, gerando assim uma MST T'' mais parecida com T', note que isso é possível por que tanto e como e' pertencem a uma MST e portanto tem pesos minímos no ciclo formado. Repetindo esse processo chegaremos a uma MST $T*$ que possuí apenas uma aresta diferente de T', então concluírmos que T' e $T*$ são vizinhas. Portanto podemos concluír que existe um caminho entre T e T' em $\mathcal{H}$ e como isso é verdade para todos pares de $MSTs$ T e T' de $\mathcal{H}$, logo concluírmos que $\mathcal{H}$ é conexo.

9. Seja G um grafo conexo com custos nas arestas. Uma aresta e de G é crítica se o aumento do custo de e faz com que o custo de uma MST de G também aumente. Escreva uma função que determine todas as arestas críticas de G em tempo $O(m \log n)$

Resposta: Seja D_A a floresta representada pela estrutura de conjuntos disjuntos do algoritmo de Kruskal, e $T, T' \in D_A$ árvores mantida nessa floresta. Uma aresta (u, v) tal que $u \in V(T)$ e $v \in V(T')$ é crítica se e somente se (u, v) é uma *light edge* que respeita A e não exista outra *light edge* que junte T e T' em D_A.

Prova:

$\rightarrow$ se (u, v) é crítica então (u, v) é uma *light edge* e não existe nenhuma outra *light edge* que junte T e T' em D_A.

Verdade por que caso existisse outra *light edge* (u', v') então poderiamos utiliza-la mantendo o mesmo peso da MST independente do peso de (u, v), ou seja, poderiamos aumentar o peso de (u, v) sem aumentar o peso de uma MST de G.

$\leftarrow$ se (u, v) é a única *light edge* que junta as árvores T e T' então (u, v) é uma aresta crítica.

Trivialmente verdade, já que para montar uma MST precisamos utilizar (u, v) então se aumentarmos o peso de (u, v) ou escolhermos outra aresta (u', v') aumentaremos o peso de qualquer MST de G, já que (u', v') tem peso maior que (u, v) já que por hipótese (u, v) é a única *light edge* que junta T e T'.

Portanto ao juntar dois componentes no algoritmo de Kruskal podemos ver se a aresta é crítica ou não conforme algoritmo Critical-Kruskal.

CRITICAL-KRUSKAL(G)

1 $l = NIL, A = \emptyset, C = \emptyset$
2 ordene as arestas de $E(G)$ em ordem crescente de peso w_e
3 **for** each $v \in V(G)$
4   MAKE-SET(v)
5 **for** each $uv \in E(G)$ in the sorted edges
6   **if** FIND-SET(u) $\neq$ FIND-SET(v)
7         $A = A \bigcup \{uv\}$
8   UNION(uv)
9   **if** $l \neq NIL$
10             $C = C \bigcup \{l\}$
11         $l = uv$
12   **else**
13   **if** $l \neq NIL$ and $w(l) = w(uv)$
14             $l = NIL$
15 **return** C

O algoritmo mantém a mesma estrutura de dados do que o Kruskal a linha 6, acha se a aresta sendo analisada estão na mesma árvore se sim, junta e guarda a aresta anterior é *light edge* que junta uv (já que as arestas estão ordenadas), caso contrário se a aresta não junta dois componentes e tem o mesmo peso então a aresta l não é crítica e recebe NIL, para não ser inclusa em C.

11. Suponha que temos um grafo G com pesos nas arestas. Verdadeiro ou falso: Para qualquer MST T de G, existe uma execução válida do algoritmo de Kruskal que produz T como saída? Dê uma prova ou um contra-exemplo.

Resposta: Verdadeiro. Vamos assumir por contradição que existe uma MST T' que nunca será gerada por uma execução do algoritmo de Kruskal. Então existe uma aresta $(u, v) \in E(T')$ que liga dois conjuntos da estrutura UNIONFIND D_A mantida pelo algoritmo de Kruskal. Então devemos analisar 2 casos.

1. Se (u, v) é uma aresta de peso minímo que liga o conjunto que contém u com o conjunto que contém v então existe uma ordenação em que o algoritmo de Kruskal gera uma MST que a contém

2. Se (u, v) não possuí peso minímo entre todas as arestas que ligam o conjunto que contém u com o conjunto que contém v, então podemos diminuir o peso de T' escolhendo uma aresta de menor peso. Que é uma contradição já que T' não é uma MST.

Note que isso é verdade para qualquer aresta (u, v), portanto T' não existe. Que é uma contradição. Logo podemos concluir que o algoritmo de Kruskal pode gerar qualquer árvore geradora miníma de um grafo.

13 (CLRS Ex. 23.2-4,5) Suponha que todos os pesos num grafo com n vértices são inteiros no intervalo de 1 até n. Descreva como otimizar os algoritmos de Kruskal e Prim nesta situação. O que acontence se pos pesos são intervalo de 1 até W?

Resposta: Para o algoritmo de Kruskal utilizando a estrutura de conjuntos disjuntos utilizando UNION-BY-RANK e compressão de caminhos o tempo gasto assintoticamente é definido pela ordenação de arestas, no começo do algoritmo, se sabemos que o peso máximo das arestas é n, então podemos usar o COUNTING-SORT e diminuir o tempo de $O(m \lg n)$ para $O(m + n)$, já que o laço abaixo da ordenação gasta tempo linear, se o peso máximo é W então utilizando o COUNTING-SORT o algoritmo de Kruskal gastará tempo $O(m + W)$. Como o algoritmo de Prim utiliza uma fila de prioridades que normalmente é implementada como uma min-heap não é possível melhorar o tempo assintotico do algoritmo.

CLRS (Outros)

A.1-7 Avalie o produtório $\prod_{k=1}^{n} 2(4^k)$.

$$\prod_{k=1}^{n} 2(4^k) = \prod_{k=1}^{n} 2({(2^2)}^k) = \prod_{k=1}^{n} 2(2^{2k}) = \prod_{k=1}^{n} 2^{2k+1}$$

Se avaliarmos o produtório para $n = 3$, por exemplo:

$$\prod_{k=1}^{n} 2^{2k+1} = 2^{2+1} \times 2^{4+1} \times 2^{6+1}$$

Percebemos que o expoente de 2 cresce em uma série aritmética:

$$\sum_{k=1}^{n} 2k + 1 = \sum_{k=1}^{n} 2k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\sum_{k=1}^{n} k + n = 2(\frac{n(n+1)}{2}) + n = n(n+2)$$

Portanto:

$$\prod_{k=1}^{n} 2(4^k) = 2^{n(n+2)}$$