Cálculo Numérico: Integrales numéricas

Aplicación de Métodos Numéricos al Ambiente Construido (CV1012)

M.C. Xavier Sánchez Díaz
sax@tec.mx

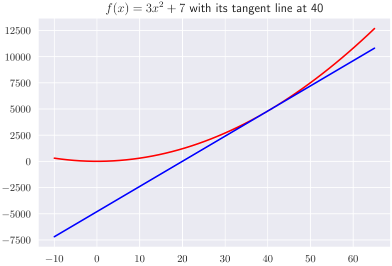
Tecnológico de Monterrey

Outline

La Derivada

Repaso de Cálculo

- Una derivada f' es una **operación** que toma como operando a una **función** f
- La derivada de una función f en un punto x_i, hace referencia a la recta **tangente** que pasa por x_i
- La derivada es la **pendiente** de la tangente de dicha curva en el punto x_i

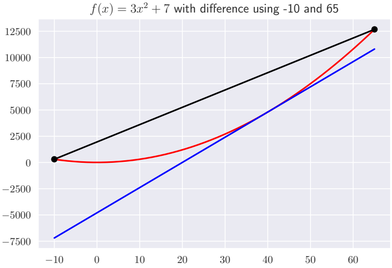


Derivada y Diferenciación

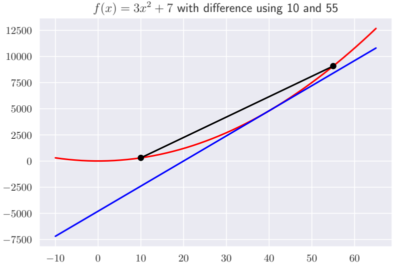
Repaso de Cálculo

Como la **derivada** hace referencia a la **pendiente** de la recta tangente, nos está dando una medida de cambio—cómo cambia la función en ese punto.

El cambio se puede **aproximar** usando diferencias.

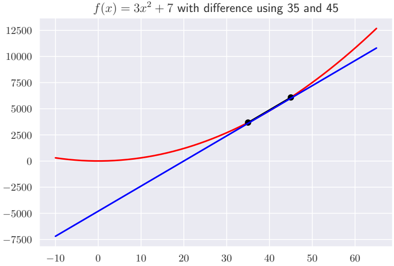


A medida que la diferencia se hace más pequeña, la aproximación de la derivada es mejor.



Derivada y Diferenciación
Repaso de Cálculo

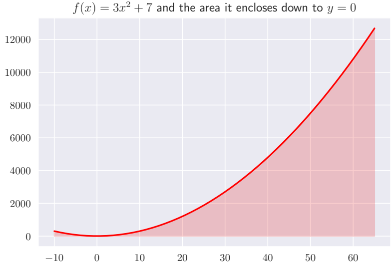
A medida que la diferencia se hace más pequeña, la aproximación de la derivada es mejor.



Integral

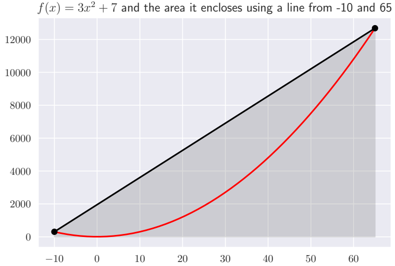
Repaso de Cálculo

- Una integral F es una **operación** que toma como operando a una **función** f
- La integral de una función f es también conocida como su **antiderivada**, pues es la operación inversa a la derivada
- La integral de una función f es la suma de todos los cambios que ocurren en una función f



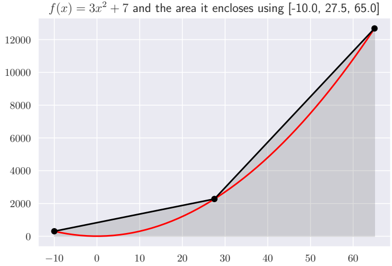
Integral y área bajo la curva
Repaso de Cálculo

Como la **integral** hace referencia a la suma de los cambios en cada uno de los puntos de la función, nos está dando una medida de agrupación—el área bajo la curva.
Esta suma se puede **aproximar** definiendo pequeñas *diferencias* y sumándolas.



Integral y área bajo la curva
Repaso de Cálculo

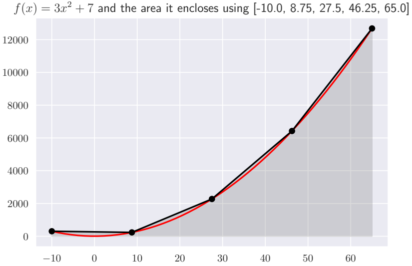
A medida que la diferencia se hace más pequeña, la aproximación del área bajo la curva es mejor.



Integral y área bajo la curva

Repaso de Cálculo

A medida que la diferencia se hace más pequeña, la aproximación del área bajo la curva es mejor.



Las *fórmulas* Newton-Cotes son esquemas de integración numérica ampliamente usados. La idea se basa en reemplazar una función *complicada* o datos tabulados con una función aproximada que sea más fácil de integrar. Por ejemplo:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

donde $f_n(x)$ es un **polinomio** de la forma

$$f_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

y n es el **orden** (o **grado**) del polinomio.

Regla del Trapecio

Newton-Cotes

La regla del trapecio se refiere a la primera de las reglas de Newton-Cotes en intervalos cerrados (de a a b, por ejemplo), y corresponde al caso donde el polinomio f_n es de primer orden f_1:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x$$

que corresponde a la siguiente regla general

Regla del Trapecio

$$I = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1}$$

Mejorando la aproximación

Newton-Cotes

Para poder mejorar la aproximación usando la **regla del trapecio** podemos aplicarla en repetidas ocasiones: en lugar de usar un segmento, usar múltiples segmentos.

En este caso, tendremos que la integral numérica definida entre dos puntos a y b se puede calcular con la regla general siguiente:

Aplicaciones múltiples de la regla del trapecio

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)}{2n} \qquad (2)$$

Calculando el error de la regla del trapecio

Newton-Cotes

Para calcular el **error** en la integral obtenida por la regla del trapecio **aplicada una vez**, podemos emplear la ecuación

Error en la regla del trapecio

$$E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3 \tag{3}$$

donde ξ es un valor dentro del intervalo entre a y b, y f'' es la segunda derivada de x. Después simplemente evaluamos en ξ.

Calculando el error de la regla del trapecio

Newton-Cotes

Si vamos a aplicarla múltiples veces, entonces necesitaremos sumar el error del intervalo en cada aplicación:

Error total en múltiples aplicaciones de la regla del trapecio

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i) \tag{4}$$

Se puede simplificar el cálculo si en lugar de sumar cada error, obtenemos el error para un intervalo promedio aunque esto genera pérdida de precisión:

Error aproximado en múltiples aplicaciones de la regla del trapecio

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \bar{f}'' \tag{5}$$

Segunda derivada aproximada
Newton-Cotes

Para calcular el valor de la segunda derivada promedio cuando en lugar de tener mediciones discretas tenemos una función continua, podemos usar la siguiente aproximación:

Aproximación de la segunda derivada promedio

$$\bar{f}'' = \frac{\displaystyle\int_a^b f''(x)}{b-a} \tag{6}$$

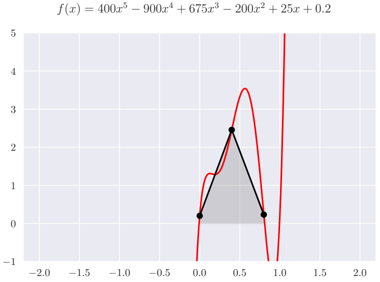
Ejercicio

Aplicación múltiple de la Regla del Trapecio

Utiliza la regla del trapecio usando **dos segmentos** para estimar la integral definida de la función

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

de $a = 0$ a $b = 0.8$

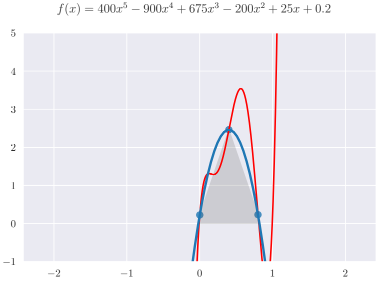


Integrando usando polinomios

Newton-Cotes

Otra opción para poder aproximar una integral es usar **polinomios de mayor orden** para conectar los puntos.

Por ejemplo, para unir 3 puntos, podemos usar una **parábola**



Regla de Simpson 1/3

Newton-Cotes

Específicamente, si usamos un polinomio de grado 2, es decir:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x$$

entonces estamos aplicando la regla de Simpson 1/3, cuya ecuación general es:

Regla de Simpson 1/3

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} \tag{7}$$

Múltiples aplicaciones de la regla de Simpson 1/3

Newton-Cotes

Al igual que con la regla del trapecio, podemos aplicar varias veces la **regla de Simpson 1/3** para generar múltiples parábolas.

En este caso, la integral numérica definida entre los puntos a y b puede aproximarse como sigue:

Aplicaciones múltiples de la Regla de Simpson 1/3

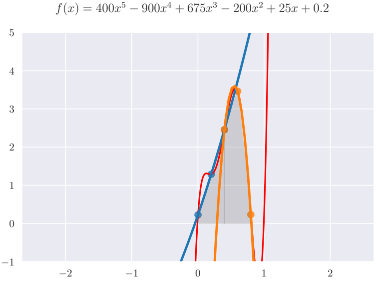
$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5,\ldots}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,4,6,\ldots}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)}{3n} \tag{8}$$

Múltiples aplicaciones de la regla de Simpson 1/3

Newton-Cotes

$$I = (b-a)\frac{f(x_0)+4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i)+2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j)+f(x_n)}{3n}$$

Viendo de cerca la fórmula, podemos inferir que esta regla se puede usar sólo cuando tenemos un número par de segmentos:



Calculando el error para la Regla de Simpson 1/3

Newton-Cotes

El error lo podemos calcular con las siguientes ecuaciones:

Error total en aplicación singular de Regla de Simpson 1/3

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi) \tag{9}$$

donde ξ es un valor dentro del intervalo entre a y b, y $f^{(4)}$ es la cuarta derivada de $f(x)$. Después simplemente evaluamos en ξ.

Error aproximado en aplicación múltiple de Regla de Simpson 1/3

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} \bar{f}^{(4)} \tag{10}$$

donde $\bar{f}^{(4)}$ es la cuarta derivada promedio del intervalo $[a, b]$.

Resumen de ecuaciones I

Para no enloquecer

Voy a integrar una función, así que tengo dos opciones: Trapecio o Simpson 1/3.

Si escogí Trapecio...

Si con una aplicación se arma:

- Calculo con **Eq. 1**
- Saco el error con **Eq. 3**

Si tengo que aplicarla varias veces, entonces:

- Calculo con **Eq. 2**
- Saco el error total con **Eq. 4** o bien con **Eq. 5** $\star$

Resumen de ecuaciones II

Para no enloquecer

Si escogí Simpson 1/3...

Si con una aplicación se arma:

- Calculo con **Eq. 7**
- Saco el error con **Eq. 9**

Si tengo que aplicarla varias veces, entonces:

- Calculo con **Eq. 8**
- Saco el error aproximado con **Eq. 10** $\star$

$\star$: En estos casos, podemos obtener la i-ésima derivada promedio usando la **Eq. 6** con la i necesaria: $i = 2$ si es segunda derivada, $i = 4$ si es cuarta derivada...