# Разбор задач вступительной ЛКЛ-2016, параллель D

Отметим, что стандартным требованием при оформлении математических задач является предъявление решения - ответ на задачу не так полезен, если нет способа обосновать его правильность. Исключением не была и наша вступительная, полный балл за задачу можно было получить, только написав решение - сам ответ дает только часть баллов, и это только в том случае, если ответ правильный.

Даже если у вас не получается придумать идеально строгого решения, стоит пытаться записать свои мысли и идеи, ход решения задачи, то, как вы получили результат. Несколько строк пояснений могут принести вам большее количество баллов, чем просто ответ.

Если ваше решение отличается от предложенных в разборе, не беспокойтесь. Это не значит, что оно не будет засчитано или наберет меньше баллов - учитывается только корректность вашего решения.

Список задач:

## 1. Тайное голосование

Разумеется, тематическая анкета и вступительная работа - это очень важно. Но даже успешное прохождение этих двух этапов не гарантирует поступления в ЛКЛ. Решение о принятии в лагерь в каждом конкретном случае принимается на тайном голосовании: двадцать преподавателей собираются в полнолуние и, как только часы пробьют двенадцать, тайно голосуют. По крайней мере, так сказали Аристарху.

Кроме того, ему сообщили, что, к величайшему сожалению, с перевесом в три голоса было принято решение отклонить его заявку. Хорошо, что Аристарх сразу догадался, что это всего лишь очередная проверка на его пути к ЛКЛ.

А сможете ли вы определить, где здесь кроется подвох?

Решение:

Общее количество преподавателей - 20 человек. Обозначим за **t** количество человек, проголосовавших за принятие Аристарха в лагерь. Значит, число человек, проголосовавших против, равно **(20 - t)**.

Запишем уравнение, выражающее перевес в голосовании (против проголосовало на 3 человека больше, чем за): **(20 - t) - t = 3.**

Преобразуем уравнение: **2t = 20 - 3.**

Получаем, что **2t = 17**, то есть **t = 8.5.**

Но **t**, количество человек, проголосовавших “за”, должно быть целым числом. Следовательно, Аристарх прав, и ситуации, описанной в условии, быть не могло.

## 2. Непростой выбор

Успешно преодолев все испытания, Иннокентий, Аристарх и Родион поступили в ЛКЛ и решили отметить это событие покупкой мороженого. Но, как оказалось, самое сложное было впереди. В магазине неподалеку в наличии оказалось пять различных видов: фруктовый лед, пломбир, шоколадное, малиново-клубничное и эскимо.

Каждый из друзей хочет быть оригинальным и не таким как все, поэтому они собираются купить по одному мороженому каждому так, чтобы их виды были различны. Аристарх терпеть не может фрукты и ягоды, Родиону не нравится мороженое на палочке, а у Иннокентия аллергия на шоколад.

Ребята будут спорить еще долго, если вы не поможете им подсчитать, сколькими различными способами они могут купить мороженое (два способа считаются различными, если отличается вид мороженого хотя бы у одного из трех мальчиков).

Решение:

Эту задачу можно решить перебором всех возможных вариантов покупки мороженого. Составим таблицу с указанием того, кто какое мороженое не ест.

| | фруктовый лед | пломбир | шоколадное | малиново-клубничное | эскимо |
|---|---|---|---|---|---|
| Аристарх | x | | | x | |
| Иннокентий | | | x | | x |
| Родион | x | | | | x |

Чтобы не запутаться, будем сначала перебирать выбор Аристарха, затем Иннокентия, а после этого - смотреть на количество возможных вариантов для Родиона.

В этом нам тоже поможет таблица. Выбор одним из ребят определенного вида мороженого влечет за собой невозможность выбора этого же вида мороженого для остальных. Обозначим выбор мороженого за о, а в остальных клетках этой строки и в остальных строках этого столбца проставим х.

В приведенном решении таблица заполняется только после выбора Аристарха, этого вполне достаточно, чтобы разобраться с дальнейшим подсчетом вариантов.

Пусть Аристарх выбрал пломбир.

Тогда Иннокентий может взять себе фруктовый лед (Родиону останется два варианта - шоколадное или малиново-клубничное) или малиново-клубничное (Родион может взять только шоколадное - один вариант выбора).

Получаем три способа, при условии, что Аристарх выбирает пломбир.

| | фруктовый лед | пломбир | шоколадное | малиново-клубничное | эскимо |
|---|---|---|---|---|---|
| Аристарх | x | о | x | x | x |
| Иннокентий | | x | x | | x |
| Родион | x | x | | | x |

Аналогично рассмотрим случай выбора Аристархом шоколадного мороженого.

Если Иннокентий возьмет фруктовый лед, Родион может взять либо пломбир, либо малиново-клубничное - два варианта.

Если Иннокентий возьмет пломбир, Родион может взять только малиново-клубничное. Если Иннокентий выберет малиново-клубничное, то Родион будет вынужден купить пломбир. Это еще два варианта.

В сумме - четыре возможных способа покупки мороженого, если предположить, что Аристарх купил шоколадное.

| | фруктовый лед | пломбир | шоколадное | малиново-клубничное | эскимо |
|---|---|---|---|---|---|
| Аристарх | x | x | o | x | x |
| Иннокентий | | | x | | x |
| Родион | x | | x | | x |

Остается случай, когда Аристарх выбирает эскимо.

Если Иннокентий возьмет фруктовый лед, Родион может взять либо пломбир, либо малиново-клубничное, либо шоколадное - три варианта.

Если Иннокентий возьмет пломбир, Родион может взять шоколадное или малиново-клубничное - два варианта.

Если Иннокентий выберет малиново-клубничное, то Родиону вновь остается выбор между двумя вариантами: пломбиром и шоколадным мороженым.

Итого - семь способов покупки мороженого, в случае, если Аристарх покупает эскимо.

| | фруктовый лед | пломбир | шоколадное | малиново-клубничное | эскимо |
|---|---|---|---|---|---|
| Аристарх | x | x | x | x | o |
| Иннокентий | | | x | | x |
| Родион | x | | | | x |

Для того, чтобы получить итоговый ответ, нужно просуммировать количества вариантов для каждого из трех разобранных случаев (все они отличаются хотя бы выбором Аристарха).

Таким, образом, всего существует 3 + 4 + 7 = **14** возможных способов купить мороженое.

## 3. Призраки прошлого

Уже на кассе Родион вспомнил, что с деньгами, которыми он собирается расплатиться за мороженое, не все чисто. А именно, в одном из его пяти карманов находятся фальшивые монеты, оставшиеся от бурного пиратского прошлого. К несчастью, Родион не помнит, в каком именно кармане они лежат, но абсолютно уверен, что они легче настоящих (9 и 10 грамм соответственно).

Родиону очень не хотелось бы случайно нарушить закон, использовав при оплате не те монеты. Так как продавец тоже заинтересован в торжестве справедливости, он позволил Родиону один раз воспользоваться своими новыми электронными весами, отображающими вес на электронном табло абсолютно точно.

Помогите Родиону определить за одно взвешивание, в каком из карманов лежат неправильные монеты. При решении задачи считайте, что в каждом кармане находится бесконечно много монет.

Решение:

Распространенной ошибкой было поочередно добавлять по одной монете из каждого кармана и смотреть, когда общий вес монет на весах увеличится не на 10, а на 9 грамм. К сожалению, это не одно взвешивание, как того требовало условие, а несколько (столько, сколько раз весы поменяют свое значение).

Правильным решением будет, например, взять одну монету из первого кармана, две из второго, три из третьего и так далее, а затем взвесить их все вместе. Так как фальшивые монеты лежат только в одном кармане и весят меньше настоящих на один грамм, а количество монет, взятых из каждого кармана разное и соответствует номеру кармана, то мы без труда определим, где же лежат фальшивые монеты.

Выведем зависимость итогового веса от номера кармана с фальшивыми монетами.

Если фальшивые монеты лежат в **k**-м кармане **(k = 1, 2, 3, 4, 5)**, то вес монет, взятых по описанной выше схеме, составит: $\mathbf{v = 10 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) - (10 \cdot k) + (9 \cdot k)}$ (в общем весе правильных монет заменяем вес правильных монет из **k** кармана весом фальшивых)

Преобразуем полученное соотношение: $\mathbf{v = 150 - (10 - 9) \cdot k}$.

Получаем, что итоговый вес составляет $\mathbf{v = 150 - k}$ грамм, где **k** - номер кармана с фальшивыми монетами.

Именно итоговый вес монет **v** мы не можем подсчитать, так как не знаем номер кармана с фальшивыми монетами. И для того, чтобы определить **v**, будем вынуждены воспользоваться весами.

Вес монет, если бы все они были настоящими, можно определить и без помощи весов:
**10 · (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 150 грамм**.

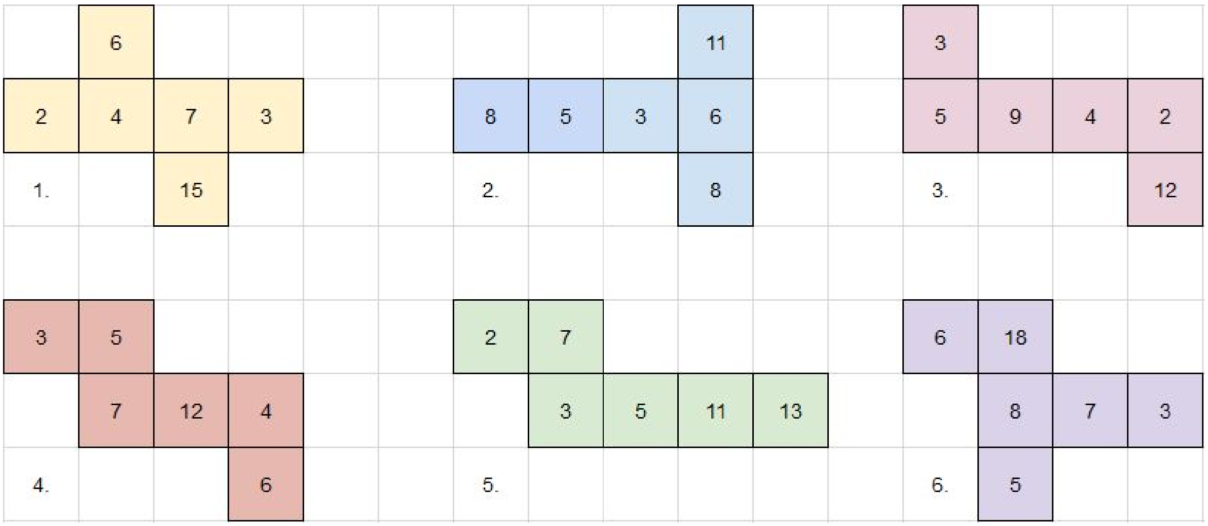
Чтобы найти номер кармана с фальшивыми монетами, остается посмотреть, насколько реальный вес **v** отличается от веса того же количества настоящих монет (**150 грамм**). Поскольку реальный вес равен **150 - k** грамм, мы сможем однозначно определить по нему номер искомого кармана **k**.

## 4. Счастливые кирпичи

Иннокентий немного суеверен. Нет, он не верит во всякую ерунду (например, что если подготовиться, то лучше напишешь контрольную), но Иннокентий никогда не выходит из дома без счастливого кирпича, подходящего под сегодняшний гороскоп.

Этим утром по радио объявили, что взаимно простые числа притягивают удачу. Помогите Иннокентию выбрать такой кирпич, что числа на его противоположных гранях взаимно просты (то есть оба числа делятся одновременно только на 1).

Кирпичи Иннокентия имеют форму куба и содержат числа на гранях.Так как кирпичи довольно тяжелые и очень дороги Иннокентию, вместо оригиналов к заданию приложены их развертки.




Решение:

В качестве решения выпишем пары чисел, записанных на противоположных гранях куба, для каждой развертки (красным выделены пары чисел, не являющиеся взаимно простыми).

1: 2-7 4-3 6-15
2: 8-3 5-6 11-8
3: 5-4 9-2 12-3
4: 7-4 5-6 12-3
5: данная развертка не является разверткой куба
6: 8-3 6-7 18-5

Получается, что под требования Иннокентия подходят две развертки: номер 2 и номер 6.

## 5. Задача про котяток

Не так давно британские ученые выяснили, что некоторые котятки жаждут захватить власть на нашей планете. Чтобы обезопасить человечество, британские ученые выложили статью, содержащую список признаков, встречающихся только у злых котяток:

- обладает способностью пускать лазерные лучи из глаз
- громкость мурчания превышает 140 дБ
- ест чаще десяти раз в день

Кроме того, достоверно известно о существовании добрых котят: если котенок спит больше 16 часов в день или любит купаться, то он просто не может быть злым.

В ответ на эту публикацию последовало множество писем. К сожалению, к этому времени все британские ученые оказались порабощены своими питомцами. Напоследок они успели выяснить, что все британские котятки злые, как и котята, обладающие голубыми глазами и милыми мордочками.

<u>Решение:</u>

Из прочитанного текста следует:

1) если котенок обладает хотя бы одним из пяти признаков, то он точно злой.
   a) способность пускать лазерные лучи из глаз
   b) громкость мурчания выше 140 дБ
   c) ест чаще десяти раз в день
   d) британская порода
   e) наличие голубых глаз и милой мордочки
2) существуют и злые, и добрые котята.
3) если котенок обладает хотя бы одним из двух признаков, то он точно добрый.
   a) спит больше 16 часов в день
   b) любит купаться

Причем пункты 1 и 3 являются взаимоисключающими (котенок может быть либо добрым, либо злым).

Получаем, что ответы на вопросы должны быть следующие:

1. Правда ли, что все котятки злые?
   *нет (см. пункт 2)*
2. Когти моего котенка прорезают железную дверь насквозь, а еще у него милая мордочка, злой ли он?
   *неизвестно (котенок не обладает ни одним из признаков пунктов 1 и 3)*
3. Умеют ли котята, спящие по 20 часов в день, пускать из глаз лазерные лучи?
   *нет, не умеют (из пункта 3, такой котенок должен быть добрым, но из способности пускать лазерные лучи из глаз, по пункту 1, следовало бы, что он злой)*
4. Если у котенка голубые глаза и милая мордочка, любит ли он купаться?
   *нет, не любит (из пункта 1, такой котенок должен быть злым, но из любви к купанию, по пункту 3, следовало бы, что он добрый)*
5. Может ли британский котенок быть добрым?
   *нет (по пункту 1 он точно злой)*

6. Котенок моего соседа очень любит купаться, но ест двенадцать раз в день, злой этот котенок или нет?
   *противоречие (котенок одновременно обладает качествами злого и доброго котенка)*

## 6. Клуб любителей натуральных чисел

Многие преподаватели ЛКЛ учатся в университете, а на досуге развлекаются с натуральными числами. Они даже организовали специальный клуб и в скором времени планируют большую вечеринку.

Хорошая новость - вы тоже приглашены! Ну почти. Все, что нужно, чтобы попасть на заветный праздник - это разгадать секретный пароль. Пароль состоит из 5 двузначных чисел. Каждое число представляет собой количество двузначных натуральных чисел, которые:

1. делятся одновременно на 2 и на 3
2. не делятся ни на 2, ни на 3
3. делятся на 2, но не делятся на 3
4. делятся на 3, но не делятся на 2
5. делятся на 3, или на 2 (хотя бы на одно из этих двух чисел)

В качестве ответа предоставьте искомый пароль.

<u>Решение:</u>

Будем пользоваться следующим наблюдением: среди первых k натуральных чисел на заданное число d делятся ровно k / d (округленное вниз) чисел, так как, если выписать все натуральные числа по возрастанию в ряд, делиться на d будет каждое d-е из них.

И заметим, что множество двузначных чисел это первые 99 натуральных чисел без первых девяти натуральных чисел.

Поэтому всего их 99 - 9 = **90**.

Определим количество двузначных чисел

- делящихся на 2: 99 / 2 - 9 / 2 = 49 - 4 = **45**
- делящихся на 3: 99 / 3 - 9 / 3 = 33 - 3 = **30**

Теперь вычислим числа, используемые в пароле.

1. Делятся и на 2, и на 3

   Числа, которые делятся и на 3, и на 2, делятся на 6. Количество таких двузначных чисел:
   99 / 6 - 9 / 6 = **15**

2. Не делятся ни на 2, ни на 3

   Из общего количества двузначных чисел вычтем те, которые делятся на 2, на 3 и прибавим пересечение (числа кратные 6), так как его мы вычли 2 раза (когда вычитали числа, кратные 2 и когда вычитали числа, кратные 3).

   90 - 45 - 30 + 15 = **30**

3. Делятся на 2, но не делятся на 3

   Из количества чисел, кратных 2, вычтем количество чисел, делящихся и на 2, и на 3.
   45 - 15 = **30**

4. Делятся на 3, но не делятся на 2

   Из количества чисел, кратных 3, вычтем количество чисел, делящихся и на 2, и на 3.

30 - 15 = **15**

5. Делятся на 3, или на 2

Из общего количества двузначных чисел вычтем те, которые не делятся ни на 3, ни на 2 (последнюю величину мы уже вычисляли в пункте 2).

90 - 30 = **60**

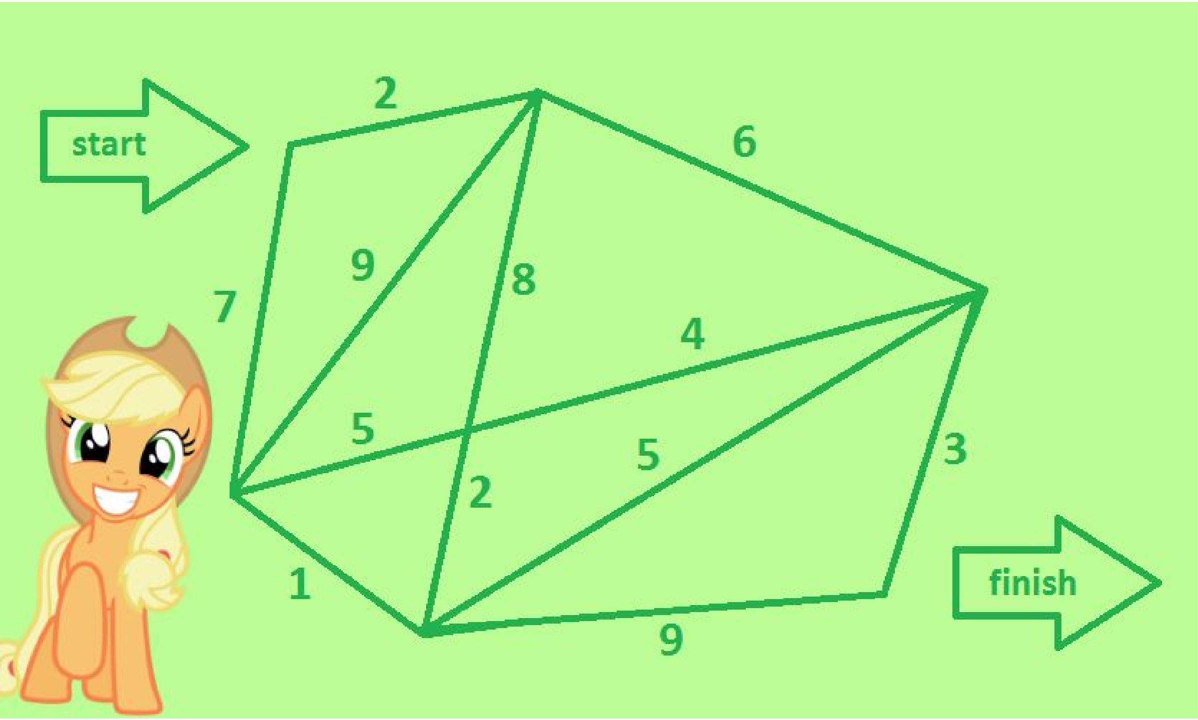
Искомый пароль: **15 30 30 15 60**.

## 7. Пони и пробежки

В этом году пони Эпл Джек решила начать бегать по утрам в ближайшем парке. За столь малый срок она еще не успела придумать оптимальный маршрут и, поэтому, нуждается в вашей помощи.

Перед вами карта парка. Отрезками обозначены парковые дорожки. Числа рядом с отрезками - это количество скамеек, расположенных по бокам от дорожек. Так как скамейки обладают совершенно магическим притяжением и очень мешают пробежке, то маршрут должен содержать как можно меньшее суммарное количество скамеек.

Помогите Эпл Джек подобрать оптимальный маршрут.




Решение:

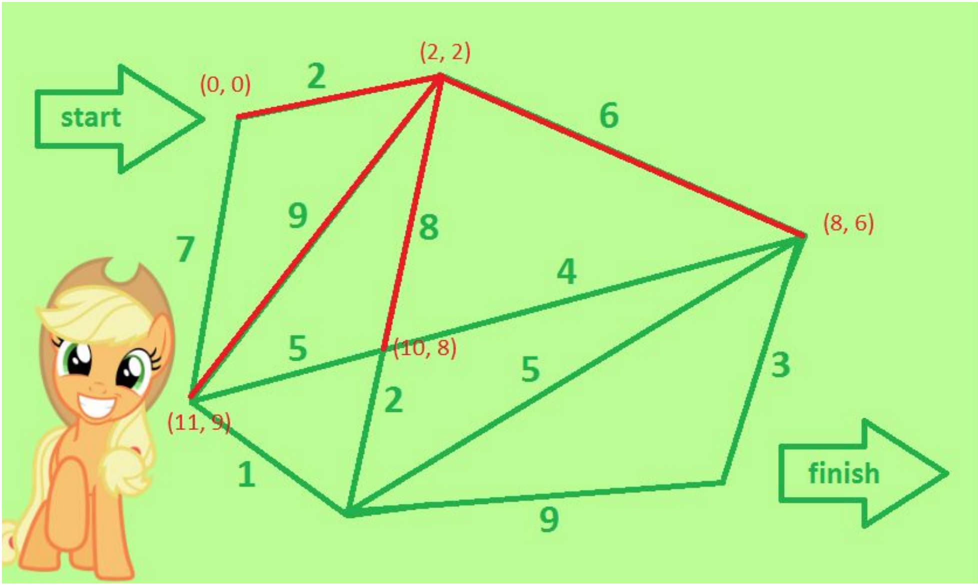
Правильный ответ: Эпл Джек должна бегать по трем верхним дорожкам с количеством скамеек **2**, **6** и **3** соответственно.

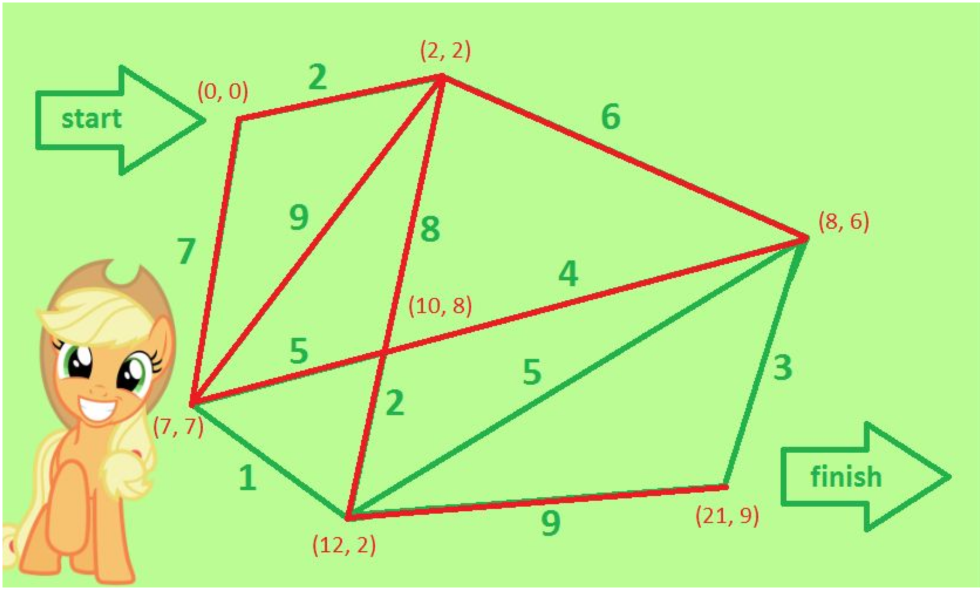
Ниже мы докажем, что этот путь действительно содержит минимально возможное количество скамеек на пути от старта до финиша.

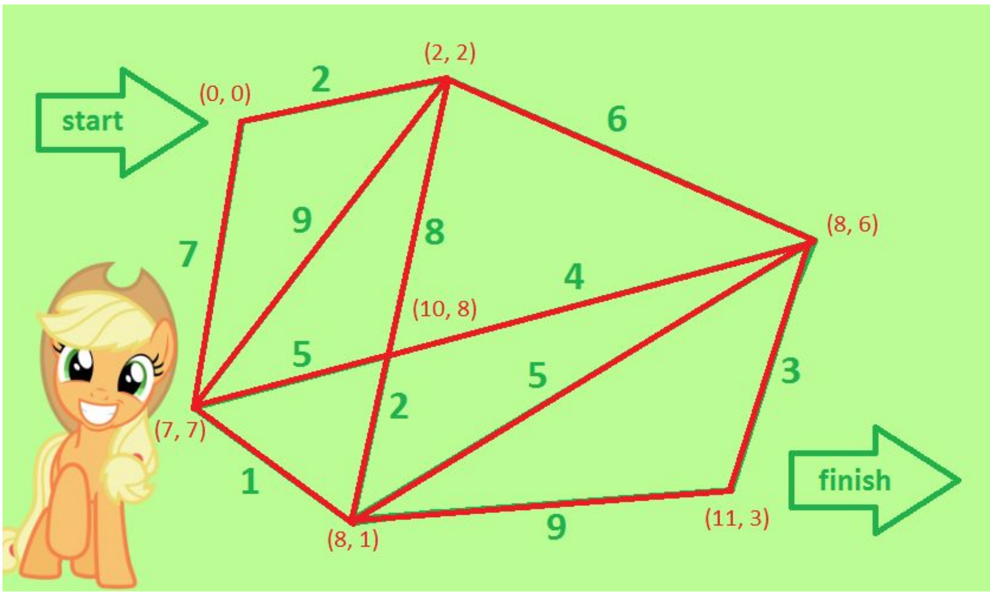
Одним из вариантов решения является перебор всех возможных путей с указанием количества скамеек, которые на них встречаются. Мы приведем более оптимальный способ: для каждого перекрестка укажем минимально возможное число скамеек, встретившееся по пути от старта до этого перекрестка, и дорожку, по которой мы пришли непосредственно на этот перекресток по пути с минимальным числом скамеек (чтобы было можно легко восстановить ответ).

Проставлять значения начнем от старта, поскольку мы точно знаем, что минимальный путь от старта до старта содержит 0 скамеек. Обновив значение в перекрестке, нужно просмотреть все соседние с ним перекрестки и, возможно, обновить значение и там (если изменения в непосредственных соседях все-таки случились, то есть нашелся более оптимальный путь, чем раньше, то нужно будет попытаться улучшить значения еще и их соседей, и так далее).

Ниже приведены некоторые промежуточные шаги в заполнении значений перекрестков. От порядка заполнения в данной задаче зависит только то, за сколько шагов будет получен результат (главное - пройти по всем ребрам и корректно обновить все значения). Поэтому порядок выбран таким образом, чтобы показать изменение значений после нахождения лучшего пути до перекрестка.



В конце мы получили, что минимальное число скамеек на пути от старта до финиша действительно равно 11, значит путь 2-6-3 оптимальный. Заметим, что даже если бы этот путь не удалось увидеть с самого начала, мы смогли бы восстановить его, используя наши пометки: в финишной вершине записано, что мы пришли по ребру 3, значит мы пришли из вершины с пометкой (8, 6), в нее мы, в свою очередь, пришли по ребру 6, а значит из вершины (2, 2), и, наконец, в вершину (2, 2) мы пришли по ребру 2.