Divide and Conquer Optimization 문제풀이

서강대학교 전해성(seastar105)

BOJ 13261번 탈옥

문제 요약

크기가 L인 배열 C가 주어진다. 이 배열을 G개의 연속적인 구간으로 나누려고 한다.
구간 [s,e]의 점수는 $(C_s+C_{s+1}+\cdots+C_e)(e-s+1)$로 정의된다.
모든 구간의 점수의 합의 최솟값을 구해라.
L <= 8000, G <= 800

아래와 같은 dp식을 생각해보자.

$dp(i,j) = [1, j]$를 i개의 연속구간으로 나눴을 때의 최소값

$$dp(i,j) = \min_{k<j}(dp(i-1, j-k) + C(j-k+1, j))$$

$$C(s,e) = (c_s + c_{s+1} + \cdots + c_e)(e-s+1)$$

BOJ 13261번 탈옥

$dp(i,j) = [1, \mathrm{j}]$를 i개의 연속구간으로 나눴을 때의 최소값

$$dp(i,j) = \min_{k<j}(dp(i-1, j-k) + C(j-k+1, j))$$

$$C(s,e) = (c_s + c_{s+1} + \cdots + c_e)(e-s+1)$$

원하는 dp값은 dp(G,L)인데 나이브하게 구하면 $O(GL^2)$만큼 걸린다.
여기서 cost 함수인 C를 살펴보자.

아래와 같은 부등식이 성립하면 DnC optimization을 수행할 수 있다.

$$let \quad a \le b \le c \le d, \quad C(a,c) + C(b,d) \le C(a,d) + C(b,c)$$

BOJ 13261번 탈옥

$$S_i = \sum_{k=1}^{i} C_k$$
$$C(s,e) = (S_e - S_{s-1})(e - s + 1)$$

$$let \quad a \le b \le c \le d, \quad C(a,c) + C(b,d) \le C(a,d) + C(b,c)$$

부등식의 우변을 좌변으로 넘겨주면 아래와 같이 부등식이 성립함을 알 수 있다.

$$(c-a+1)(S_c - S_{a-1}) + (d-b+1)(S_d - S_{b-1}) \le (d-a+1)(S_d - S_{a-1}) + (c-b+1)(S_c - S_{b-1})$$
$$(d-c)S_{a-1} + (c-d)S_{b-1} + (b-a)S_c + (a-b)S_d \le 0$$
$$(d-c)(S_{a-1} - S_{b-1}) + (b-a)(S_c - S_d) \le 0$$

C(i, j)가 사각부등식을 만족하므로, 최적해가 단조성을 가진다. 이를 이용하여 DnC Optimization을 사용 할 수 있다.

따라서, 시간복잡도를 $O(GL^2)$에서 $O(GL\log L)$로 줄일 수 있다.

BOJ 14636번 Money for Nothing

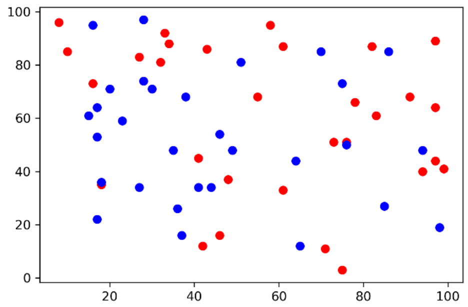
문제 요약

2차원 좌표계에서 크기가 M인 점의 집합 P(p_i,d_i)와 크기가 N인 점의 집합 Q(q_j,e_j)가 주어진다.

P의 점을 왼쪽 아래로 하고, Q의 점을 오른쪽 위로 하는 직사각형 중에서 가장 큰 직사각형의 크기를 찾아라.

1 <= M,N <= 500000, 1 <= (좌표 범위) <= 10^9

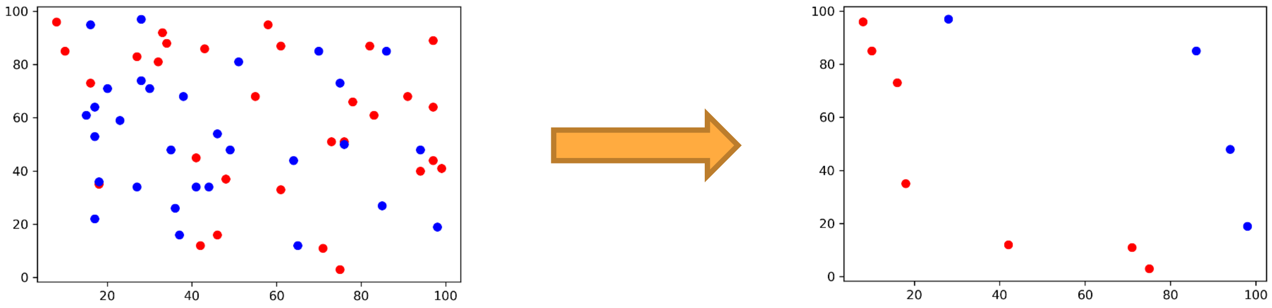
아래 그림과 같이 점들이 주어진다. 빨간 점이 P, 파란 점이 Q다.



BOJ 14636번 Money for Nothing

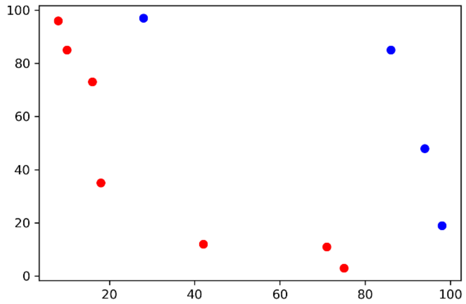
중요한 관찰은 각 점 집합 P,Q에서 절대 최적의 점이 될 수 없는 점들이 있다.

P에 속하는 어떤 점 A(p_A,d_A)가 있다고 하자. P에 속하는 다른 점 B(p_B,d_B)가 $p_B <= p_A$거나 $e_B <= e_A$라면 A는 절대 최적의 점이 될 수 없다.
A대신 B를 고르는 것이 무조건 그 넓이가 크기 때문이다.
Q에 속하는 점들 중에서도 위와 같은 방식으로 절대 최적의 점이 될 수 없는 점들을 찾을 수 있다. 일단 그러한 점들을 지워주자.



BOJ 14636번 Money for Nothing

왼쪽 아래의 점들을 x좌표 순으로 $L_0, L_1, \cdots, L_{n-1}$, 오른쪽 위의 점들을 x좌표 순서대로 $U_0, U_1, \cdots, U_{m-1}$이라고 하자.



각 L_i에 대해서 L_i를 왼쪽 아래 점으로 하는 직사각형 중에서 넓이가 가장 큰 직사각형의 넓이를 S_i라고 하자.
우리가 찾는 답은 max S_i가 된다.

이를 나이브하게 찾으면 시간복잡도는 O(nm)이다. 시간초과가 난다.

넓이가 S_i가 되는 U_k의 k를 opt_i라고 하자.
이 문제가 dp는 아니지만, opt_i가 단조성을 보인다면 이것 또한 최적화가 가능하지 않을까?

BOJ 14636번 Money for Nothing

단조성을 증명하기 위해서 다음과 같은 사실을 증명하자.

$$S(i,j) = L_i \text{랑} U_j \text{로 만든 직사각형의 넓이}$$
$$let\ \ i < j,\ k < l,\ \ S(i,k) + S(j,l) > S(i,l) + S(j,k)$$

L과 U는 전처리가 끝난 집합이므로 아래와 같은 대소관계가 있고, 이를 식에 그대로 넣으면 위 부등식이 성립함을 알 수 있다.

$$x_i < x_j,\ y_i > y_j$$
$$x_k < x_l,\ y_k > y_l$$

위 부등식과 opt_i가 L_i를 왼쪽 아래로 하는 직사각형 중 넓이가 가장 큰 직사각형의 넓이를 만드는 U_k란 정의를 이용하면 opt_i <= opt_j임을 증명할 수 있다.
따라서, DnC opt를 사용 할 수 있고 이를 이용하면 시간 내에 문제를 풀 수 있다.

Problem Set

- Essential
  - 13261 - 탈옥
  - 14636 - Money for Nothing
- Practice
  - 13262 - 수열의 OR 점수
  - 11001 - 김치
  - 12766 - 지사 배정
  - 16138 - 수강신청
  - 20180 - Two Buildings
  - 14179 - 크리스마스 이브
  - 13058 - Jewel Thief