Raíces: Métodos abiertos

Aplicación de Métodos Numéricos al Ambiente Construido (CV1012)

Xavier Sánchez Díaz



Outline

Convergencia II

2 Punto fijo

Newton-Raphson

Hasta ahora, los métodos que hemos visto han sido por intervalos (*bracketing methods*):

- Escojo un límite superior
- Escojo un límite inferior
- Busco entre esos dos hasta llegar a un resultado al final.

Hasta ahora, los métodos que hemos visto han sido por intervalos (*bracketing methods*):

- Escojo un límite superior
- Escojo un límite inferior
- Busco entre esos dos hasta llegar a un resultado al final.

Hasta ahora, los métodos que hemos visto han sido por intervalos (*bracketing methods*):

- Escojo un límite superior
- Escojo un límite inferior
- Busco entre esos dos hasta llegar a un resultado al final.

Hasta ahora, los métodos que hemos visto han sido por intervalos (*bracketing methods*):

- Escojo un límite superior
- Escojo un límite inferior
- Busco entre esos dos hasta llegar a un resultado al final.

Hasta ahora, los métodos que hemos visto han sido por intervalos (*bracketing methods*):

- Escojo un límite superior
- Escojo un límite inferior
- Busco entre esos dos hasta llegar a un resultado al final.

Hasta ahora, los métodos que hemos visto han sido por intervalos (*bracketing methods*):

- Escojo un límite superior
- Escojo un límite inferior
- Busco entre esos dos hasta llegar a un resultado al final.

Convergencia II

En contraparte a los métodos de intervalos, existen otros métodos a los que llamamos abiertos, los cuales se basan en fórmulas que sólo necesitan un punto de partida (o dos puntos que no necesariamente delimiten a la raíz).

Por esta razón, en ocasiones los métodos abiertos pueden *divergir* del resultado real—es decir que es puede que cada vez se alejen más de la verdadera raíz.

¿Qué ventaja tienen entonces?

Que los métodos abiertos, cuando convergen, lo hacen más rápidamente

Convergencia II

En contraparte a los métodos de intervalos, existen otros métodos a los que llamamos abiertos, los cuales se basan en fórmulas que sólo necesitan un punto de partida (o dos puntos que no necesariamente delimiten a la raíz).

Por esta razón, en ocasiones los métodos abiertos pueden *divergir* del resultado real—es decir que es puede que cada vez se alejen más de la verdadera raíz.

¿Qué ventaja tienen entonces?

Que los métodos abiertos, cuando convergen, lo hacen más rápidamente.

Convergencia II

En contraparte a los métodos de intervalos, existen otros métodos a los que llamamos abiertos, los cuales se basan en fórmulas que sólo necesitan un punto de partida (o dos puntos que no necesariamente delimiten a la raíz).

Por esta razón, en ocasiones los métodos abiertos pueden *divergir* del resultado real—es decir que es puede que cada vez se alejen más de la verdadera raíz.

¿Qué ventaja tienen entonces?

Que los métodos abiertos, cuando convergen, lo hacen más rápidamente.

Convergencia II

En contraparte a los métodos de intervalos, existen otros métodos a los que llamamos abiertos, los cuales se basan en fórmulas que sólo necesitan un punto de partida (o dos puntos que no necesariamente delimiten a la raíz).

Por esta razón, en ocasiones los métodos abiertos pueden *divergir* del resultado real—es decir que es puede que cada vez se alejen más de la verdadera raíz.

¿Qué ventaja tienen entonces?

Que los métodos abiertos, cuando convergen, lo hacen más rápidamente.

Sustitución sucesiva o Punto fijo Punto Fijo

La primera de las ideas surge de intentar predecir un nuevo valor de x a partir de la función de un valor antiguo de x:

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

De tal manera que podamos obtener x_{i+1} en el lado izquierdo, y una función de x en el lado derecho. Por ejemplo, si nuestra función g(x) es $x^2-2x+3=0$, entonces podemos despejarla:

$$x^2 - 2x = -3$$
 (restamos 3)
 $-2x = -x^2 - 3$ (restamos x^2)
 $x = \frac{x^2 + 3}{2}$ (dividimos entre -2)

Esta sustitución por pasos se llama de tamaño fijo, es a lo que llamamos el método de punto fijo.

Sustitución sucesiva o Punto fijo Punto Fijo

La primera de las ideas surge de intentar predecir un nuevo valor de x a partir de la función de un valor antiguo de x:

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

De tal manera que podamos obtener x_{i+1} en el lado izquierdo, y una función de x en el lado derecho. Por ejemplo, si nuestra función g(x) es $x^2-2x+3=0$, entonces podemos despejarla:

$$x^2-2x=-3$$
 (restamos 3)
 $-2x=-x^2-3$ (restamos x^2)
 $x=\frac{x^2+3}{2}$ \blacksquare (dividimos entre -2)

Esta sustitución por pasos se llama de tamaño fijo, es a lo que llamamos el método de punto fijo. $_{5/13}$

Punto Fijo

Calculemos la raíz de la función $f(x) = e^{-x} - x$.

- Despejamos x de f(x): $x_{i+1} = e^{-x_i}$
- igorplus Calculamos el valor nuevo de x_{i+1} con la fórmula que obtuvimos en el Paso f 1
- Calculamos el error
- Repetimos desde el paso 2 hasta que estemos lo suficientemente cercadel resultado real

- ullet $x_1=e^{-0}=1$ con $arepsilon_a=1.0$
- ullet $x_2=e^{-x_1}=0.367879$ con $arepsilon_a=1.718$
- $\bullet \ x_3 = e^{-x_2} = 0.692201$ con $\varepsilon_a = 0.469$
- . . .
- $x_{10} = e^{-x_9} = 0.564879 \text{ con } \varepsilon_a = 0.01111$

Punto Fijo

Calculemos la raíz de la función $f(x) = e^{-x} - x$.

- **1** Despejamos x de f(x): $x_{i+1} = e^{-x_i}$
- 2 Calculamos el valor nuevo de x_{i+1} con la fórmula que obtuvimos en el Paso 1
- Calculamos el error
- 4 Repetimos desde el paso 2 hasta que estemos lo suficientemente cerca del resultado real

- $\bullet \ x_1=e^{-0}=1 \ {\rm con} \ \varepsilon_a=1.0$
- ullet $x_2=e^{-x_1}=0.367879$ con $arepsilon_a=1.718$
- $x_3 = e^{-x_2} = 0.692201 \text{ con } \varepsilon_a = 0.469$
- . . .
- $x_{10} = e^{-x_9} = 0.564879 \text{ con } \varepsilon_a = 0.01111$

Punto Fijo

Calculemos la raíz de la función $f(x) = e^{-x} - x$.

- **1** Despejamos x de f(x): $x_{i+1} = e^{-x_i}$
- f 2 Calculamos el valor nuevo de x_{i+1} con la fórmula que obtuvimos en el Paso f 1
- Calculamos el error
- Repetimos desde el paso 2 hasta que estemos lo suficientemente cerca
 del resultado real

- $x_1 = e^{-0} = 1 \text{ con } \varepsilon_a = 1.0$
- $x_2 = e^{-x_1} = 0.367879 \text{ con } \varepsilon_a = 1.718$
- $x_3 = e^{-x_2} = 0.692201 \text{ con } \varepsilon_a = 0.469$
- . . .
- $x_{10} = e^{-x_9} = 0.564879 \text{ con } \varepsilon_a = 0.01111$

Punto Fijo

Calculemos la raíz de la función $f(x) = e^{-x} - x$.

- **1** Despejamos x de f(x): $x_{i+1} = e^{-x_i}$
- f 2 Calculamos el valor nuevo de x_{i+1} con la fórmula que obtuvimos en el Paso f 1
- Calculamos el error
- Repetimos desde el paso 2 hasta que estemos lo suficientemente cerca
 del resultado real

- $x_1 = e^{-0} = 1 \text{ con } \varepsilon_a = 1.0$
- $x_2 = e^{-x_1} = 0.367879 \text{ con } \varepsilon_a = 1.718$
- $x_3 = e^{-x_2} = 0.692201 \text{ con } \varepsilon_a = 0.469$
-
- $x_{10} = e^{-x_9} = 0.564879 \text{ con } \varepsilon_a = 0.0111$

Punto Fijo

Calculemos la raíz de la función $f(x) = e^{-x} - x$.

- **1** Despejamos x de f(x): $x_{i+1} = e^{-x_i}$
- f 2 Calculamos el valor nuevo de x_{i+1} con la fórmula que obtuvimos en el Paso f 1
- Calculamos el error
- Repetimos desde el paso 2 hasta que estemos lo suficientemente cerca del resultado real

- $x_1 = e^{-0} = 1 \text{ con } \varepsilon_a = 1.0$
- $x_2 = e^{-x_1} = 0.367879 \text{ con } \varepsilon_a = 1.718$
- $x_3 = e^{-x_2} = 0.692201 \text{ con } \varepsilon_a = 0.469$
-
- $x_{10} = e^{-x_9} = 0.564879 \text{ con } \varepsilon_a = 0.01111$

Punto Fijo

Calculemos la raíz de la función $f(x) = e^{-x} - x$.

- **1** Despejamos x de f(x): $x_{i+1} = e^{-x_i}$
- f 2 Calculamos el valor nuevo de x_{i+1} con la fórmula que obtuvimos en el Paso f 1
- Calculamos el error
- Repetimos desde el paso 2 hasta que estemos lo suficientemente cerca del resultado real

- $x_1 = e^{-0} = 1 \text{ con } \varepsilon_a = 1.0$
- $x_2 = e^{-x_1} = 0.367879 \text{ con } \varepsilon_a = 1.718$
- $x_3 = e^{-x_2} = 0.692201 \text{ con } \varepsilon_a = 0.469$
-
- $x_{10} = e^{-x_9} = 0.564879 \text{ con } \varepsilon_a = 0.01111$

Punto Fijo

Calculemos la raíz de la función $f(x) = e^{-x} - x$.

- **1** Despejamos x de f(x): $x_{i+1} = e^{-x_i}$
- f 2 Calculamos el valor nuevo de x_{i+1} con la fórmula que obtuvimos en el Paso f 1
- Calculamos el error
- Repetimos desde el paso 2 hasta que estemos lo suficientemente cerca del resultado real

- $x_1 = e^{-0} = 1 \text{ con } \varepsilon_a = 1.0$
- $x_2 = e^{-x_1} = 0.367879 \text{ con } \varepsilon_a = 1.718$
- $x_3 = e^{-x_2} = 0.692201 \text{ con } \varepsilon_a = 0.469$
- . .
- $\bullet \ x_{10} = e^{-x_9} = 0.564879 \ {
 m con} \ arepsilon_a = 0.01111$

Punto Fijo

Calculemos la raíz de la función $f(x) = e^{-x} - x$.

- **1** Despejamos x de f(x): $x_{i+1} = e^{-x_i}$
- 2 Calculamos el valor nuevo de x_{i+1} con la fórmula que obtuvimos en el Paso 1
- Calculamos el error
- 4 Repetimos desde el paso 2 hasta que estemos lo suficientemente cerca del resultado real

- $x_1 = e^{-0} = 1 \text{ con } \varepsilon_a = 1.0$
- $x_2 = e^{-x_1} = 0.367879 \text{ con } \varepsilon_a = 1.718$
- $x_3 = e^{-x_2} = 0.692201 \text{ con } \varepsilon_a = 0.469$
- . . .
- $x_{10} = e^{-x_9} = 0.564879 \text{ con } \varepsilon_a = 0.0111$

Punto Fijo

Calculemos la raíz de la función $f(x) = e^{-x} - x$.

- **1** Despejamos x de f(x): $x_{i+1} = e^{-x_i}$
- 2 Calculamos el valor nuevo de x_{i+1} con la fórmula que obtuvimos en el Paso 1
- Calculamos el error
- 4 Repetimos desde el paso 2 hasta que estemos lo suficientemente cerca del resultado real

- $x_1 = e^{-0} = 1 \text{ con } \varepsilon_a = 1.0$
- $x_2 = e^{-x_1} = 0.367879 \text{ con } \varepsilon_a = 1.718$
- $x_3 = e^{-x_2} = 0.692201 \text{ con } \varepsilon_a = 0.469$
-
- $x_{10} = e^{-x_9} = 0.564879 \text{ con } \varepsilon_a = 0.0111$

Punto Fijo

Calculemos la raíz de la función $f(x) = e^{-x} - x$.

- **1** Despejamos x de f(x): $x_{i+1} = e^{-x_i}$
- 2 Calculamos el valor nuevo de x_{i+1} con la fórmula que obtuvimos en el Paso 1
- Calculamos el error
- 4 Repetimos desde el paso 2 hasta que estemos lo suficientemente cerca del resultado real

- $x_1 = e^{-0} = 1 \text{ con } \varepsilon_a = 1.0$
- $x_2 = e^{-x_1} = 0.367879 \text{ con } \varepsilon_a = 1.718$
- $x_3 = e^{-x_2} = 0.692201 \text{ con } \varepsilon_a = 0.469$
-
- $x_{10} = e^{-x_9} = 0.564879 \text{ con } \varepsilon_a = 0.0111$

Punto Fijo

Calculemos la raíz de la función $f(x) = e^{-x} - x$.

- **1** Despejamos x de f(x): $x_{i+1} = e^{-x_i}$
- 2 Calculamos el valor nuevo de x_{i+1} con la fórmula que obtuvimos en el Paso 1
- Calculamos el error
- 4 Repetimos desde el paso 2 hasta que estemos lo suficientemente cerca del resultado real

- $x_1 = e^{-0} = 1 \text{ con } \varepsilon_a = 1.0$
- $x_2 = e^{-x_1} = 0.367879 \text{ con } \varepsilon_a = 1.718$
- $x_3 = e^{-x_2} = 0.692201 \text{ con } \varepsilon_a = 0.469$
- . . .
- $x_{10} = e^{-x_9} = 0.564879 \text{ con } \varepsilon_a = 0.0111$

Punto Fijo

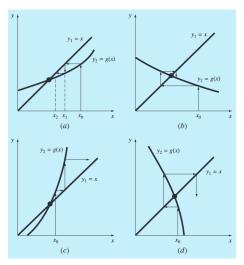
Calculemos la raíz de la función $f(x) = e^{-x} - x$.

- **1** Despejamos x de f(x): $x_{i+1} = e^{-x_i}$
- 2 Calculamos el valor nuevo de x_{i+1} con la fórmula que obtuvimos en el Paso 1
- Calculamos el error
- Repetimos desde el paso 2 hasta que estemos lo suficientemente cerca del resultado real

- $x_1 = e^{-0} = 1 \text{ con } \varepsilon_a = 1.0$
- $x_2 = e^{-x_1} = 0.367879 \text{ con } \varepsilon_a = 1.718$
- $x_3 = e^{-x_2} = 0.692201 \text{ con } \varepsilon_a = 0.469$
- ...
- $x_{10} = e^{-x_9} = 0.564879 \text{ con } \varepsilon_a = 0.0111$

Dificultades con Punto Fijo Punto Fijo

Punto fijo reduce el error en un factor de entre 0.5 y 0.6. . . cuando funciona.



Dificultades con Punto Fijo Punto Fijo

Si la pendiente de la función g(x) es menor a la pendiente de la recta y=x o sea, |g'(x)|<1, entonces el método de punto fijo converge.

Esta idea de que a partir de **la pendiente** podemos obtener más información, da pie a nuevos métodos y maneras de encontrar la raíz.

Repaso de cálculo Newton-Raphson

Throwback a Cálculo Diferencial: Secantes y Tangentes

El método de Newton-Raphson

Newton-Raphson

El método de Newton Raphson utiliza la recta tangente a uno de los puntos para determinar una aproximación de mejor calidad de una raíz.

Como todos los procesos que hemos visto, utiliza la información de la aproximación actual (el día de hoy) para predecir la siguiente aproximación (del día de mañana) usando la derivada de la función, en una fórmula muy sencilla de recordar:

Fórmula de Newton Raphson

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

El método de Newton-Raphson

Newton-Raphson

El método de Newton Raphson utiliza la recta tangente a uno de los puntos para determinar una aproximación de mejor calidad de una raíz.

Como todos los procesos que hemos visto, utiliza la información de la aproximación actual (el día de hoy) para predecir la siguiente aproximación (del día de mañana) usando la derivada de la función, en una fórmula muy sencilla de recordar:

Fórmula de Newton Raphsor

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

El método de Newton-Raphson

Newton-Raphson

El método de Newton Raphson utiliza la recta tangente a uno de los puntos para determinar una aproximación de mejor calidad de una raíz.

Como todos los procesos que hemos visto, utiliza la información de la aproximación actual (el día de hoy) para predecir la siguiente aproximación (del día de mañana) usando la derivada de la función, en una fórmula muy sencilla de recordar:

Fórmula de Newton Raphson

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Con la misma función anterior: $f(x) = e^{-x} - x$.

¿Cuál es la derivada de f(x)? Usando la fórmula $\frac{\mathrm{d} e^u}{\mathrm{d} u} = e^u \cdot \mathrm{d} u$, obtenemos que $f'(x) = -e^{-x}$ —

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_i} - x_i}{-e^{-x_i} - 1}$$

Con la misma función anterior: $f(x) = e^{-x} - x$.

¿Cuál es la derivada de f(x)?

Usando la fórmula $rac{\mathrm{d} e^u}{\mathrm{d} u} = e^u\cdot \mathrm{d} u$, obtenemos que $f'(x) = -e^{-x} - 1$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_i} - x_i}{-e^{-x_i} - 1}$$

Con la misma función anterior: $f(x) = e^{-x} - x$.

¿Cuál es la derivada de f(x)? Usando la fórmula $\frac{\mathrm{d}e^u}{\mathrm{d}u}=e^u\cdot\mathrm{d}u$, obtenemos que $f'(x)=-e^{-x}-1$.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_i} - x_i}{-e^{-x_i} - 1}$$

Con la misma función anterior: $f(x) = e^{-x} - x$.

¿Cuál es la derivada de f(x)? Usando la fórmula $\frac{\mathrm{d}e^u}{\mathrm{d}u} = e^u \cdot \mathrm{d}u$, obtenemos que $f'(x) = -e^{-x} - 1$.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_i} - x_i}{-e^{-x_i} - 1}$$

Newton-Raphson

El método podría no converger...

- ... si la raíz está cerca de un punto de inflexión
- ... si se llega a algún punto con una pendiente de casi 0
- ... si la pendiente de un punto es 0

- Graficar la función
- Verificar que el resultado final esté realmente cerca de 0
- Incluir un número máximo de iteraciones
- Alertar cuando se encuentra una derivada muy cercana a C

Newton-Raphson

El método podría no converger...

- ... si la raíz está cerca de un punto de inflexión
- ... si se llega a algún punto con una pendiente de casi 0
- ... si la pendiente de un punto es 0

- Graficar la función
- Verificar que el resultado final esté realmente cerca de 0
- Incluir un número máximo de iteraciones
- Alertar cuando se encuentra una derivada muy cercana a (

Newton-Raphson

El método podría no converger...

- ... si la raíz está cerca de un punto de inflexión
- ... si se llega a algún punto con una pendiente de casi 0
- ... si la pendiente de un punto es 0

- Graficar la función
- Verificar que el resultado final esté realmente cerca de 0
- Incluir un número máximo de iteraciones
- Alertar cuando se encuentra una derivada muy cercana a 0

Newton-Raphson

El método podría no converger...

- ... si la raíz está cerca de un punto de inflexión
- ... si se llega a algún punto con una pendiente de casi 0
- ... si la pendiente de un punto es 0

- Graficar la función
- Verificar que el resultado final esté realmente cerca de 0
- Incluir un número máximo de iteraciones
- Alertar cuando se encuentra una derivada muy cercana a 0

Newton-Raphson

El método podría no converger...

- ... si la raíz está cerca de un punto de inflexión
- ... si se llega a algún punto con una pendiente de casi 0
- ... si la pendiente de un punto es 0

- Graficar la función
- Verificar que el resultado final esté realmente cerca de 0
- Incluir un número máximo de iteraciones
- Alertar cuando se encuentra una derivada muy cercana a 0

Newton-Raphson

El método podría no converger...

- ...si la raíz está cerca de un punto de inflexión
- ... si se llega a algún punto con una pendiente de casi 0
- ... si la pendiente de un punto es 0

- Graficar la función
- Verificar que el resultado final esté realmente cerca de 0
- Incluir un número máximo de iteraciones
- Alertar cuando se encuentra una derivada muy cercana a 0

Newton-Raphson

El método podría no converger...

- ... si la raíz está cerca de un punto de inflexión
- ... si se llega a algún punto con una pendiente de casi 0
- ...si la pendiente de un punto es 0

- Graficar la función
- Verificar que el resultado final esté realmente cerca de 0
- Incluir un número máximo de iteraciones
- Alertar cuando se encuentra una derivada muy cercana a 0

Newton-Raphson

El método podría no converger...

- ...si la raíz está cerca de un punto de inflexión
- ... si se llega a algún punto con una pendiente de casi 0
- ...si la pendiente de un punto es 0

- Graficar la función
- Verificar que el resultado final esté realmente cerca de 0
- Incluir un número máximo de iteraciones
- Alertar cuando se encuentra una derivada muy cercana a 0

El método de la Secante

Secante

El método de la secante se basa en la misma idea que el método de **Newton-Raphson**, pero en lugar de considerar la recta tangente como aproximación, us a la recta secante.

Para ello, utiliza dos pasos en el pasado (la info de hoy, y de ayer) para predecir el siguiente paso (el de mañana).

La fórmula es muy parecida a la de **Newton-Raphson**, sin embargo la derivada se aproxima usando una diferencia:

Fórmula del método de la Secante

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

El método de la Secante

Secante

El método de la secante se basa en la misma idea que el método de **Newton-Raphson**, pero en lugar de considerar la recta tangente como aproximación, us a la recta secante.

Para ello, utiliza dos pasos en el pasado (la info de hoy, y de ayer) para predecir el siguiente paso (el de mañana).

La fórmula es muy parecida a la de **Newton-Raphson**, sin embargo la derivada se aproxima usando una diferencia:

Fórmula del método de la Secante

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

El método de la Secante

Secante

El método de la secante se basa en la misma idea que el método de **Newton-Raphson**, pero en lugar de considerar la recta tangente como aproximación, us a la recta secante.

Para ello, utiliza dos pasos en el pasado (la info de hoy, y de ayer) para predecir el siguiente paso (el de mañana).

La fórmula es muy parecida a la de **Newton-Raphson**, sin embargo la derivada se aproxima usando una diferencia:

Fórmula del método de la Secante

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$