Álgebra Matricial, Determinantes y Regla de Sarrus

Aplicación de Métodos Numéricos al Ambiente Construido (CV1012)

M.C. Xavier Sánchez Díaz
sax@tec.mx

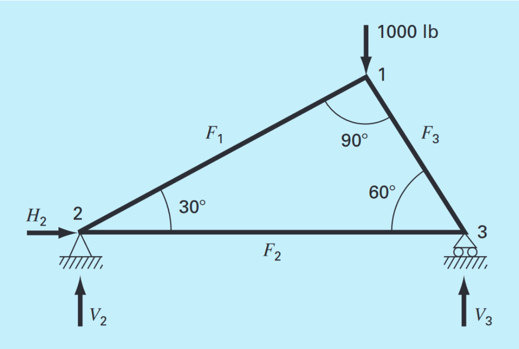
Tecnológico de Monterrey

Outline

Esfuerzos en una armadura

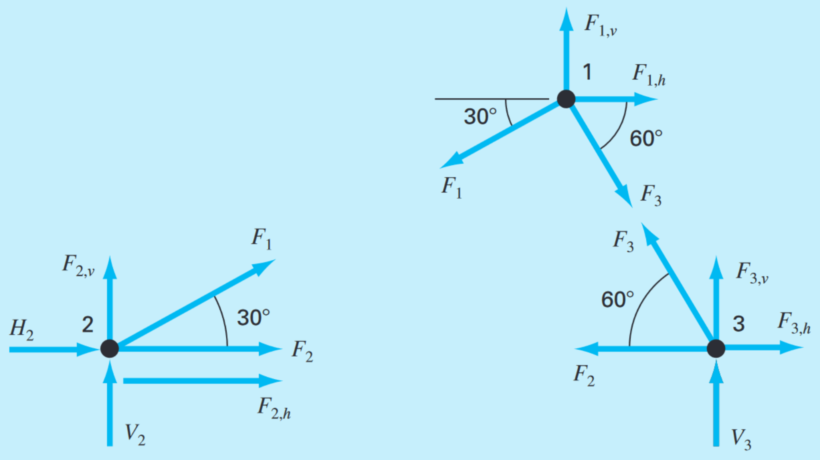
Álgebra Matricial y Ecuaciones

Queremos encontrar las fuerzas y reacciones asociadas a una armadura estáticamente determinada:



con fuerzas (F_i) de tensión o compresión en cada nodo, y reacciones externas (H_2, V_2, V_3) que son las fuerzas de interacción de la armadura con la superficie en la que se encuentra.

Cuyo sistema de cuerpo libre es el siguiente:



Imágenes tomadas de Chapra & Canale - Numerical Methods for Engineering

Generando ecuaciones

Álgebra Matricial y Ecuaciones

Podemos generar ecuaciones viendo el diagrama, sabiendo que la suma de fuerzas en cada nodo debe ser de 0: Nodo 1:

- $\sum F_H = 0 = -F_1 \cos 30^{\circ} + F_3 \cos 60^{\circ} + F_{1,h}$
- $\sum F_V = 0 = -F_1 \sin 30^{\circ} - F_3 \sin 60^{\circ} + F_{1,v}$

Nodo 2:

- $\sum F_H = 0 = F_2 + F_1 \cos 30^{\circ} + F_{2,h} + H_2$
- $\sum F_V = 0 = F_1 \sin 30^{\circ} + F_{2,v} + F_{2,h} + V_2$

Nodo 3:

- $\sum F_H = 0 = -F_2 - F_3 \cos 60^{\circ} + F_{3,h}$
- $\sum F_V = 0 = F_3 \sin 60^{\circ} + F_{3,v} + V_3$

Acomodando ecuaciones

Álgebra Matricial y Ecuaciones

Siguiendo orden alfabético para las incógnitas $(F_1, F_2, F_3, H_2, V_2, V_3)$ y las ecuaciones, entonces tenemos el siguiente sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas:

$$\begin{bmatrix} 0.866 & 0.0 & -0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.0 & 0.866 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.866 & -1.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -0.866 & 0.0 & 0.0 & -1.0 \end{bmatrix}$$

Con un vector de fuerzas resultantes $(F_{1,h}, F_{1,v}, F_{2,h}, F_{2,v}, F_{3,h}, F_{3,v})$ de

$$[0, -1000, 0, 0, 0, 0]^T$$

El sistema lo podemos resolver usando **Eliminación Gaussiana** (aunque sería un poco complicado) o bien usando factorización LU.
Tras resolver el sistema, obtenemos el siguiente vector de fuerzas:

$$\begin{bmatrix} -500.0 \\ 433.0127 \\ -866.025 \\ 0.0 \\ 250.0 \\ 750 \end{bmatrix}$$

Investiga sobre la factorización LU, es importante que lo conozcas aunque no vayamos a evaluarlo

Matrices como transformaciones lineales

Determinantes

Ya vimos que las matrices pueden ser usadas para representar datos pero también para representar **transformaciones**. ¿Qué sucede al realizar esta operación?

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ya vimos que las matrices pueden ser usadas para representar datos pero también para representar **transformaciones**. ¿Qué sucede al realizar esta operación?

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

¿Qué es una determinante?

Determinantes

Se puede obtener un **escalar** a partir de una matriz **cuadrada**, al cual llamamos determinante.
El determinante, usualmente denotada como $\det A$, $\det(A)$ o $|A|$, guarda algunas propiedades interesantes con respecto a la matriz de la que se obtuvo:

- Si el determinante de una matriz es 0, entonces la matriz es singular (no se puede invertir)
- El determinante de una matriz A es igual que el determinante de su transpuesta, A^T
- El determinante de la matriz inversa A^{-1} de A es igual a $\dfrac{1}{\det A}$
- Para dos matrices A, B del mismo tamaño, $\det AB = \det A \times \det B$
- Si una matriz tiene una columna o una fila con solamente 0, entonces su determinante es 0
- $\det cA = c^n \det A$ para una matriz A de dimensiones $n \times n$

¿Qué es una determinante?

Determinantes

Se puede obtener un **escalar** a partir de una matriz **cuadrada**, al cual llamamos determinante.

El determinante, usualmente denotada como $\det A$, $\det(A)$ o $|A|$, guarda algunas propiedades interesantes con respecto a la matriz de la que se obtuvo:

- Si el determinante de una matriz es 0, entonces la matriz es singular (no se puede invertir)
- El determinante de una matriz A es igual que el determinante de su transpuesta, A^T
- El determinante de la matriz inversa A^{-1} de A es igual a $\frac{1}{\det A}$
- Para dos matrices A, B del mismo tamaño, $\det AB = \det A \times \det B$
- Si una matriz tiene una columna o una fila con solamente 0, entonces su determinante es 0
- $\det cA = c^n \det A$ para una matriz A de dimensiones $n \times n$

¿Qué es una determinante?

Determinantes

Se puede obtener un **escalar** a partir de una matriz **cuadrada**, al cual llamamos determinante.

El determinante, usualmente denotada como $\det A$, $\det(A)$ o $|A|$, guarda algunas propiedades interesantes con respecto a la matriz de la que se obtuvo:

- Si el determinante de una matriz es 0, entonces la matriz es singular (no se puede invertir)
- El determinante de una matriz A es igual que el determinante de su transpuesta, A^T
- El determinante de la matriz inversa A^{-1} de A es igual a $\dfrac{1}{\det A}$
- Para dos matrices A, B del mismo tamaño, $\det AB = \det A \times \det B$
- Si una matriz tiene una columna o una fila con solamente 0, entonces su determinante es 0
- $\det cA = c^n \det A$ para una matriz A de dimensiones $n \times n$

¿Qué es una determinante?

Determinantes

Se puede obtener un **escalar** a partir de una matriz **cuadrada**, al cual llamamos determinante.

El determinante, usualmente denotada como $\det A$, $\det(A)$ o $|A|$, guarda algunas propiedades interesantes con respecto a la matriz de la que se obtuvo:

- Si el determinante de una matriz es 0, entonces la matriz es singular (no se puede invertir)
- El determinante de una matriz A es igual que el determinante de su transpuesta, A^T
- El determinante de la matriz inversa A^{-1} de A es igual a $\dfrac{1}{\det A}$
- Para dos matrices A, B del mismo tamaño, $\det AB = \det A \times \det B$
- Si una matriz tiene una columna o una fila con solamente 0, entonces su determinante es 0
- $\det cA = c^n \det A$ para una matriz A de dimensiones $n \times n$

¿Qué es una determinante?

Determinantes

Se puede obtener un **escalar** a partir de una matriz **cuadrada**, al cual llamamos determinante.
El determinante, usualmente denotada como $\det A$, $\det(A)$ o $|A|$, guarda algunas propiedades interesantes con respecto a la matriz de la que se obtuvo:

- Si el determinante de una matriz es 0, entonces la matriz es singular (no se puede invertir)
- El determinante de una matriz A es igual que el determinante de su transpuesta, A^T
- El determinante de la matriz inversa A^{-1} de A es igual a $\frac{1}{\det A}$
- Para dos matrices A, B del mismo tamaño, $\det AB = \det A \times \det B$
- Si una matriz tiene una columna o una fila con solamente 0, entonces su determinante es 0
- $\det cA = c^n \det A$ para una matriz A de dimensiones $n \times n$

¿Qué es una determinante?

Determinantes

Se puede obtener un **escalar** a partir de una matriz **cuadrada**, al cual llamamos determinante.
El determinante, usualmente denotada como $\det A$, $\det(A)$ o $|A|$, guarda algunas propiedades interesantes con respecto a la matriz de la que se obtuvo:

- Si el determinante de una matriz es 0, entonces la matriz es singular (no se puede invertir)
- El determinante de una matriz A es igual que el determinante de su transpuesta, A^T
- El determinante de la matriz inversa A^{-1} de A es igual a $\dfrac{1}{\det A}$
- Para dos matrices A, B del mismo tamaño, $\det AB = \det A \times \det B$
- Si una matriz tiene una columna o una fila con solamente 0, entonces su determinante es 0
- $\det cA = c^n \det A$ para una matriz A de dimensiones $n \times n$

¿Qué es una determinante?

Determinantes

Se puede obtener un **escalar** a partir de una matriz **cuadrada**, al cual llamamos determinante.

El determinante, usualmente denotada como $\det A$, $\det(A)$ o $|A|$, guarda algunas propiedades interesantes con respecto a la matriz de la que se obtuvo:

- Si el determinante de una matriz es 0, entonces la matriz es singular (no se puede invertir)
- El determinante de una matriz A es igual que el determinante de su transpuesta, A^T
- El determinante de la matriz inversa A^{-1} de A es igual a $\dfrac{1}{\det A}$
- Para dos matrices A, B del mismo tamaño, $\det AB = \det A \times \det B$
- Si una matriz tiene una columna o una fila con solamente 0, entonces su determinante es 0
- $\det cA = c^n \det A$ para una matriz A de dimensiones $n \times n$

¿Cómo calculo el determinante de una matriz?

Determinantes

Vamos a enfocarnos en solamente dos *tamaños* de matrices. Para lo demás, es conveniente usar software especializado.
Mientras tanto, comencemos para una matriz de 2×2:

Matrices de 2×2

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces $\det A = ad - cb$

Ejemplo

Si $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, entonces su determinante se puede calcular como $\det A = (5)(3) - (7)(2) = 15 - 14 = 1$

¿Cómo calculo el determinante de una matriz?

Vamos a enfocarnos en solamente dos *tamaños* de matrices. Para lo demás, es conveniente usar software especializado.
Mientras tanto, comencemos para una matriz de 2×2:

Matrices de 2×2

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces $\det A = ad - cb$

Ejemplo

Si $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, entonces su determinante se puede calcular como $\det A = (5)(3) - (7)(2) = 15 - 14 = 1$

¿Cómo calculo el determinante de una matriz?

Determinantes

Vamos a enfocarnos en solamente dos *tamaños* de matrices. Para lo demás, es conveniente usar software especializado.
Mientras tanto, comencemos para una matriz de 2 × 2:

Matrices de 2 × 2

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces $\det A = ad - cb$

Ejemplo

Si $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, entonces su determinante se puede calcular como
$\det A = (5)(3) - (7)(2) = 15 - 14 = 1$

Determinantes de matrices de 3×3

Para una matriz de 3×3 es un poco más complicado, pero se puede deducir de manera recursiva:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & e & f \\ \square & h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ d & \square & f \\ g & \square & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ d & e & \square \\ g & h & \square \end{vmatrix}$$

Y como ya sabemos sacar determinantes de matrices de 2×2, entonces llegamos a la fórmula...

Determinantes de matrices de 3×3

$$\det A = aei - ahf - bdi + bgf + cdh - cge$$

La regla de Sarrus

Determinantes

Si agregamos las primeras dos columnas a la **derecha** de la matriz, podemos encontrar un patrón:

Obtenemos los términos positivos de las diagonales principales (\):

$$\begin{bmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{bmatrix}$$

Es decir $aei + bfg + cdh$. Ahora podemos obtener los términos negativos con las diagonales inversas (/):

$$\begin{bmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{bmatrix}$$

Es decir $-gec-hfa-idb$.

La regla de Sarrus

Determinantes

Si agregamos las primeras dos columnas a la **derecha** de la matriz, podemos encontrar un patrón:
Obtenemos los términos positivos de las diagonales principales (\):

$$\begin{bmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{bmatrix}$$

Es decir $aei + bfg + cdh$. Ahora podemos obtener los términos negativos con las diagonales inversas (/):

$$\begin{bmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{bmatrix}$$

Es decir $-gec-hfa-idb$.