# Raíces: *Bracketing Methods*

## Aplicación de Métodos Numéricos al Ambiente Construido (CV1012)

M.C. Xavier Sánchez Díaz
sax@tec.mx

# Outline

# ¿Qué es una raíz?

## Raíces

### Definición

La raíz de una función $f$ (también llamada *cero*) es un número $x$ tal que $f(x) = 0$.

En otras palabras, la raíz de una función hace referencia al valor numérico de una **variable independiente** cuando la **variable dependiente** vale 0.

En palabras aún más simples, una raíz se puede identificar **gráficamente** como el punto donde la gráfica de una función corta al eje de las $x$.

# ¿Qué es una raíz?

## Raíces

### Definición

La raíz de una función $f$ (también llamada *cero*) es un número $x$ tal que $f(x) = 0$.

En otras palabras, la raíz de una función hace referencia al valor numérico de una **variable independiente** cuando la **variable dependiente** vale 0.

En palabras aún más simples, una raíz se puede identificar **gráficamente** como el punto donde la gráfica de una función corta al eje de las $x$.

# ¿Qué es una raíz?

## Raíces

### Definición

La raíz de una función $f$ (también llamada *cero*) es un número $x$ tal que $f(x) = 0$.

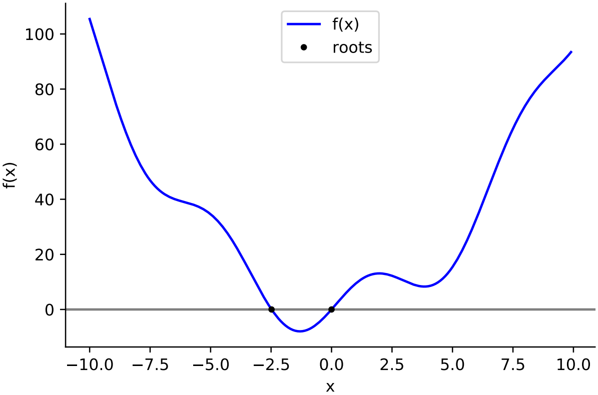
En otras palabras, la raíz de una función hace referencia al valor numérico de una **variable independiente** cuando la **variable dependiente** vale 0.

En palabras aún más simples, una raíz se puede identificar **gráficamente** como el punto donde la gráfica de una función corta al eje de las $x$.

# ¿Para qué me sirve encontrar una raíz?

## Raíces

¿Qué significa cada raíz en esta gráfica si $f(x)$ fuera velocidad? ¿Qué valores tienen?



Sabiendo que nuestra función es $f(x) = x^2 + 10\sin(x)$, intentemos encontrar **gráficamente** la raíz exacta que está cerca del -$2.5$.

Primero, delimitemos puntos de *más o menos* dónde podría estar:

- Uno de ellos tendría que ser donde la evaluación de $f(x)$ dé como resultado un número positivo—es decir, por **arriba** del 0.
- El otro por **debajo** del 0.

Para este caso, pensemos en $-3$ y $-2$, donde

$$f(-3) = 7.588799919 \quad \text{y} \quad f(-2) = -5.092974268$$

# Bisección

## Método de bisección

Sabiendo que nuestra función es $f(x) = x^2 + 10\sin(x)$, intentemos encontrar **gráficamente** la raíz exacta que está cerca del -$2.5$.

Primero, delimitemos puntos de *más o menos* dónde podría estar:

- Uno de ellos tendría que ser donde la evaluación de $f(x)$ dé como resultado un número positivo—es decir, por **arriba** del 0.
- El otro por **debajo** del 0.

Para este caso, pensemos en $-3$ y $-2$, donde

$$f(-3) = 7.588799919 \quad \text{y} \quad f(-2) = -5.092974268$$

Sabiendo que nuestra función es $f(x) = x^2 + 10\sin(x)$, intentemos encontrar **gráficamente** la raíz exacta que está cerca del -$2.5$.

Primero, delimitemos puntos de *más o menos* dónde podría estar:

- Uno de ellos tendría que ser donde la evaluación de $f(x)$ dé como resultado un número positivo—es decir, por **arriba** del 0.
- El otro por **debajo** del 0.

Para este caso, pensemos en $-3$ y $-2$, donde

$$f(-3) = 7.588799919 \quad \text{y} \quad f(-2) = -5.092974268$$

Sabiendo que nuestra función es $f(x) = x^2 + 10\sin(x)$, intentemos encontrar **gráficamente** la raíz exacta que está cerca del -$2.5$.

Primero, delimitemos puntos de *más o menos* dónde podría estar:

- Uno de ellos tendría que ser donde la evaluación de $f(x)$ dé como resultado un número positivo—es decir, por **arriba** del 0.
- El otro por **debajo** del 0.

Para este caso, pensemos en $-3$ y $-2$, donde

$$f(-3) = 7.588799919 \quad \text{y} \quad f(-2) = -5.092974268$$

Sabiendo que nuestra función es $f(x) = x^2 + 10\sin(x)$, intentemos encontrar **gráficamente** la raíz exacta que está cerca del -$2.5$.

Primero, delimitemos puntos de *más o menos* dónde podría estar:

- Uno de ellos tendría que ser donde la evaluación de $f(x)$ dé como resultado un número positivo—es decir, por **arriba** del 0.
- El otro por **debajo** del 0.

Para este caso, pensemos en $-3$ y $-2$, donde

$$f(-3) = 7.588799919 \quad \text{y} \quad f(-2) = -5.092974268$$

Encontremos el punto medio entre nuestros dos límites con un simple promedio:

$$x_r = \frac{-3 + (-2)}{2} = -2.5$$

Y ahora evaluemos la función en la aproximación: $f(-2.5) = 0.26528.$

Con este nuevo número, ahora revisemos cuánto da la multiplicación de las evaluaciones de este nuevo punto y del límite inferior:

$$f(-3) \cdot f(-2.5) = (7.588799919)(0.26528) = 2.0131$$

Y como este número es positivo, significa que no ocurrió un cambio de signo[1].

[1] ¿Por qué podemos asumir esto?

Encontremos el punto medio entre nuestros dos límites con un simple promedio:

$$x_r = \frac{-3 + (-2)}{2} = -2.5$$

Y ahora evaluemos la función en la aproximación: $f(-2.5) = 0.26528$.

Con este nuevo número, ahora revisemos cuánto da la multiplicación de las evaluaciones de este nuevo punto y del límite inferior:

$$f(-3) \cdot f(-2.5) = (7.588799919)(0.26528) = 2.0131$$

Y como este número es positivo, significa que no ocurrió un cambio de signo[1].

[1] ¿Por qué podemos asumir esto?

Encontremos el punto medio entre nuestros dos límites con un simple promedio:

$$x_r = \frac{-3 + (-2)}{2} = -2.5$$

Y ahora evaluemos la función en la aproximación: $f(-2.5) = 0.26528$.

Con este nuevo número, ahora revisemos cuánto da la multiplicación de las

evaluaciones de este nuevo punto y del límite inferior:

$$f(-3) \cdot f(-2.5) = (7.588799919)(0.26528) = 2.0131$$

Y como este número es positivo, significa que no ocurrió un cambio de signo[1].

[1] ¿Por qué podemos asumir esto?

Encontremos el punto medio entre nuestros dos límites con un simple promedio:

$$x_r = \frac{-3 + (-2)}{2} = -2.5$$

Y ahora evaluemos la función en la aproximación: $f(-2.5) = 0.26528$.

Con este nuevo número, ahora revisemos cuánto da la multiplicación de las

evaluaciones de este nuevo punto y del límite inferior:

$$f(-3) \cdot f(-2.5) = (7.588799919)(0.26528) = 2.0131$$

Y como este número es positivo, significa que no ocurrió un cambio de signo[1].

[1] ¿Por qué podemos asumir esto?

Este proceso es conocido como el método de bisección. Repetimos el procedimiento:

1. Bisectamos: $x_r = \frac{-2.5+(-2)}{2} = -2.25$
2. Evaluamos: $f(-2.25) = -2.7182$
3. Probamos con límite inferior: $f(-2.5) \cdot f(-2.25) = (0.26528)(-2.7182) = -0.72109$
4. Revisamos el signo del paso 3. Si es positivo, entonces probamos con el otro límite. Si es negativo, entonces usamos $x_r$ como nuevo límite.
5. Medimos el error: $\varepsilon_a = \frac{-2.5-(-2.25)}{-2.5} = 0.1$

Y seguiremos repitiendo, hasta que $\varepsilon_a$ sea lo suficientemente pequeño.

Este proceso es conocido como el método de bisección. Repetimos el procedimiento:

1. Bisectamos: $x_r = \frac{-2.5+(-2)}{2} = -2.25$
2. Evaluamos: $f(-2.25) = -2.7182$
3. Probamos con límite inferior: $f(-2.5) \cdot f(-2.25) = (0.26528)(-2.7182) = -0.72109$
4. Revisamos el signo del paso 3. Si es positivo, entonces probamos con el otro límite. Si es negativo, entonces usamos $x_r$ como nuevo límite.
5. Medimos el error: $\varepsilon_a = \frac{-2.5-(-2.25)}{-2.5} = 0.1$

Y seguiremos repitiendo, hasta que $\varepsilon_a$ sea lo suficientemente pequeño.

Este proceso es conocido como el método de bisección. Repetimos el procedimiento:

1. Bisectamos: $x_r = \frac{-2.5+(-2)}{2} = -2.25$
2. Evaluamos: $f(-2.25) = -2.7182$
3. Probamos con límite inferior:
   $f(-2.5) \cdot f(-2.25) = (0.26528)(-2.7182) = -0.72109$
4. Revisamos el signo del paso 3. Si es positivo, entonces probamos con el otro límite. Si es negativo, entonces usamos $x_r$ como nuevo límite.
5. Medimos el error: $\varepsilon_a = \frac{-2.5-(-2.25)}{-2.5} = 0.1$

Y seguiremos repitiendo, hasta que $\varepsilon_a$ sea lo suficientemente pequeño.

Este proceso es conocido como el método de bisección. Repetimos el procedimiento:

1. Bisectamos: $x_r = \frac{-2.5+(-2)}{2} = -2.25$
2. Evaluamos: $f(-2.25) = -2.7182$
3. Probamos con límite inferior:
   $f(-2.5) \cdot f(-2.25) = (0.26528)(-2.7182) = -0.72109$
4. Revisamos el signo del paso 3. Si es positivo, entonces probamos con el otro límite. Si es negativo, entonces usamos $x_r$ como nuevo límite.
5. Medimos el error: $\varepsilon_a = \frac{-2.5-(-2.25)}{-2.5} = 0.1$

Y seguiremos repitiendo, hasta que $\varepsilon_a$ sea lo suficientemente pequeño.

Este proceso es conocido como el método de bisección. Repetimos el procedimiento:

1. Bisectamos: $x_r = \frac{-2.5+(-2)}{2} = -2.25$
2. Evaluamos: $f(-2.25) = -2.7182$
3. Probamos con límite inferior:
   $f(-2.5) \cdot f(-2.25) = (0.26528)(-2.7182) = -0.72109$
4. Revisamos el signo del paso 3. Si es positivo, entonces probamos con el otro límite. Si es negativo, entonces usamos $x_r$ como nuevo límite.
5. Medimos el error: $\varepsilon_a = \frac{-2.5-(-2.25)}{-2.5} = 0.1$

Y seguiremos repitiendo, hasta que $\varepsilon_a$ sea lo suficientemente pequeño.

Este proceso es conocido como el método de bisección. Repetimos el procedimiento:

1. Bisectamos: $x_r = \frac{-2.5+(-2)}{2} = -2.25$
2. Evaluamos: $f(-2.25) = -2.7182$
3. Probamos con límite inferior:
   $f(-2.5) \cdot f(-2.25) = (0.26528)(-2.7182) = -0.72109$
4. Revisamos el signo del paso 3. Si es positivo, entonces probamos con el otro límite. Si es negativo, entonces usamos $x_r$ como nuevo límite.
5. Medimos el error: $\varepsilon_a = \frac{-2.5-(-2.25)}{-2.5} = 0.1$

Y seguiremos repitiendo, hasta que $\varepsilon_a$ sea lo suficientemente pequeño.

Este proceso es conocido como el método de bisección. Repetimos el procedimiento:

1. Bisectamos: $x_r = \frac{-2.5+(-2)}{2} = -2.25$
2. Evaluamos: $f(-2.25) = -2.7182$
3. Probamos con límite inferior:
   $f(-2.5) \cdot f(-2.25) = (0.26528)(-2.7182) = -0.72109$
4. Revisamos el signo del paso 3. Si es positivo, entonces probamos con el otro límite. Si es negativo, entonces usamos $x_r$ como nuevo límite.
5. Medimos el error: $\varepsilon_a = \frac{-2.5-(-2.25)}{-2.5} = 0.1$

Y seguiremos repitiendo, hasta que $\varepsilon_a$ sea lo suficientemente pequeño.

# Convergencia

## Falsa Posición

Cuando hablamos de convergencia, nos referimos al **momento** en el que se encuentra una *solución aceptable*.

¿Qué tan *rápido* converge el método de la bisección? Pensemos en intervalos de 'mitades'

1. El punto medio entre -2 y -3 es **-2.5**
2. El punto medio entre -2 y -2.5 es **-2.25**
3. El punto medio entre -2.25 y -2.5 es **-2.375**
4. El punto medio entre -2.375 y -2.5 es **-2.4375**
5. El punto medio entre -2.4375 y -2.5 es **-2.46875**
6. El punto medio entre -2.46875 y -2.5 es **-2.484375**
7. ...

¿Cuánto hay entre los resultados del paso 1 y el 2? ¿Y entre el 2 y el 3? ¿Y entre el 3 y el 4?

# Convergencia

## Falsa Posición

Cuando hablamos de convergencia, nos referimos al **momento** en el que se encuentra una *solución aceptable*.

¿Qué tan *rápido* converge el método de la bisección? Pensemos en intervalos de 'mitades'

1. El punto medio entre -2 y -3 es **-2.5**
2. El punto medio entre -2 y -2.5 es **-2.25**
3. El punto medio entre -2.25 y -2.5 es **-2.375**
4. El punto medio entre -2.375 y -2.5 es **-2.4375**
5. El punto medio entre -2.4375 y -2.5 es **-2.46875**
6. El punto medio entre -2.46875 y -2.5 es **-2.484375**
7. ...

¿Cuánto hay entre los resultados del paso 1 y el 2? ¿Y entre el 2 y el 3? ¿Y entre el 3 y el 4?

# Convergencia

## Falsa Posición

Cuando hablamos de convergencia, nos referimos al **momento** en el que se encuentra una *solución aceptable*.

¿Qué tan *rápido* converge el método de la bisección? Pensemos en intervalos de 'mitades'

1. El punto medio entre -2 y -3 es **-2.5**
2. El punto medio entre -2 y -2.5 es **-2.25**
3. El punto medio entre -2.25 y -2.5 es **-2.375**
4. El punto medio entre -2.375 y -2.5 es **-2.4375**
5. El punto medio entre -2.4375 y -2.5 es **-2.46875**
6. El punto medio entre -2.46875 y -2.5 es **-2.484375**
7. ...

¿Cuánto hay entre los resultados del paso 1 y el 2? ¿Y entre el 2 y el 3? ¿Y entre el 3 y el 4?

# Convergencia

## Falsa Posición

Cuando hablamos de convergencia, nos referimos al **momento** en el que se encuentra una *solución aceptable*.

¿Qué tan *rápido* converge el método de la bisección? Pensemos en intervalos de 'mitades'

1. El punto medio entre -2 y -3 es **-2.5**
2. El punto medio entre -2 y -2.5 es **-2.25**
3. El punto medio entre -2.25 y -2.5 es **-2.375**
4. El punto medio entre -2.375 y -2.5 es **-2.4375**
5. El punto medio entre -2.4375 y -2.5 es **-2.46875**
6. El punto medio entre -2.46875 y -2.5 es **-2.484375**
7. ...

¿Cuánto hay entre los resultados del paso 1 y el 2? ¿Y entre el 2 y el 3? ¿Y entre el 3 y el 4?

# Convergencia

## Falsa Posición

Cuando hablamos de convergencia, nos referimos al **momento** en el que se encuentra una *solución aceptable*.

¿Qué tan *rápido* converge el método de la bisección? Pensemos en intervalos de 'mitades'

1. El punto medio entre -2 y -3 es **-2.5**
2. El punto medio entre -2 y -2.5 es **-2.25**
3. El punto medio entre -2.25 y -2.5 es **-2.375**
4. El punto medio entre -2.375 y -2.5 es **-2.4375**
5. El punto medio entre -2.4375 y -2.5 es **-2.46875**
6. El punto medio entre -2.46875 y -2.5 es **-2.484375**
7. ...

¿Cuánto hay entre los resultados del paso 1 y el 2? ¿Y entre el 2 y el 3? ¿Y entre el 3 y el 4?

# Convergencia

## Falsa Posición

Cuando hablamos de convergencia, nos referimos al **momento** en el que se encuentra una *solución aceptable*.

¿Qué tan *rápido* converge el método de la bisección? Pensemos en intervalos de 'mitades'

1. El punto medio entre -2 y -3 es **-2.5**
2. El punto medio entre -2 y -2.5 es **-2.25**
3. El punto medio entre -2.25 y -2.5 es **-2.375**
4. El punto medio entre -2.375 y -2.5 es **-2.4375**
5. El punto medio entre -2.4375 y -2.5 es **-2.46875**
6. El punto medio entre -2.46875 y -2.5 es **-2.484375**
7. ...

¿Cuánto hay entre los resultados del paso 1 y el 2? ¿Y entre el 2 y el 3? ¿Y entre el 3 y el 4?

# Convergencia

## Falsa Posición

Cuando hablamos de convergencia, nos referimos al **momento** en el que se encuentra una *solución aceptable*.

¿Qué tan *rápido* converge el método de la bisección? Pensemos en intervalos de 'mitades'

1. El punto medio entre -2 y -3 es **-2.5**
2. El punto medio entre -2 y -2.5 es **-2.25**
3. El punto medio entre -2.25 y -2.5 es **-2.375**
4. El punto medio entre -2.375 y -2.5 es **-2.4375**
5. El punto medio entre -2.4375 y -2.5 es **-2.46875**
6. El punto medio entre -2.46875 y -2.5 es **-2.484375**
7. ...

¿Cuánto hay entre los resultados del paso 1 y el 2? ¿Y entre el 2 y el 3? ¿Y entre el 3 y el 4?

# Convergencia

## Falsa Posición

Cuando hablamos de convergencia, nos referimos al **momento** en el que se encuentra una *solución aceptable*.

¿Qué tan *rápido* converge el método de la bisección? Pensemos en intervalos de 'mitades'

1. El punto medio entre -2 y -3 es **-2.5**
2. El punto medio entre -2 y -2.5 es **-2.25**
3. El punto medio entre -2.25 y -2.5 es **-2.375**
4. El punto medio entre -2.375 y -2.5 es **-2.4375**
5. El punto medio entre -2.4375 y -2.5 es **-2.46875**
6. El punto medio entre -2.46875 y -2.5 es **-2.484375**
7. ...

¿Cuánto hay entre los resultados del paso 1 y el 2? ¿Y entre el 2 y el 3? ¿Y entre el 3 y el 4?

Cuando hablamos de convergencia, nos referimos al **momento** en el que se encuentra una *solución aceptable*.

¿Qué tan *rápido* converge el método de la bisección? Pensemos en intervalos de 'mitades'

1. El punto medio entre -2 y -3 es **-2.5**
2. El punto medio entre -2 y -2.5 es **-2.25**
3. El punto medio entre -2.25 y -2.5 es **-2.375**
4. El punto medio entre -2.375 y -2.5 es **-2.4375**
5. El punto medio entre -2.4375 y -2.5 es **-2.46875**
6. El punto medio entre -2.46875 y -2.5 es **-2.484375**
7. ...

¿Cuánto hay entre los resultados del paso 1 y el 2? ¿Y entre el 2 y el 3? ¿Y entre el 3 y el 4?

# Convergencia

## Falsa Posición

Cuando hablamos de convergencia, nos referimos al **momento** en el que se encuentra una *solución aceptable*.

¿Qué tan *rápido* converge el método de la bisección? Pensemos en intervalos de ‘mitades’

1. El punto medio entre -2 y -3 es **-2.5**
2. El punto medio entre -2 y -2.5 es **-2.25**
3. El punto medio entre -2.25 y -2.5 es **-2.375**
4. El punto medio entre -2.375 y -2.5 es **-2.4375**
5. El punto medio entre -2.4375 y -2.5 es **-2.46875**
6. El punto medio entre -2.46875 y -2.5 es **-2.484375**
7. ...

¿Cuánto hay entre los resultados del paso 1 y el 2? ¿Y entre el 2 y el 3? ¿Y entre el 3 y el 4?

# Convergencia

## Falsa Posición

Cuando hablamos de convergencia, nos referimos al **momento** en el que se encuentra una *solución aceptable*.

¿Qué tan *rápido* converge el método de la bisección? Pensemos en intervalos de 'mitades'

1. El punto medio entre -2 y -3 es **-2.5**
2. El punto medio entre -2 y -2.5 es **-2.25**
3. El punto medio entre -2.25 y -2.5 es **-2.375**
4. El punto medio entre -2.375 y -2.5 es **-2.4375**
5. El punto medio entre -2.4375 y -2.5 es **-2.46875**
6. El punto medio entre -2.46875 y -2.5 es **-2.484375**
7. ...

¿Cuánto hay entre los resultados del paso 1 y el 2? ¿Y entre el 2 y el 3? ¿Y entre el 3 y el 4?

# Convergencia

## Falsa Posición

Cuando hablamos de convergencia, nos referimos al **momento** en el que se encuentra una *solución aceptable*.

¿Qué tan *rápido* converge el método de la bisección? Pensemos en intervalos de 'mitades'

1. El punto medio entre -2 y -3 es **-2.5**
2. El punto medio entre -2 y -2.5 es **-2.25**
3. El punto medio entre -2.25 y -2.5 es **-2.375**
4. El punto medio entre -2.375 y -2.5 es **-2.4375**
5. El punto medio entre -2.4375 y -2.5 es **-2.46875**
6. El punto medio entre -2.46875 y -2.5 es **-2.484375**
7. ...

¿Cuánto hay entre los resultados del paso 1 y el 2? ¿Y entre el 2 y el 3? ¿Y entre el 3 y el 4?

# ¿Podemos hacer que converja más rápido?

(*Spoiler alert: sí podemos.*)

# El método de la falsa posición

## Falsa posición

El método de la falsa posición consiste en generar una *raíz falsa*, más cerca de la verdadera raíz que alguno de los dos límites que usamos en el método de bisección.

Usando una línea recta podemos deducir dónde estará nuestra **falsa posición** y luego trabajar con eso:

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

Usando los mismos pasos del algoritmo de bisección, lo único que incorporaremos para mejorar el algoritmo es cambiar el paso de bisección por este nuevo paso y listo.

# El método de la falsa posición

## Falsa posición

El método de la falsa posición consiste en generar una *raíz falsa*, más cerca de la verdadera raíz que alguno de los dos límites que usamos en el método de bisección.

Usando una línea recta podemos deducir dónde estará nuestra **falsa posición** y luego trabajar con eso:

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

Usando los mismos pasos del algoritmo de bisección, lo único que incorporaremos para mejorar el algoritmo es cambiar el paso de bisección por este nuevo paso y listo.

# El método de la falsa posición

## Falsa posición

El método de la falsa posición consiste en generar una *raíz falsa*, más cerca de la verdadera raíz que alguno de los dos límites que usamos en el método de bisección.

Usando una línea recta podemos deducir dónde estará nuestra **falsa posición** y luego trabajar con eso:

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

Usando los mismos pasos del algoritmo de bisección, lo único que incorporaremos para mejorar el algoritmo es cambiar el paso de bisección por este nuevo paso y listo.

# Notas sobre los *bracketing methods*

- Tanto el método de la falsa posición como el de la bisección se conocen como **métodos de intervalos** o en inglés, *bracketing methods*.

- El método de la **falsa posición** no siempre es más rápido que el de bisección.

- El tamaño de los *'brincos'* importa: