

Datos y Matrices
Aplicación de Métodos Numéricos al Ambiente Construido
(CV1012)

Xavier Sánchez Díaz



Outline

- 1 Datos y operaciones
- 2 Estructuras matemáticas
- 3 Operaciones matriciales
- 4 Ejemplos

Tipos de datos

Datos y operaciones

Recordemos los **tipos de datos** con los que podemos trabajar en una computadora:

- Números enteros (*integer numbers*)
- Números decimales (*floating point numbers*)
- Cadenas de caracteres alfanuméricos (*strings*)

En **métodos numéricos** sólo nos preocuparemos por números.

Cuando **operamos** con estos datos, generamos nueva información que podríamos necesitar en el futuro.

Tipos de datos

Datos y operaciones

Recordemos los **tipos de datos** con los que podemos trabajar en una computadora:

- Números enteros (*integer numbers*)
- Números decimales (*floating point numbers*)
- Cadenas de caracteres alfanuméricos (*strings*)

En **métodos numéricos** sólo nos preocuparemos por números.

Cuando **operamos** con estos datos, generamos nueva información que podríamos necesitar en el futuro.

Tipos de datos

Datos y operaciones

Recordemos los **tipos de datos** con los que podemos trabajar en una computadora:

- Números enteros (*integer numbers*)
- Números decimales (*floating point numbers*)
- Cadenas de caracteres alfanuméricos (*strings*)

En **métodos numéricos** sólo nos preocuparemos por números.

Cuando **operamos** con estos datos, generamos nueva información que podríamos necesitar en el futuro.

Tipos de datos

Datos y operaciones

Recordemos los **tipos de datos** con los que podemos trabajar en una computadora:

- Números enteros (*integer numbers*)
- Números decimales (*floating point numbers*)
- Cadenas de caracteres alfanuméricos (*strings*)

En **métodos numéricos** sólo nos preocuparemos por números.

Cuando **operamos** con estos datos, generamos nueva información que podríamos necesitar en el futuro.

Tipos de datos

Datos y operaciones

Recordemos los **tipos de datos** con los que podemos trabajar en una computadora:

- Números enteros (*integer numbers*)
- Números decimales (*floating point numbers*)
- Cadenas de caracteres alfanuméricos (*strings*)

En **métodos numéricos** sólo nos preocuparemos por números.

Cuando **operamos** con estos datos, generamos nueva información que podríamos necesitar en el futuro.

Tipos de datos

Datos y operaciones

Recordemos los **tipos de datos** con los que podemos trabajar en una computadora:

- Números enteros (*integer numbers*)
- Números decimales (*floating point numbers*)
- Cadenas de caracteres alfanuméricos (*strings*)

En **métodos numéricos** sólo nos preocuparemos por números.

Cuando **operamos** con estos datos, generamos nueva información que podríamos necesitar en el futuro.

Tipos de datos

Datos y operaciones

Recordemos los **tipos de datos** con los que podemos trabajar en una computadora:

- Números enteros (*integer numbers*)
- Números decimales (*floating point numbers*)
- Cadenas de caracteres alfanuméricos (*strings*)

En **métodos numéricos** sólo nos preocuparemos por números.

Cuando **operamos** con estos datos, generamos nueva información que podríamos necesitar en el futuro.

Datos como resultados

Datos y operaciones

Antes de usar la computadora o la calculadora para hacer cálculos, solíamos hacer las operaciones a mano.

Por ejemplo, si queremos calcular 1270×35 , una manera de hacerlo podría ser. . .

Datos como resultados

Datos y operaciones

$$1270 \times 35 =$$

$$= (1200 + 70) \times (7)(5)$$

$$= (12)(7)(5)(100) + (7)(7)(5)(10)$$

$$12 \times 5 = 60$$

$$60 \times 7 = 6 \times 7 \times 10 = 420$$

$$420 \times 100 = 42000$$

$$7 \times 7 = 49$$

$$49 \times 10 = 490$$

$$490 \times 5 = 490 \times 10/2 = 2450$$

$$42000 + 2450 = 44450 \quad \square$$

Datos como resultados

Datos y operaciones

$$\begin{aligned}1270 \times 35 &= \\&= (1200 + 70) \times (7)(5) \\&= (12)(7)(5)(100) + (7)(7)(5)(10)\end{aligned}$$

$$12 \times 5 = 60$$

$$60 \times 7 = 6 \times 7 \times 10 = 420$$

$$420 \times 100 = 42000$$

$$7 \times 7 = 49$$

$$49 \times 10 = 490$$

$$490 \times 5 = 490 \times 10/2 = 2450$$

$$42000 + 2450 = 44450 \quad \square$$

Datos como resultados

Datos y operaciones

$$\begin{aligned}1270 \times 35 &= \\&= (1200 + 70) \times (7)(5) \\&= (12)(7)(5)(100) + (7)(7)(5)(10)\end{aligned}$$

$$12 \times 5 = 60$$

$$60 \times 7 = 6 \times 7 \times 10 = 420$$

$$420 \times 100 = 42000$$

$$7 \times 7 = 49$$

$$49 \times 10 = 490$$

$$490 \times 5 = 490 \times 10/2 = 2450$$

$$42000 + 2450 = 44450 \quad \square$$

Datos como resultados

Datos y operaciones

$$\begin{aligned}1270 \times 35 &= \\&= (1200 + 70) \times (7)(5) \\&= (\textcolor{red}{12})(7)(\textcolor{red}{5})(100) + (7)(7)(5)(10)\end{aligned}$$

$$\textcolor{red}{12} \times \textcolor{red}{5} = 60$$

$$60 \times 7 = 6 \times 7 \times 10 = 420$$

$$420 \times 100 = 42000$$

$$7 \times 7 = 49$$

$$49 \times 10 = 490$$

$$490 \times 5 = 490 \times 10/2 = 2450$$

$$42000 + 2450 = 44450 \quad \square$$

Datos como resultados

Datos y operaciones

$$\begin{aligned}1270 \times 35 &= \\&= (1200 + 70) \times (7)(5) \\&= (12)(\textcolor{red}{7})(5)(100) + (7)(7)(5)(10)\end{aligned}$$

$$12 \times 5 = \textcolor{red}{60}$$

$$\textcolor{red}{60} \times \textcolor{red}{7} = 6 \times 7 \times 10 = 420$$

$$420 \times 100 = 42000$$

$$7 \times 7 = 49$$

$$49 \times 10 = 490$$

$$490 \times 5 = 490 \times 10/2 = 2450$$

$$42000 + 2450 = 44450 \quad \square$$

Datos como resultados

Datos y operaciones

$$\begin{aligned}1270 \times 35 &= \\&= (1200 + 70) \times (7)(5) \\&= (12)(\textcolor{red}{7})(5)(100) + (7)(7)(5)(10)\end{aligned}$$

$$12 \times 5 = \textcolor{red}{60}$$

$$\textcolor{red}{60} \times \textcolor{red}{7} = \textcolor{red}{6} \times \textcolor{red}{7} \times \textcolor{red}{10} = 420$$

$$420 \times 100 = 42000$$

$$7 \times 7 = 49$$

$$49 \times 10 = 490$$

$$490 \times 5 = 490 \times 10/2 = 2450$$

$$42000 + 2450 = 44450 \quad \square$$

Datos como resultados

Datos y operaciones

$$\begin{aligned}1270 \times 35 &= \\&= (1200 + 70) \times (7)(5) \\&= (12)(7)(5)(\textcolor{red}{100}) + (7)(7)(5)(10)\end{aligned}$$

$$12 \times 5 = 60$$

$$60 \times 7 = 6 \times 7 \times 10 = \textcolor{red}{420}$$

$$\textcolor{red}{420} \times \textcolor{red}{100} = 42000$$

$$7 \times 7 = 49$$

$$49 \times 10 = 490$$

$$490 \times 5 = 490 \times 10/2 = 2450$$

$$42000 + 2450 = 44450 \quad \square$$

Datos como resultados

Datos y operaciones

$$\begin{aligned}1270 \times 35 &= \\&= (1200 + 70) \times (7)(5) \\&= (12)(7)(5)(100) + (\textcolor{red}{7})(\textcolor{red}{7})(5)(10)\end{aligned}$$

$$12 \times 5 = 60$$

$$60 \times 7 = 6 \times 7 \times 10 = 420$$

$$420 \times 100 = 42000$$

$$\textcolor{red}{7} \times \textcolor{red}{7} = 49$$

$$49 \times 10 = 490$$

$$490 \times 5 = 490 \times 10/2 = 2450$$

$$42000 + 2450 = 44450 \quad \square$$

Datos como resultados

Datos y operaciones

$$\begin{aligned}1270 \times 35 &= \\&= (1200 + 70) \times (7)(5) \\&= (12)(7)(5)(100) + (7)(7)(5)(\textcolor{red}{10})\end{aligned}$$

$$12 \times 5 = 60$$

$$60 \times 7 = 6 \times 7 \times 10 = 420$$

$$420 \times 100 = 42000$$

$$7 \times 7 = \textcolor{red}{49}$$

$$\textcolor{red}{49} \times \textcolor{red}{10} = 490$$

$$490 \times 5 = 490 \times 10/2 = 2450$$

$$42000 + 2450 = 44450 \quad \square$$

Datos como resultados

Datos y operaciones

$$\begin{aligned}1270 \times 35 &= \\&= (1200 + 70) \times (7)(5) \\&= (12)(7)(5)(100) + (7)(7)(\textcolor{red}{5})(10)\end{aligned}$$

$$12 \times 5 = 60$$

$$60 \times 7 = 6 \times 7 \times 10 = 420$$

$$420 \times 100 = 42000$$

$$7 \times 7 = 49$$

$$49 \times 10 = \textcolor{red}{490}$$

$$\textcolor{red}{490} \times \textcolor{red}{5} = \textcolor{red}{490} \times \textcolor{red}{10/2} = 2450$$

$$42000 + 2450 = 44450 \quad \square$$

Datos como resultados

Datos y operaciones

$$\begin{aligned}1270 \times 35 &= \\&= (1200 + 70) \times (7)(5) \\&= (12)(7)(5)(100) + (7)(7)(5)(10)\end{aligned}$$

$$12 \times 5 = 60$$

$$60 \times 7 = 6 \times 7 \times 10 = 420$$

$$420 \times 100 = 42000$$

$$7 \times 7 = 49$$

$$49 \times 10 = 490$$

$$490 \times 5 = 490 \times 10/2 = 2450$$

$$42000 + 2450 = 44450 \quad \square$$

Datos como resultados

Datos y operaciones

La operación completa se hace poco a poco, y por tanto necesitamos “recordar” ciertos pasos intermedios que ya tenemos calculados.

Así como nosotros tenemos que tener en claro cuáles son esos pasos intermedios, la computadora debe saber *dónde está* la información que tiene que leer para trabajar y hacer cálculos más elaborados.

Para eso, podemos usar las estructuras de datos, para **ordenarlos** de manera conveniente y poder tener acceso a ellos de manera que se vayan necesitando.

Datos como resultados

Datos y operaciones

La operación completa se hace poco a poco, y por tanto necesitamos “recordar” ciertos pasos intermedios que ya tenemos calculados.

Así como nosotros tenemos que tener en claro cuáles son esos pasos intermedios, la computadora debe saber *dónde está* la información que tiene que leer para trabajar y hacer cálculos más elaborados.

Para eso, podemos usar las estructuras de datos, para **ordenarlos** de manera conveniente y poder tener acceso a ellos de manera que se vayan necesitando.

Datos como resultados

Datos y operaciones

La operación completa se hace poco a poco, y por tanto necesitamos “recordar” ciertos pasos intermedios que ya tenemos calculados.

Así como nosotros tenemos que tener en claro cuáles son esos pasos intermedios, la computadora debe saber *dónde está* la información que tiene que leer para trabajar y hacer cálculos más elaborados.

Para eso, podemos usar las estructuras de datos, para **ordenarlos** de manera conveniente y poder tener acceso a ellos de manera que se vayan necesitando.

Variables

Estructuras matemáticas

La forma más simple de guardar **un solo dato** es usando una **variable**.

En álgebra, hemos usado estas *variables* para expresar qué hace una función y saber su resultado:

$$2y = 2x + 5z + 6$$

- x es una variable que tiene algún valor que no conocemos en este momento
- y es otra variable (porque tiene distinto nombre) y tampoco sabemos su valor ahora, pero sabemos cómo calcularla
- z es otra variable más (porque tiene otro nombre distinto a los dos anteriores)

Variables

Estructuras matemáticas

La forma más simple de guardar **un solo dato** es usando una **variable**. En álgebra, hemos usado estas *variables* para expresar qué hace una función y saber su resultado:

$$2y = 2x + 5z + 6$$

- x es una variable que tiene algún valor que no conocemos en este momento
- y es otra variable (porque tiene distinto nombre) y tampoco sabemos su valor ahora, pero sabemos cómo calcularla
- z es otra variable más (porque tiene otro nombre distinto a los dos anteriores)

Variables

Estructuras matemáticas

La forma más simple de guardar **un solo dato** es usando una **variable**. En álgebra, hemos usado estas *variables* para expresar qué hace una función y saber su resultado:

$$2y = 2x + 5z + 6$$

- x es una variable que tiene algún valor que no conocemos en este momento
- y es otra variable (porque tiene distinto nombre) y tampoco sabemos su valor ahora, pero sabemos cómo calcularla
- z es otra variable más (porque tiene otro nombre distinto a los dos anteriores)

Variables

Estructuras matemáticas

La forma más simple de guardar **un solo dato** es usando una **variable**. En álgebra, hemos usado estas *variables* para expresar qué hace una función y saber su resultado:

$$2y = 2x + 5z + 6$$

- x es una variable que tiene algún valor que no conocemos en este momento
- y es otra variable (porque tiene distinto nombre) y tampoco sabemos su valor ahora, pero sabemos cómo calcularla
- z es otra variable más (porque tiene otro nombre distinto a los dos anteriores)

Variables

Estructuras matemáticas

La forma más simple de guardar **un solo dato** es usando una **variable**. En álgebra, hemos usado estas *variables* para expresar qué hace una función y saber su resultado:

$$2y = 2x + 5z + 6$$

- x es una variable que tiene algún valor que no conocemos en este momento
- y es otra variable (porque tiene distinto nombre) y tampoco sabemos su valor ahora, pero sabemos cómo calcularla
- z es otra variable más (porque tiene otro nombre distinto a los dos anteriores)

Variables

Estructuras matemáticas

La forma más simple de guardar **un solo dato** es usando una **variable**. En álgebra, hemos usado estas *variables* para expresar qué hace una función y saber su resultado:

$$2y = 2x + 5z + 6$$

- x es una variable que tiene algún valor que no conocemos en este momento
- y es otra variable (porque tiene distinto nombre) y tampoco sabemos su valor ahora, pero sabemos cómo calcularla
- z es otra variable más (porque tiene otro nombre distinto a los dos anteriores)

Variables

Estructuras matemáticas

$$2y = 2x + 5z + 6$$

Si ahora le damos valor a x y z , por ejemplo, $x = 3$ y $z = 2 \dots$

- x guarda el valor de 3
- y guarda la mitad de $2(3) + 5(2) + 6$.

Variables

Estructuras matemáticas

$$2y = 2x + 5z + 6$$

Si ahora le damos valor a x y z , por ejemplo, $x = 3$ y $z = 2 \dots$

- x guarda el valor de 3
- y guarda **la mitad** de $2(3) + 5(2) + 6$.

Variables

Estructuras matemáticas

$$2y = 2x + 5z + 6$$

Si ahora le damos valor a x y z , por ejemplo, $x = 3$ y $z = 2 \dots$

- x guarda el valor de 3
- y guarda **la mitad** de $2(3) + 5(2) + 6$.

Arreglos

Estructuras matemáticas

Asumamos que quiero saber las calificaciones de las Tareas 1, 2 y 3 de uno de mis alumnos. Para esto, necesitaría un lugar para guardar esos **3 datos**:

- $t_1 = 90$ será la variable para la Tarea 1
- $t_2 = 75$ será la variable para la Tarea 2
- $t_3 = 87$ será la variable para la Tarea 3

Con esta información, ahora contesta:

- ¿Cuál fue la calificación para la Tarea 2?
- ¿Cuál fue el promedio del alumno?
- ¿Cuál es la tarea en la que mejor le fue?

Arreglos

Estructuras matemáticas

Asumamos que quiero saber las calificaciones de las Tareas 1, 2 y 3 de uno de mis alumnos. Para esto, necesitaría un lugar para guardar esos **3 datos**:

- $t_1 = 90$ será la variable para la Tarea 1
- $t_2 = 75$ será la variable para la Tarea 2
- $t_3 = 87$ será la variable para la Tarea 3

Con esta información, ahora contesta:

- ¿Cuál fue la calificación para la Tarea 2?
- ¿Cuál fue el promedio del alumno?
- ¿Cuál es la tarea en la que mejor le fue?

Arreglos

Estructuras matemáticas

Asumamos que quiero saber las calificaciones de las Tareas 1, 2 y 3 de uno de mis alumnos. Para esto, necesitaría un lugar para guardar esos **3 datos**:

- $t_1 = 90$ será la variable para la Tarea 1
- $t_2 = 75$ será la variable para la Tarea 2
- $t_3 = 87$ será la variable para la Tarea 3

Con esta información, ahora contesta:

- ¿Cuál fue la calificación para la Tarea 2?
- ¿Cuál fue el promedio del alumno?
- ¿Cuál es la tarea en la que mejor le fue?

Arreglos

Estructuras matemáticas

Asumamos que quiero saber las calificaciones de las Tareas 1, 2 y 3 de uno de mis alumnos. Para esto, necesitaría un lugar para guardar esos **3 datos**:

- $t_1 = 90$ será la variable para la Tarea 1
- $t_2 = 75$ será la variable para la Tarea 2
- $t_3 = 87$ será la variable para la Tarea 3

Con esta información, ahora contesta:

- ¿Cuál fue la calificación para la Tarea 2?
- ¿Cuál fue el promedio del alumno?
- ¿Cuál es la tarea en la que mejor le fue?

Arreglos

Estructuras matemáticas

Asumamos que quiero saber las calificaciones de las Tareas 1, 2 y 3 de uno de mis alumnos. Para esto, necesitaría un lugar para guardar esos **3 datos**:

- $t_1 = 90$ será la variable para la Tarea 1
- $t_2 = 75$ será la variable para la Tarea 2
- $t_3 = 87$ será la variable para la Tarea 3

Con esta información, ahora contesta:

- ¿Cuál fue la calificación para la Tarea 2?
- ¿Cuál fue el promedio del alumno?
- ¿Cuál es la tarea en la que mejor le fue?

Arreglos

Estructuras matemáticas

Asumamos que quiero saber las calificaciones de las Tareas 1, 2 y 3 de uno de mis alumnos. Para esto, necesitaría un lugar para guardar esos **3 datos**:

- $t_1 = 90$ será la variable para la Tarea 1
- $t_2 = 75$ será la variable para la Tarea 2
- $t_3 = 87$ será la variable para la Tarea 3

Con esta información, ahora contesta:

- ¿Cuál fue la calificación para la Tarea 2?
- ¿Cuál fue el promedio del alumno?
- ¿Cuál es la tarea en la que mejor le fue?

Arreglos

Estructuras matemáticas

Asumamos que quiero saber las calificaciones de las Tareas 1, 2 y 3 de uno de mis alumnos. Para esto, necesitaría un lugar para guardar esos **3 datos**:

- $t_1 = 90$ será la variable para la Tarea 1
- $t_2 = 75$ será la variable para la Tarea 2
- $t_3 = 87$ será la variable para la Tarea 3

Con esta información, ahora contesta:

- ¿Cuál fue la calificación para la Tarea 2?
- ¿Cuál fue el promedio del alumno?
- ¿Cuál es la tarea en la que mejor le fue?

Arreglos

Estructuras matemáticas

La pregunta ahora es... ¿Realmente necesito **3 variables** para guardar **3 datos**? Podemos *arreglar* los datos de tal manera que **su posición** nos aporte algo más:

$$t = \langle 90, 75, 87 \rangle$$

La **posición** en esta *lista ordenada* nos indica qué número de tarea fue, y el valor que haya en dicha posición guarda la calificación. Por lo mismo, podemos usar “una sola variable” para guardar de manera ordenada la información requerida, y referirnos sólo a la posición deseada:

$$t_2 = 75$$

Arreglos

Estructuras matemáticas

La pregunta ahora es... ¿Realmente necesito **3 variables** para guardar **3 datos**? Podemos *arreglar* los datos de tal manera que **su posición** nos aporte algo más:

$$\mathbf{t} = \langle 90, 75, 87 \rangle$$

La **posición** en esta *lista ordenada* nos indica qué número de tarea fue, y el valor que haya en dicha posición guarda la calificación. Por lo mismo, podemos usar “una sola variable” para guardar de manera ordenada la información requerida, y referirnos sólo a la posición deseada:

$$t_2 = 75$$

Arreglos

Estructuras matemáticas

La pregunta ahora es... ¿Realmente necesito **3 variables** para guardar **3 datos**? Podemos *arreglar* los datos de tal manera que **su posición** nos aporte algo más:

$$\mathbf{t} = \langle 90, 75, 87 \rangle$$

La **posición** en esta *lista ordenada* nos indica qué número de tarea fue, y el valor que haya en dicha posición guarda la calificación. Por lo mismo, podemos usar “una sola variable” para guardar de manera ordenada la información requerida, y referirnos sólo a la posición deseada:

$$\mathbf{t}_2 = 75$$

Arreglos

Estructuras matemáticas

Cuando *arreglamos* los datos para usarlos de manera lineal, estamos creando una **lista**.

$$\mathbf{x} = \langle 1, 2, 10, 23, 2, -1, 70, 15 \rangle$$

- Usamos **negritas** para denotar la diferencia entre la variable x que guarda un valor, y la variable \mathbf{x} que guarda **múltiples valores**
- Usamos *angle brackets* (*cuñas* les dicen en español) para delimitar la lista de sus valores
- A diferencia de un conjunto, el orden de los valores **sí importa**

Arreglos

Estructuras matemáticas

Cuando *arreglamos* los datos para usarlos de manera lineal, estamos creando una **lista**.

$$\mathbf{x} = \langle 1, 2, 10, 23, 2, -1, 70, 15 \rangle$$

- Usamos negritas para denotar la diferencia entre la variable x que guarda un valor, y la variable \mathbf{x} que guarda **múltiples** valores
- Usamos *angle brackets* (*cuñas* les dicen en español) para delimitar la lista de sus valores
- A diferencia de un conjunto, el orden de los valores **sí importa**

Arreglos

Estructuras matemáticas

Cuando *arreglamos* los datos para usarlos de manera lineal, estamos creando una **lista**.

$$\mathbf{x} = \langle 1, 2, 10, 23, 2, -1, 70, 15 \rangle$$

- Usamos negritas para denotar la diferencia entre la variable x que guarda un valor, y la variable \mathbf{x} que guarda **múltiples** valores
- Usamos *angle brackets* (*cuñas* les dicen en español) para delimitar la lista de sus valores
- A diferencia de un conjunto, el orden de los valores **sí importa**

Arreglos

Estructuras matemáticas

Cuando *arreglamos* los datos para usarlos de manera lineal, estamos creando una **lista**.

$$\mathbf{x} = \langle 1, 2, 10, 23, 2, -1, 70, 15 \rangle$$

- Usamos negritas para denotar la diferencia entre la variable x que guarda un valor, y la variable \mathbf{x} que guarda **múltiples** valores
- Usamos *angle brackets* (*cuñas* les dicen en español) para delimitar la lista de sus valores
- A diferencia de un conjunto, el orden de los valores **sí importa**

Matrices

Estructuras matemáticas

Supongamos que ahora necesito saber las calificaciones de las tres tareas, pero ahora de **varios alumnos**.

Esto significa que ahora necesitamos **varias listas**, pero en su lugar podemos *arreglar* los datos como **una secuencia de tareas** (*la tarea 1, la tarea 2...*).

A su vez, cada una de las tareas tiene una **secuencia de alumnos** (*el alumno 1, el alumno 2...*)

alumno₁

alumno₂

alumno₃

alumno₄

$$\begin{bmatrix} 90 & 75 & 87 \\ 100 & 100 & 95 \\ 90 & 70 & 88 \\ 85 & 65 & 50 \end{bmatrix}$$

Matrices

Estructuras matemáticas

Supongamos que ahora necesito saber las calificaciones de las tres tareas, pero ahora de **varios alumnos**.

Esto significa que ahora necesitamos **varias listas**, pero en su lugar podemos *arreglar* los datos como **una secuencia de tareas** (*la tarea 1, la tarea 2...*). A su vez, cada una de las tareas tiene una **secuencia de alumnos** (*el alumno 1, el alumno 2...*)

alumno₁

alumno₂

alumno₃

alumno₄

$$\begin{bmatrix} 90 & 75 & 87 \\ 100 & 100 & 95 \\ 90 & 70 & 88 \\ 85 & 65 & 50 \end{bmatrix}$$

Matrices

Estructuras matemáticas

Supongamos que ahora necesito saber las calificaciones de las tres tareas, pero ahora de **varios alumnos**.

Esto significa que ahora necesitamos **varias listas**, pero en su lugar podemos *arreglar* los datos como **una secuencia de tareas** (*la tarea 1, la tarea 2...*). A su vez, cada una de las tareas tiene una **secuencia de alumnos** (*el alumno 1, el alumno 2...*)

<i>alumno₁</i>	90	75	87
<i>alumno₂</i>	100	100	95
<i>alumno₃</i>	90	70	88
<i>alumno₄</i>	85	65	50

Matrices

Estructuras matemáticas

$$A = \begin{bmatrix} 90 & 75 & 87 \\ 100 & 100 & 95 \\ 90 & 70 & 88 \\ 85 & 65 & 50 \end{bmatrix}$$

- Una **matriz** es una lista de columnas
- Solemos usar mayúsculas para los nombres de las matrices
- En este caso, A tiene 4 renglones y 3 columnas, es decir que es de 4×3
- El renglón A_2 es $\langle 100, 100, 95 \rangle$
- El elemento $A_{3,2}$ es 70

Matrices

Estructuras matemáticas

$$A = \begin{bmatrix} 90 & 75 & 87 \\ 100 & 100 & 95 \\ 90 & 70 & 88 \\ 85 & 65 & 50 \end{bmatrix}$$

- Una **matriz** es una lista de columnas
- Solemos usar mayúsculas para los nombres de las matrices
- En este caso, A tiene 4 renglones y 3 columnas, es decir que es de 4×3
- El renglón A_2 es $\langle 100, 100, 95 \rangle$
- El elemento $A_{3,2}$ es 70

Matrices

Estructuras matemáticas

$$A = \begin{bmatrix} 90 & 75 & 87 \\ 100 & 100 & 95 \\ 90 & 70 & 88 \\ 85 & 65 & 50 \end{bmatrix}$$

- Una **matriz** es una lista de columnas
- Solemos usar mayúsculas para los nombres de las matrices
- En este caso, A tiene 4 renglones y 3 columnas, es decir que es de 4×3
- El renglón A_2 es $\langle 100, 100, 95 \rangle$
- El elemento $A_{3,2}$ es 70

Matrices

Estructuras matemáticas

$$A = \begin{bmatrix} 90 & 75 & 87 \\ 100 & 100 & 95 \\ 90 & 70 & 88 \\ 85 & 65 & 50 \end{bmatrix}$$

- Una **matriz** es una lista de columnas
- Solemos usar mayúsculas para los nombres de las matrices
- En este caso, A tiene 4 renglones y 3 columnas, es decir que es de 4×3
- El renglón A_2 es $\langle 100, 100, 95 \rangle$
- El elemento $A_{3,2}$ es 70

Matrices

Estructuras matemáticas

$$A = \begin{bmatrix} 90 & 75 & 87 \\ 100 & 100 & 95 \\ 90 & 70 & 88 \\ 85 & 65 & 50 \end{bmatrix}$$

- Una **matriz** es una lista de columnas
- Solemos usar mayúsculas para los nombres de las matrices
- En este caso, A tiene 4 renglones y 3 columnas, es decir que es de 4×3
- El renglón A_2 es $\langle 100, 100, 95 \rangle$
- El elemento $A_{3,2}$ es 70

Matrices

Estructuras matemáticas

Cuando una matriz es de $1 \times n$ es una matriz **renglón**:

$$B = [100 \quad 95 \quad 89 \quad 92]$$

Cuando una matriz es de $n \times 1$ es una matriz **columna** o **vector**:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 100 \\ 91 \\ 95 \\ 98 \\ 85 \end{bmatrix}$$

Matrices

Estructuras matemáticas

Cuando una matriz es de $1 \times n$ es una matriz **renglón**:

$$B = [100 \quad 95 \quad 89 \quad 92]$$

Cuando una matriz es de $n \times 1$ es una matriz **columna** o **vector**:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 100 \\ 91 \\ 95 \\ 98 \\ 85 \end{bmatrix}$$

Matrices

Estructuras matemáticas

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 2 & 4 \\ -2 & 8 & 20 & 7 \\ 1 & 5 & 13 & 14 \\ 20 & 4 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

- La **diagonal principal** hace referencia a cada elemento a_{ii}
- Si todo **abajo** de la diagonal principal es 0, entonces le llamamos matriz triangular superior
- Si todo **arriba** de la diagonal principal es 0, entonces le llamamos matriz triangular inferior

Matrices

Estructuras matemáticas

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & 20 & 7 \\ 0 & 0 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

- La diagonal principal hace referencia a cada elemento a_{ii}
- Si todo **abajo** de la diagonal principal es 0, entonces le llamamos **matriz triangular superior**
- Si todo **arriba** de la diagonal principal es 0, entonces le llamamos **matriz triangular inferior**

Matrices

Estructuras matemáticas

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 13 & 0 \\ 20 & 4 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

- La diagonal principal hace referencia a cada elemento a_{ii}
- Si todo **abajo** de la diagonal principal es 0, entonces le llamamos matriz triangular superior
- Si todo **arriba** de la diagonal principal es 0, entonces le llamamos **matriz triangular inferior**

¿Y qué puedo hacer con las matrices?

Operaciones matriciales

Podemos **sumar dos matrices** si tienen **las mismas dimensiones**:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 2 & 9 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 & 0 \\ 7 & -2 & 8 & 5 \\ 1 & 3 & -8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 5 & 4 \\ 7 & 5 & 10 & 14 \\ 3 & 5 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Suma de Matrices

Operaciones matriciales

En general ...

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & \dots & a_{ij} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & \dots & b_{1j} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & \dots & \dots & b_{ij} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & \dots & a_{1j} + b_{1j} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & \dots & \dots & a_{ij} + b_{ij} \end{bmatrix}$$

Producto por un escalar

Operaciones matriciales

Podemos **multiplicar** la matriz **por un escalar** (o sea, una cantidad):

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \\ 18 & 20 & 22 & 24 \\ 26 & 28 & 30 & 32 \end{bmatrix}$$

En este caso, estamos **escalando** la matriz por 2. ¿Qué pasa si multiplicamos por $\frac{2}{3}$?

Producto por escalar

Operaciones matriciales

En general...

$$c \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & \dots & a_{ij} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ca_{11} & \dots & \dots & ca_{1j} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ ca_{i1} & \dots & \dots & ca_{ij} \end{bmatrix}$$

Producto matricial

Operaciones matriciales

Para multiplicar dos matrices (ya sea **matriz por vector**, o **matriz por matriz**), es necesario que el **número de renglones** de *la primera* **coincida** con el **número de columnas** de *la segunda*.

La matriz resultante tendrá el **mismo número de renglones** de *la primera* y el **mismo número de columnas** que *la segunda*.

Una manera fácil de recordar

Si A tiene dimensiones 2×3 y B tiene dimensiones de $3 \times 3 \dots$

$$(2 \times 3) \times (3 \times 3)$$

\dots entonces **sí se pueden multiplicar** y el resultado tendrá **dimensiones 2×3**

Producto matricial

Operaciones matriciales

Para multiplicar dos matrices (ya sea **matriz por vector**, o **matriz por matriz**), es necesario que el **número de renglones** de *la primera* **coincida** con el **número de columnas** de *la segunda*.

La matriz resultante tendrá el **mismo número de renglones** de *la primera* y el **mismo número de columnas** que *la segunda*.

Una manera fácil de recordar

Si A tiene dimensiones 2×3 y B tiene dimensiones de $3 \times 3 \dots$

$$(2 \times 3) \times (3 \times 3)$$

\dots entonces **sí se pueden multiplicar** y el resultado tendrá **dimensiones 2×3**

Producto matricial

Operaciones matriciales

Para multiplicar dos matrices (ya sea **matriz por vector**, o **matriz por matriz**), es necesario que el **número de renglones** de *la primera* **coincida** con el **número de columnas** de *la segunda*.

La matriz resultante tendrá el **mismo número de renglones** de *la primera* y el **mismo número de columnas** que *la segunda*.

Una manera fácil de recordar

Si A tiene dimensiones 2×3 y B tiene dimensiones de $3 \times 3 \dots$

$$(2 \times 3) \times (3 \times 3)$$

\dots entonces **sí se pueden multiplicar** y el resultado tendrá **dimensiones 2×3**

Matriz por vector

Operaciones matriciales

El resultado se obtiene sumando las multiplicaciones de **cada una de las columnas** de la primera, por **cada una de las filas** de la segunda.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(-4) + (0)(5) + (-1)(-7) \\ (3)(-4) + (4)(5) + (-2)(-7) \end{bmatrix}$$

Matriz por vector

Operaciones matriciales

El resultado se obtiene sumando las multiplicaciones de **cada una de las columnas** de la primera, por **cada una de las filas** de la segunda.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(-4) + (0)(5) + (-1)(-7) \\ (3)(-4) + (4)(5) + (-2)(-7) \end{bmatrix}$$

Matriz por vector

Operaciones matriciales

El resultado se obtiene sumando las multiplicaciones de **cada una de las columnas** de la primera, por **cada una de las filas** de la segunda.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(-4) + (0)(5) + (-1)(-7) \\ (3)(-4) + (4)(5) + (-2)(-7) \end{bmatrix}$$

Matriz por vector

Operaciones matriciales

El resultado se obtiene sumando las multiplicaciones de **cada una de las columnas** de la primera, por **cada una de las filas** de la segunda.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(-4) + (0)(5) + (-1)(-7) \\ (3)(-4) + (4)(5) + (-2)(-7) \end{bmatrix}$$

Matriz por vector

Operaciones matriciales

El resultado se obtiene sumando las multiplicaciones de **cada una de las columnas** de la primera, por **cada una de las filas** de la segunda.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ \color{red}{3} & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \color{red}{-4} \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(-4) + (0)(5) + (-1)(-7) \\ \color{red}{(3)(-4)} + (4)(5) + (-2)(-7) \end{bmatrix}$$

Matriz por vector

Operaciones matriciales

El resultado se obtiene sumando las multiplicaciones de **cada una de las columnas** de la primera, por **cada una de las filas** de la segunda.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(-4) + (0)(5) + (-1)(-7) \\ (3)(-4) + (4)(5) + (-2)(-7) \end{bmatrix}$$

Matriz por vector

Operaciones matriciales

El resultado se obtiene sumando las multiplicaciones de **cada una de las columnas** de la primera, por **cada una de las filas** de la segunda.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(-4) + (0)(5) + (-1)(-7) \\ (3)(-4) + (4)(5) + (-2)(-7) \end{bmatrix}$$

Matriz por vector

Operaciones matriciales

El resultado se obtiene sumando las multiplicaciones de **cada una de las columnas** de la primera, por **cada una de las filas** de la segunda.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(-4) + (0)(5) + (-1)(-7) \\ (3)(-4) + (4)(5) + (-2)(-7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8 + 0 + 7 \\ -12 + 20 + 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Matriz por vector

Operaciones matriciales

El resultado se obtiene sumando las multiplicaciones de **cada una de las filas** de la primera, por **cada una de las filas** de la segunda; elemento por elemento.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(-4) + (0)(5) + (-1)(-7) \\ (3)(-4) + (4)(5) + (-2)(-7) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -8 + 0 + 7 \\ -12 + 20 + 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Matriz por vector

Operaciones matriciales

También podemos verlo como una reducción de multiplicaciones escalares (y es más sencillo de visualizar):

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Matriz por matriz

Operaciones matriciales

Para el caso de matriz por matriz, la idea es la misma.

El resultado de AB es la **combinación lineal** de A por cada una de las columnas de B , $AB = [Ab_1 \dots Ab_k]$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

¿Se pueden multiplicar? ¿De qué tamaño será la matriz resultante?

Matriz por matriz

Operaciones matriciales

Para el caso de matriz por matriz, la idea es la misma.

El resultado de AB es la **combinación lineal** de A por cada una de las columnas de B , $AB = [Ab_1 \dots Ab_k]$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

¿Se pueden multiplicar? ¿De qué tamaño será la matriz resultante?

Matriz por matriz

Operaciones matriciales

Para el caso de matriz por matriz, la idea es la misma.

El resultado de AB es la **combinación lineal** de A por cada una de las columnas de B , $AB = [Ab_1 \dots Ab_k]$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

¿Se pueden multiplicar? ¿De qué tamaño será la matriz resultante?

Matriz por matriz

Operaciones matriciales

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

A por primera columna de B :

$$A\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Matriz por matriz

Operaciones matriciales

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

A por segunda columna de B :

$$A\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Matriz por matriz

Operaciones matriciales

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

A por tercera columna de B :

$$A\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Matriz por matriz

Operaciones matriciales

El resultado es entonces todas las columnas resultantes, una después de la otra:

$$AB = [A\mathbf{b}_1 \ A\mathbf{b}_2 \ A\mathbf{b}_3] = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 6 \\ 4 & 14 & 9 \end{bmatrix}$$

Ensamblando Robots

Ejemplos

IntelliCorp produce dos tipos de procesadores, el x230 y el x260 para sus robots.

Para poder fabricarlos, se necesita **silicio**, **cobre** y **aluminio**.

El x230 usa 4, 3 y 5 láminas, respectivamente, mientras que el x260 usa 5, 2 y 6 placas.

Acaba de llegar un pedido del área de manufactura solicitando 10 procesadores tipo x230 y 21 de tipo x260 para el sistema óptico del *Spade VIII*.

¿Cuánta materia prima necesita *Intellicorp* para cumplir con el pedido?

Visualizando la información

Ensamblando Robots

El pedido es de 10 x230 y 21 x260, y los requerimientos son:

	x230	x260
Si	4	5
Cu	3	2
Al	5	6

Es decir $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 21 \end{bmatrix}$.

Visualizando la información

Ensamblando Robots

El pedido es de 10 x230 y 21 x260, y los requerimientos son:

	x230	x260
Si	4	5
Cu	3	2
Al	5	6

Es decir $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 21 \end{bmatrix}$.

Manos a la obra

Ensamblando robots

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 21 \end{bmatrix} &= 10 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 21 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 105 \\ 42 \\ 126 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 145 \\ 72 \\ 176 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Significa que necesitamos 145 placas de silicio, 72 placas de cobre y 176 placas de aluminio ■

Sistemas de visión

Ensamblando Robots

El *Spade VIII* es un robot caza. Sin embargo, los modelos más sencillos como el *Apis IV* y el *Myxini II* utilizan menos procesadores x230 y x260 para funcionar. Específicamente:

	Apis IV	Myxini II
x230	8	2
x260	3	4

Si queremos hacer sistemas de visión para 11 *Apis IV* y 20 *Myxini II*, ¿Cuántos procesadores de cada tipo necesito?

Sistemas de visión

Ensamblando Robots

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 20 \end{bmatrix} &= \\ &= 11 \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} + 20 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 128 \\ 113 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Necesito entonces 128 x230 y 113 x260 para cumplir el pedido ■

¿Cuánto representa esto en placas de silicio, cobre y aluminio?

Costo total

Ensamblando Robots

Usando la matriz de requerimiento original, tenemos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 128 \\ 113 \end{bmatrix} =$$
$$= 128 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 113 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1077 \\ 610 \\ 1318 \end{bmatrix}$$

Por lo que necesitamos 1077 placas de silicio, 610 de cobre y 1318 de aluminio



Por aire y por mar

Ensamblando Robots

Una *patrulla* consta de un robot aéreo y uno acuático. Si queremos hacer una patrulla con un *Apis IV* y un *Myxini II*...

- ¿Cuántas placas de material necesitamos?
- ¿Cuántas necesitaríamos si quisiéramos hacer un escuadrón con 3 patrullas?