

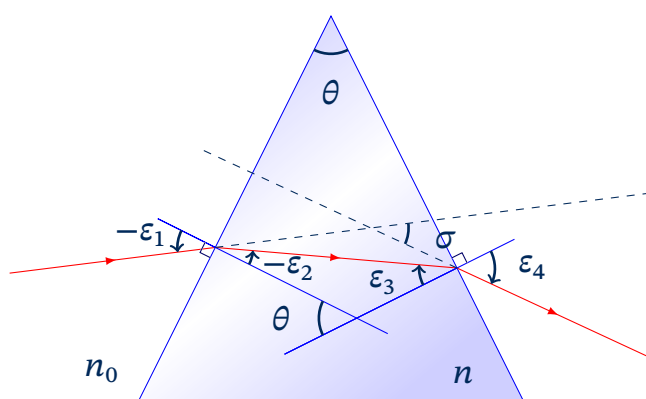


Навчально-науковий Фізико-технічний інститут

В. В. Іванова, С. М. Пономаренко

ОПТИКА

Практичний курс

**КИЇВ 2022**

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

В. В. Іванова, С. М. Пономаренко

ОПТИКА

Практичний курс

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 105 Прикладна фізика та наноматеріали

КИЇВ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2022

УДК 535(075)

I 21

Рецензенти: **В. Г. Колобородов**, д.т.н., професор кафедри комп'ютерно-інтегрованих оптичних та навігаційних систем Приладобудівного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського

В. Б. Тараненко, д.ф.-м.н., с.н.с., директор Філії прикладної оптики Інституту фізики НАН України

Відповідальний редактор: **С. А. Смирнов**, к.ф.-м.н., с.н.с., заступник директора Фізико-технічного інституту КПІ ім. Ігоря Сікорського з методичної роботи

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 2 від 30.09.2022 р.) за поданням Вченої ради Навчально-наукового Фізико-технічного інституту (протокол № 11 від 01.09.2022 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Іванова Віта Вікторівна, к.т.н., доцент
Пономаренко Сергій Миколайович, к.ф.-м.н., доцент

Оптика

Практичний курс

Оптика: Практичний курс [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали» / В. В. Іванова, С. М. Пономаренко; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Електронні текстові дані (1 файл: 2.03 МБ). — Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. — 174 с.

Наведені необхідні теоретичні відомості та приклади, які ілюструють практичні підходи до розв'язування задач з курсу оптики, а також 240 питань і задач для самостійного розв'язку. До більшості задач подано відповіді. Задачі різноманітні як за змістом, так і за складністю.

Для студентів Навчально-наукового фізико-технічного інституту КПІ ім. Ігоря Сікорського, які навчаються за спеціальністю 105 «Прикладна фізика та наноматеріали».

Зміст

Частина I Геометрична оптика та фотометрія 6

1	Геометрична оптика	7
1.1	Застосування основних законів	7
1.1.1	Приклади розв'язування задач	10
1.1.2	Контрольні запитання і задачі для самостійного розв'язку	14
1.2	Центровані оптичні системи. Оптичні прилади	17
1.2.1	Оптика параксіальних променів	17
1.2.2	Кардинальні елементи оптичної системи	18
1.2.3	Лінзи та дзеркала	19
1.2.4	Побудова ходу променів в оптичній системі	22
1.2.5	Властивості ідеальної оптичної системи	23
1.2.6	Оптичні інструменти	24
1.2.7	Приклади розв'язування задач	29
1.3	Задачі для самостійного розв'язку	38
2	Фотометрія	45
2.1	Основні поняття і закони	45
2.2	Приклади розв'язування задач	50
2.3	Задачі для самостійного розв'язку	54

Частина II Фізична оптика 57

3	Дисперсія	58
3.1	Основні поняття і закони	58
3.1.1	Фазова та групова швидкості	61
3.2	Приклади розв'язування задач	62
3.3	Задачі для самостійного розв'язку	65
4	Інтерференція	68
4.1	Основні поняття і закони	68

4.2	Приклади розв'язку задач	81
4.3	Задачі для самостійного розв'язку	88
5	Дифракція	97
5.1	Основні поняття і закони	97
5.2	Метод зон Френеля	99
5.3	Дифракція Фраунгофера на щілині	103
5.4	Дифракція Фраунгофера на круглому отворі	105
5.5	Дифракційна ґратка	107
5.6	Приклади розв'язування задач	111
5.7	Задачі для самостійного розв'язку	118
6	Поляризація та оптична анізотропія	127
6.1	Основні поняття і закони	127
6.2	Штучне подвійне променезаломлення	136
6.3	Приклади розв'язування задач	139
6.4	Задачі для самостійного розв'язку	142
	Відповіді	153
	Додатки	169
А	Шкала електромагнітних хвиль	169
Б	Математичні формули та співвідношення	170
Б.1	Тілесний кут	170
В	Фотометричні дані	171
Г	Фізичні константи	173
	Література	174

Передмова

Навчальний посібник авторів Іванової В. В. та Пономаренка С. М. призначений для практичних занять з курсу оптики як розділу загальної фізики. Він є результатом багаторічного досвіду роботи зі студентами Фізико-технічного інституту, які набувають фаху прикладної фізики. У книзі значна частина теоретичних відомостей викладена в обсязі, достатньому для розв'язування задачі. Кожний розділ супроводжується прикладами, які ілюструють і поглиблюють розуміння викладених принципів та законів оптики, а також прикладами суто практичного застосування. Особливу увагу приділено опануванню підходів до розв'язання задач прикладного характеру.

Основою матеріалу цього посібника став навчальний посібник Іванової В. В. «Задачі з загальної фізики. Оптика», виданий у 2012 році. Він був суттєво оновлений відповідно до сучасних вимог до навчальних матеріалів, розширений і доповнений необхідними теоретичними відомостями та оригінальними задачами. Крім того, в тексті посібника є інтерактивні посилання на тематичні відео та інші зовнішні ресурси навчального та наукового змісту, які зацікавлять студентів.

Цей посібник може бути корисним для студентів вищої освіти, які навчаються на фізичних та інженерних спеціальностях.

Приємного занурення в практичний курс оптики!

Частина I

Геометрична оптика та фотометрія

Наукова грамотність — це світогляд. Це скріплює лінза, через яку ви спостерігаєте за тим, що відбувається навколо вас.

Neil DeGrasse Tyson

1

Геометрична оптика

1.1

Застосування основних законів

Геометрична оптика — розділ оптики, в якому вивчаються закони поширення світла в прозорих середовищах на основі уявлень про світловий промінь. Світловий промінь — це лінія вздовж якої поширюється світло.

В геометричній оптиці застосовують правила знаків для відрізків і кутів, що дозволяють користуватись формулами геометричної оптики для будь-яких випадків взаємного розташування елементів оптичної системи:

- за додатній напрямок розповсюдження світла прийнято напрямок зліва направо;
- додатними вважаються відрізки, якщо вони відраховуються вздовж напрямку розповсюдження світла;
- радіуси кривизни поверхонь відраховуються від вершин поверхонь;
- відрізки, перпендикулярні до оптичної осі, вважаються додатними, якщо вони знаходяться над віссю, і від'ємними — під віссю;
- кут вважається додатнім відносно осі відліку, якщо відлік від осі ведеться за годинниковою стрілкою.

Закони геометричної оптики

Закон прямолінійного розповсюдження світла: в однорідному ізотропному середовищі світло розповсюджується вздовж прямої лінії.

Закон незалежного розповсюдження світлових променів: світлові промені розповсюджуються незалежно один від одного, так наче інших променів не існує.

Закон відбиття: промінь, що падає на поверхню (границю розділу оптичних середовищ), нормаль до поверхні в точці падіння та відбитий від поверхні промінь знаходяться в одній площині. Кут падіння ε_1 дорівнює куту відбиття ε'_1 (рис. 1.1).

Закон заломлення: промінь, що падає на поверхню розділу двох середовищ з показниками заломлення n_1 і n_2 , нормаль до поверхні в точці падіння та заломлений промінь знаходяться в одній площині, кути падіння і заломлення

зв'язані співвідношенням (закон Снелліуса) (рис. 1.1):

$$\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon'_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}, \quad (1.1)$$

де $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2$ — мають однакові знаки; n_1, n_2 — абсолютні показники заломлення першого й другого середовищ відповідно; v_1, v_2 — фазові швидкості світла в цих середовищах.

Абсолютний показник заломлення (або просто показник заломлення) є основною оптичною характеристикою середовища (матеріалу):

$$n = \frac{c}{v}, \quad (1.2)$$

де $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с — швидкість світла в вакуумі; v — фазова швидкість світла в даному середовищі, яка залежить від довжини хвилі (частоти) світла.

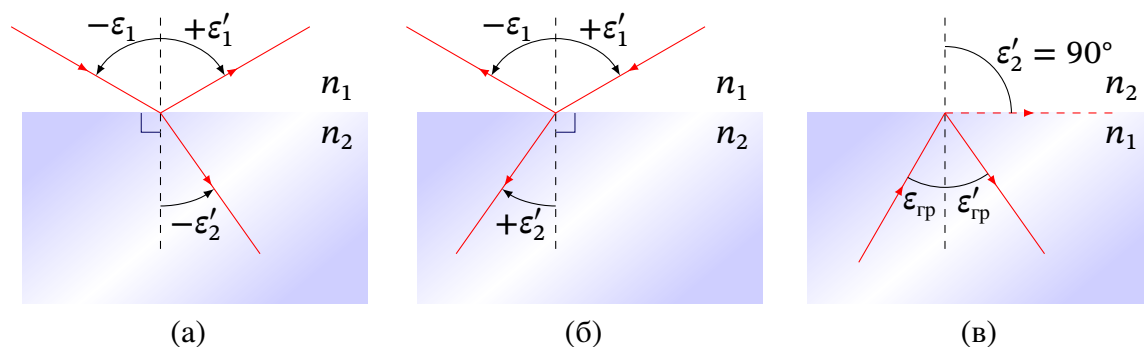


Рис. 1.1. Правило знаків

*Явище повного внутрішнього відбиття*¹ спостерігається при падінні світла з оптично щільнішого середовища на границю з оптично менш щільним середовищем ($n_1 > n_2$), коли промінь не переходить в друге середовище, а відбивається від границі розділу середовищ (рис. 1.1в).

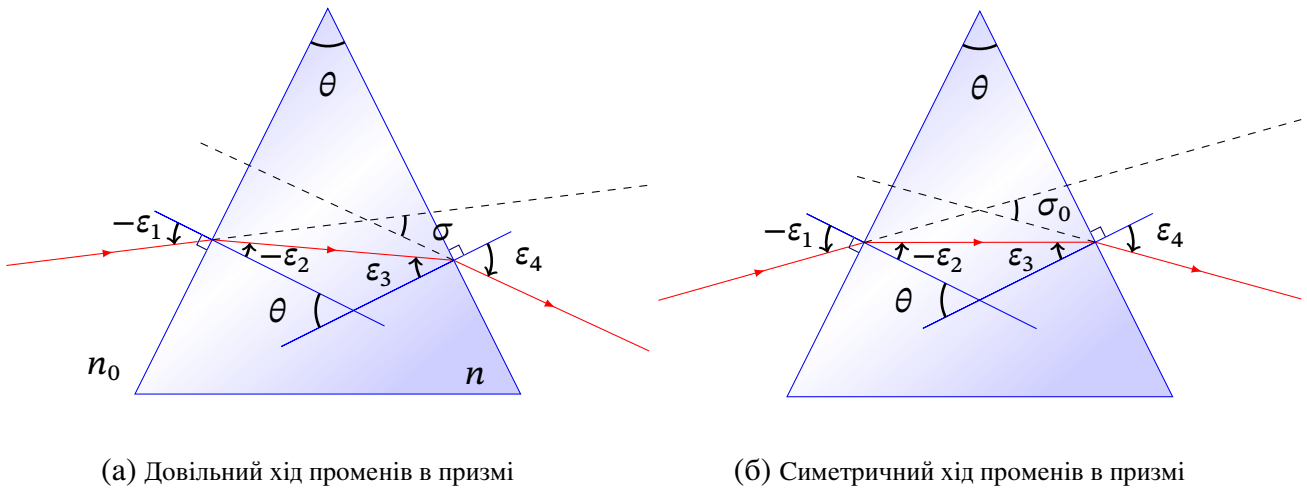
Граничний кут повного внутрішнього відбиття, який отримують з умови $\varepsilon'_2 = 90^\circ$, визначається виразом:

$$\varepsilon_{\text{гр}} = \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right). \quad (1.3)$$

Заломлюючі призми і клини

Призма — оптична деталь, обмежена двома заломлюючими непаралельними площинами (1.2а). *Головним перерізом* призми називається переріз площиною, що перпендикулярна до ребра двогранного кута між площинами.

¹Зауважимо, що в деяких задачах правило знаків для зручності застосовувати не будемо.



(а) Довільний хід променів в призмі

(б) Симетричний хід променів в призмі

Рис. 1.2. Хід променів у призмі

Заломлюючий кут призми θ — це кут між площинами призми у її головному перерізі. Кут вважається додатнім, якщо вершина напрямлена нагору.

Кут відхилення призми σ — кут між падаючим променем і відхиленим. За початок відліку кута відхилення вибирається напрямок падаючого променя.

Мінімальний кут відхилення променя призмою (рис. 1.26) при симетричному проходженні його всередині призми: $(|\epsilon_1| = |\epsilon_4|, |\epsilon_2| = |\epsilon_3|)$ (рис. 1.26). Зазвичай, оптичні прилади, що містять тригранну призму, налаштовуються на мінімальний кут відхилення променя.

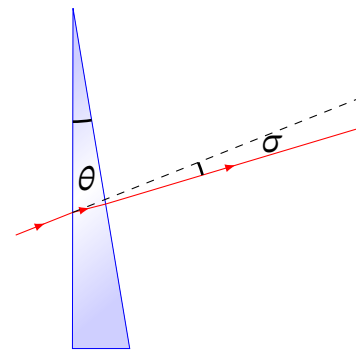


Рис. 1.3. Клин

Клином називають призму з невеликим заломлюючим кутом (рис. 1.3). Цей кут зазвичай становить менше 3° .

Формули

Основні співвідношення для призми

Сума кутів заломлення на першій грані $-\epsilon_2$ і падіння на другу грань ϵ_3 дорівнює заломлюючому куту призми θ :

$$\theta = -\epsilon_2 + \epsilon_3. \quad (1.4)$$

Кут відхилення променя монохроматичного світла:

$$\sigma = \epsilon_4 - \epsilon_1 - \theta \quad (1.5)$$

$$\sigma = \arcsin\left(\frac{n}{n_0} \sin\left(\theta + \arcsin\left(\frac{n_0}{n} \sin \epsilon_1\right)\right)\right) - \epsilon_1 - \theta \quad (1.5a)$$

$$\sigma = \arcsin\left(\frac{n}{n_0} \sin(\theta + \epsilon_2)\right) - \arcsin\left(\frac{n}{n_0} \sin \epsilon_2\right) - \theta. \quad (1.5b)$$

Мінімальний кут відхилення променя σ_0 :

$$\sigma_0 = 2 \arcsin\left(\frac{n}{n_0} \sin \frac{\theta}{2}\right) - \theta. \quad (1.6)$$

$$n_0 \sin \frac{\sigma_0 + \theta}{2} = n \sin \frac{\theta}{2}. \quad (1.6a)$$

Кут відхилення променя клином (у випадку малих заломлюючих кутів), що знаходиться у повітрі ($n_0 = 1$) з (1.56) дає:

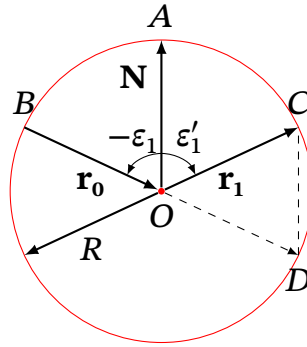
$$\sigma = \theta(n - 1). \quad (1.7)$$

1.1.1 Приклади розв'язування задач

Приклад: 1

Виразити у векторній формі закон відбиття світла через одиничні вектори: нормалі \mathbf{N} в точці падіння й падаючого променя \mathbf{r}_0 . Скалярний вираз закону відбиття вважається відомим.

Розв'язок



Проведемо коло одиничного радіуса ($R = 1$) із центром у точці падіння O променя на границю відбиття. Тоді одиничні вектори \mathbf{N} та \mathbf{r}_0 при деякому куті падіння ϵ_1 , можуть бути представлені векторними відрізками \mathbf{OA} та \mathbf{BO} відповідно. Одиничний вектор \mathbf{r}_1 відбитого променя може бути представлений відрізком \mathbf{OC} , що виходить відповідно до закону відбиття із точки O під кутом $\epsilon'_1 = |\epsilon_1|$ до нормалі.

Виразимо одиничний вектор \mathbf{r}_1 через вектори \mathbf{N} й \mathbf{r}_0 , скориставшись положенням, що будь-який вектор \mathbf{c} на площині можна виразити через два заданих непаралельних вектори \mathbf{a} й \mathbf{b} , що лежать у тій же площині, лінійною залежністю:

$$\mathbf{c} = \mu\mathbf{a} + \nu\mathbf{b}.$$

Перемістимо вектор \mathbf{r}_0 уздовж його напрямку в положення $|\mathbf{OD}|$ й проведемо вектор \mathbf{DC} . З векторного трикутника ODC треба $\mathbf{OC} = \mathbf{OD} + \mathbf{DC}$. По побудові $\mathbf{OC} = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{OD} = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{DC} \parallel \mathbf{N}$, $\mathbf{DC} = \nu\mathbf{N}$, тоді

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \nu\mathbf{N}. \quad (1)$$

Із трикутника ODC визначимо коефіцієнт ν із урахуванням рівності $|\mathbf{N}| = |\mathbf{OD}| = |\mathbf{OC}| = R = 1$:

$$\nu = \frac{|\mathbf{DC}|}{|\mathbf{N}|} = \frac{2R \cos \epsilon'_1}{R} = 2 \cos \epsilon'_1 = 2 \cos \epsilon_1. \quad (2)$$

По визначенню скалярного добутку двох векторів, коли проекція одного з них спрямована протилежно іншому, маємо:

$$(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{N}) = |\mathbf{r}_0||\mathbf{N}|(-\cos \varepsilon_1) = -\cos \varepsilon_1,$$

тобто

$$\cos \varepsilon_1 = -(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{N})$$

Тоді з врахуванням (1), остаточно одержуємо з (2) вираз:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 - 2(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{N})\mathbf{N}.$$

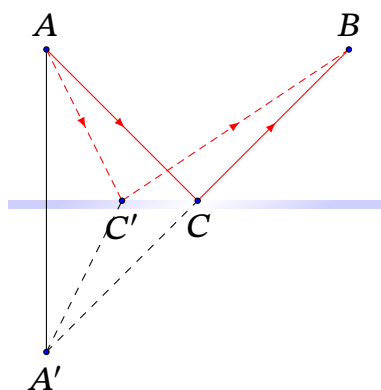
Цей вираз являє собою векторну форму закону відбиття світла.

Приклад: 2

Користуючись законом відбиття, геометрично довести справедливість принципу Ферма.

Розв'язок

Нехай деякий промінь, який виходить з точки A , після відбиття від плоского дзеркала проходить через точку B . Покажемо, що оптична довжина шляху променя, який відбився від дзеркала, менше оптичної довжини будь-якого іншого шляху від точки A до дзеркала, а потім до точки B .



Дійсно, із закону відбиття випливає, що дзеркальне зображення A' точки A лежить на продовженні відбитого променя CB і є його перетином з перпендикуляром до дзеркала, проведеним з точки A . Тому $A'C = AC$, звідки маємо: оптична довжина променя $ACB = A'CB$. Очевидно, що будь-який інший шлях $AC'B = A'C'B$ є ламаною, яка завжди довші за прямий відрізок $A'B$, що і треба було довести.

Приклад: 3

Промінь світла падає під кутом 30° на плоскопаралельну скляну пластину ($n = 1,5$) товщиною 10 см. Визначити зсув h променя, що пройшов крізь пластину.

Розв'язок

Оскільки пластина перебуває в однорідному середовищі (зверху й знизу її повітря $n_1 = n_3 = 1$), то на виході із пластини заломлений промінь піде паралельно падаючому променю (див. рис.). Зсув променя $h = |BD|$. Знаки всіх кутів приймаємо додатніми



Із прямокутного трикутника ODB маємо $h = OB \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon'_2)$, де кут заломлення визначається законом Снеліуса (1.1). З трикутника OAB знаходимо

$$|OB| = \frac{d}{\cos \varepsilon'_2},$$

одержуємо

$$h = d \frac{\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon'_2)}{\cos \varepsilon'_2}.$$

Обчислюємо: $\varepsilon'_2 = 19,4712^\circ$; $\cos \varepsilon'_2 = 0,942$; $\varepsilon_1 - \varepsilon'_2 = 30^\circ - 19,4712^\circ = 10,5288^\circ$; $\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon'_2) = 0,1827$; $h = 0,97$ см.

Таким чином, скляна пластина товщиною 5 см, поставлена під кутом 30° , зміщує промінь майже на 1 см, не змінюючи його напрямку.

Примітки:

1. можна вирішити обернену задачу — визначити товщину d пластини, необхідну для досягнення заданого зсуву h оптичної осі системи при відомому куті падіння ε_1 ;
2. зміною кута нахилу ε_1 плоскопаралельної пластини постійної товщини d можна плавно паралельно зміщувати оптичну вісь системи в потрібному діапазоні.

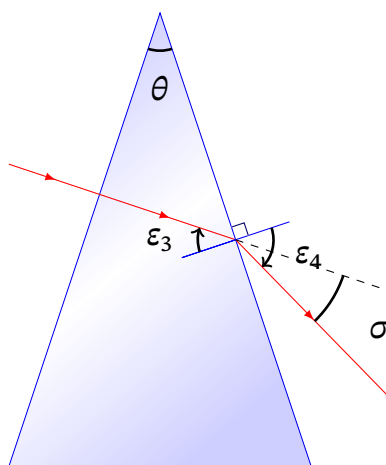
Приклад: 4

На вхідну грань скляної призми із заломлюючим кутом 40° нормально падає промінь монохроматичного світла ($n = 1,48$). Визначити кут відхилення променя призмою й мінімальний кут відхилення променя призмою.

Розв'язок

а) Визначимо кут відхилення σ .

Промінь падає нормально на вхідну грань і не заломлюється на ній. Промінь заломлюється тільки на вихідній грані призми, відхиляючись далі від нормалі (див. рис.).



Визначимо кут відхилення σ . Скористаємося спрощеною формулою:

$$\sigma = \varepsilon_4 - \varepsilon_1 - \theta$$

Оскільки $\varepsilon_1 = 0$, то й $\varepsilon_2 = 0$, а кут падіння променя на вихідну грань $\varepsilon_3 = \theta$, як і видно із схеми. Тоді з закону заломлення на вихідній грані

$$n \sin \varepsilon_3 = n_0 \sin \varepsilon_4,$$

маємо, що

$$\varepsilon_4 = \arcsin\left(\frac{n}{n_0} \sin \theta\right).$$

Тоді $\varepsilon_4 = \arcsin\left(\frac{1,48}{1} \sin 40^\circ\right) = 72,0501^\circ$, а $\sigma = 72,0501^\circ - 40^\circ = 32^\circ 3' 4''$.

При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ загальні формули для кута відхилення (1.5a) і (1.5б) дають той же результат:

$$\sigma = \arcsin\left(\frac{n}{n_0} \sin \theta\right) - \theta.$$

б) Визначимо мінімальний кут відхилення променя призмою σ_0 .

У цьому випадку $|\varepsilon_1| = \varepsilon_4$, а $|\varepsilon_2| = \varepsilon_3$ як показано на схемі (див. рис. 1.26). По формулі (1.6) обчислюємо

$$\sigma_0 = 2 \arcsin\left(\frac{n}{n_0} \sin \frac{\theta}{2}\right) - \theta = 60,8202^\circ - 40^\circ = 20^\circ 49' 15''.$$

Таким чином, мінімальний кут відхилення σ_0 при симетричному проходженні променя через призму в 1,5 рази менше, ніж кут відхилення при нормальному падінні променя на вхідну грань призми.

1.1.2 Контрольні запитання і задачі для самостійного розв'язку

1.1. Чи можуть бути меншими за одиницю абсолютний і відносний показники заломлення?

1.2. Сформулюйте властивість оборотності відбитих і заломлених променів.

1.3. Які хвилі у фізичній оптиці є аналогами розбіжних і паралельного пучків променів у геометричній оптиці?

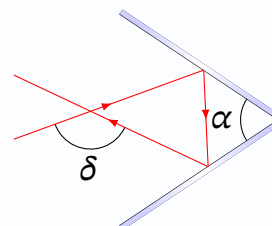
1.4. Сформулюйте принципи Гюйгенса й Ферма.

1.5. Доведіть закони відбиття й заломлення на підставі принципу Гюйгенса.

1.6. Доведіть закони відбиття й заломлення на підставі принципу Ферма.

1.7. Довести побудовою, що система двох плоских дзеркал (*кутове дзеркало*) з кутом α між ними завжди повертає вхідний промінь на кут $\delta = 2\alpha$.

Примітка: Одночасний поворот такого кутового дзеркала навколо осі, перпендикулярної площині креслення (така вісь перпендикулярна будь-якій площині падіння), не змінює кут відхилення променя. Наприклад, кутове дзеркало з $\alpha = 45^\circ$ завжди відхиляє промінь на 90°



1.8. Промінь світла переходить із середовища з показником заломлення n_1 у середовище з показником заломлення n_2 . Показати, що якщо кут між відбитим і заломленим променями дорівнює $\pi/2$, то виконується умова $\operatorname{tg} \varepsilon_1 = n_2/n_1$ (ε_1 – кут падіння).

1.9. Промінь світла падає на грань призми з показником заломлення n під малим кутом. Показати, що при малому заломлюючому куті θ призми кут відхилення σ променів не залежить від кута падіння й дорівнює $\theta(n - 1)$.

1.10. Фіолетовий промінь падає на плоскопаралельну пластину зі скла марки ТК8 ($n = 1,628$) і виходить із неї паралельно первісному напрямку. Якою повинна бути товщина пластинки, щоб зсув променя склав 5 мм при кутах падіння: а) 30° ; б) 45° ; в) 60° ?

1.11. На плоскопаралельну скляну пластинку зі скла марки ТФ9 товщиною 1 см падає промінь світла жовтого кольору ($n = 1,6137$) під кутом 60° . Частина світла відбивається від верхньої поверхні, а частина, заломлюючись, проходить у пластинку, відбивається від її нижньої поверхні й, заломлюючись удруге на верхній поверхні, виходить у повітря паралельно першому відбитому променю. Визначити: а) відстань між цими променями; б) цю ж відстань для пластинки зі скла марки ТФ7 ($n = 1,73$).

1.12. Записати у векторній формі закон заломлення світла на границі двох прозорих середовищ (n_1 і n_2), якщо нормаль у точці падіння характеризується одиничним вектором \mathbf{N} , спрямованим від середовища 2 у середовище 1, а падаючий промінь — одиничним вектором \mathbf{r}_0 . Скалярний вираз закону заломлення передбачається відомим.

Вказівка. Побудувати коло одиничного радіуса із центром у точці падіння променя, провести одиничні вектори \mathbf{N} й \mathbf{r}_0 і виразити через них одиничний вектор заломленого променя \mathbf{r}_2 .

1.13. Зі скляного куба з посрібленими гранями зрізали кут, отримавши таким чином тригранну піраміду (*кутиковий відбивач*). Промінь світла потрапляє через основу в цю піраміду і, послідовно відбиваючись від трьох взаємно перпендикулярних граней, виходить назовні. Показати, що вихідний промінь міняє свій напрямок на протилежний.

Вказівка. Скористатись векторною формою закону відбиття.

1.14. Пучок паралельних променів падає на товсту скляну пластину під кутом $\varepsilon = 60^\circ$, і заломлюючись переходить у скло. Ширина a пучка в повітрі дорівнює 10 см. Визначити ширину b пучка в склі.

1.15. На дні посудини, наповненої водою до висоти 10 см, перебуває точкове джерело світла, над яким на поверхні води плаває непрозорий диск. Центр диска перебуває над джерелом світла. Визначити найменший радіус диска, при якому жоден промінь від джерела світла не виходить на поверхню води. Як зміниться цей радіус, якщо воду замінити скипидаром ($n = 1,483$)?

1.16. У якому напрямку до лінії обрію плавець, який пірнув у воду, бачить сонце, що заходить?

Вказівка. Схему побудувати у зворотному ході променів.

1.17. Світловий промінь падає на однорідну кулю з показником заломлення n . Чи може всередині кулі відбуватись повне внутрішнє відбиття цього заломленого променя?

1.18. На плоскопаралельну скляну пластинку під кутом φ падає пучок світла шириною a , який має дві спектральні компоненти. Показники заломлення скла для цих компонентів різні і дорівнюють n_1 і n_2 . Знайти найменшу товщину пластинки h_{\min} , для якої на виході світло буде розподіюватись у вигляді двох окремих пучків різного кольору.

1.19. Під яким кутом до нормалі катета прямокутної рівнобедреної скляної призми ($n = 1,54$) повинен падати промінь світла, щоб після заломлення він ішов по гіпотенузі?

Вказівка. Вирішити завдання у зворотному ході променів.

1.20. При якому найбільшому куті падіння променя на скляну призму ($n = 1,5$) із заломлюючим кутом 45° на виході променя з нею ще не настає повне внутрішнє відбиття? (Див. вказівку 1.19).

1.21. При якому заломлюючому куті скляної призми n кут найменшого відхилення її променя дорівнює заломлюючому куту призми?

1.22. Рівностороння скляна призма дає кут найменшого відхилення променя в повітрі 37° . Який кут найменшого відхилення того ж променя дасть ця призма у воді?

1.23. Визначити кут падіння променя монохроматичного світла на вхідну грань скляної призми ($n = 1,6$) із заломлюючим кутом 45° , щоб на вихідній грані спостерігалася повне внутрішнє відбиття.

1.24. Промінь білого світла падає на бічну поверхню рівнобедреної призми із заломлюючим кутом 45° під таким кутом, що червоний промінь виходить із неї перпендикулярно до другої грані. Визначити кути відхилення червоного й фіолетового променів від первісного напрямку, якщо показники заломлення скла призми для них відповідно рівні 1,37 і 1,42.

1.25. Заломлюючий кут θ призми, що має форму гострого клина, дорівнює 2° . Визначити кут найменшого відхилення σ_0 променя при проходженні через призму, якщо показник заломлення n скла призми дорівнює 1,6.

1.26. Для обернення зображення часто використовують так звану призму Дове — зрізану прямокутну рівнобічну призму.

Знайти довжину основи призми, якщо її висота дорівнює 2,11 см, а показник заломлення 1,41. Призма повинна створювати пучок світла з максимальним перерізом, а внутрішній кут відбиття повинний задовольняти умові повного внутрішнього відбиття.



1.2

Центровані оптичні системи. Оптичні прилади

1.2.1 Оптика параксіальних променів

У найпоширеніших типах оптичних систем поверхні, на яких заломлюються і відбиваються світлові промені — є поверхнями обертання. Якщо центри кривизни цих поверхонь лежать на одній осі, то такі системи називають *центрованими оптичними системами*, а вісь — *оптичною віссю*. *Параксіальними* називаються промені, які виходять з предметної точки на оптичній осі під малими кутами і зустрічають оптичну систему на малій висоті (рис. 1.4).



Рис. 1.4. До виведення інваріанту Аббе

Формули

Співвідношення для параксіальних променів

Для параксіальних променів, які заломлюються на сферичній границі розділу оптичних середовищ справджується співвідношення, яке носить назву *інваріанту Аббе*:

$$n' \left(\frac{1}{S'} - \frac{1}{R} \right) = n \left(\frac{1}{S} - \frac{1}{R} \right). \quad (1.8)$$

Часто зручно користуватись формулою Аббе

$$\frac{n'}{S'} - \frac{n}{S} = \frac{n' - n}{R}. \quad (1.8a)$$

Якщо $-S \rightarrow \infty$, то паралельні оптичній осі промені зберуться в задньому фокусі F' . Тоді $S' = f'$ — задня фокусна відстань. З (1.8a) маємо для однієї заломлюючої поверхні

$$\Phi = \frac{n'}{f'} = \frac{n' - n}{R}. \quad (1.9)$$

де Φ — оптична сила, яка вимірюється в діоптріях. Оптичну силу в 1 дптр має лінза з фокусною відстанню в повітрі, що дорівнює 1 м.

З рис. 1.4 легко також отримати співвідношення, справедливе для параксіальної області, яке носить назву інваріанту Лагранжа-Гельмгольца:

$$ny\sigma = n'y'\sigma'. \quad (1.10)$$

Для сферичної відбиваючої поверхні ($n' = -n$) інваріант буде мати вигляд:

$$y\sigma = -y'\sigma'. \quad (1.11)$$

1.2.2 Кардинальні елементи оптичної системи

Кардинальними елементами оптичної системи є фокуси, фокальні площини, головні точки й головні площини (рис. 1.5).

Головні площини — пара оптично спряжених перпендикулярних до оптичної осі площин, у яких лінійне збільшення дорівнює одиниці. Спряжені між собою точки перетину H і H' головних площин з оптичною віссю називаються

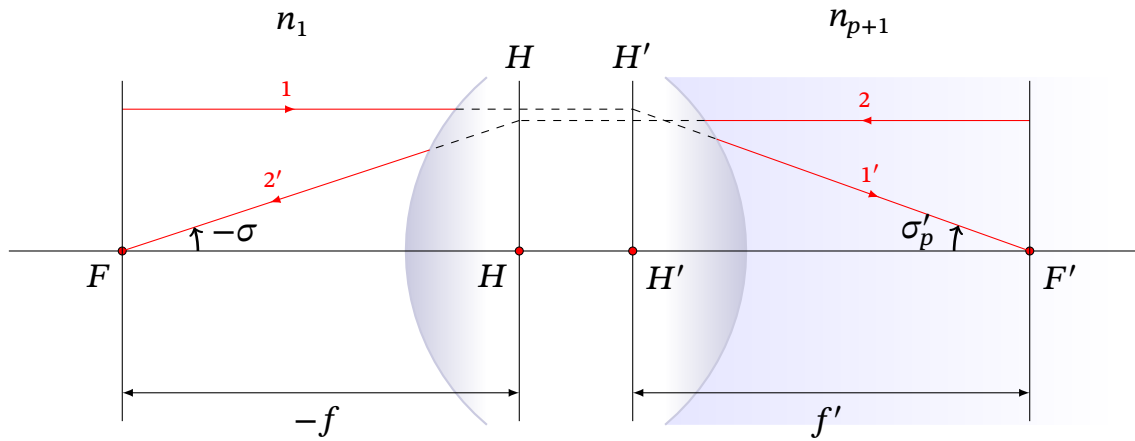


Рис. 1.5. Кардинальні елементи оптичної системи: F (F') — передній (задній) фокус; H (H') — передня (задня) головна площина; H (H') — передня (задня) головна точка; f (f') — передня (задня) фокусна відстань

головними точками.

Точка F' , спряжена з нескінченно далекою точкою простору предметів, що розташована на оптичній осі — *задній фокус оптичної системи*. Усі промені, паралельні до оптичної осі, після проходження через оптичну систему, перетинаються у задньому фокусі F' .

Площина, що перпендикулярна до оптичної осі та проходить через точку F' називається *задньою фокальною площиною*. В задній фокальній площині сходяться похилі паралельні жмутки променів. Аналогічно визначається *передня фокальна площина*.

Точка F , що пов'язана з нескінченно далекою точкою оптичної осі простору зображень, називається *переднім фокусом*. Всі промені, що проходять у просторі предметів через передній фокус F , після виходу з ідеальної оптичної системи стають паралельними оптичній осі. Відрізки $-f$ і f' , що відраховуються від головних точок H і H' до фокусів F та F' , називаються *передньою* та *задньою фокусною відстанню*.

Фокусні відстані співвідносяться як:

$$-\frac{f}{f'} = \frac{n_1}{n_{p+1}} \quad (1.12)$$

де n_1 і n_{p+1} показники заломлення середовищ простору предметів і зображень відповідно.

1.2.3 Лінзи та дзеркала

Лінза — оптична деталь, обмежена двома заломлюючими, як правило, осесиметричними центрованими поверхнями.

За видом заломлюючих поверхонь лінзи діляться на сферичні, циліндричні тощо. Ми будемо розглядати тільки сферичні лінзи, які в параксіальній області забезпечують гомоцентричність пучка променів.

За знаком оптичної сили (здатністю збирати паралельний пучок випромінювання в дійсну або уявну точку) лінзи бувають двох типів: збиральні (рис. 1.6а) і розсіювальні (рис. 1.6б).



Рис. 1.6. Типи лінз

Формули

Співвідношення для тонкої лінзи

Використовуючи інваріант Аббе (1.8) можна вивести співвідношення для тонкої лінзи та сферичного дзеркала. Оптична сила тонкої лінзи визначається як сума оптичних сил її заломлюючих поверхонь. Якщо лінза, показник заломлення матеріалу якої n , знаходиться в середовищі з показником заломлення n' , то її оптична сила:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{n - n'}{R_1} + \frac{n' - n}{R_2} = (n - n') \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (1.13)$$

де R_1 і R_2 — радіуси кривизни першої і другої заломлюючих поверхонь, відповідно.

Формулу сферичного дзеркала отримуємо з умови $n' = -n$:

$$\frac{1}{S'} + \frac{1}{S} = \frac{2}{R}. \quad (1.13a)$$

Фокусна відстань сферичного дзеркала визначається як

$$f' = \frac{R}{2}. \quad (1.14)$$

На відміну від тонкої лінзи, товста лінза додатково характеризується основою товщиною d .

Положення кардинальних точок і площин в товстих лінзах наведені на рис. 1.7.

Формули

Основні співвідношення для товстих лінз

Оптична сила товстої лінзи (товсту лінзу можна розглядати як двокомпонентну оптичну систему.):

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{d}{n} \Phi_1 \Phi_2, \quad (1.15)$$

або

$$\Phi = \frac{n'}{f'} = (n - n') \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{d(n' - n)^2}{n R_1 R_2}. \quad (1.15a)$$

де d — товщина лінзи (або відстань між компонентами для двокомпонентної системи).

У випадку $d = 0$, формула (1.15) переходить у формулу для оптичної сили тонкої



(а) Збиральна лінза



(б) Розсіювальна лінза

Рис. 1.7. Положення кардинальних точок і площин в лінзах

лінзи (1.13)

Для розрахунку положення кардинальних елементів товстої лінзи в повітрі користуються співвідношеннями:

1. фокусні відстані:

$$f = -f'; \quad (1.16)$$

2. фокальні відрізки:

$$S_F = -f' \left(1 + \frac{n-1}{n} \frac{d}{R_2} \right), \quad (1.17)$$

$$S'_{F'} = f' \left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{d}{R_1} \right); \quad (1.18)$$

3. положення головних точок:

$$S_H = \frac{d}{n} \frac{\Phi_2}{\Phi} = f \frac{n-1}{n} \frac{d}{R_2}, \quad (1.19)$$

$$S'_{H'} = -\frac{d}{n} \frac{\Phi_1}{\Phi} = -f' \frac{n-1}{n} \frac{d}{R_1}; \quad (1.20)$$

4. відстань між головними площинами:

$$\Delta_{HH'} = d \left[1 - f' \frac{n-1}{n} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right]. \quad (1.21)$$

1.2.4 Побудова ходу променів в оптичній системі

Для побудови ходу довільного променя в оптичній системі, заданій кардинальними елементами, використовують так звані допоміжні промені (рис. 1.8). Їх будують з міркувань створення паралельних із заданим (шуканим) жмутків променів на вході або виході оптичної системи. Для оптичної системи в однорідному середовищі ($n = n'$) таких променів може бути чотири (рис. 1.8).



Рис. 1.8. Побудова зображень в ідеальній оптичній системі

1. паралельний до заданого промінь **1**, що входить через передній фокус F , виходить паралельно до оптичної осі;
2. паралельний до оптичної осі промінь **2**, який виходить з тієї ж точки передньої фокальної площини, що і заданий, та проходить через задній фокус F' на виході;
3. паралельний до заданого (шуканого) промінь **3**, що входить через передню точку H і виходить з задньої головної точки H' під тим же кутом (тільки для систем в однорідному середовищі $n = n'$);
4. промінь **4**, який виходить з тієї ж точки передньої фокальної площини, що і заданий, та входить через передню головну точку H і виходить з задньої

головної точки H' під тим же кутом (тільки для систем в однорідному середовищі $n = n'$).

На рис. 1.8а (ліворуч) показана побудова ходу довільного (**шуканого**) променя (позначеного червоним) у додатній системі ($\Phi > 0$) у випадку $n = n'$ з використанням одного з двох допоміжних променів (позначених синім і зеленим), хід яких є відомим. Кожен з цих променів буде паралельним до **шуканого** на вході: промінь 2 проходить через передній фокус, а промінь 3 — входить в систему в передній головній точці, що дозволяє знайти точку, в якій сходяться жмуток паралельних променів в задній фокальній площині, а відтак і **шуканий** промінь, на виході системи.

На рис. 1.8а (праворуч) показано застосування ще двох можливих допоміжних променів, які будують такими, що виходять з тієї ж точки передньої фокальної площини, що і **шуканий** промінь, а відтак знаходять напрямок паралельного жмуток променів на виході системи.

У від'ємній системі ($\Phi < 0$) у випадку $n = n'$ використовують аналогічні промені (рис. 1.8б). Побудова ускладнюється через обернене положення фокальних площин: передня знаходиться за оптичною системою, а задня — перед.

1.2.5 Властивості ідеальної оптичної системи

Ідеальною оптичною системою називають оптичну систему, яка відображає точку предмета точкою й зберігає заданий масштаб зображення¹. Основні формули для спряжених точок і відрізків можна отримати з рис. 1.9.

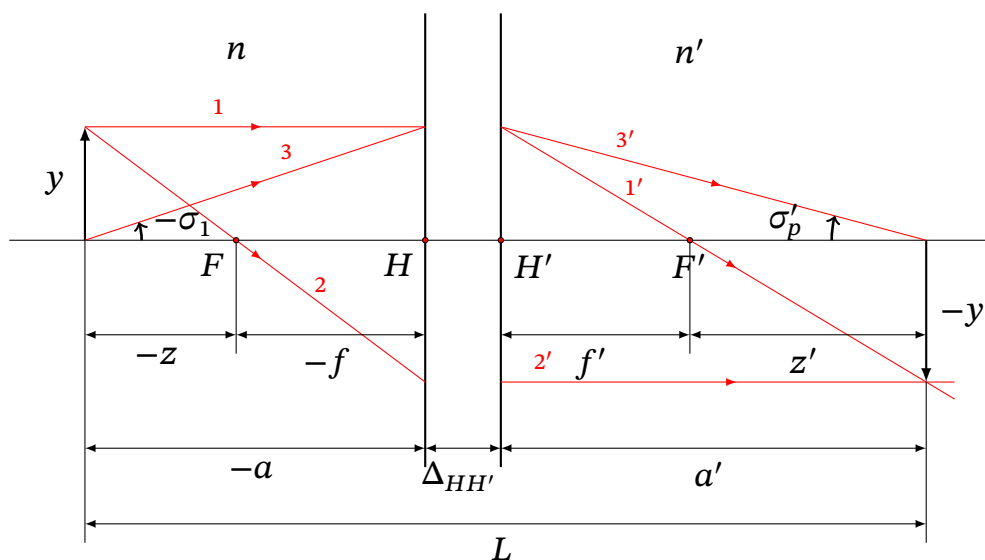


Рис. 1.9. Розрахункова схема ідеальної оптичної системи

¹У реальних оптичних системах властивості ідеальної системи можуть співпадати лише в параксіальній ділянці.

Формули Основні формули для розрахунку ідеальної оптичної системи

Формула Ньютона:

$$zz' = ff'. \quad (1.22)$$

Формула Гауса:

$$\frac{f'}{a'} + \frac{f}{a} = 1. \quad (1.23)$$

Інакше, цей вираз має вигляд формули відрізків

$$\frac{n'}{a'} - \frac{n}{a} = \frac{n'}{f'}, \quad (1.23a)$$

де n, n' — показники заломлення середовищ перед і за оптичною системою, відповідно.
Для оптичної системи в повітрі

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'}, \quad (1.23b)$$

Визначення фокусної відстані, положення предмета a і зображення a' при відомому лінійному збільшенні системи β за умови $n = n'$:

$$f' = -\frac{L - \Delta_{HH'}}{(1 - \beta)^2} \beta, \quad a' = f'(1 - \beta), \quad a = f' \frac{1 - \beta}{\beta}. \quad (1.24)$$

ля тонкої оптичної системи, коли $\Delta_{HH'} = 0$:

$$f' = -\frac{\beta L}{(1 - \beta)^2}, \quad a' = \frac{\beta L}{1 - \beta}, \quad a = -\frac{L}{1 - \beta}. \quad (1.24a)$$

Лінійне збільшення (поперечне):

$$\beta = -\frac{y'}{y} = -\frac{f}{z} = -\frac{z'}{f'} = -\frac{fa'}{f'a} = \frac{na'}{n'a}. \quad (1.25)$$

Кутове збільшення:

$$\gamma = \frac{\text{tg } \sigma'_p}{\text{tg } \sigma_1} = \frac{a}{a'} = \frac{n}{n'} \frac{1}{\beta}. \quad (1.26)$$

Поздовжнє збільшення:

$$\alpha = \frac{dz'}{dz} = -\frac{z'}{z} = -\frac{ff'}{z^2} = \frac{n'}{n} \beta^2. \quad (1.27)$$

Зв'язок між збільшеннями:

$$\beta\gamma = \frac{n'}{n}, \quad \alpha\gamma = \beta. \quad (1.28)$$

1.2.6 Оптичні інструменти

Оптичні прилади, які використовуються для роботи з оком, характеризуються *видимим збільшенням*:

$$\Gamma = \frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w}, \quad (1.29)$$

де w — кут, під яким видно предмет неозброєним оком, w' — кут, під яким спостерігають створене оптичним приладом зображення предмету.

Найпоширеніші оптичні прилади для роботи з оком: лупа, мікроскоп, зорові труби, біноклі. Поняття видимого збільшення застосовують і у випадку багатоступінчастого створення зображення, яке розглядається оком (мікроскоп, зорова труба тощо).

Лупа — збиральна лінза або система лінз, призначена для візуального спостереження за предметом, який розташовано в передній фокальній площині або за нею.

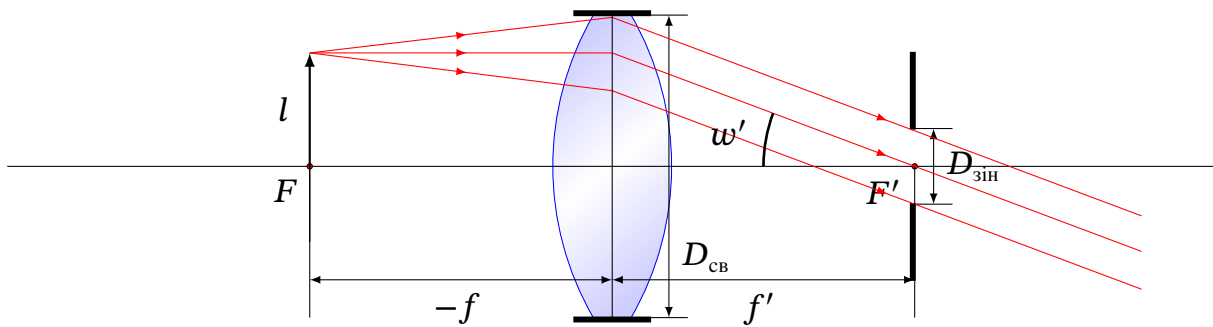


Рис. 1.10. Лупа в режимі акомодції ока на нескінченність (∞)

Якщо розглядуваний предмет розташований у передній фокальній площині лупи, то від будь-якої точки предмета в око спостерігача потрапляють пучки паралельних променів. У цьому випадку око спостерігача акомодовано на нескінченність (рис. 1.10), видиме збільшення визначається як:

$$\Gamma = \frac{250 \text{ мм}}{f'}, \quad (1.30)$$

де 250 мм — відстань найкращого зору.

В загальному випадку, коли предмет знаходиться на відстані z від переднього фокуса, а зіниця ока на деякій відстані z_0 від заднього фокуса (рис. 1.11), збільшення лупи дорівнює:

$$\Gamma = \frac{L}{f'} \left(1 + \frac{z'_0}{z' - z'_0} \right). \quad (1.31)$$

Якщо око розташовано впритул до лінзи, а відстань від ока до зображення дорівнює відстані найкращого зору 250 мм, то матиме місце акомодация ока на відстань найкращого зору, а видиме збільшення буде:

$$\Gamma = 1 + \frac{250 \text{ мм}}{f'}.$$



Рис. 1.11. Лупа в режимі акомодції ока на скінченну відстань

Мікроскоп, призначений для спостереження близько розташованих предметів, на відміну від лупи, має двокаскадну схему збільшення (рис. 1.12). Першим каскадом є об'єктив, другим — окуляр. Об'єктив створює збільшене дійсне зображення l' предмета l в передній фокальній площині окуляра, за допомогою якого це зображення розглядається як в лупу.

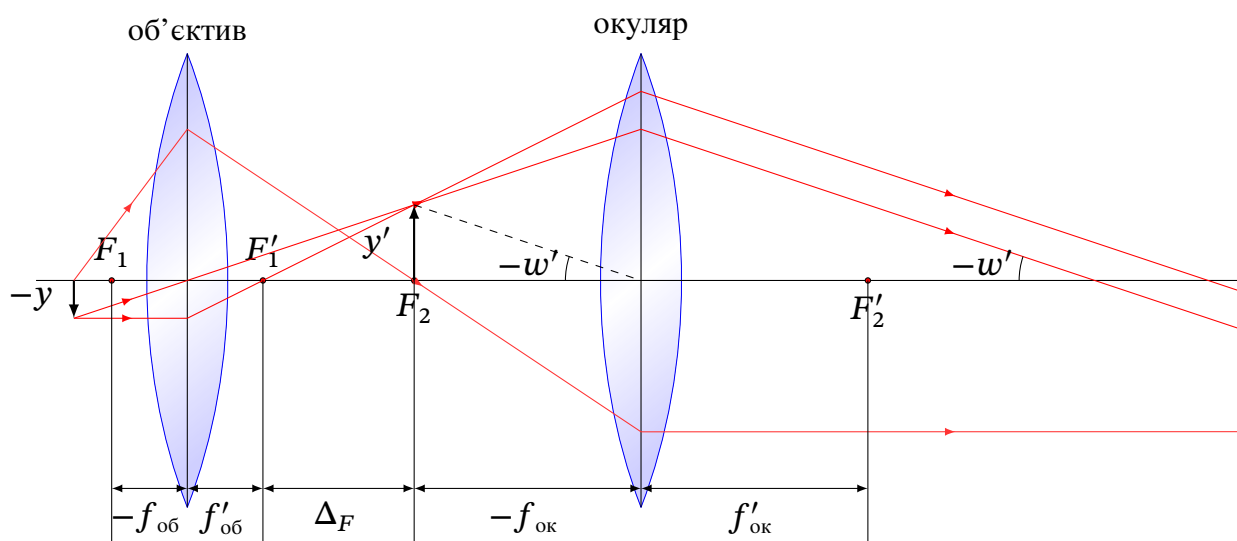


Рис. 1.12. Хід променів у мікроскопі

Основними характеристиками мікроскопа є видиме збільшення Γ , лінійне поле зору $2u$, розмір вихідної зіниці D' .

Об'єктив мікроскопа створює дійсне, збільшене та обернене зображення.

Формули

Основні співвідношення для мікроскопа

Видиме збільшення окуляра:

$$\Gamma_{\text{ок}} = \frac{250 \text{ мм}}{f'_{\text{ок}}}. \quad (1.32)$$

Видиме збільшення мікроскопа:

$$\Gamma = \beta_{\text{об}} \Gamma_{\text{ок}}. \quad (1.33)$$

де Δ_F – оптичний інтервал, який називається *оптичною довжиною тубуса* мікроскопа.

Розглядаючи мікроскоп як лупу, можна визначити приведену фокусну відстань мікроскопа як

$$f'_{\text{мікроскоп}} = -\frac{f'_{\text{об}} f'_{\text{ок}}}{\Delta_F}, \quad (1.34)$$

та видиме збільшення мікроскопа як

$$\Gamma_{\text{мікроскоп}} = \frac{250 \text{ мм}}{f'_{\text{мікроскоп}}}. \quad (1.35)$$

У випадку, коли при спостереженні око акомодовано на відстань найкращого зору, зображення предмета l'' буде знаходитись перед окуляром, як показано на рис. 1.13.

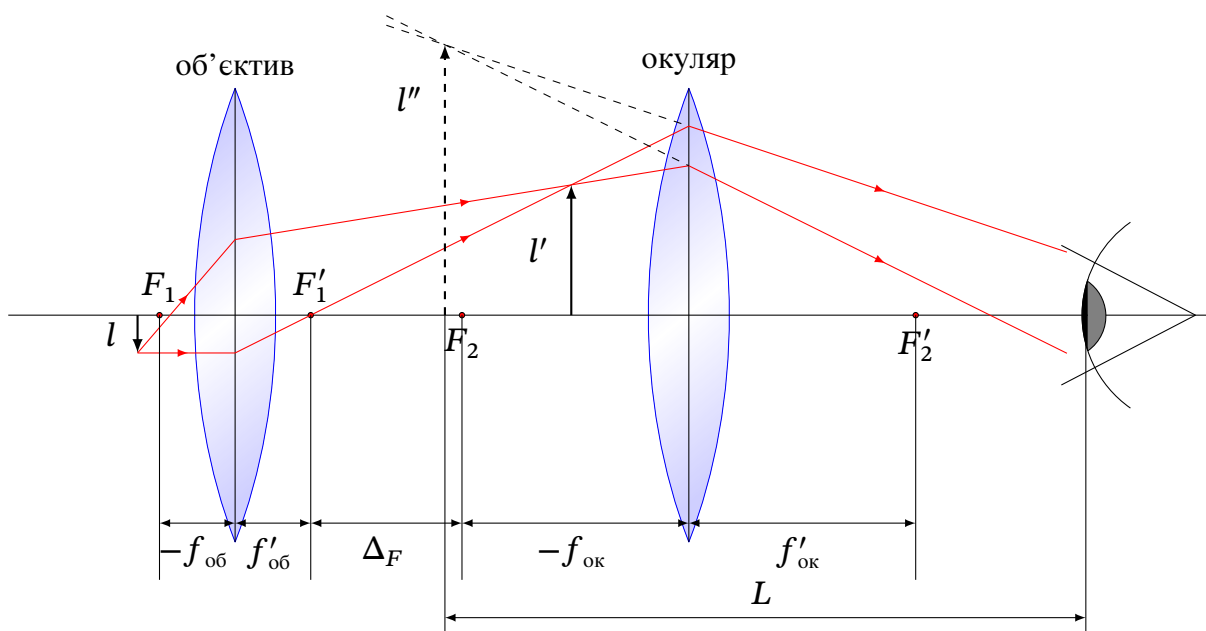


Рис. 1.13. Хід променів при акомодатії на відстань найкращого зору

Телескопічними системами називаються такі, які перетворюють паралельні пучки променів, які входять в систему, на паралельні — на виході системи. *Зорові труби* — це телескопічні системи для роботи з оком, призначені для спостереження за віддаленими предметами. Прості зорові труби складаються з об'єктива і окуляра. Зорові труби систем *Кеплера* і *Галілея* зображені на рис. 1.14.

Якщо на систему падають паралельні промені, то зазвичай використовують дволінзові склеєні об'єктиви. Дволінзовий об'єктив складається з однієї збиральної та однієї розсіювальної лінзи (це відображено на рис. 1.14).

Довжина зорової труби

$$L = f'_{\text{об}} + f_{\text{ок}}. \quad (1.36)$$



Рис. 1.14. Телескопічні системи



Рис. 1.15. Хід променів в телескопічній системі Кеплера

Детально хід променів в системі Кеплера показаний на рис. 1.15

Формули

Основні співвідношення для телескопа

Видиме збільшення зорової труби

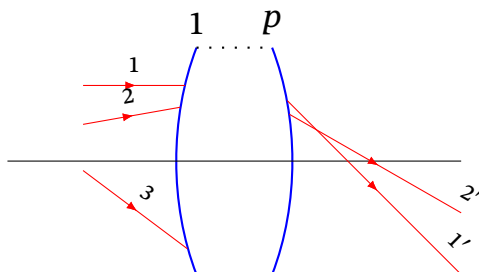
$$\Gamma = \frac{\operatorname{tg} w'}{\operatorname{tg} w} = -\frac{f'_{\text{об}}}{f'_{\text{ок}}} = \frac{D}{D'}, \quad (1.37)$$

де w — кутовий розмір предмета (або кутове положення точкового предмета), w' — кутовий розмір зображення, $2w$ — кутове поле зору системи, D і D' — діаметри вхідної і вихідної зіниць.

1.2.7 Приклади розв'язування задач

Приклад: 5

Побудувати хід променя 3, який проходить крізь систему, що складається з p поверхонь $n_1 = n_p$.



Розв'язок

Для побудови променя 3 необхідно знати положення кардинальних точок заданої оптичної системи. Для знаходження їх положень скористаємось променями 1 та 2. Промінь 1 в просторі предметів проходить паралельно до оптичної вісі, отже він перетинає оптичну вісь в точці заднього фокуса. На продовженні променя 1 на вході та виході з системи знаходиться задня головна площина (див. рис.). Відстань між HH' та F' є задня фокусна відстань.



Для того, щоб знайти положення передньої головної площини, скористаємось променем 2. Точка перетину цього променя з передньою головною площиною повинна знаходитись на однаковій висоті відносно оптичної вісі з точкою перетину цього променя з задньою головною площиною. Продовжуючи промінь 2 на виході з оптичної системи до перетину з задньою головною площиною і провівши лінію з точки перетину паралельно оптичній вісі, знаходимо перетин цієї лінії променем 2 на вході в систему. Місце їх перетину вказує положення передньої головної площини і точки H .

Оскільки за умовою $n_1 = n_p$, то $f = -f'$. Використовуючи цю рівність, знаходимо положення точки F . Знаючи положення кардинальних точок оптичної системи, знаходимо хід променя 3.

На рис. показано повне рішення даної задачі. При побудові ходу променя 3 був використаний паралельний даному додатковий промінь, який виходить з переднього фокуса F .

Приклад: 6

Дві тонкі симетричні лінзи, збиральна і розсіювальна, мають однакові радіуси кривизни поверхонь $R = 10$ см. Показник заломлення скла розсіювальної лінзи $n_1 = 1,73$, а збиральної — $n_2 = 1,53$. Лінзи склали впритул і занурили у воду. Яка фокусна відстань цієї системи у воді?

Розв'язок

Знайдемо оптичні сили кожної з лінз. Для розсіювальної лінзи радіус кривизни першої поверхні від'ємний, а другої — додатний, для збиральної — навпаки.

Тому

$$\Phi_1 = (n_1 - n_{\text{води}}) \left(-\frac{1}{R} - \frac{1}{R} \right) = -\frac{2(n_1 - n_{\text{води}})}{R} = -8 \text{ дптр.}$$

$$\Phi_2 = (n_2 - n_{\text{води}}) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{2(n_2 - n_{\text{води}})}{R} = 4 \text{ дптр.}$$

Так як складена система також тонка, то

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = -4 \text{ дптр}$$

Фокусну відстань системи у воді знайдемо з співвідношення

$$\Phi = \frac{n_{\text{води}}}{f'}.$$

Тоді

$$f' = \frac{n_{\text{води}}}{\Phi} = \frac{1.33}{-4} = -0,3325 \text{ м} = -332,5 \text{ мм.}$$

Приклад: 7

Знайти задню фокусну відстань оптичної системи, що складається з двох нескінченно тонких компонентів.

**Розв'язок**

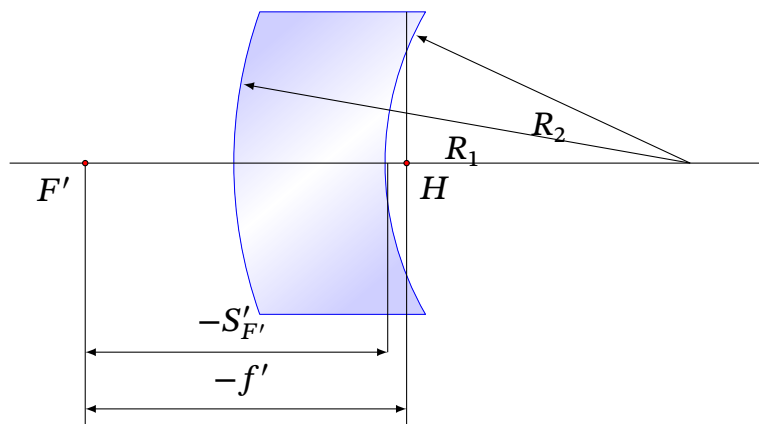
Для визначення задньої фокусної відстані даної оптичної системи необхідно знайти положення задніх кардинальних точок (H' та F') системи. Точка заднього фокуса F' знаходиться на перетині з оптичною віссю променя, який входить в оптичну систему паралельно оптичній осі. З перетину продовження вказаного променя на вході і виході оптичної системи визначають положення задньої головної площини. Її перетин з оптичною віссю дає положення точки H' .



З порівняння фокусних відстаней компонентів, зображених на рис., випливає, що компоненти знаходяться в однорідному середовищі і для побудови ходу променя можна скористатися будь-яким з відомих додаткових променів.

Приклад: 8

Захисне скло теплопеленгатора являє собою лінзу з концентричними сферичними поверхнями $R_1 = 90$ мм і $R_2 = 80$ мм, виготовлену із ситалу СО-2І ($n = 1,553$). Визначити задню фокусну відстань і задній фокальний відрізок такого скла.

**Розв'язок**

Очевидно, товщина такої лінзи:

$$d = R_1 - R_2 = 10 \text{ мм.}$$

Користуючись формулою (1.15), знаходимо:

$$f' = -2,02 \cdot 10^3 \text{ мм.}$$

Задній фокальний відрізок з (1.18):

$$S'_{F'} = -1,94 \cdot 10^3 \text{ мм.}$$

Приклад: 9

Предмет знаходиться впритул до скляної кулі діаметром 50 мм, виготовленої із скла КФ4. Визначити положення зображення та його збільшення

Розв'язок

Розрахункову схему зображено на рис.



Користуючись формулами (1.15) – (1.21), визначимо оптичні параметри лінзи-кулі ($R_1 = -R_2 = D/2$; $d = D$), взявши для спрощення обчислень $n = 1,5$.

Маємо:

$$\begin{aligned} f' &= \frac{Dn}{4(n-1)} = 37,5 \text{ мм}, \\ S'_{F'} &= f' \frac{2-n}{n} = 12,5 \text{ мм}, \\ S_F &= -S'_{F'} = -12,5 \text{ мм}, \\ S'_{H'} &= -f' \frac{2(n-1)}{n} = -\frac{D}{2} = -25 \text{ мм}, \\ S_H &= -S'_{H'} = 25 \text{ мм}. \end{aligned}$$

З рис. видно, що положення предмета $2y$ відносно передньої головної площини $a = -S_H = -25$ мм. Користуючись формулою (1.23a), знаходимо положення зображення $2y'$ відносно задньої головної площини. Необхідно відмітити, що в скляній кулі головні площини співпадають і проходять через її центр. Положення зображення знаходимо з формули Гауса (1.23a):

$$a' = \frac{af'}{a + f'} = -79 \text{ мм}.$$

Тоді збільшення системи:

$$\beta = \frac{a'}{a} = 3,16.$$

Приклад: 10

Визначити величину сферичної аберації, яку вносить плоскопаралельна пластина товщиною $d = 10$ мм, виготовлена із скла ТК 23, якщо її помістили в жмут променів, які сходяться під кутом $2\varepsilon_1 = 60^\circ$. Сферичну аберацію плоскопаралельної пластини визначають за формулою:

$$\Delta S' = \Delta \varepsilon_1 - \Delta_0,$$

де $\Delta \varepsilon_1$ — зміщення променя при куті падіння ε_1 , Δ_0 — зміщення променя при кутах $\varepsilon_1 \ll 1$ рад (в параксіальних променях).

Розв'язок

Визначимо зміщення променя плоскопаралельною пластиною Δ_0 для малих кутів $\varepsilon_1 \ll 1$. В цьому випадку $\sin \varepsilon_1 \approx \varepsilon_1$, $\cos \varepsilon_1 \approx 1$. Тоді:

$$\Delta_0 = d \left(1 - \frac{1}{n} \right) = d \frac{n-1}{n}.$$

Використаємо формулу для аберації з умови задачі:

$$\Delta S' = d \left(1 - \frac{\cos \varepsilon_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon_1}} \right) - d \frac{n-1}{n} = \frac{d}{n} \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \varepsilon_1}{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 \varepsilon_1}} \right).$$

Якщо $d = 10$ мм; $\varepsilon_1 = 30^\circ$; $n = 1,59$, то $\Delta S' = 0,55$ мм.

Приклад: 11

Визначити фокусну відстань об'єктива f' та взаємне розташування екрана осцилографа, об'єктива і фотоплівки розміром 24×36 мм при фотографуванні осцилограм з екрану розміром 120×180 мм. Відстань між екраном і фотоплівкою повинна дорівнювати $L = 400$ мм. Об'єктив вважається тонким.

Розв'язок

Визначимо спочатку збільшення системи, яка утворює дійсне обернене зображення (оскільки сторони плівки і екрану подібні, не має значення, за якою стороною виконувати розрахунок):

$$\beta = \frac{y'}{y} = -0,2.$$

Оскільки об'єктив тонкий, тобто $\Delta_{HH'} = 0$, то скориставшись формулами (1.24a), знаходимо:

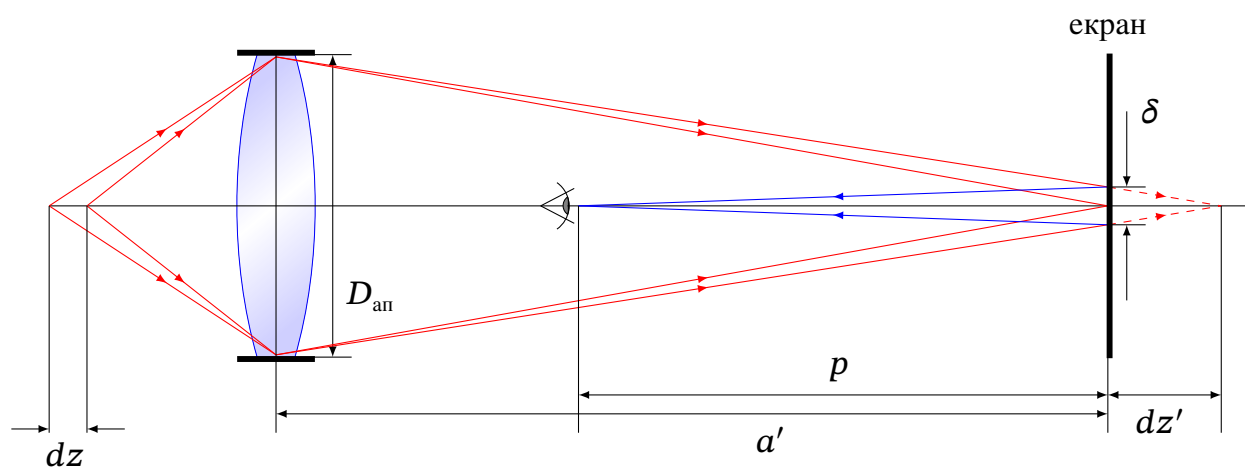
$$\begin{aligned} \text{фокусна відстань об'єктива:} \quad f' &= 55,6 \text{ мм,} \\ \text{положення фотоплівки відносно об'єктива:} \quad a' &= 66,7 \text{ мм,} \\ \text{положення екрану осцилографа відносно об'єктива:} \quad a &= -333,3 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Приклад: 12

Обчислити, на якій відстані від екрану глядач не відчує погіршення якості зображення при поздовжніх зміщеннях в 5 мкм плівки в кадровому вікні, якщо кінопроекція здійснюється за допомогою об'єктива з фокусною відстанню $f' = 30$ мм і діаметром 15 мм, з кадра висотою 8 мм на екран висотою 2 м. Граничним кутом розділення ока вважатимемо величину в одну кутову хвилину.

Розв'язок

Розглянемо розрахункову схему, на рис.



При зміщеннях dz кадра вздовж осі z на екрані замість зображення точки буде пляма діаметром δ .

Якщо глядач побачить цю пляму під кутом, меншим кутової границі розділення ока $\psi_{\text{ока}} = 1' = 0,00029$ рад ін не помітить погіршення якості зображення. Тоді мінімальна відстань, на якій глядач не помітить погіршення якості зображення, дорівнює $p = \frac{\delta}{\psi_{\text{ока}}}$. Діаметр δ визначимо з подібних трикутників:

$$\frac{\delta}{D} = \frac{dz'}{a' + dz'}, \text{ звідки } \delta = D \frac{dz'}{a' + dz'}.$$

Зміщення зображення визначимо з повздовжнього збільшення

$$\frac{dz'}{dz} = \alpha = \beta^2, \text{ звідки } dz' = \beta^2 dz.$$

За умови задачі знаходимо

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{2000}{8} = -250.$$

Тоді $dz' = 312,5$ мм. Відстань a' від об'єктива до екрана визначимо за формулою (1.24):

$$a' = f'(1 - \beta) = 7530 \text{ мм.}$$

З урахуванням знайдених значень dz' та a' знаходимо діаметр $\delta = 0.6$ мм. Тоді відстань p :

$$p = \frac{\delta}{\psi_{\text{ока}}} = \frac{0.6}{0,00029} = 2 \text{ м.}$$

Приклад: 13

В мікроскопі використовують окуляр з видимим збільшенням $\Gamma_{\text{ок}} = 10$ і кутовим полем $2\omega' = 30^\circ$. Визначити видиме збільшення мікроскопа та його лінійне поле при роботі з об'єктивами $10 \times 0,3$ та $40 \times 0,65$.

Розв'язок

При роботі з об'єктивом $10 \times 0,3$ видиме збільшення мікроскопа

$$\Gamma_{\text{мікроскоп}} = \beta_{\text{об}} \Gamma_{\text{ок}} = -10 \cdot 10 = -100,$$

числова апертура $A = 0,3$.

Щоб визначити лінійне поле мікроскопа, необхідно знайти діаметр польової діафрагми, який визначає лінійне поле окуляра. Так як фокусна відстань окуляра

$$f'_{\text{ок}} = \frac{250}{\Gamma_{\text{ок}}},$$

то діаметр польової діафрагми

$$D_{\text{ПД}} = 2y' = 2f'_{\text{ок}} \operatorname{tg} \omega' = 13,4 \text{ мм.}$$

Тоді лінійне поле мікроскопа

$$2y = \frac{2y'}{|\beta_{\text{об}}|} = \frac{13,4}{10} = 1,34 \text{ мм.}$$

При роботі з об'єктивом $40 \times 0,65$ видиме збільшення мікроскопа $\Gamma_{\text{мікроскоп}} = -400$, лінійне поле $2y = 0,34$ мм.

1.3

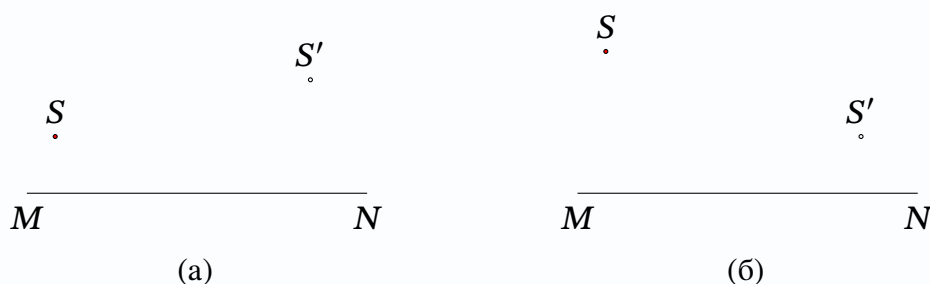
Задачі для самостійного розв'язку

1.27. Увігнуте сферичне дзеркало дає на екрані зображення предмета, збільшене в $\Gamma = 4$ рази. Відстань a від предмета до дзеркала дорівнює 25 см. Визначити радіус R кривизни дзеркала.

1.28. Фокусна відстань f увігнутого дзеркала дорівнює 15 см. Дзеркало дає дійсне зображення предмета, зменшене в тричі. Визначити відстань a від предмета до дзеркала.

1.29. Визначити фокусну відстань увігнутого дзеркала, якщо: а) при відстані між предметом та зображенням $L = 15$ см поперечне збільшення $\beta = -2,0$; б) при одному положенні предмета поперечне збільшення $\beta_1 = -0,50$, а при іншому положенні, зміщеному по відношенню до першого на відстань $L = 5,0$ см, поперечне збільшення $\beta_2 = -0,25$.

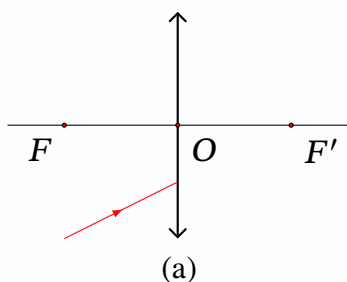
1.30. На рис. вказані положення головної оптичної осі $|MN|$ сферичного дзеркала, точки S , що світиться і її зображення S' . Знайти побудовою положення оптичного центра O дзеркала, його полюса і головного фокуса F . Визначити, увігнутим чи опуклим є дане дзеркало. Буде зображення дійсним чи уявним?



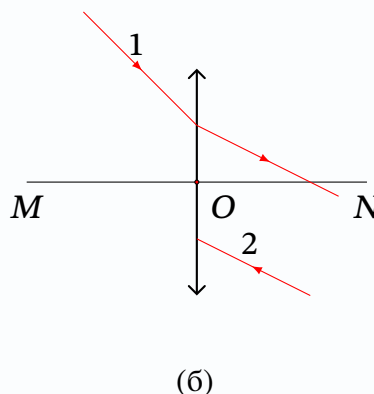
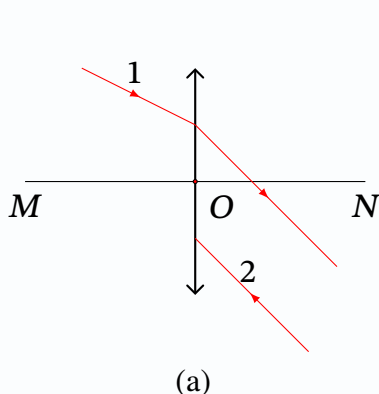
1.31. Увігнуте дзеркало дає на екрані зображення Сонця у вигляді кружка діаметром $d = 28$ мм. Діаметр Сонця на небі в кутовій мірі $\beta = 32'$. Визначити радіус R кривизни дзеркала.

1.32. Радіус R кривизни опуклого дзеркала дорівнює 50 см. Предмет високою $h = 15$ см перебуває на відстані a , рівній 1 м від дзеркала. Визначити відстань b від дзеркала до зображення і його висоту h .

1.33. На тонку лінзу падає промінь світла (рис.). Знайти побудовою хід променя після заломлення його лінзою: а) збиральною; б) розсіювальною.

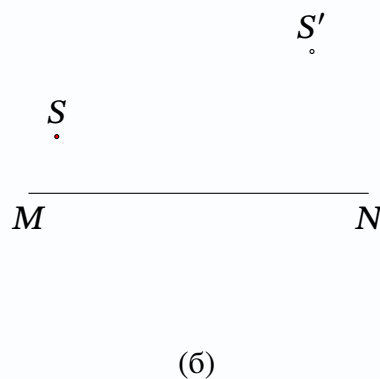
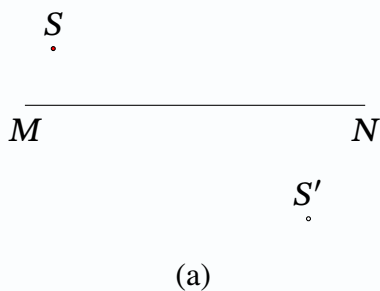


1.34. На рис. позначені положення головної оптичної осі MN лінзи й хід променя 1. Побудувати хід променя 2 після заломлення його лінзою. Вважати, що середовища по обидва боки від лінзи однакові.

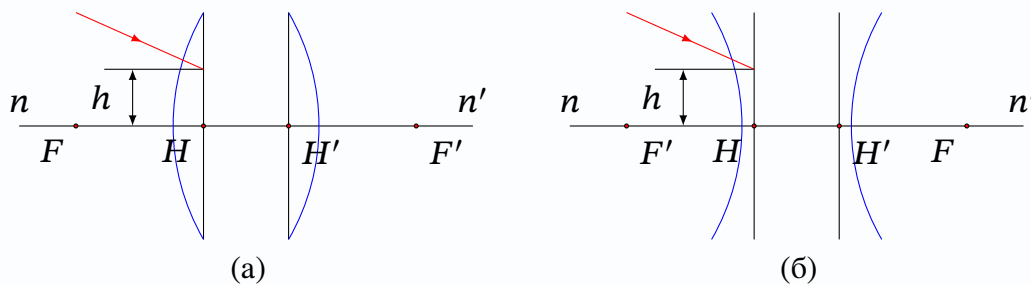


На рисунку: O — оптичний центр лінзи.

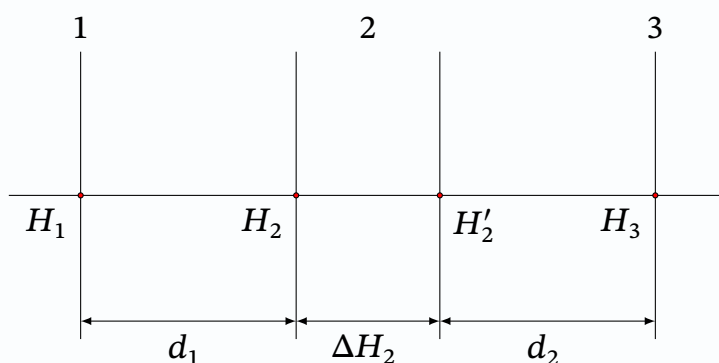
1.35. На рис. позначені положення головної оптичної осі MN тонкої лінзи, джерела світла S і його зображення S' . Знайти побудовою положення оптичного центра O лінзи і її фокуси. Збиральною чи розсіювальною буде дана лінза? Буде зображення дійсним чи уявним? Вважати, що середовища по обидва боки від лінзи однакові.



1.36. Побудувати кожним з 4-х способів хід заданого променя через збиральну і розсіювальну лінзи. Задаються викладачем: f , f' , Δ , h .



1.37. Графічно знайти положення головних і фокальних площин оптичної системи, що складається із трьох компонент. Перша і третя компоненти — нескінченно тонкі. Друга має кінцеву товщину. Система перебуває в повітрі.



№	f'_1 , мм	f'_2 , мм	f'_3 , мм	d_1 , мм	d_2 , мм	ΔH_2 , мм
1	60	-40	30	35	40	10
2	70	-50	35	40	35	10

1.38. Лінза, розташована на оптичній лаві між лампочкою й екраном, дає на екрані різке збільшене зображення лампочки. Коли лампочку пересунули на $\Delta = 40$ см ближче до екрана, на ньому з'явилося різке зменшене зображення лампочки. Визначити фокусну відстань f лінзи, якщо відстань l від лампочки до екрана дорівнює 80 см

1.39. Яка найменша можлива відстань l між предметом і його дійсним зображенням, створюваним збиральною лінзою, з головною фокусною відстанню $f = 12$ см?

1.40. Людина рухається уздовж головної оптичної осі об'єктива фотоапарата зі швидкістю $v = 5$ м/с. З якою швидкістю u необхідно переміщати матове скло фотоапарата, щоб зображення людини на ньому увесь час залишалося різким? Головна фокусна відстань f' об'єктива дорівнює 20 см. Обчислення виконати для випадку, коли людина перебуває на відстані $a = 10$ м від фотоапарата.

1.41. Лінза виготовлена зі скла, показник заломлення якого для червоних променів $n_{\text{ч}} = 1,50$, для фіолетових $n_{\text{ф}} = 1,52$. Радіуси кривизни R обох поверхонь лінзи однакові й рівні 1 м. Визначити відстань Δf між фокусами лінзи для червоних і фіолетових променів.

1.42. Прозора сфера має однорідний показник заломлення n . Зображення віддаленого об'єкта лежить на дальній поверхні сфери. Чому дорівнює показник заломлення цієї сфери?

1.43. Визначити оптичну силу Φ скляного меніска, якщо радіуси кривизни R_1 і R_2 його опуклої й увігнутої поверхонь рівні відповідно 1 м і 40 см. Меніском називають лінзу, обмежену двома сферичними поверхнями, що мають однаковий напрямок кривизни.

1.44. У лінзи, що перебуває в повітрі, фокусна відстань $f_1 = 5$ см, а зануреної в розчин цукру $f_2 = 35$ см. Визначити показник заломлення n розчину.

1.45. Дві однакові плоско-опуклі тонкі лінзи із показником заломлення n посріблені: одна з плоскої, друга з опуклої сторін. Знайти відношення фокусних відстаней f_1 і f_2 отриманих складних дзеркал, якщо світло в обох випадках падає на непосріблену поверхню.

1.46. Дві тонкі лінзи з фокусними відстанями f_1 і f_2 знаходяться на відстані l одна від одної та утворюють центровану систему. Визначити положення головних площин та фокусну відстань цієї системи.

1.47. Довести, що оптична сила Φ системи двох складених впритул тонких лінз дорівнює сумі оптичних сил Φ_1 і Φ_2 кожної із цих лінз.

1.48. З двох годинникових скелець з радіусами кривизни по 0,5 м склеїли повітряну лінзу і занурили її у воду. Знайти оптичну силу такої лінзи.

1.49. Плоско-опукла лінза має оптичну силу $\Phi_1 = 4$ дптр. Опуклу поверхню лінзи посріблили. Знайти оптичну силу Φ_1 такого сферичного дзеркала.

1.50. У впукле сферичне дзеркало з радіусом кривизни $R = 20$ см налили тонкий шар води. Визначити головну фокусну відстань f такої системи.

1.51. Людина без окулярів читає книгу, розташовуючи її перед собою на відстані $a = 12,5$ см. Якої оптичної сили Φ окуляри вона потребує?

1.52. Межі акомодатії ока короткозорної людини без окулярів лежать між $a_1 = 16$ см і $a_2 = 80$ см. В окулярах вона добре бачить віддалені предмети. На якій мінімальній відстані d вона може тримати книгу при читанні в окулярах?

1.53. Лупа дає збільшення $\Gamma = 4$. Впритул до неї приклали збиральну лінзу з оптичною силою $\Phi_1 = 8$ дптр. Яке збільшення Γ_2 буде давати така складена лупа?

1.54. Плоска скляна пластина ($n = 1,5$) розглядається в мікроскоп. Спочатку мікроскоп встановлюють для спостереження верхньої поверхні пластинки, а потім зміщують тубус мікроскопа до тих пір, поки не буде чітко видно нижню поверхню пластини. (Для зручності спостереження на поверхнях пластини зроблено мітки). Зміщення тубуса 2 мм. Знайти товщину пластини d .

1.55. Фокусна відстань f_1 об'єктива мікроскопа дорівнює 8 мм, окуляра $f_2 = 4$ см. Предмет перебуває на $\Delta a = 0,5$ мм далі від об'єктива, ніж головний фокус. Визначити збільшення Γ мікроскопа.

1.56. Фокусна відстань f_1 об'єктива мікроскопа дорівнює 1 см, окуляра $f_2 = 2$ см. Відстань від об'єктива до окуляра $L = 23$ см. Яке збільшення Γ дає мікроскоп? На якій відстані a від об'єктива перебуває предмет?

1.57. Відстань Δ між фокусами об'єктива й окуляра всередині мікроскопа дорівнює 16 см. Фокусна відстань f_1 об'єктива дорівнює 1 мм. З якою

фокусною відстанню f_2 варто взяти окуляр щоб одержати збільшення $\Gamma = 500$?

1.58. Оптична сила Φ об'єктива телескопа дорівнює 0,5 дптр. Окуляр діє як лупа, що дає збільшення $\Gamma_1 = 10$. Яке збільшення Γ_2 дає телескоп?

1.59. При демонстрації кінофільму в сільському клубі, довжина кінозалу якого 30 м, через перегрівання апарату кінострічка деформувалась, і зображення різко погіршилось. Глядачі, які сиділи на відстані 2 м від екрану почали обурюватись. Знайти допустимий позовжній вигин кінострічки в кадровому вікні проєктора висотою 18 мм при проєкції на екран висотою 3,6 м. Зображення створює об'єктив діаметром 60 мм. Кутова роздільна здатність ока $1'$ (0,00029 рад).

1.60. Чи може товста скляна лінза діяти як зорова труба? Розглянути варіанти побудови такої лінзи, обмеженої сферичними поверхнями з радіусами кривизни R_1 та R_2 , для створення прямого та оберненого зображення? Якою при цьому має бути товщина таких лінз? Знайдіть відповідні збільшення.

1.61. При окулярі з фокусною відстанню $f = 50$ мм телескоп дає кутове збільшення $\Gamma_1 = 60$. Яке кутове збільшення Γ_2 дасть один об'єктив, якщо забрати окуляр і розглядати дійсне зображення, створене об'єктивом, неозброєним оком з відстані найкращого зору?

1.62. Фокусна відстань f_1 об'єктива телескопа дорівнює 1 м. У телескоп розглядається будинок, який перебуває на відстані $a = 1$ км. У якому напрямку й на скільки потрібно пересунути окуляр, щоб одержати різке зображення у двох випадках: 1) якщо після будинку будуть розглядати Місяць; 2) якщо замість Місяця будуть розглядати близькі предмети, які перебувають на відстані $a_1 = 100$ м?

1.63. Телескоп наведений на Сонце. Фокусна відстань f_1 об'єктива телескопа дорівнює 3 м. Окуляр з фокусною відстанню $f_2 = 50$ мм проєктує дійсне зображення Сонця, створене об'єктивом, на екран, розташований на відстані $b = 60$ см від окуляра. Площина екрана перпендикулярна до оптичної осі телескопа. Визначити лінійний діаметр d зображення Сонця на екрані, якщо видимий на небі неозброєним оком кутовий діаметр Сонця становить $\alpha = 32'$.

1.64. З літака, який летить зі швидкістю $v = 720$ км/год, фотографують місцевість. Фотоапарат має фокусну відстань 50 см. До якої висоти може знизитися літак, щоб при витримці фотоапарата $\tau = 1/200$ с можна було проводити якісну аерофотозйомку, якщо допустима нерізкість зображення становить $\delta = 0,2$ мм.

1.65. Робінзон опинився на безлюдному острові з багатою екзотичною флорою. Він помітив у вологій низині зарості бамбуку, а на схилах пагорбу знайшов каучукові дерева. Море викинуло на берег скриню — серед скарбів знайшлось і кілька годинників різного розміру. У Робінзона з'явилась мрія зробити зорову трубу, але як? Складіть для Робінзона інструкцію з виготовлення зорової труби зі схемою, враховуючи, що одне з годинникових скелець мало радіус кривизни 40 см, а інше — 16 см, а достатньої товщини бамбукові стебла були не довше одного метра. Яке збільшення дасть така примітивна труба?

1.66. Як в ясний сонячний день, маючи з собою скляну пляшку зі світлого тонкого скла, воду і рулетку, визначити показник заломлення води?

2.1 Основні поняття і закони

Енергетичні характеристики

Електромагнітна хвиля переносить енергію (яку будемо називати *променистою енергією*).

Основною характеристикою — є потік випромінювання (або потужність випромінювання). *Потік випромінювання (променистий потік)* — це величина енергії, що переноситься електромагнітною хвилею за одиницю часу через ділянку:

$$\Phi_e = \frac{dW_e}{dt} \quad (2.1)$$

Потік випромінювання вимірюється у Ватах (Вт).

Енергія залежить від спектрального складу світла. Якщо розкласти хвилю на монохроматичні складові (кожна з певною довжиною хвилі), то вся енергія певним чином розподілиться між ними. Для цього вводять *спектральна густину потоку випромінювання*:

$$\Phi_{e\lambda} = \frac{d\Phi_e}{d\lambda}. \quad (2.2)$$

Сила випромінювання — характеризує потужність випромінювання в деякому напрямку і дорівнює відношенню потоку $d\Phi_e$, що поширюється від джерела всередині малого тілесного кута $d\Omega$, до величини цього кута:

$$I_e = \frac{d\Phi_e}{d\Omega}. \quad (2.3)$$

Одиницею вимірювання у Міжнародній системі одиниць (СІ) є Вт/ср (Ватт на стерadian).

Енергетична світність — характеризує потужність випромінювання з одиниці площі поверхні і дорівнює відношенню потоку $d\Phi_e$, що випромінюється малою ділянкою поверхні джерела, до його площі dS_S :

$$M_e = \frac{d\Phi_e}{dS_S}. \quad (2.4)$$

Одиницею вимірювання у Міжнародній системі одиниць (СІ) є Вт/м².

Енергетична яскравість — характеризує потік випромінювання в одиниці тілесного кута з одиниці видимої площі джерела і дорівнює відношенню потоку $d\Phi_e$ з малої ділянки поверхні джерела до тілесного кута $d\Omega$ і до площі проекції цієї ділянки на площину, перпендикулярну до напрямку поширення (видимої площі $d\sigma$):

$$B_e = \frac{d^2\Phi_e}{dS \cos \alpha \cdot d\Omega} = \frac{dI_e}{dS \cos \alpha} = \frac{dI_e}{d\sigma}. \quad (2.5)$$

Одиницею вимірювання у Міжнародній системі одиниць (СІ) є Вт/(м²·ср).

Опроміненість — характеризує поверхневу густину потужності випромінювання, що падає на поверхню і дорівнює відношенню потоку $d\Phi_e$, що падає на малу ділянку поверхні, до площі цієї ділянки dS_a :

$$E_e = \frac{d\Phi_e}{dS_a}. \quad (2.6)$$

Одиницею вимірювання у Міжнародній системі одиниць (СІ) є Вт/(м²).

Світлові характеристики

Енергетичні величини вичерпно характеризують енергетичні процеси, що пов'язані з поширенням, поглинанням і перевипромінюванням електромагнітних хвиль, однак вони не дозволяють кількісно оцінити візуальне сприйняття випромінювання оком людини.

Сприйняття оком випромінювання видимого діапазону визначається не лише потужністю випромінювання, але й залежить з його спектрального складу (оскільки око — селективний приймач випромінювання). Тому, для характеристики енергетичних властивостей, у видимому діапазоні довжин електромагнітних хвиль з урахуванням сприйняття зоровою системою ока людини вводять так звані фотометричні (або світлові) характеристики та їх одиниці вимірювання (перелічені в табл. 2.1).

Зв'язок світлових та енергетичних величин встановлюється через зорове сприйняття, яке добре вивчене експериментально. Для цього вводиться функція $V(\lambda)$ — *відносна спектральна ефективність монохроматичного випромінювання* (або *функція видності ока*), яка пов'язує енергетичні та світлові характеристики:

$$\Phi_{v\lambda} = K_m V(\lambda) \Phi_{e\lambda}. \quad (2.7)$$

Функція видності $V(\lambda)$ показує, як очі сприймають випромінювання різного спектрального складу, причому вплив потоку випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 555$ нм умовно приймається за одиницю, тобто $V(\lambda)$ максимальна в області жовто-зеленого кольору (550 ÷ 570 нм) і спадає до нуля для червоних та фіолетових променів (рис. 2.1). Коефіцієнт K_m — називається *світловим еквівалентом* — величина якого визначається використовуваною системою

одиниць. У системі СІ, де за одиницю світлового потоку прийнято 1 люмен (лм), цей коефіцієнт дорівнює 683.002 лм/Вт.



Рис. 2.1. Крива відносної спектральної чутливості людського ока для денного зору.
(Дані взяті з <http://www.cvrl.org/lumindex.htm>)

Інші світлові величини визначаються аналогічно до енергетичних, однак мають відмінні назви (див. табл. 2.1) і завдяки (2.7) відмінні одиниці вимірювання. Наприклад, для сили світла в Міжнародній системі одиниць (СІ) вводиться одиниця, яка називається *кандела*, яка прийнята за основну. Одна кандела — це сила світла в заданому напрямку від джерела, що випромінює монохроматичне випромінювання частотою $540 \cdot 10^{12}$ Гц і має силу випромінення в цьому напрямку $(1/683)$ Вт/ср.

Таблиця 2.1: Енергетичні та світлові характеристики

Енергетичні характеристики		Світлові характеристики	
Потік випромінювання	$\Phi_e = \int_0^\infty \Phi_{e\lambda} d\lambda$, Вт	Світловий потік	$\Phi_v = \int_0^\infty \Phi_{v\lambda} d\lambda$, лм (люмен)
Сила випромінювання	$I_e = \frac{d\Phi_e}{d\Omega}$, Вт/ср	Сила світла	$I_v = \frac{d\Phi_v}{d\Omega}$, кд (кандела)
Енергетична світність	$M_e = \frac{d\Phi_e}{dS}$, Вт/м ²	Світність	$M_v = \frac{d\Phi_v}{dS}$, лм/м ²

Продовження на наступній сторінці

Таблиця 2.1: Енергетичні та світлові характеристики (продовження)

Енергетичні характеристики		Світлові характеристики	
Енергетична яскравість	$B_e = \frac{dI_e}{d\sigma}, \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{ср)}$	Яскравість	$B_v = \frac{dI_v}{d\sigma}, \text{ нт (ніт)}$
			$1 \text{ нт} = 1 \text{ кд/м}^2$ $1 \text{ ст} = 10^4 \text{ кд/м}^2$ (стильб) $1 \text{ Лб} = 10^4/\pi \text{ кд/м}^2$ (Ламберт)
Опроміненість	$E_e = \frac{d\Phi_e}{dS}, \text{ Вт/м}^2$	Освітленість	$E_v = \frac{d\Phi_v}{dS},$ $\text{лк} = \text{лм/м}^2 \text{ (люкс)}$

Закон обернених квадратів

Розглянемо точкове джерело випромінювання.

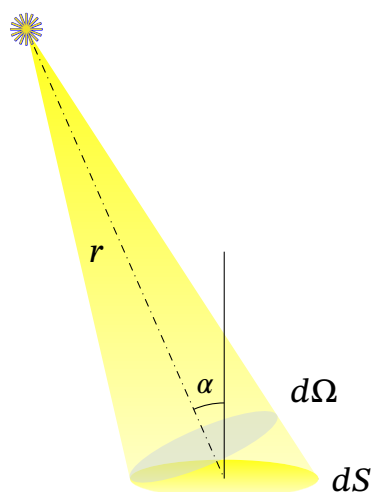


Рис. 2.2. До пояснення закону обернених квадратів

Точкове джерело — це джерело, розмірами якого можна знехтувати в порівнянні з відстанню до нього, і яке випромінює потік, рівномірний у всіх напрямках.

Освітленість, що створюється точковим джерелом обернено пропорційна квадрату відстані r від джерела до поверхні і прямо пропорційно косинусу кута α , між напрямком на джерело світлового потоку і нормаллю до поверхні, що освітлюється:

$$E = \frac{I}{r^2} \cos \alpha. \quad (2.8)$$

Це твердження носить назву *закону обернених квадратів*.

Закон Ламберта

Джерелом випромінювання може бути не лише точкове джерело, а й деяка поверхня.

Простою моделлю протяжного джерела випромінювання є так званий *ламбертівський випромінювач* у якого яскравість не залежить від кута спостереження. Для таких джерел сила випромінювання в даному напрямку пропорційна косинусу кута α між цим напрямком і нормаллю до випромінюючої площадки (рис. 2.3):

$$I = I_0 \cos \alpha. \quad (2.9)$$

Цей вираз називається *законом Ламберта*.

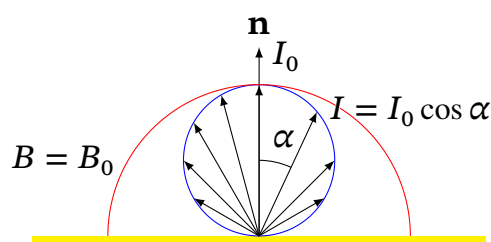


Рис. 2.3. Розподіл сили світла і яскравості для плоского ламбертівського джерела світла

На практиці будь-яка поверхня, що добре розсіює, може вважатися ламбертівським випромінювачем (білий матовий папір, шорсткі поверхні металів тощо).

Освітленість від протяжних ламбертівських випромінювачів

- ✱ Якщо поверхня освітлюється нескінченно великою рівнояскравою плоскою поверхнею або увігнутою напівсферою довільного радіуса, то її освітленість дорівнює

$$E = \pi B, \quad (2.10)$$

де B — яскравість джерела.

- ✱ Якщо поверхня освітлюється рівнояскравим диском радіуса R (рис. 2.4), який знаходиться на відстані r від неї, то її освітленість дорівнює:

$$E = \pi B \sin^2 \alpha, \quad (2.11)$$

де 2α — кут між крайніми променями.

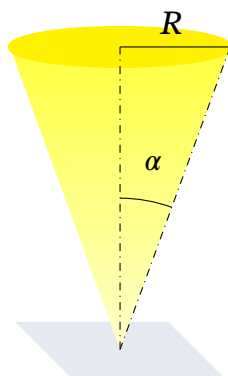


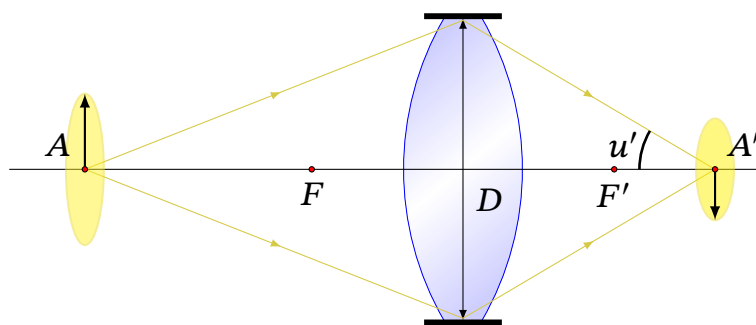
Рис. 2.4. Освітлення рівнояскравим джерелом

- ✱ Освітленість для осової точки A' зображення, яке створює об'єктив (за умови відсутності оптичних втрат), визначається як:

$$E_{A'} = \pi B \sin^2 u', \quad (2.12)$$

$2u'$ — задній апертурний кут об'єктива, B — яскравість об'єкта.

Цю формулу можна отримати з (2.11) з тих міркувань, що кут сходження крайніх променів з вершиною на поверхні зображення замість 2α стає рівним $2u'$.



Якщо предмет знаходиться на нескінченності, то для об'єктів з малою світлосилою

$$\sin u' \approx \frac{D}{2f'},$$

де D — діаметр входної зіниці, f' — фокусна відстань об'єктива. Тоді з (2.12) випливає, що освітленість зображення (за умови відсутності втрат на поверхнях лінзи) дорівнює:

$$E_{A'} = \frac{\pi}{4B} \left(\frac{D}{f'} \right)^2. \quad (2.13)$$

2.2

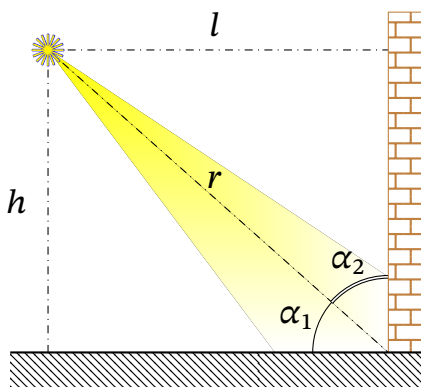
Приклади розв'язування задач

Приклад: 14

На висоті $h = 3$ м над землею й на відстані $l = 4$ м від стіни висить лампа силою світла $I = 100$ кд. Визначити освітленість E_1 стіни та E_2 підлоги на лінії їхнього перетину.

Розв'язок

Знайдемо кути між нормаллю до поверхні в якій шукаємо освітленість і напрямком на джерело.



В кут між стіною і підлогою на стіну випромінювання падає під кутом α_1

(див. рис.). Тому, освітленість стіни згідно закону обернених квадратів (2.8):

$$E_1 = \frac{I}{r^2} \cos \alpha_1 = \frac{I \cdot l}{(h^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{100 \cdot 4}{(4^2 + 3^2)^{3/2}} = 3,2 \text{ лк.}$$

В кут між стіною і підлогою *на підлозі* випромінювання падає під кутом α_2 (див. рис.).

$$E_2 = \frac{I}{r^2} \cos \alpha_2 = \frac{I \cdot h}{(h^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{100 \cdot 3}{(4^2 + 3^2)^{3/2}} = 2,4 \text{ лк.}$$

Приклад: 15

Круглий диск радіусом R світиться за законом Ламберта з яскравістю B . Визначити освітленість у точці, що віддалена на відстань h від центру диска у напрямі, нормальному до його поверхні.

Розв'язок



Весь диск розріжемо на нескінченно малі світні точки, для яких освітленість в точці A визначається за законом обернених квадратів (2.8):

$$dE = \frac{dI}{r^2} \cos \theta. \quad (1)$$

З означення яскравості

$$dI = B dS \cos \theta = B d\sigma, \quad (2)$$

де dS — елемента площі поверхні диска, $d\sigma$ — видима з точки A площа диска, яку можна знайти з означення тілесного кута (Б.1)):

$$d\sigma = r^2 d\Omega = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (3)$$

Таким чином, враховуючи (2) та (3), вираз (1) приймає вигляд:

$$dE = \frac{Bd\sigma}{r^2} \cos \theta = B r^2 \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Проінтегруємо цей вираз по площі всього диска, враховуючи що диск є ламбертівським джерелом ($B = \text{const}$):

$$E = B \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_0} r^2 \cos \theta \sin \theta d\theta = \pi B \sin^2 \theta_0, \quad (4)$$

де $2\theta_0$ — кут між крайніми променями від диска в точці A .

З умов задачі $\sin \theta_0 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}}$, тому з (4) остаточно маємо:

$$E = \frac{B\pi R^2}{\sqrt{R^2 + h^2}}. \quad (5)$$

Рефлексія після розв'язку:

1. Величина $B \cdot \pi R^2 = BS_{\text{диска}} = I$ — є силою світла диска, який умовно сконцентровано в точку в його центрі.
2. Якщо диск має нескінченний радіус ($\theta_0 \rightarrow \pi/2$), то формула (4) дає вираз

$$E = \pi B,$$

що співпадає з освітленістю від нескінченної рівнояскравої площини (2.10).

Приклад: 16

Люмінесцентна циліндрична лампа діаметром $d = 2,5$ см і довжиною $l = 40$ см створює на відстані $r = 5$ м у напрямку, перпендикулярному осі лампи, освітленість $E_v = 2$ лк. Приймаючи лампу за косинусний випромінювач, визначити: 1) силу світла I у даному напрямку; 2) яскравість L ; 3) світність M лампи.

Розв'язок

Більший із двох розмірів лампи — довжина — в 12 разів менше відстані, на якій виміряна освітленість. Отже, для обчислення сили світла в дано-

му напрямку можна прийняти лампу за точкове джерело та застосувати формулу

$$E = \frac{I}{r^2},$$

звідки $I = 25$ кд. Для обчислення яскравості застосуємо формулу

$$B = \frac{I}{\sigma}$$

де σ — площа проекції протяжного джерела світла на площину, перпендикулярну напрямку спостереження.

У випадку циліндричної люмінесцентної лампи проекція має форму прямокутника довжиною l і шириною d . Отже, знайдемо $B = 2,5 \cdot 10^3$ кд/м².

Так як люмінесцентну лампу можна вважати косинусним випромінювачем, то її світність $M = \pi B = 7,9 \cdot 10^3$ лк.

Приклад: 17

Прожектор ближньої дії дає пучок світла у вигляді конуса з кутом розкриття $2\theta = 40^\circ$. Світловий потік Φ прожектора дорівнює $8 \cdot 10^4$ лм. Припускаючи, що світловий потік всередині конуса розподілений рівномірно, визначити силу світла прожектора.

Розв'язок

Повний тілесний кут прожектора можна визначити в сферичній системі координат з (Б.2):

$$\Omega = \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi(1 - \cos \theta_0).$$

З означення сили світла $I = \frac{\Phi}{\Omega}$ маємо

$$I = \frac{\Phi}{2\pi(1 - \cos \theta_0)} = \frac{8 \cdot 10^4}{2\pi(1 - 0,94)} = 2,11 \cdot 10^5 \text{ кд.}$$

2.3 Задачі для самостійного розв'язку

2.1. Як встановлюється зв'язок між люменом і ватом?

2.2. Як використовується закон обернених квадратів для визначення сили світла методом суб'єктивної фотометрії?

2.3. Наведіть приклади ламбертових випромінювачів.

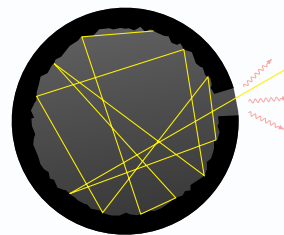
2.4. Сформулюйте інваріант Штраубеля

2.5. Оцінити похибку наближення освітленості, яка створюється рівно-яскравим диском деякого розміру, до освітленості від точкового джерела.

Світловий потік і сила світла

2.6. Лампочка, яка споживає потужність $P = 75$ Вт, створює на відстані $r =$ м при нормальному падінні променів освітленість $E = 8$ лк. Визначити питому потужність p лампочки (у ватах на канделу) і світлову віддачу η лампочки (у лм/Вт).

2.7. Тепловий фотоприймач (див. рис.) — це камера з площею внутрішньої поверхні $S = 2$ см², яка має невеликий отвір площею $S_1 = 1$ мм². Внутрішня поверхня поглинає незначну кількість світла (коефіцієнт поглинання $k_{\text{п}} = 0,01$), а іншу частину розсіює. В цих умовах всередині фотоприймача утворюється рівномірно розподілене за всіма напрямками випромінювання. Яка частина світлового потоку Φ/Φ_0 (де Φ_0 — потік, який падає на вхідний отвір камери) виходить через отвір назад?



2.8. Яку силу струму I покаже гальванометр, приєднаний до селенового фотоелемента, якщо на відстані $r = 75$ см від нього помістити лампочку, повний світловий потік якої дорівнює $1,2 \cdot 10^3$ лм? Площа робочої поверхні фотоелемента рівна 10 см², чутливість $S_i = 3 \cdot 10^{-4}$ А/лм.

2.9. Плоско-опуклу лінзу розрізали навпіл і склали плоскими боками дві половинки. Як зміниться яскравість зображення віддаленого предмета?

Освітленість

2.10. При друкуванні фотознімка негатив освітлювався протягом $t_1 = 3$ с лампочкою силою світла $I_1 = 15$ кд з відстані $r_1 = 50$ см. Визначити час t_2 , протягом якого потрібно освітлювати негатив лампочкою з силою світла $I_2 = 60$ кд з відстані $r_2 = 2$ м, щоб одержати відбиток з таким ж ступенем почорніння, як і в першому випадку?

2.11. На висоті $h = 3$ м над землею й на відстані $r = 4$ м від стіни висить лампа силою світла $I = 100$ кд. Визначити освітленість E_1 стіни й E_2 горизонтальної поверхні землі на лінії їхнього перетину.

2.12. На щоглі висотою $h = 8$ м висить лампа силою світла $I = 10^3$ кд. Приймаючи лампу за точкове джерело світла, визначити, на якій відстані l від основи щогли освітленість E поверхні землі дорівнює 1 лк.

2.13. На якій висоті h над центром круглого стола радіусом $r = 1$ м потрібно повісити лампочку, щоб освітленість на краю стола була максимальною?

Яскравість і світність

2.14. Світильник з матового скла має форму кулі діаметром $d = 20$ см. Сила світла I кулі дорівнює 80 кд. Визначити повний світловий потік Φ , світність M и яскравість B світильника.

2.15. Якою виявиться освітленість E ділянки, якщо джерелом світла є нескінченна площа, паралельна цій ділянці? Поверхнева яскравість джерела світла всюди однакова і не залежить від напрямку.

2.16. Знайти освітленість на горизонтальній ділянці, яка освітлюється небесною напівсферою, за умови рівномірної яскравості неба.

2.17. Сонце, перебуваючи поблизу зеніту, створює на горизонтальній поверхні освітленість $E = 10^5$ лк. Діаметр Сонця видний під кутом $\alpha = 32'$. Визначити видиму яскравість B Сонця.

2.18. Яскравість B куба, що світиться однакова у всіх напрямках і дорівнює $5 \cdot 10^3$ кд/м². Ребро a куба рівне 20 см. В якому напрямку сила світла I куба максимальна? Визначити максимальну силу світла I_{\max} куба.

2.19. Яскравість лампи з плафоном, який має форму конуса висотою 15 см з діаметром 20 см, однакова в усіх напрямках і дорівнює $2 \cdot 10^3$ кд/м². Основа конуса не світиться. Визначити силу світла конуса в напрямках: 1) вздовж осі; 2) перпендикулярно до осі.

2.20. На висоті $h = 1$ м над горизонтальною площиною паралельно їй розташований невеликий диск, що світиться. Сила світла I_0 диска в напрямку його осі дорівнює 100 кд. Приймаючи диск за точкове джерело з косинусним розподілом сили світла, знайти освітленість E горизонтальної площини в точці A , віддаленої на відстань $r = 3$ м від точки, розташованої під центром диска.

2.21. На якій висоті h над горизонтальною площиною (див. попереднє завдання 2.20) потрібно помістити диск, що світиться, щоб освітленість у точці A була максимальною?

2.22. Визначити освітленість E , світність M і яскравість B кіноекрана, який рівномірно розсіює світло у всіх напрямках, якщо світловий потік Φ , що падає на екран з об'єктива кіноапарата (без кінострічки), дорівнює $1,75 \cdot 10^3$ лм. Розмір екрану $5 \times 3,6$ м, коефіцієнт відбиття $\rho = 0,75$.

2.23. Освітленість E поверхні, покритої шаром сажі, дорівнює 150 лк, яскравість B однакова у всіх напрямках і дорівнює 1 кд/м². Визначити коефіцієнт відбиття ρ сажі.

Частина II

Фізична оптика

Вважаю, що більш приземлені та матеріальні науки аж ніяк не можуть бути зневажені у порівнянні з піднесеним вивченням розуму і духу ...

James Clerk Maxwell

3.1 Основні поняття і закони

Дисперсія світла — явище, обумовлене залежністю показника заломлення речовини від частоти електромагнітних хвиль (або довжини хвилі), які в ній розповсюджуються:

$$n = f(\lambda). \quad (3.1)$$

Якщо показник зменшується зі зростанням довжини хвилі $\frac{dn}{d\lambda} < 0$, то дисперсія називається *нормальною*, якщо збільшується — $\frac{dn}{d\lambda} > 0$, то *аномальною*. Аномальна дисперсія має місце на вузьких неробочих ділянках спектру поблизу ліній поглинання.

Конкретні оптичні матеріали характеризуються середньою дисперсією показника заломлення речовини:

$$\frac{\Delta n}{\Delta \lambda} = \frac{n_{F'} - n_{C'}}{\lambda_{F'} - \lambda_{C'}}, \quad (3.2)$$

де $n_{F'} - n_{C'}$ — середня дисперсія, яка визначається як різниця показників заломлення для блакитної (F') і червоної (C') ліній кадмію.

Кутова дисперсія призми визначається при $n_0 = 1$:

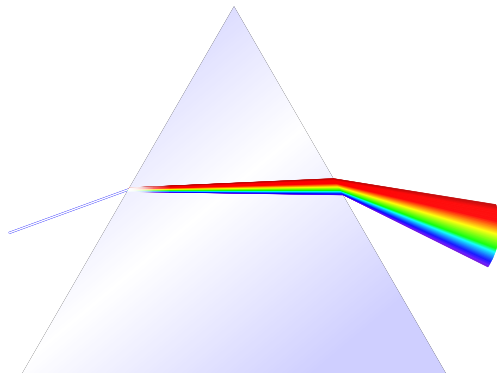
$$\frac{d\sigma_0}{d\lambda} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}} \frac{dn}{d\lambda}, \quad (3.3)$$

де σ_0 мінімальний кут відхилення променя призмою; θ — заломлюючий кут призми; n — показник заломлення матеріалу призми.

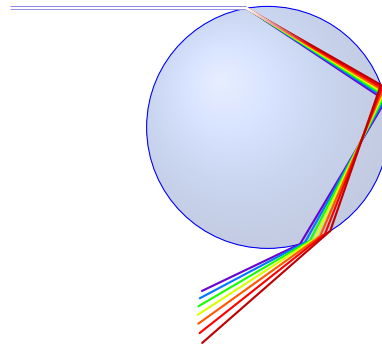
Дисперсійна формула Коші, що застосовується для апроксимації експериментальних залежностей $n(\lambda)$, має вигляд

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots \quad (3.4)$$

де A, B, C — сталі величини, що визначаються для кожної речовини дослідним шляхом; λ — довжина хвилі у вакуумі.



(а) Дисперсія в призмі



(б) Дисперсія в дощовій краплі

Рис. 3.1. Прояви дисперсії

Згідно класичної теорії, дисперсія світла виникає внаслідок вимушених коливань зовнішні (оптичних) електронів під впливом змінного поля електромагнітної хвилі, яка взаємодіє з речовиною. Теорія дисперсії розріджених середовищ у яких атоми мають лише один оптичний електрон дає вираз для комплексної діелектричної проникності:

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = 1 + \frac{4\pi N_e e^2}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}, \quad (\text{СГС}) \quad (3.5)$$

де N_e — концентрація електронів, e — заряд електрона, m_e — маса електрона, ω — частота падаючої хвилі, ω_0 — власна частота коливань оптичного електрона, γ — коефіцієнт згасання, ω_p — *плазмова (ленгмюрівська) частота*, яка дається виразом:

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N_e e^2}{m_e}, \quad (\text{СГС}) \quad (3.6)$$

Згідно рівнянь Максвелла:

$$\hat{\varepsilon} = \hat{n}^2 \quad (3.7)$$

Комплексний показник заломлення представляють у вигляді:

$$\hat{n} = n - i\chi \quad (3.8)$$

Виділяючи дійсну та уявну частину з (3.5) можна отримати вирази:

$$n^2 - \chi^2 = 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2}. \quad (3.9)$$

та

$$n\chi = \frac{\omega_p^2\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2} \quad (3.10)$$

З цих співвідношень можна отримати показники заломлення n та коефіцієнт екстинкції χ .

При частотах, далеких від власної частоти ω_0 виконується умова

$$|\omega^2 - \omega_0^2| \gg 2\omega\gamma. \quad (3.11)$$

Для розріджених прозорих речовин (3.9) з урахуванням (3.11) дає:

$$n \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (3.12)$$

За умови $\omega_0 - \gamma \lesssim \omega \lesssim \omega_0 + \gamma$ показник заломлення зростає із збільшенням частоти (рис. 3.2). Такий характер залежності $n(\omega)$, як було зазначено, називають *нормальною дисперсією*.

Для низьких частот ($\omega < \omega_0$) показник заломлення більше одиниці $n > 1$, тобто, фазова швидкість $v = \frac{c}{n} < c$ хвилі в середовищі менші за швидкість світла у вакуумі. Це означає, що хвиля в середовищі відстає від падаючої хвилі по фазі. Якщо ж частота світла більша за власну частоту осциляторів ($\omega > \omega_0$), то $n < 1$ і фазова швидкість хвилі в середовищі $v = \frac{c}{n} > c$ виявляється більше швидкості світла в вакуумі, тобто, хвиля в середовищі випереджає по фазі падаючу.

Цей теоретичний висновок добре узгоджується з дослідними результатами. Так, наприклад, для скла при довжині хвилі близько 0,1 нм (рентгенівські хвилі) одержано $n = 0,999999$, тому для них можна спостерігати явище повного внутрішнього відбиття на межі повітря-скло.

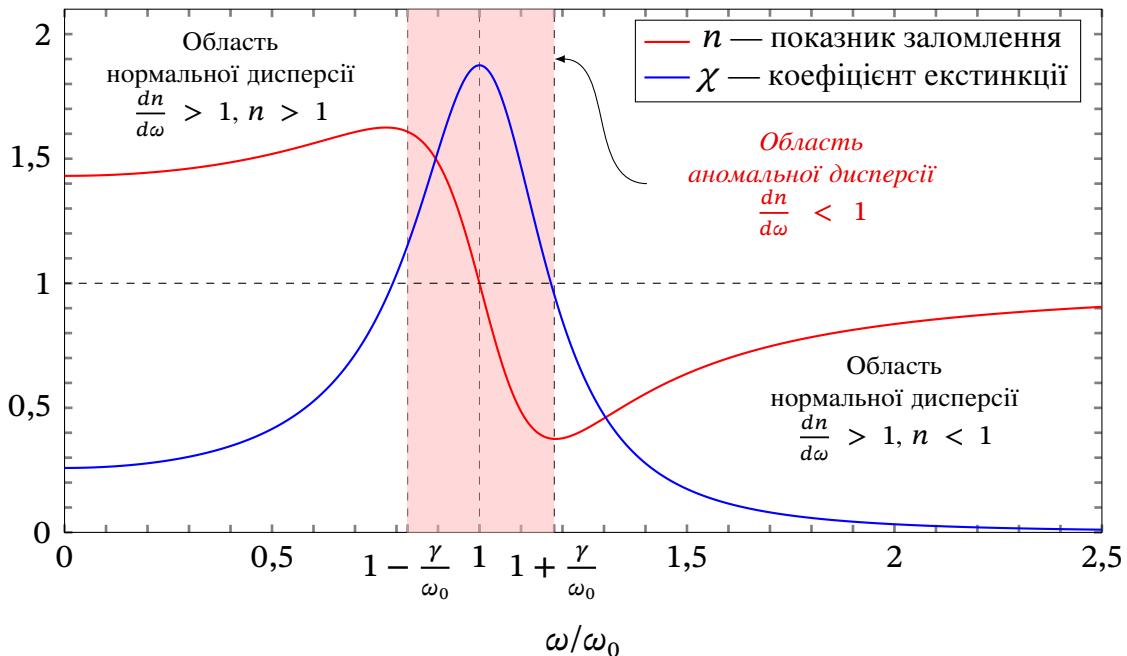


Рис. 3.2. Криві функцій для показника заломлення n та коефіцієнта екстинкції χ поблизу резонансної частоти ω_0

Для плазми, яка є іонізованим газом, а також для електронного газу в металах, в якому власні частоти вільних електронів дорівнюють нулю, а коливанням важких іонів можна знехтувати ($\frac{m_e}{m_n} \ll 1$, m_n — маса додатного іону) —

діелектрична проникність визначається головним чином вільними електронами. Тому, поклавши в (3.5) $\omega_0 = 0$, для плазми отримаємо:

$$\varepsilon = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2. \quad (3.13)$$

Зазвичай, $\omega < \omega_p$ (приклад радіохвилі ультракороткого діапазону, що падають на іоносферу Землі). В цьому випадку ε є суто уявною величиною (не має дійсної частини), тому з рівняння (3.8) випливає, що для плазми дійсна $\Re(\hat{\varepsilon}) = 0$. В цьому випадку плазма (або метал) є непрозорою для електромагнітних хвиль. Хвилі при падінні на її поверхню зазнають повного внутрішнього відбивання. При $\omega > \omega_p$ уявна частина $\Im(\hat{\varepsilon}) = 0$ і хвилі в розрідженій плазмі, або металі поширюються майже без поглинання ($\omega \gg \gamma$). Плазма (або метал) повністю прозорими для електромагнітної хвилі. Границе прозорості є умова $\hat{\varepsilon} = 0$, яка досягається за випадку $\omega = \omega_p$.

3.1.1 Фазова та групова швидкості

Монохроматична хвиля, за визначенням, є нескінченна у просторі та у часі. Реальна хвиля завжди просторово обмежена і випромінюється протягом обмеженого інтервалу часу, а тому не є строго монохроматичною. Проте будь-яку реальну хвилю можна як результат суперпозиції великої кількості строго монохроматичних плоских хвиль. Тобто реальна хвиля є групою монохроматичних складових.



Рис. 3.3. Приклад пакету хвиль

Під фазовою швидкістю розповсюдження хвиль розуміють швидкість, з якою поширюється поверхня однакових фаз:

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (3.14)$$

За відсутності дисперсії фазова швидкість хвиль не залежить від частоти. Тому, якщо є група хвиль різних частот, то всі вони будуть рухатися з однією і тією ж швидкістю і пакет, який вони утворюють у в результаті накладання, при русі не змінює своєї форми, його огинаюча рухатиметься з тією ж швидкістю, що і хвилі, з яких складається.

Якщо дисперсія є, то огинаюча рухається з іншою швидкістю, ніж швидкості монохроматичних компонент.

Швидкість руху максимуму амплітуди групи хвиль або хвильового пакету — називається груповою швидкістю.

Групова швидкість визначається за формулою

$$u = \frac{d\omega}{dk}. \quad (3.15)$$

Як легко бачити, зв'язок фазової і групової швидкості маж вигляд:

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}, \quad (3.16)$$

яке носить назву формули Релея.

Фазова швидкість може бути більше швидкості світла, і це не суперечить релятивістській теорії, яка стверджує, що швидкість матеріальних тіл та швидкість сигналу не можуть перевищувати c .

Групова швидкість в залежності від знаку доданку $\frac{dv}{d\lambda}$ може бути меншою, так і більше фазової, але завжди менше швидкості світла у вакуумі. Коли дисперсії немає (у вакуумі) $u = v$.

Максимум інтенсивності (енергії) припадає на максимум огинаючої у хвильовому пакеті. Тому в тих випадках, швидкість перенесення енергії (а отже, і інформації) хвилею дорівнює груповий швидкості і не перевищує c у вакуумі.

Поняття групової швидкості не застосовується, коли поглинання середовища дуже велике (область аномальної дисперсії).

3.2 Приклади розв'язування задач

Приклад: 18

Показник заломлення прозорої речовини для деякого спектрального діапазону описується двочленною дисперсійною формулою Коші:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2},$$

де $A > 0$, $B > 0$. Визначити: а) дисперсію показника заломлення речовини; б) фазову швидкість світла; в) групову швидкість світла.

Розв'язок

а) Дисперсія показника заломлення речовини

$$\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3}.$$

б) Фазова швидкість світла у речовині

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c\lambda^2}{A\lambda^2 + B}.$$

в) Групова швидкість світла у речовині визначається через фазову за формулою Релея:

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = \frac{C\lambda^2(A\lambda^2 - B)}{A\lambda^2 + B}.$$

Приклад: 19

Напишіть рівняння плоскої хвилі для випадків коли комплексний показник заломлення дорівнює $\hat{n} = n - i\chi$ та $\hat{n} = -i\chi$, відповідно. З'ясуйте фізичний зміст таких показників заломлення.

Розв'язок

Рівняння плоскої хвилі, що поширюється вздовж додатного напрямку осі x в середовищі запишемо у вигляді:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \hat{k}x)}, \quad (1)$$

де $\hat{k} = \frac{2\pi\hat{n}}{\lambda_0}$ — комплексне хвильове число, λ_0 — довжина хвилі у вакуумі, \hat{n} — комплексний показник заломлення середовища.

Якщо $\hat{n} = n - i\chi$, то (1) приймає вигляд:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{2\pi\chi}{\lambda_0}x} e^{i(\omega t - \frac{2\pi n}{\lambda_0}x)} = \mathbf{A} e^{i(\omega t - \frac{2\pi n}{\lambda_0}x)},$$

що являє собою рівняння плоскої хвилі з амплітудою, яка зменшується за законом:

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{2\pi\chi}{\lambda_0}x} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{k_\omega}{2}x},$$

де $k_\omega = \frac{4\pi\chi}{\lambda_0}$ — показник поглинання хвилі середовищем, який має розмірність см^{-1} .

Оскільки інтенсивність хвилі $I \sim \mathbf{A}^2$, то з останнього рівняння отримуємо вираз:

$$I = I_0 e^{-k_\omega x},$$

який називається *законом Бугера-Ламберта-Бера*.

При $\hat{n} = -i\chi$, (1) приймає вигляд:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{2\pi\chi}{\lambda_0}x} e^{i\omega t} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i\omega t}, \quad (2)$$

що уже являє собою рівняння плоскої *стоячої хвилі*, з амплітудою, що також як і в попередньому випадку, експоненційно спадає.

Примітки: З фізичної точки зору, рівняння вигляду (2) описує електричне поле в плазмі за умови $\omega < \omega_p$. В цьому випадку вводять поняття *глибини проникнення* електричного поля хвилі в середовище, яка визначається як відстань, на якій амплітуда електричного поля спадає в e разів, тобто:

$$\delta = \frac{\lambda_0}{2\pi\chi}.$$

Приклад: 20

Знайти число вільних електронів на атом срібла, якщо плівка срібла прозора для ультрафіолетового випромінювання, починаючи з енергії 8,9 еВ. Для срібла відносна атомна маса $A = 108$, густина $\rho = 10,5 \text{ г/см}^3$.

Розв'язок

Фотону з енергією 8.9 еВ відповідає довжина хвилі $\lambda = 1,393 \cdot 10^{-5} \text{ см}$.

Умовою прозорості плазми у речовини на даних частотах є $\omega = \omega_p$ (див. рівн.(3.13)).

Оскільки $\omega_p^2 = \frac{4\pi N_e e^2}{m_e}$ (див. рівн. (3.6)),

$$\frac{4\pi N_e e^2}{m_e} = \omega^2 = \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^2.$$

Звідки виразимо концентрацію електронів вільних електронів срібла

$$N_e = \frac{\pi c^2 m_e}{e^2 \lambda^2}. \text{ (СГС)}$$

Концентрація атомів срібла:

$$N = \frac{N_A \rho}{A}.$$

Число вільних електронів на один атом (значення підставимо в системі СГС):

$$\frac{N_e}{N} = \frac{\pi c^2 m_e A}{N_A \rho e^2 \lambda^2} \approx 1.$$

Приклад: 21

Знайти зв'язок між фазовою і групою швидкостями електромагнітних хвиль у плазмі при $\omega > \omega_p$.

Розв'язок

З формули (3.13) для отримуємо вираз показника заломлення:

$$n^2 = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2.$$

З означення показника заломлення $v = \frac{c}{n}$, з іншого боку $v = \frac{\omega}{k}$, прирівняємо ці вирази $\frac{c^2}{n^2} = \frac{\omega^2}{k^2}$ і отримаємо функцію $\omega(k)$ (дисперсійне співвідношення):

$$\omega^2 = \omega_p^2 - c^2 k^2.$$

Продиференціюємо останній вираз:

$$2\omega d\omega = 2c^2 k dk$$

і поділимо праву і ліву частину на $2k dk$:

$$\frac{\omega d\omega}{k dk} = c^2.$$

Враховуючи, що фазова швидкість $v = \frac{\omega}{k}$, а групова швидкість $u = \frac{d\omega}{dk}$, остаточно маємо:

$$vu = c^2.$$

3.3**Задачі для самостійного розв'язку**

3.1. Що характеризує дисперсія показника заломлення речовини?

3.2. Що характеризує дисперсія призми? Які значення має $\frac{dn}{d\lambda}$ нормальній та аномальній дисперсіях?

3.3. Що характеризує групова швидкість? Як вона пов'язана з фазовою швидкістю?

3.4. Для яких речовин групова швидкість рівна або менше, або більше фазової?

3.5. Вивести залежність групової швидкості від дисперсії показника заломлення речовини $\frac{dn}{d\lambda}$.

3.6. Як виражається показник заломлення розрідженого газу через частоту світла поблизу лінії поглинання? Накресліть приблизний графік цієї залежності.

3.7. Як виражається показник заломлення розрідженого газу через частоту світла поблизу лінії поглинання? Накресліть приблизний графік цієї залежності.

3.8. В дисперсійній формулі Коші для скла Ф1 в видимій області сталі $A = 1,5878$ і $B = 0,0087$ (для довжини хвилі в мкм). Визначити для зеленої лінії ртуті (0,546 мкм): а) показник заломлення скла Ф1; б) дисперсію показника заломлення; в) фазову швидкість монохроматичного світла; г) групову швидкість для групи хвиль з центром в 0,546 мкм.

3.9. Для рівносторонньої призми з скла ТК12 експериментально визначені мінімальні кути відхилення $43^\circ 57' 39''$, $43^\circ 32' 2''$ та $43^\circ 7' 5''$ для променів трьох довжин хвиль відповідно $\lambda_{F'} = 0,480$ мкм, $\lambda_e = 0,546$ мкм і $\lambda_{C'} = 0,6438$ мкм. Обчислити: а) показники заломлення n_λ ; б) середню дисперсію показника заломлення скла; в) середню кутову дисперсію призми; г) коефіцієнти двочленної формули Коші; д) фазову та групову швидкості світла у склі ТК12 (для λ_e).

3.10. Знайти залежність між групою u і фазовою v швидкостями для наступних законів дисперсії: а) $v \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, б) $v \sim k$, в) $v \sim \frac{1}{v^2}$, де λ , k , v — довжина хвилі, хвильове число та часто, відповідно.

3.11. Виведіть співвідношення (3.9) та (3.10).

3.12. При зондуванні розрідженої плазми радіохвилями різних частот виявили, що радіохвилі з $\lambda > 0,75$ м зазнають повного внутрішнього відображення. Знайти концентрацію вільних електронів у цій плазмі.

3.13. Знайти концентрацію вільних електронів іоносфери, якщо для радіохвиль з частотою 100 МГц її показник заломлення $n = 0,90$.

3.14. Маючи на увазі, що для жорсткого рентгенівського випромінювання електрони речовини можна вважати вільними, визначити, на скільки різниться з одиницею показник заломлення графіта для променів з довжиною хвилі у вакуумі $\lambda = 50$ нм.

3.15. Показник заломлення сірководню для світла з довжинами хвиль 509, 534 і 589 нм дорівнюють відповідно 1,647, 1,640 і 1,630. Обчислити фазову і групову швидкості світла поблизу $\lambda = 534$ нм.

4

Інтерференція

4.1 Основні поняття і закони

Інтерференція світла спостерігається при накладенні двох або більше когерентних світлових хвиль і полягає у просторовому перерозподілі енергії результуючої світлової хвилі, що супроводжується посиленням або послабленням її інтенсивності в залежності від співвідношення фаз хвиль, що складаються. При цьому виникають стійкі в часі світлі і темні ділянки, що чергуються в просторі, так звані інтерференційні смуги.

Для двопроменевої інтерференції результуюча інтенсивність дорівнюватиме:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta, \quad (4.1)$$

де I_1 та I_2 — інтенсивності когерентних світлових хвиль, що накладаються, δ — різниця фаз між хвилями.

В деякій точці простору буде спостерігатись максимум чи мінімум інтенсивності. Це залежить від різниці фаз:

$$\delta = \begin{cases} 2m\pi, & \text{умова максимуму інтерференції,} \\ (2m + 1)\pi, & \text{умова мінімуму інтерференції,} \end{cases} \quad (4.2)$$

де $m \in \mathbb{Z}$, m — називають *порядком інтерференції*.

Різниця фаз пов'язана з різницею ходу хвиль Δ за формулою:

$$\delta = k\Delta, \quad (4.3)$$

де $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — хвильове число.

Умови максимуму та мінімуму інтерференції (4.2) можна переписати для різниці ходу:

$$\Delta = \begin{cases} m\lambda, & \text{умова максимуму інтерференції,} \\ (2m + 1)\frac{\lambda}{2}, & \text{умова мінімуму інтерференції.} \end{cases} \quad (4.4)$$

Вигляд інтерференційної картини двох ізотропних когерентних точкових джерел залежить від взаємного розташування лінії, що з'єднує джерела, і площину екрану. Якщо лінія паралельна площині екрану, то спостерігаються смуги.

Якщо лінія перпендикулярна площині екрану, то спостерігається система кілець (рис. 4.1).

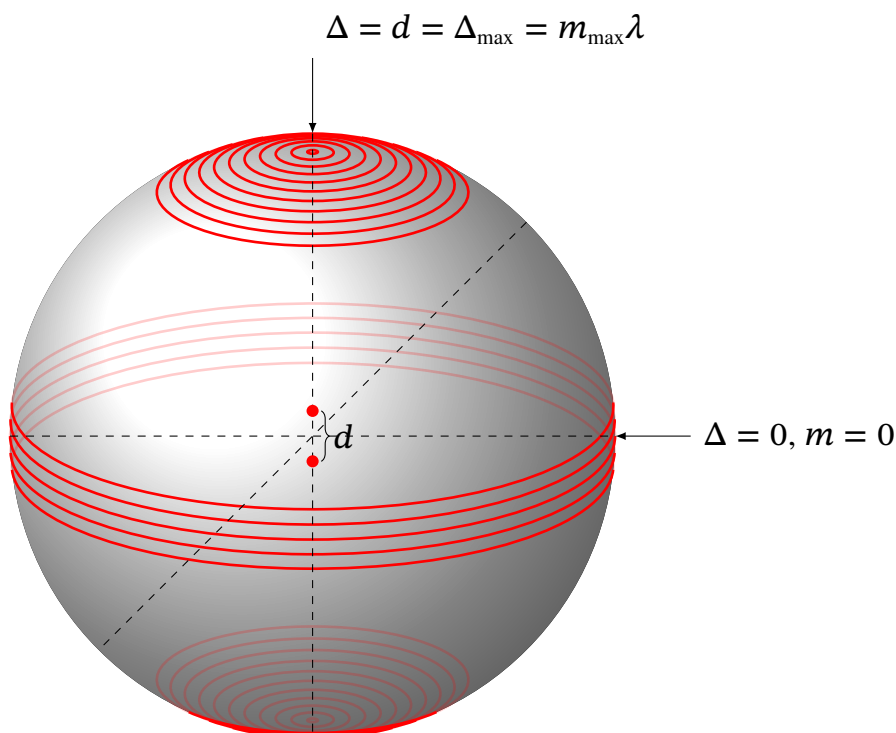


Рис. 4.1. Інтерференційні смуги від двох когерентних ізотропних точкових джерел на сферичному екрані

Інтерференційні схеми

Особливості спостереження явищ інтерференції світла від звичайних джерел світла обумовлені тим, що світло, що ними випромінюється, ніколи не буває повністю монохроматичним, а отже, когерентним¹. Таке світло можна розглядати як хаотичну послідовність окремих цугів синусоїдальних хвиль. Тривалість окремого цуга приблизно 10^{-9} с. Будь-який реєструючий прилад (а також око людини) має значно більший час інтегрування сигналу. Тому при накладенні пучків світла від різних джерел фазові співвідношення між світловими коливаннями у будь-якій точці за час спостереження встигають багаторазово змінитися випадковим чином. В результаті накладання великого числа коливань з випадковими фазами у виразі (4.1) зникає інтерференційний доданок, оскільки усереднюється $\langle \cos \delta \rangle = 0$, тобто інтерференції не спостерігається.

Звідси ясно, що для спостереження інтерференції світла необхідні спеціальні умови: світло від одного і того ж джерела потрібно розділити на два пучки (або кілька пучків) і потім звести їх відповідним чином. Якщо різниця ходу цих пучків від джерела до точки спостереження не перевищує довжини окремого цуга, то випадкові зміни амплітуди і фази світлових хвиль у двох пучках відбу-

¹когерентним є випромінювання, яке має однакову частоту і сталу у часі різницю фаз

ваються узгоджено, тобто, зміни будуть скорельовані. Про такі пучки кажуть, що вони повністю або частково *когерентні*.



Інтерференція є мірою когерентності.

Проблема отримання когерентних променів від одного джерела випромінювання вирішується двома методами:

- *методи поділу хвильового фронту*;
- *методи поділу амплітуди*.

В *методі поділу хвильового фронту* інтерферують хвилі, що йдуть від різних ділянок хвильового фронту. На цьому методі побудовано класичні інтерференційні схеми Юнга: дзеркало Ллойда, біпризма Френеля, білінзи, бідзеркала, дослід Юнга тощо.

В *методі поділу амплітуди* пучок ділиться на одній або декількох пропусках поверхнях, що частково відбивають світло. Амплітуда кожної з інтерферуючих хвиль менша ніж амплітуда вихідної хвилі. Даний метод використовується для спостереження інтерференційної картини в тонких плівках з малими коефіцієнтами відбиття, інтерферометрі Майкельсона, інтерферометрі Фабрі-Перо.



Рис. 4.2. Схема інтерференції методом поділу амплітуди

Схема Юнга

В інтерференційному досліді Томаса Юнга 1802 р. для розділення променів від одного джерела використовувався екран з двома вузькими щілинами, які грали роль вторинних когерентних джерел світла.

Площина екрану спостереження паралельна до лінії $\overline{S_1 S_2}$, що з'єднує два джерела (рис. 4.3). Дане розташування прийнято називати *схемою Юнга*. Знайдемо різницю ходу $\Delta = r_2 - r_1$ між променями, що йдуть від джерел S_1 і S_2 в точку P з координатою y . Початок координат помістимо в точці O , відносно якої джерела світла S_1 і S_2 розташовані симетрично. Тоді різниця ходу хвиль в

точках на екрані буде визначатись формулою:

$$\Delta = y \frac{d}{L}. \quad (4.5)$$

У випадку, коли $d \ll L$ відношення $\frac{d}{L} = \alpha_{\text{сх}}$, де $\alpha_{\text{сх}}$ — кут сходження променів, що інтерферують, а різниця ходу дорівнюватиме:

$$\Delta = y \alpha_{\text{сх}}. \quad (4.5a)$$

Якщо S_1 і S_2 — вузькі нескінченні щілини, то інтерференційна картина на екрані являє собою смуги, паралельні щілинам.



Рис. 4.3. Схема Юнга

Положення максимумів інтерференції:

$$y_{\text{max}} = \frac{mL}{d} \lambda = m \frac{\lambda}{\alpha_{\text{сх}}}. \quad (4.6)$$

Відстань між двома сусідніми максимумами інтенсивності називається відстанню між інтерференційними смугами. З останнього виразу випливає, що відстань між сусідніми максимумами дорівнюватиме:

$$\Delta y = \frac{L}{d} \lambda = \frac{\lambda}{\alpha_{\text{сх}}}. \quad (4.7)$$

Встановлення скляної платівки на шляху одного з променів приводить до зміни оптичної різниці ходу променів на величину

$$\Delta' = d(n - n_0)$$

де d і n — товщина й показник заломлення платівки; n_0 — показник заломлення середовища, зазвичай повітря.

Інтерференція в платівках і в тонких плівках

Прикладом двопроменевої інтерференції за методом поділу амплітуди хвилі — є інтерференція в платівках та тонких плівках.



Рис. 4.4. Інтерференція паралельних променів в платівці

При цьому повна оптична різниця ходу променів, що інтерферують, для відбитого світла, та світла, що пройшло (рис. 4.9), дорівнює:

$$\Delta_{21} = 2d \cdot n_2 \cos \varepsilon_2' + p \frac{\lambda}{2} = 2d \sqrt{n_2^2 + n_1^2 \sin^2 \varepsilon_1} + p \frac{\lambda}{2}, \quad (4.8)$$

де d і n_2 — товщина й показник заломлення плівки; ε_1 , ε_2' — кути падіння й заломлення; p — параметр, що враховує вплив півхвильових стрибків оптичного шляху променів при відбитті на границі від оптично більш щільного середовища; n_1 — показник заломлення середовища (матеріалу), з якого падає світло.

Значення параметра p залежно від співвідношення значень n_1 , n_2 і n_3 наведені в табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Параметр p	$n_1 < n_2 > n_3$	$n_1 > n_2 < n_3$	$n_1 < n_2 < n_3$	$n_1 > n_2 > n_3$
Відбите світло	−1	+1	0	0
Світло, що пройшло	0	0	+1	−1

Просвітлення оптичних деталей та діелектричні дзеркала

При нанесенні на поверхню лінзи з показником заломлення n_2 тонкого прозорого шару діелектрика з $n_1 < n_2$ можна досягти того, щоб хвилі певної довжини за рахунок інтерференції не відбивались від поверхні лінзи.

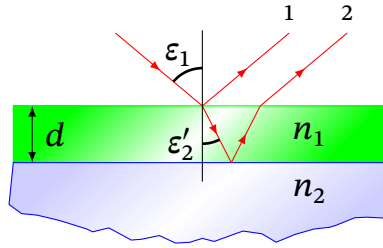


Рис. 4.5. Просвітлення оптичних деталей

Показник заломлення й товщина плівок для просвітлення оптики, які наносяться на поверхні оптичних деталей, визначають виразами:

$$n_1 = \sqrt{n_2}, \quad (4.9)$$

$$d = \frac{2m+1}{4} \frac{\lambda}{n_1 \cos \varepsilon_2'}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.10)$$

де λ — розрахункова довжина хвилі, зазвичай відповідає середині робочого спектрального діапазону оптичного приладу.

Явище інтерференції використовується також і для отримання діелектричних дзеркал з високим коефіцієнтом відбиття, для збільшення якого, покриття виготовляють багатошаровими. На поверхню оптичного елемента наносять кілька пар шарів прозорого діелектрика, оптична товщина, кожного з яких становить $\frac{\lambda}{4}$, тобто $n_1 l_1 = n_2 l_2 = \dots = \frac{\lambda}{4}$, причому $n_2 < n_1$ ($l_2 > l_1$) (рис. 4.6).

При цьому, коефіцієнт відбиття для дзеркала з N пар шарів дорівнює:

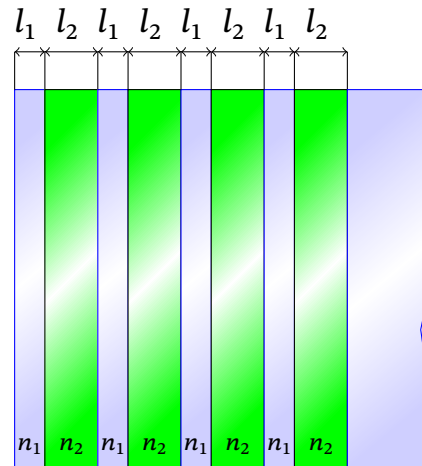


Рис. 4.6. Діелектричне дзеркало

$$R = \left[\frac{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{2N}}{1 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{2N}} \right]^2. \quad (4.11)$$

Багатошарові дзеркала використовуються, наприклад, в лазерних резонаторах з $R > 0,99$.

Інтерференція на клині

Паралельні пучки світла при падінні на клин (платівку змінної товщини) відбиваючись (або проходячи) будуть інтерферувати. В окремих місцях клина будуть спостерігатись максимуми, в залежності від товщини платівки d_m в

точці падіння. На поверхні платівки буде спостерігатися картина інтерференції (рис. 4.7). Для її спостереження очі повинні бути акомодовані на поверхню платівки.

З урахуванням невеликого кута клину θ , умова максимуму інтерференції для m -ї та $m + k$ -ї інтерференційних смуг має вигляд:

$$\begin{aligned} 2d_m n_2 &= m\lambda, \\ 2d_{m+k} n_2 &= (m + k)\lambda. \end{aligned}$$

Віднімемо друге рівняння від першого $\Delta d = d_{m+k} - d_m$:

$$\Delta d = \frac{k\lambda}{2n_2}.$$

З геометрії рис. 4.7 $\Delta d = l_k \sin \theta$, що при малих кутах $\sin \theta \approx \theta$ дає $\Delta d \approx l_k \theta$, отже

$$l_k = \frac{k\lambda}{2n_2\theta}, \quad (4.12)$$

де k — число інтерференційних смуг, λ — довжина хвилі світла, l_k — відрізок в інтерференційній картині, в якому вкладається k смуг, n_2 — показник заломлення матеріалу клина, θ — кут при вершині клину.

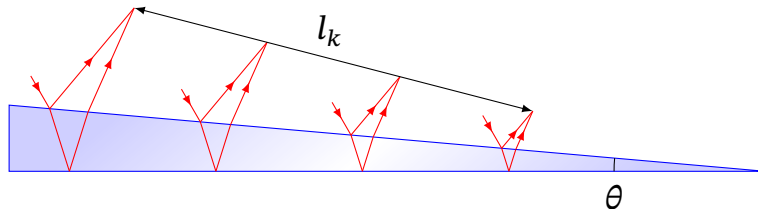


Рис. 4.7. Інтерференція на клині

Кільця Ньютона

Кільця Ньютона утворюються при інтерференції світлових хвиль, відбитих від границь тонкого прошарку між опуклою поверхнею лінзи і плоскою скляною платівкою (рис. 4.8). Спостереження ведеться у відбитому світлі. Прошарок може бути або повітряний, або заповнений рідиною з показником заломлення n_2 (в загальному випадку).

Нехай на систему згори падає монохроматичний паралельний пучок променів (рис. 4.8). Промінь відбивається від верхнього краю платівки (промінь 1 на рис.), а інша частина (промінь 2) від нижнього краю лінзи.

В першому наближенні, якщо знехтувати невеликим нахилом променів у прошарку, оптична різниця ходу з (4.8) дорівнює:

$$\Delta = 2dn_2, \quad (4.13)$$

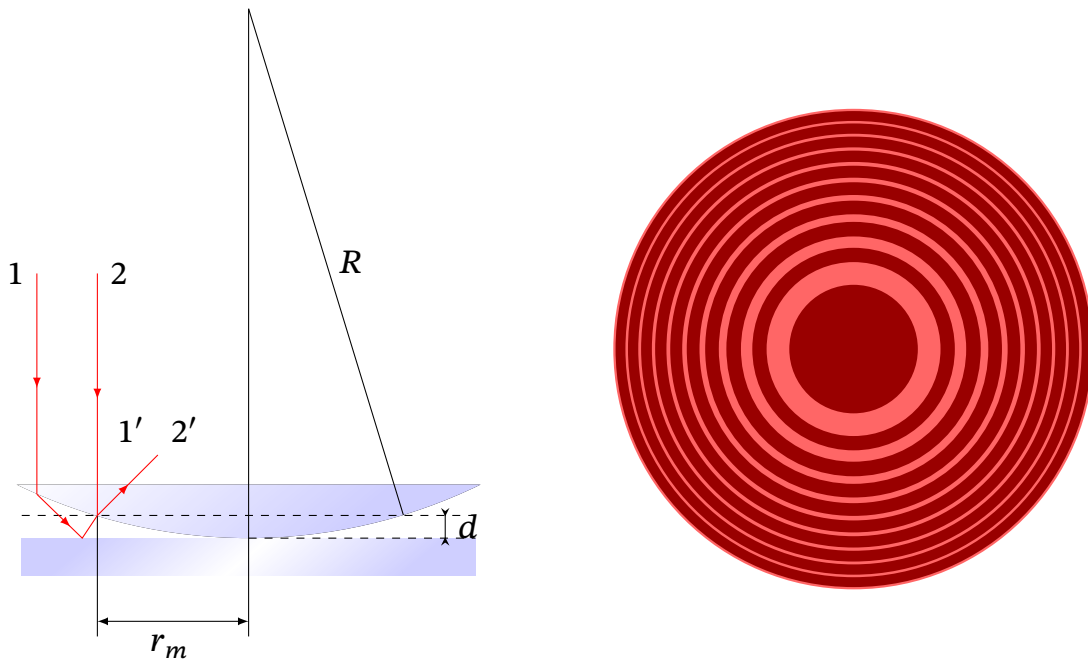


Рис. 4.8. Утворення кілець Ньютона.
(Картина кілець наведена праворуч має місце у відбитому світлі)

де d — товщина повітряного прошарку на відстані r_m від центру лінзи.

Якщо форма лінзи близька до сферичної з радіусом кривизни $R \gg r_m$, то з геометричних міркувань $r_m^2 = 2Rd$. Звідки, радіуси світлих темних кілець у відбитому світлі:

$$r_{\text{тем}}^2 = \frac{R}{n_2} \lambda m, \quad r_{\text{світ}}^2 = \frac{R}{n_2} (\lambda m - \lambda/2). \quad (4.14)$$

Радіуси світлих темних кілець у світлі, що пройшло:

$$r_{\text{світ}}^2 = \frac{R}{n_2} (\lambda m - \lambda/2), \quad r_{\text{тем}}^2 = \frac{R}{n_2} \lambda m. \quad (4.15)$$

Багатопроменева інтерференція

При падінні світла на прозору плоско-паралельну платівку на її поверхні відбуваються багаторазові відбивання, внаслідок чого з кожного боку платівки виходить ряд променів із спадною амплітудою, які потрібно враховувати при розгляді інтерференційної картини. Ці паралельні промені інтерферують між собою, наприклад, у фокальній площині лінзи за платівкою. Інтерференційні смуги при цьому є смугами рівного нахилу. Картина у відбитому світлі є доповнюючою до картини у світлі, що проходить. Це означає, що положення темних і світлих смуг міняються місцями.

Розглянемо плоскопаралельну прозору платівку з показником заломлення n_2 , що знаходиться в середовищі з показником заломлення $n_1 = n_3$, і припустимо, що на цю платівку під кутом ε_1 падає плоска хвиля монохроматичного світла.

На основі закону збереження енергії можна стверджувати, що інтенсивність падаючої хвилі дорівнює сумі інтенсивності відбитої хвилі та хвилі, що

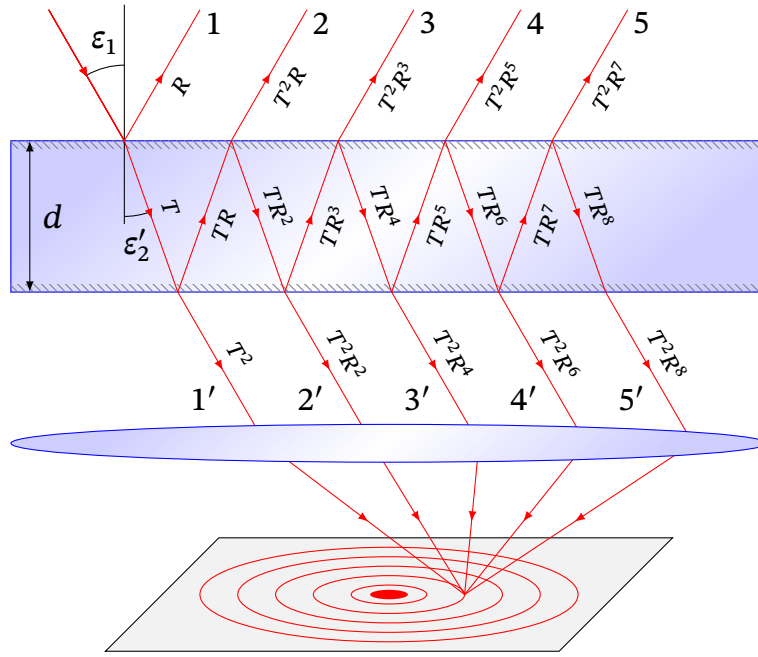


Рис. 4.9. Багатопротенева інтерференція в плоскопаралельній платівці

пройшла $I_0 = I_R + I_T$. Для інтенсивностей зручно ввести *енергетичні коефіцієнти* відбиття R та проходження T , тобто $I_R = RI_0$, $I_T = TI_0$, звідки можна бачити, що $R + T = 1$.

Знайдемо інтенсивності променів $1', 2', 3', \dots$, що пройшли крізь платівку:

$$I_{1'} = T^2 I_0, \quad I_{2'} = T^2 R^2 I_0, \quad I_{3'} = T^2 R^4 I_0, \quad \dots, \quad I_{n'} = T^2 R^{2n} I_0, \quad \dots$$

Відповідні дійсні амплітуди $E = \sqrt{I}$:

$$E_{1'} = TE_0, \quad E_{2'} = TRE_0, \quad E_{3'} = TR^2 E_0, \quad \dots, \quad E_{n'} = TR^n E_0, \quad \dots$$

Кожний жмуток світла затримується по фазі відносно попереднього на величину:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2dn_2 \cos \epsilon'_2. \quad (4.16)$$

де d — відстань між площинами інтерферометра, що відбивають. З урахуванням фазової затримки амплітуда результуючого коливання для хвилі, що пройшла, описується геометричною прогресією:

$$E = E_0(1 - R)(1 + Re^{-i\delta} + R^2 e^{-2i\delta} + R^3 e^{-3i\delta} + \dots) = \frac{E_0(1 - R)}{1 - Re^{-i\delta}}.$$

Так як інтенсивність $I \sim EE^*$. Отже, для інтенсивності світла, що пройшло, маємо:

$$I_T = \frac{E_0^2(1 - R)^2}{(1 - Re^{-i\delta})(1 - Re^{+i\delta})} = I_0 \frac{(1 - R)^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}. \quad (4.17)$$

де I_0 — інтенсивність падаючого світла.

Для отримання інтенсивності світла, що відбилось, можна скористатись законом збереження $I_R = I_0 - I_R$.

Умова інтерференційних максимумів для світла, що пройшло :

$$\delta = 2m\pi, \quad \text{або} \quad 2dn_2 \cos \varepsilon'_2 = m\lambda, \quad (4.18)$$

при цьому $I_{\max} = I_0$.

Умова інтерференційних мінімумів:

$$\delta = (2m + 1)\pi, \quad \text{або} \quad 2dn_2 \cos \varepsilon'_2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad (4.19)$$

при цьому інтенсивність в мінімумі дорівнює:

$$I_{\min} = I_0 \left(\frac{1 - R}{1 + R} \right)^2, \quad (4.20)$$

якщо коефіцієнт відбивання $R \approx 1$ близький до одиниці, то $I_{\min} \approx 0$.

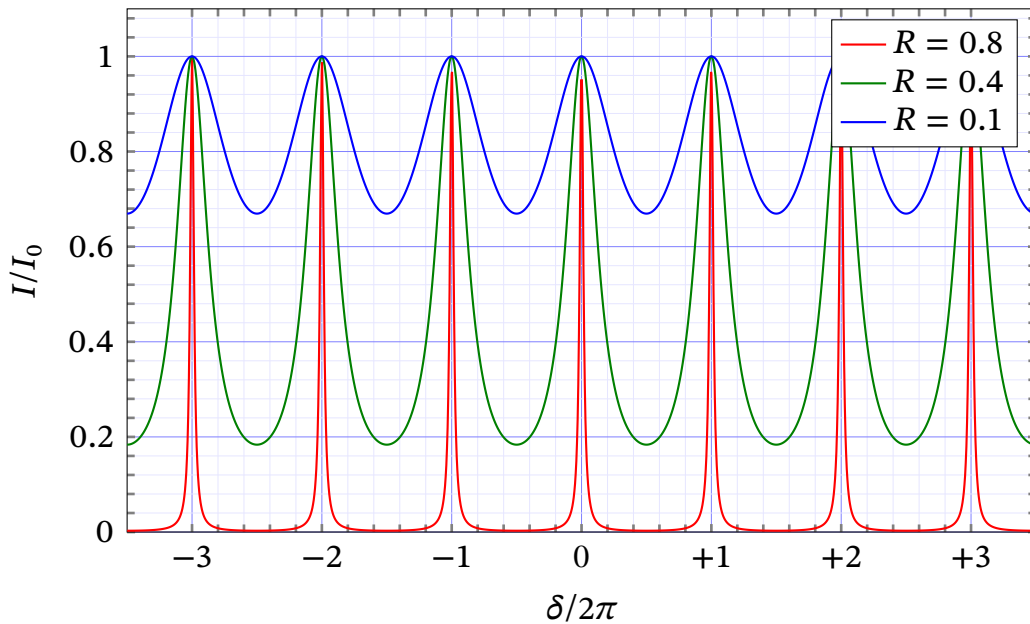


Рис. 4.10. Розподіл інтенсивності в інтерференційній картині для світла, що пройшло, в залежності від $\delta/(2\pi)$ для різних R

За умови $(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right) = 2(1 - R)^2$ з формули (4.17) випливає, що інтенсивність світла дорівнює половині максимальної, тобто $I = \frac{1}{2}I_0$. Звідки різниця фаз, за якої виконується ця умова, дорівнює:

$$\delta = 2\pi m + \arcsin \frac{1 - R}{\pi\sqrt{R}}. \quad (4.21)$$

якщо коефіцієнт відбивання $R \approx 1$, то $\arcsin \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}} \approx \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}}$ і $\delta = 2\pi m + \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}}$. Очевидно, при малих R інтерференційні смуги широкі, різкість інтерференційної картини низька. При збільшенні R смуги звужуються, а різкість зростає (рис. 4.10)

Явище багатопроменевої інтерференції використовується в спектроскопії: в **інтерферометрі Фабрі-Перо** (еталон Фабрі-Перо), **платівці Люмера-Герке**.

Часова когерентність

Для оцінки контрастності інтерференційної картини в деякій точці інтерференційного поля вводять параметр *видності* V :

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (4.22)$$

де I_{\max} , I_{\min} — максимальна та мінімальна інтенсивність світла (освітлення інтерференційних смуг) поблизу обраної точки поля. Видність V може змінюватися від 0 до 1. Значення 1 відповідає найбільш контрастній інтерференційній картині, 0 — повному її зникненню.

Збільшення ширини спектра випромінювання інтерферуючого світла призводить до погіршення видності інтерференційної картини. Якщо ширина спектрального інтервалу становить $\Delta\lambda$, то при спостереженні інтерференції за допомогою схеми Юнга максимум $m + 1$ -го порядку для довжини хвилі λ може співпасти з максимумом m -го порядку для довжини хвилі $\lambda + \Delta\lambda$. При цьому різниця ходу хвиль однакова:

$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (m + 1)\lambda, \quad (4.23)$$

звідки максимальний порядок, при якому буде спостерігатись така умова

$$m_{\max} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}.$$

Ця формула дає оцінку максимально можливого порядку інтерференції для квазімонохроматичного світла.

Пов'язавши порядок інтерференції із різницею ходу променів що інтерферують (4.4) ($\Delta = m\lambda$), отримаємо:

$$\Delta_{\max} = m_{\max}\lambda = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = \ell_{\text{ког}}. \quad (4.24)$$

Величина $\ell_{\text{ког}}$ називається *довжиною когерентності*.

Як було зазначено вище, атоми випромінюють світло протягом певного проміжку часу $\tau_{\text{ког}}$, який називається *часом когерентності*. При цьому випромінюється цуг довжиною ℓ (рис. 4.11):

$$\ell = c\tau_{\text{ког}}. \quad (4.25)$$

Довжина когерентності дорівнює довжині цуга: $\ell_{\text{ког}} = \ell$. Дійсно, якщо різниця ходу променів, що інтерферують, виявиться більшою довжини цуга, то такі промені інтерферувати не будуть (вони перестають бути когерентними). Отже, довжина когерентності $\ell_{\text{ког}}$ та довжина цуга хвиль ℓ мають дорівнювати одна одній. Отже, прирівнюючи (4.24) до (4.25), отримаємо:

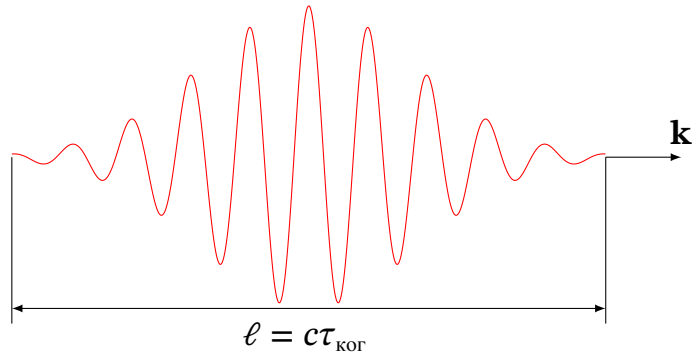


Рис. 4.11. Цуг хвилі

$$\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = c\tau_{\text{ког}}.$$

Використовуючи відомі співвідношення ($\nu = \frac{c}{\lambda}$, $\delta\nu = \frac{c\delta\lambda}{\lambda^2}$), отримаємо зв'язок:

$$\delta\nu \cdot \tau_{\text{ког}} = 1,$$

тобто, немонохроматичність та час когерентності випромінювання взаємообумовлені.

Просторова когерентність

Окрім немонохроматичності, на видність інтерференційної картини впливають розміри джерел.

Розглянемо утворення інтерференційної картини на екрані методом поділу хвильового фронту від протяжного монохроматичного джерела S , яке має лінійний розмір b . Фронт ділиться за допомогою отворів S_1 та S_2 , які розташовані на відстані D один від одного. Інтерференційну картину на екрані (рис. 4.12) можна розглядати як накладення інтерференційних картин від нескінченної кількості точкових джерел, на які можна уявно розділити поверхню джерела S (на рис. 4.12, для прикладу, наведено промені від двох точок). Оскільки хвилі від цих точок приходять з різними значеннями різниці ходу, то інтерференційні картини будуть зміщеними одна відносно одної і, накладаючись, призведуть до погіршення видимості інтерференції.

Сумарна інтенсивність на екрані (від усіх точок джерела S) буде визначатися за формулою (див. задачу 4.31):

$$I = 2I_0 \left[1 + \text{sinc} \left(\frac{\pi b D}{\lambda L_1} \right) \cos \left(\frac{2\pi y D}{\lambda L_2} \right) \right]. \quad (4.26)$$

Графік функції (4.26) зображений на рис. 4.13а.

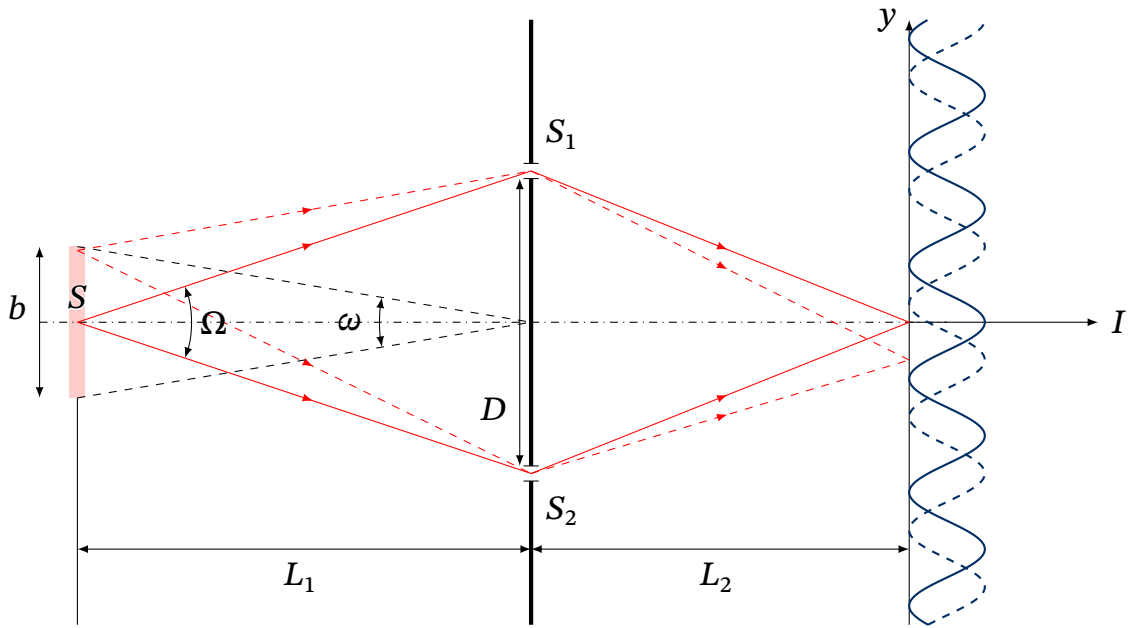


Рис. 4.12. До пояснення просторової когерентності

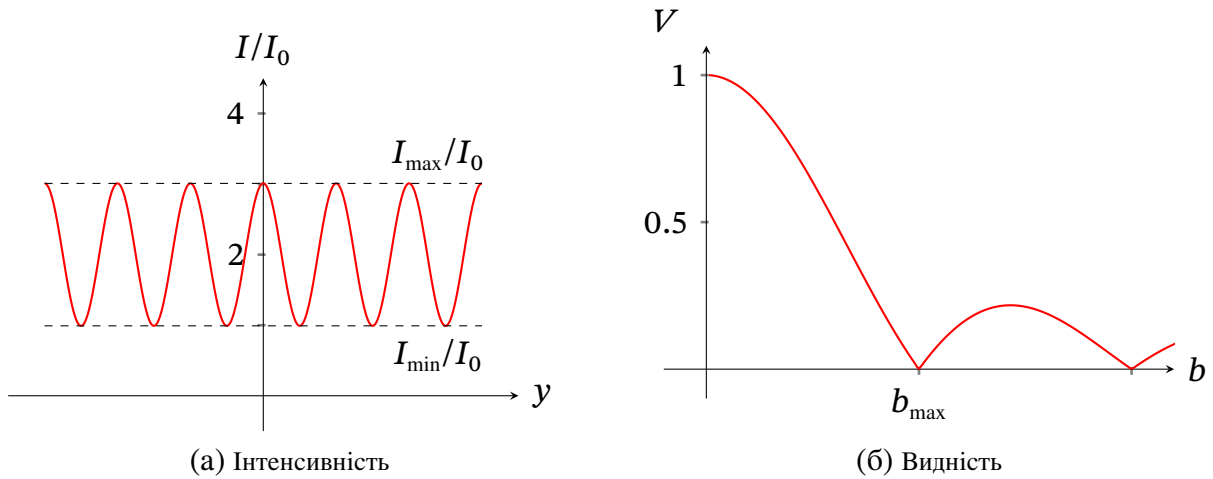


Рис. 4.13. Графіки інтенсивності та видності

Використовуючи означення (4.22) з (4.26) можна розрахувати видність як функцію розмірів джерела:

$$V(b) = \left| \text{sinc} \left(\frac{\pi b D}{\lambda L_1} \right) \right| = \left| \text{sinc} \left(\frac{\pi b \Omega}{\lambda} \right) \right|, \quad (4.27)$$

де Ω — апертура інтерференції (кут між крайніми інтерферуючими променями). Остання рівність була записана з урахуванням малих апертур $L_1 \Omega \approx D$, однак вона застосовна і в загальному випадку.

Графік $V(b)$ показано на рис. 4.13б. Можна бачити, що збільшення розмірів джерела світла b призводить до погіршення контрастності інтерференційних смуг, а при деякому значенні b_{\max} до їх повного зникнення. Значення b_{\max} можна визначити, поклавши в (4.27) $V = 0$:

$$b_{\max} = \frac{\lambda}{\Omega}. \quad (4.28)$$

На графіку 4.13а, при $b \rightarrow b_{\max}$, $\frac{I_{\min}}{I_0}, \frac{I_{\max}}{I_0} \rightarrow 2$, а $I(y) \rightarrow 2I_0 = \text{const}$, тобто інтенсивність на екрані у всіх точках стає однаковою.

Отже, з умови першого зникнення інтерференційної картини при $V = 0$, використовуючи (4.27), встановлюють максимально допустимий розмір протяжного джерела випромінювання $b \leq b_{\max}$ (при $b > b_{\max}$ приймають $V \approx 0$). Тоді, граничні умови просторової когерентності записуються як

$$b \cdot \Omega \leq \lambda, \quad (4.29)$$

або, враховуючи, що $L_1 \omega \approx b$ та $L_1 \Omega \approx D$:

$$D \cdot \omega \leq \lambda, \quad (4.29')$$

де ω — кутовий розмір джерела світла.

Тобто, при заданому розмірі b джерела, з (4.29') можна визначити максимальну відстань між щілинами S_1 та S_2 при якій інтерференційна картина буде видимою:

$$D_{\max} = \frac{\lambda L_1}{b} = \frac{\lambda}{\omega}, \quad (4.30)$$

де D_{\max} називається *діаметром когерентності*.

Іноді, користуються іншим критерієм — так званою *умовою достатньої видимості*:

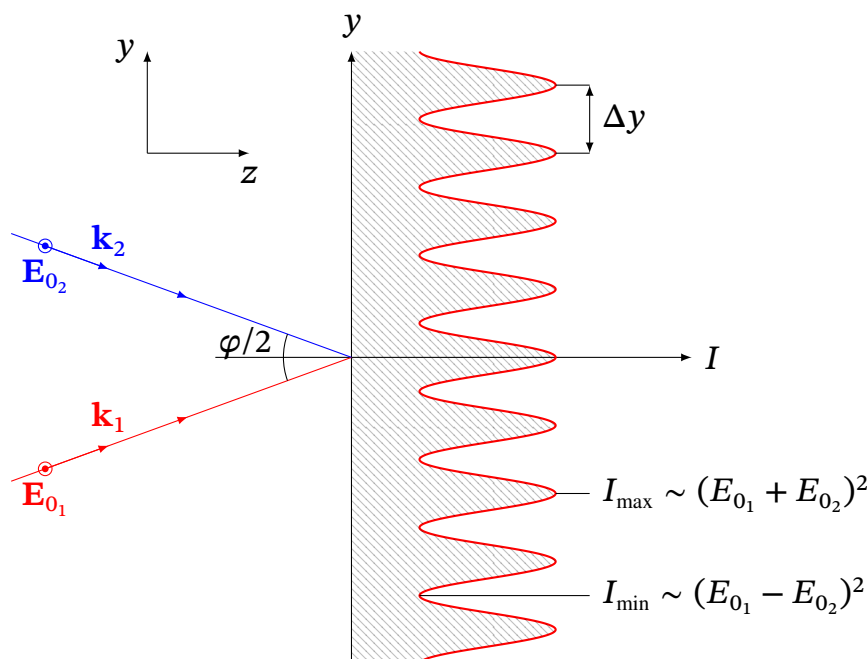
$$b \sin \frac{\Omega}{2} \leq \frac{\lambda}{4}. \quad (4.31)$$

4.2 Приклади розв'язку задач

Приклад: 22

Напрямки поширення двох плоских хвиль однієї й тої ж довжини λ становлять кут $\varphi/2$ з нормаллю до площини екрана, на якому спостерігаються інтерференційні смуги (див. рис.). Показати, що при малих φ відстань Δu між сусідніми інтерференційними смугами $\Delta u \approx \lambda/\varphi$.

Розв'язок



Рівняння 1-ї та 2-ї плоских хвиль:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= \mathbf{E}_{01} e^{i(\omega t - k_z z + k_y y)} = \mathbf{E}_{01} e^{i(\omega t - k_z z)} e^{i k_y y}, \\ \mathbf{E}_2 &= \mathbf{E}_{02} e^{i(\omega t - k_z z - k_y y)} = \mathbf{E}_{02} e^{i(\omega t - k_z z)} e^{-i k_y y}.\end{aligned}$$

Результат інтерференції спостерігається на екрані $z = 0$. Інтенсивність світла в точках на екрані $I \sim |\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2|^2$:

$$I \sim \Re((\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \cdot (\mathbf{E}_1^* + \mathbf{E}_2^*)) = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos(2k_y y), \quad (1)$$

де \mathbf{E}_1^* та \mathbf{E}_2^* — комплексно-спряжені величини.

Врахуємо, що $k_y = k \sin \frac{\varphi}{2}$, і при малих кутах $\sin \frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}$, формула (1) дає вираз:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos k\varphi y, \quad (2)$$

де $I_{1,2} \sim |\mathbf{E}_{01,2}|^2$, відповідно.

Результат інтерференції залежить від $\cos k\varphi y$. Максимум спостерігатиметься при $\cos k\varphi y = 1$. Звідки можна знайти координати максимумів

$$k\varphi y = 2\pi m.$$

Враховуючи, що $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, відстань між сусідніми максимумами $\Delta y = y_{m+1} - y_m$:

$$\Delta y = \frac{\lambda}{\varphi}$$

Чим менше кут сходження φ хвиль, що інтерферують, тим видніша інтерференційна картина. Так, для того, щоб Δy мм при $\lambda = 0,5$ мкм, необхідно, щоб $\varphi \approx 5 \cdot 10^{-3}$ рад.

Приклад: 23

Паралельний пучок білого світла падає під кутом 45° на водяну плівку ($n_2 = 1,33$), розливу на поверхні скла ($n_3 = 1,61$). Знайти а) при якій мінімальній товщині плівки відбите світло забарвиться в червоний колір ($\lambda = 700$ нм); б) у який колір забарвиться при цьому світло, що проходить.

Розв'язок

а) Скористаємося формулою повної оптичної різниці ходу променів, що інтерферують (4.8). При співвідношенні $n_1 < n_2 < n_3$ з таблиці табл. 4.1 знаходимо значення параметра $p = 0$ у відбитому світлі.

Для інтерференційного посилення червоного кольору повинна виконуватися умова максимуму:

$$\Delta_{21} = 2d\sqrt{n_2^2 + n_1^2 \sin^2 \varepsilon_1} = m\lambda_1,$$

звідки

$$d = \frac{m}{\sqrt{n_2^2 + n_1^2 \sin^2 \varepsilon_1}} \frac{\lambda_1}{2}.$$

Мінімальна товщина плівки при $m = 1$:

$$d_{\min} = \frac{1}{\sqrt{n_2^2 + n_1^2 \sin^2 \varepsilon_1}} \frac{\lambda_1}{2} = 310,7 \text{ нм.}$$

б) При $n_1 < n_2 < n_3$ у відбитому світлі з таблиці табл. 4.1 знаходимо значення параметра $p = +1$. Використовуючи умову максимуму:

$$\Delta_{2'1'} = 2d\sqrt{n_2^2 + n_1^2 \sin^2 \varepsilon_1} + \frac{\lambda}{2} = m\lambda_2,$$

звідки

$$\lambda_2 = \frac{4d}{2m - 1} \sqrt{n_2^2 + n_1^2 \sin^2 \varepsilon_1}.$$

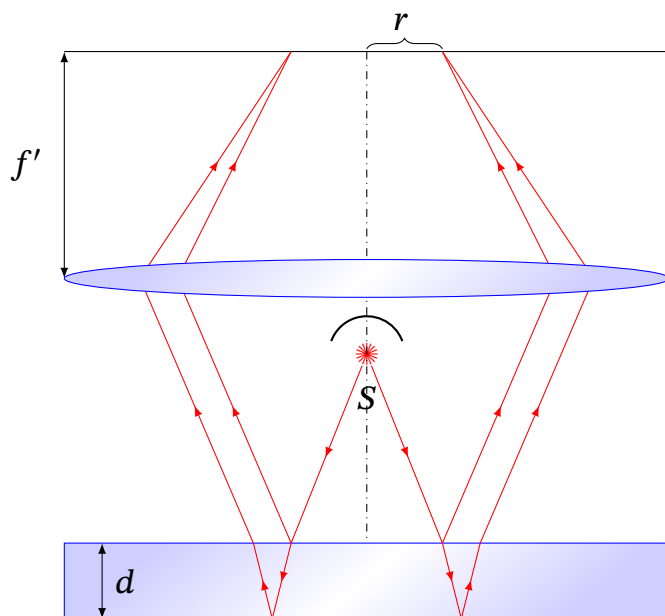
З послідовності значень λ_2 при різних m вибираємо те, що при d_{\min} належить видимому діапазону спектра ($m = +1$):

$$\lambda_2 = 466,6 \text{ нм,}$$

Тобто, світло, яке проходить, забарвлюється в синій колір.

Приклад: 24

Інтерференційні смуги рівного нахилу у фокальній площині лінзи одержують при відбитті від плоскопаралельної платівки, яка освітлюється монохроматичним джерелом світла S (див. рис.). Пряме світло джерела на лінзу не потрапляє. Довжина світлової хвилі $\lambda = 6000 \text{ \AA}$, товщина платівки $d = 1,6 \text{ мм}$; показник заломлення $n = 1,5$; фокусна відстань лінзи $f = 40 \text{ см}$. а) Знайти радіус першого видимого на екрані E темного інтерференційного кільця, якщо центр кілець темний. б) Яка максимально допустима спектральна ширина $\Delta\lambda$ світла від джерела S , при якій за даних параметрів схеми можна спостерігати інтерференційні кільця?

**Розв'язок**

а) Різниця ходу між променями, що відбилися від передньої й задньої поверхонь платівки, дорівнює $2dn \cos \varepsilon'_2 + \frac{\lambda}{2}$.

Оскільки центр кілець темний, то ця величина повинна містити непарне число напівхвиль. Першому темному кільцю відповідає таке збільшення кута заломлення ε'_2 , що різниця ходу зменшується на λ .

Це дає $2dn(1 - \cos \varepsilon'_2) = \lambda$, або $4dn \sin^2 \varepsilon'_2/2 = \lambda$.

Для малих кутів $dn\varepsilon'^2_2 = \lambda$. Малі кути падіння й заломлення пов'язані співвідношенням $\varepsilon_1 = n\varepsilon'_2$.

Для радіуса першого темного кільця одержуємо

$$r_1 = f\varepsilon_1 = fn\varepsilon'_2 = f\sqrt{\frac{n\lambda}{d}} = 9,5 \text{ мм}.$$

б) Максимально допустима спектральна ширина $\Delta\lambda$ визначається макси-

мальною різницею ходу між інтерферуючими променями:

$$\Delta_{\max} = 2dn \leq \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda},$$

звідки

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2dn} = 0,75 \text{ \AA}.$$

Приклад: 25

Кільця Ньютона спостерігаються в монохроматичному світлі. Між платівкою і лінзою повітря. Радіуси сусідніх темних кілець рівні відповідно 4,0 і 4,38 мм. Радіус кривизни лінзи дорівнює 6,4 м. Знайти довжину хвилі світла й порядкові номери кілець, якщо в центрі їх спостерігається темна пляма.

Розв'язок

Розглянемо схему, зображену на рис. 4.8. Оскільки в центрі кілець є темна пляма, спостереження ведеться у відбитому світлі. Скористаємося формулою для радіуса темних кілець у відбитому світлі (4.14). Визначимо довжину хвилі світла, використовуючи вираз радіусів двох сусідніх кілець:

$$r_{\text{тем } m}^2 = \frac{R}{n_2} \lambda m, \quad r_{\text{тем } m+1}^2 = \frac{R}{n_2} \lambda (m+1),$$

звідки

$$\lambda = \frac{n_2}{R} (r_{\text{тем } m+1}^2 - r_{\text{тем } m}^2),$$

Оскільки $n_2 = 1$, $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$.

Визначимо номери кілець із формули (4.14):

$$m = \frac{r_{\text{тем } m}^2}{R\lambda} n_2.$$

Підставляючи данні умови, отримаємо $m = 6$, $m+1 = 7$.

Приклад: 26

Вертикальна мильна плівка ($n_2 = 1,33$), що утворює клин внаслідок стікання рідини, освітлюється нормально падаючим білим світлом. При спостереженні інтерференційної картини у відбитому світлі через зелений світлофільтр (5461 Å) виміряна відстань між п'ятьма смугами склала 2,0 см. а) Визначити кут клина в кутових секундах. б) Як зміниться ширина інтерференційної смуги Δu , якщо спостереження вести через червоний світлофільтр (7200 Å)?

Розв'язок

Мильна плівка при стіканні рідини під дією гравітації представляє собою клин, який потовщується згори до низу, а тому виникнення інтерференційних смуг в мильній плівці можна моделювати інтерференцією на клині і використовувати формулу (4.12).

а) Кут клина визначаємо з формули (4.12):

$$\theta = \frac{k\lambda}{2l_k n_2} = 5,13 \cdot 10^{-5} \text{ рад} = 10,57''.$$

б) При $k = 1$, $l_k = \Delta y$ і формула (4.12) набуває вигляду:

$$\lambda = 2\Delta y n_2 \theta,$$

звідси

$$\frac{\Delta y_{\text{черв}}}{\Delta y_{\text{зел}}} = \frac{\lambda_{\text{черв}}}{\lambda_{\text{зел}}} = 1,32.$$

Приклад: 27

Зоряний інтерферометр Майкельсона складається з двох розташованих під кутом дзеркал, розділених довгою базою B (див. рис.). Дзеркала направляють світло від далекої зірки в точку, розташовану точно посередині між ними, де виникає інтерференційна картина на даній довжині хвилі. Поясніть, як саме визначають діаметри зірок, якщо відстані до них відомі. Знайдіть мінімальне значення бази, якщо найбільший кутовий розмір зірки $\omega = 10^{-8}$.

**Розв'язок**

Для спостереження інтерференційної картини від зірки деякого кутового розміру ω відстань B між дзеркалами бази інтерферометра має дорівнювати, або бути меншою за діаметр когерентності, який визначається з (4.30), тобто $B \leq D_{\max}$.

Для визначення розміру зірки базу збільшують до зникнення когерентності (до зникнення інтерференційної картини), тобто до $B \approx D_{\max}$:

$$B = \frac{\lambda}{\omega} = \frac{0,5 \text{ мкм}}{10^{-8} \text{ рад}} = 50 \text{ м.}$$

Якщо кутовий розмір даної зірки максимальний, то з іншими зірками потрібно працювати на більшій базі.

Примітка: За допомогою зоряного інтерферометра виміряно кутовий розмір зорі Бетельгейзе (α Оріона), який склав $0,047''$.

4.3

Задачі для самостійного розв'язку

4.1. Що характеризує просторова когерентність? Які обмеження накладаються на розміри джерела монохроматичного світла?

4.2. Що характеризує часова когерентність?

4.3. Як визначається допустима немонохроматичність світла, при якій ще можливе спостереження інтерференційної картини?

4.4. Що характеризує ступінь когерентності?

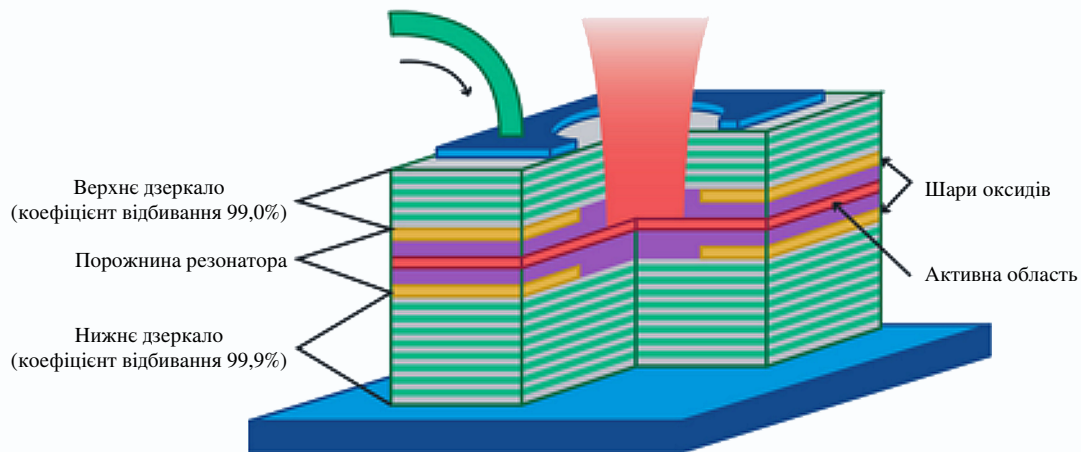
4.5. Що таке смуги рівного нахилу й рівної товщини? Де вони локалізуються?

4.6. Що називається шириною інтерференційної смуги у двопроменевих і багатопроменевий інтерференційних картинах?

4.7. Який принцип дії покриття для просвітлення оптичних деталей?

4.8. Однолінзовий об'єктив оптоелектронного перетворювача працює в спектральному діапазоні $0,9 \dots 1,3$ мкм. Показник заломлення скла марки ЛК6, з якого зроблена лінза, у середині робочого діапазону дорівнює 1,461. Визначити: а) параметри покриття для просвітлення; б) коефіцієнт пропускання об'єктива до й після просвітління; в) ступінь зменшення втрат на відбиття.

4.9. В напівпровідникових лазерах з вертикальним резонатором, застосовують брегівські дзеркала, які виготовляють в одному технологічному циклі епітаксійного вирощування лазерного чипа (див. рис.). Розрахувати повну товщину та коефіцієнт відбивання для довжини хвилі випромінювання 1 мкм для верхнього дзеркала такого лазера, виготовленого з 20-ти пар шарів GaAs/AlGaAs, показники заломлення для яких відповідно дорівнюють $n_1 = 3,3$ та $n_2 = 2,9$.



4.10. Лінза виготовлена із скла марки ТК 23 ($n_2 = 1,6$) (важкий крон), яка працює у видимому діапазоні спектру. Визначте показник заломлення і найменшу товщину одношарового покриття для просвітлення цієї лінзи, взявши середню довжину хвилі для видимого діапазону рівною $0,55 \text{ мкм}$. Порівняйте пропускання лінзи до і після просвітлення. У скільки разів знизяться при цьому втрати на відбиття?

4.11. Складаються дві монохроматичні хвилі жовтогарячого кольору ($\lambda = 0,6 \text{ мкм}$), що йдуть в одному напрямку. Параметри хвиль у точці додавання: $E_{01} = 4 \text{ В/м}$; $E_{02} = 3 \text{ В/м}$; $\varphi_1 = 0$; $\varphi_2 = \pi/2$. Визначити параметри результуючої хвилі, записати вираз для її світлового вектора, побудувати векторну діаграму складання амплітуд.

4.12. Визначити амплітуду й інтенсивність результуючої світлової хвилі, отриманої в результаті додавання однаково напрямлених світлових когерентних хвиль: $E_m = E_{01} \cos(\omega t - (m - 1)\delta)$, де E_{01} — амплітуда хвиль, що складаються; m — номер хвилі, що складається; δ — різниця фаз між сусідніми доданками. Розглянути два випадки: а) $m = 1, 2, 3, \dots, N$; б) $m = 1, 2, 3, \dots$

4.13. У схемі біпризми Френеля відстань між уявними зображеннями джерела світла дорівнює $0,5 \text{ мм}$, відстань до екрана 5 м . У зеленому світлі ширина інтерференційних смуг виявилася рівна 5 мм . Знайти довжину хвилі зеленого кольору.

4.14. Інтерферометр Релея освітлюють монохроматичним світлом з довжиною хвилі 589 нм. На шляху обох променів інтерферометра поставлені прозорі кювети довжиною 0,02 м. Після заміни в одній з них повітря хлором інтерференційна картина змістилася на 20 смуг. Визначити показник заломлення хлору, якщо для повітря він дорівнює 1,000276.

4.15. На мильну плівку ($n = 1,33$) падає біле світло під кутом 45° . а) При якій найменшій товщині плівки відбиті промені, будуть пофарбовані в жовтий (600 нм), фіолетовий (420 нм) колір? б) Як зміниться товщина плівки, якщо її помістити між двома скельцями?

4.16. Пучок паралельних променів ($\lambda = 0,6$ мкм) падає під кутом 30° на мильну плівку ($n = 1,33$). При якій найменшій товщині плівки: а) відбиті промені будуть максимально ослаблені, максимально підсилені інтерференцією? б) те ж саме, для променів, що проходять.

4.17. Кільця Ньютона утворюються між лінзою з радіусом кривизни 8,6 м і платівкою при освітленні нормально падаючим пучком монохроматичного світла. Вимірами встановлено, що діаметр четвертого темного кільця дорівнює 9 мм. Визначити довжину хвилі світла, якщо центр кілець: а) темний; б) світлий.

4.18. Знайти відстань між третім і шістнадцятим кільцями Ньютона, якщо відстань між другими й двадцятим темними кільцями дорівнює 4,8 мм. Центр кілець — темний.

4.19. Установка для спостереження кілець Ньютона у відбитому світлі освітлюється монохроматичним світлом. Після того як простір між лінзою й скляною платівкою заповнили рідиною, радіуси темних кілець зменшилися в 1,25 рази. Визначити показник заломлення рідини.

4.20. В одне із плечей інтерферометра Майкельсона, освітлюваного монохроматичним світлом (589 нм), поміщена кювета з робочою довжиною 14 см. Після заповнення кювети аміаком інтерференційна картина змістилася в поле зорової труби на 180 смуг. Визначити показник заломлення аміаку.

Вказівка: урахувати подвійне проходження кювети променем.

4.21. Кільця Ньютона отримуються за допомогою плоскоопуклої лінзи з радіусом кривизни R_1 , покладеної на ввігнуту сферичну поверхню пробного скла з радіусом кривизни $R_2 > R_1$. Освітлення монохроматичне з довжиною хвилі λ , кільця спостерігаються у відбитому світлі. Визначити радіус m -го кільця: а) світлого; б) темного.

4.22. В установці для спостереження кілець Ньютона лінза може пересуватись в напрямку, перпендикулярному до платівки. Описати, що відбуватиметься з кільцями Ньютона при віддаленні й наближенні лінзи до платівки.

4.23. Скляний клин ($n = 1,55$) з кутом при вершині $2'$ освітлюється нормально падаючим монохроматичним світлом. Визначити довжину хвилі світла, якщо спостережувані інтерференційні смуги мають ширину 0,3 мм.

4.24. На скляний клин з кутом при вершині $20''$ нормально падає монохроматичне світло (0,582 мкм). У спостережуваній інтерференційній картині в 1 см укладається п'ять смуг. Визначити показник заломлення скла.

4.25. знайти різницю довжин хвиль D -ліній Na, якщо відомо, що різкість інтерференційної картини, спостережуваної в інтерферометрі із двома променями, мінімальна в 490-й, 1470-й і т. д., а максимальна в 1-й, 980-й і т. д. смуг. Середня довжина хвилі D -Ліній $\lambda = 5893 \text{ \AA}$.

4.26. Інтерференційні смуги рівного нахилу у фокальній площині лінзи одержують при відбитті від плоскопараллельної платівки, яка освітлюється монохроматичним джерелом світла S , розміщеним посередині між лінзою і платівкою на відстані f від лінзи. Пряме світло джерела на лінзу не потрапляє. Довжина світлової хвилі $\lambda = 6000 \text{ \AA}$, товщина платівки $d = 1,6 \text{ мм}$; показник заломлення $n = 1,5$; фокусна відстань лінзи $f = 40 \text{ см}$, діаметр лінзи $D = 8 \text{ см}$. Скільки темних кілець можна спостерігати на екрані?

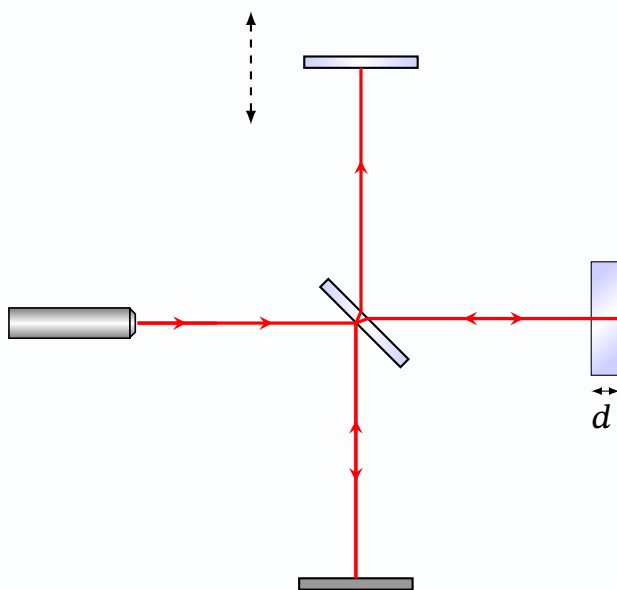
4.27. Якою має бути мінімальна товщина платівки в попередній задачі, щоб можна було отримати принаймні одне темне кільце?

4.28. З лінзи з фокусною відстанню $f = 50 \text{ см}$ вирізали центральну частину шириною a . Обидві половини зсунули впритул. З одного боку лінзи розташували точкове джерело монохроматичного світла з довжиною хвилі

$\lambda = 6000 \text{ \AA}$. З іншого боку лінзи розташували екран, на якому спостерігають інтерференційні смуги, відстань між сусідніми світлими смугами $\Delta x = 0,5 \text{ мм}$ і не змінюється при пересуванні екрана вздовж оптичної осі. Знайти a .

4.29. Знайти відносний зсув $\Delta l/l$ інтерференційних смуг, отриманих за допомогою платівки Люмера-Герке, при зміні температури на 1°C . Товщина платівки $h = 2 \text{ см}$, показник заломлення $n = 1,5$, температурний коефіцієнт лінійного розширення скла $\alpha = 8,5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, довжина хвилі світла $\lambda = 500 \text{ нм}$. Залежністю показника заломлення від температури знехтувати

4.30. В одне із плечей інтерферометра Майкельсона замість відбиваючого дзеркала поміщена непоглинаюча платівка з напівпрозорою передньою й дзеркальною задньою стінкою (рис.). Товщина платівки $d = 2 \text{ мм}$, показник заломлення $n = 5$, спектр падаючого випромінювання простирається від 0 до 110 ГГц . При переміщенні дзеркала в другому плечі детектор реєструє ряд піків інтенсивності випромінювання. Яка відстань між піками в одиницях довжини переміщення дзеркала?



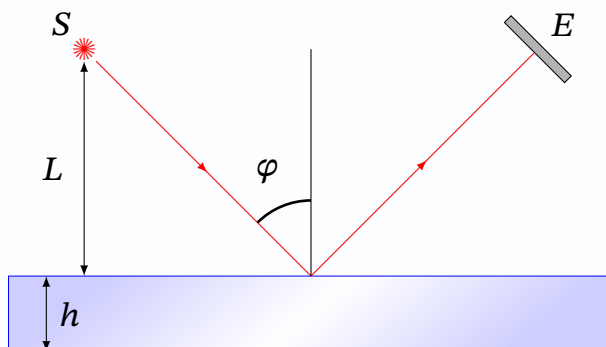
Вказівка: Врахувати довжину когерентності.

4.31. Визначити видність V інтерференційної картини в експерименті Юнга при використанні джерела світла, розмірами якого b неможливо знехтувати. Відстань від джерела до екрану з щілинами L , відстань між щілинами d . Середня довжина хвиль λ .

4.32. На екран з двома вузькими паралельними щілинами падає світло променів Сонця. При якій відстані D між щілинами можуть спостерігатися інтерференційні смуги за екраном? Кутовий діаметр Сонця $\alpha \approx 0.01$ рад.

4.33. Зображення Сонця отримане за допомогою лінзи з фокусною відстанню $f = 50$ мм на отворі екрану (розмір отвору дорівнює величині зображення). За екраном розміщені дві вузькі паралельні щілини на відстані $D = 1$ мм один від одного. При якій відстані l між екраном та щілинами можуть спостерігатися інтерференційні смуги? Кутовий діаметр Сонця $\alpha \approx 0.01$ рад.

4.34. Джерело світла S розташоване на відстані $L = 1$ м від тонкої слюдяної платівки завтовшки $h = 0,1$ мм з показником заломлення $n = 1,4$ (див. рис.). На такій же відстані від платівки розташовано невеликий екран E , орієнтований перпендикулярно відбитим променям, на якому спостерігаються інтерференційні смуги. Кут $\varphi = 60^\circ$. Знайти порядок m інтерференційної смуги в центрі екрана і ширину Δl інтерференційних смуг. Оцінити допустимий розмір b і допустиму монохроматичність $\Delta\lambda$ джерела, при якій ще буде помітним контраст інтерференційної картини.



Використовується світло з довжиною хвилі $\lambda = 560$ нм.

4.35. За допомогою зорової труби, встановленої на нескінченність, спостерігають інтерференційні смуги в тонкій плоскопаралельній скляній платівці завтовшки $h = 0,2$ мм з показником заломлення $n = 1,41$, при цьому кут спостереження може змінюватись від 0 до 90° (див. рис.). Знайти максимальний m_{\max} і мінімальний m_{\min} порядок інтерференційних смуг. Оцінити допустиму монохроматичність $\Delta\lambda$ джерела, за якої будуть достатньо чітко спостерігатись всі інтерференційні смуги. Який допустимий розмір джерела світла в цьому інтерференційному досліді?

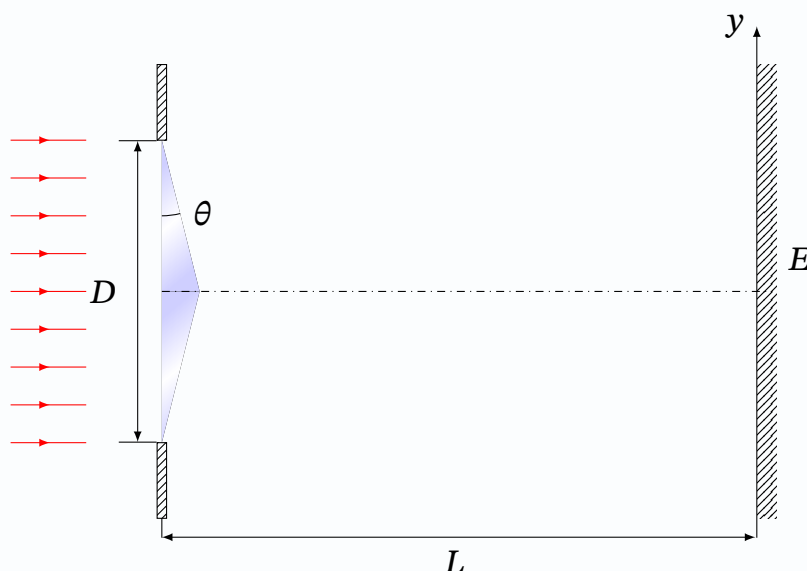


Використовується світло з довжиною хвилі $\lambda = 560$ нм.

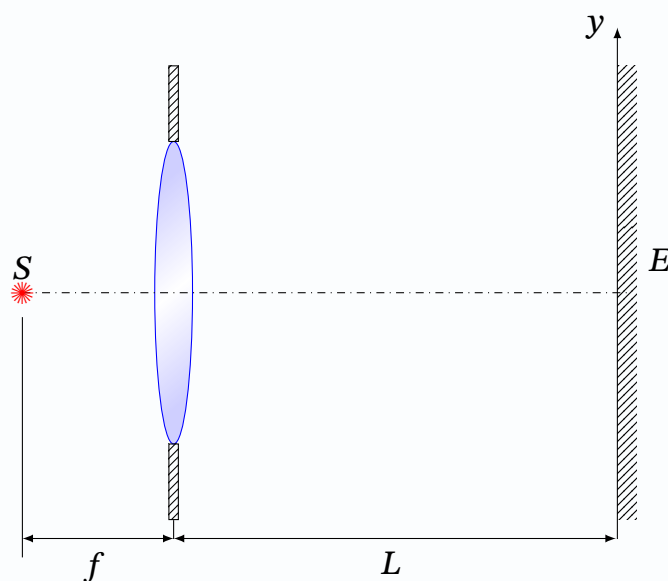
4.36. В інтерференційній схемі (рис.) використовується квазімонохроматичне джерело світла S ($\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см). Відбиваючі дзеркала розташовані симетрично відносно джерела S і екрана E , на якому спостерігається інтерференція. Знайти: 1) ширину інтерференційної смуги Δx на екрані E ; 2) область локалізації смуг на екрані; 3) максимальний і мінімальний порядок інтерференції й число спостережуваних смуг, 4) ступінь монохроматичності інтерференційних смуг. Оцінити допустиму немонохроматичність, при якій число спостережуваних смуг максимально; 5) припустимий розмір джерела b . Параметри схеми: $L = 1$ м, $2d = 2,5$ см, $D = 10$ см.



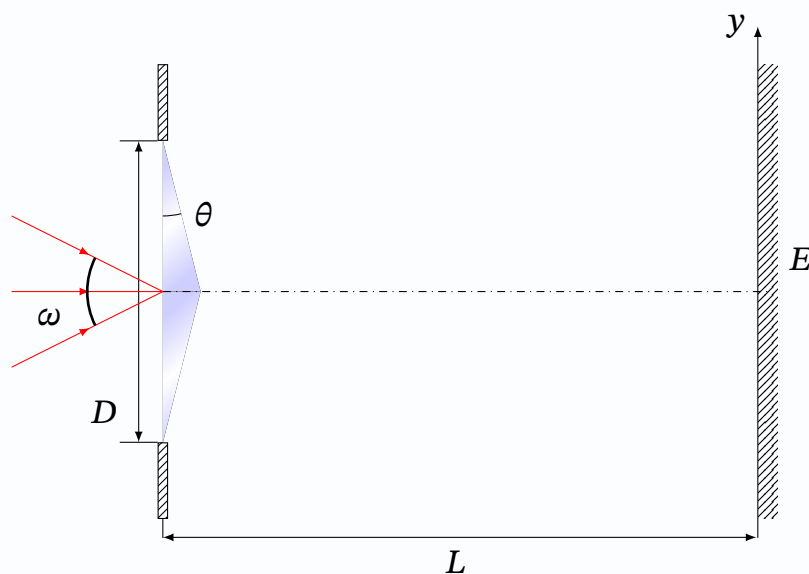
4.37. Паралельний пучок світла від далеко розташованого джерела з довжиною хвилі $\lambda = 500$ нм падає на біпризму із заломлюючим кутом $\theta = 10^{-2}$ рад і шириною $D = 2$ см, виконану зі скла з показником заломлення $n = 1,5$ (рис.). Визначити 1) на якій відстані L від біпризми потрібно розташувати екран, щоб на ньому можна було спостерігати максимально можливе число інтерференційних смуг; 2) оцінити припустиму немонохроматичність $\Delta\lambda$ світла, необхідну для спостереження всіх смуг. 3) Оцінити припустимий кутовий розмір ψ джерела в цьому інтерференційному досліді.



4.38. З тонкої лінзи діаметром $D = 2,5$ см з фокусною відстанню $f = 50$ см вирізана центральна смужка шириною $a = 0,5$ см, після чого обидві половини лінзи зсунуті (білінза). Джерело світла S з довжиною хвилі $\lambda = 500$ нм розташовується на осі системи у фокальній площині лінзи (рис.). На якій відстані L від білінзи потрібно розташувати екран, щоб на ньому можна було спостерігати максимально можливе число інтерференційних смуг? Визначити ширину Δx інтерференційних смуг і їхнє число. 2) Оцінити припустиму немонохроматичність $\Delta\lambda$ джерела світла в цьому інтерференційному експерименті, необхідну для спостереження всіх смуг. 3) Оцінити припустимий розмір b джерела світла.



4.39. Біпризма освітлюється монохроматичним світлом з довжиною хвилі $\lambda = 500$ нм від далеко розташованого протяжного джерела з кутовим розміром $\omega = 10^{-3}$ рад. Заломлюючий кут біпризми $\theta = 5 \cdot 10^{-3}$ рад, показник заломлення $n = 1,5$. Визначити видимість інтерференційних смуг, спостережуваних на екрані, залежно від відстані L між екраном і біпризмою (див. рис.). При яких значеннях L інтерференційні смуги розмиваються? Розмір біпризми вважати досить великим. Джерело можна вважати рівномірно випромінюючою смужкою, що паралельна ребру біпризми.



4.40. При освітленні еталона Фабрі-Перо розбіжним пучком монохроматичного світла з довжиною $\lambda = 500$ у фокальній площині лінзи виникає багатопроменева інтерференційна картина — система концентричних тонких світлих кілець. Товщина еталона дорівнює d . Визначити, як залежить від порядку інтерференції m : а) розташування кілець (по їх номеру від центра); б) кутова ширина відстаней між кільцями.

Вказівка. Оцінити знаки похідної $\frac{dk}{dm} = \frac{dk}{d\epsilon'_2} \frac{d\epsilon'_2}{dm}$ й збільшення $\Delta\epsilon'_2$ при $\Delta m = 1$ (k — порядковий номер кільця від центра картини).

5.1 Основні поняття і закони

Дифракція — це будь-яке відхилення при поширенні світла від законів геометричної оптики. Дифракція світла спостерігається при поширенні світлової хвилі в місцях з різкими локальними амплітудними або фазовими неоднорідностями (наприклад, при проходженні через отвори в екранах, поблизу меж непрозорих тіл, через структури з просторово модульованим показником заломлення тощо). Виявом дифракції є дифракційна картина, що є результатом інтерференції хвиль, які дифрагували під різними кутами на границях оптичних неоднорідностей.

Явища дифракції відіграють важливу роль в роботі оптичних інструментів. Через обмеженість розмірів жмутків променів в будь-якому оптичному приладі, зображення, які створюються, мають дифракційне розмиття, що визначає теоретичну роздільну здатність приладу.

Максимально точне розв'язання дифракційних задач є предметом теорії дифракції, яка встановлює взаємозв'язок між розподілом електромагнітного поля у площині предметів і розподілом поля в довільній площині оптичної системи. Однак теорія дифракції виходить за межі даного посібника.

Для розв'язання практичних дифракційних задач використовують наближені методи, які ґрунтуються на принципі Гюйгенса–Френеля, який став розвитком принципу Гюйгенса. Згідно з *принципом Гюйгенса* кожную точку хвильового фронту можна вважати центром вторинних сферичних хвиль, а положення хвильового фрон-

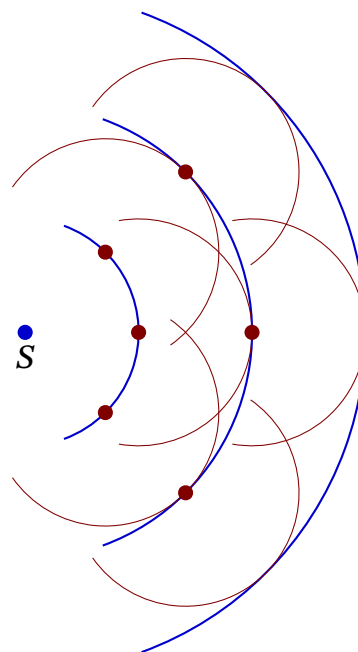


Рис. 5.1. Принцип Гюйгенса

ту в наступний момент часу є визначається як огинаюча поверхня до вторинних хвиль (рис. 5.1).

Згідно з *принципом Гюйгенса–Френеля* кожна точка довільного хвильового фронту в даний момент часу, є джерелом вторинних *когерентних* сферичних хвиль, а хвильова поверхня в будь-який момент часу визначається за розподілом поля в результаті їх інтерференції. Математичне обґрунтування принципу Гюйгенса-Френеля було в подальшому дано Кірхгофом, який, зокрема, показав, що в якості поверхні вторинних джерел може бути вибрана не тільки поверхня хвильового фронту, але і будь-яка поверхня, до якої дійшла первинна хвиля. Принцип Гюйгенса-Френеля, який, хоча і є наближеним, дозволяє кількісно описати дифракційні явища, які спостерігаються на простих об'єктах.

Розглянемо монохроматичну світлову хвилю довжиною λ , яка поширюється в однорідному середовищі від джерела S у деяку точку спостереження P (рис. 5.2). Оточимо джерело сферичною поверхнею радіусом a . Відповідно до принципу Гюйгенса-Френеля, кожна ділянка поверхні хвильового фронту розглядається як центр вторинного джерела. Коливання, що приходить від деякої ділянки $d\sigma$ в точку P мають амплітуду:

$$dE_P = K(\alpha) \frac{A}{r} e^{-ikr} d\sigma,$$

де A — величина, що визначається амплітудою світлової хвилі в місці знаходження елемента $d\sigma$, k — хвильове число. Коефіцієнт $K(\alpha)$ залежить від кута: між нормаллю до елемента $d\sigma$ і напрямом від $d\sigma$ до точки P . Френель припустив, що коефіцієнт $K(\alpha)$ монотонно зменшується зі зростанням кута α . Багато практично важливих дифракційних задач можна, розв'язувати не уточнюючи конкретного виду цієї залежності.

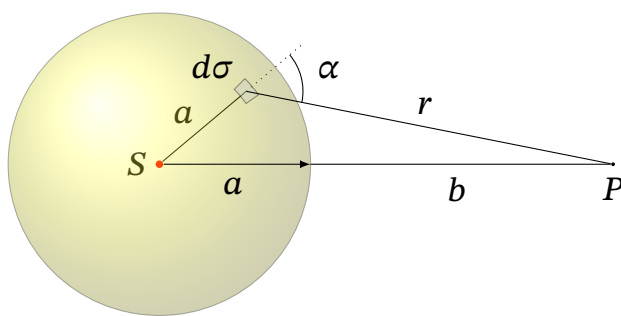


Рис. 5.2. Задача дифракції

Результуюче коливання в точці P є суперпозицією коливань від усіх елементів $d\sigma$ поверхні:

$$E_P = \iint_S K(\alpha) \frac{A}{r} e^{-ikr} d\sigma. \quad (5.1)$$

Останній вираз є математичним формулюванням принципу Гюйгенса-Френеля. Для визначення коливання в точці P , що лежить перед деякою поверх-

нею, треба знайти коливання, що надходять у цю точку від усіх елементів $d\sigma$ поверхні і потім скласти їх з урахуванням амплітуд та фаз.

Однак, у загальному випадку ця задача пов'язана із певними математичними труднощами. Розв'язання цієї задачі спрощується, якщо скористатися так званим *методом зон Френеля*.

5.2 Метод зон Френеля

Згідно цього методу, фронт хвилі ділиться на кільцеві зони таким чином, щоб відстань від границь цих областей до точки спостереження дорівнювала $b, b + \frac{\lambda}{2}, \dots, b + m\frac{\lambda}{2}, \dots$, відповідно (рис. 5.3). Ці кільцеві області називаються *зонами Френеля*.

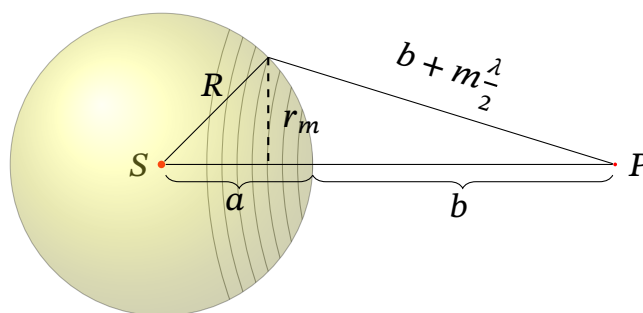


Рис. 5.3. Ілюстрація методу зон Френеля

В рамках методу зон Френеля з простих геометричних міркувань можна знайти радіус r_m — радіус m -ї зони Френеля:

$$r_m = \sqrt{m\lambda \frac{ab}{a+b}}. \quad (5.2)$$

Площі зон (при малих m) виражаються формулою:

$$S_m = \pi\lambda \frac{ab}{a+b}. \quad (5.3)$$

Отже, площі зон Френеля приблизно однакові. Відстань від зони до точки P повільно зростає з номером зони m . Кут α в формулі (5.1) також зростає з m . Все це призводить до того, що амплітуда E_m коливання, що збуджується m -ю зоною в точці P , монотонно спадає зі зростанням m , тобто, амплітуди коливань, що збуджуються в точці P зонами Френеля, утворюють монотонно спадну послідовність:

$$|E_1| > |E_2| > |E_3| > \dots$$

Внаслідок монотонного зменшення E_m можна приблизно вважати, що

$$E_m = \frac{E_{m-1} + E_{m+1}}{2} \quad (5.4)$$

Оскільки коливання від сусідніх зон проходять до точки P шляхи, що відрізняються на $\frac{\lambda}{2}$, то в точку P вони приходять із протилежними фазами. Тоді результуюча амплітуда в точці P дорівнюватиме:

$$E_P = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + E_5 - \dots, \quad (5.5)$$

де m — номер зони, E_m — амплітуда m -ї зони.

Формулу (5.5) можна записати у вигляді:

$$E_P = \frac{E_1}{2} - \left(\frac{E_1}{2} - E_2 + \frac{E_3}{2} \right) + \left(\frac{E_3}{2} - E_4 + \frac{E_5}{2} \right) + \left(\frac{E_5}{2} - E_6 + \frac{E_7}{2} \right) + \dots$$

При $m \rightarrow \infty$ сума ряду (5.5) з урахуванням (5.4) дає $E_P \approx \frac{E_1}{2}$, тобто амплітуда E_0 , що створюється в точці P всією сферичною хвильовою поверхнею, дорівнює половині амплітуди, що створюється однією лише центральною зоною.

Якщо на шляху хвильового фронту поставити перешкоду у вигляді отвору, який відкриває N зон Френеля, результуюча амплітуда в точці P буде визначатись як:

$$E_P = \frac{1}{2} \cdot \begin{cases} E_1 - E_N, & N = 2m \\ E_1 + E_N, & N = 2m + 1, \end{cases} \quad (5.6)$$

Якщо отвір відкриває парне число зон $N = 2m$, то в точці P спостерігатиметься мінімум (темна пляма), а якщо отвір відкриває непарне число зон $N = 2m + 1$, то в точці P спостерігатиметься максимум (світла пляма), а навколо цієї точки чергуватимуться темні та світлі кільця.

Якщо екран з отвором замінити непрозорим диском радіуса R (дифракція Френеля на круглomu диску), амплітуда світлового вектора на екрані в точці P (в області геометричної тіні) дорівнюватиме:

$$E_P = \pm \frac{1}{2} E_{m+1}, \quad (5.7)$$

де m — число перших зон Френеля, закритих диском. Таким чином, в точці P буде завжди спостерігатиметься відмінна від нуля амплітуда. Якщо диск закриватиме невелике число зон Френеля, то в центрі екрану буде добре видно світлу пляму (**пляму Пуассона**).

Оскільки сумарна амплітуда (5.5) є знакозмінним рядом, то закривши парні, або непарні зони, можна значно підвищити амплітуду в точці P . Для цього треба виготовити екран, який для деяких конкретних значень a та b відкривав би тільки парні або непарні зони. Тоді хвилі від відкритих зон надходили б у точку синфазно і інтерференційно підсилювали одну одну. Такий екран називають **зонною платівкою Френеля**. Переписавши формулу (5.2) в вигляді

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{m\lambda}{r_m^2} \quad (5.8)$$

отримаємо формулу для радіусів кілець зонної платівки Френеля. Порівнявши (5.8) з формулою Гауса (1.23а) $\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{f}$, можна зробити висновок, що зонна платівка працює як лінза з фокусною відстанню

$$f = \frac{r_m^2}{m\lambda}. \quad (5.9)$$

Зонна платівка Френеля, крім основного, має додаткові фокуси меншої інтенсивності, які утворюються для певних взаємних положень джерела і точки спостереження, при яких в кожне кільце потрапляють непарні кількості зон Френеля, тобто:

$$f_{\text{дод}} = \frac{f}{p}, \quad p = 3, 5, 7, \dots$$

Метод векторних діаграм

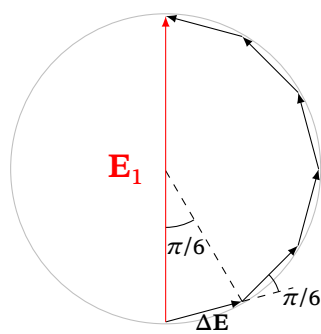
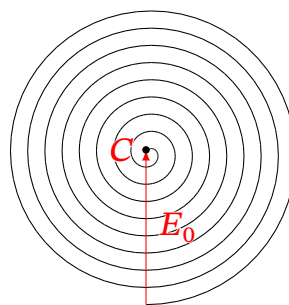
Результат, представлений формулою (5.5), можна отримати за допомогою методу векторних діаграм. Використання цього методу надалі дозволить значно спростити багато міркувань та розрахунків.

Суть метода полягає в зображенні хвилі у вигляді вектора ΔE , довжина якого відповідає амплітуді хвилі, а кут одного вектора відносно іншого визначає відносну різницю їхніх фаз. Нехай амплітуда хвилі, яка розповсюджується до точки спостереження від першої зони Френеля, дорівнює E_1 . Якщо тепер розбити першу зону Френеля на p рівних підзон, то зсув фаз між коливаннями від сусідніх підзон становитиме π/p . Тому на векторній діаграмі відповідні вектори коливань від сусідніх підзон будуть повернуті, кожен відносно попереднього, на кут π/p (рис. 5.4а). З геометричних міркувань очевидно, що вектори цих підзон є хордами, які стягують на півколі з діаметром E_1 відповідний кут, а їх сума дасть вектор першої зони Френеля.

Аналогічно обходяться і з наступними зонами Френеля. Зауважимо, що саме вихідна умова надходження у протифазі коливань хвиль від сусідніх зон Френеля зумовлює зображення їх протилежно напрямленими векторами з монотонно спадаючими амплітудами, сума яких дає вектор E_0 .

При наближенні ширини кільцевих підзон до нуля (кількість їх буде при цьому необмежено зростати) векторна діаграма набуде вигляду спіралі, що закручується до точки C (рис. 5.4б). Довжина результуючого вектора $\vec{AC} = E_0$ є амплітудою коливань, що збуджуються в точці P у випадку, якщо на шляху світла нема перешкод — так звана «амплітуда вільного простору».

Деякі приклади визначення амплітуди результуючої хвилі показані на рис 5.5.

(а) Випадок $p = 6$ 

(б) Амплітуда вільного простору

Рис. 5.4. Суть методу векторних діаграм

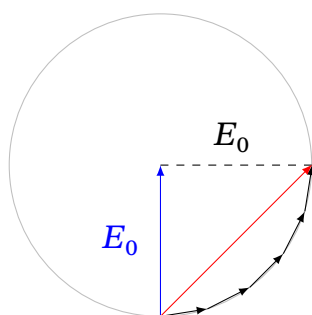
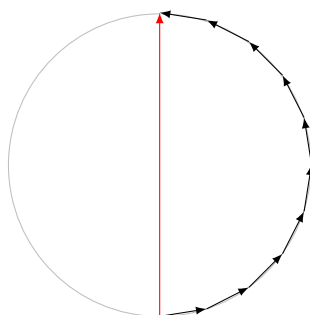
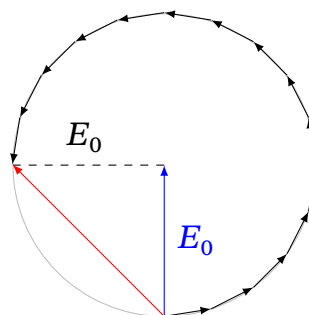
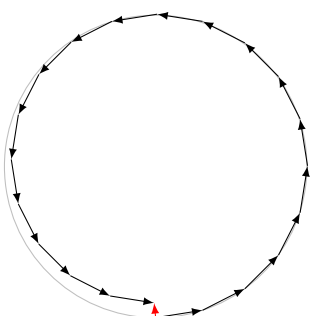
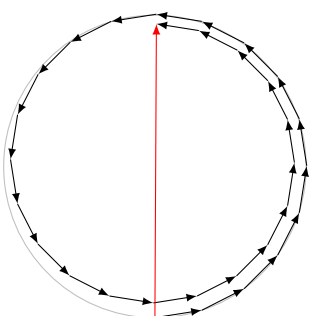
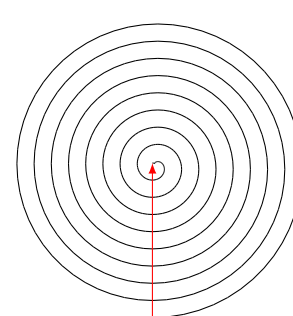
(а) Відкрито половина першої зони Френеля: $E_P \approx \sqrt{2}E_0$ (б) Відкрита 1-а зона Френеля: $E_P = E_1 \approx 2E_0$ (в) Відкрито півтори зони Френеля: $E_P \approx \sqrt{2}E_0$ (г) Відкриті 1-а і 2-а зони Френеля: $E_P \approx 0$ (д) Відкриті 1-а, 2-а і 3-я зони Френеля: $E_P \approx E_1$ (е) Відкриті всі зони Френеля: $E_P \approx E_0$

Рис. 5.5. Приклади розрахунку амплітуд

Дифракційний критерій

Для того, щоб визначити характер дифракції користуються критерієм. Оскільки, вигляд дифракційної картини залежить від того скільки відкрито (або закрито) зон Френеля, то для визначення умов дифракції зручно ввести параметр:

$$m = \frac{R^2}{\lambda b}, \quad (5.10)$$

де R — характерні розміри перешкоди, b — відстань до області спостереження. За умови $\frac{R^2}{\lambda b} \gg 1$ дифракційні ефекти незначні, і розподіл інтенсивності можна описати на основі геометричної оптики. Для $\frac{R^2}{\lambda b} \approx 1$, отвір або екран перекривають декілька зон Френеля, і має місце дифракція Френеля. Для $\frac{R^2}{\lambda b} \ll 1$

відкрита лише незначна частина першої зони Френеля — можна вважати хвильовий фронт плоским, тобто має місце дифракція в паралельних променях, або *дифракція Фраунгофера*.

5.3 Дифракція Фраунгофера на щілині

Нехай на нескінченно довгу щілину шириною b падає плоска монохроматична світлова хвиля, довжиною λ (рис. 5.6a).

Розіб'ємо відкриту частину хвильової поверхні на N вузьких зон однакової ширини. Коливання, що збуджуються кожною такою зоною, має однакову амплітуду ΔE і відстає по фазі від попереднього коливання на ту саму величину $\frac{\delta}{N}$, що залежить від кута дифракції φ , який визначає напрямок на точку спостереження P .

Як видно з рис. 5.6a, повна різниця фаз між крайніми променями, а отже, і між початковим та кінцевим векторами дорівнює $\delta = \frac{2\pi\Delta}{\lambda}$, де $\Delta = b \sin \varphi$ — різниця ходу між крайніми променями. Векторна діаграма має вигляд, зображений на рис 5.6б.

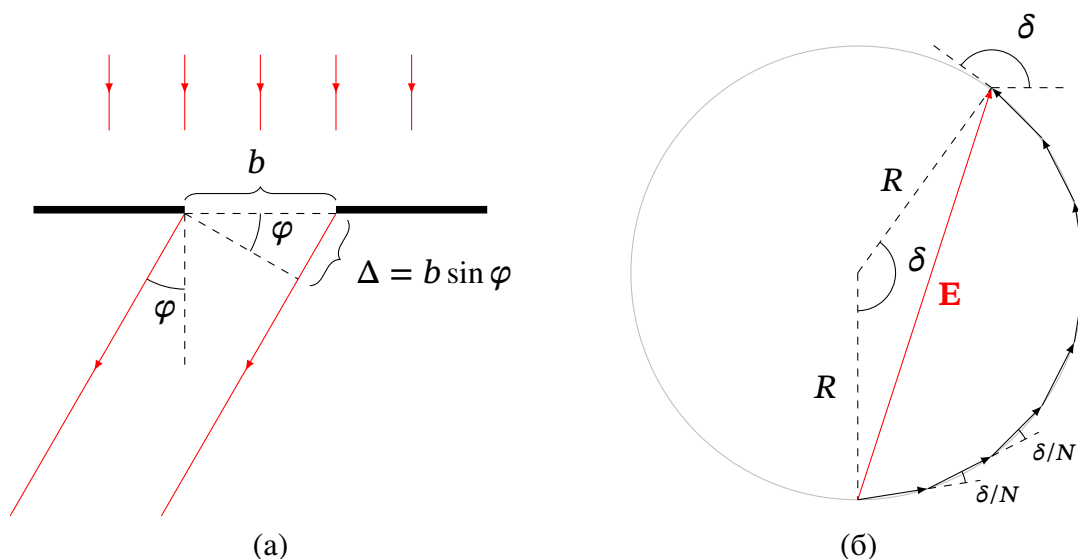


Рис. 5.6. До виведення формули (5.11)

Нехай довжина ланцюжка векторів ΔE дорівнює E_0 , а результуючий вектор E . Тоді, як видно з рис. 5.6б, $E_0 = R\delta$, $E = 2R \sin \frac{\delta}{2}$. Виключаючи з цих рівнянь R , отримаємо:

$$E = E_0 \frac{\sin \delta/2}{\delta/2}. \quad (5.11)$$

Інтенсивність світла в точках на екрані впливає з (5.11):

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi \right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi \right)^2}, \quad (5.12)$$

де I_0 — інтенсивність падаючої хвилі, b — ширина щілини, λ — довжина хвилі, φ — кут дифракції.

Дифракційну картину Фраунгофера на щілині можна спостерігати на екрані у фокальній площині лінзи, направивши на отвір нормально плоску світлову хвилю. (рис. 5.7)

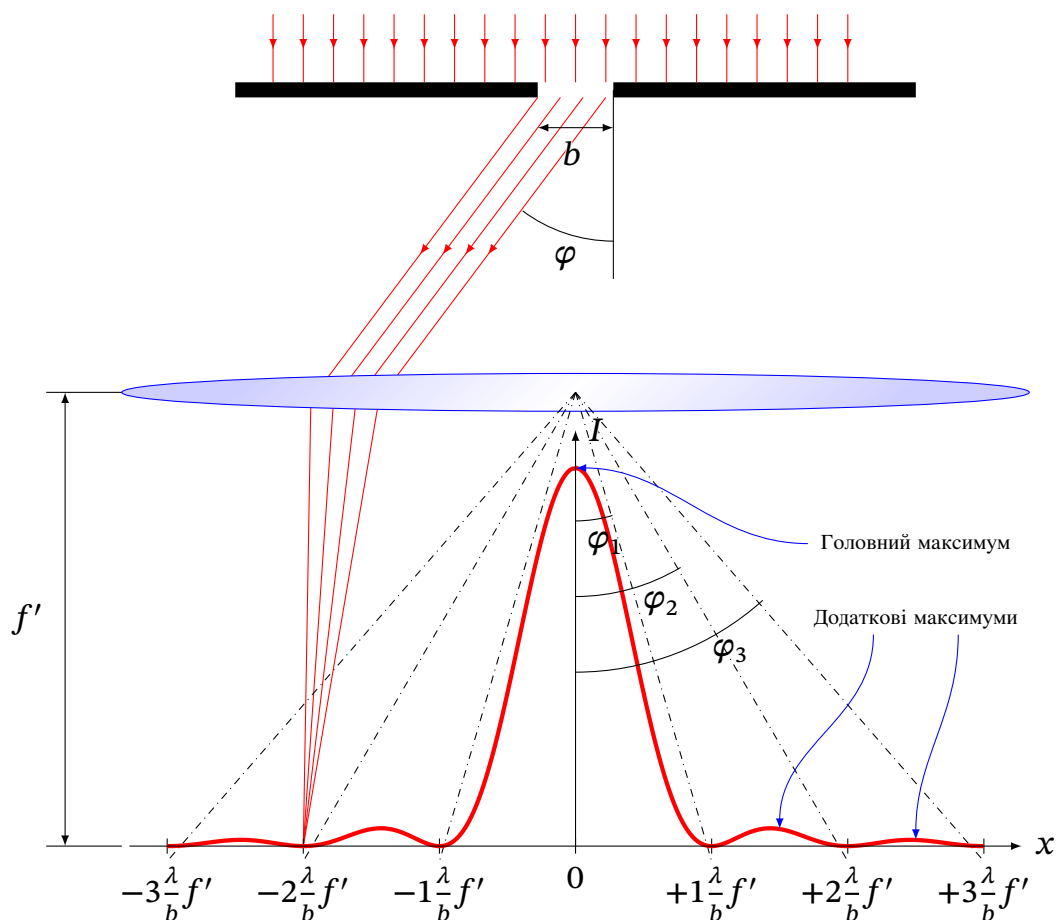


Рис. 5.7. Дифракція Фраунгофера на щілині

Кутове положення мінімумів інтенсивності визначається з (5.12):

$$b \sin \varphi = \pm m \lambda, \quad (5.13)$$

число мінімумів $m = 1, 2, \dots, \left[\frac{b}{\lambda} \right]$.

Для інтенсивностей в максимумах з (5.12) можна отримати співвідношення:

$$I_0 : I_1 : I_2 : \dots = 1 : \left(\frac{2}{3\pi} \right)^2 : \left(\frac{2}{5\pi} \right)^2 : \dots = 1 : 0,045 : 0,016 : \dots \quad (5.14)$$

Таким чином, центральний максимум значно перевищує за інтенсивністю решту максимумів; у ньому зосереджується основна частка світлового потоку, що проходить крізь щілину.

5.4 Дифракція Фраунгофера на круглому отворі

Дифракція Фраунгофера на круглому отворі має велике практичне значення, так як в оптичних приладах оправи лінз і діафрагми мають круглу форму. Дифракційну картину Фраунгофера від круглого отвору можна спостерігати на екрані, який знаходиться у фокальній площині лінзи, поставленої за отвором, направивши на отвір плоску світлову хвилю.

Дифракційна картина в фокальній площині має вигляд концентричних світлих і темних кілець з наступним розподілом інтенсивності:

$$I = I_0 \left(\frac{2J_1(kr \sin \varphi)}{kr \sin \varphi} \right)^2, \quad (5.15)$$

де $J_1(x)$ — функція Бесселя, k — хвильове число, φ — кут дифракції, r — радіальна координата точки екрану.

Графік функції (5.15) зображено на рис. 5.8

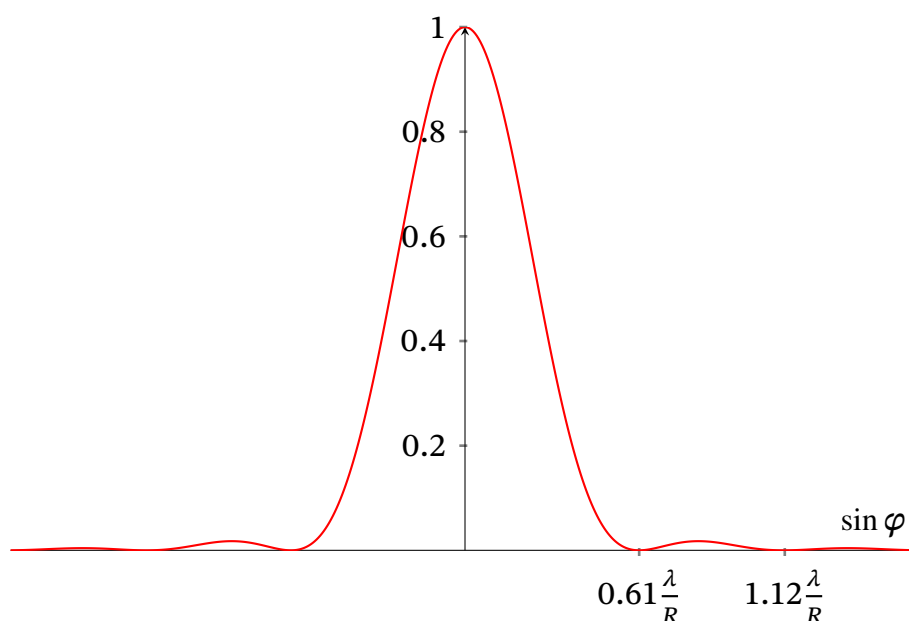


Рис. 5.8. Графік функції (5.15)

Таблиця 5.1. Числові дані графіку (5.15)

Мінімуми	Максимуми	Відносна інтенсивність в максимумах
$0,61 \frac{\lambda}{R}$	0	1
$1,12 \frac{\lambda}{R}$	$0,81 \frac{\lambda}{R}$	0,0175
$1,62 \frac{\lambda}{R}$	$1,33 \frac{\lambda}{R}$	0,0042
$2,12 \frac{\lambda}{R}$	$1,85 \frac{\lambda}{R}$	0,0016

Інтенсивність головного максимуму становить 84% світлового потоку, який проходить через отвір. Центральний максимум, який носить назву «диск Ейрі» і має кутовий радіус $0.61 \frac{\lambda}{R}$, де R — радіус отвору, можна розглядати як дифракційне зображення точки.

Роздільна здатність оптичних приладів

За рахунок дифракції будь-яка, навіть вільна від геометричних аберацій, оптична система є дифракційно обмеженою, тобто її роздільна здатність визначається дифракційним розпливанням зображення точки.

Так як кожен предмет складається з набору точок, то роздільну здатність визначають, як можливість оптичної системи створювати зображення цих точок так, щоб їх можна було відокремити одне від другого. Кількісний критерій оцінки того, наскільки дифракційні зображення (диски Ейрі) двох точок розділяються, є досить умовним. Прийнято користуватись критерієм Релея, згідно з яким зображення двох точкових джерел спостерігаються роздільно, якщо положення максимуму дифракційного зображення одного джерела співпадає з першим мінімумом зображення другого джерела. Це означає, що відстань між центрами зображення двох точкових джерел дорівнює радіусу кружка Ейрі (рис. 5.9). Критерій Релея використовують також і для визначення спектральної роздільної здатності спектральних приладів.

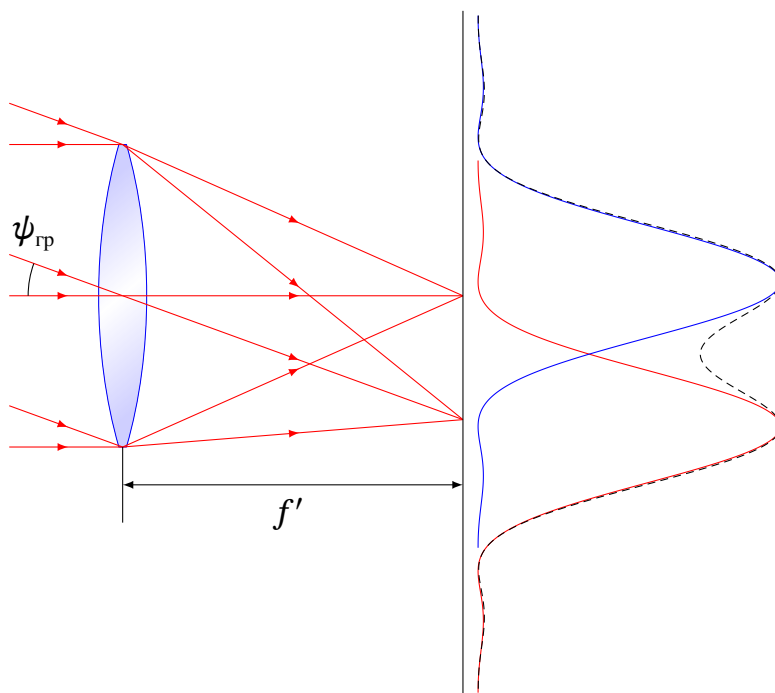


Рис. 5.9. До поняття роздільної здатності (формування дифракційного зображення двох точок, які розділяються за критерієм Релея)

Формули

Основні формули

Кутова ширина диска Ейрі (за умови $D \gg \lambda$):

$$\delta\varphi_0 = 1,22 \frac{\lambda}{D}, \quad (5.16)$$

де D — діаметр отвору.

Діаметр кружка Ейрі в фокальній площині об'єктива:

$$d_E = 2,44 \frac{\lambda}{D} f'. \quad (5.17)$$

Гранична кутова роздільна здатність дифракційно обмеженого об'єктива:

$$\psi_{\text{гр}} = 1,22 \frac{\lambda}{D}, \quad (5.18)$$

де D — діаметр отвору оправы, або вхідна зіниця об'єктива.

Лінійна роздільна здатність мікроскопа визначається мінімальним розміром об'єкта спостереження в предметній площині об'єктива як

$$\ell_{\min} \approx 0,61 \frac{\lambda}{n \sin u}, \quad (5.19)$$

для предметів з підсвічуванням:

$$\ell_{\min} \approx 0,5 \frac{\lambda}{n \sin u}, \quad (5.20)$$

де $n \sin u$ — числова апертура, u — апертурний кут об'єктива в просторі предметів, або передній апертурний кут, n — показник заломлення імерсійного середовища.

5.5 Дифракційна ґратка

В загальному випадку дифракційною ґраткою називається оптичний елемент, пропускання і/або відбивання якого змінюються за періодичним законом. В залежності від характеру зміни оптичних характеристик, ґратки діляться на амплітудні, фазові або амплітудно/фазові. Крім того, ґратки можуть працювати на пропускання або відбивання падаючого випромінювання. Найпростіша амплітудна ґратка — це набір періодичних прозорих щілин в непрозорому екрані.

Нехай, маємо дифракційну ґратку, яка має щілини шириною b , розділені між собою непрозорими проміжками довжиною a (рис. 5.10). Періодом дифракційної ґратки називається величина

$$d = a + b.$$

Джерело монохроматичного світла знаходиться в нескінченності, тому хвиля, що падає на дифракційні ґратку, плоска. Лінза, поміщена за ґраткою, збирає промені на екрані, розташованому в фокальній площині.

Інтенсивність світла в точках на екрані визначається формулою:

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi \right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi \right)^2} \cdot \frac{\sin^2 \left(N \frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi \right)}, \quad (5.21)$$

де N — кількість штрихів, φ — кут дифракції.

Дифракційна картина від ґратки є результат дифракції хвиль від кожної щілини і інтерференції хвиль від різних щілин.

Напрямки, в яких коливання від сусідніх щілин підсилюють один одного, називаються *головними максимумами* та визначаються умовою:

$$d \sin \varphi = \pm m \lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{d}{\lambda} \right] \quad (5.22)$$

де m — порядок головного максимуму, $\left[\frac{d}{\lambda} \right]$ — найбільший порядок головного максимуму.

Додаткові мінімуми розташовані між головними максимумами та розділені між собою додатковими максимумами:

$$d \sin \varphi = \pm \left(m + \frac{k}{N} \right) \lambda, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (5.23)$$

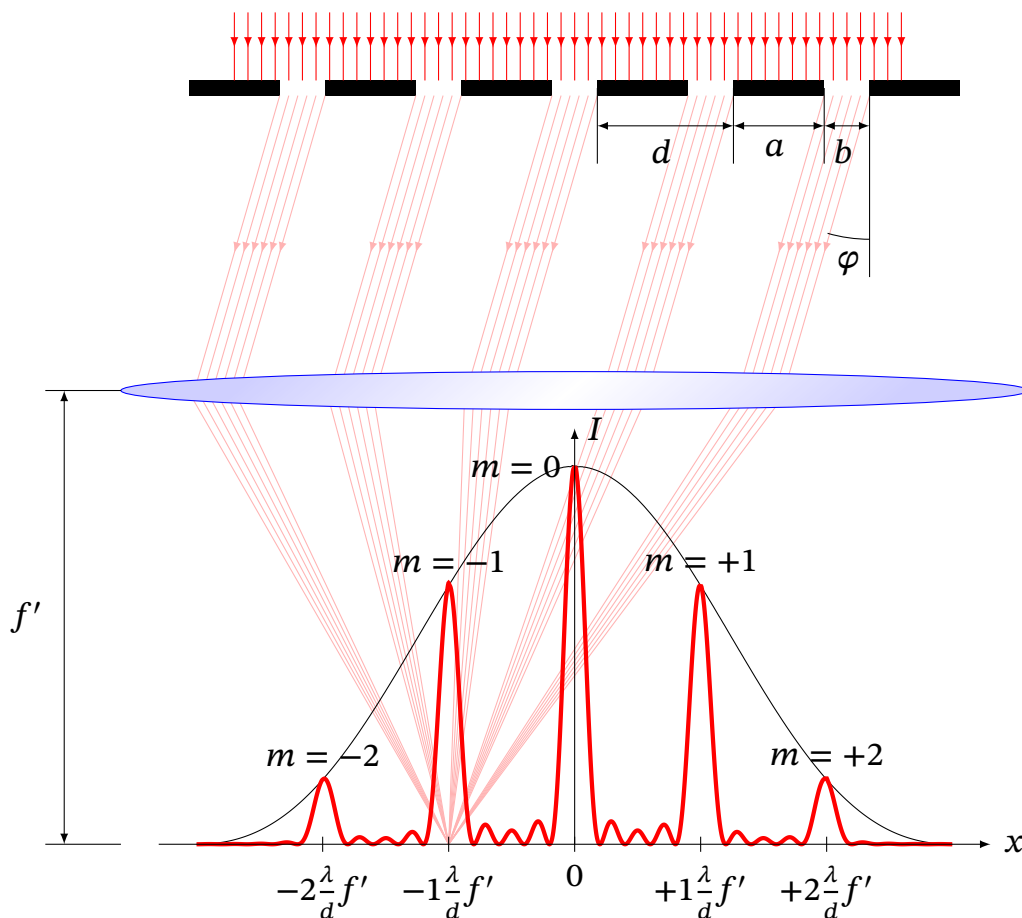


Рис. 5.10. Дифракція Фраунгофера на дифракційній ґратці

де k — порядковий номер додаткового мінімуму.

На інтерференційну картину також впливає розподіл інтенсивності від дифракції на щілині, *головні мінімуми* спостерігаються в напрямках, що визначаються умовою:

$$b \sin \varphi = \pm m' \lambda, \quad m' = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{b}{\lambda} \right]. \quad (5.24)$$

При падінні випромінювання під кутом ψ формула (5.22) ґратки набуває вигляду:

$$d(\sin \varphi - \sin \psi) = \pm m \lambda. \quad (5.25)$$

При цьому максимально можливий порядок дифракції збільшується удвічі.

Спектральні характеристики дифракційної ґратки.

Як впливає з формули (5.22), положення головних максимумів (крім нульового) залежить від довжини хвилі λ . Тому ґратка здатна розкласти випромінювання в спектр, тобто є спектральним приладом. Якщо на ґратку падає немонохроматичне випромінювання, то кожному порядку дифракції (тобто при кожному значенні m) виникає спектр досліджуваного випромінювання, причому фіолетова частина спектру розташовується ближче до максимуму нульового порядку. Максимум нульового порядку залишається незабарвленим (рис. 5.11).

Формули Формули для спектральних характеристик дифракційної ґратки

Кутова дисперсія ґратки:

$$D = \frac{\delta \varphi}{\delta \lambda} = \frac{m}{d \cos \theta} = \frac{m}{\sqrt{d^2 - (m \lambda)^2}}. \quad (5.26)$$

Лінійна дисперсія

$$D_l = \frac{f' \delta \varphi}{\delta \lambda} = \frac{f' m}{d \cos \theta} = \frac{f' m}{\sqrt{d^2 - (m \lambda)^2}}, \quad (5.27)$$

де f' — задня фокусна відстань об'єктива приладу.

Роздільна здатність ґратки:

$$R = \frac{\lambda}{\delta \lambda} = mN. \quad (5.28)$$

Інтервал довжин хвиль $\Delta \lambda$, в межах якого ще не перекриваються спектри сусідніх порядків, називається областю вільної дисперсії, яка визначається за формулою:

$$\Delta \lambda = \frac{\lambda}{m}. \quad (5.29)$$

Дифракція рентгенівських променів на кристалічній ґратці.

Дифракція рентгенівських променів на кристалічній ґратці використовується в рентгенівській спектроскопії і рентгеноструктурному аналізі. Умовою

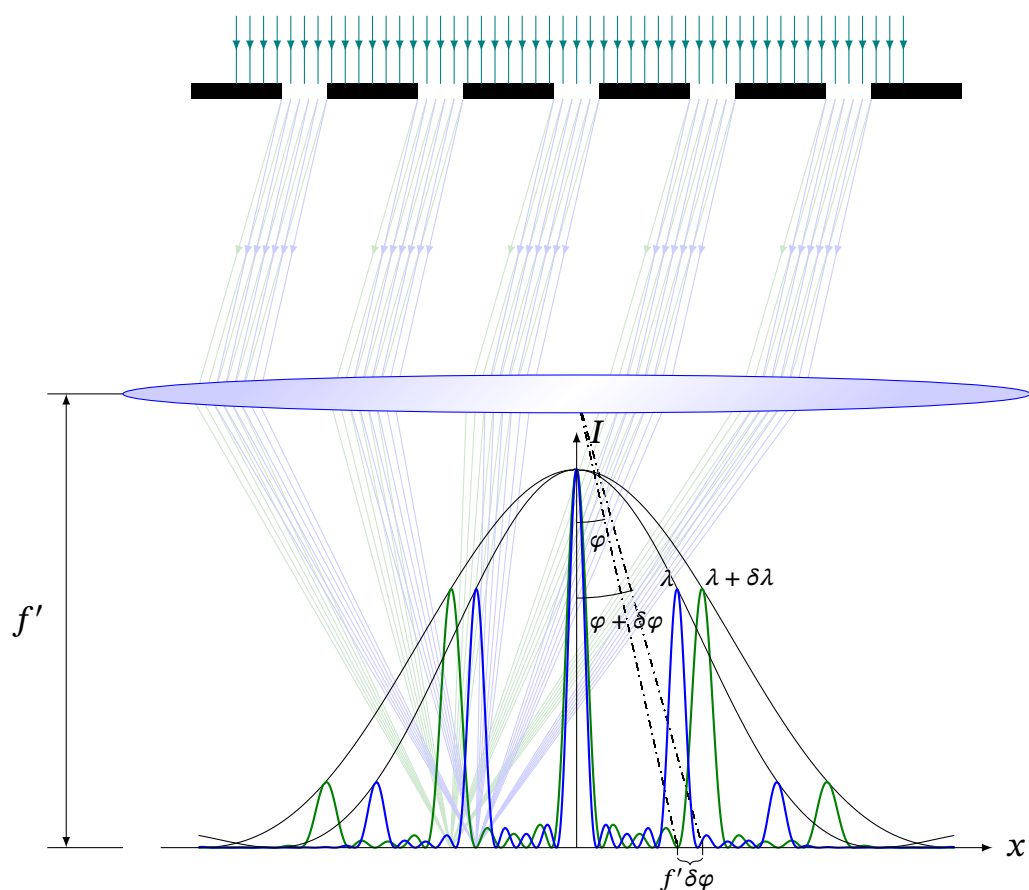


Рис. 5.11. Дисперсія дифракційної ґратки

інтерференційного підсилення променів, відбитих від паралельних атомних площин (рис. 5.12), є умова Бреґа-Вульфа:

$$2d \sin \alpha = \pm m\lambda \quad (5.30)$$

де d — відстань між атомними площинами, α — кут ковзання світла.

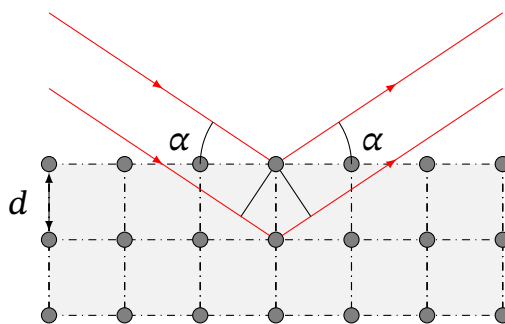


Рис. 5.12. До виведення умови Бреґа-Вульфа (5.30)

Дифракція рентгенівських променів від кристалів використовується для дослідження спектрального складу рентгенівського випромінювання (рентгенівська спектроскопія) та для вивчення структури кристалів (рентгеноструктурний аналіз).

Визначаючи напрямки максимумів, що утворюються при дифракції досліджуваного рентгенівського випромінювання від кристалів з відомою структурою

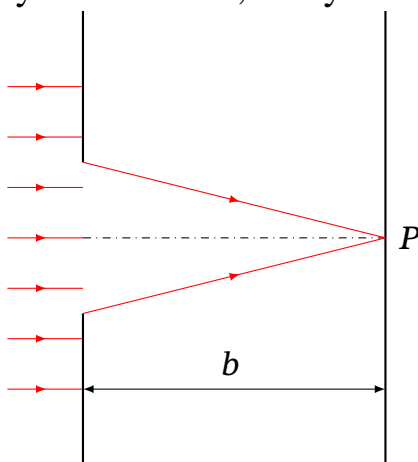
можна обчислити довжини хвиль. Спочатку для визначення довжин хвиль були використані кристали кубічної системи, причому міжплощинні відстані визначалися за густиною та відносною молекулярною масою кристала.

5.6

Приклади розв'язування задач

Приклад: 28

На діафрагму із круглим отвором діаметром 6 мм нормально падає плоска монохроматична хвиля (600 нм). За діафрагмою на відстані 3 м від неї знаходиться екран спостереження. а) Скільки зон Френеля вкладаються в отворі діафрагми? б) Яким буде центр дифракційної картини на екрані: темним або світлим? в) Інтенсивність світла в центрі картини в порівнянні з інтенсивністю при відсутності екрана. г) При якому радіусі отвору діафрагми в центрі картини буде найбільш темна пляма? д) Яким буде центр тіні на екрані, якщо діафрагму з отвором замінити непрозорим диском того ж діаметра? е) На які відстані потрібно відсунути екран спостереження від диска, щоб інтенсивність світла в плямі Пуассона була не менше, ніж у попередньому пункті.



Розв'язок

а) Число зон Френеля, що укладаються в отворі діафрагми, визначаємо по формулі (5.10) при $a \rightarrow \infty$:

$$m = \frac{R^2}{b\lambda}. \quad (1)$$

б) Амплітуду поля в точці P при $m = 5$ знаходимо за формулою (5.6):

$$E(P) = E_1 + E_5.$$

Оскільки вона не дорівнює нулю, у точці P буде світла пляма.

в) За відсутності діафрагми амплітуда світлового вектора в точці P дорівнює $\frac{1}{2}E_1$, а відповідна їй інтенсивність дорівнює I_0 . Оскільки $m = 5$ невелике, E_5 буде незначно менше E_1 і можна прийняти $E(P) = E_1 + E_5 \approx 2E_1$. Таким

чином, за рахунок дифракції на отворі діафрагми амплітуда $E(P)$ зросла майже вдвічі. Отже, інтенсивність повинна зрости в 4 рази ($I_P = 4I_0$).

г) Відповідно до формули (5.6) у точці P буде темно при парному числі зон, що відкриті отвором діафрагми, а найбільш темно при найменшому їхньому числі ($m = 2$).

Радіус отвору діафрагми визначаємо з формули (1):

$$R = \sqrt{mb\lambda} = 1,89 \text{ мм.}$$

д) Амплітуда світлового вектора в центрі дифракційної картини за непрозорим диском при $m = 5$ закритих їм зон Френеля визначається по формулі (5.7). Оскільки E_6 за абсолютним значенням не набагато менше E_1 , у точці P буде світла пляма (пляма Пуассона) з інтенсивністю, трохи меншою за I_0 .

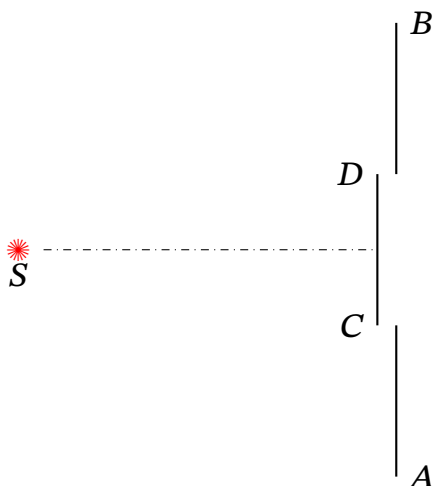
е) Оскільки амплітуди E_6 повільно спадають зі зростанням m , інтенсивність світла в плямі Пуассона не менше, ніж у попередньому випадку, і буде спостерігатися при цілих $m < 5$, тобто при $m = 1, 2, 3, 4$. Відповідні ним значення відстані b від диска до екрана визначаємо з формули:

$$b_m = \frac{R^2}{m\lambda}.$$

Обчислення дають: $b_4 = 3,75 \text{ м}$; $b_3 = 5 \text{ м}$; $b_2 = 7,5 \text{ м}$; $b_1 = 15 \text{ м}$. Таким чином, найбільш світло в плямі Пуассона буде при $m = 1$ і $b = 15 \text{ м}$, коли $E(P) = 0,5E_1$.

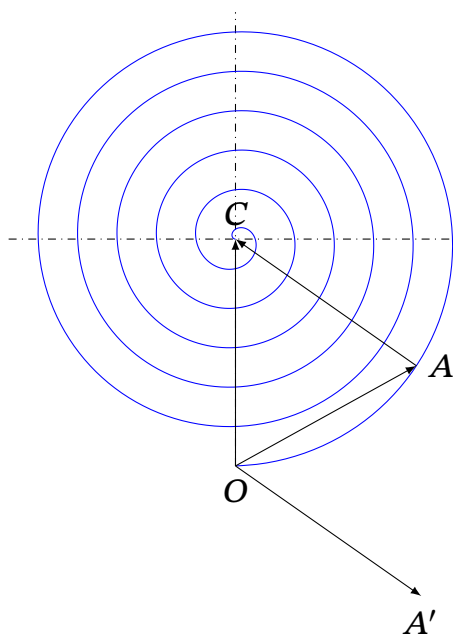
Приклад: 29

На відстані від точкового джерела S електромагнітної хвилі нескінченний ідеально відбиваючий екран AB (рис.). Використовуючи векторну діаграму, знайти як зміниться інтенсивність відбитої хвилі у точці S , якщо з екрана вирізати диск CD з центром в основі перпендикуляра, опущеного з S на площину екрана, та змістити цей диск у напрямі до джерела на одну дванадцятую довжини хвилі? Площа диска складає одну третину від площі першої зони Френеля. Як зміниться результат, якщо зміщення виконати у зворотному напрямі на ту ж величину?

**Розв'язок**

Коливання від усіх зон Френеля зображуються вектором OC (див. рис.).

Коливання від третини першої зони — вектором OA . Вектор AC відповідає коливанню, що викликане хвилями, які відбилися від зовнішньої частини екрану, розташованої за отвором CD .



Ці три вектори утворюють рівносторонній трикутник, якщо знехтувати зменшенням радіуса витка спіралі на одному обороті. При зміщенні центрального диска до джерела на $\frac{\lambda}{12}$ фаза відбитої ним хвилі збільшиться на $2\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$, і коливання зобразиться вектором, який рівний та протилежно напрямлений вектору AC . Інтенсивність всієї відбитої хвилі у точці S дорівнюватиме нулю. При зміщенні диска CD у протилежний бік фаза коливання OA зменшиться на $\frac{\pi}{3}$ і вектор OA повернеться у положення OC .

Результуюче коливання знайдеться додаванням векторів AC та OC . Таким чином знайдемо, що амплітуда коливань у точці S збільшиться у $\sqrt{3}$ рази, а інтенсивність – втричі.

Приклад: 30

Плоска монохроматична хвиля (0,569 мкм) нормально падає на екран із щілиною шириною 2 мкм. а) Скільки спостерігається додаткових максимумів у дифракційній картині? б) Яка кутова ширина зображення джерела світла? в) Яка лінійна ширина цього зображення на екрані, якщо воно створене лінзою з фокусною відстанню 1 м?

Розв'язок

Див. рис. 5.7. а) Число додаткових максимумів k повинне бити на одиницю менше числа мінімумів.

Максимальне мінімумів з (5.13) дорівнює цілій частині від $\left[\frac{b}{\lambda}\right]$, а тому, число додаткових максимумів:

$$k = \left[\frac{b}{\lambda}\right] - 1 = \left[\frac{2}{0,569}\right] - 1 = 2.$$

Тобто, видимими є три перших мінімуми й два додаткових максимуми з обох сторін від головного.

б) Кутова ширина дифракційного зображення джерела дорівнює кутовій ширині головного максимуму:

$$\delta\varphi_0 = 2\varphi_1 = 2 \arcsin\left(\frac{\lambda}{b}\right) = 34^\circ 15' 19''.$$

в) Лінійна ширина дифракційного зображення — це відстань між $m = +1$ та $m = -1$ мінімумами, тобто

$$\Delta x = 2f' \operatorname{tg} \varphi_1 = 2f' \frac{\lambda}{b} = 61,6 \text{ см.}$$

Приклад: 31

Дифракційна ґратка освітлюється нормально падаючим паралельним пучком світла (500 нм). Відстань між першими головними максимумами, спроектованими лінзою ($f' = 1$ см) на екран, дорівнює 20,2 см. База ґратки $B = 10$ см. Визначити: а) період ґратки; б) число штрихів на 1 мм; в) кутову й лінійну ширину головного максимуму; г) кутову й лінійну дисперсію ґратки в спектрі першого порядку; д) роздільну здатність ґратки в спектрі першого порядку.

Розв'язок

Див. рис. 5.10.

а) З умови головних максимумів дифракційної ґратки (5.22) при $m = 1$

$$d = \frac{\lambda}{\varphi_1}.$$

З рис. $\sin \varphi_1 \approx \tan \varphi_1 = \frac{\Delta x_1}{f'}$, звідки $2\lambda \frac{f'}{\Delta x_1} = 4,95$ мкм.

Кут дифракції, під яким видно перший головний максимум $\varphi_1 = \arcsin\left(\frac{\lambda}{d}\right) = 5,798^\circ$, малий, тому умова $\sin \varphi_1 \approx \tan \varphi_1$ задовольняється.

б) Число штрихів на 1 мм ґратки

$$\frac{1}{d} = 202 \text{ мм}^{-1}.$$

в) Кутова ширина головного максимуму (для якого $m = 0$) — це кут між напрямками на найближчі до нього мінімуми (для яких $k = \pm 1$) $\delta\varphi_0 = 2\varphi_{\min}$. Положення мінімумів знаходимо з формули (5.23). Отже:

$$\sin \varphi_{\min} = \left(\frac{\left(0 + \frac{1}{N}\lambda\right)}{d} \right).$$

Оскільки кутова ширина мала $\sin \varphi_{\min} \approx \varphi_{\min}$, одержуємо:

$$\delta\varphi_0 = 2\varphi_{\min} \approx \frac{2\lambda}{Nd} = \frac{2\lambda}{B} = 2,06'',$$

де $B = Nd$ — база ґратки.

Лінійна ширина головного максимуму на екрані $d\ell = f'\delta\varphi_0 = 0,01$ мм.

г) Кутову дисперсію (див. рис. 5.11) визначаємо за формулою (5.26) при $m = 1$:

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{\sqrt{d^2 - (m\lambda)^2}} = 0,2 \text{ рад/мкм}.$$

Лінійна дисперсія

$$D_\lambda = fD = 0,2 \text{ см/мкм}.$$

в) Роздільну здатність визначаємо за формулою (5.28):

$$R = mN = m \frac{B}{d} = 2,02 \cdot 10^5.$$

Границя спектрального розділення ґратки:

$$\delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = 0,247 \cdot 10^5 \text{ нм}.$$

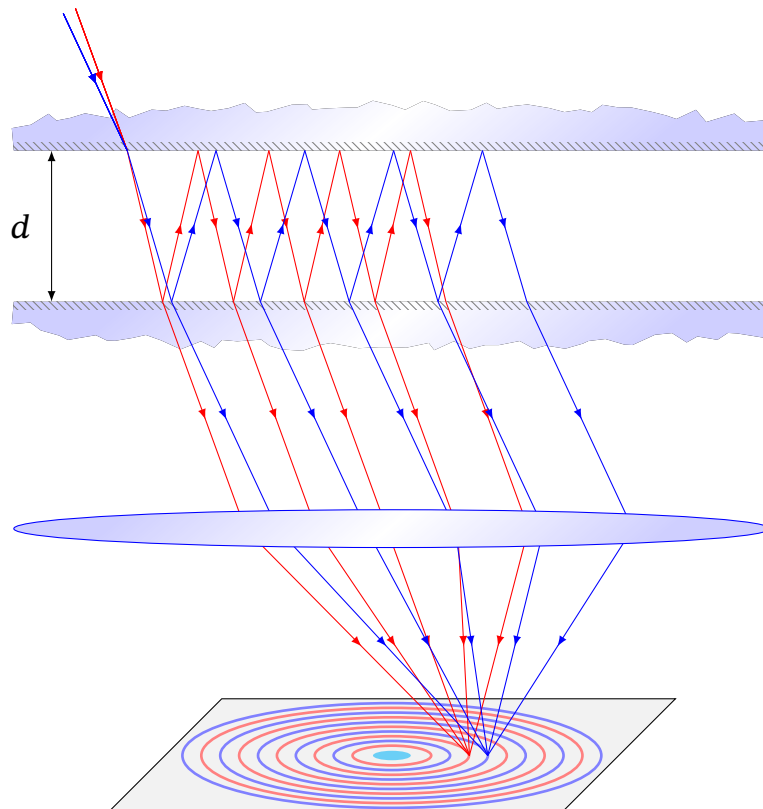
Приклад: 32

Знайти роздільну здатність інтерферометра Фабрі-Перо.

Вказівка: Для розділення двох спектральних ліній λ та $\lambda + \delta\lambda$ необхідно, щоб в інтерференційній картині, яку дає інтерферометр, ці лінії були розведені на відстань не меншу півширини лінії.

Розв'язок

Побудуємо хід променів для двох монохроматичних хвиль з довжинами λ та $\lambda + \delta\lambda$, які падають на інтерферометр під різними кутами.



Умова максимуму при багатопроменевій інтерференції для променів, що пройшли крізь плоско-паралельний прошарок в інтерферометрі Фабрі-Перо

визначається з формули (4.18):

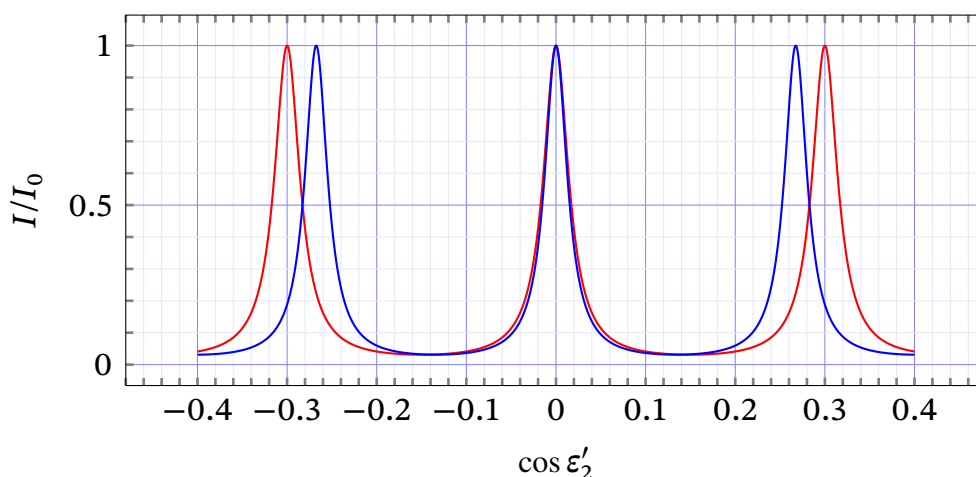
$$2d \cos \varepsilon'_2 = m\lambda, \quad (1)$$

де Δ — різниця ходу, d — товщина повітряного прошарку між посрібненими поверхнями, ε'_2 — кут падіння на нижню посріблену поверхню (див. рис.).

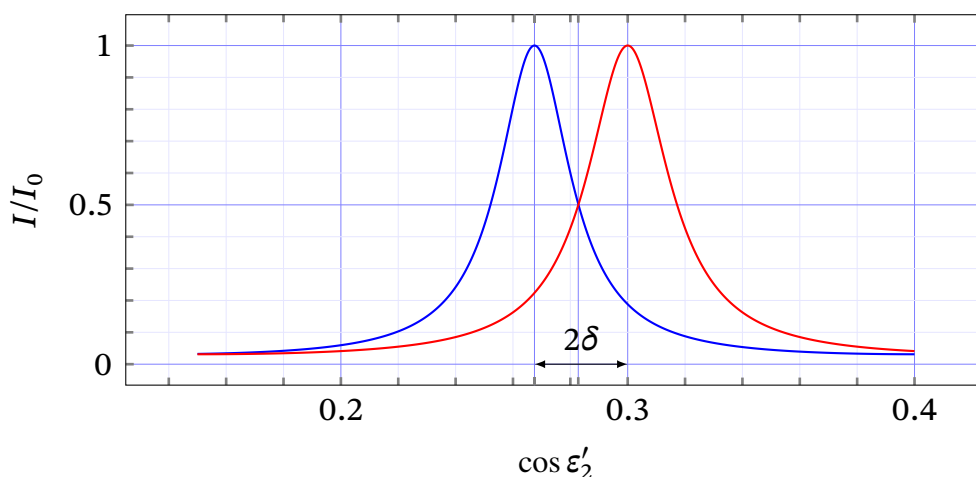
Побудуємо розподіл інтенсивності на екрані для двох λ та $\lambda + \delta\lambda$ за формулою (4.17):

$$\frac{I_T}{I_0} = \frac{(1 - R)^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \left(\frac{\pi}{\lambda} d \cos \varepsilon'_2 \right)},$$

де I_0 — інтенсивність падаючого світла, I_T — інтенсивність світла, що пройшло крізь інтерферометр.



Розглянемо детально максимум m -го порядку для двох довжин хвиль, для яких виконується умова вказівки, тобто дві сусідні лінії розведені на відстань півширини лінії, яку позначимо 2δ , де δ — це зсув фаз, при якому інтенсивність хвилі зменшується вдвічі (див. (4.21)).



В цьому випадку:

$$\cos \varphi = \frac{m\lambda}{d} + \delta = \frac{m(\lambda + \delta\lambda)}{d} - \delta,$$

з (4.21)

$$\delta \approx \frac{\pi\sqrt{R}}{1 - R} \frac{\lambda}{2d}.$$

Звідки роздільна здатність:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{m\pi\sqrt{R}}{(1 - R)}.$$

Цей вираз можна записати у тому ж вигляді, що і для дифракційної ґратки, для дифракційної ґратки $R = mN$, а тому роль ефективного числа штрихів грає величина:

$$N_{\text{еф}} = \frac{\pi\sqrt{R}}{(1 - R)}.$$

5.7

Задачі для самостійного розв'язку

5.1. Чому світла пляма Пуассона в центрі круглої тіні від непрозорого диска на екрані спостерігається рідко?

5.2. Сутність властивості подібності дифракції. Що характеризує параметр дифракції?

5.3. Будова зонно-фазової пластинки. Її перевага перед зонною пластинкою Френеля.

5.4. Як зміниться кутова ширина основного максимуму в дифракційній картині за щілиною при зменшенні вдвічі: а) ширини щілини; б) довжини хвилі?

5.5. Як виражається умова головних максимумів дифракційної ґратки при падінні на неї плоскої хвилі під кутом, відмінним від нуля?

5.6. Шляхи підвищення роздільної здатності: а) дифракційних ґраток; б) об'єтивів телескопів; в) об'єтивів мікроскопів.

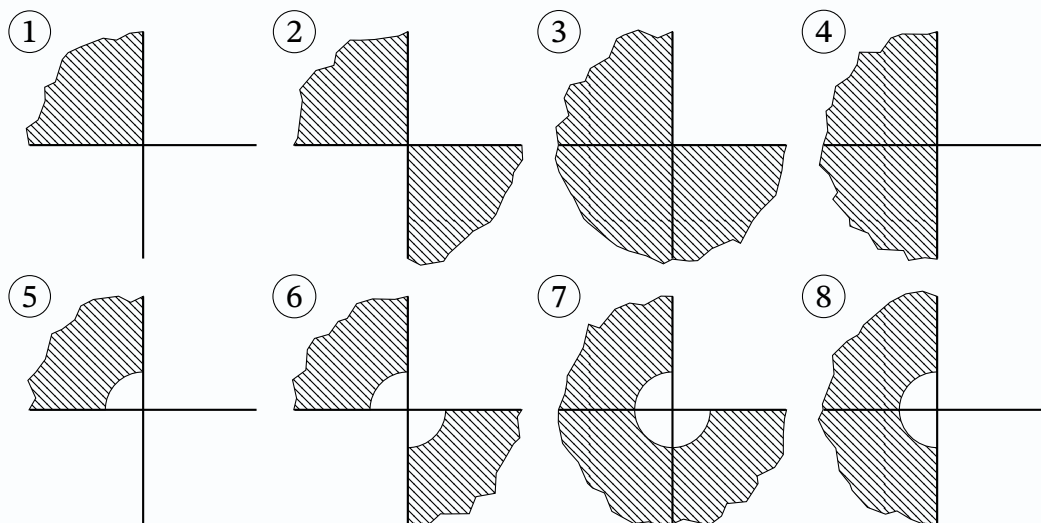
Дифракція Френеля

5.7. Дифракційна картина спостерігається на відстані 4 м від точкового джерела ($\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м). Посередині між джерелом і екраном встановлена діафрагма із круглим отвором. При якому радіусі отвору центр світлого кола на екрані буде: а) найбільш темним; б) найбільш світлим?

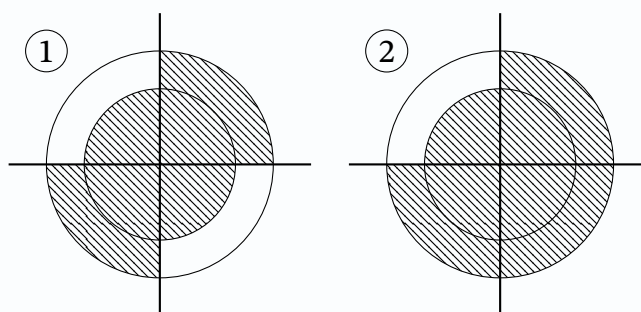
5.8. Плоска монохроматична хвиля (0,5 мкм) з інтенсивністю I_0 нормально падає на діафрагму із круглим отвором діаметра 2 мм. а) Знайти відстань b_1, b_2, b_3, \dots від діафрагми до точок P_1, P_2, P_3, \dots на осі твору, для яких в отворі укладається 1, 2, 3, ... зон Френеля. б) Побудувати приблизно графік залежності $I_p(b)$.

5.9. Паралельний монохроматичний пучок світла (0,6 мкм) падає нормально на діафрагму із круглим отвором діаметра 1,2 м. На відстані 15 см за діафрагмою на осі отвору спостерігається темна пляма. На яку мінімальну відстань Δb необхідно зміститися від цієї точки уздовж осі отвору, віддаляючись від нього, щоб у центрі дифракційної картини знову спостерігалася темна пляма?

5.10. На шляху плоскої монохроматичної хвилі встановлюється непрозора ширма із секторним вирізом. Дифракційна картина, що створюється нею спостерігається на екрані, розташованому за ширмою на деякій відстані у точці P . Інтенсивність світла в точці P за відсутності ширми дорівнює I_0 . Знайти інтенсивність світла в точці P при різних типах ширм, зображених на рис. Радіуси закруглень на ширмах 5 – 8 збігаються з радіусом першої зони Френеля.



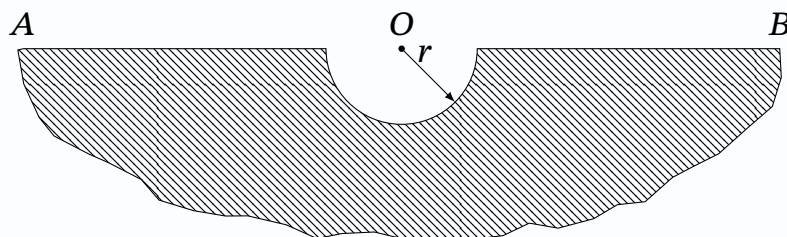
5.11. Між точковим монохроматичним джерелом світла й точкою спостереження перпендикулярно до лінії, яка з'єднує їх, помістили екран, що складається із секторів двох кругів (див. рис.). Радіус одного з них дорівнює радіусу 1-ї зони Френеля, іншого — радіусу 2-ї зони Френеля. Визначити інтенсивність світла в точці спостереження, якщо за відсутності екрана вона дорівнює I_0 . Розглянути екрани, зображені на рис. 1 та 2.



5.12. Вдалині від точкового джерела S розміщений нескінченний ідеально відбиваючий екран. З екрана видалений диск діаметром $d_1 = 2r_1\sqrt{2/3}$, де r_1 — радіус 1-ї зони Френеля, і поставлений інший диск діаметром $d_2 = \frac{d_1}{\sqrt{2}}$. Знайти інтенсивність I відбитої хвилі в точці S , якщо диск діаметром d_2 розміщений в площині екрана.

5.13. На білій стіні спостерігають тінь від прямолінійного краю AB непрозорого екрану, який освітлюють паралельним монохроматичним жмутком променів, перпендикулярним до екрану ($\lambda = 5000 \text{ \AA}$). Площини стіни й екрана паралельні, відстань між ними $b = 4 \text{ м}$. На краю екрана виточене заглиблення, що має форму півкола радіусом $r = 1 \text{ мм}$ (рис.). Як зміниться інтенсивність світла в точці стіни, що є геометричною тінню центра

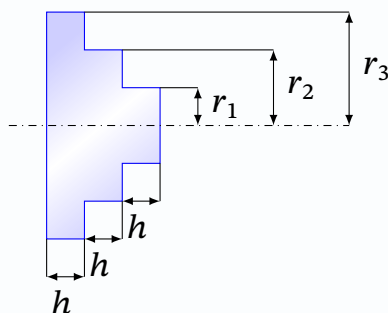
О відповідного кола, в порівнянні з інтенсивністю в тій же точці, коли заглиблення не було?



5.14. Паралельний жмуток монохроматичного світла нормально падає з повітря на плоску поверхню діелектрика. Визначити максимальну величину напруженості електричного поля у діелектрику E_{\max} . Оцінити відстань l від поверхні діелектрика до точки, у якій поле максимальне. Діаметр світлового жмутка $D = 0,1$ см, довжина світлової хвилі у повітрі $\lambda = 0,5$ мкм, інтенсивність світла у жмутку $= 1$ кВт/см², показник заломлення діелектрика $n = 2$.

5.15. Радіус п'ятого кільця зонної пластинки для монохроматичної сферичної хвилі (500 нм) дорівнює 1,5 мм. Визначити: а) фокусну відстань зонної пластинки; б) радіус першого кільця пластинки; в) що відбудеться, якщо простір за пластинкою заповнити водою?

5.16. Зонна пластинка, вирізана зі скла з показником заломлення n , являє собою тіло обертання, переріз якого показано на рис. Пластинка поміщена в непрозору оправу. Радіуси сходів $r_1 = 2$ мм, $r_2 = 4$ мм, $r_3 = 6$ мм. Товщина сходів h однакова. Визначити максимальну фокусну відстань f_{\max} пластинки для світла з довжиною хвилі $\lambda = 500$ нм. Указати, при якій товщині h інтенсивність у фокусі буде найбільшою. Який максимальний вигравш в інтенсивності буде давати така система?



5.17. Потрібно виготовити відбиваючу зонну пластинку на ввігнутому сферичному дзеркалі з кільцевими зонами Френеля. Знайти радіус m -ї зони r_m , якщо джерело світла й точка спостереження розташовані на осі дзеркала на відстанях a й b відповідно від його вершини, причому $a \leq R \leq b$, $r_m \ll a$, де R — радіус кривизни поверхні дзеркала.

Дифракція Фраунгофера

5.18. На щілину шириною $2 \cdot 10^{-3}$ см нормально падає плоска хвиля (5000 Å). а) Знайти число мінімумів. б) Визначити ширину дифракційного зображення джерела на екрані, віддаленому від щілини на 1 м. в). При якій ширині щілини ширина зображення на екрані буде дорівнює 15 см?

5.19. При нормальному падінні пучка світла на дифракційну ґратку жовта лінія натрію (589 нм) у спектрі першого порядку видна під кутом дифракції $17^\circ 08'$. Деяка інша лінія в спектрі другого порядку видна під кутом $24^\circ 12'$. Визначити число штрихів на 1 мм ґратки й довжину хвилі другої лінії.

5.20. Дифракційна ґратка освітлюється нормально падаючим світлом від He-розрядної трубки. Відлік по лімбу гоніометра положень фіолетової лінії (0,389 мкм) у спектрах першого порядку по обидві сторони від нульового максимуму дали значення $27^\circ 33'$ і $36^\circ 27'$. Відлік по лімбу для червоної лінії в спектрах першого порядку дали відповідно $23^\circ 54'$ і $40^\circ 06'$. Визначити період ґратки й довжину хвилі червоної лінії в спектрі гелію.

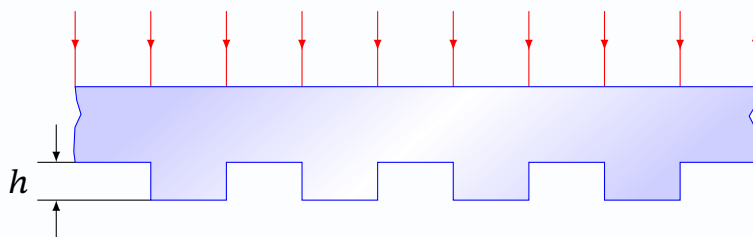
Вказівка. Спочатку визначити кут по лімбу для нульового максимуму, а від нього вже відраховувати кути дифракції.

5.21. Дифракційна ґратка освітлюється нормально падаючим білим світлом (400 ... 760) нм. Чи будуть взаємно перекриватися спектри: а) першого й другого порядків? б) другого й третього порядків?

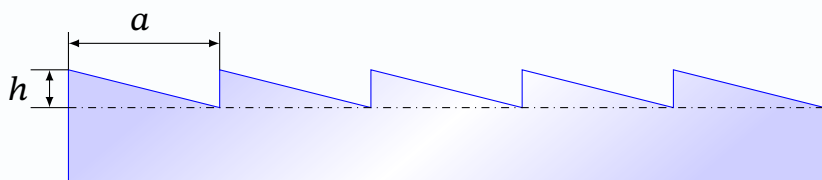
5.22. Чому дорівнює період ґратки шириною 3 см, якщо вона може розділити в спектрі першого порядку спектральні лінії калію 404,4 нм і 404,7 нм?

5.23. Прозора періодична структура, профіль якої зображений на рис., освітлюється зверху плоскою монохроматичною хвилею, що падає нормально на верхню границю. Ширина уступів і впадин структури однакова. При заданому показнику заломлення n підібрати глибину h таким чином, щоб

головні фраунгоферові дифракційні максимуми 1-го порядку мали найбільшу інтенсивність. Яка при цьому інтенсивність нульового головного максимуму?



5.24. Розрахувати та проаналізувати дифракційну картину за нормального падіння світла на пилоподібну ґратку (рис.). Ґратку виготовлено із скла з показником заломлення n . Кількість зубців дорівнює N , $a \gg h$, довжина хвилі світла λ .



Роздільна здатність оптичних приладів. Спектральні прилади

5.25. Чи змінюється роздільна здатність і дисперсійна область дифракційної ґратки, якщо, закріпивши нерухомо трубу, у яку спостерігаються дифракційні спектри, закрити через одну щілини ґратки?

5.26. На якій найбільшій відстані можна розрізнити два стовпи, які знаходяться на відстані 1 м один від одного? а) неозброєним оком, діаметр зіниці ока прийняти рівним 3 мм; б) за допомогою зорової труби, діаметр об'єктива якої дорівнює 38 мм; в) обчислити кутовий діаметр плями дифракції для ока й зорової труби.

5.27. Яка найменша відстань між двома точками на Місяці може розділити телескоп з діаметром об'єктива 5 м? Довжину хвилі прийняти рівної 0,55 мкм, а середня відстань від Землі до Місяця $3,684 \cdot 10^8$ м. Визначити кутовий діаметр плями дифракції телескопа.

5.28. При аерофотографуванні місцевості використовується об'єктив з фокусною відстанню $f = 10$ см і діаметром $D = 5$ см. Зйомка ведеться

на фотоплівку, що має роздільну здатність $R = 100 \text{ мм}^{-1}$. Визначити, які деталі місцевості можуть бути розрізнені на фотографіях, якщо зйомка велася з висоти $h = 10 \text{ км}$.

5.29. Сучасні фотоплівки здатні розділяти до $z = 10^4$ ліній/см. Яку світлосилу (тобто відношення квадратів діаметра D і фокусної відстані f) повинен мати об'єктив фотоапарата, щоб повністю використовувати роздільну здатність плівки?

5.30. Яким повинне бути збільшення зорової труби для того, щоб повністю використовувати роздільну здатність її об'єктива?

5.31. Яким повинне бути збільшення мікроскопа, щоб повністю використовувати роздільну здатність його об'єктива?

5.32. У принципі можна побудувати телескоп як завгодно високої роздільної здатності без об'єктива, замінивши об'єктив круглим отвором. Яка повинна бути довжина L такого телескопа, щоб він мав ту ж роздільну здатність, що й звичайний телескоп з діаметром об'єктива $D = 1 \text{ м}$? Чому буде дорівнює світлосила S такого телескопа?

5.33. Випромінювання лазера безперервної дії на довжині хвилі $\lambda = 0,63 \text{ мкм}$ потужністю $N = 10 \text{ мВт}$ направляється на супутник за допомогою телескопа, об'єктив якого має діаметр $D = 30 \text{ см}$. Світло, відбите супутником, вловлюється іншим таким же телескопом і фокусується на фотоприймачі із граничною чутливістю $N_{\text{пор}} = 10^{-14} \text{ Вт}$. Оцінити максимальну відстань L_{max} до супутника, на якому відбитий сигнал ще може бути виявлений. Поверхня супутника рівномірно розсіює падаюче світло з коефіцієнтом відбиття $R = 0,9$. Діаметр супутника $d = 20 \text{ см}$.

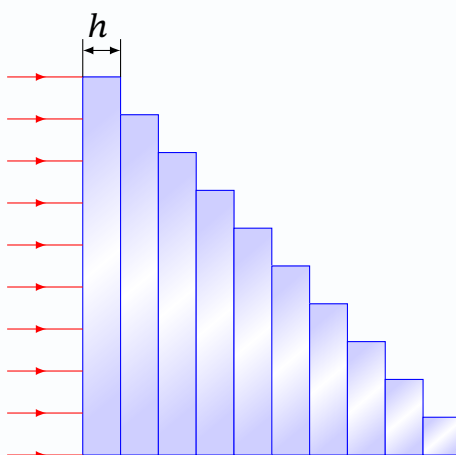
5.34. За допомогою інтерферометра Фабрі-Перо досліджується виділена системою фільтрів ділянка спектру шириною $\Delta\lambda = 0,2 \text{ нм}$. Мінімальна різниця довжин хвиль сусідніх спектральних ліній $\delta\lambda = 0,001 \text{ нм}$. Оцінити максимальне значення коефіцієнта пропускання $T = 1 - R$ (де T — коефіцієнт відбиття дзеркал за енергією), при якому розділяються сусідні лінії.

Роздільна здатність оптичних приладів. Спектральні прилади

5.35. Визначити роздільну здатність спектрометра інфрачервоного діапазону, що працює за наступним принципом. Випромінювання ІЧ-джерела, що досліджується, у діапазоні $\lambda_{\text{ІЧ}} = 3$ мкм змішується у нелінійному кристалі з випромінюванням аргонного лазера. При цьому виникає випромінювання на сумарній частоті, що лежить у оптичному діапазоні. Останнє аналізується за допомогою інтерферометра Фабрі-Перо, дзеркала якого відстоять один від одного на відстані $L = 1$ см та мають коефіцієнт відбиття за інтенсивністю $\rho = 0,9$.

5.36. На інтерферометр Фабрі-Перо, що складається з двох однакових дзеркал, падає жмуток світла з довжиною хвилі $\lambda \approx 0,5$ мкм. Інтерференційну картину спостерігають у фокальній площині лінзи діаметром $D = 2,5$ см з фокусною відстанню $f = 10$ см, вона має вигляд концентричних кілець. Перше кільце має діаметр $d = 1$ см. Оцінити максимальну роздільну здатність спектрального приладу за цих умов.

5.37. Десять тонких скляних плоскопаралельних пластинок товщиною $h = 1$ мм з показником заломлення $n = 1,5$ зібрані у стопку, що являє собою «драбину» (рис.). Така структура в оптиці називається ешелон. Висота сходинок однакова. На ешелон нормально падає паралельний жмуток світла. Спостерігається дифракційна картина Фраунгофера у світлі, що пройшло. Визначити дисперсійну область $\Delta\lambda$ та роздільну здатність R ешелону в околі хвилі $\lambda = 500$ нм. Оцінити допустиме відхилення товщини Δh плоскопаралельних пластинок при їх виготовленні.



Дифракція на кристалічній ґратці

5.38. На грань кристалу кам'яної солі падає паралельний жмуток рентгенівського випромінювання ($\lambda = 147$ пм). Визначити відстань d між атомними площинами кристалу, якщо дифракційний максимум другого порядку спостерігається, коли випромінювання падає під кутом $\theta = 31^\circ 30'$ до поверхні кристалу.

5.39. Яка довжина хвилі λ монохроматичного рентгенівського випромінювання, що падає на кристал кальциту, якщо дифракційний максимум першого порядку спостерігається, коли кут θ між напрямками випромінювання, що падає, та гранню кристала дорівнює 3° ? Відстань d між атомними площинами кристала прийняти рівним 0,3 нм.

5.40. Паралельний жмуток рентгенівського випромінювання падає на грань кристалу. Під кутом $\theta = 65^\circ$ до площини грані спостерігається максимум першого порядку. Відстань d між атомними площинами кристалу 280 пм. Визначити довжину хвилі λ рентгенівського випромінювання.

6

Поляризація та оптична анізотропія

6.1 Основні поняття і закони

Електромагнітні хвилі поперечні. Це означає, що напрямки коливань вектора електричного \mathbf{E} та магнітного полів \mathbf{H} перпендикулярні до напрямку поширення хвилі (рис. 6.1). Вектор \mathbf{E} називають *світловим вектором*.

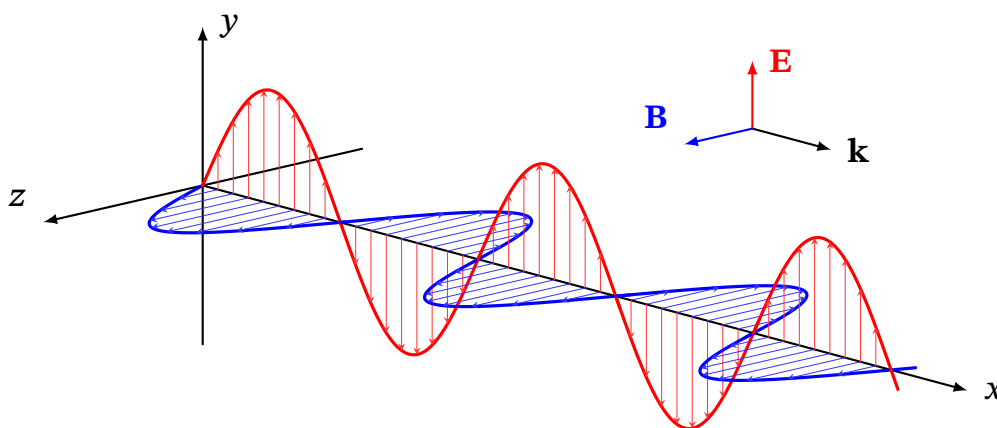


Рис. 6.1. Структура плоскої електромагнітної хвилі

Хвилю, в якій напрямки коливань електричного вектора електромагнітної хвилі \mathbf{E} впорядковано будь-яким чином, називають *поляризованою*.

Якщо коливання вектора \mathbf{E} відбуваються тільки в одній площині, що проходить через промінь, ми маємо справу з плоско- (або лінійно-) поляризованою хвилею (рис. 6.2). Площина, в якій коливається вектор \mathbf{E} , називають площиною поляризації (площиною коливань світлового вектора).

Природне світло випромінюється великою кількістю збуджених атомів випадковим чином і незалежно один від одного. Тому в природному світлі рівноймовірні всі напрямки коливань електричного поля \mathbf{E} (рис. 6.3).

Інший вид поляризації полягає в тому, що вектор \mathbf{E} обертається навколо напрямку поширення хвилі, одночасно змінюючись періодично по модулю. При цьому кінець вектора \mathbf{E} описує еліпс (у кожній точці середовища). Таку хвилю називають еліптично-поляризованою (рис. 6.4а). Або поляризованою по колу (рис. 6.4б), якщо кінець вектора \mathbf{E} описує коло.



Рис. 6.2. Лінійно- (або плоско-) поляризоване світло

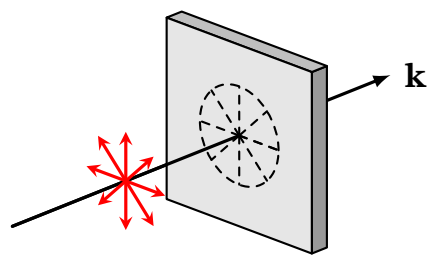
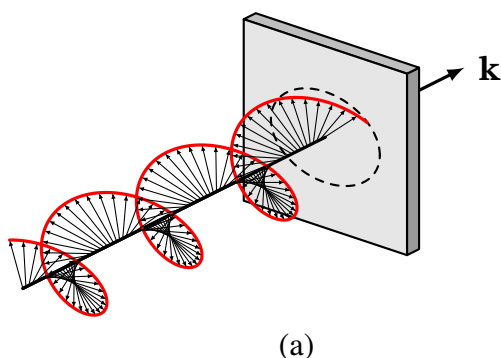
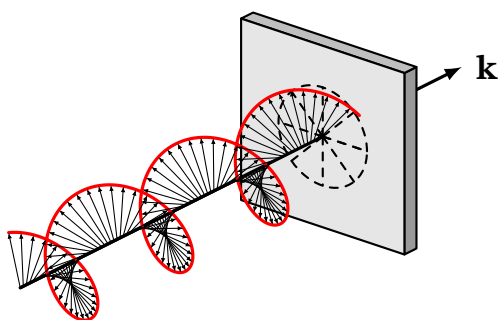


Рис. 6.3. Неполаризоване світло



(a)



(б)

Рис. 6.4. Еліптично- та поляризоване по колу світло

Закон Малюса

Для лінійно поляризованого світла

$$I_A = I_{\Pi} T_A \cos^2 \theta. \quad (6.1)$$

де I_A — інтенсивність лінійно поляризованого світла на виході аналізатора; I_{Π} — інтенсивність лінійно поляризованого світла на вході аналізатора (на виході поляризатора, що йде перед аналізатором); T_A — коефіцієнт пропускання аналізатора за рахунок втрат на відбиття та поглинання світла; θ — кут між площиною поляризації світла, що падає, та площиною пропускання аналізатора.

Для природного світла

$$I_{\Pi} = \frac{1}{2} T_{\Pi} I_{\text{пр}}, \quad (6.2)$$

де I_{Π} — інтенсивність лінійно поляризованого світла на виході поляризатора; T_{Π} — коефіцієнт пропускання поляризатора; $I_{\text{пр}}$ — інтенсивність природного світла на виході поляризатора.

Інтенсивність світла на виході системи «поляризатор-аналізатор» (рис. 6.5):

$$I_A = \frac{1}{2} T_{\Pi} T_A I_{\text{пр}} \cos^2 \theta. \quad (6.3)$$

де T_{Π} та T_A — коефіцієнти пропускання відповідно поляризатора та аналізатора; $I_{\text{пр}}$ — інтенсивність природного світла на виході системи; θ — кут між площинами пропускання аналізатора та поляризатора.

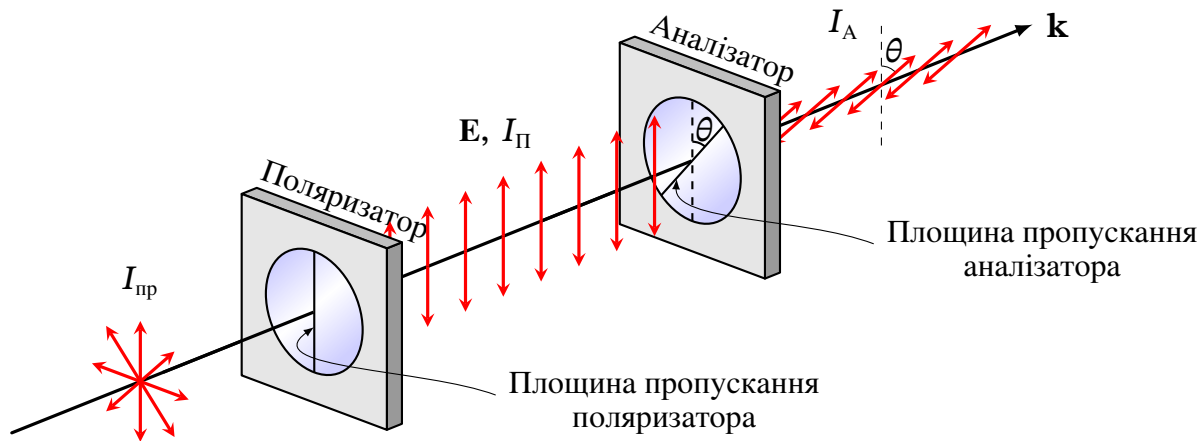


Рис. 6.5. Система «Поляризатор-аналізатор»

Кількісною характеристикою поляризації світла є ступінь поляризації:

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (6.4)$$

$P = 1$ — якщо світло плоско поляризоване, $P = 0$, якщо світло природне, $0 < P < 1$ — якщо світло частково лінійно поляризоване.

Поляризація світла при відбитті та заломленні. Закон Брюстера

При падінні природного світла на границю розділу двох діелектриків з показниками заломлення n_1 та n_2 відбитий промінь стає частково поляризованим переважно у напрямку, перпендикулярному до площини падіння, а заломлений — частково поляризованим переважно паралельно площині падіння (рис. 6.6). Зі зміною кута падіння ступінь поляризації обох променів змінюється.

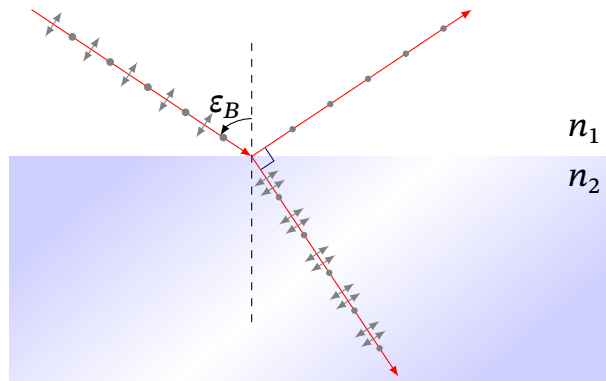


Рис. 6.6. Кут Брюстера

Ступінь поляризації відбитого R та заломленого D променів визначаються за формулами:

$$P_R = \frac{R_{\perp} - R_{\parallel}}{R_{\perp} + R_{\parallel}}, \quad (6.5)$$

$$P_D = \frac{R_{\perp} - R_{\parallel}}{2 - (R_{\perp} + R_{\parallel})}, \quad (6.6)$$

де R_{\perp} та R_{\parallel} — коефіцієнт відбиття перпендикулярної та паралельної складових природного світла, відповідно.

Загальний енергетичний коефіцієнт відбиття при цьому визначається виразом

$$R = \frac{1}{2}(R_{\perp} + R_{\parallel}).$$

З рівнянь Максвелла випливають вирази для коефіцієнтів відбиття:

$$R_{\perp} = \frac{\sin^2(\varepsilon_1 - \varepsilon'_2)}{\sin^2(\varepsilon_1 + \varepsilon'_2)}, \quad (6.7)$$

$$R_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}^2(\varepsilon_1 - \varepsilon'_2)}{\operatorname{tg}^2(\varepsilon_1 + \varepsilon'_2)}, \quad (6.8)$$

де ε_1 — кут падіння променя природного світла на границю розділу двох діелектриків; ε'_2 — кут заломлення, які пов'язані законом заломлення:

$$\varepsilon'_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \varepsilon_1\right).$$

При куті падіння природного світла ε_1 , що дорівнює

$$\varepsilon_B = \operatorname{arctg}\left(\frac{n_2}{n_1}\right), \quad (6.9)$$

з (6.8) випливає, що $R_{\parallel} = 0$, тобто відбите світло повністю поляризоване в площині, перпендикулярній площині падіння, а заломлений промінь має найбільшу степінь часткової поляризації з переважним напрямом, що паралельний площині падіння (рис. 6.6). Кут ε_B називається *кутом Брюстера*.

Відбитий та заломлений промені взаємно перпендикулярні:

$$\varepsilon_B + \varepsilon'_2 = 90^\circ,$$

тому

$$R_{B_{\perp}} = \sin^2(\varepsilon_B - \varepsilon'_2),$$

а $R = \frac{1}{2}R_{\perp}$.

Ступінь поляризації заломленого променя з (6.6):

$$P_D = \frac{R_{\perp}}{2 - R_{\perp}}.$$

Якщо взяти N платівок (стопа Столетова), то при падінні під кутом Брюстера відбитий промінь буде практично повністю поляризованими. Ступінь поляризації заломленого променя:

$$P_D = \frac{1 - (1 - R_{B_{\perp}})^{2N}}{1 - (1 + R_{B_{\perp}})^{2N}}. \quad (6.10)$$

Поляризація світла при природному подвійному променезаломленні

Явище природного подвійного променезаломлення спостерігається при проходженні променя світла крізь анізотропні кристали. Воно полягає у розщепленні падаючого променя при заломленні на поверхні кристалу на два взаємно перпендикулярні лінійно поляризовані промені: звичайний — o (від слова «ordinary») та незвичайний — e (від слова «extraordinary») (рис 6.7).

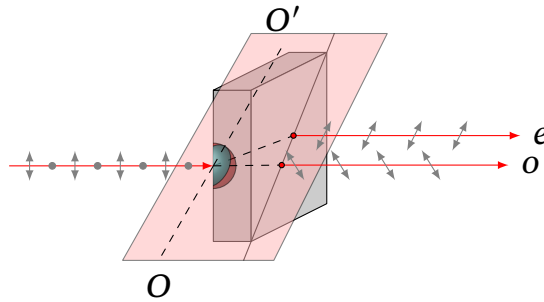


Рис. 6.7. Подвійне променезаломлення

Найсильніше двопроменезаломлення виявлено в одноосному кристалі **ісландського шпату**, з якого зазвичай виготовляються поляризаційні призми.

Властивості звичайного та незвичайного променів:

- обидва промені утворюються в точці падіння на вхідній грані кристалу. Всередині кристалу промені йдуть вздовж різних напрямів, а на виході з кристалу — паралельно один одному;
- обидва промені лінійно поляризовані у взаємно перпендикулярних площинах; звичайний — у площині, що перпендикулярна до оптичної осі кристалу ($O - O'$); незвичайний — у площині, що паралельна оптичній осі кристалу;
- для звичайного променя чинний закон заломлення Снелліуса

$$\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon'_2} = n_o = \text{const};$$

для незвичайного — ні, оскільки його показник заломлення не є сталим та змінюється в залежності від напрямку променя, що падає, $n_e = n_e(\varepsilon_1) \neq \text{const}$;

- всередині кристалу звичайний та незвичайний промінь розповсюджуються з різними швидкостями

$$v_o = \frac{c}{n_o}, \quad v_e = \frac{c}{n_e(\varepsilon_1)}.$$

Лише у напрямі, що паралельний оптичній осі кристала ($O - O'$), обидва промені розповсюджуються з однаковою швидкістю $v_o = v_e$ та не розділяються один з одним, $n_o = n_e$. У напрямі, перпендикулярному до оптичної

осі кристалу, обидва промені також не розділюються просторово, але мають найбільшу різницю швидкості розповсюдження $v_e - v_o$ та найбільшу різницю показників заломлення $n_e - n_o = b$ що називається *показником подвійного променезаломлення*;

- якщо промінь світла, що падає на кристал, є природнім, то звичайний та незвичайний промені *некогерентні* між собою, а їх інтенсивності визначаються виразами

$$I_o = \frac{1}{2} T_o I_{\text{пр}}, \quad I_e = \frac{1}{2} T_e I_{\text{пр}},$$

де T_o та T_e — коефіцієнти пропускання кристалом відповідно звичайного та незвичайного променів. У *недихроїчних* кристалах $T_e = T_o \approx 1$ та $I_e \approx I_o$, у *дихроїчних* (кристал турмаліну) з великою різницею поглинання звичайного та незвичайного променів $T_o \ll T_e$ і $I_o \ll I_e$;

- якщо промінь світла, що падає на кристал, лінійно поляризований, то звичайний та незвичайний промені *когерентні* між собою, а інтенсивність світла I_1 , що падає, розподіляється між ними у відповідності із законом Малюса (6.1):

$$I_e = T_e I_1 \cos^2 \theta, \quad I_o = T_o I_1 \sin^2 \theta,$$

де θ — кут між площиною поляризації променя, що падає, та оптичною віссю кристалу ($O - O'$).

- По відношенню до звичайного променя кристал є ізотропним середовищем. Хвильову поверхню для точкового звичайного джерела S у кристалі можна представити сферою. Анізотропія кристалу проявляється для незвичайного променя. Хвильова поверхня незвичайного джерела S представляється еліпсоїдом обертання, що вписаний у сферу хвильової поверхні звичайного променя (для додатного кристалу $b > 0$, рис. 6.8а) або описаний навколо сфери (для від'ємного кристалу $b < 0$, рис. 6.8б).

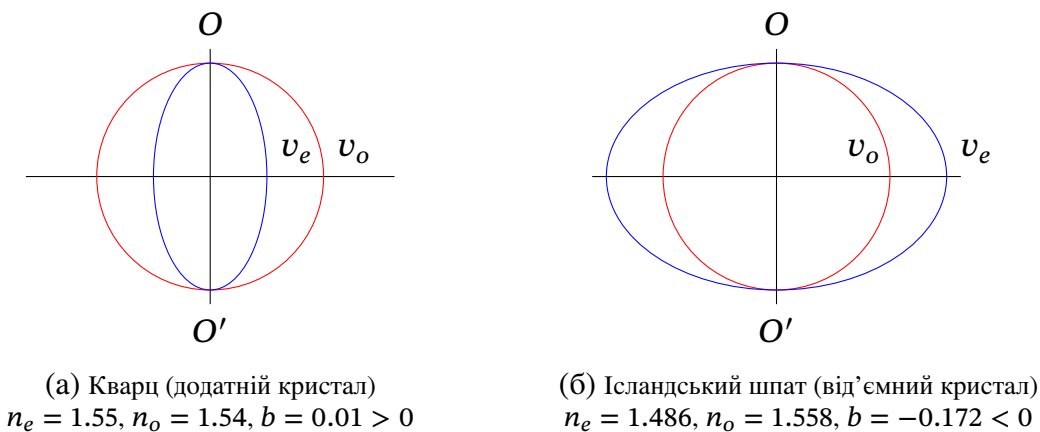


Рис. 6.8. Приклади додатного та від'ємного кристалів

Поляризаційні прилади

Явище подвійного променезаломлення використовується для виготовлення поляризаційних призм, фазових пластинок та інших оптичних елементів.

Поляризаційні призми складаються з двох або більше тригранних призм з одновісного кристала з однаковою або різною орієнтацією оптичних осей, склеєних між собою прозорою речовиною або розділеним повітряним прошарком. Якщо із призми виходить лише один пучок лінійно поляризованого світла, то призма називається однопроменевою, якщо обидва — то двопроменевою. Прикладом однопроменевої призми є призма Ніколя, яку називають ніколем (рис. 6.9). В цій призмі звичайний промінь падає на зазор з канадським бальзамом (оптично менш густим середовищем $n_o > n > n_e$) під кутом більше граничного і зазнає повного внутрішнього відбиття. Незвичайний промінь проходить наскрізь.

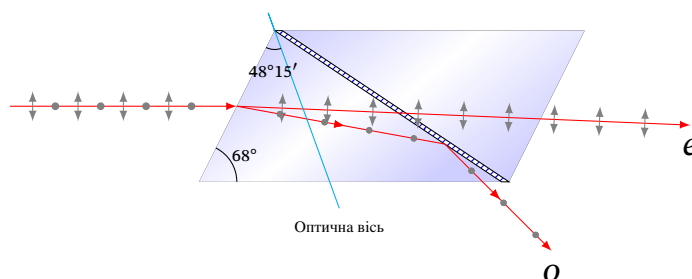


Рис. 6.9. Призма Ніколя

Фазові платівки — це поляризаційні елементи для монохроматичного світла. Вони вирізаються з кристалу зі сторонами, що паралельні його оптичній осі та дають на виході звичайну та незвичайну хвилю, які йдуть разом з максимальною різницею фаз між ними.

Якщо напрям коливань електричного вектора $\mathbf{E} = E_0 e^{i\omega t}$ в падаючому поляризованому світлі становить кут α з одним з головних напрямків платівки (рис. 6.10), то амплітуди коливань в незвичайній і звичайній хвилях будуть відповідно дорівнювати:

$$E_e = E_0 \cos \alpha, \quad E_o = E_0 \sin \alpha.$$

Пройшовши через товщу пластинки d , ці дві хвилі набудуть різниці ходу $\Delta = (n_e - n_o)d$, тобто звичайна хвиля відстане по фазі від незвичайної на величину:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d, \quad (6.11)$$

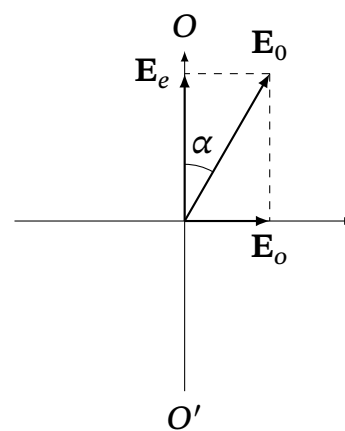


Рис. 6.10. Амплітуди коливань звичайного і незвичайного променів

Додавання двох взаємно перпендикулярних коливань з різними амплітуда-

ми і різницею фаз описується рівнянням:

$$\frac{E_x^2}{E_o^2} + \frac{E_y^2}{E_e^2} - 2\frac{E_x E_y}{E_o E_e} \cos \delta = \sin^2 \delta. \quad (6.12)$$

Тобто, тип поляризації залежить від δ та α .

Розглянемо часткові випадки.

Якщо товщина платівки дорівнюватиме величині:

$$d = \frac{2m + 1}{n_e - n_o} \frac{\lambda}{4}, \quad (\text{чвертьхвильова пластинка}) \quad (6.13)$$

різниця фаз між променями з (6.11) складатиме

$$\delta = (2m + 1) \frac{\pi}{2}.$$

Підставивши цей вираз в (6.12), отримаємо:

$$\frac{E_x^2}{E_o^2} + \frac{E_y^2}{E_e^2} = 1,$$

яке є рівнянням еліпса, орієнтованого вздовж головної осі. Така пластинка перетворює *лінійно поляризоване світло у еліптично поляризоване та навпаки* (рис.6.11).

Співвідношення довжин його півосей залежить від величини кута α . Зокрема, при $\alpha = 45^\circ$ $E_e = E_o$, так що еліпс перетвориться на коло, що описується рівнянням

$$E_x^2 + E_y^2 = E_o^2.$$

В даному випадку маємо світло, поляризоване по колу.

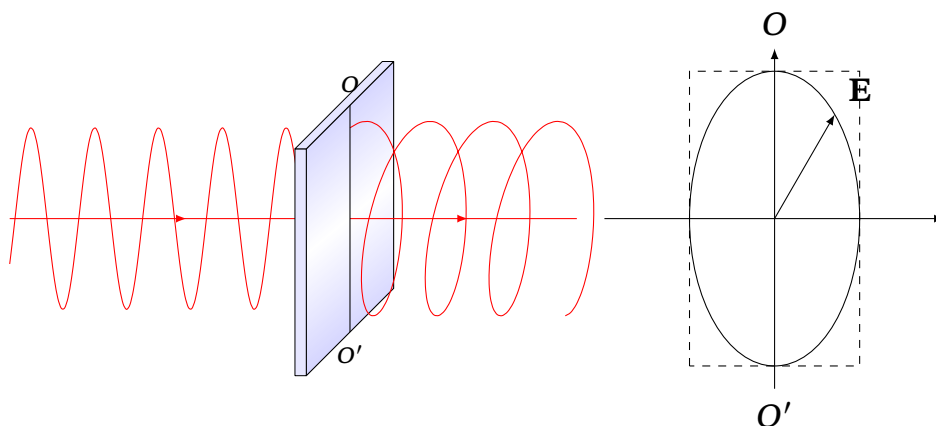


Рис. 6.11. Дія чвертьхвильової фазової пластинки

Якщо товщина пластинки дорівнюватиме величині:

$$d = \frac{2m + 1}{n_e - n_o} \frac{\lambda}{2}, \quad (\text{півхвильова пластинка}) \quad (6.14)$$

різниця фаз між променями з (6.11) складатиме

$$\delta = (2m + 1)\pi,$$

а рівняння (6.12) дає рівняння прямої, що повернута на кут 2α по відношенню до напрямку поляризації падаючої хвилі, тобто, така пластинка повертає площину поляризації лінійно поляризованого світла, що на неї падає, на подвійний кут (рис. 6.12).

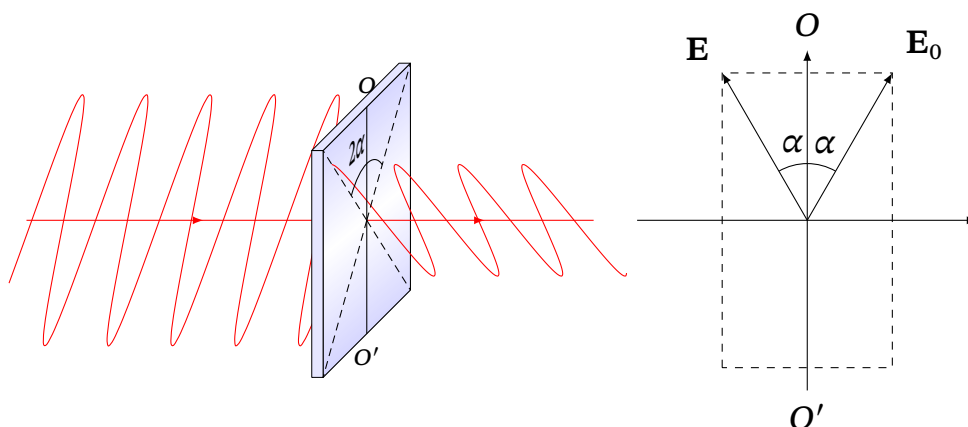


Рис. 6.12. Дія півхвильової фазової пластинки

Інтерференція поляризованого світла

Інтерференція поляризованих променів спостерігається при проходженні променя світла крізь систему поляризатор – фазова пластинка — аналізатор (рис. 6.13). Два когерентні промені, що виходять з аналізатора, поляризовані у одній площині та мають різницю фаз (6.11), інтерферують між собою, підсилюючи та ослаблюючи один одного в залежності від значень δ . Інтенсивність результуючої хвилі виражається інтерференційною формулою (без врахування поглинання):

$$I = \frac{1}{2}I_{\text{пр}} \left(\cos^2 \beta - \sin 2\alpha \cdot \sin 2(\alpha - \beta) \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2} \right), \quad (6.15)$$

де β — кут між площинами пропускання аналізатора ($A - A'$) та поляризатора ($P - P'$); α — кут між площиною пропускання поляризатора та оптичною віссю фазової пластинки ($O - O'$).

Найчастіше на практиці застосовують схеми, де $\alpha = 45^\circ$, а поляризатор і аналізатор паралельні ($\beta = 0$):

$$I_{\parallel} = \frac{1}{2}I_{\text{пр}} \cos^2 \frac{\delta}{2}, \quad (6.16)$$

або схрещені ($\beta = 90^\circ$):

$$I_{\perp} = \frac{1}{2}I_{\text{пр}} \sin^2 \frac{\delta}{2}. \quad (6.17)$$

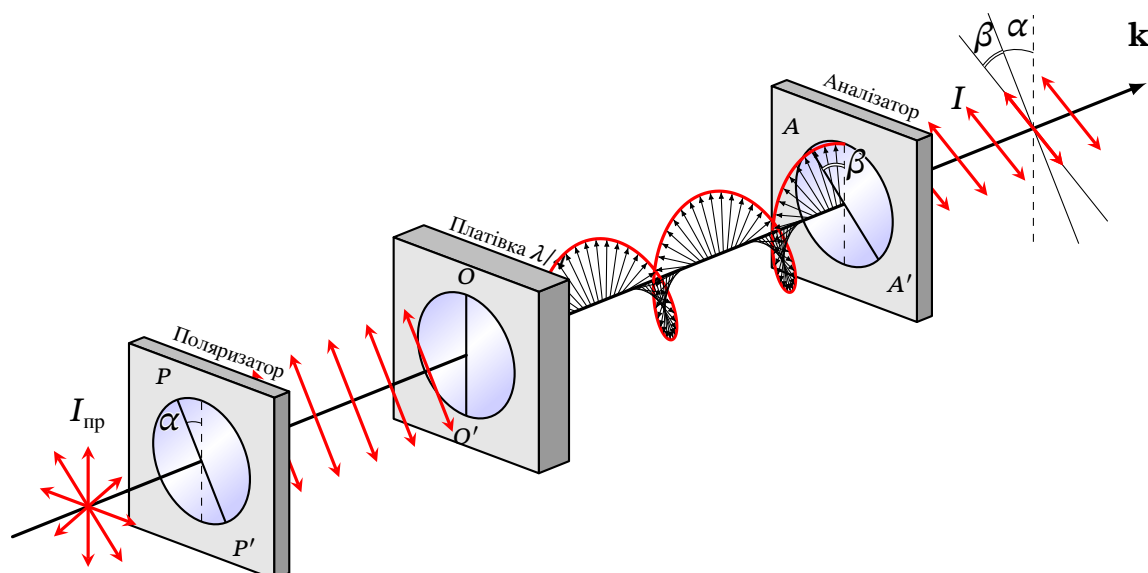


Рис. 6.13. Інтерференція поляризованого світла

При освітленні схеми білим світлом, жмуток променів, що виходить, забарвлюється в той колір, довжина хвилі якого λ відповідає умові інтерференційного максимуму:

$$\delta = 2m\pi, \quad (6.18)$$

при якій $I_{\parallel} = \frac{1}{2}I_{\text{пр}}$ та $I_{\perp} = 0$. При повороті аналізатора на 90° ($\beta = 90^\circ$), жмуток променів, що виходить, забарвлюється у колір додатковий до кольору, що відповідає довжині хвилі λ , коли $I_{\parallel} = 0$ та $I_{\perp} = \frac{1}{2}I_{\text{пр}}$. Таке забарвлення білого світла, що проходить крізь систему, називається монохроматичною поляризацією.

6.2 Штучне подвійне променезаломлення

Штучна анізотропія — це подвійне променезаломлення, яке штучно викликається у ізотропних прозорих речовинах під дією пружних деформацій, електричного та магнітного полів. Спостерігається вона у схемах, що аналогічні схемам інтерференції поляризованих променів (рис. 6.13), у яких замість фазової пластинки встановлюється комірка штучного подвійного променезаломлення. У цих схемах аналізатор та поляризатор зазвичай схрещені ($\beta = 90^\circ$), а оптична вісь комірки штучного подвійного променезаломлення ($O - O'$) орієнтується під кутом 45° до площини пропускання поляризатора ($\alpha = 45^\circ$), інтенсивність жмутка на виході системи виражається формулою (6.17):

$$I_{\perp} = \frac{1}{2}I_{\text{пр}} \sin^2 \frac{\delta}{2},$$

де

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d,$$

різниця фаз звичайного та незвичайного променів; $(n_e - n_o)$ — штучне подвійне променезаломлення; d — шлях світла у комірці.

Ефект фотопружності. Під дією пружних деформацій ізотропні прозорі тверді матеріали стають анізотропними зі штучним подвійним променезаломленням, що дорівнює:

$$n_e - n_o = k\sigma, \quad (6.19)$$

де k — коефіцієнт пропорційності, що залежить від типу матеріалу; σ — внутрішня напружка викликана деформацією.

Лінійний електрооптичний ефект, або **ефект Поккельса** спостерігається в кристалах. Під дією поперечного (або поздовжнього) електричного поля деякі ізотропні кристали, частіше всього штучного походження, стають анізотропними зі штучним подвійним променезаломленням:

$$n_e - n_o = kE, \quad (6.20)$$

де k — коефіцієнт пропорційності, що залежить від типу кристалу, E — напруженість електричного поля.

Квадратичний електрооптичний ефект, або **ефект Керра** спостерігається в газах, рідких, склоподібних та кристалічних діелектриках з центрами симетрії і полягає у зміні показника заломлення під впливом електричного поля:

$$n_e - n_o = K\lambda E^2, \quad (6.21)$$

де K — стала Керра, λ — довжина хвилі в вакуумі, E — напруженість електричного поля.

Діелектричне середовище, яке у вихідному стані було оптично ізотропним, під дією електричного поля стає анізотропним, що призводить до подвійного променезаломлення. Оптична вісь при цьому збігається з напрямком силових ліній напруженості електричного поля. Для дослідження анізотропних властивостей рідини (нітробензолу, сірководню тощо) використовується **комірка Керра**.

Аналогічно виникненню штучного подвійного променезаломлення під впливом електричного поля можливе створення штучної оптичної анізотропії під дією магнітного поля (**ефект Коттона-Мутона**):

$$n_e - n_o = C\lambda H^2, \quad (6.22)$$

де C — стала Коттона-Мутона, λ — довжина хвилі в вакуумі, H — напруженість магнітного поля.

Обертання площини поляризації

При проходженні лінійно поляризованого світла крізь прозорі оптично активні речовини виникає природне обертання (закручення) площини поляризації на кут:

$$\psi = \alpha d, \quad (6.23)$$

де α — стала обертання, що залежить від речовини та довжини хвилі світла; d — шлях світла у оптично активній речовині.

Якщо помістити оптично активну речовину між схрещеними поляризатором та аналізатором (рис. 6.14), то на виході останнього з'явиться світло, інтенсивність якого визначається законом Малюса (без урахування поглинання):

$$I_A = \frac{1}{2} I_{\text{пр}} \sin^2 \psi, \quad (6.24)$$

де $I_{\text{пр}}$ — інтенсивність природного світла на виході поляризатора; ψ — кут повороту площини поляризації у речовині.

Кут повороту площини поляризації у розчинах оптично активних речовин у неактивному розчиннику визначається виразом (*закон Біо*):

$$\psi = [\alpha]cd, \quad (6.25)$$

де $[\alpha]$ — питома стала обертання, що залежить від довжини хвилі світла; c — концентрація активної речовини у розчині; d — шлях світла у розчині.

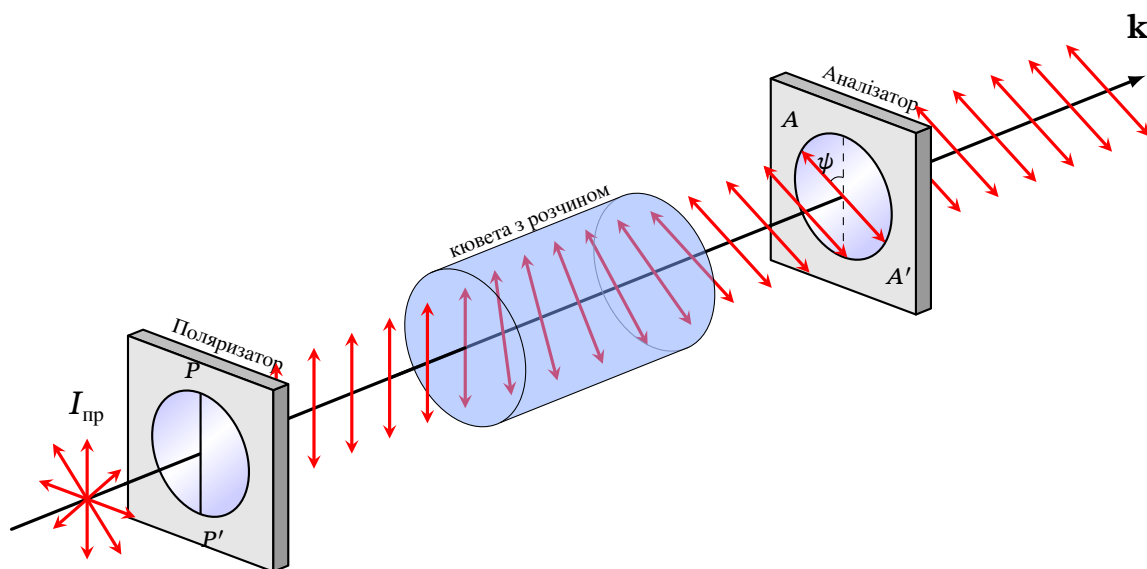


Рис. 6.14. Обертання площини поляризації

Штучне обертання площини поляризації у прозорих оптично неактивних речовинах здійснюється у поздовжньому магнітному полі (*ефект Фарадея*) на кут:

$$\psi = V H d, \quad (6.26)$$

де V — питома магнітне обертання (стала Верде), що залежить від речовини та довжини хвилі світла; H — напруженість поздовжнього магнітного поля; d — шлях світла у магнітному полі та речовині.

6.3

Приклади розв'язування задач

Приклад: 33

Через аналізатор розглядається частково поляризоване світло. При повороті аналізатора на кут 60° від положення, що відповідає максимальній яскравості, яскравість світла, що проходить крізь систему, зменшується удвічі. Представляючи частково поляризоване світло як суму природного та лінійно поляризованого та нехтуючи поглинанням поляризатора, визначити: а) відношення інтенсивностей природного та лінійного поляризованого світла; б) ступінь поляризації світла, що розглядається.

Розв'язок

а) Інтенсивність частково поляризованого світла, що падає на аналізатор, можна представити сумою

$$I_{\text{чп}} = I_{\Pi} + I_{\text{пр}},$$

де I_{Π} — інтенсивність лінійно поляризованої складової; $I_{\text{пр}}$ — інтенсивність природної складової.

У першому положенні максимальної яскравості ($\varphi = 0$) згідно із законом Малюса (6.1) та $T_A = 1$) крізь аналізатор проходить вся лінійно поляризована складова I_{Π} та згідно з (6.2) — поляризоване світло, інтенсивність якого дорівнює половині інтенсивності природної складової: $I_{A_1} = I_{\Pi} + 0,5I_{\text{пр}}$. У другому положенні ($\varphi = 60^\circ$) згідно з (6.1) та (6.2) світло, що проходить крізь аналізатор, має сумарну інтенсивність: $I_{A_2} = I_{\Pi} \cos^2 \varphi + 0,5I_{\text{пр}}$. За умовою задачі $I_{A_1} = 2I_{A_2}$, звідки отримуємо

$$\frac{I_{\text{пр}}}{I_{\Pi}} = 2(1 - \cos^2 \varphi) = 1, \quad \text{тобто} \quad I_{\text{пр}} = I_{\Pi}.$$

Мінімальна яскравість на виході аналізатора відповідає куту його повороту $\varphi = 90^\circ$, коли $I_{A_3} = 0,5I_{\text{пр}}$.

б) Ступінь поляризації частково поляризованого світла характеризує у ньому частину лінійно поляризованої складової та визначається за формулою

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

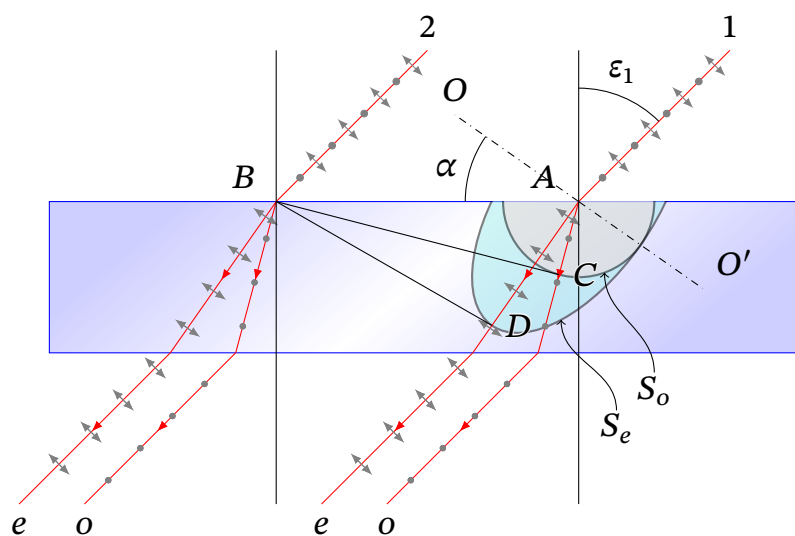
де I_{\max} і I_{\min} — максимальна ($\varphi = 0$) та мінімальна ($\varphi = 90^\circ$) інтенсивності у двох взаємно перпендикулярних напрямках. З умов задачі отримуємо $P = 0,5$.

Приклад: 34

На плоскопаралельну пластинку із одновісного від'ємного кристалу падає плоска монохроматична хвиля під кутом $\varepsilon_1 > 0$. Оптична вісь кристалу ($O' - O'$) лежить у площині падіння та орієнтована відносно поверхні пластинки під кутом $\alpha > 0$. Виконати графічні побудови Гюйгенса для орієнтовного визначення напрямку хвильових фронтів та ходу звичайного та незвичайного променів.

Розв'язок

Представимо жмуток, що падає, двома крайніми променями 1 та 2 (див. рис.).



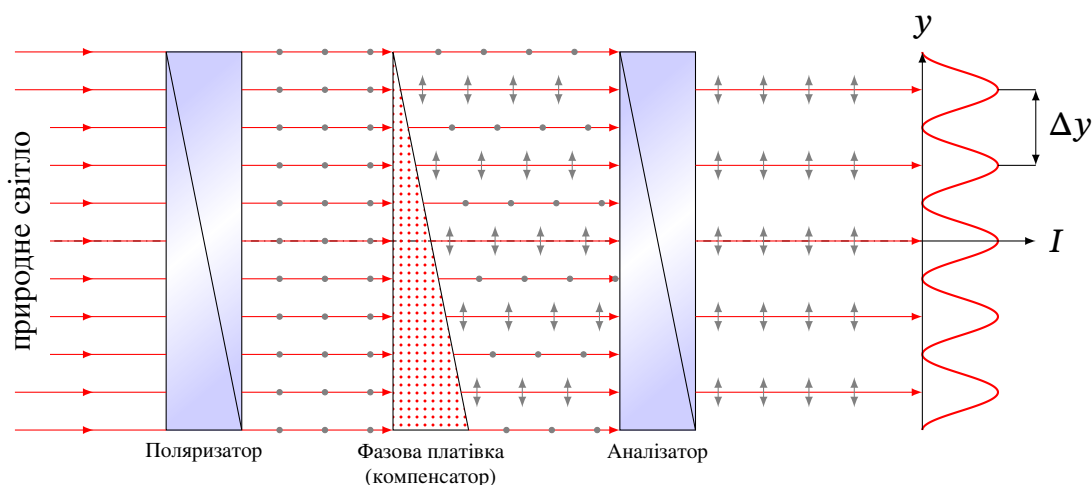
Фронт хвилі, що падає, перпендикулярний до них. Промінь 1 першим приходить на поверхню пластинки у точці A , яка згідно з принципом Гюйгенса є точковим джерелом випромінювання у кристалі вторинних звичайної та незвичайної хвиль. У цій точці проводимо напрям оптичної осі у відповідності зі значенням кута α . За час Δt , коли промінь 2 прийде на поверхню пластинки у точці B , навколо точки A утворюються сферична хвильова поверхня звичайної хвилі радіуса $v_o \Delta t$. З точки A проводимо всередині пластинки коло S_o , що відповідає цій сфері. Дотична з точки B до цього кола BC дає положення фронту звичайної хвилі у кристалі, а лінія AC дає напрям ходу звичайного променя. Його площина поляризації перпендикулярна до осі $O - O'$, тобто до площини падіння (на рис. показано крапками). Будуємо хвильову поверхню незвичайної хвилі у вигляді еліпса S_e , що описаний навколо кола S_o (кристал від'ємний, див. рис.). Мала піввісь еліпса дорівнює $v_o \Delta t$, а велика — $v_e \Delta t$. Дотична з точки B до еліпса BD дає положення фронту незвичайного променя у кристалі, а лінія AD — напрям ходу незвичайного променя. Площина його поляризації паралельна осі $O - O'$ та співпадає з площиною падіння (на рис. показано поперечними рисками). На виході з

нижньої поверхні пластинки обидва промені йдуть паралельно падаючому. З точки B промені проводяться паралельно відповідним променям з точки A . Ця побудова хоча і орієнтовна, тим не менше дає уявлення про те, як проходять промені у двопронезаломлюючому кристалі у відповідності зі значеннями ε_1 , α та типом кристалу. У даній задачі незвичайний промінь має більший кут заломлення та проходить лівіше звичайного.

Приклад: 35

Між схрещеними поляризатором та аналізатором встановлена клиновидна пластинка із ісландського шпату з оптичною віссю, що паралельна ребру клина. Кут при вершині клина дорівнює $4,72'$, вісь пластинки утворює з площиною пропускання поляризатора кут 45° . Знайти ширину інтерференційних смуг, що спостерігаються на виході системи у монохроматичному світлі (486 нм). Для цієї довжини хвилі показники заломлення ісландського шпату дорівнюють $n_o = 1,668$ та $n_e = 1,491$.

Розв'язок



На рис. поляризатор та аналізатор показані у вигляді поляризаційних призм.

У відповідності з умовами задачі ($\beta = 90^\circ$; $\alpha = 45^\circ$) інтенсивність світла за аналізатором визначається за інтерференційною формулою (6.17)

$$I_{\perp} = \frac{1}{2} I_{\text{пр}} \sin^2 \frac{\delta}{2},$$

де різниця фаз між звичайним та незвичайним променями (6.11)

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o) d$$

змінюється по висоті пластинки за рахунок зміни її товщини d . При малому заломлюючому куті θ клина $d = y\theta$.

На екрані, встановленому за аналізатором, будуть спостерігатися інтерференційні смуги рівної товщини у вигляді прямих ліній, що паралельні ребру клина. Під шириною смуги при двопроменевої інтерференції Δy розуміється відстань між серединами сусідніх світлих смуг, що задовольняють умові максимуму. Максимальне значення інтенсивності I_{\perp} (6.17) досягається, коли

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)y\theta = (2m + 1)\pi,$$

де y — висота перерізу клина від його ребра; $\theta = 4,72' = 1,3279 \cdot 10^{-4}$ рад; $m = 0, 1, 2, \dots$ — порядок інтерференції. Розглянемо умови для двох сусідніх максимумів, наприклад порядків m та $m + 1$ на висотах y_m та y_{m+1} :

$$\frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)y_m\theta = (2m + 1)\pi,$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)y_{m+1}\theta = (2(m + 1) + 1)\pi.$$

Віднімаючи перший вираз від другого та враховуючи, що $\Delta y = y_{m+1} - y_m$, отримуємо

$$\Delta y = \frac{\lambda}{(n_e - n_o)\theta} = 2000 \text{ мкм} = 2 \text{ мм}$$

6.4

Задачі для самостійного розв'язку

6.1. Як можна отримати лінійно поляризоване світло з природного світла, частково поляризованого, циркулярно поляризованого та еліптично поляризованого?

6.2. Що являє собою поляризатор, який працює на відбитті світла, на заломленні світла?

6.3. Як буде змінюватися інтенсивність світла за аналізатором, що обертається навколо променя світла: природного, лінійно поляризованого, еліптично поляризованого, циркулярно поляризованого, частково поляризованого?

6.4. Яким чином можна перетворити плоскополяризоване світло в циркулярно поляризоване та навпаки?

6.5. Як можна експериментально відрізнити природне світло від циркулярно поляризованого та частково поляризоване світло від еліптичного поляризованого?

6.6. Як можна отримати циркулярно поляризоване світло?

6.7. Як відрізнити ліво- та правополяризоване по колу світло?

6.8. Вітрове скло й фари автомашин забезпечуються поляроїдними плівками. Як повинні бути орієнтовані площини пропускання цих плівок, щоб водій міг добре бачити дорогу та не засліплюватися світлом фар зустрічних машин?

6.9. Як повинна вирізатися фазова пластинка з двопроменезаломлюючого кристалу?

6.10. Чому двопроменезаломлююча пластинка, яка розташована між поляризатором та аналізатором, при освітленні білим світлом має кольорове забарвлення? При якому положенні аналізатора відносно пластинки кольорове забарвлення не буде спостерігатися?

6.11. Для чого потрібні компенсатори, зроблені з двопроменезаломлюючих кристалів?

6.12. Як відрізнити пластинку кварцу, що вирізана перпендикулярно до його оптичної осі, від пластинки кварцу, що вирізана паралельно його осі?

6.13. Як визначити з ліво- чи правообертаючого кварцу зроблена пластинка, яка вирізана перпендикулярно до його оптичної осі?

6.14. У деяких установках для аналізу поляризованого світла він пропускається крізь аналізатор, що рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω , потім світло проектується на фотоприймач. На яку частоту має бути розрахований підсилювач фотоструму? На основі якого закону ця частота

може бути визначена?

6.15. Промінь монохроматичного природного світла падає під кутом 45° на поверхню скла. Визначити коефіцієнт відбиття та ступені поляризації відбитого та заломленого променів, коли показник заломлення скла дорівнює: а) 1,5; б) 1,62; в) 1,73.

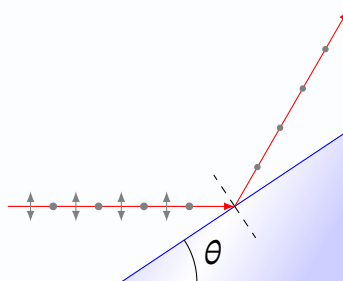
6.16. Під яким кутом до горизонту повинно знаходитися Сонце, щоб його промені, відбиті від поверхні озера, були найбільше поляризовані? Який при цьому ступінь поляризації заломленого променя?

6.17. Промінь природного монохроматичного світла падає на поверхню скла під кутом Брюстера. Визначити кут падіння, коефіцієнт відбиття та ступені поляризації заломленого променя, коли показник заломлення скла дорівнює: а) 1,5; б) 1,62; в) 1,73.

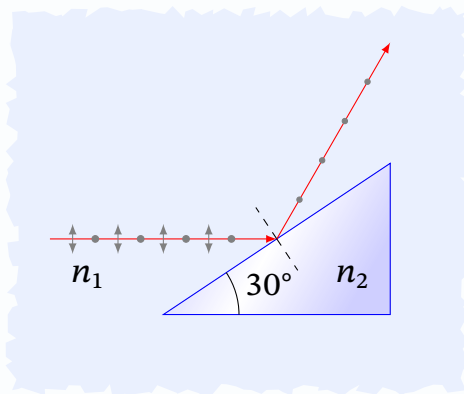
Закон Брюстера. Закон Малюса.

6.18. Жмуток природного світла, що йде у воді, відбивається від грані алмазу, що занурений у воду. При якому куті падіння ε_B відбите світло повністю поляризоване?

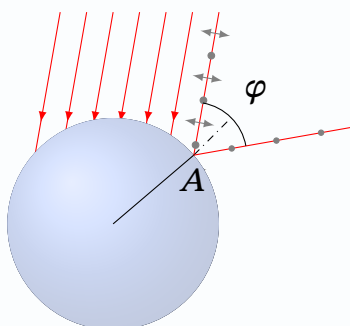
6.19. Жмуток природного світла падає на скляну ($n = 1,6$) призму (рис.). Визначити двогранний кут θ призми, якщо відбитий жмуток максимально поляризований.



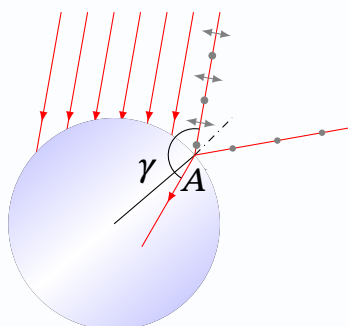
6.20. Алмазна призма знаходиться у деякому середовищі з показником заломлення n_1 . Жмуток природного світла падає на призму так, як показано на рис. Визначити показник заломлення n_1 середовища, якщо відбитий жмуток максимально поляризований.



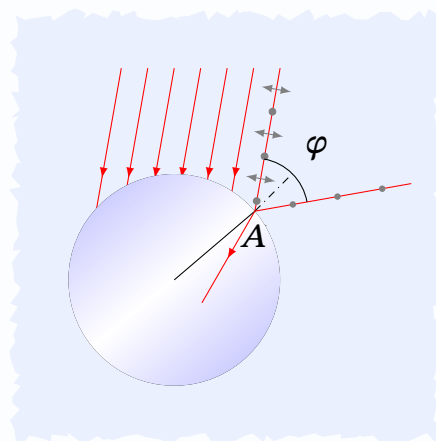
- 6.21.** а) Паралельний жмуток природного світла падає на сферичну краплю води. Знайти кут φ між відбитим та падаючим жмутками у точці А (рис. а).
 б) Жмуток природного світла падає на скляний шар ($n = 1,54$). Знайти кут γ між заломленим та падаючим жмутками у точці А (рис. б).
 в) Жмуток природного світла, що падає на скляний шар, знаходиться у воді. Знайти кут φ між відбитим та падаючим жмутками у точці А (рис. в). Показник заломлення скла прийняти рівним 1,58.



а)



б)



в)

- 6.22.** У скільки разів послаблюється інтенсивність світла, що проходить крізь два ніколі, площини пропускання яких утворюють кут $\alpha = 30^\circ$, якщо у кожному з ніколей окремо втрачається 10% інтенсивності світла, що на нього падає?

- 6.23.** У фотометрі одночасно розглядаються дві половини поля зору: у одній видно еталонну поверхню, що світиться з яскравістю $L_1 = 5 \cdot 10^3$ кд/м², у іншій — досліджувана поверхня, світло від якої проходить крізь два ніколі. Границя між двома половинами поля зору зникає, якщо другий ніколь повернути відносно першого на кут $\alpha = 45^\circ$. Знайти яскравість L_2 досліджуваної поверхні, якщо відомо, що у кожному з ніколей інтенсивність

падаючого на нього світла зменшується на 8%.

6.24. При падінні природного світла на границю повітря-скло ($n = 1,6$) під кутом 58° відбивається 8,3% падаючої енергії. Яка степінь поляризації відбитого та заломленого в склі світла?

6.25. Промінь природного світла проходить крізь рідину, що налита у скляну посудину ($n = 1,5$), і відбивається від його дна під кутом Брюстера $42^\circ 37'$. Визначити: а) показник заломлення рідини; б) під яким кутом повинен падати на дно посудини промінь світла, що йде з рідини, щоб відбулося повне внутрішнє відбиття?

6.26. На бокову грань скляної призми ($n = 1,5$) під кутом Брюстера падає жмуток монохроматичного світла, що лінійно поляризований у площині головного перерізу призми. Яким повинен бути заломлюючий кут призми, щоб світло пройшло крізь неї без втрат на відбиття?

6.27. Яким повинен бути заломлюючий кут призми ($n = 1,73$), щоб кути входу та виходу променя з призми були кутами повної поляризації? Чому дорівнює найменший кут відхилення променя призмой при такому заломлюючому куті?

6.28. Чому дорівнює ступінь поляризації світла, що є сумішшю лінійно поляризованого та природного, якщо відношення $\frac{I_n}{I_{\text{пр}}}$ дорівнює: а) 0,5; б) 1; в) 2; г) 5; д) 10.

6.29. При яких умовах промінь світла, що падає на бічну грань призми із заломлюючим кутом 60° , проходить крізь неї без втрат на відбиття?

6.30. Визначити кут повної поляризації для променя, відбитого від поверхні чорного скла ($n = 1,65$). Яку долю інтенсивності природного світла відбиває скло? На який кут відносно площини поляризації відбитого променя потрібно повернути площину пропуску поляроїда ($T_{\text{пр}} = 0,75$), щоб інтенсивність променя зменшилася ще вдвічі?

6.31. Кут між площинами поляризатора та аналізатора складає 45° . а) Як зміниться інтенсивність світла, що проходить крізь систему, якщо кут зменшити до 30° ? б) Яким має бути цей кут, щоб інтенсивність світла на

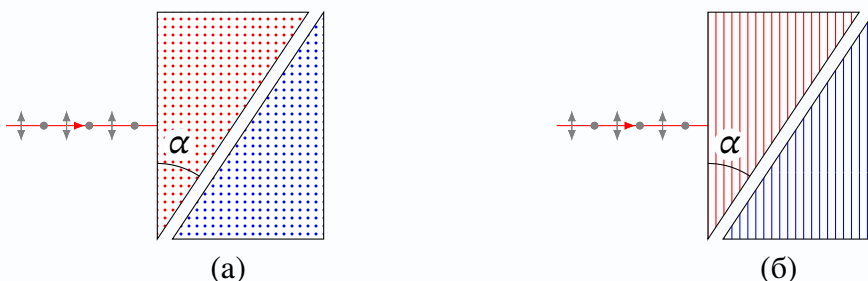
виході зменшилася у 4 рази?

6.32. Лінійно поляризоване світло інтенсивністю 100 Вт/м^2 проходить поспідовно крізь два поляризатора, площини пропускання яких утворюють з площиною поляризації світла кути α_1 та α_2 (за годинниковою стрілкою вздовж променя). Визначити інтенсивність світла, що проходить крізь систему, коли: а) $\alpha_1 = 20^\circ$, $\alpha_2 = 50^\circ$; б) $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 45^\circ$; в) $\alpha_1 = -15^\circ$; $\alpha_2 = 30^\circ$.

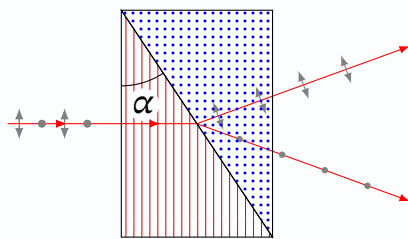
Кристалооптика та штучне подвійне променезаломлення

6.33. Жмуток неполяризованого монохроматичного світла (589 нм) падає на поверхню одновісного кристалу перпендикулярно до його оптичної осі. Знайти довжини хвиль та швидкості розповсюдження звичайного та незвичайного променів у кристалі: а) ісландського шпату ($n_o = 1,658$, $n_e = 1,486$); б) кварцу ($n_o = 1,54$, $n_e = 1,55$). Якого кольору будуть обидва промені у кристалі?

6.34. Дві однопроменеві поляризаційні призми з повітряним прошарком виготовлені з ісландського шпату ($n_o = 1,658$, $n_e = 1,486$). У одній призмі оптична вісь перпендикулярна до площини падіння, в іншій — паралельна (рис.). а) Як буде поляризоване світло на виході з призми? б) Яка призма пропускає більше світла та у скільки разів? в) У яких межах повинен бути кут α , щоб з призми виходив тільки один промінь поляризованого світла?



6.35. Двопроменева поляризаційна призма Воластона (рис.) зроблена з ісландського шпату ($n_o = 1,658$, $n_e = 1,486$), кут $\alpha = 15^\circ$. Розрахувати на який кут будуть розведені звичайний та незвичайний промені.



6.36. Циркулярно поляризоване світло, що проходить крізь кварцеву фазову пластинку, розглядається через аналізатор, площина пропускання якого повернута на кут α відносно оптичної осі пластинки. Визначити: а) інтенсивність світла, що проходить; б) при якому куті α інтенсивність буде максимальна? мінімальна?

6.37. Клин із одновісного кристалу розташований на шляху монохроматичного світла (500 нм), що поляризоване по колу. Оптична вісь клина паралельна його ребру. Світло, що пройшло крізь клин, розглядається через аналізатор, площина пропускання якого складає 45° з ребром клина. Визначити кількість світлих інтерференційних смуг, що спостерігаються на поверхні клина, максимальна товщина якого 0,05 см, якщо цей клин зроблений з: а) кварцу; б) ісландського шпату.

6.38. Кварцева фазова пластинка ($n_e - n_o = 0,009$) розташована між схрещеними поляризатором та аналізатором, кут $\alpha = 45^\circ$. Визначити мінімальну товщину пластинки, при якій одна лінія водню $\lambda_1 = 6563 \text{ \AA}$ буде сильно ослаблена, а інша $\lambda_2 = 4102 \text{ \AA}$ буде мати максимальну інтенсивність.

6.39. Між схрещеними поляризатором та аналізатором, що освітлені вузьким жмутком неполяризованого монохроматичного світла (500 нм), встановлений горизонтально і нормально до променя кубик з плексигласу зі стороною $a = 0,5 \text{ см}$. Площина поляризатора орієнтована під кутом 45° до горизонту. Кубик стискається силою F у вертикальному напрямі. Коefіцієнт фотопружності плексигласу складає $2 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{Н}$. а) При якій силі тиску F світло вийде поляризованим по колу? б) Яка при цьому буде частина світла, що пройшла крізь систему?

6.40. Умови задачі 6.39. а) Яка буде частина світла, що пройшла крізь систему, коли сила $F = 62,5 \text{ Н}$? б) Якою вона стане, якщо аналізатор повернути на 90° ?

6.41. Визначити показник штучного подвійного променезаломлення ($n_e - n_o = 0,009$) при спостереженні ефекту Керра у нітробензолі у електричному полі напруженістю 3000 В/см. Стала Керра для нітробензолу при $t = 20\text{ }^\circ\text{C}$ та $\lambda = 589\text{ нм}$ дорівнює $B = 2,2 \cdot 10^{-12}\text{ м/В}^2$. Знайти різницю фаз δ , що створюється коміркою Керра з довжиною пластин конденсатора $d = 4\text{ см}$.

6.42. Комірка Керра з відстанню між електродами $l = 1\text{ мм}$ заповнена нітробензолом та розміщена між поляризатором та аналізатором. Напрямок електричного поля у конденсаторі складає кут 45° з площиною пропускання поляризатора. Система освітлюється неполяризованим монохроматичним світлом, для якого стала Керра $B = 2,2 \cdot 10^{-11}\text{ м/В}^2$. Визначити довжину пластин конденсатора d , якщо мінімальна напруга між ними, при якій інтенсивність світла на виході системи не змінюється при обертанні аналізатора, $U = 1\text{ кВ}$.

6.43. Комірка Коттона-Муттона — плоска скляна кювета з ацетоном $d = 2\text{ см}$, розміщена у поперечному магнітному полі з напруженістю $H = 3\text{ кА/м}$. Стала Коттона-Муттона для ацетону при $t = 20\text{ }^\circ\text{C}$ та $\lambda = 578\text{ нм}$ складає $C = 5,94 \cdot 10^{-14}\text{ м/А}^2$. Визначити: а) різницю фаз звичайного та незвичайного променів; б) частину природного монохроматичного світла, що проходить крізь систему поляризатор-комірка-аналізатор при $\beta = 0$ та $\alpha = 45^\circ$.

6.44. Пластинка кварцу товщиною 1 мм, вирізана перпендикулярно до його оптичної осі та розміщена між паралельними поляризатором та аналізатором, повертає при деякій довжині хвилі світла площину поляризації на кут 20° . При якій найменшій товщині кварцевої пластинки природне світло даної довжини хвилі буде: а) повністю погашене; б) ослаблене у 3 рази; в) найбільш яскравим?

6.45. Умови задачі 6.44, тільки аналізатор та поляризатор схрещені.

6.46. Стала Верде для сірководню при $t = 0\text{ }^\circ\text{C}$ та $\lambda = 58\text{ нм}$ дорівнює $V = 5,4626 \cdot 10^{-2}\text{ кут.хв/А}$. а) Визначити кут повороту площини поляризації світла при проходженні крізь шар сірководню товщиною $d = 1\text{ см}$, що знаходиться у поздовжньому магнітному полі з напруженістю $H = 0,79577 \cdot 10^6\text{ А/м}$. Комірка Верде розміщена між схрещеними поляризаторами. б) Яка частина природного світла проходить крізь систему?

6.47. Деяка речовина розміщена у поздовжньому магнітному полі соленоїда, розташованого між паралельними поляризаторами. Довжина кювети з речовиною 30 см. При протилежних напрямках магнітного поля напруженістю $= 56,5 \cdot 10^3$ А/м кути повороту площини поляризації складають $\varphi_1 = +5^\circ 10'$ та $\varphi_2 = -3^\circ 20'$. Визначити: а) сталу Верде для речовини у трубці; б) при якому куті між площинами поляризаторів світло може проходити тільки у одному напрямі, тобто система служить оптичним вентилем?; в) яка при цьому повинна бути напруженість магнітного поля?

6.48. Простір між дзеркалами інтерферометра Фабрі-Перо з роздільною здатністю $R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = 10^8$ заповнено хімічно чистим нітробензолом. При накладанні однорідного поперечного електричного поля нітробензол стає слабко анізотропним середовищем, причому оптична вісь співпадає з напрямом поля (ефект Керра). Інтерферометр освітлюється монохроматичним жмутком неполяризованого світла ($\lambda = 600$ нм). Оцінити мінімальну величину електричного поля, при якій на виході інтерферометра буде спостерігатися майже повністю лінійно поляризоване світло. Сталу Керра для нітробензолу прийняти рівною $B = 2 \cdot 10^{-5}$ од. СГСЕ.

Примітка: Сталою Керра називають константу у виразі $n_e - n_o = \lambda B E^2$.

6.49. Одну половину біпризми Френеля закрили пластинкою у чверть довжини хвилі. Знайти видність інтерференційних смуг, якщо джерело дає монохроматичне неполяризоване світло, яке можна розкласти на некогерентні взаємно перпендикулярно поляризовані хвилі.

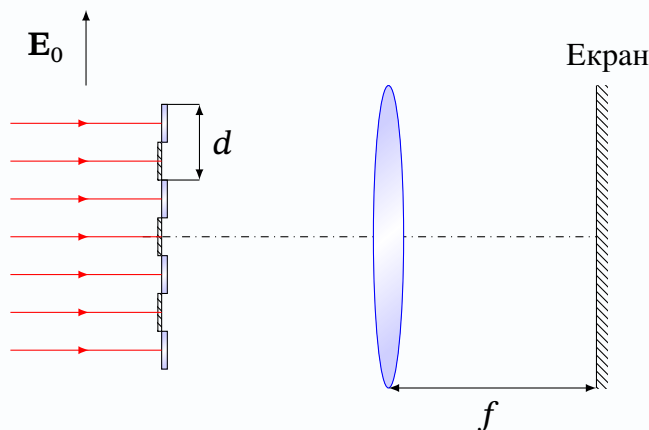
6.50. Визначити інтенсивність світла I у точці P екрану, на який падає монохроматичне світло інтенсивністю I_0 , якщо на шляху поставити диск з оптично активною речовиною, що закриває півтори зони Френеля та повертає площину поляризації на кут 90° . Відбиттям та поглинанням світла знехтувати.

6.51. Паралельний жмуток неполяризованого монохроматичного світла падає на чвертьхвильову пластину. Інтенсивність світла у деякій точці спостереження P за пластинкою дорівнює I_0 . З пластинки вирізають диск, що закриває півтори зони Френеля для точки P . Диск повернули навколо променя на кут $\frac{\pi}{2}$ та поставили на місце. Якою стала інтенсивність I у точці P ?

6.52. З кристалічної півхвильової пластинки вирізані диски діаметром у одну та дві зони Френеля для точки P . Диски вносять у жмуток світла щільно один до одного, так що у них співпадають: а) різнойменні головні напрями; б) однойменні головні напрями. При цьому, для світла, що поляризоване в одному з головних напрямів, ні амплітуда, ні фаза коливань не змінилася. У скільки разів зміниться інтенсивність світла тієї ж поляризації у випадках а) та б), якщо малий диск повернути на 90° ?

6.53. У непрозорому екрані, на який нормально падає плоска лінійно поляризована хвиля з інтенсивністю I_0 , вирізано круглий отвір розміром в одну зону Френеля для деякої точки спостереження, що лежить на осі системи. В отвір вставлена чвертьхвильова пластинка у формі напівдисків, однойменні осі яких орієнтовані взаємно перпендикулярно. Напрямок коливань хвилі, що падає, складає 45° з головними напрямками пластинок у обох випадках. Яка інтенсивність коливань у точці спостереження?

6.54. Паралельний жмуток лінійно поляризованого світла з довжиною хвилі $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ та вектором \mathbf{E}_0 , що лежить в площині рис., нормально падає на три отвори, що закриті однаковими подвійнопроменезаломлюючими чвертьхвильовими пластинками. Причому крайні отвори закриті однаково орієнтованими пластинками так, що вектор \mathbf{E}_0 співпадає з одним з головних напрямів цих пластинок, а середня пластинка повернута відносно них на 90° . Інтерференційна картина розглядається на екрані за допомогою лінзи з фокусною відстанню $f = 1 \text{ м}$. Знайти розподіл інтенсивності у фокальній площині лінзи, вважаючи розмір отворів нехтовно малим у порівнянні з відстанню d між ними ($d = 1 \text{ см}$). Визначити видність V інтерференційної картини, а також її період λ .



6.55. Паралельний жмуток поляризованого по колу монохроматичного світла падає на ґратку з періодом d та шириною отворів $b = d/2$. Кожний отвір перекритий двома смужками поляроїда однакової ширини $b/2$ зі взаємно перпендикулярними дозволеними напрямками. Яка поляризація у нульовому та бокових дифракційних максимумах (± 1 -ому, ± 2 -ому, ...)?

6.56. Як зміниться роздільна здатність дифракційної ґратки, якщо одну її половину прикрити поляроїдом, що орієнтований паралельно штрихам ґратки, а іншу — поляроїдом, орієнтованим перпендикулярно до штрихів? Чи буде залежати роздільна сила ґратки від поляризації світла, що падає?

Відповіді

Геометрична оптика

1.10. а) 22,68 мм; б) 13,65 мм; в) 9,06 мм.

1.11. а) 6,36 мм; б) 5,77 мм

1.12.
$$n_2 \mathbf{r}_2 = n_1 \mathbf{r}_0 - \left(n_1 (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{N}) + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 + n_1^2 (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{N})^2} \right) \mathbf{N}$$

1.14. 16,3 см.

1.15. а) 11,4 см; б) 9,13 см.

1.16. $41^\circ 15'$.

1.17. Не може.

1.18.
$$h_{\min} = \frac{a \cos \varphi}{\sin^2 \varphi \left(\frac{1}{\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{\sqrt{n_2^2 - \sin^2 \varphi}} \right)}.$$

1.19. $6^\circ 57' 4''$.

1.20. $-4^\circ 47' 15''$.

1.21. $82^\circ 49' 09''$.

1.22. $8^\circ 32' 40''$.

1.23. $-10^{\circ}08'27''$.

1.24. $\sigma_{0_q} = 30^{\circ}38'07''$; $\sigma_{0_\phi} = 33^{\circ}27'09''$.

1.25. $1^{\circ}12'$.

1.26. 10 см.

1.27. 40 см.

1.28. 60 см.

1.29. а) $f = \frac{\beta L}{1-\beta^2} = 10 \text{ см}$; б) $f = \frac{\beta_1 \beta_2 L}{\beta_2 - \beta_1} = 7.5 \text{ см}$.

1.31. 6 м.

1.32. -20 см ; 3 см .

1.38. 15 см.

1.39. 48 см.

1.40. 2,08 мм/с.

1.41. 3,84 см.

1.42. $n = 2$.

1.43. $-0,75 \text{ дптр}$

1.44. $n = 1,4$.

1.45. $\frac{f_1}{f_2} = \frac{n}{n-1}$.

1.46. Фокусна відстань системи $f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - l}$. Відстань головних площин H та H' системи від першої та другої лінз відповідно дорівнюють: $|O_1 H| = \frac{f_1 l}{l - f_1 - f_2}$, $|O_1 H'| = \frac{f_2 l}{l - f_1 - f_2}$, відповідно.

1.48. $-1,33$ дптр.

1.49. 24 дптр.

1.50. -8 см.

1.51. -14 дптр.

1.52. 20 см.

1.53. 6 .

1.54. 6 мм.

1.55. 100 .

1.56. $\Gamma = 250$; $a = 10,5$ мм

1.57. 2 см.

1.58. 80 .

1.59. $7,5$ мкм.

1.60. Може. Обернене зображення даватиме дво-опукла лінза. Пряме зображення даватиме опукло-увігнута лінза. Товщина таких лінз визначається, з урахуванням правила знаків, як

$$d = \frac{n}{n-1}(R_1 - R_2).$$

Збільшення такої лінзи (з урахуванням правила знаків):

$$\Gamma = \frac{R_1}{R_2}.$$

Для опукло-впуклої лінзи, яка дає пряме зображення, має бути $|R_1| > |R_2|$.

1.61. 12

1.62. 1) до об'єктива на 1 мм; 2) від об'єктива на 9 мм.

1.63. 30,7 см.

1.64. $h = v f'_{\text{об}} \frac{\tau}{\delta} = 2500$ м.

1.65. Підказка: Скористатись співвідношеннями (1.15) або (1.15а). Закріпивши скельця за допомогою каучуку в трубчастому стволі і заповнивши простір між ними водою, можна отримати товсту водяну лінзу, яка слугуватиме зоровою трубою за умови телескопічності $\Phi = 0$, для чого відстань між лінзами має бути

$$d = \frac{n}{n-1}(R_1 - R_2) \approx \frac{4/3}{1/3}(40 - 16) = 96 \text{ см.}$$

Збільшення такої труби

$$\Gamma = \frac{R_1}{R_2} = 2.5$$

1.66. Підказка: Наповнивши пляшку водою і закоркувавши, так щоб не було бульбашки, через циліндричну частину пляшки, яку потрібно тримати паралельно до поверхні землі, сфокусувати сонячне проміння на листку паперу. Така циліндрична лінза дасть зображення у вигляді тонкої смужки сонячного світла на папері в напрямку прямих сонячних променів. За допомогою рулетки знайти радіус пляшки та фокусну відстань f' , яка відраховується від осі пляшки до сфокусованого зображення на папері.

Показник заломлення знайдеться як:

$$n = \frac{2f'}{2f' - R}.$$

Має бути

$$n \approx \frac{4R}{4R - R} = 4/3.$$

Фотометрія

2.6. 1 Вт/кД; 12,1 лм/Вт.

2.7. $\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{1}{1 + k_{\pi} \frac{s - s_1}{s_1}}.$

2.8. 51 мкА.

2.9. Не зміниться.

2.10. 12 с.

2.11. 3,2 лк; 2,4 лк.

2.12. 18,3 м.

2.13. 0,707 м.

2.14. 2 клм; 8 клк; 2,5 ккД/м².

2.15. $E = \pi B.$

2.16. $E = \pi B.$

2.17. $B = \frac{E}{\pi \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 1,5 \text{ ГкД/м}^2.$

2.18. по діагоналі куба; $I_{\max} = \sqrt{3}Ba^2 = 350 \text{ кД}.$

2.19. 1) 63 кД; 2) 30 кД.

$$2.20. E = \frac{I_0 h^2}{(h^2 + r^2)^2} = 1 \text{ лк.}$$

$$2.21. 3 \text{ м.}$$

$$2.22. 97 \text{ лк; } 73 \text{ лк; } 23 \text{ кд/м}^2.$$

$$2.23. 0,02.$$

Дисперсія

$$3.8. \text{ а) } n_e = 1.6169; \text{ б) } \frac{dn}{d\lambda} = -0,1069 \text{ м}^{-1} \text{ в) } u = 1,85 \cdot 10^{10} \text{ см/с,} \\ v = 1,79 \cdot 10^{10} \text{ см/с.}$$

$$3.9. \text{ а) } n_{f'} = 1,5756, n_e = 1,5710, n_{c'} = 1,5665; \text{ б) } \frac{\Delta n}{\Delta \lambda} = 0,055 \text{ м}^{-1} \\ \text{ в) } \frac{\Delta \sigma_0}{\Delta \lambda} = 0,0898 \text{ рад} \cdot \text{м}^{-1}; \text{ г) } A = 1,5551, B = 0,0047 \text{ мкм}^2; \text{ д) } v_e = \\ 1,91 \cot 10^{10} \text{ см/с, } u = 1,87 \cdot 10^{10} \text{ см/с.}$$

$$3.11. \text{ Підказка: Використайте формули (3.5), (3.7) та (3.8).}$$

$$3.12. N = 2 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}.$$

$$3.13. N = 2,4 \cdot 10^7 \text{ см}^{-1}.$$

$$3.14. n - 1 = -5,5 \cdot 10^{-7}$$

$$3.15. v = 0,61c, u = 0,65c.$$

Інтерференція

$$4.8. \text{ а) } 1,2087; 0,227 \text{ мкм; б) } 93,1 \% ; 96,49 \% ; \text{ в) } 3,39 \%.$$

$$4.9. d = 3,1 \text{ мкм, } R = 0,978.$$

4.10. Показник заломлення матеріалу покриття $n_1 = \sqrt{n_2} = 1,265$.
Мінімальна товщина одношарового покриття $d_{\min} = \frac{1}{n_1} \frac{\lambda}{4} = 0,11 \text{ мкм}$.
Коефіцієнт проходження світла без покриття:

$$T_I = (1 - R_{02})^2 = \left[1 - \left(\frac{n_0 - n_2}{n_0 + n_2} \right)^2 \right]^2 \approx 0,896.$$

Коефіцієнт проходження світла з покриттям:

$$T'_I = (1 - R_{01})^2 (1 - R_{12})^2 = \left[1 - \left(\frac{n_0 - n_1}{n_0 + n_1} \right)^2 \right]^2 \left[1 - \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \right]^2 \approx 0,944.$$

Втрати на відбиття складають відповідно:

$$R_I = 1 - T_I = 0,104, \quad R'_I = 1 - T'_I = 0,054,$$

тобто зменшуються майже удвічі.

4.11. $E = 5 \text{ В/м}$; $\omega = \pi \cdot 10^{15} \text{ рад/с}$; $\varphi_0 = 0,205\pi$; $E = 5 \sin(\pi(10^{15}t + 0,205))$.

4.12. Підказки.

1. Скористатися комплексною формою подання E_m при $x = 0$.
2. Скористатися формулами для суми членів скінченної (а) і нескінченної (б) спадаючих геометричних прогресій.
3. Визначити E_{02} множенням комплексної амплітуди на спряжений їй вираз й скористатися формулою Ейлера.

$$\text{а) } E_0 = E_{01} \frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}}, \quad I = I_1 \left(\frac{\sin \frac{N\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} \right)^2; \quad \text{б) } E_0 = E_{01} \frac{1}{2 \sin \frac{\delta}{2}}, \quad I = I_1 \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

4.13. 500 нм.

4.14. 1,000865.

4.15. а) 0,13 мкм; 0,09 мкм; б) не зміниться.

4.16. а) 0,24 мкм; 0,12 мкм; б) 0,12 мкм; 0,24 мкм.

4.17. а) 589 нм; б) 673 нм.

4.18. 3,54 мм.

4.19. 1,56.

4.20. 1,00038.

4.21. а) $r_m^{\text{світлого}} = \sqrt{\frac{R_1 R_2}{n_2(R_1 - R_2)}} (2m - 1) \frac{\lambda}{2}$; б) $r_m^{\text{темного}} = \sqrt{\frac{R_1 R_2}{n_2(R_1 - R_2)}} m \lambda$.

4.23. 0,541 мкм.

4.24. 1,5.

4.25. $\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{1}{980}$; $\Delta \lambda = 6,02 \text{ \AA}$.

4.26. $N = \frac{dD^2}{35nf^2\lambda} = 2$.

4.27. $D_{\min} = \frac{36nf^2\lambda}{D^2} = 0,81 \text{ мм}$.

4.28. $a = \frac{f\lambda}{\Delta x} = 0,06 \text{ мм}$.

4.29. $\frac{\Delta l}{l} = \frac{2ha\sqrt{n^2-1}}{\lambda} = 0,75$.

4.30. Видимим є лише нульовий порядок: спочатку при відбитті від передньої грані при $\Delta x = 0$, потім від задньої грані при $\Delta x = 2dn = 2 \text{ см}$. Наступні порядки інтерференції — спадаючої інтенсивності.

4.31. $V = \frac{\sin \frac{\pi bd}{\lambda l}}{\frac{\pi bd}{\lambda l}}$.

4.32. $D \approx \frac{\lambda}{\alpha} = 0,05 \text{ мм.}$

4.33. $l \frac{fD\alpha}{\lambda} \approx 100 \text{ см.}$

4.34. $m = \frac{\Delta}{\lambda} \approx 360$ (де $\Delta = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}$ — різниця ходу променів), кут сходження променів в силу симетрії приблизно дорівнює апертурі інтерференції:

$$\Omega = \frac{L}{h} \operatorname{tg} \psi \cos^2 \varphi = 2 \cdot 10^{-4},$$

де ψ — кут заломлення, ширина інтерференційних смуг, $\Delta \approx \frac{\lambda}{\omega} = 2,8 \text{ см}$, граничний розмір джерела $b \approx \Delta \approx 2,8 \text{ см}$. Допустима немонохроматичність $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} = 1,6 \text{ нм}$.

4.35. $m_{\max} \approx 1000$, $m_{\min} \approx 720$. $\Delta\lambda \leq 0,5 \text{ нм}$. Джерело світла може мати будь-які розміри.

4.36. 1) $\Delta x \approx 10^{-3} \text{ см}$; 2) $|x| \leq 0,25 \text{ см}$ (область локалізації смуг); 3) $m_{\max} = 250$, $m_{\min} = 0$, $N \approx 500$, 4) $\Delta\lambda = 20 \text{ Å}$; 5) $b \leq 10^{-3} \text{ см}$.

4.37. 1) $L = \frac{D}{4\theta(n-1)} = 1 \text{ м}$; 2) $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m_{\max}} = 5 \text{ нм}$, де $m_{\max} = 100$; 3) $\psi \leq \frac{2\lambda}{D} = 5 \cdot 10^{-5} = 0,18''$.

4.38. 1) $L = \frac{D-a}{2\alpha}$, де $\alpha = \frac{a}{f} = 10^{-2}$, $\Delta x = \frac{\lambda}{\alpha} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ см}$, $N = 200$; 2) $m_{\max} = 100$, $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m_{\max}} = 5 \text{ нм}$; 3) $b \leq \frac{2\lambda f}{D-a} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ см}$.

4.39. $V(L) = \left| \frac{\sin(0,1\pi L)}{0,1\pi L} \right|$, смуги розмиваються при $L = 10m \text{ см}$, де $m = 1, 2, 3, \dots$

4.40. а) В центрі кілець максимальний порядок інтерференції. Із збільшенням номеру k порядок їх інтерференції m зменшується $\frac{dk}{dm} < 0$.
б) кутова відстань між кільцями зменшується із зменшенням порядку

інтерференції $\frac{\Delta \varepsilon'_2}{dm} > 0$.

Дифракція

5.7. а) 1 мм; б) 0,71 мм.

5.8.

m	1	2	3	4	5	6	7	8
b_m , см	200	100	66	50	40	33	28,6	25
I_m	I_0	0	I_0	0	I_0	0	I_0	0

5.9. 15 см.

5.10. 1) $9/16 \cdot I_0$; 2) $1/4 \cdot I_0$; 3) $1/16 \cdot I_0$; 4) $1/4 \cdot I_0$; 5) $25/16 \cdot I_0$; 6) $9/4 \cdot I_0$; 7) $49/16 \cdot I_0$; 8) $9/4 \cdot I_0$.

5.11. 1) $I = 0$ 2) $I = 1/4 \cdot I_0$.

5.12. $I = 0$.

5.13. Інтенсивність збільшиться в 5 разів.

5.14. Електричне поле в діелектрику максимальне на осі пучка на такій відстані від поверхні, з якої діаметр пучка сприймається як діаметр першої зони Френеля.

$$b = \frac{D^2 n}{4\lambda} = 100 \text{ см},$$

$$E = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{8\pi S}{c}} = 1200 \frac{\text{В}}{\text{см}}.$$

5.15. а) $f' = 90$ см; б) $r_1 = 0,672$ мм; в) $f' = 119,7$ мм.

5.16.

$$f_{\max} = \frac{r_1^2}{\lambda} = 8 \text{ м}; \quad h = \frac{2m+1}{d2(n-1)}\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad I_{\max} = 36I_0.$$

5.17.

$$r_m = \sqrt{\frac{m\lambda}{\left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{R}\right|}}.$$

5.18. а) $m_1 = 40$; б) $\delta l_0 = 5$ см.**5.19.** $d^{-1} = 500$ мм⁻¹; $\lambda_2 = 0,4099$ мкм.**5.20.** $d = 5,013 \cdot 10^{-4}$ см; $\lambda_2 = 0,706$ мкм.**5.21.** а) Ні; б) Так**5.22.** 22,2 мкм.**5.23.** $h = \frac{2m-1}{2(n-1)}\lambda$, $m = 1, 2, 3, \dots$. Інтенсивність нульового головного максимуму дорівнює нулю.**5.24.** $I = I_0 \left(\frac{\sin(kNa \sin \frac{\theta}{2})}{\sin(ka \sin \frac{\theta}{2})} \right)^2 \left(\frac{\sin k \frac{\Delta}{2}}{k \frac{\Delta}{2}} \right)^2$, де $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\Delta = h(n-1) - a \sin \theta$.Напрямки на головні максимуми визначаються формулою: $\sin \theta_{\min} = \frac{m\lambda}{a}$.**5.25.** Роздільна здатність не зміниться, дисперсійна область зменшиться вдвічі.**5.26.** Для ока 4,5 км; для труби — 56,5 км.**5.27.** $l = 52$ м; $\varphi_d = 0,055''$.**5.28.** $\ell_{\min} \approx 1$ м.**5.29.** $\frac{D^2}{f^2} \geq z^2 \lambda^2 \approx 0,25$.

$$5.30. \Gamma \geq \frac{D}{d}.$$

$$5.31. \Gamma 2n \frac{L}{d} \sin u.$$

$$5.32. L \approx \frac{D^2}{2,44\lambda} \approx 1000 \text{ км}; S = \left(2,44 \frac{\lambda}{D}\right)^2 = 1,5 \cdot 10^{-12}.$$

$$5.33. L_{\max} \approx 70 \text{ км}.$$

$$5.34. T \approx 1,5\%.$$

$$5.35. R_{\Gamma\Gamma} = 2 \cdot 10^5.$$

$$5.36. R_{\max} \approx \frac{fD}{\lambda d} = 5 \cdot 10^5.$$

$$5.37. \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda^2}{h(n-1)} = 0,5 \text{ нм}; R = mN = 10^4.$$

$$5.38. 0,28 \text{ нм}.$$

$$5.39. 31 \text{ пм}.$$

$$5.40. 506 \text{ пм}.$$

Поляризація та оптична анізотропія

$$6.15. \text{ а) } R = 0,0502; P_R = 0,8308; P_D = 0,0439; \text{ б) } 6,25\%; 76,96\%; 5,13\%; \\ \text{ в) } 8,32\%; 74,65\%; 6,78\%.$$

$$6.16. 36^\circ 56' 20''; 4,01\%.$$

$$6.17. \text{ а) } \varepsilon_B = 56^\circ 18' 38''; R = 7,39\%; P_D = 7,98\%; \text{ б) } \varepsilon_B = 58^\circ 18' 49''; \\ R = 10,04\%; R_D = 11,16\%; \text{ в) } \varepsilon_B = 59^\circ 58' 14''; R = 12,45\%; R_D = 14,23\%.$$

6.18. $61^{\circ}12'$.

6.19. 32° .

6.20. 1,52.

6.21. а) 106° ; б) 156° ; в) 100° .

6.22. В 3,3 рази.

6.23. $23,6 \text{ ккД/м}^2$.

6.24. $P_R = 1$; $P_D = 9,05\%$.

6.25. а) 1,63; б) $\varepsilon_{\text{пр}} = \arcsin(\text{tg}42^{\circ}37') = 66^{\circ}56'18''$.

6.26. $\theta = 2(90 - \varepsilon_B) = 67^{\circ}22'48''$.

6.27. $\theta = 60^{\circ}03'32''$; $\sigma_A = 59^{\circ}52'56''$.

6.28. а) 0,047; б) 0,333; в) 0,500; г) 0,714; д) 0,833.

6.29. Світло повинно бути лінійно поляризованим у площині падіння та на гранях призми повинно бути $R_{\parallel} = 0$. Звідси випливає, що показник заломлення скла призми повинен бути $n = 1,732$.

6.30. $\varepsilon_B = 58^{\circ}46'54''$; $\frac{I_{\Pi}}{I_{\text{пр}}} = 0,107$; $\varphi = 35^{\circ}15'52''$.

6.31. а) Зменшиться у 1,5 рази; б) $69^{\circ}17'43''$.

6.32. $I = I_0 \cos^2 \alpha \cos^2(\alpha_2 - \alpha_1)$; а) $66,22 \text{ Вт/м}^2$; б) $50,0 \text{ Вт/м}^2$; в) $46,65 \text{ Вт/м}^2$.

6.33. а) $\lambda_o = 355,2$ нм; $\lambda_e = 396,4$ нм; $v_o = 1,809 \cdot 10^{10}$ см/с; $v_e = 2,019 \cdot 10^{10}$ см/с; б) $\lambda_o = 382,5$ нм; $\lambda_e = 380$ нм; $v_o = 1,948 \cdot 10^{10}$ см/с; $v_e = 1,935 \cdot 10^{10}$ см/с;

6.34. а) З обох призм виходить незвичайний промінь, з першої — поляризований горизонтально, з другої — вертикально; б) друга призма пропускає у 1,41 рази більше світла; в) $\frac{1}{n_o} < \sin \alpha < \frac{1}{n_e}$; $37^\circ 05' 41'' < \alpha < 42^\circ 17' 42''$.

6.35. $\varphi = 2(n_o - n_e)tg\alpha = 5^\circ 17'$.

6.36. а) $I = I_0(1 + 2 \sin 2\alpha \sin \delta)$; б) кварц — додатній кристал ($\delta > 0$); при $\alpha_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I_{\max}$, при $\alpha_2 = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow I_{\min}$.

6.37. $I = 2I_0(1 + \cos \delta)$; $m = d_{\max} \frac{n_e - n_o}{\lambda}$; а) 10; б) 172.

6.38. $\approx 0,07$ мм.

6.39. а) $F = \frac{\lambda a}{4k} = 31,25$ Н; б) $\frac{I_{\perp}}{I_{\text{пр}}} = 25\%$.

6.40. а) $\frac{I_{\perp}}{I_{\text{пр}}} = 0$; б) $\frac{I_{\parallel}}{I_{\text{пр}}} = 50\%$.

6.41. $(n_e - n_o)' = B\lambda E^2 = 0,12 \cdot 10^{-6}$; $\delta = 2\pi B d E^2 = 2,85^\circ$.

6.42. $d = 133,6$ мм.

6.43. а) $\delta = 2\pi c d H^2 = 3^\circ 50' 28''$; б) $\frac{I_H}{I_{\text{пр}}} = 49\%$.

6.44. а) $d = 4,5$ мм; б) $d = 1,76$ мм; в) $d = 9$ мм.

6.45. а) $d = 9$ мм; б) $d = 2,73$ мм; в) $d = 4,5$ мм.

6.46. а) $\psi = VdH = 7^\circ 14' 42''$; б) $\frac{I_{\perp}}{I_{\text{пр}}} = 2\%$.

6.47. а) $V = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2dH} = 3,246 \cdot 10^{-3} \text{ кут.хв./А}$; б) $\psi = 45^\circ$; в) $H = 2,772 \cdot 10^6 \text{ А/м}$.

6.48. $E_{\min} = \frac{1}{\sqrt{R\lambda B}} \approx 2,88 \text{ од. СГСЕ} \approx 900 \text{ В/см}$.

6.49. $\sqrt{2}/2$.

6.50. $I = 3I_0$.

6.51. $I = 5I_0$.

6.52. а) Інтенсивність світла збільшиться у 25 разів; 2) Інтенсивність світла збільшиться у 9 разів.

6.53. $I = 2I_0$.

6.54. $I(\theta) = 3I_0 \left[1 + \frac{2}{3} \cos \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \sin \theta \right) \right]$, звідки $V = \frac{2}{3}$; $\Lambda = \frac{\lambda f}{2d} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ см}$.

6.55. Повна різниця фаз світла, що приходить у максимум m -го між двома взаємно перпендикулярними коливаннями

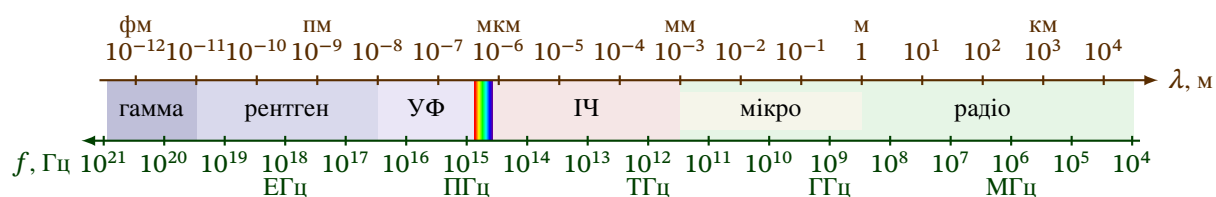
$$\Delta\varphi_m = \frac{\pi}{2}(m + 1).$$

При $m = 0$, $\Delta\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ — кругова поляризація зі збереженням обертання світла, що падає; при $m = \pm 1$, $\Delta\varphi_1 = \pi$; $\Delta\varphi_{-1} = 0$ — лінійно поляризоване світло; при $m = \pm 2$ — кругова поляризація з протилежним по відношенню до падаючого світла обертанням. У загальному випадку: у непарних максимумах світло лінійно поляризоване; при $m = 0, \pm 4, \pm 8, \dots$ кругова поляризація зі збереженням напряму обертання; при $m = 2, \pm 6, \pm 10, \dots$ кругова поляризація зі зворотнім обертанням.

6.56. Зменшиться вдвічі, незалежно від поляризації світла, що падає.

А

Шкала електромагнітних хвиль



Таблиця А.1. Довжини хвиль кольорів, які сприймає око людини

Колір	Діапазон довжин хвиль, мкм
Червоний	$0,647 < \lambda < 0,780$
Помаранчевий	$0,585 < \lambda < 0,647$
Жовтий	$0,575 < \lambda < 0,585$
Жовто-зелений	$0,527 < \lambda < 0,575$
Зелений	$0,517 < \lambda < 0,527$
Синьо-зелений	$0,486 < \lambda < 0,527$
Синій	$0,424 < \lambda < 0,486$
Фіолетовий	$0,380 < \lambda < 0,424$

Б**Математичні формули та співвідношення****Б.1 Тілесний кут**

Тілесний кут — це відношення площі сфери, що перетинається конусом до квадрату її радіусу.

Елемент тілесного кута визначається як:

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} \quad (\text{Б.1})$$

де dS — елемент площі поверхні сфери радіуса r (рис. Б.1).

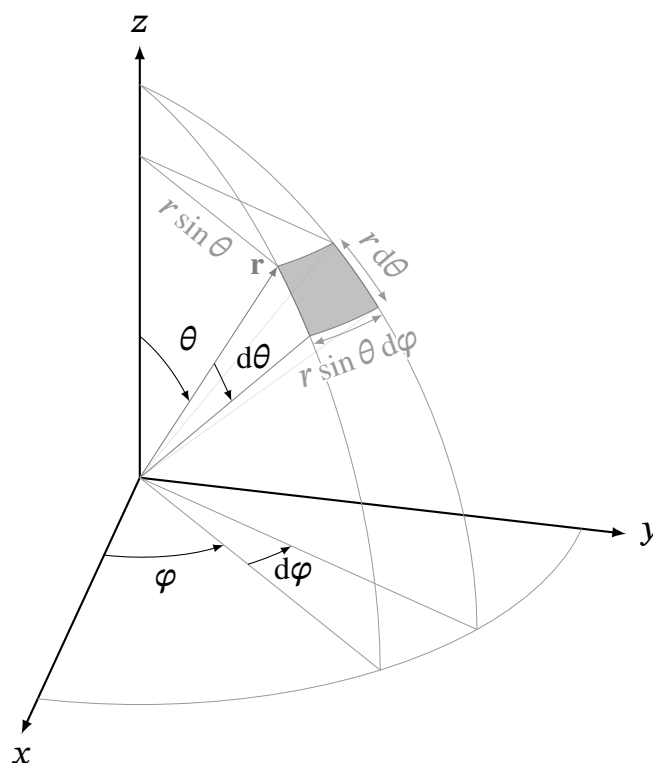


Рис. Б.1. Тілесний кут

Елемент тілесного кута в сферичній системі координат

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi \quad (\text{Б.2})$$

В

Фотометричні дані

Таблиця В.1. Сили світла деяких джерел

Джерело	Сила світла, кд
Сонце	$3 \cdot 10^{27}$
Повний місяць	$1,4 \cdot 10^8$
Портативний лазер	5 – 500
Морський маяк	$10^5 - 10^7$
Лампи розжарення	5 – 500
Свічка	0.5 – 2

Таблиця В.2. Освітленості від деяких джерел

Джерело	Освітленість, лк
Світло Сіріуса, найяскравішої зірки нічного неба	10^{-5}
Поверхня Землі під прямими сонячними променями	32000 – 10000
Безмісячне зоряне небо зі світінням	0.002
Чверть Місяця	0.01
Повний місяць у ясну ніч	0.27 – 1.0
Повний місяць в тропіках	1
У морі на глибині ≈ 50 м	до 20
Житлова кімната	50
Дуже темний похмурий день	100
Офісне освітлення	320 – 500

Таблиця В.3. Яскравість деяких випромінювачів

Джерело	Яскравість, кд/м ²
Сонце	$1,5 - 10^8$
Нічне небо за відсутності Місяця	10
Вольфрамова нитка лампи розжарювання	$(1,5 - 2) \cdot 10^6$
Поверхня Місяця	$2,5 \cdot 10^3$
Екран кінотеатру	5 – 20
Аркуш білого паперу за освітленості 30 – 50 лк	10 – 15
сніг під прямими сонячними променями	$3 \cdot 10^4$

Таблиця Г.1. Деякі фізичні константи в системі СГС

Константа	Символ	Значення
Швидкість світла у вакуумі	c	$2.99792458 \cdot 10^{10}$ см/с
Гравітаційна стала	G	$6.67428 \cdot 10^{-8}$ см ³ /(г·с ²)
Стала Планка	\hbar	$1.0545716 \cdot 10^{-27}$ ерг·с
Елементарний заряд	e	$4.80320427 \cdot 10^{-10}$ СГСЕ _q ⁴ $1.60217662 \cdot 10^{-19}$ Кл (в SI)
Маса електрона	m_e	$9.10938215 \cdot 10^{-20}$ г
Енергія спокою електрона	$m_e c^2$	$0.511 \cdot 10^6$ еВ
Маса протона	m_p	$1.6726219 \cdot 10^{-30}$ г
Енергія спокою протона	$m_p c^2$	$938.26 \cdot 10^6$ еВ
Електрон-Вольт	еВ	$1.602 \cdot 10^{-12}$ ерг
Борівський радіус	a_0	$5.2917720859 \cdot 10^{-9}$ см
Магнетон Бора	μ_B	$9.27400915 \cdot 10^{-21}$ ерг/Гс
Стала Больцмана	k	$1.3806504 \cdot 10^{-16}$ ерг/К
Універсальна газова стала	R	$8.314 \cdot 10^7$ ерг/(К·моль)
Число Авогадро	N_A	$6.022 \cdot 10^{23}$ моль ⁻¹
Атомна одиниця маси	u	1.6604210^{-24} г

⁴Міжнародна назва цієї одиниці — Франклін (позначення: Fr, Фр). У радянській і сучасній вітчизняній літературі зазвичай називається просто СГСЕ-од. заряду. Франклін є однією з чотирьох основних одиниць системи Гауса (поряд з сантиметром, грамом і секундою).

Література

Підручники та посібники

1. *Born M., Wolf E.* Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. — 7th ed. — CUP, 1999. — 952 p. — ISBN 0-521-64222-1.
2. *Колобродов В. Г.* Хвильова оптика. Частина 1. Електромагнітна теорія світла та інтерференція. Підручник. — К. : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. — 208 с.
3. *Колобродов В. Г.* Хвильова оптика. Частина 2. Дифракція і поляризація світла. Підручник. — К. : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. — 230 с.
4. *Чиж І. Г.* Теорія оптичних систем. Підручник. — К. : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. — 426 с.

Задачники

5. *Іванова В. В.* Задачі з загальної фізики. Оптика. Навчальний посібник. — НТУУ «КПІ», 2012. — 142 с.

Іванова Віта Вікторівна
Пономаренко Сергій Миколайович

Оптика
Практичний курс

Комп'ютерне верстання в системі \LaTeX 2_ε С. М. Пономаренко

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Свідоцтво про державну реєстрацію: серія ДК № 5354 від 25.05.2017 р.
просп. Перемоги, 37, м. Київ, 03056