Del Álgebra a la Computadora: Métodos Numéricos para Sistemas de Ecuaciones

Modelación de la ingeniería a través de la matemática computacional (TC1003B)

M.C. Xavier Sánchez Díaz mail@tec.mx



Outline

1 Repaso de Eliminación Gaussiana

2 La forma canónica de los SEL

3 Del álgebra a los números

Sólo podemos usar cualquiera de las siguientes reglas:

Intercambiar renglones de lugar

$$R_1 \leftrightarrow R_2$$

Escalar renglones (multiplicando por escalar)

$$R_1 \leftarrow cR_1$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - cR_2$$

Sólo podemos usar cualquiera de las siguientes reglas:

1 Intercambiar renglones de lugar:

$$R_1 \leftrightarrow R_2$$

② Escalar renglones (multiplicando por escalar):

$$R_1 \leftarrow cR_1$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - cR_2$$

Sólo podemos usar cualquiera de las siguientes reglas:

1 Intercambiar renglones de lugar:

$$R_1 \leftrightarrow R_2$$

Escalar renglones (multiplicando por escalar):

$$R_1 \leftarrow cR_1$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - cR_2$$

Sólo podemos usar cualquiera de las siguientes reglas:

1 Intercambiar renglones de lugar:

$$R_1 \leftrightarrow R_2$$

Escalar renglones (multiplicando por escalar):

$$R_1 \leftarrow cR_1$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - cR_2$$

Para el sistema siguiente...

$$x + y + z = 2$$
$$x + z = 1$$
$$2x + 5y + 2z = 7$$

Consigamos la matriz aumentada del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

¿Qué podemos hacer con ella

Otro ejemplo de eliminación Eliminación

Para el sistema siguiente...

$$x + y + z = 2$$
$$x + z = 1$$
$$2x + 5y + 2z = 7$$

Consigamos la matriz aumentada del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

¿Qué podemos hacer con ella?

Otro ejemplo de eliminación Eliminación

Para el sistema siguiente...

$$x + y + z = 2$$
$$x + z = 1$$
$$2x + 5y + 2z = 7$$

Consigamos la matriz aumentada del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

¿Qué podemos hacer con ella?

Otro ejemplo de eliminación Eliminación

Para el sistema siguiente...

$$x + y + z = 2$$
$$x + z = 1$$
$$2x + 5y + 2z = 7$$

Consigamos la matriz aumentada del sistema:

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 2 \\
1 & 0 & 1 & 1 \\
2 & 5 & 2 & 7
\end{bmatrix}$$

¿Qué podemos hacer con ella?

Eliminación

Primero reordenemos $(R_2 \longleftrightarrow R_3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y reduzcamos el segundo renglón $(R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminación

Primero reordenemos $(R_2 \longleftrightarrow R_3)$

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 2 \\
2 & 5 & 2 & 7 \\
1 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}$$

Y reduzcamos el segundo renglón $(R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1)$:

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 3 & 0 & 3 \\
1 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminación

Primero reordenemos $(R_2 \longleftrightarrow R_3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y reduzcamos el segundo renglón ($R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminación

Primero reordenemos $(R_2 \longleftrightarrow R_3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y reduzcamos el segundo renglón ($R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$):

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 3 & 0 & 3 \\
1 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminación

Primero reordenemos $(R_2 \longleftrightarrow R_3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y reduzcamos el segundo renglón ($R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$):

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 3 & 0 & 3 \\
1 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminación

Primero reordenemos $(R_2 \longleftrightarrow R_3)$

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 2 \\
2 & 5 & 2 & 7 \\
1 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}$$

Y reduzcamos el segundo renglón $(R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}$$

Podemos reducir ahora las y en R_1 ($R_1 \leftarrow R_1 - R_2$):

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & | & 1 \\
0 & 1 & 0 & | & 1 \\
1 & 0 & 1 & | & 1
\end{bmatrix}$$

¿Podemos hacer algo más? ¿Qué significa esta matriz? Si la pasamos a ecuaciones...

$$x + z = 1$$
$$y = 1$$
$$x + z = 1$$

Eliminación

Podemos reducir ahora las y en R_1 ($R_1 \leftarrow R_1 - R_2$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

¿Podemos hacer algo más? ¿Qué significa esta matriz? Si la pasamos a ecuaciones...

$$x + z = 1$$
$$y = 1$$
$$x + z = 1$$

Eliminación

Podemos reducir ahora las y en R_1 ($R_1 \leftarrow R_1 - R_2$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

¿Podemos hacer algo más? ¿Qué significa esta matriz? Si la pasamos a ecuaciones...

$$x + z = 1$$
$$y = 1$$
$$x + z = 1$$

Eliminación

Podemos reducir ahora las y en R_1 ($R_1 \leftarrow R_1 - R_2$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

¿Podemos hacer algo más? ¿Qué significa esta matriz? Si la pasamos a ecuaciones...

$$x + z = 1$$
$$y = 1$$
$$x + z = 1$$

Eliminación

Podemos reducir ahora las y en R_1 ($R_1 \leftarrow R_1 - R_2$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

¿Podemos hacer algo más? ¿Qué significa esta matriz? Si la pasamos a ecuaciones...

$$x + z = 1$$
$$y = 1$$
$$x + z = 1$$

Eliminación

Podemos reducir ahora las y en R_1 ($R_1 \leftarrow R_1 - R_2$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

¿Podemos hacer algo más? ¿Qué significa esta matriz? Si la pasamos a ecuaciones...

$$x + z = 1$$
$$y = 1$$
$$x + z = 1$$

... lo que significa que y=1, z=1-x y x=1-z Este tipo de soluciones también son válidas.

Eliminación

Podemos reducir ahora las y en R_1 ($R_1 \leftarrow R_1 - R_2$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

¿Podemos hacer algo más? ¿Qué significa esta matriz? Si la pasamos a ecuaciones...

$$x + z = 1$$
$$y = 1$$
$$x + z = 1$$

... lo que significa que y=1, z=1-x y x=1-z Este tipo de soluciones también son válidas.

Eliminación

Podemos reducir ahora las y en R_1 ($R_1 \leftarrow R_1 - R_2$):

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & | & 1 \\
0 & 1 & 0 & | & 1 \\
1 & 0 & 1 & | & 1
\end{bmatrix}$$

¿Podemos hacer algo más? ¿Qué significa esta matriz? Si la pasamos a ecuaciones...

$$x + z = 1$$
$$y = 1$$
$$x + z = 1$$

... lo que significa que y=1, z=1-x y x=1-z Este tipo de soluciones **también son válidas**.

Estamos encontrando los valores de x, y y z que hacen que el sistema sea congruente (si es que es posible).

Asumamos un sistema como el siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es el valor de x? ¿Y el de y y z? Podemos identificar claramente que a la izquierda conseguimos la **matriz identidad.....** y a la derecha un **vector** de valores constantes . ¿A qué nos recuerda esto?

Estamos encontrando los valores de x, y y z que hacen que el sistema sea congruente (si es que es posible).

Asumamos un sistema como el siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es el valor de x? ¿Y el de y y z? Podemos identificar claramente que a la izquierda conseguimos la **matriz** identidad.....y a la derecha un **vector** de valores constantes . ¿A qué nos recuerda esto?

Estamos encontrando los valores de x, y y z que hacen que el sistema sea congruente (si es que es posible).

Asumamos un sistema como el siguiente:

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & b_1 \\
0 & 1 & 0 & b_2 \\
0 & 0 & 1 & b_3
\end{bmatrix}$$

¿Cuál es el valor de x? ¿Y el de y y z?

Podemos identificar claramente que a la izquierda conseguimos la **matriz identidad**.....y a la derecha un **vector** de valores constantes . ¿A qué nos recuerda esto?

Estamos encontrando los valores de x, y y z que hacen que el sistema sea congruente (si es que es posible).

Asumamos un sistema como el siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es el valor de x? ¿Y el de y y z? Podemos identificar claramente que a la izquierda conseguimos la **matriz** identidad.....y a la derecha un vector de valores constantes . ¿A qué nos recuerda esto?

Estamos encontrando los valores de x, y y z que hacen que el sistema sea congruente (si es que es posible).

Asumamos un sistema como el siguiente:

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & b_1 \\
0 & 1 & 0 & b_2 \\
0 & 0 & 1 & b_3
\end{bmatrix}$$

¿Cuál es el valor de x? ¿Y el de y y z? Podemos identificar claramente que a la izquierda conseguimos la **matriz identidad.....** y a la derecha un **vector** de valores constantes . ¿A qué nos recuerda esto?

Estamos encontrando los valores de x, y y z que hacen que el sistema sea congruente (si es que es posible).

Asumamos un sistema como el siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es el valor de x? ¿Y el de y y z? Podemos identificar claramente que a la izquierda conseguimos la **matriz identidad**.....y a la derecha un **vector** de valores constantes . ¿A qué nos recuerda esto?

Realmente, podemos *descomponer* el sistema de ecuaciones lineales en tres elementos:

• Una matriz cuadrada de coeficientes
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

On vector de variables $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}$

$\mathbf{\mathcal{U}}$ Qué estamos haciendo realmente al resolver un SEL? La forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Realmente, podemos *descomponer* el sistema de ecuaciones lineales en tres elementos:

- ② Un vector de variables $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$

Realmente, podemos *descomponer* el sistema de ecuaciones lineales en tres elementos:

② Un vector de variables
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$$

Realmente, podemos *descomponer* el sistema de ecuaciones lineales en tres elementos:

$$\textbf{ 1} \ \, \text{Una matriz cuadrada de coeficientes} \ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

2 Un vector de variables
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$$

Reflexión

Para cada paso de la eliminación...¿cómo sabes qué paso debería seguir?

Una idea

¿Qué tal si empezamos a poner valores al tanteo, y vamos *calando* distintos valores para cada variable?

Errores y representación digital

Asumamos, pues, que vamos a empezar en un **valor inicial** y que iremos, poco a poco, variando el valor de cada variable (duh) para llegar a una solución aproximada.

En cada paso debo preguntarme:

- ¿Qué tanto me falta para llegar?
 - ¿Para dónde debo moverme?
 - ¿Le sumo o le resto?

Errores y representación digital

Asumamos, pues, que vamos a empezar en un **valor inicial** y que iremos, poco a poco, variando el valor de cada variable (duh) para llegar a una solución aproximada.

En cada paso debo preguntarme:

- ¿Qué tanto me falta para llegar?
 - ¿Para dónde debo moverme?
 - ¿Le sumo o le resto?

Errores y representación digital

Asumamos, pues, que vamos a empezar en un **valor inicial** y que iremos, poco a poco, variando el valor de cada variable (duh) para llegar a una solución aproximada.

En cada paso debo preguntarme:

- ¿Qué tanto me falta para llegar?
- ¿Para dónde debo moverme?
- ¿Le sumo o le resto?

Errores y representación digital

Asumamos, pues, que vamos a empezar en un **valor inicial** y que iremos, poco a poco, variando el valor de cada variable (duh) para llegar a una solución aproximada.

En cada paso debo preguntarme:

- ¿Qué tanto me falta para llegar?
- ¿Para dónde debo moverme?
- ¿Le sumo o le resto?

Errores y representación digital

Asumamos, pues, que vamos a empezar en un **valor inicial** y que iremos, poco a poco, variando el valor de cada variable (duh) para llegar a una solución aproximada.

En cada paso debo preguntarme:

- ¿Qué tanto me falta para llegar?
- ¿Para dónde debo moverme?
- ¿Le sumo o le resto?

Errores y representación digital

Asumamos, pues, que vamos a empezar en un **valor inicial** y que iremos, poco a poco, variando el valor de cada variable (duh) para llegar a una solución aproximada.

En cada paso debo preguntarme:

- ¿Qué tanto me falta para llegar?
- ¿Para dónde debo moverme?
- ¿Le sumo o le resto?

Errores y representación digital

Asumamos, pues, que vamos a empezar en un valor inicial y que iremos, poco a poco, variando el valor de cada variable (duh) para llegar a una solución aproximada.

En cada paso debo preguntarme:

- ¿Qué tanto me falta para llegar?
- ¿Para dónde debo moverme?
- ¿Le sumo o le resto?

Error Errores y representación digital

Story time: the Wolf

Representación digital Errores y representación digital

Story time: floating points

La solemne y civilizada forma *canónica* de un sistema de ecuaciones lineales, la $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es hermosa, sí; pero no es práctica.

¿Qué pasa si mi sistema de ecuaciones es de 40 ecuaciones y 40 incógnitas? ¿Y si es de 2000?

Dada a la presencia de herramientas para hacer muchos cálculos en poco tiempo, los métodos *iterativos* se volvieron más comunes.

La solemne y civilizada forma can'onica de un sistema de ecuaciones lineales, la $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ es hermosa, sí; pero no es práctica.

¿Qué pasa si mi sistema de ecuaciones es de 40 ecuaciones y 40 incógnitas? ¿Y si es de 2000?

Dada a la presencia de herramientas para hacer muchos cálculos en poco tiempo, los métodos *iterativos* se volvieron más comunes.

La solemne y civilizada forma *canónica* de un sistema de ecuaciones lineales, la $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es hermosa, sí; pero no es práctica.

Dada a la presencia de herramientas para hacer muchos cálculos en poco tiempo, los métodos *iterativos* se volvieron más comunes.

La solemne y civilizada forma *canónica* de un sistema de ecuaciones lineales, la $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es hermosa, sí; pero no es práctica.

Dada a la presencia de herramientas para hacer muchos cálculos en poco tiempo, los métodos *iterativos* se volvieron más comunes.

La solemne y civilizada forma *canónica* de un sistema de ecuaciones lineales, la $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es hermosa, sí; pero no es práctica.

Dada a la presencia de herramientas para hacer muchos cálculos en poco tiempo, los métodos *iterativos* se volvieron más comunes.

Funciones diferenciables vs Aproximaciones Discretas

Mini story time: Continuo versus Discreto