Introducción a los métodos numéricos

Aplicación de Métodos Numéricos al Ambiente Construido (CV1012)

Xavier Sánchez Díaz

Tecnológico de Monterrey

Outline

1. Introducción a métodos numéricos
   - Continuo vs. Discreto
   - ¿Qué son los métodos numéricos?
   - Representación digital de los números
2. Modelación matemática
3. Errores

¿Por qué suenan tan distinto los violines de los pianos si ambos instrumentos son de cuerda?

Story time: continuo vs. discreto

¿Por qué suenan tan distinto los violines de los pianos si ambos instrumentos son de cuerda?

Story time: continuo vs. discreto

¿Qué son los métodos numéricos?

Definición

Los métodos numéricos son técnicas mediante las cuales es posible **formular problemas matemáticos** de tal forma que puedan resolverse utilizando **operaciones aritméticas**.

¿Qué problemas se te vienen a la mente que puedan resolverse con métodos numéricos?

¿Qué son los métodos numéricos?

Introducción a métodos numéricos

Definición

Los métodos numéricos son técnicas mediante las cuales es posible **formular problemas matemáticos** de tal forma que puedan resolverse utilizando **operaciones aritméticas**.

¿Qué problemas se te vienen a la mente que puedan resolverse con métodos numéricos?

Métodos numéricos: aplicación

Introducción a métodos numéricos

Podemos usarlos para muchos problemas en ingeniería:

- **Encontrar** raíces de una ecuación
- **Resolver** sistemas de ecuaciones
- **Encontrar** el valor óptimo en una función
- **Aproximar** funciones
- **Interpolar** valores intermedios usando referencias
- **Integrar** y **derivar** funciones

Podemos usarlos para muchos problemas en ingeniería:

- **Encontrar** raíces de una ecuación
- **Resolver** sistemas de ecuaciones
- **Encontrar** el valor óptimo en una función
- **Aproximar** funciones
- **Interpolar** valores intermedios usando referencias
- **Integrar** y **derivar** funciones

Métodos numéricos: aplicación

Introducción a métodos numéricos

Podemos usarlos para muchos problemas en ingeniería:

- **Encontrar** raíces de una ecuación
- **Resolver** sistemas de ecuaciones
- **Encontrar** el valor óptimo en una función
- **Aproximar** funciones
- **Interpolar** valores intermedios usando referencias
- **Integrar** y **derivar** funciones

Métodos numéricos: aplicación

Podemos usarlos para muchos problemas en ingeniería:

- **Encontrar** raíces de una ecuación
- **Resolver** sistemas de ecuaciones
- **Encontrar** el valor óptimo en una función
- **Aproximar** funciones
- **Interpolar** valores intermedios usando referencias
- **Integrar** y **derivar** funciones

Métodos numéricos: aplicación

Introducción a métodos numéricos

Podemos usarlos para muchos problemas en ingeniería:

- **Encontrar** raíces de una ecuación
- **Resolver** sistemas de ecuaciones
- **Encontrar** el valor óptimo en una función
- **Aproximar** funciones
- **Interpolar** valores intermedios usando referencias
- **Integrar** y **derivar** funciones

Métodos numéricos: aplicación

Introducción a métodos numéricos

Podemos usarlos para muchos problemas en ingeniería:

- **Encontrar** raíces de una ecuación
- **Resolver** sistemas de ecuaciones
- **Encontrar** el valor óptimo en una función
- **Aproximar** funciones
- **Interpolar** valores intermedios usando referencias
- **Integrar** y **derivar** funciones

Representación de los números

Introducción a métodos numéricos

Si descomponemos un número en cifras, podemos obtener el valor posicional de cada una para calcular el valor de la misma...

El número 2357 es:

- $2000 = 2 \times 10^3$ más...
- $300 = 3 \times 10^2$ más...
- $50 = 5 \times 10^1$ más...
- $7 = 7 \times 10^0$

¿Qué pasa con los exponentes en nuestro sistema decimal?

Si descomponemos un número en cifras, podemos obtener el valor posicional de cada una para calcular el valor de la misma...
El número 2357 es:

- $2000 = 2 \times 10^3$ más...
- $300 = 3 \times 10^2$ más...
- $50 = 5 \times 10^1$ más...
- $7 = 7 \times 10^0$

¿Qué pasa con los exponentes en nuestro sistema decimal?

Si descomponemos un número en cifras, podemos obtener el valor posicional de cada una para calcular el valor de la misma...
El número 2357 es:

- $2000 = 2 \times 10^3$ más...
- $300 = 3 \times 10^2$ más...
- $50 = 5 \times 10^1$ más...
- $7 = 7 \times 10^0$

¿Qué pasa con los exponentes en nuestro sistema decimal?

Si descomponemos un número en cifras, podemos obtener el valor posicional de cada una para calcular el valor de la misma...

El número 2357 es:

- $2000 = 2 \times 10^3$ más...
- $300 = 3 \times 10^2$ más...
- $50 = 5 \times 10^1$ más...
- $7 = 7 \times 10^0$

¿Qué pasa con los exponentes en nuestro sistema decimal?

Si descomponemos un número en cifras, podemos obtener el valor posicional de cada una para calcular el valor de la misma...
El número 2357 es:

- $2000 = 2 \times 10^3$ más...
- $300 = 3 \times 10^2$ más...
- $50 = 5 \times 10^1$ más...
- $7 = 7 \times 10^0$

¿Qué pasa con los exponentes en nuestro sistema decimal?

Si descomponemos un número en cifras, podemos obtener el valor posicional de cada una para calcular el valor de la misma...
El número 2357 es:

- $2000 = 2 \times 10^3$ más...
- $300 = 3 \times 10^2$ más...
- $50 = 5 \times 10^1$ más...
- $7 = 7 \times 10^0$

¿Qué pasa con los exponentes en nuestro sistema decimal?

Si descomponemos un número en cifras, podemos obtener el valor posicional de cada una para calcular el valor de la misma...
El número 2357 es:

- $2000 = 2 \times 10^{3}$ más...
- $300 = 3 \times 10^{2}$ más...
- $50 = 5 \times 10^{1}$ más...
- $7 = 7 \times 10^{0}$

¿Qué pasa con los exponentes en nuestro sistema decimal?

¿Qué pasa con los números decimales entonces?

Wiki: IEEE floating points

¿Qué pasa con los números decimales entonces?

Wiki: IEEE floating points

Tipos de datos

Introducción a los métodos numéricos

Existen distintos tipos de datos con los que podemos trabajar en una computadora:

- Números enteros (*integer numbers*)
- Números decimales (*floating point numbers*)
- Cadenas de caracteres alfanuméricos (*strings*)

En este curso sólo nos preocuparemos por números.
Cuando **operamos** con estos datos, generamos nueva información que podríamos necesitar en el futuro.

Existen distintos tipos de datos con los que podemos trabajar en una computadora:

- Números enteros (*integer numbers*)
- Números decimales (*floating point numbers*)
- Cadenas de caracteres alfanuméricos (*strings*)

En este curso sólo nos preocuparemos por números.
Cuando **operamos** con estos datos, generamos nueva información que podríamos necesitar en el futuro.

Tipos de datos

Introducción a los métodos numéricos

Existen distintos tipos de datos con los que podemos trabajar en una computadora:

- Números enteros (*integer numbers*)
- Números decimales (*floating point numbers*)
- Cadenas de caracteres alfanuméricos (*strings*)

En este curso sólo nos preocuparemos por números.
Cuando **operamos** con estos datos, generamos nueva información que podríamos necesitar en el futuro.

Tipos de datos

Introducción a los métodos numéricos

Existen distintos tipos de datos con los que podemos trabajar en una computadora:

- Números enteros (*integer numbers*)
- Números decimales (*floating point numbers*)
- Cadenas de caracteres alfanuméricos (*strings*)

En este curso sólo nos preocuparemos por números.
Cuando **operamos** con estos datos, generamos nueva información que podríamos necesitar en el futuro.

Tipos de datos

Introducción a los métodos numéricos

Existen distintos tipos de datos con los que podemos trabajar en una computadora:

- Números enteros (*integer numbers*)
- Números decimales (*floating point numbers*)
- Cadenas de caracteres alfanuméricos (*strings*)

En este curso sólo nos preocuparemos por números.
Cuando **operamos** con estos datos, generamos nueva información que podríamos necesitar en el futuro.

Tipos de datos

Introducción a los métodos numéricos

Existen distintos tipos de datos con los que podemos trabajar en una computadora:

- Números enteros (*integer numbers*)
- Números decimales (*floating point numbers*)
- Cadenas de caracteres alfanuméricos (*strings*)

En este curso sólo nos preocuparemos por números.
Cuando **operamos** con estos datos, generamos nueva información que podríamos necesitar en el futuro.

Tipos de datos

Introducción a los métodos numéricos

Existen distintos tipos de datos con los que podemos trabajar en una computadora:

- Números enteros (*integer numbers*)
- Números decimales (*floating point numbers*)
- Cadenas de caracteres alfanuméricos (*strings*)

En este curso sólo nos preocuparemos por números.
Cuando **operamos** con estos datos, generamos nueva información que podríamos necesitar en el futuro.

Datos como resultados

Introducción a los métodos numéricos

Antes de usar la computadora o la calculadora para hacer cálculos, solíamos hacer las operaciones a mano.

Por ejemplo, si queremos calcular 1270×35, una manera de hacerlo podría ser...

$$
\begin{aligned}
1270 \times 35 &= \\
&= (1200 + 70) \times (7)(5) \\
&= (12)(7)(5)(100) + (7)(7)(5)(10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
12 \times 5 &= 60 \\
60 \times 7 = 6 \times 7 \times 10 &= 420 \\
420 \times 100 &= 42000
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
7 \times 7 &= 49 \\
49 \times 10 &= 490 \\
490 \times 5 = 490 \times 10/2 &= 2450
\end{aligned}
$$

$$
42000 + 2450 = 44450 \quad \square
$$

Datos como resultados

Introducción a los métodos numéricos

$$
\begin{aligned}
1270 \times 35 &= \\
&= (1200 + 70) \times (7)(5) \\
&= (12)(7)(5)(100) + (7)(7)(5)(10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
12 \times 5 &= 60 \\
60 \times 7 = 6 \times 7 \times 10 &= 420 \\
420 \times 100 &= 42000
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
7 \times 7 &= 49 \\
49 \times 10 &= 490 \\
490 \times 5 = 490 \times 10/2 &= 2450
\end{aligned}
$$

$$42000 + 2450 = 44450 \quad \square$$

Datos como resultados

Introducción a los métodos numéricos

$$
\begin{aligned}
1270 \times 35 &= \\
&= (1200 + 70) \times (7)(5) \\
&= (12)(7)(5)(100) + (7)(7)(5)(10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
12 \times 5 &= 60 \\
60 \times 7 = 6 \times 7 \times 10 &= 420 \\
420 \times 100 &= 42000
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
7 \times 7 &= 49 \\
49 \times 10 &= 490 \\
490 \times 5 = 490 \times 10/2 &= 2450
\end{aligned}
$$

$$42000 + 2450 = 44450 \quad \square$$

$$
\begin{aligned}
1270 \times 35 = & \\
& = (1200 + 70) \times (7)(5) \\
& = (12)(7)(5)(100) + (7)(7)(5)(10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
12 \times 5 &= 60 \\
60 \times 7 = 6 \times 7 \times 10 &= 420 \\
420 \times 100 &= 42000
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
7 \times 7 &= 49 \\
49 \times 10 &= 490 \\
490 \times 5 = 490 \times 10/2 &= 2450
\end{aligned}
$$

$$
42000 + 2450 = 44450 \quad \square
$$

$$
\begin{aligned}
1270 \times 35 = & \\
&= (1200 + 70) \times (7)(5) \\
&= (12)(7)(5)(100) + (7)(7)(5)(10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
12 \times 5 &= 60 \\
60 \times 7 = 6 \times 7 \times 10 &= 420 \\
420 \times 100 &= 42000
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
7 \times 7 &= 49 \\
49 \times 10 &= 490 \\
490 \times 5 = 490 \times 10/2 &= 2450
\end{aligned}
$$

$$42000 + 2450 = 44450 \quad \square$$

Datos como resultados

Introducción a los métodos numéricos

$$\begin{aligned} 1270 \times 35 &= \\ &= (1200 + 70) \times (7)(5) \\ &= (12)(7)(5)(100) + (7)(7)(5)(10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12 \times 5 &= 60 \\ 60 \times 7 = 6 \times 7 \times 10 &= 420 \\ 420 \times 100 &= 42000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 \times 7 &= 49 \\ 49 \times 10 &= 490 \\ 490 \times 5 = 490 \times 10/2 &= 2450 \end{aligned}$$

$$42000 + 2450 = 44450 \quad \square$$

$$
\begin{aligned}
1270 \times 35 &= \\
&= (1200 + 70) \times (7)(5) \\
&= (12)(7)(5)(100) + (7)(7)(5)(10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
12 \times 5 &= 60 \\
60 \times 7 = 6 \times 7 \times 10 &= 420 \\
420 \times 100 &= 42000
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
7 \times 7 &= 49 \\
49 \times 10 &= 490 \\
490 \times 5 = 490 \times 10/2 &= 2450
\end{aligned}
$$

$$
42000 + 2450 = 44450 \quad \square
$$

$$\begin{aligned}1270 \times 35 &= \\ &= (1200 + 70) \times (7)(5) \\ &= (12)(7)(5)(100) + (7)(7)(5)(10)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}12 \times 5 &= 60 \\ 60 \times 7 = 6 \times 7 \times 10 &= 420 \\ 420 \times 100 &= 42000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}7 \times 7 &= 49 \\ 49 \times 10 &= 490 \\ 490 \times 5 = 490 \times 10/2 &= 2450\end{aligned}$$

$$42000 + 2450 = 44450 \quad \square$$

Datos como resultados

Introducción a los métodos numéricos

$$\begin{aligned}
1270 \times 35 = & \\
& = (1200 + 70) \times (7)(5) \\
& = (12)(7)(5)(100) + (7)(7)(5)(10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12 \times 5 &= 60 \\
60 \times 7 = 6 \times 7 \times 10 &= 420 \\
420 \times 100 &= 42000
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7 \times 7 &= 49 \\
49 \times 10 &= 490 \\
490 \times 5 = 490 \times 10/2 &= 2450
\end{aligned}$$

$$42000 + 2450 = 44450 \quad \square$$

Datos como resultados

Introducción a los métodos numéricos

$$
\begin{aligned}
1270 \times 35 &= \\
&= (1200 + 70) \times (7)(5) \\
&= (12)(7)(5)(100) + (7)(7)(5)(10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
12 \times 5 &= 60 \\
60 \times 7 = 6 \times 7 \times 10 &= 420 \\
420 \times 100 &= 42000
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
7 \times 7 &= 49 \\
49 \times 10 &= 490 \\
490 \times 5 = 490 \times 10/2 &= 2450
\end{aligned}
$$

$$42000 + 2450 = 44450 \quad \square$$

$$
\begin{aligned}
1270 \times 35 =& \\
&= (1200 + 70) \times (7)(5) \\
&= (12)(7)(5)(100) + (7)(7)(5)(10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
12 \times 5 &= 60 \\
60 \times 7 = 6 \times 7 \times 10 &= 420 \\
420 \times 100 &= 42000
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
7 \times 7 &= 49 \\
49 \times 10 &= 490 \\
490 \times 5 = 490 \times 10/2 &= 2450
\end{aligned}
$$

$$
42000 + 2450 = 44450 \quad \square
$$

¿Qué habría pasado si hubiera muchos puntos decimales de por medio?

¿Cuál es la representación decimal de $\frac{1}{7}$? ¿Y de $\frac{2}{7}$?

Story time: The Wolf

¿Qué habría pasado si hubiera muchos puntos decimales de por medio?

¿Cuál es la representación decimal de $\frac{1}{7}$? ¿Y de $\frac{2}{7}$?

Story time: The Wolf

¿Qué habría pasado si hubiera muchos puntos decimales de por medio?

¿Cuál es la representación decimal de $\frac{1}{7}$? ¿Y de $\frac{2}{7}$?

Story time: The Wolf

Un modelo matemático es ecuación que expresa las características esenciales de uns sistema, proceso o fenómeno en términos matemáticos.

Usualmente, el modelo se representa mediante una **función** de la forma:

Modelo matemático general

$$y = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{w})$$

- y es la variable dependiente,
- x son las variables independientes,
- p son los parámetros o propiedades del sistema
- w son las funciones de fuerza

Un modelo matemático es ecuación que expresa las características esenciales de uns sistema, proceso o fenómeno en términos matemáticos.
Usualmente, el modelo se representa mediante una **función** de la forma:

Modelo matemático general

$$y = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{w})$$

- y es la variable dependiente,
- x son las variables independientes,
- p son los parámetros o propiedades del sistema
- w son las funciones de fuerza

Un modelo matemático es ecuación que expresa las características esenciales de uns sistema, proceso o fenómeno en términos matemáticos.
Usualmente, el modelo se representa mediante una **función** de la forma:

Modelo matemático general

$$y = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{w})$$

- y es la variable dependiente,
- x son las variables independientes,
- p son los parámetros o propiedades del sistema
- w son las funciones de fuerza

¿Qué es un modelo matemático?

Modelación matemática

$$y = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{w})$$

- La variable dependiente es una característica que usualmente refleja el comportamiento o estado del sistema
- Las variables independientes son dimensiones (e.g. tiempo o espacio) en las cuales se determina el comportamiento del sistema
- Los parámetros son constantes que reflejan las propiedades o la composición del sistema
- Las funciones de fuerza son influencias externas que actúan sobre el sistema

¿Qué es un modelo matemático?

Modelación matemática

$$y = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{w})$$

- La variable dependiente es una característica que usualmente refleja el comportamiento o estado del sistema
- Las variables independientes son dimensiones (e.g. tiempo o espacio) en las cuales se determina el comportamiento del sistema
- Los parámetros son constantes que reflejan las propiedades o la composición del sistema
- Las funciones de fuerza son influencias externas que actúan sobre el sistema

¿Qué es un modelo matemático?

Modelación matemática

$$y = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{w})$$

- La variable dependiente es una característica que usualmente refleja el comportamiento o estado del sistema
- Las variables independientes son dimensiones (e.g. tiempo o espacio) en las cuales se determina el comportamiento del sistema
- Los parámetros son constantes que reflejan las propiedades o la composición del sistema
- Las funciones de fuerza son influencias externas que actúan sobre el sistema

¿Qué es un modelo matemático?

Modelación matemática

$$y = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{w})$$

- La variable dependiente es una característica que usualmente refleja el comportamiento o estado del sistema
- Las variables independientes son dimensiones (e.g. tiempo o espacio) en las cuales se determina el comportamiento del sistema
- Los parámetros son constantes que reflejan las propiedades o la composición del sistema
- Las funciones de fuerza son influencias externas que actúan sobre el sistema

El paracaidista: Solución analítica

Modelación matemática

¿Cómo calcularíamos la velocidad de un paracaidista en caída libre justo antes de que abriese el paracaídas? Veamos...

Comencemos con algo simple: ¿Qué hace caer al paracaidista?

La fuerza de gravedad del paracaidista lo hará caer, y una fuerza opuesta (de resistencia al aire, por ejemplo) *intentará frenarlo* (como soltar una hoja de papel en el aire).

Significa entonces que

$$\sum_{F_y} = F_g - F_r$$

donde F_y es la fuerza ejercida sobre el paracaidista, por la fuerza de gravedad F_g y la fuerza de resistencia F_r.

Comencemos con algo simple: ¿Qué hace caer al paracaidista?
La fuerza de gravedad del paracaidista lo hará caer, y una fuerza opuesta (de resistencia al aire, por ejemplo) *intentará frenarlo* (como soltar una hoja de papel en el aire).
Significa entonces que

$$\sum_{F_y} = F_g - F_r$$

donde F_y es la fuerza ejercida sobre el paracaidista, por la fuerza de gravedad F_g y la fuerza de resistencia F_r.

Comencemos con algo simple: ¿Qué hace caer al paracaidista?
La fuerza de gravedad del paracaidista lo hará caer, y una fuerza opuesta (de resistencia al aire, por ejemplo) *intentará frenarlo* (como soltar una hoja de papel en el aire).
Significa entonces que

$$\sum_{F_y} = F_g - F_r$$

donde F_y es la fuerza ejercida sobre el paracaidista, por la fuerza de gravedad F_g y la fuerza de resistencia F_r.

El paracaidista: Solución analítica

Modelación matemática

$$
\begin{aligned}
F_g - F_r &= F_y && \text{(reescribimos)} \\
F_g - F_r &= ma && \text{(por } F = ma\text{)} \\
mg - F_r &= ma && \text{(ditto)} \\
mg - cv &= ma && \text{(coeficiente de resistencia por velocidad)} \\
ma &= mg - cv && \text{(reescribimos)} \\
m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= mg - cv && \text{(}a \text{ como } \tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\text{)}
\end{aligned}
$$

El paracaidista: Solución analítica

Modelación matemática

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - cv \qquad \text{(de slide anterior)}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = mg - cv(t) \qquad (v \text{ como función del tiempo})$$

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{c}{m}v(t) = g \qquad (\text{despejando } g)$$

La ecuación final es una **ecuación diferencial lineal** de primer orden, la cual tiene una solución **ya dada**[1] por:

$$v(t) = e^{-\int p(t)dt}\left(\int q(t)e^{\int p(t)dt}\,dt + k\right)$$

[1] P. Dawkins, `http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/Linear.aspx`

El paracaidista: Solución analítica

Modelación matemática

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - cv \qquad \text{(de slide anterior)}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = mg - cv(t) \qquad \text{(v como función del tiempo)}$$

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{c}{m}v(t) = g \qquad \text{(despejando g)}$$

La ecuación final es una **ecuación diferencial lineal** de primer orden, la cual tiene una solución **ya dada**[1] por:

$$v(t) = e^{-\int p(t)dt}\left(\int q(t)e^{\int p(t)dt}\,dt + k\right)$$

[1] P. Dawkins, `http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/Linear.aspx`

El paracaidista: Solución analítica

Modelación matemática

Y dado a que queremos la velocidad $v(0) = 0$, entonces después de *un poco* de álgebra, llegamos a la solución final

$$v(t) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right) \tag{1}$$

Resolvamos ahora para un paracaidista específico de $m = 68.1$kg y con un coeficiente de arrastre $c = 12.5$kg/s:

$$v(t) = \frac{9.81(68.1)}{12.5}\left(1 - e^{\frac{-12.5}{68.1}t}\right) = 53.44(1 - e^{-0.18355t})$$

de la cual podemos obtener una tabla para darnos una idea...

$$v(t) = 53.44(1 - e^{-0.18355t})$$

t (s)	v (m/s)
0	0.00
2	16.42
4	27.8
6	35.68
8	41.14
10	44.92
12	47.54
∞	53.44

Esta solución se conoce como solución analítica o **exacta** del modelo, ya que podemos obtener *fácilmente* las ecuaciones diferenciales para ello. No siempre es posible hacerlo.

Sin embargo, cuando no es posible hallar algo exacto, siempre podemos **aproximarlo**. . .

Podemos aproximar la derivada de la velocidad con respecto al tiempo como un *cambio de la velocidad* entre un *cambio en el tiempo*

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \approxeq \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

Y con ello, podemos reformular nuestro problema

$$\sum_{F_y} = F_g - F_r$$

El paracaidista: Solución numérica

Modelación matemática

$$
\begin{aligned}
\sum_{F_y} &= F_g - F_r && \text{(ecuación original)} \\
ma &= mg - cv(t_i) && \text{(sustituyendo con } F = ma\text{)} \\
m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= mg - cv(t_i) && \text{(}a \text{ como } \tfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\text{)} \\
m\frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} &= mg - cv(t_i) && \text{(reemplazamos por aproximación)}
\end{aligned}
$$

y despejamos la $v(t_{i+1})$ que es lo que nos interesa...

El paracaidista: Solución numérica

Modelación matemática

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left[g - \frac{c}{m} v(t_i)\right](t_{i+1} - t_i)$$

Que es una ecuación para determinar la velocidad v para el punto t_{i+1} en el tiempo, usando la pendiente y los valores anteriores de v y t.

$$x_{i+1} = x_i + m \cdot s$$

Donde x_i es el valor de la variable independiente en la i-ésima iteración, m es la pendiente (o cómo cambia el sistema) y s es el paso (o *step*) de la aproximación.

El paracaidista: Solución numérica

Modelación matemática

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left[g - \frac{c}{m}v(t_i)\right](t_{i+1} - t_i)$$

Que es una ecuación para determinar la velocidad v para el punto t_{i+1} en el tiempo, usando la pendiente y los valores anteriores de v y t.

$$x_{i+1} = x_i + m \cdot s$$

Donde x_i es el valor de la variable independiente en la i-ésima iteración, m es la pendiente (o cómo cambia el sistema) y s es el paso (o *step*) de la aproximación.

Esta aproximación de forma

$$x_{i+1} = x_i + m \cdot s$$

se conoce como método de Euler

Live coding: Euler's method

Esta aproximación de forma

$$x_{i+1} = x_i + m \cdot s$$

se conoce como método de Euler

Live coding: Euler's method

Datos y errores

Introducción a los métodos numéricos

Sin embargo, sigue siendo una aproximación, por lo que existe cierto error que vamos a ir cargando poco a poco por el redondeo.

El error real se calcula como

$$\varepsilon = \frac{x_{approx}}{x_{real}}$$

Si no sabemos el valor real x_{real}(muchas veces no lo sabremos) entonces se puede aproximar...

$$\varepsilon_a = \frac{err_{approx}}{val_{approx}}$$

Y podemos aproximarlo por cada paso en la simulación

$$\varepsilon_a = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i}$$

Sin embargo, sigue siendo una aproximación, por lo que existe cierto error que vamos a ir cargando poco a poco por el redondeo.

El error real se calcula como

$$\varepsilon = \frac{x_{approx}}{x_{real}}$$

Si no sabemos el valor real x_{real}(muchas veces no lo sabremos) entonces se puede aproximar. . .

$$\varepsilon_a = \frac{err_{approx}}{val_{approx}}$$

Y podemos aproximarlo por cada paso en la simulación

$$\varepsilon_a = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i}$$

Sin embargo, sigue siendo una aproximación, por lo que existe cierto error que vamos a ir cargando poco a poco por el redondeo.

El error real se calcula como

$$\varepsilon = \frac{x_{approx}}{x_{real}}$$

Si no sabemos el valor real x_{real}(muchas veces no lo sabremos) entonces se puede aproximar...

$$\varepsilon_a = \frac{err_{approx}}{val_{approx}}$$

Y podemos aproximarlo por cada paso en la simulación

$$\varepsilon_a = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i}$$

Datos y errores

Introducción a los métodos numéricos

Sin embargo, sigue siendo una aproximación, por lo que existe cierto error que vamos a ir cargando poco a poco por el redondeo.

El error real se calcula como

$$\varepsilon = \frac{x_{approx}}{x_{real}}$$

Si no sabemos el valor real x_{real}(muchas veces no lo sabremos) entonces se puede aproximar...

$$\varepsilon_a = \frac{err_{approx}}{val_{approx}}$$

Y podemos aproximarlo por cada paso en la simulación

$$\varepsilon_a = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i}$$

Sin embargo, sigue siendo una aproximación, por lo que existe cierto error que vamos a ir cargando poco a poco por el redondeo.

El error real se calcula como

$$\varepsilon = \frac{x_{approx}}{x_{real}}$$

Si no sabemos el valor real x_{real}(muchas veces no lo sabremos) entonces se puede aproximar. . .

$$\varepsilon_a = \frac{err_{approx}}{val_{approx}}$$

Y podemos aproximarlo por cada paso en la simulación

$$\varepsilon_a = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i}$$

Si siempre vamos a tener errores, ¿cuándo nos detenemos?
Cuando estemos *lo suficientemente cerca* a lo que determinemos como **adecuado** para la situación:

$$|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$$

donde ε_s es el error establecido.
Una buena idea es usar un error establecido de

$$\varepsilon_s = 0.5 \times 10^{2-n}$$

donde el valor será correcto en al menos n **cifras significativas**.

Si siempre vamos a tener errores, ¿cuándo nos detenemos?
Cuando estemos *lo suficientemente cerca* a lo que determinemos como **adecuado** para la situación:

$$| \varepsilon_a | < \varepsilon_s$$

donde ε_s es el error establecido.
Una buena idea es usar un error establecido de

$$\varepsilon_s = 0.5 \times 10^{2-n}$$

donde el valor será correcto en al menos n **cifras significativas**.

Si siempre vamos a tener errores, ¿cuándo nos detenemos?
Cuando estemos *lo suficientemente cerca* a lo que determinemos como **adecuado** para la situación:

$$| \varepsilon_a | < \varepsilon_s$$

donde ε_s es el error establecido.
Una buena idea es usar un error establecido de

$$\varepsilon_s = 0.5 \times 10^{2-n}$$

donde el valor será correcto en al menos n **cifras significativas**.