### Del Álgebra a la Computadora: Métodos Numéricos para Sistemas de Ecuaciones

Modelación de la ingeniería a través de la matemática computacional (TC1003B)

M.C. Xavier Sánchez Díaz sax@tec.mx



#### Outline

Repaso de Eliminación Gaussiana

2 La forma canónica de los SEL

3 Del álgebra a los números

#### Sólo podemos usar cualquiera de las siguientes reglas:

Intercambiar renglones de lugar

$$R_1 \leftrightarrow R_2$$

Escalar renglones (multiplicando por escalar)

$$R_1 \leftarrow cR_1$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - cR_2$$

Sólo podemos usar cualquiera de las siguientes reglas:

Intercambiar renglones de lugar:

$$R_1 \leftrightarrow R_2$$

2 Escalar renglones (multiplicando por escalar):

$$R_1 \leftarrow cR_1$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - cR_2$$

Sólo podemos usar cualquiera de las siguientes reglas:

1 Intercambiar renglones de lugar:

$$R_1 \leftrightarrow R_2$$

2 Escalar renglones (multiplicando por escalar):

$$R_1 \leftarrow cR_1$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - cR_2$$

Sólo podemos usar cualquiera de las siguientes reglas:

Intercambiar renglones de lugar:

$$R_1 \leftrightarrow R_2$$

Escalar renglones (multiplicando por escalar):

$$R_1 \leftarrow cR_1$$

$$R_1 \leftarrow R_1 - cR_2$$

Para el sistema siguiente...

$$x + y + z = 2$$
$$x + z = 1$$
$$2x + 5y + 2z = 7$$

Consigamos la matriz aumentada del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

# Otro ejemplo de eliminación Eliminación

Para el sistema siguiente...

$$x + y + z = 2$$
$$x + z = 1$$
$$2x + 5y + 2z = 7$$

Consigamos la matriz aumentada del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Para el sistema siguiente...

$$x + y + z = 2$$
$$x + z = 1$$
$$2x + 5y + 2z = 7$$

Consigamos la matriz aumentada del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Para el sistema siguiente...

$$x + y + z = 2$$
$$x + z = 1$$
$$2x + 5y + 2z = 7$$

Consigamos la matriz aumentada del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

#### Eliminación

Primero reordenemos  $(R_2 \longleftrightarrow R_3)$ 

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y reduzcamos el segundo renglón  $(R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1)$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminación

Primero reordenemos  $(R_2 \longleftrightarrow R_3)$ 

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y reduzcamos el segundo renglón  $(R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1)$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminación

Primero reordenemos  $(R_2 \longleftrightarrow R_3)$ 

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y reduzcamos el segundo renglón ( $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ ):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

#### Eliminación

Primero reordenemos  $(R_2 \longleftrightarrow R_3)$ 

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y reduzcamos el segundo renglón ( $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$ ):

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 3 & 0 & 3 \\
1 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

#### Eliminación

Primero reordenemos  $(R_2 \longleftrightarrow R_3)$ 

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y reduzcamos el segundo renglón  $(R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1)$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

#### Eliminación

Primero reordenemos  $(R_2 \longleftrightarrow R_3)$ 

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Y reduzcamos el segundo renglón  $(R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1)$ :

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 3 & 0 & 3 \\
1 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}$$

# Otro ejemplo de elimnación Eliminación

Podemos reducir ahora las y en  $R_1$  ( $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$ ):

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & | & 1 \\
0 & 1 & 0 & | & 1 \\
1 & 0 & 1 & | & 1
\end{bmatrix}$$

¿Podemos hacer algo más? ¿Qué significa esta matriz? Si la pasamos a ecuaciones...

$$x + z = 1$$
$$y = 1$$
$$x + z = 1$$

Podemos reducir ahora las y en  $R_1$  ( $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$ ):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

¿Podemos hacer algo más? ¿Qué significa esta matriz? Si la pasamos a ecuaciones...

$$x + z = 1$$
$$y = 1$$
$$x + z = 1$$

# Otro ejemplo de elimnación Eliminación

Podemos reducir ahora las y en  $R_1$  ( $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$ ):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

¿Podemos hacer algo más? ¿Qué significa esta matriz? Si la pasamos a ecuaciones...

$$x + z = 1$$
$$y = 1$$
$$x + z = 1$$

# Otro ejemplo de elimnación Eliminación

Podemos reducir ahora las y en  $R_1$  ( $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$ ):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

¿Podemos hacer algo más? ¿Qué significa esta matriz? Si la pasamos a ecuaciones...

$$x + z = 1$$
$$y = 1$$
$$x + z = 1$$

Eliminación

Podemos reducir ahora las y en  $R_1$  ( $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$ ):

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & | & 1 \\
0 & 1 & 0 & | & 1 \\
1 & 0 & 1 & | & 1
\end{bmatrix}$$

¿Podemos hacer algo más? ¿Qué significa esta matriz? Si la pasamos a ecuaciones...

$$x + z = 1$$
$$y = 1$$
$$x + z = 1$$

Eliminación

Podemos reducir ahora las y en  $R_1$  ( $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$ ):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

¿Podemos hacer algo más? ¿Qué significa esta matriz? Si la pasamos a ecuaciones...

$$x + z = 1$$
$$y = 1$$
$$x + z = 1$$

Eliminación

Podemos reducir ahora las y en  $R_1$  ( $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$ ):

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & | & 1 \\
0 & 1 & 0 & | & 1 \\
1 & 0 & 1 & | & 1
\end{bmatrix}$$

¿Podemos hacer algo más? ¿Qué significa esta matriz? Si la pasamos a ecuaciones...

$$x + z = 1$$
$$y = 1$$
$$x + z = 1$$

... lo que significa que y=1, z=1-x y x=1-z Este tipo de soluciones también son válidas.

Eliminación

Podemos reducir ahora las y en  $R_1$  ( $R_1 \leftarrow R_1 - R_2$ ):

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & | & 1 \\
0 & 1 & 0 & | & 1 \\
1 & 0 & 1 & | & 1
\end{bmatrix}$$

¿Podemos hacer algo más? ¿Qué significa esta matriz? Si la pasamos a ecuaciones...

$$x + z = 1$$
$$y = 1$$
$$x + z = 1$$

... lo que significa que y=1, z=1-x y x=1-z Este tipo de soluciones **también son válidas**.

Estamos encontrando los valores de x, y y z que hacen que el sistema sea congruente (si es que es posible).

Asumamos un sistema como el siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es el valor de x? ¿Y el de y y z? Podemos identificar claramente que a la izquierda conseguimos la **matriz identidad**.....y a la derecha un **vector** de valores constantes . ¿A qué nos recuerda esto?

Estamos encontrando los valores de x, y y z que hacen que el sistema sea congruente (si es que es posible).

Asumamos un sistema como el siguiente:

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & b_1 \\
0 & 1 & 0 & b_2 \\
0 & 0 & 1 & b_3
\end{bmatrix}$$

¿Cuál es el valor de x? ¿Y el de y y z? Podemos identificar claramente que a la izquierda conseguimos la **matriz identidad....**.y a la derecha un **vector** de valores constantes . ¿A qué nos recuerda esto?

Estamos encontrando los valores de x, y y z que hacen que el sistema sea congruente (si es que es posible).

Asumamos un sistema como el siguiente:

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & b_1 \\
0 & 1 & 0 & b_2 \\
0 & 0 & 1 & b_3
\end{bmatrix}$$

#### ¿Cuál es el valor de x? ¿Y el de y y z?

Podemos identificar claramente que a la izquierda conseguimos la matriz identidad.....y a la derecha un vector de valores constantes . ¿A qué nos recuerda esto?

Estamos encontrando los valores de x, y y z que hacen que el sistema sea congruente (si es que es posible).

Asumamos un sistema como el siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es el valor de x? ¿Y el de y y z? Podemos identificar claramente que a la izquierda conseguimos la **matriz** identidad.....y a la derecha un vector de valores constantes . ¿A qué nos recuerda esto?

Estamos encontrando los valores de x, y y z que hacen que el sistema sea congruente (si es que es posible).

Asumamos un sistema como el siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{bmatrix}$$

¿Cuál es el valor de x? ¿Y el de y y z? Podemos identificar claramente que a la izquierda conseguimos la **matriz identidad.....** y a la derecha un **vector** de valores constantes . ¿A qué pos recuerda esto?

Estamos encontrando los valores de x, y y z que hacen que el sistema sea congruente (si es que es posible).

Asumamos un sistema como el siguiente:

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & b_1 \\
0 & 1 & 0 & b_2 \\
0 & 0 & 1 & b_3
\end{bmatrix}$$

¿Cuál es el valor de x? ¿Y el de y y z? Podemos identificar claramente que a la izquierda conseguimos la **matriz identidad**.....y a la derecha un **vector** de valores constantes . ¿A qué nos recuerda esto?

Realmente, podemos *descomponer* el sistema de ecuaciones lineales en tres elementos:

• Una matriz cuadrada de coeficientes 
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

② Un vector de variables  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ 

Realmente, podemos *descomponer* el sistema de ecuaciones lineales en tres elementos:

- ① Una matriz cuadrada de coeficientes  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$
- ② Un vector de variables  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$

Realmente, podemos *descomponer* el sistema de ecuaciones lineales en tres elementos:

- ① Una matriz cuadrada de coeficientes  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$
- ② Un vector de variables  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$

Realmente, podemos *descomponer* el sistema de ecuaciones lineales en tres elementos:

- ① Una matriz cuadrada de coeficientes  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$
- ② Un vector de variables  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$

#### Reflexión

Para cada paso de la eliminación...¿cómo sabes qué paso debería seguir?

#### Una idea

¿Qué tal si empezamos a poner valores al tanteo, y vamos *calando* distintos valores para cada variable?

# Errores y representación digital

Asumamos, pues, que vamos a empezar en un **valor inicial** y que iremos, poco a poco, variando el valor de cada variable (duh) para llegar a una solución aproximada.

En cada paso debo preguntarme:

- ¿Qué tanto me falta para llegar?
- ¡Para dónde debo moverme?
- ¿Le sumo o le resto?

## Errores y representación digital

Asumamos, pues, que vamos a empezar en un **valor inicial** y que iremos, poco a poco, variando el valor de cada variable (duh) para llegar a una solución aproximada.

En cada paso debo preguntarme:

- ¿Qué tanto me falta para llegar?
- ¡Para dónde debo moverme?
- ¿Le sumo o le resto?

# Errores y representación digital

Asumamos, pues, que vamos a empezar en un **valor inicial** y que iremos, poco a poco, variando el valor de cada variable (duh) para llegar a una solución aproximada.

En cada paso debo preguntarme:

- ¿Qué tanto me falta para llegar?
- ¿Para dónde debo moverme?
- ¿Le sumo o le resto?

# Errores y representación digital

Asumamos, pues, que vamos a empezar en un **valor inicial** y que iremos, poco a poco, variando el valor de cada variable (duh) para llegar a una solución aproximada.

En cada paso debo preguntarme:

- ¿Qué tanto me falta para llegar?
- ¿Para dónde debo moverme?
- ¿Le sumo o le resto?

## Errores y representación digital

Asumamos, pues, que vamos a empezar en un **valor inicial** y que iremos, poco a poco, variando el valor de cada variable (duh) para llegar a una solución aproximada.

En cada paso debo preguntarme:

- ¿Qué tanto me falta para llegar?
- ¿Para dónde debo moverme?
- ¿Le sumo o le resto?

## Errores y representación digital

Asumamos, pues, que vamos a empezar en un **valor inicial** y que iremos, poco a poco, variando el valor de cada variable (duh) para llegar a una solución aproximada.

En cada paso debo preguntarme:

- ¿Qué tanto me falta para llegar?
- ¿Para dónde debo moverme?
- ¿Le sumo o le resto?

## Errores y representación digital

Asumamos, pues, que vamos a empezar en un **valor inicial** y que iremos, poco a poco, variando el valor de cada variable (duh) para llegar a una solución aproximada.

En cada paso debo preguntarme:

- ¿Qué tanto me falta para llegar?
- ¿Para dónde debo moverme?
- ¿Le sumo o le resto?

Error Errores y representación digital

Story time: the Wolf

# Representación digital Errores y representación digital

Story time: floating points

La solemne y civilizada forma *canónica* de un sistema de ecuaciones lineales, la  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  es hermosa, sí; pero no es práctica.

¿Qué pasa si mi sistema de ecuaciones es de 40 ecuaciones y 40 incógnitas? ¿Y si es de 2000?

Dada a la presencia de herramientas para hacer muchos cálculos en poco tiempo, los métodos *iterativos* se volvieron más comunes.

La solemne y civilizada forma *canónica* de un sistema de ecuaciones lineales, la  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  es hermosa, sí; pero no es práctica.

¿Qué pasa si mi sistema de ecuaciones es de 40 ecuaciones y 40 incógnitas? ¿Y si es de 2000?

Dada a la presencia de herramientas para hacer muchos cálculos en poco tiempo, los métodos *iterativos* se volvieron más comunes.

La solemne y civilizada forma *canónica* de un sistema de ecuaciones lineales, la  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  es hermosa, sí; pero no es práctica.

¿Qué pasa si mi sistema de ecuaciones es de 40 ecuaciones y 40 incógnitas? ¿Y si es de 2000?

Dada a la presencia de herramientas para hacer muchos cálculos en poco tiempo, los métodos *iterativos* se volvieron más comunes.

La solemne y civilizada forma *canónica* de un sistema de ecuaciones lineales, la  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  es hermosa, sí; pero no es práctica.

¿Qué pasa si mi sistema de ecuaciones es de 40 ecuaciones y 40 incógnitas? ¿Y si es de 2000?

Dada a la presencia de herramientas para hacer muchos cálculos en poco tiempo, los métodos *iterativos* se volvieron más comunes.

La solemne y civilizada forma *canónica* de un sistema de ecuaciones lineales, la  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  es hermosa, sí; pero no es práctica.

Dada a la presencia de herramientas para hacer muchos cálculos en poco tiempo, los métodos *iterativos* se volvieron más comunes.

# Funciones diferenciables vs Aproximaciones Discretas

# Mini story time: Continuo versus Discreto