Convex Hull Trick
문제풀이

서강대학교 전해성(seastar105)

BOJ 4008번 특공대

문제 요약

길이 N의 배열이 주어진다. 연속된 한 구간의 점수는 다음과 같이 정의된다.

구간의 숫자들의 합이 x라면 ax^2+bx+c다. 이제 길이 N인 배열을 연속된

구간들로 쪼갤 건데 구간들의 점수 합이 최댓값을 구하여라.

$N <= 1,000,000$이다.

BOJ 4008번 특공대

다음과 같은 dp식을 세워볼 수 있다.

$$dp(i) = 1\text{부터 i까지의 구간들의 점수 최댓값}$$
$$dp(i) = \max_{j<i}\left(dp(j) + ax^2 + bx + c\right), \quad x = p_i - p_j$$

P_i는 prefix sum을 나타낸다. x에 psum을 그대로 대입하면 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$dp(i) = \max_{j<i}\left(dp(j) + ax^2 + bx + c\right), \quad x = p_i - p_j$$
$$dp(i) = \max_{j<i}\left(-2ap_jp_i + ap_j^2 - bp_j + dp(j)\right) + ap_i^2 + bp_i + c$$

BOJ 4008번 특공대

$$dp(i) = \max_{j<i} \left(-2ap_j p_i + ap_j^2 - bp_j + dp(j)\right) + ap_i^2 + bp_i + c$$

$$dp(i) = \max_{j<i} \left(m_j p_i + b_j\right) + c_i$$

$$m_j = -2ap_j, \quad b_j = ap_j^2 - bp_j + dp(j), \quad c_i = ap_i^2 + bp_i + c$$

dp식이 CHT를 적용할 수 있는 꼴이 됐다. 우리가 관리할 직선들의 기울기는 $-2ap_i$고,

y절편이 $ap_j^2 - bp_j + dp(j)$이다.

따라서, CHT를 사용하면 O(NlogN)에 해결 가능하다.

BOJ 4008번 특공대

$$dp(i) = \max_{j<i} \left(-2ap_jp_i + ap_j^2 - bp_j + dp(j)\right) + ap_i^2 + bp_i + c$$

$$dp(i) = \max_{j<i} \left(m_jp_i + b_j\right) + c_i$$

$$m_j = -2ap_j, \quad b_j = ap_j^2 - bp_j + dp(j), \quad c_i = ap_i^2 + bp_i + c$$

a가 음수고 p_i가 prefix sum이기 때문에 j가 증가하며 추가되는 직선들의 기울기들도 단조 증가한다.

그리고 p_i가 x값으로 사용되기 때문에 쿼리로 주어지는 점들도 단조 증가한다.

따라서, 이 문제를 O(N)에도 해결이 가능하다

BOJ 15249번 Building Bridges

문제 요약

기둥이 N개 있는데 제일 처음 기둥과 마지막 기둥을 이어주려고 한다.

각 기둥은 기둥을 무너뜨리는 데 필요한 비용 w_i와 높이 h_i를 가지고 있다. i번째 기둥과 j번째 기둥을 잇는 데에 드는 비용은 $(h_i-h_j)^2+(w_{i+1}+\cdots+w_{j-1})$이 된다. 1번 기둥부터 N번 기둥까지를 잇는 데 드는 비용의 최솟값을 구해야 한다.

N <= 100,000

BOJ 15249번 Building Bridges

또 dp식을 세워보자

$$dp(i) = 1\text{번부터 } i\text{번까지 이었을 때 최소 비용}$$
$$dp(i) = \min_{j<i}(dp(j) + (h_i - h_j)^2 + p_{i-1} - p_j)$$
$$dp(i) = \min_{j<i}(-2h_jh_i + h_j^2 - p_j + dp(j)) + h_i^2 + p_{i-1}$$

CHT를 적용할 수 있는 꼴이 나왔다.

다만, Convex Hull에 추가되는 직선들의 기울기가 단조성을 갖고 있지 않다.

기울기들은 다 알지만 y절편에 쓰이는 dp(j)를 모른다.

즉, Dynamic CHT를 사용해야 한다.

BOJ 15249번 Building Bridges

직접 구현해보는 것도 구현 연습에 도움이 될 거라고는 생각하지만 일단 가져다 쓰자.

https://bit.ly/38ivnjP - LineContainer

해당 구현체는 max값을 구한다. 기울기와 절편의 부호를 바꿔서 직선을 저장하고,

쿼리 결과의 부호를 바꾸면 min값을 얻을 수 있다.

Problem Set

- Essential
  - 4008 - 특공대
  - 15249 - Buliding Bridges
- Practice
  - 13263 - 나무 자르기
  - 6171 - 땅따먹기
  - 17526 - Star Trek
  - 5254 - Balls
  - 10067 - 수열 나누기
  - 14751 - Leftmost Segment
  - 16631 - Longest Life
  - 3319 - 전령들
  - **15958 - 프로도의 100일 준비**