Algoritmos Numéricos por Computadora

Primer parcial - Otoño 2020

Sube tu archivo resultado a Canvas → Examen Parcial 1 antes de las 10am.

Cada pregunta vale 5 puntos.

Los exámenes son trabajos individuales. Está estrictamente prohibido dar o recibir ayuda de cualquier persona.

El artículo 29 del Reglamento de Alumnos establece que "se calificará como no acreditada (N.A.) cualquier materia cuando el alumno incurra en alguna práctica fraudulenta".

1. Determina el numero positivo más pequeño (spsn) que puede representarse de manera exacta en Matlab

```
format long
minF=0;
minExponente=1-1023;
minPositivo=(1+minF)*2^minExponente
```

```
minPositivo =
    2.225073858507201e-308
```

```

```

2. Tipos de errores (redondeo, underflow y overflow)

2a) ¿Qué tipo de error se tiene si un cálculo da como resultado un número menor que spsn?

```
% Underflow
```

2b) ¿Qué resultado regresa Matlab en este caso?

```
% 0
```

2c) ¿Qué tipo de error se tiene si un cálculo da como resultado un número mayor que 1.797693134862316e +308 (ej: *realmax* + *eps(realmax)*)?

```
% Overflow
```

2d) ¿Qué resultado regresa Matlab en este caso?

```
% Inf
```

2e) Considera el siguiente fragmento de código:

```
ms = 12;
n = 35;
```

```
e = 5;
d = 29;
c = mod(ms^e,n);
format long
c^d
```

```
ans =
     4.819685721067509e+35
```

```
format
mr = mod(c^d,n);
if ms~=mr, disp('error de ...'), end
```

```
error de ...
```

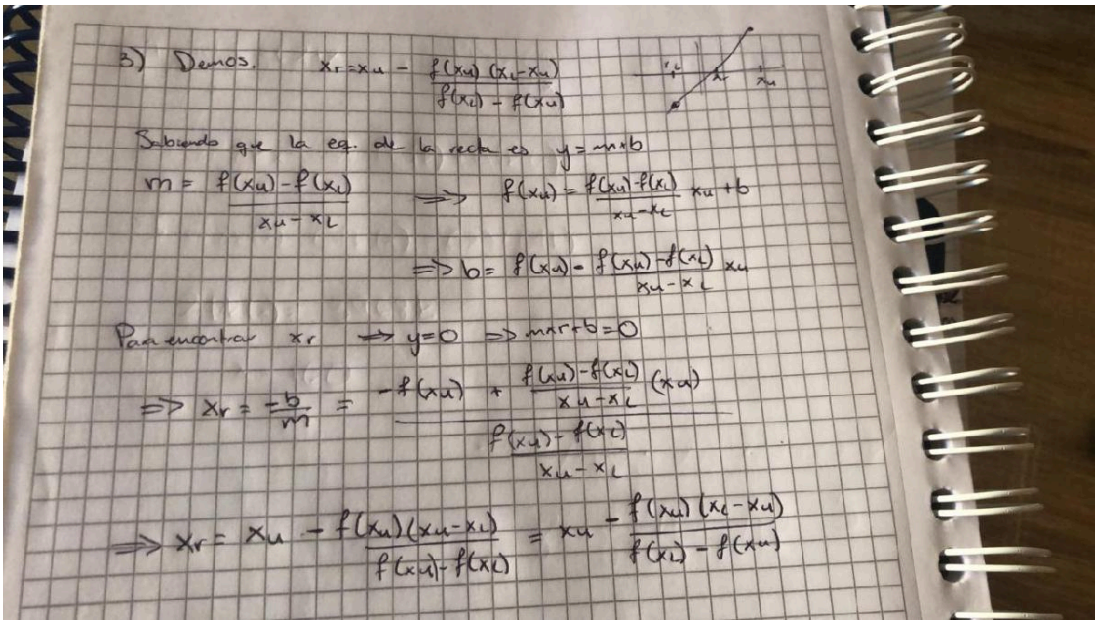
¿Qué tipo de error se tiene al calcular c^d? (El resultado debería ser 4.819685721067509150914118252230716 97e+35)

```
% Error de redondeo
```

3. Demuestra que en el algoritmo de falsa posición (interpolación lineal) el valor de x_r en la siguiente iteración se calcula con la siguiente fórmula.

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

Pega aquí tu respuesta.



4. Demuestra que el mínimo de una parábola definida por los tres puntos r, s, t se encuentra en

$$x = \frac{r+s}{2} - \frac{(f(s) - f(r))(t-r)(t-s)}{2[(s-r)(f(t) - f(s)) - (f(s) - f(r))(t-s)]}$$

Pega aquí tu respuesta.

4) P.D. $x = \frac{r+s}{2} - \frac{(f(s)-f(r))(t-r)(t-s)}{2[(s-r)(f(t)-f(s)) - (f(s)-f(r))(t-s)]}$

Sean $\bar{x}_1 = (r, f(r))$, $\bar{x}_2 = (s, f(s))$, $\bar{x}_3 = (t, f(t))$

Y usando la interpolación de Newton

$P_2 = f[x_1] + f[x_1, x_2](x - x_1) + f[x_1, x_2, x_3](x - x_1)(x - x_2)$

$= f(r) + \frac{f(s)-f(r)}{s-r}(x-r) + \frac{\frac{f(t)-f(s)}{t-s} - \frac{f(s)-f(r)}{s-r}}{t-r}(x^2 - x(r+s) + rs)$

$= f(r) + \frac{f(s)-f(r)}{s-r}x - \frac{f(s)-f(r)}{s-r}r + \frac{\frac{f(t)-f(s)}{t-s} - \frac{f(s)-f(r)}{s-r}}{t-r}x^2$

$\Rightarrow a = \frac{\frac{f(t)-f(s)}{t-s} - \frac{f(s)-f(r)}{s-r}}{t-r}$

$b = \frac{f(s)-f(r)}{s-r} - a(s+r)$

$x = -\frac{b}{2a} = \frac{a(r+s) - \left(\frac{f(s)-f(r)}{s-r}\right)}{2a} = \frac{r+s}{2} - \frac{\frac{f(s)-f(r)}{s-r}}{2a}$

$x = \frac{r+s}{2} - \frac{(f(s)-f(r))(t-r)}{2(s-r)\left(\frac{f(t)-f(s)}{t-s} - \frac{f(s)-f(r)}{s-r}\right)} = \frac{r+s}{2} - \frac{(f(s)-f(r))(t-r)}{2(s-r)\left(\frac{f(t)-f(s)(s-r)}{(t-s)(s-r)} - \cdots\right.}$

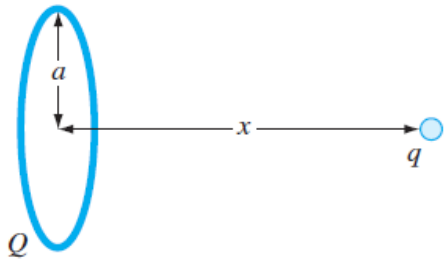
$= \frac{r+s}{2} - \frac{(f(s)-f(r))(t-r)}{2[(f(t)-f(s))(s-r) - (f(s)-f(r))(t-s)]}$ ■

5a. Usa la función *puntoFijo* (que debes codifícar al final del script) para encontrar la primera raíz no trivial de $\sin(x) = x^2$ donde x está dada en radianes. Usa como primera aproximación $x = 0.7$.

```
g=@(x) sqrt(sin(x));
[x,i]=puntoFijo(g,0.7)
```

```
x = 0.8767
i = 36
```

6. Una carga total Q está distribuida uniformemente alrededor de un conductor con forma anillo de radio a. Una carga q se localiza a una distancia x del centro del anillo.



La fuerza ejercida en la carga por el anillo está dada por

$$F = \frac{1}{4\pi e_0} \frac{qQx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

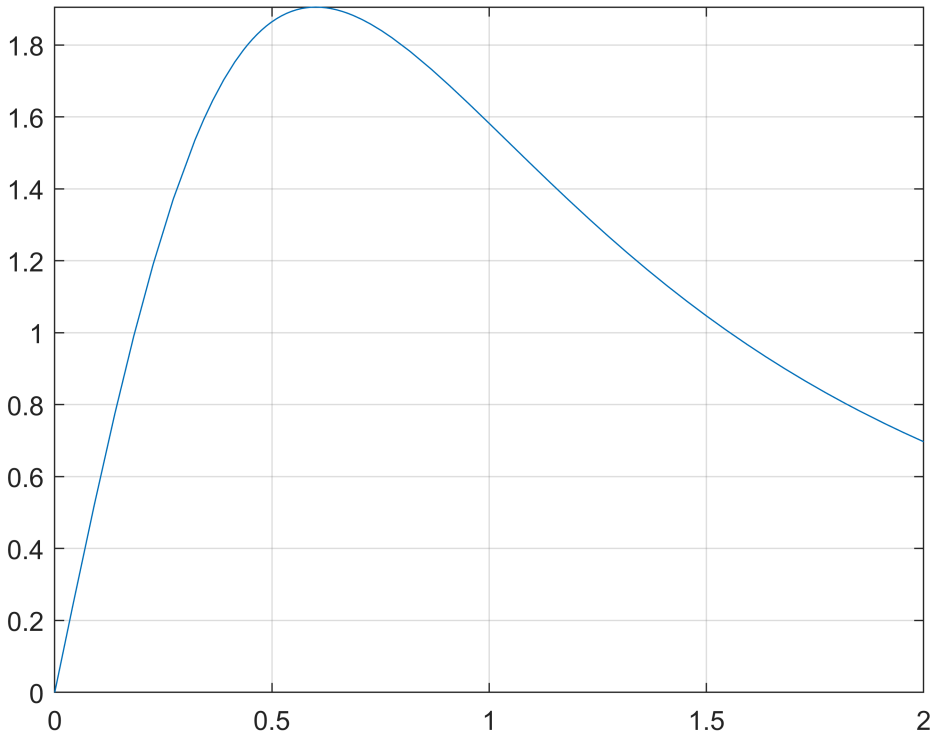
donde where $e_0 = 8.9 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$.

a) Grafica la fuerza F considerando que las cargas q y Q son de $2 \times 10^{-5}\, C$ y el radio a del anillo es de 0.85 m. Grafica en el intervalo [0 , 2].

```
e0=8.9e-12;
q=2e-5;
Q=2e-5;
a=0.85;
f=@(x) 1/(4*pi*e0) * (x*q*Q)/(x.^2+a.^2).^(3/2);
fplot(f,[0,2]);
```

```
Warning: Function behaves unexpectedly on array inputs. To improve performance, properly vectorize your
 function to return an output with the same size and shape as the input arguments.
```

```
grid on;
```

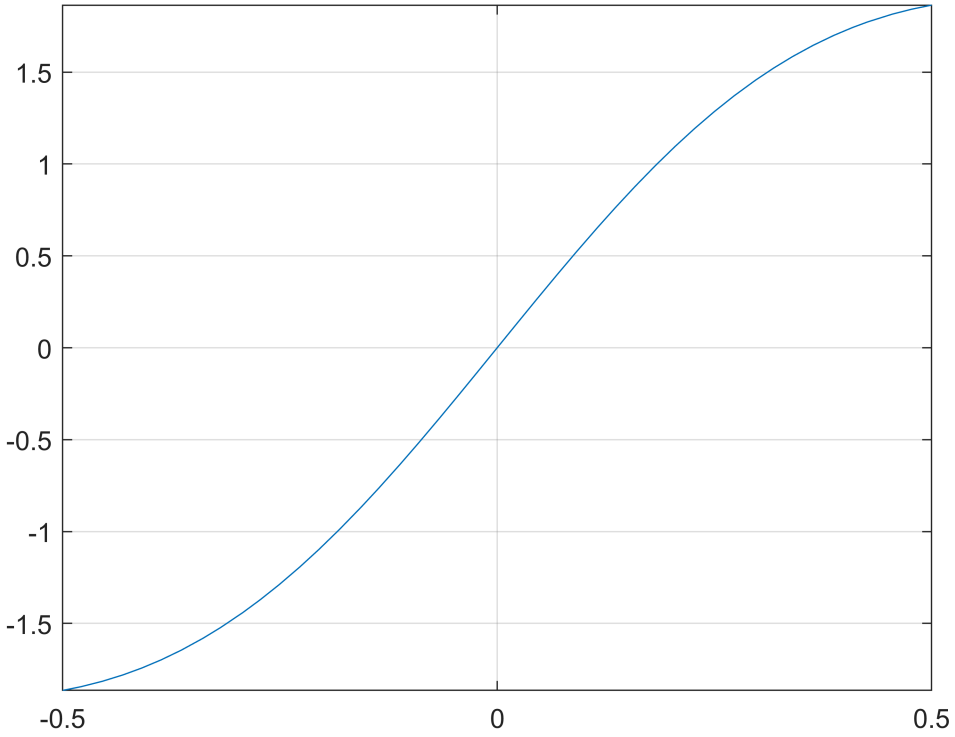


b) Determina visualmente un intervalo (más pequeño) en el que se encuentra la raíz.

```
fplot(f,[-0.5,0.5]);
```

```
Warning: Function behaves unexpectedly on array inputs. To improve performance, properly vectorize your
 function to return an output with the same size and shape as the input arguments.
```

```
grid on;
```



c) Encuentra la distancia x donde la fuerza es igual a 1.25 N. Usa cualquier método.

```
g=@(x) f(x)-1.25;
[x,i]=interpolacion(g,0,0.5)
```

```
x = 0.2410
i = 25
```

7. Siguiendo con el problema anterior.

a) Usa la función *newtonRaphsonOptimizacionDF* (problema 9) para determinar la distancia x donde la fuerza es máxima.

(Plan B - usa el algoritmo de proporción áurea; Plan C - usa fminsearch)

```
[x,i,min]=newtonRaphsonOptimizacionDF(f,0.5)
```

```
x = 0.6010
i = 1000
min = logical
   0
```

b) ¿Cuánto vale la fuerza máxima?

```
f(x)
```

```
ans = 1.9053
```

5b. Codifica aquí, de manera **estructurada** y **eficiente**, la función *puntoFijo* que calcula una raíz de la función $f(x)$ mediante el algoritmo de (iteración simple de) punto fijo (o substitución sucesiva).

La fórmula de este algoritmo se obtiene reordenando la ecuación $f(x) = 0$ de tal manera que x quede en el lado izquierdo de la ecuación: $x = g(x)$.

La ecuación $x = g(x)$ proporciona una fórmula para predecir un nuevo valor de x en función de un valor previo de x. Entonces, dado un valor aproximado de la raíz x_i la formula puede usarse para calcular una nueva aproximación x_{i+1} de acuerdo a la fórmula iterativa: $x_{i+1} = g(x_i)$.

```
function [x, i] = puntoFijo(g,x)
% Computes fixed point x=g(x)
% Input: function handle g; first aproximation x
% Output: Approximate solution x; number of iterations performed i
% Este algoritmo converge si abs(g'(x))<1
    gsym=sym(g);
    dgs=diff(gsym);
    dg=matlabFunction(dgs);
    if abs(dg(x))>=1, error('No converge'), end
    xp=x;
    x=g(x);
    i=1;
    MAX=1000;
    while abs((x-xp)/x)>eps && abs(dg(x))<1 && i<MAX
        xp=x;
        x=g(x);
        i=i+1;
    end

end
```

MÉTODO DEL EJERCICIO 6: Interpolación lineal

```
function [x,i]=interpolacion(f,x0,x1)
    if f(x0)*f(x1)>0, error('f(a) y f(b) deben tener distinto signo'), end
    xprev=x1;
    xder=x0;
    xizq=x1;
    x=xder-f(xder)*(xder-xizq)/(f(xder)-f(xizq));
    i=1;
    MAX=1000;
    while abs((x-xprev)/x)>eps && f(x)~=0 && i<MAX
        xprev=x;
        x=xder-f(xder)*(xder-xprev)/(f(xder)-f(xprev));
        i=i+1;
    end
end
```

8. Codifica aquí, de manera **estructurada**, **modular** y **eficiente**, la función newtonRaphsonOptimizacionDF que calcula un punto crítico de una función $f(x)$. La función debe aproximar las derivada de la función $f(x)$ utilizando las siguientes diferencias finitas centradas con error de $O(h^2)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Usa h = abs(x/1e5).

```
function [x,i,min] = newtonRaphsonOptimizacionDF(f,x)
% Computes critical point x of f
% Input: function handle f; first aproximation x
% Output: Approximate solution x;
%         number of iterations performed i
%         boolean min indicating if x is a minimum
    h = abs(x/1e5);
    dfs=(f(x+h)-f(x-h))/(2*h);
    dfs2=(f(x+h)-2*f(x)+f(x-h))/h.^2;
    xp=x;
    MAX=1000;
    i=0;
    x=xp-dfs/dfs2;
    while abs((x-xp)/xp)>eps && i<MAX
        dfs=(f(x+h)-f(x-h))/(2*h);
        dfs2=(f(x+h)-2*f(x)+f(x-h))/h.^2;
        xp=x;
        x=xp-dfs/dfs2;
        i=i+1;
    end

    min=true;
    if(dfs2<0)
        min=false;
    end
end
```