FFT in PS
문제풀이

서강대학교 전해성(seastar105)

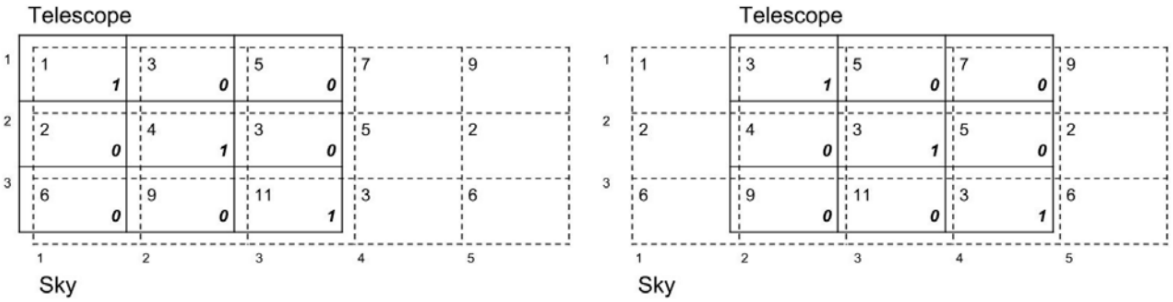
BOJ 14756번 Telescope

2017년 대전 인터넷 예선 L번입니다.

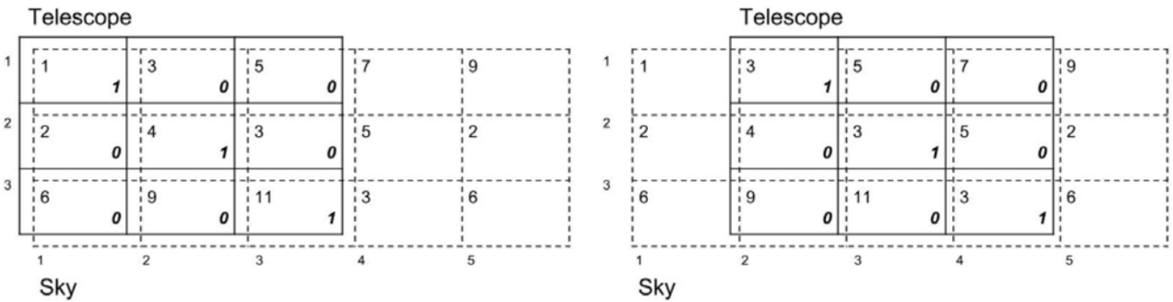
문제 요약

$m \times n$ 행렬 T와 $m \times l$ 행렬 P, 그리고 숫자 W가 주어집니다.

$W_k = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} T(i, j+k)P(i, j)$ 라고 할 때, $W_k > W$인 횟수를 출력하는 문제입니다.



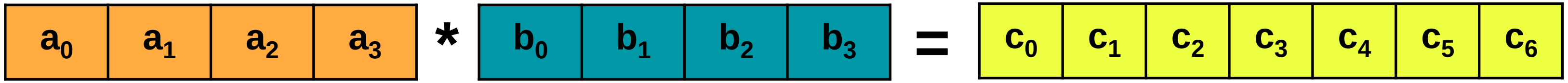
BOJ 14756번 Telescope

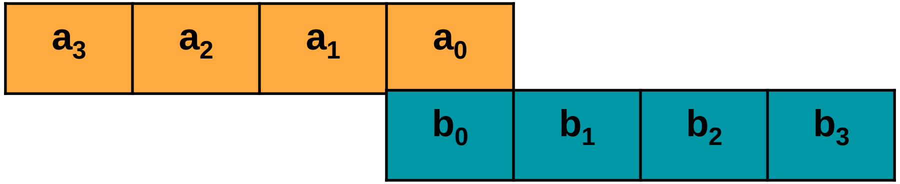


그림처럼 m by n 행렬에서 m by l 행렬을 슬라이딩 시키면서 그 위치에서 두 행렬의 pointwise multiplication sum을 구합니다. 그리고 그 값이 W를 넘는 횟수를 구하는 문제입니다.

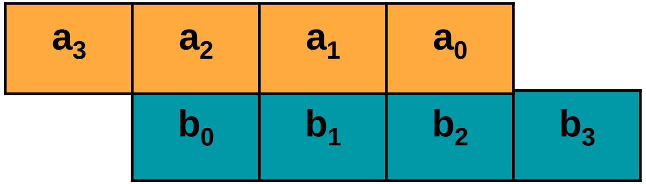
나이브하게 접근 하면 O(nml)로 시간초과를 받습니다. 그러나 FFT를 이용하면 빠르게 가능합니다.

BOJ 14756번 Telescope

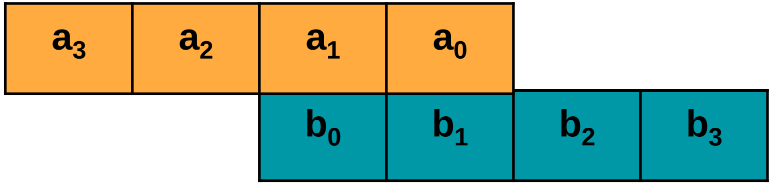




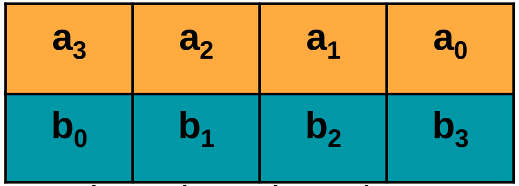
$c_0=a_0b_0$



$c_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0$



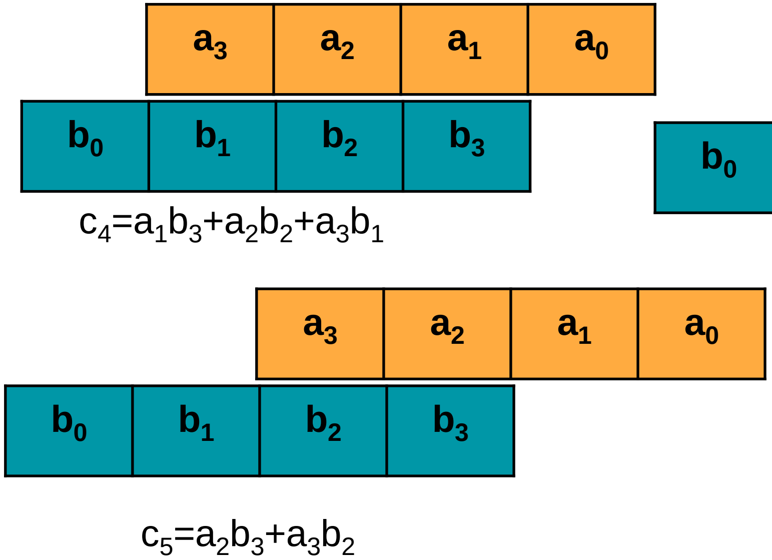
$c_1=a_0b_1+a_1b_0$

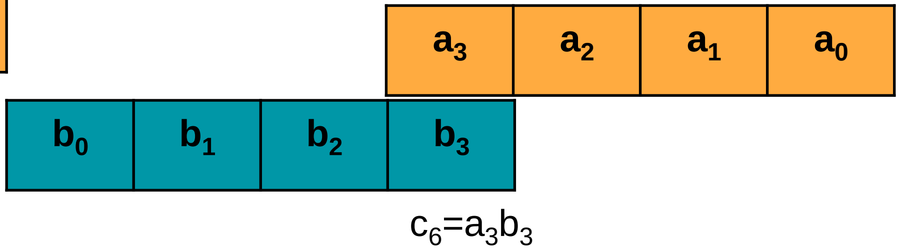


$c_3=a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0$

BOJ 14756번 Telescope

$$[a_0 \mid a_1 \mid a_2 \mid a_3] * [b_0 \mid b_1 \mid b_2 \mid b_3] = [c_0 \mid c_1 \mid c_2 \mid c_3 \mid c_4 \mid c_5 \mid c_6]$$





Convolution 연산을 잘 살펴보면, 한 수열을 가만히 있고 다른 수열이 뒤집어진 채로 슬라이딩하면서 pointwise-multiplication sum을 구하는 형태를 하고 있습니다.
이 문제에서 본 연산과 같습니다.

BOJ 14756번 Telescope

Convolution은 수열이 뒤집힌 채로 슬라이딩을 하기 때문에 행렬 P를 좌우로 뒤집은 행렬을 P'라고 합시다.

그러면 T와 P'의 행 별로 Convoluton을 취하면 행의 Wk의 계산에 사용되는 행 별 pointwise-multiplication sum을 구할 수 있습니다. 이에 걸리는 시간복잡도는 O(m(n+l)log(n+l)).

그리고 Wk를 하나 구하는 데에는 행별 sum을 다 더해준다고 O(m)이 걸리고, 모든 Wk를 구하는 데에는 O(nm)이 걸리므로 시간 내에 문제를 풀 수 있습니다.

BOJ 17134번 르모앙의 추측

문제 요약

홀수 N이 주어졌을 때, N을 홀수 소수 하나와 짝수 세미소수의 합으로 나타내는 방법의 수를 구하시오. 여기서 세미소수란 두 소수를 곱한 수를 말한다.

제한

테스트 케이스 수 T <= 100,000, N <= 1,000,000

BOJ 17134번 르모앙의 추측

N이 주어지면 N보다 작은 모든 홀수 소수 p에 대해서 N-p가 짝수 세미소수인 p의 개수를 찾으면 됩니다.

짝수 세미소수는 임의의 소수에 2를 곱한 수입니다.

만약에 100만보다 작은 모든 홀수 소수와 세미 소수를 에라토스테네스의 체로 전처리 해두면 N 하나에 대한 답은 N보다 홀수 소수들을 전부 확인하면 구할 수 있다.

N이하의 소수 개수가 대략 $\frac{N}{lgN}$ 있으니까 이를 이용하면 시간초과를 받는다.

BOJ 17134번 르모앙의 추측

시간초과를 해결하는 방법은 다항식을 이용하는 것입니다.

두 다항식 f, g를 곱한 h의 k차 항의 계수는, i+j = k인 f의 i차 항과 g의 j차 항들의 계수의 곱의 합입니다.

이를 이용하면 빠르게 풀 수 있습니다.

BOJ 17134번 르모앙의 추측

예시를 들어봅시다.

한 주머니 f에는 1이 적힌 공이 3개, 2가 적힌 공이 4개 있고, 한 주머니 g에는 0이 적힌 공이 2개, 1이 적힌 공이 4개, 2가 적힌 공이 5개 있습니다. 각 주머니에서 공을 하나씩 뽑았을 때, 수의 합이 3이 되는 경우의 수는?

$$f(x)=3x+4x^2$$

$$g(x)=2+4x+5x^2$$

두 다항식의 곱 $h(x)=6x+20x^2+31x^3+20x^4$의 x^3의 계수가 답이 됩니다.

조합론 문제를 이렇게 푸는 걸 생성함수를 사용해서 푼다고들 합니다.

BOJ 17134번 르모앙의 추측

문제로 돌아갑시다.

위 방식을 이용해서 문제를 풀기 위해서 f(x)는 홀수 소수 차수의 항들의 계수가 1이고 나머지 항들의 계수는 0인 다항식으로 만들고 g(x)는 짝수 세미소수 차수의 항들의 계수가 1이고 나머지는 0인 다항식으로 만듭니다.

이러면 각 다항식은 차수가 최대 100만인 다항식이 되고 두 다항식의 곱을 h(x)를 FFT로 구해줍니다. 시간 내에 가능합니다.

쿼리로 N이 들어왔을 때 원하는 답은 h(x)의 N차 항의 계수가 됩니다.

BOJ 20176번 Needle

20년 ICPC 본선 문제였습니다.

문제가 길지만 결국 원하는 거는 수열 A, B, C가 주어졌을 때, A_i, B_j, C_k가 등차수열이 되는 (i,j,k)의 개수를 원하는 것이다.

만약 세 수 a, b, c가 등차수열을 이룬다면 아래와 같은 식이 성립한다.

$$2b = a+c$$

따라서, 문제에서 원하는 것은 $2B_j=A_i+C_k$인 (i,j,k)의 개수가 된다. 다행스럽게도 들어오는 수의 범위의 크기가 60000으로 감당할 수 있을 정도로 작다.

A와 C로 들어오는 수들의 개수를 저장한 배열을 만들고 Convolution을 취한 뒤에 2B가 되는 경우의 수들을 모두 더해주면 원하는 답이 나온다.

Problem Set

- Essential
  - 14756 - Telescope
  - 17134 - 르모앙의 추측
  - 20176 - Needle
- Practice
  - 15576 - 큰 수 곱셈(2)
  - 5051 - 피타고라스의 정리
  - 17104 - 골드바흐 파티션 2
  - 10531 - Golf Bot
  - 11618 - Frightful Formula
  - 10793 - Tile Cutting
  - 11714 - Midpoint