Ecuaciones, propiedades y eliminación

Modelación de la ingeniería a través de la matemática computacional (TC1003B)

M.C. Xavier Sánchez Díaz
sax@tec.mx

Tecnológico de Monterrey

Outline

Ensamblando Robots

¿Ecuaciones y matrices?

IntelliCorp produce dos tipos de procesadores, el `x230` y el `x260` para sus robots.
Para poder fabricarlos, se necesitan **silicio**, **cobre** y **aluminio**.
El `x230` usa 4, 3 y 5 láminas, respectivamente, mientras que el `x260` usa 5, 2 y 6 placas.

	x230	x260
Si	4	5
Cu	3	2
Al	5	6

¿Qué tiene más sentido?

¿Ecuaciones y matrices?

¿Que cada placa se haga con distintos procesadores?

$$S = 4x_1 + 5x_2$$
$$C = 3x_1 + 2x_2$$
$$A = 5x_1 + 6x_2$$

¿Que cada procesador se haga con distintas placas?

$$x_{230} = 4s + 3c + 5a$$
$$x_{260} = 5s + 2c + 6s$$

¿Qué tiene más sentido?

¿Ecuaciones y matrices?

¿Que cada placa se haga con distintos procesadores?

$$S = 4x_1 + 5x_2$$
$$C = 3x_1 + 2x_2$$
$$A = 5x_1 + 6x_2$$

¿Que cada procesador se haga con distintas placas?

$$x_{230} = 4s + 3c + 5a$$
$$x_{260} = 5s + 2c + 6s$$

Transpuesta

¿Ecuaciones y matrices?

Para que tenga más sentido, podemos transponer la matriz. Para eso, reescribiremos las **columnas** de la matriz **como renglones** y los **renglones como columnas**:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Desde ahora, nuestra A^T será $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

¿Cuántas placas necesitaríamos para hacer 3 procesadores de cada tipo?

$$3C = 3\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 15 \\ 15 & 6 & 18 \end{bmatrix} \blacksquare$$

De las operaciones al álgebra

¿Ecuaciones y matrices?

Desde ahora, nuestra A^T será $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

¿Cuántas placas necesitaríamos para hacer 3 procesadores de cada tipo?

$$3C = 3\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 15 \\ 15 & 6 & 18 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Si la nueva tecnología antiestática utiliza 1 placa adicional de cada material para el `x230`, y 2 placas de silicio, 1 de cobre y 1 de aluminio adicionales para el `x260`, ¿cuántas placas necesitaré de ahora en adelante si ahora todos mis procesadores incluirán tecnología antiestática?

Primero, ¿cómo es la matriz de costos de la tecnología antiestática?

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

El nuevo costo entonces es

$$C + S = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix} \blacksquare$$

De las operaciones al álgebra

¿Ecuaciones y matrices?

Si la nueva tecnología antiestática utiliza 1 placa adicional de cada material para el `x230`, y 2 placas de silicio, 1 de cobre y 1 de aluminio adicionales para el `x260`, ¿cuántas placas necesitaré de ahora en adelante si ahora todos mis procesadores incluirán tecnología antiestática?

Primero, ¿cómo es la matriz de costos de la tecnología antiestática?

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

El nuevo costo entonces es

$$C + S = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix} \blacksquare$$

De las operaciones al álgebra

¿Ecuaciones y matrices?

Si la nueva tecnología antiestática utiliza 1 placa adicional de cada material para el `x230`, y 2 placas de silicio, 1 de cobre y 1 de aluminio adicionales para el `x260`, ¿cuántas placas necesitaré de ahora en adelante si ahora todos mis procesadores incluirán tecnología antiestática?

Primero, ¿cómo es la matriz de costos de la tecnología antiestática?

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

El nuevo costo entonces es

$$C + S = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix} \blacksquare$$

De las operaciones al álgebra

¿Ecuaciones y matrices?

Si la nueva tecnología antiestática utiliza 1 placa adicional de cada material para el `x230`, y 2 placas de silicio, 1 de cobre y 1 de aluminio adicionales para el `x260`, ¿cuántas placas necesitaré de ahora en adelante si ahora todos mis procesadores incluirán tecnología antiestática?

Primero, ¿cómo es la matriz de costos de la tecnología antiestática?

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

El nuevo costo entonces es

$$C + S = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix} \blacksquare$$

De las operaciones al álgebra

¿Ecuaciones y matrices?

Nuestra nueva C es ahora $C = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix}$. Si sabemos que cada placa de silicio cuesta \$4, cada placa de cobre \$2 y cada placa de aluminio \$3, ¿Cuál es el precio total de cada procesador en \$?

Nuestro vector de precios es $\mathbf{p} = [4, 2, 3]^T$ así que...

$$
\begin{aligned}
C\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} &= 4 \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 20 + 8 + 18 \\ 28 + 6 + 21 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 46 \\ 55 \end{bmatrix} \blacksquare
\end{aligned}
$$

De las operaciones al álgebra

¿Ecuaciones y matrices?

Nuestra nueva C es ahora $C = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix}$. Si sabemos que cada placa de silicio cuesta \$4, cada placa de cobre \$2 y cada placa de aluminio \$3, ¿Cuál es el precio total de cada procesador en \$?

Nuestro vector de precios es $\mathbf{p} = [4, 2, 3]^T$ así que...

$$\begin{aligned} C\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} &= 4 \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 20 + 8 + 18 \\ 28 + 6 + 21 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 46 \\ 55 \end{bmatrix} \blacksquare \end{aligned}$$

Nuestra nueva C es ahora $C = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix}$. Si sabemos que cada placa de silicio cuesta \$4, cada placa de cobre \$2 y cada placa de aluminio \$3, ¿Cuál es el precio total de cada procesador en \$?

Nuestro vector de precios es $\mathbf{p} = [4, 2, 3]^T$ así que...

$$\begin{aligned} C\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} &= 4\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 20 + 8 + 18 \\ 28 + 6 + 21 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 46 \\ 55 \end{bmatrix} \blacksquare \end{aligned}$$

De las operaciones al álgebra

¿Ecuaciones y matrices?

Ya sabemos el precio de cada procesador. Ahora queremos saber la resistencia eléctrica de cada uno, así como también su peso.

La matriz que contiene esta información (la columna de resistencias y la columna de pesos, por cada material) es $D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

¿Puedo hacer la multiplicación de siempre? ¿Qué matriz obtendré?

$$CD = \begin{bmatrix} 31 & 44 \\ 38 & 47 \end{bmatrix}$$

Que es la matriz de resistencia y peso (heredados de D) de los procesadores (heredados de C).

De las operaciones al álgebra

¿Ecuaciones y matrices?

Ya sabemos el precio de cada procesador. Ahora queremos saber la resistencia eléctrica de cada uno, así como también su peso.

La matriz que contiene esta información (la columna de resistencias y la columna de pesos, por cada material) es $D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

¿Puedo hacer la multiplicación de siempre? ¿Qué matriz obtendré?

$$CD = \begin{bmatrix} 31 & 44 \\ 38 & 47 \end{bmatrix}$$

Que es la matriz de resistencia y peso (heredados de D) de los procesadores (heredados de C).

Ya sabemos el precio de cada procesador. Ahora queremos saber la resistencia eléctrica de cada uno, así como también su peso.
La matriz que contiene esta información (la columna de resistencias y la columna de pesos, por cada material) es $D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

¿Puedo hacer la multiplicación de siempre? ¿Qué matriz obtendré?

$$CD = \begin{bmatrix} 31 & 44 \\ 38 & 47 \end{bmatrix}$$

Que es la matriz de resistencia y peso (heredados de D) de los procesadores (heredados de C).

De las operaciones al álgebra

¿Ecuaciones y matrices?

Volvamos a transponer nuestra matriz para poder manejar pedidos (materiales $\times$ procesador y procesadores $\times$ pedido para obtener materiales $\times$ pedidos): $C = C^T = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

Y asumamos que nos hacen un pedido de 3 procesadores `x230` y 3 procesadores `x260`. ¿Cuánto material necesito?

- ¿Cuál es el vector que representa un pedido de 2 y 0 `x230` y `x260` respectivamente?
- ¿Y si nuestro pedido fuera de 2 y 2?
- ¿Y si fuera de 2 y 3?
- ¿Y si mi pedido fuera de 1 y 1?

De las operaciones al álgebra

¿Ecuaciones y matrices?

Volvamos a transponer nuestra matriz para poder manejar pedidos (materiales × procesador y procesadores × pedido para obtener materiales × pedidos): $C = C^T = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

Y asumamos que nos hacen un pedido de 3 procesadores `x230` y 3 procesadores `x260`. ¿Cuánto material necesito?

- ¿Cuál es el vector que representa un pedido de 2 y 0 `x230` y `x260` respectivamente?
- ¿Y si nuestro pedido fuera de 2 y 2?
- ¿Y si fuera de 2 y 3?
- ¿Y si mi pedido fuera de 1 y 1?

De las operaciones al álgebra

¿Ecuaciones y matrices?

Volvamos a transponer nuestra matriz para poder manejar pedidos (materiales $\times$ procesador y procesadores $\times$ pedido para obtener materiales $\times$ pedidos): $C = C^T = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

Y asumamos que nos hacen un pedido de 3 procesadores `x230` y 3 procesadores `x260`. ¿Cuánto material necesito?

- ¿Cuál es el vector que representa un pedido de 2 y 0 `x230` y `x260` respectivamente?
- ¿Y si nuestro pedido fuera de 2 y 2?
- ¿Y si fuera de 2 y 3?
- ¿Y si mi pedido fuera de 1 y 1?

De las operaciones al álgebra

¿Ecuaciones y matrices?

Volvamos a transponer nuestra matriz para poder manejar pedidos (materiales $\times$ procesador y procesadores $\times$ pedido para obtener materiales $\times$ pedidos): $C = C^T = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

Y asumamos que nos hacen un pedido de 3 procesadores `x230` y 3 procesadores `x260`. ¿Cuánto material necesito?

- ¿Cuál es el vector que representa un pedido de 2 y 0 `x230` y `x260` respectivamente?
- ¿Y si nuestro pedido fuera de 2 y 2?
- ¿Y si fuera de 2 y 3?
- ¿Y si mi pedido fuera de 1 y 1?

De las operaciones al álgebra

¿Ecuaciones y matrices?

Volvamos a transponer nuestra matriz para poder manejar pedidos (materiales $\times$ procesador y procesadores $\times$ pedido para obtener materiales $\times$ pedidos): $C = C^T = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

Y asumamos que nos hacen un pedido de 3 procesadores `x230` y 3 procesadores `x260`. ¿Cuánto material necesito?

- ¿Cuál es el vector que representa un pedido de 2 y 0 `x230` y `x260` respectivamente?
- ¿Y si nuestro pedido fuera de 2 y 2?
- ¿Y si fuera de 2 y 3?
- ¿Y si mi pedido fuera de 1 y 1?

Matriz escalar

¿Ecuaciones y matrices?

Una matriz escalar es una matriz que sólo tiene **escalares** en la **diagonal**. Sirven para *escalar* una matriz: cada una columna por un *cierto* factor.

¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 21 \\ 8 & 9 \\ 12 & 21 \end{bmatrix}$$

Matriz escalar

¿Ecuaciones y matrices?

Una matriz escalar es una matriz que sólo tiene **escalares** en la **diagonal**. Sirven para *escalar* una matriz: cada una columna por un *cierto* factor.

¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 21 \\ 8 & 9 \\ 12 & 21 \end{bmatrix}$$

Matriz escalar

¿Ecuaciones y matrices?

Una matriz escalar es una matriz que sólo tiene **escalares** en la **diagonal**. Sirven para *escalar* una matriz: cada una columna por un *cierto* factor.

¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 21 \\ 8 & 9 \\ 12 & 21 \end{bmatrix}$$

Matriz identidad

Ecuaciones y matrices

De las matrices **escalares**, aquella que al multiplicarla por cualquier matriz A hace que se cumpla *la identidad multiplicativa*, dando como resultado A, se le conoce como matriz identidad.

$$\begin{bmatrix} 10 & 21 \\ 8 & 9 \\ 12 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 21 \\ 8 & 9 \\ 12 & 21 \end{bmatrix}$$

Es decir, una **matriz escalar** con 1 en la diagonal y 0 en el resto de las posiciones. Para representarla usamos la letra I, de I*dentity*.

¿Cuáles serán las dimensiones de una matriz identidad que queremos multiplicar por una matriz de 4×3?

Matriz identidad

Ecuaciones y matrices

De las matrices **escalares**, aquella que al multiplicarla por cualquier matriz A hace que se cumpla *la identidad multiplicativa*, dando como resultado A, se le conoce como matriz identidad.

$$\begin{bmatrix} 10 & 21 \\ 8 & 9 \\ 12 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 21 \\ 8 & 9 \\ 12 & 21 \end{bmatrix}$$

Es decir, una **matriz escalar** con 1 en la diagonal y 0 en el resto de las posiciones. Para representarla usamos la letra I, de I*dentity*.

¿Cuáles serán las dimensiones de una matriz identidad que queremos multiplicar por una matriz de 4×3?

Matriz identidad

Ecuaciones y matrices

De las matrices **escalares**, aquella que al multiplicarla por cualquier matriz A hace que se cumpla *la identidad multiplicativa*, dando como resultado A, se le conoce como matriz identidad.

$$\begin{bmatrix} 10 & 21 \\ 8 & 9 \\ 12 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 21 \\ 8 & 9 \\ 12 & 21 \end{bmatrix}$$

Es decir, una **matriz escalar** con 1 en la diagonal y 0 en el resto de las posiciones. Para representarla usamos la letra I, de I*dentity*.

¿Cuáles serán las dimensiones de una matriz identidad que queremos multiplicar por una matriz de 4×3?

Matriz identidad

Ecuaciones y matrices

De las matrices **escalares**, aquella que al multiplicarla por cualquier matriz A hace que se cumpla *la identidad multiplicativa*, dando como resultado A, se le conoce como matriz identidad.

$$\begin{bmatrix} 10 & 21 \\ 8 & 9 \\ 12 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 21 \\ 8 & 9 \\ 12 & 21 \end{bmatrix}$$

Es decir, una **matriz escalar** con 1 en la diagonal y 0 en el resto de las posiciones. Para representarla usamos la letra I, de I*dentity*.

¿Cuáles serán las dimensiones de una matriz identidad que queremos multiplicar por una matriz de 4×3?

Álgebra de matrices

Ecuaciones y matrices

Asumamos que tenemos $AX = B$, donde tanto A como B y X son matrices. ¿Cómo hacemos para despejar la matriz X?

... (no, no es dividiendo. Recordemos que AB no es lo mismo que BA)

Si la multiplicación de matrices es una *transformación lineal* que aplicamos a otra matriz... debe existir algo que la revierta, ¿no? ...

... Sí, pero no siempre.

Ecuaciones lineales

Ecuaciones y matrices

Una ecuación es **una igualdad matemática**. En este curso nos enfocaremos en aquellas igualdades que son **lineales**, es decir que todas sus **variables** son de *grado 1* (o con exponente 1).

$$3x + 2y + 4z = 250$$

Una ecuación es una manera muy conveniente de expresar, por ejemplo, que 3 $cocas$, 2 $burgers$ y 4 $papas$ salen \$250.
Si vamos en repetidas ocasiones (y los precios no cambian), podríamos generar más ecuaciones, dependiendo de los pedidos que hagamos, por ejemplo $2x + 2y + 2z = 190$.

Una ecuación es **una igualdad matemática**. En este curso nos enfocaremos en aquellas igualdades que son **lineales**, es decir que todas sus **variables** son de *grado 1* (o con exponente 1).

$$3x + 2y + 4z = 250$$

Una ecuación es una manera muy conveniente de expresar, por ejemplo, que 3 $cocas$, 2 $burgers$ y 4 $papas$ salen \$250.
Si vamos en repetidas ocasiones (y los precios no cambian), podríamos generar más ecuaciones, dependiendo de los pedidos que hagamos, por ejemplo $2x + 2y + 2z = 190$.

Una ecuación es **una igualdad matemática**. En este curso nos enfocaremos en aquellas igualdades que son **lineales**, es decir que todas sus **variables** son de *grado 1* (o con exponente 1).

$$3x + 2y + 4z = 250$$

Una ecuación es una manera muy conveniente de expresar, por ejemplo, que 3 $cocas$, 2 $burgers$ y 4 $papas$ salen \$250.

Si vamos en repetidas ocasiones (y los precios no cambian), podríamos generar más ecuaciones, dependiendo de los pedidos que hagamos, por ejemplo $2x + 2y + 2z = 190$.

Ecuaciones lineales

Ecuaciones y matrices

Una ecuación es **una igualdad matemática**. En este curso nos enfocaremos en aquellas igualdades que son **lineales**, es decir que todas sus **variables** son de *grado 1* (o con exponente 1).

$$3x + 2y + 4z = 250$$

Una ecuación es una manera muy conveniente de expresar, por ejemplo, que 3 $cocas$, 2 $burgers$ y 4 $papas$ salen \$250.
Si vamos en repetidas ocasiones (y los precios no cambian), podríamos generar más ecuaciones, dependiendo de los pedidos que hagamos, por ejemplo $2x + 2y + 2z = 190$.

Disectando una ecuación

Ecuaciones y matrices

$$3x + 2y + 4z = 250$$

- Variables o **incógnitas**
- Coeficientes
- Término constante

Si la reescribimos con el término constante del lado izquierdo, podemos obtener:

$$3x + 2y + 4z - 250 = 0$$

que se conoce como **ecuación homogénea**.

Disectando una ecuación

Ecuaciones y matrices

$$3x + 2y + 4z = 250$$

- Variables o **incógnitas**
- Coeficientes
- Término constante

Si la reescribimos con el término constante del lado izquierdo, podemos obtener:

$$3x + 2y + 4z - 250 = 0$$

que se conoce como **ecuación homogénea**.

Disectando una ecuación

Ecuaciones y matrices

$$3x + 2y + 4z = 250$$

- Variables o **incógnitas**
- Coeficientes
- Término constante

Si la reescribimos con el término constante del lado izquierdo, podemos obtener:

$$3x + 2y + 4z - 250 = 0$$

que se conoce como **ecuación homogénea**.

Disectando una ecuación

Ecuaciones y matrices

$$3x + 2y + 4z = 250$$

- Variables o **incógnitas**
- Coeficientes
- Término constante

Si la reescribimos con el término constante del lado izquierdo, podemos obtener:

$$3x + 2y + 4z - 250 = 0$$

que se conoce como **ecuación homogénea**.

Disectando una ecuación

Ecuaciones y matrices

$$3x + 2y + 4z = 250$$

- Variables o **incógnitas**
- Coeficientes
- Término constante

Si la reescribimos con el término constante del lado izquierdo, podemos obtener:

$$3x + 2y + 4z - 250 = 0$$

que se conoce como **ecuación homogénea**.

Disectando una ecuación

Ecuaciones y matrices

$$3x + 2y + 4z = 250$$

- Variables o **incógnitas**
- Coeficientes
- Término constante

Si la reescribimos con el término constante del lado izquierdo, podemos obtener:

$$3x + 2y + 4z - 250 = 0$$

que se conoce como **ecuación homogénea**.

Matrices para ecuaciones

Ecuaciones y matrices

Podemos usar matrices para representar un sistema de ecuaciones lineales, que son múltiples ecuaciones **simultáneas**:

$$
\begin{aligned}
3x + 2y + 4z &= 270 \\
2x + 2y + 2z &= 200 \\
4x + 4y + 3z &= 375
\end{aligned}
$$

Podemos hacer una matriz con los coeficientes, y un vector con los resultados, para luego unirlos en una matriz aumentada. Si

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 270 \\ 200 \\ 375 \end{bmatrix} \quad \text{entonces} \quad M = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 270 \\ 2 & 2 & 2 & 200 \\ 4 & 4 & 3 & 375 \end{array}\right]$$

Matrices para ecuaciones

Ecuaciones y matrices

Podemos usar matrices para representar un sistema de ecuaciones lineales, que son múltiples ecuaciones **simultáneas**:

$$
\begin{aligned}
3x + 2y + 4z &= 270 \\
2x + 2y + 2z &= 200 \\
4x + 4y + 3z &= 375
\end{aligned}
$$

Podemos hacer una matriz con los coeficientes, y un vector con los resultados, para luego unirlos en una matriz aumentada. Si

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 270 \\ 200 \\ 375 \end{bmatrix} \quad \text{entonces} \quad M = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 270 \\ 2 & 2 & 2 & 200 \\ 4 & 4 & 3 & 375 \end{array}\right]$$

Matrices para ecuaciones

Ecuaciones y matrices

Podemos usar matrices para representar un sistema de ecuaciones lineales, que son múltiples ecuaciones **simultáneas**:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 4z &= 270 \\ 2x + 2y + 2z &= 200 \\ 4x + 4y + 3z &= 375 \end{aligned}$$

Podemos hacer una matriz con los coeficientes, y un vector con los resultados, para luego unirlos en una matriz aumentada. Si

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 270 \\ 200 \\ 375 \end{bmatrix} \quad \text{entonces} \quad M = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 270 \\ 2 & 2 & 2 & 200 \\ 4 & 4 & 3 & 375 \end{array}\right]$$

Resolviendo sistemas de ecuaciones

Ecuaciones y matrices

Vamos a resolver **el sistema** para encontrar cuánto valen x, y y z. Para eso, sólo podemos usar las siguientes operaciones por renglón:

1. Intercambiar renglones de lugar:

$$R_1 \leftrightarrow R_2$$

2. Escalar renglones (multiplicando por escalar):

$$R_1 \leftarrow cR_1$$

3. A un renglón existente, restarle un otro renglón escalado:

$$R_1 \leftarrow R_1 - cR_2$$

Vamos a resolver **el sistema** para encontrar cuánto valen x, y y z. Para eso, sólo podemos usar las siguientes operaciones por renglón:

1. Intercambiar renglones de lugar:

$$R_1 \leftrightarrow R_2$$

2. Escalar renglones (multiplicando por escalar):

$$R_1 \leftarrow cR_1$$

3. A un renglón existente, restarle un otro renglón escalado:

$$R_1 \leftarrow R_1 - cR_2$$

Resolviendo sistemas de ecuaciones

Ecuaciones y matrices

Vamos a resolver **el sistema** para encontrar cuánto valen x, y y z. Para eso, sólo podemos usar las siguientes operaciones por renglón:

1. Intercambiar renglones de lugar:

$$R_1 \leftrightarrow R_2$$

2. Escalar renglones (multiplicando por escalar):

$$R_1 \leftarrow cR_1$$

3. A un renglón existente, restarle un otro renglón escalado:

$$R_1 \leftarrow R_1 - cR_2$$

Resolviendo sistemas de ecuaciones

Ecuaciones y matrices

Vamos a resolver **el sistema** para encontrar cuánto valen x, y y z. Para eso, sólo podemos usar las siguientes operaciones por renglón:

1. Intercambiar renglones de lugar:

$$R_1 \leftrightarrow R_2$$

2. Escalar renglones (multiplicando por escalar):

$$R_1 \leftarrow cR_1$$

3. A un renglón existente, restarle un otro renglón escalado:

$$R_1 \leftarrow R_1 - cR_2$$

Aplicando las reglas de manera ordenada

Ecuaciones y matrices

El **algoritmo de** eliminación Gaussiana resuelve ecuaciones lineales de la siguiente forma:

1. Prepare la matriz (ordene los renglones para tener el a_{11} distinto de 0)
2. Obtenga 0s debajo de a_{11} usando las reglas anteriores.
3. Olvídese de la columna 1 y fila 1. Pase al a_{22} y **repita** desde el paso 1 **hasta** que tenga una matriz escalonada.
4. Obtenga 0s arriba de a_{mn} usando las reglas anteriores.
5. Olvídese de la columna m y la fila n. Pase al a_{m-1n-1} y repita desde el paso 4 y hasta que consiga la **matriz identidad**.
6. Usted ha terminado.

Eliminación Gaussiana

Ecuaciones y Matrices

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 270 \\ 2 & 2 & 2 & 200 \\ 4 & 4 & 3 & 375 \end{array}\right] \qquad R_2 \leftarrow \frac{R_2}{2}, R_1 \longleftrightarrow R_2$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 3 & 2 & 4 & 270 \\ 4 & 4 & 3 & 375 \end{array}\right] \qquad R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1, R_3 \leftarrow R_3 - 4R_1$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & -1 & 1 & -30 \\ 0 & 0 & -1 & -25 \end{array}\right] \qquad R_2 \leftarrow (-1)R_2, R_3 \leftarrow (-1)R_3$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & -1 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 25 \end{array}\right]$$

Cont. $\longrightarrow$

Eliminación Gaussiana (Cont.)

Ecuaciones y Matrices

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & -1 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 25 \end{array}\right] \qquad R_2 \leftarrow R_2 - R_3, R_1 \leftarrow R_3$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 75 \\ 0 & 1 & 0 & 55 \\ 0 & 0 & 1 & 25 \end{array}\right] \qquad R_1 \leftarrow R_1 - R_2$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 55 \\ 0 & 0 & 1 & 25 \end{array}\right] \blacksquare$$

Por tanto, podemos concluir que $coca = 20, burger = 55$ y $papas = 25$ $\blacksquare$

Matrices Invertibles

Ecuaciones y Matrices

Ahora que ya sabemos lo que es la **eliminación** y la **reducción**, podemos contestar la pregunta... ¿cómo revierto una multiplicación de matrices?

Si C es una matriz de 2×2, entonces si hacemos $C \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ sabemos que obtendremos el triple de C. Esto *podría* ser reversible.

¿Qué pasa si tenemos $C \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$?

¿Es esto reversible?

Matrices Invertibles

Ecuaciones y Matrices

Ahora que ya sabemos lo que es la **eliminación** y la **reducción**, podemos contestar la pregunta. . . ¿cómo revierto una multiplicación de matrices?

Si C es una matriz de 2×2, entonces si hacemos $C \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ sabemos que obtendremos el triple de C. Esto *podría* ser reversible.

¿Qué pasa si tenemos $C \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$?

¿Es esto reversible?

Ahora que ya sabemos lo que es la **eliminación** y la **reducción**, podemos contestar la pregunta. . . ¿cómo revierto una multiplicación de matrices?

Si C es una matriz de 2×2, entonces si hacemos $C \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ sabemos que obtendremos el triple de C. Esto *podría* ser reversible.

¿Qué pasa si tenemos $C \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$?

¿Es esto reversible?

Ahora que ya sabemos lo que es la **eliminación** y la **reducción**, podemos contestar la pregunta...¿cómo revierto una multiplicación de matrices?

Si C es una matriz de 2×2, entonces si hacemos $C \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ sabemos que obtendremos el triple de C. Esto *podría* ser reversible.

¿Qué pasa si tenemos $C \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$?

¿Es esto reversible?

Matriz Invertible

Ecuaciones y Matrices

Como vimos, hay matrices que no se pueden invertir (por ejemplo, la matriz cuadrada de puros 0s). A este tipo de matrices les llamamos *singulares* o *no invertibles*.

Sin embargo, hay otras matrices **cuadradas** que sí podemos revertir. Si A es una matriz cuadrada, es invertible (o *no singular*) siempre que cumpla la siguiente regla:

$$AB = I \text{ y } BA = I$$

¿A qué operación te recuerda esto?

Como vimos, hay matrices que no se pueden invertir (por ejemplo, la matriz cuadrada de puros 0s). A este tipo de matrices les llamamos *singulares* o *no invertibles*.

Sin embargo, hay otras matrices **cuadradas** que sí podemos revertir. Si A es una matriz cuadrada, es invertible (o *no singular*) siempre que cumpla la siguiente regla:

$$AB = I \text{ y } BA = I$$

¿A qué operación te recuerda esto?

Matriz Invertible

Ecuaciones y Matrices

Como vimos, hay matrices que no se pueden invertir (por ejemplo, la matriz cuadrada de puros 0s). A este tipo de matrices les llamamos *singulares* o *no invertibles*.

Sin embargo, hay otras matrices **cuadradas** que sí podemos revertir. Si A es una matriz cuadrada, es invertible (o *no singular*) siempre que cumpla la siguiente regla:

$$AB = I \text{ y } BA = I$$

¿A qué operación te recuerda esto?

Inversión de matrices

Ecuaciones y matrices

Digamos que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, y estamos buscando una matriz B **de las mismas dimensiones** de tal manera que $AB = I_{2\times 2}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

¿Cuáles son las ecuaciones que tenemos para cada una de las casillas en I?

Inversión de matrices

Ecuaciones y matrices

Digamos que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, y estamos buscando una matriz B **de las mismas dimensiones** de tal manera que $AB = I_{2\times 2}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

¿Cuáles son las ecuaciones que tenemos para cada una de las casillas en I?

Digamos que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, y estamos buscando una matriz B **de las mismas dimensiones** de tal manera que $AB = I_{2\times 2}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

¿Cuáles son las ecuaciones que tenemos para cada una de las casillas en I?

Inversión de matrices

Ecuaciones y matrices

$$1 \cdot b_{11} - 2 \cdot b_{21} = 1 \qquad (1)$$
$$3 \cdot b_{11} - 5 \cdot b_{21} = 0 \qquad (2)$$
$$1 \cdot b_{12} - 2 \cdot b_{22} = 0 \qquad (3)$$
$$3 \cdot b_{12} - 5 \cdot b_{22} = 1 \qquad (4)$$

¿Puedes resolver el sistema? (Spoiler alert: sí puedes)

Si el sistema tiene solución, entonces las *variables* serán usadas para construir una nueva matriz que es la inversa de A.

Inversión de matrices

Ecuaciones y matrices

$$1 \cdot b_{11} - 2 \cdot b_{21} = 1 \tag{1}$$

$$3 \cdot b_{11} - 5 \cdot b_{21} = 0 \tag{2}$$

$$1 \cdot b_{12} - 2 \cdot b_{22} = 0 \tag{3}$$

$$3 \cdot b_{12} - 5 \cdot b_{22} = 1 \tag{4}$$

¿Puedes resolver el sistema? (Spoiler alert: sí puedes)

Si el sistema tiene solución, entonces las *variables* serán usadas para construir una nueva matriz que es la inversa de A.

Inversión de matrices

Ecuaciones y matrices

$$1 \cdot b_{11} - 2 \cdot b_{21} = 1 \tag{1}$$

$$3 \cdot b_{11} - 5 \cdot b_{21} = 0 \tag{2}$$

$$1 \cdot b_{12} - 2 \cdot b_{22} = 0 \tag{3}$$

$$3 \cdot b_{12} - 5 \cdot b_{22} = 1 \tag{4}$$

¿Puedes resolver el sistema? (Spoiler alert: sí puedes)

Si el sistema tiene solución, entonces las *variables* serán usadas para construir una nueva matriz que es la inversa de A.