

Raíces: *Bracketing Methods*

Aplicación de Métodos Numéricos al Ambiente Construido
(CV1012)

Xavier Sánchez Díaz



Outline

- 1 Raíces
- 2 Falsa posición
- 3 Notas sobre los *bracketing methods*

¿Qué es una raíz?

Raíces

Definición

La raíz de una función f (también llamada *cero*) es un número x tal que $f(x) = 0$.

En otras palabras, la raíz de una función hace referencia al **valor numérico** de una **variable independiente** cuando la **variable dependiente** vale 0.

En palabras aún más simples, una raíz se puede identificar **gráficamente** como el punto donde la gráfica de una función corta al eje de las x .

¿Qué es una raíz?

Raíces

Definición

La raíz de una función f (también llamada *cero*) es un número x tal que $f(x) = 0$.

En otras palabras, la raíz de una función hace referencia al **valor numérico** de una **variable independiente** cuando la **variable dependiente** vale 0.

En palabras aún más simples, una raíz se puede identificar **gráficamente** como el punto donde la gráfica de una función corta al eje de las x .

¿Qué es una raíz?

Raíces

Definición

La raíz de una función f (también llamada *cero*) es un número x tal que $f(x) = 0$.

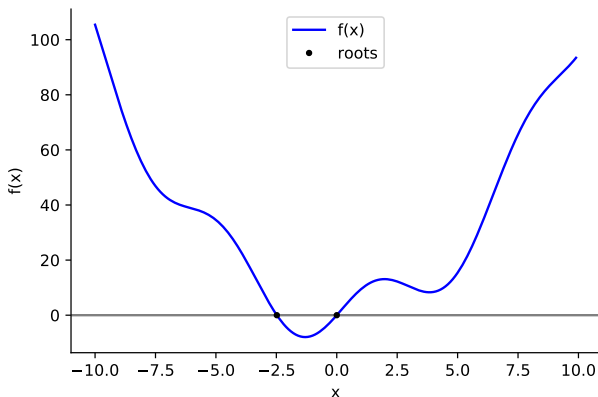
En otras palabras, la raíz de una función hace referencia al **valor numérico** de una **variable independiente** cuando la **variable dependiente** vale 0.

En palabras aún más simples, una raíz se puede identificar **gráficamente** como el punto donde la gráfica de una función corta al eje de las x .

¿Para qué me sirve encontrar una raíz?

Raíces

¿Qué significa cada raíz en esta gráfica si $f(x)$ fuera velocidad? ¿Qué valores tienen?



Bisección

Método de bisección

Sabiendo que nuestra función es $f(x) = x^2 + 10 \sin(x)$, intentemos encontrar **gráficamente** la raíz exacta que está cerca del -2.5.

Primero, delimitemos puntos de *más o menos* dónde podría estar:

- Uno de ellos tendría que ser donde la evaluación de $f(x)$ dé como resultado un número positivo—es decir, por **arriba** del 0.
- El otro por **debajo** del 0.

Para este caso, pensemos en -3 y -2 , donde

$$f(-3) = 7.588799919 \quad \text{y} \quad f(-2) = -5.092974268$$

Bisección

Método de bisección

Sabiendo que nuestra función es $f(x) = x^2 + 10 \sin(x)$, intentemos encontrar **gráficamente** la raíz exacta que está cerca del -2.5.

Primero, delimitemos puntos de *más o menos* dónde podría estar:

- Uno de ellos tendría que ser donde la evaluación de $f(x)$ dé como resultado un número positivo—es decir, por **arriba** del 0.
- El otro por **debajo** del 0.

Para este caso, pensemos en -3 y -2 , donde

$$f(-3) = 7.588799919 \quad \text{y} \quad f(-2) = -5.092974268$$

Bisección

Método de bisección

Sabiendo que nuestra función es $f(x) = x^2 + 10 \sin(x)$, intentemos encontrar **gráficamente** la raíz exacta que está cerca del -2.5.

Primero, delimitemos puntos de *más o menos* dónde podría estar:

- Uno de ellos tendría que ser donde la evaluación de $f(x)$ dé como resultado un número positivo—es decir, por **arriba** del 0.
- El otro por **debajo** del 0.

Para este caso, pensemos en -3 y -2 , donde

$$f(-3) = 7.588799919 \quad \text{y} \quad f(-2) = -5.092974268$$

Bisección

Método de bisección

Sabiendo que nuestra función es $f(x) = x^2 + 10 \sin(x)$, intentemos encontrar **gráficamente** la raíz exacta que está cerca del -2.5.

Primero, delimitemos puntos de *más o menos* dónde podría estar:

- Uno de ellos tendría que ser donde la evaluación de $f(x)$ dé como resultado un número positivo—es decir, por **arriba** del 0.
- El otro por **debajo** del 0.

Para este caso, pensemos en -3 y -2 , donde

$$f(-3) = 7.588799919 \quad \text{y} \quad f(-2) = -5.092974268$$

Bisección

Método de bisección

Sabiendo que nuestra función es $f(x) = x^2 + 10 \sin(x)$, intentemos encontrar **gráficamente** la raíz exacta que está cerca del -2.5.

Primero, delimitemos puntos de *más o menos* dónde podría estar:

- Uno de ellos tendría que ser donde la evaluación de $f(x)$ dé como resultado un número positivo—es decir, por **arriba** del 0.
- El otro por **debajo** del 0.

Para este caso, pensemos en -3 y -2 , donde

$$f(-3) = 7.588799919 \quad \text{y} \quad f(-2) = -5.092974268$$

Bisección

Método de bisección

Encontremos el punto medio entre nuestros dos límites con un simple promedio:

$$x_r = \frac{-3 + (-2)}{2} = -2.5$$

Y ahora evaluemos la función en la aproximación: $f(-2.5) = 0.26528$.

Con este nuevo número, ahora revisemos cuánto da la multiplicación de las evaluaciones de este nuevo punto y del límite inferior:

$$f(-3) \cdot f(-2.5) = (7.588799919)(0.26528) = 2.0131$$

Y como este número es positivo, significa que no ocurrió un cambio de signo¹.

¹¿Por qué podemos asumir esto?

Bisección

Método de bisección

Encontremos el punto medio entre nuestros dos límites con un simple promedio:

$$x_r = \frac{-3 + (-2)}{2} = -2.5$$

Y ahora evaluemos la función en la aproximación: $f(-2.5) = 0.26528$.

Con este nuevo número, ahora revisemos cuánto da la multiplicación de las evaluaciones de este nuevo punto y del límite inferior:

$$f(-3) \cdot f(-2.5) = (7.588799919)(0.26528) = 2.0131$$

Y como este número es positivo, significa que no ocurrió un cambio de signo¹.

¹¿Por qué podemos asumir esto?

Bisección

Método de bisección

Encontremos el punto medio entre nuestros dos límites con un simple promedio:

$$x_r = \frac{-3 + (-2)}{2} = -2.5$$

Y ahora evaluemos la función en la aproximación: $f(-2.5) = 0.26528$.

Con este nuevo número, ahora revisemos cuánto da la multiplicación de las evaluaciones de este nuevo punto y del límite inferior:

$$f(-3) \cdot f(-2.5) = (7.588799919)(0.26528) = 2.0131$$

Y como este número es positivo, significa que no ocurrió un cambio de signo¹.

¹¿Por qué podemos asumir esto?

Bisección

Método de bisección

Encontremos el punto medio entre nuestros dos límites con un simple promedio:

$$x_r = \frac{-3 + (-2)}{2} = -2.5$$

Y ahora evaluemos la función en la aproximación: $f(-2.5) = 0.26528$.

Con este nuevo número, ahora revisemos cuánto da la multiplicación de las evaluaciones de este nuevo punto y del límite inferior:

$$f(-3) \cdot f(-2.5) = (7.588799919)(0.26528) = 2.0131$$

Y como este número es positivo, significa que no ocurrió un cambio de signo¹.

¹¿Por qué podemos asumir esto?

Bisección

Método de bisección

Este proceso es conocido como el **método de bisección**. Repetimos el procedimiento:

❶ Bisectamos: $x_r = \frac{-2.5+(-2)}{2} = -2.25$

❷ Evaluamos: $f(-2.25) = -2.7182$

❸ Probamos con límite inferior:

$$f(-2.5) \cdot f(-2.25) = (0.26528)(-2.7182) = -0.72109$$

❹ Revisamos el signo del paso 3. Si es positivo, entonces probamos con el otro límite. Si es negativo, entonces usamos x_r como nuevo límite.

❺ Medimos el error: $\varepsilon_a = \frac{-2.5-(-2.25)}{-2.5} = 0.1$

Y seguiremos repitiendo, hasta que ε_a sea lo suficientemente pequeño.

Bisección

Método de bisección

Este proceso es conocido como el **método de bisección**. Repetimos el procedimiento:

❶ Bisectamos: $x_r = \frac{-2.5+(-2)}{2} = -2.25$

❷ Evaluamos: $f(-2.25) = -2.7182$

❸ Probamos con límite inferior:

$$f(-2.5) \cdot f(-2.25) = (0.26528)(-2.7182) = -0.72109$$

❹ Revisamos el signo del paso 3. Si es positivo, entonces probamos con el otro límite. Si es negativo, entonces usamos x_r como nuevo límite.

❺ Medimos el error: $\varepsilon_a = \frac{-2.5-(-2.25)}{-2.5} = 0.1$

Y seguiremos repitiendo, hasta que ε_a sea lo suficientemente pequeño.

Bisección

Método de bisección

Este proceso es conocido como el **método de bisección**. Repetimos el procedimiento:

❶ Bisectamos: $x_r = \frac{-2.5+(-2)}{2} = -2.25$

❷ Evaluamos: $f(-2.25) = -2.7182$

❸ Probamos con límite inferior:

$$f(-2.5) \cdot f(-2.25) = (0.26528)(-2.7182) = -0.72109$$

❹ Revisamos el signo del paso 3. Si es positivo, entonces probamos con el otro límite. Si es negativo, entonces usamos x_r como nuevo límite.

❺ Medimos el error: $\varepsilon_a = \frac{-2.5-(-2.25)}{-2.5} = 0.1$

Y seguiremos repitiendo, hasta que ε_a sea lo suficientemente pequeño.

Bisección

Método de bisección

Este proceso es conocido como el **método de bisección**. Repetimos el procedimiento:

❶ Bisectamos: $x_r = \frac{-2.5+(-2)}{2} = -2.25$

❷ Evaluamos: $f(-2.25) = -2.7182$

❸ Probamos con límite inferior:

$$f(-2.5) \cdot f(-2.25) = (0.26528)(-2.7182) = -0.72109$$

❹ Revisamos el signo del paso 3. Si es positivo, entonces probamos con el otro límite. Si es negativo, entonces usamos x_r como nuevo límite.

❺ Medimos el error: $\varepsilon_a = \frac{-2.5-(-2.25)}{-2.5} = 0.1$

Y seguiremos repitiendo, hasta que ε_a sea lo suficientemente pequeño.

Bisección

Método de bisección

Este proceso es conocido como el **método de bisección**. Repetimos el procedimiento:

❶ Bisectamos: $x_r = \frac{-2.5 + (-2)}{2} = -2.25$

❷ Evaluamos: $f(-2.25) = -2.7182$

❸ Probamos con límite inferior:

$$f(-2.5) \cdot f(-2.25) = (0.26528)(-2.7182) = -0.72109$$

❹ Revisamos el signo del paso 3. Si es positivo, entonces probamos con el otro límite. Si es negativo, entonces usamos x_r como nuevo límite.

❺ Medimos el error: $\varepsilon_a = \frac{-2.5 - (-2.25)}{-2.5} = 0.1$

Y seguiremos repitiendo, hasta que ε_a sea lo suficientemente pequeño.

Bisección

Método de bisección

Este proceso es conocido como el **método de bisección**. Repetimos el procedimiento:

❶ Bisectamos: $x_r = \frac{-2.5 + (-2)}{2} = -2.25$

❷ Evaluamos: $f(-2.25) = -2.7182$

❸ Probamos con límite inferior:

$$f(-2.5) \cdot f(-2.25) = (0.26528)(-2.7182) = -0.72109$$

❹ Revisamos el signo del paso 3. Si es positivo, entonces probamos con el otro límite. Si es negativo, entonces usamos x_r como nuevo límite.

❺ Medimos el error: $\varepsilon_a = \frac{-2.5 - (-2.25)}{-2.5} = 0.1$

Y seguiremos repitiendo, hasta que ε_a sea lo suficientemente pequeño.

Bisección

Método de bisección

Este proceso es conocido como el **método de bisección**. Repetimos el procedimiento:

❶ Bisectamos: $x_r = \frac{-2.5 + (-2)}{2} = -2.25$

❷ Evaluamos: $f(-2.25) = -2.7182$

❸ Probamos con límite inferior:

$$f(-2.5) \cdot f(-2.25) = (0.26528)(-2.7182) = -0.72109$$

❹ Revisamos el signo del paso 3. Si es positivo, entonces probamos con el otro límite. Si es negativo, entonces usamos x_r como nuevo límite.

❺ Medimos el error: $\varepsilon_a = \frac{-2.5 - (-2.25)}{-2.5} = 0.1$

Y seguiremos repitiendo, hasta que ε_a sea lo suficientemente pequeño.

Convergencia

Falsa Posición

Cuando hablamos de **convergencia**, nos referimos al **momento** en el que se encuentra una *solución aceptable*.

¿Qué tan *rápido* converge el método de la bisección? Pensemos en intervalos de 'mitades'

- 1 El punto medio entre -2 y -3 es -2.5
- 2 El punto medio entre -2 y -2.5 es -2.25
- 3 El punto medio entre -2.25 y -2.5 es -2.375
- 4 El punto medio entre -2.375 y -2.5 es -2.4375
- 5 El punto medio entre -2.4375 y -2.5 es -2.46875
- 6 El punto medio entre -2.46875 y -2.5 es -2.484375
- 7 ...

¿Cuánto hay entre los resultados del paso 1 y el 2? ¿Y entre el 2 y el 3? ¿Y entre el 3 y el 4?

Convergencia

Falsa Posición

Cuando hablamos de **convergencia**, nos referimos al **momento** en el que se encuentra una *solución aceptable*.

¿Qué tan *rápido* converge el método de la bisección? Pensemos en intervalos de 'mitades'

- 1 El punto medio entre -2 y -3 es -2.5
- 2 El punto medio entre -2 y -2.5 es -2.25
- 3 El punto medio entre -2.25 y -2.5 es -2.375
- 4 El punto medio entre -2.375 y -2.5 es -2.4375
- 5 El punto medio entre -2.4375 y -2.5 es -2.46875
- 6 El punto medio entre -2.46875 y -2.5 es -2.484375
- 7 ...

¿Cuánto hay entre los resultados del paso 1 y el 2? ¿Y entre el 2 y el 3? ¿Y entre el 3 y el 4?

Convergencia

Falsa Posición

Cuando hablamos de **convergencia**, nos referimos al **momento** en el que se encuentra una *solución aceptable*.

¿Qué tan *rápido* converge el método de la bisección? Pensemos en intervalos de 'mitades'

- 1 El punto medio entre -2 y -3 es **-2.5**
- 2 El punto medio entre -2 y -2.5 es -2.25
- 3 El punto medio entre -2.25 y -2.5 es -2.375
- 4 El punto medio entre -2.375 y -2.5 es -2.4375
- 5 El punto medio entre -2.4375 y -2.5 es -2.46875
- 6 El punto medio entre -2.46875 y -2.5 es -2.484375
- 7 ...

¿Cuánto hay entre los resultados del paso 1 y el 2? ¿Y entre el 2 y el 3? ¿Y entre el 3 y el 4?

Convergencia

Falsa Posición

Cuando hablamos de **convergencia**, nos referimos al **momento** en el que se encuentra una *solución aceptable*.

¿Qué tan *rápido* converge el método de la bisección? Pensemos en intervalos de 'mitades'

- 1 El punto medio entre -2 y -3 es **-2.5**
- 2 El punto medio entre -2 y -2.5 es **-2.25**
- 3 El punto medio entre -2.25 y -2.5 es -2.375
- 4 El punto medio entre -2.375 y -2.5 es -2.4375
- 5 El punto medio entre -2.4375 y -2.5 es -2.46875
- 6 El punto medio entre -2.46875 y -2.5 es -2.484375
- 7 ...

¿Cuánto hay entre los resultados del paso 1 y el 2? ¿Y entre el 2 y el 3? ¿Y entre el 3 y el 4?

Convergencia

Falsa Posición

Cuando hablamos de **convergencia**, nos referimos al **momento** en el que se encuentra una *solución aceptable*.

¿Qué tan *rápido* converge el método de la bisección? Pensemos en intervalos de 'mitades'

- 1 El punto medio entre -2 y -3 es **-2.5**
- 2 El punto medio entre -2 y -2.5 es **-2.25**
- 3 El punto medio entre -2.25 y -2.5 es **-2.375**
- 4 El punto medio entre -2.375 y -2.5 es -2.4375
- 5 El punto medio entre -2.4375 y -2.5 es -2.46875
- 6 El punto medio entre -2.46875 y -2.5 es -2.484375
- 7 ...

¿Cuánto hay entre los resultados del paso 1 y el 2? ¿Y entre el 2 y el 3? ¿Y entre el 3 y el 4?

Convergencia

Falsa Posición

Cuando hablamos de **convergencia**, nos referimos al **momento** en el que se encuentra una *solución aceptable*.

¿Qué tan *rápido* converge el método de la bisección? Pensemos en intervalos de 'mitades'

- 1 El punto medio entre -2 y -3 es **-2.5**
- 2 El punto medio entre -2 y -2.5 es **-2.25**
- 3 El punto medio entre -2.25 y -2.5 es **-2.375**
- 4 El punto medio entre -2.375 y -2.5 es **-2.4375**
- 5 El punto medio entre -2.4375 y -2.5 es -2.46875
- 6 El punto medio entre -2.46875 y -2.5 es -2.484375
- 7 ...

¿Cuánto hay entre los resultados del paso 1 y el 2? ¿Y entre el 2 y el 3? ¿Y entre el 3 y el 4?

Convergencia

Falsa Posición

Cuando hablamos de **convergencia**, nos referimos al **momento** en el que se encuentra una *solución aceptable*.

¿Qué tan *rápido* converge el método de la bisección? Pensemos en intervalos de 'mitades'

- 1 El punto medio entre -2 y -3 es -2.5
- 2 El punto medio entre -2 y -2.5 es -2.25
- 3 El punto medio entre -2.25 y -2.5 es -2.375
- 4 El punto medio entre -2.375 y -2.5 es -2.4375
- 5 El punto medio entre -2.4375 y -2.5 es -2.46875
- 6 El punto medio entre -2.46875 y -2.5 es -2.484375
- 7 ...

¿Cuánto hay entre los resultados del paso 1 y el 2? ¿Y entre el 2 y el 3? ¿Y entre el 3 y el 4?

Convergencia

Falsa Posición

Cuando hablamos de **convergencia**, nos referimos al **momento** en el que se encuentra una *solución aceptable*.

¿Qué tan *rápido* converge el método de la bisección? Pensemos en intervalos de 'mitades'

- 1 El punto medio entre -2 y -3 es **-2.5**
- 2 El punto medio entre -2 y -2.5 es **-2.25**
- 3 El punto medio entre -2.25 y -2.5 es **-2.375**
- 4 El punto medio entre -2.375 y -2.5 es **-2.4375**
- 5 El punto medio entre -2.4375 y -2.5 es **-2.46875**
- 6 El punto medio entre -2.46875 y -2.5 es **-2.484375**
- 7 ...

¿Cuánto hay entre los resultados del paso 1 y el 2? ¿Y entre el 2 y el 3? ¿Y entre el 3 y el 4?

Convergencia

Falsa Posición

Cuando hablamos de **convergencia**, nos referimos al **momento** en el que se encuentra una *solución aceptable*.

¿Qué tan *rápido* converge el método de la bisección? Pensemos en intervalos de 'mitades'

- 1 El punto medio entre -2 y -3 es **-2.5**
- 2 El punto medio entre -2 y -2.5 es **-2.25**
- 3 El punto medio entre -2.25 y -2.5 es **-2.375**
- 4 El punto medio entre -2.375 y -2.5 es **-2.4375**
- 5 El punto medio entre -2.4375 y -2.5 es **-2.46875**
- 6 El punto medio entre -2.46875 y -2.5 es **-2.484375**
- 7 ...

¿Cuánto hay entre los resultados del paso 1 y el 2? ¿Y entre el 2 y el 3? ¿Y entre el 3 y el 4?

Convergencia

Falsa Posición

Cuando hablamos de **convergencia**, nos referimos al **momento** en el que se encuentra una *solución aceptable*.

¿Qué tan *rápido* converge el método de la bisección? Pensemos en intervalos de 'mitades'

- 1 El punto medio entre -2 y -3 es **-2.5**
- 2 El punto medio entre -2 y -2.5 es **-2.25**
- 3 El punto medio entre -2.25 y -2.5 es **-2.375**
- 4 El punto medio entre -2.375 y -2.5 es **-2.4375**
- 5 El punto medio entre -2.4375 y -2.5 es **-2.46875**
- 6 El punto medio entre -2.46875 y -2.5 es **-2.484375**
- 7 ...

¿Cuánto hay entre los resultados del paso 1 y el 2? ¿Y entre el 2 y el 3? ¿Y entre el 3 y el 4?

Convergencia

Falsa Posición

Cuando hablamos de **convergencia**, nos referimos al **momento** en el que se encuentra una *solución aceptable*.

¿Qué tan *rápido* converge el método de la bisección? Pensemos en intervalos de 'mitades'

- 1 El punto medio entre -2 y -3 es **-2.5**
- 2 El punto medio entre -2 y -2.5 es **-2.25**
- 3 El punto medio entre -2.25 y -2.5 es **-2.375**
- 4 El punto medio entre -2.375 y -2.5 es **-2.4375**
- 5 El punto medio entre -2.4375 y -2.5 es **-2.46875**
- 6 El punto medio entre -2.46875 y -2.5 es **-2.484375**
- 7 ...

¿Cuánto hay entre los resultados del paso 1 y el 2? ¿Y entre el 2 y el 3? ¿Y entre el 3 y el 4?

Convergencia

Falsa Posición

Cuando hablamos de **convergencia**, nos referimos al **momento** en el que se encuentra una *solución aceptable*.

¿Qué tan *rápido* converge el método de la bisección? Pensemos en intervalos de 'mitades'

- 1 El punto medio entre -2 y -3 es **-2.5**
- 2 El punto medio entre -2 y -2.5 es **-2.25**
- 3 El punto medio entre -2.25 y -2.5 es **-2.375**
- 4 El punto medio entre -2.375 y -2.5 es **-2.4375**
- 5 El punto medio entre -2.4375 y -2.5 es **-2.46875**
- 6 El punto medio entre -2.46875 y -2.5 es **-2.484375**
- 7 ...

¿Cuánto hay entre los resultados del paso 1 y el 2? ¿Y entre el 2 y el 3? ¿Y entre el 3 y el 4?

Convergencia

Falsa posición

¿Podemos hacer que converja más rápido?
(*Spoiler alert: sí podemos.*)

El método de la falsa posición

Falsa posición

El método de la **falsa posición** consiste en generar una *raíz falsa*, más cerca de la verdadera raíz que alguno de los dos límites que usamos en el método de bisección.

Usando una línea recta podemos deducir dónde estará nuestra **falsa posición** y luego trabajar con eso:

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

Usando los mismos pasos del algoritmo de bisección, lo único que incorporaremos para mejorar el algoritmo es cambiar el paso de bisección por este nuevo paso y listo.

El método de la falsa posición

Falsa posición

El método de la **falsa posición** consiste en generar una *raíz falsa*, más cerca de la verdadera raíz que alguno de los dos límites que usamos en el método de bisección.

Usando una línea recta podemos deducir dónde estará nuestra **falsa posición** y luego trabajar con eso:

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

Usando los mismos pasos del algoritmo de bisección, lo único que incorporaremos para mejorar el algoritmo es cambiar el paso de bisección por este nuevo paso y listo.

El método de la falsa posición

Falsa posición

El método de la **falsa posición** consiste en generar una *raíz falsa*, más cerca de la verdadera raíz que alguno de los dos límites que usamos en el método de bisección.

Usando una línea recta podemos deducir dónde estará nuestra **falsa posición** y luego trabajar con eso:

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

Usando los mismos pasos del algoritmo de bisección, lo único que incorporaremos para mejorar el algoritmo es cambiar el paso de bisección por este nuevo paso y listo.

Notas sobre los *bracketing methods*

- Tanto el método de la falsa posición como el de la bisección se conocen como **métodos de intervalos** o en inglés, *bracketing methods*.
- El método de la **falsa posición** no siempre es más rápido que el de bisección.
- El tamaño de los '*brincos*' importa:

