

# **EEM462**

# **Model Öngörülü Kontrol**

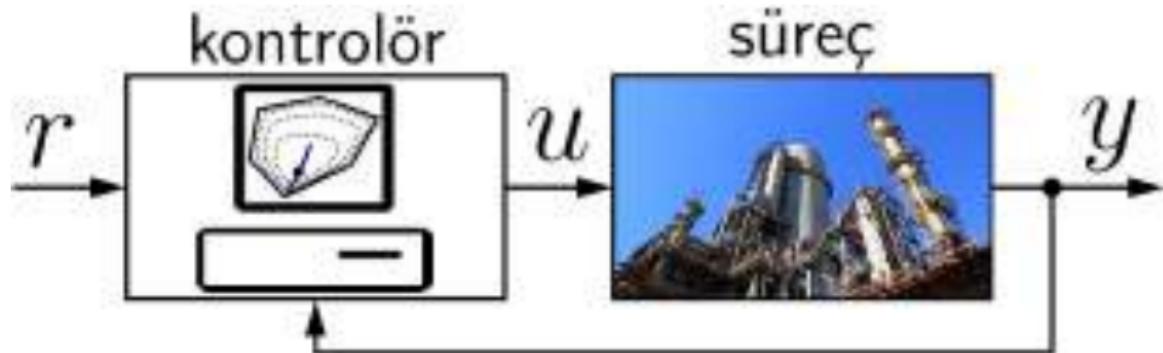
Dr. Öğr. Üyesi Işık İlber Sırmatel

T.C. Trakya Üniversitesi  
Mühendislik Fakültesi  
Elektrik - Elektronik Mühendisliği Bölümü  
Kontrol Anabilim Dalı

2024-2025 Güz

## Dersle ilgili bilgiler - Giriş

**Model öngörülü kontrol:**  
Dinamik optimizasyon yoluyla geribeslemeli kontrol



### Dersin kısımları:

- ▶ Kısım I - Durum Uzayında Modelleme ve Analiz
- ▶ Kısım II - Durum Uzayında Kontrol
- ▶ Kısım III - Optimizasyon
- ▶ Kısım IV - Model Öngörülü Kontrol

## Dersle ilgili bilgiler - Genel

**dersin kodu/ismi:** EEM462 Model Öngörülü Kontrol

**ön koşul dersleri:** MAT102, EEM126, EEM222, EEM314

**öğretim üyesi/ofis:** Işık İlber Sırmatel/B-32

**e-posta:** iilbersirmatel@trakya.edu.tr

**notlandırma:** ara sınav %40, final %60

**yoklama:** %80 zorunlu (12/15 hafta)

<https://yoklama.trakya.edu.tr/>

# Dersle ilgili bilgiler - Haftalık plan

hafta	kısım	konu
1		kontrole giriş
2	I	dinamik modelleme, örnekler
3	I	sürekli-zamanlı doğrusal sistemler
4	I	ayrık-zamanlı doğrusal sistemler
5	II	erişilebilirlik, durum geribesleme
6	II	gözlenebilirlik, durum gözleme
7	II	optimal kontrol, durum kestirme
8		<b>ara sınav</b>
9	III	optimizasyonun temelleri
10	III	optimizasyon algoritmaları
11	IV	MPC - temeller ve tasarım
12	IV	MPC - gerçekleme
13	IV	MPC - uygulamaya dair konular
14	IV	MPC - ileri yöntemler
15		sistem tanıma, kontrol gerçekleme

## Dersle ilgili bilgiler - Sınavlar

**sınavlarda hesap makinası ve formül kağıdı serbest**

**formül kağıdı: ara sınav → arkalı-önlü 1 A4 kağıdı**

**formül kağıdı: final → arkalı-önlü 2 A4 kağıdı**

**formül kağıdına öğrenci istediği her şeyi yazabilir**

**sınavlar için öğrencilerin sorumlu olduğu kaynak:  
sadece ders slaytları<sup>a</sup>**

---

<sup>a</sup>Bu ders slaytlarının hazırlanmasında kısmen şu kaynaklardan faydalانılmıştır:

- a) *Automatic Control 1&2* (ders slaytları), Alberto Bemporad, IMT Lucca
- b) *System Analysis and Control* (ders notları), Laurent Lessard, Northeastern Uni.
- c) *Model Predictive Control* (ders slaytları), Francesco Borrelli, UC Berkeley

# Bölüm 1

## Giriş

Alt Bölüm 1

Otomatik Kontrol

# Otomatik kontrolün tanımı

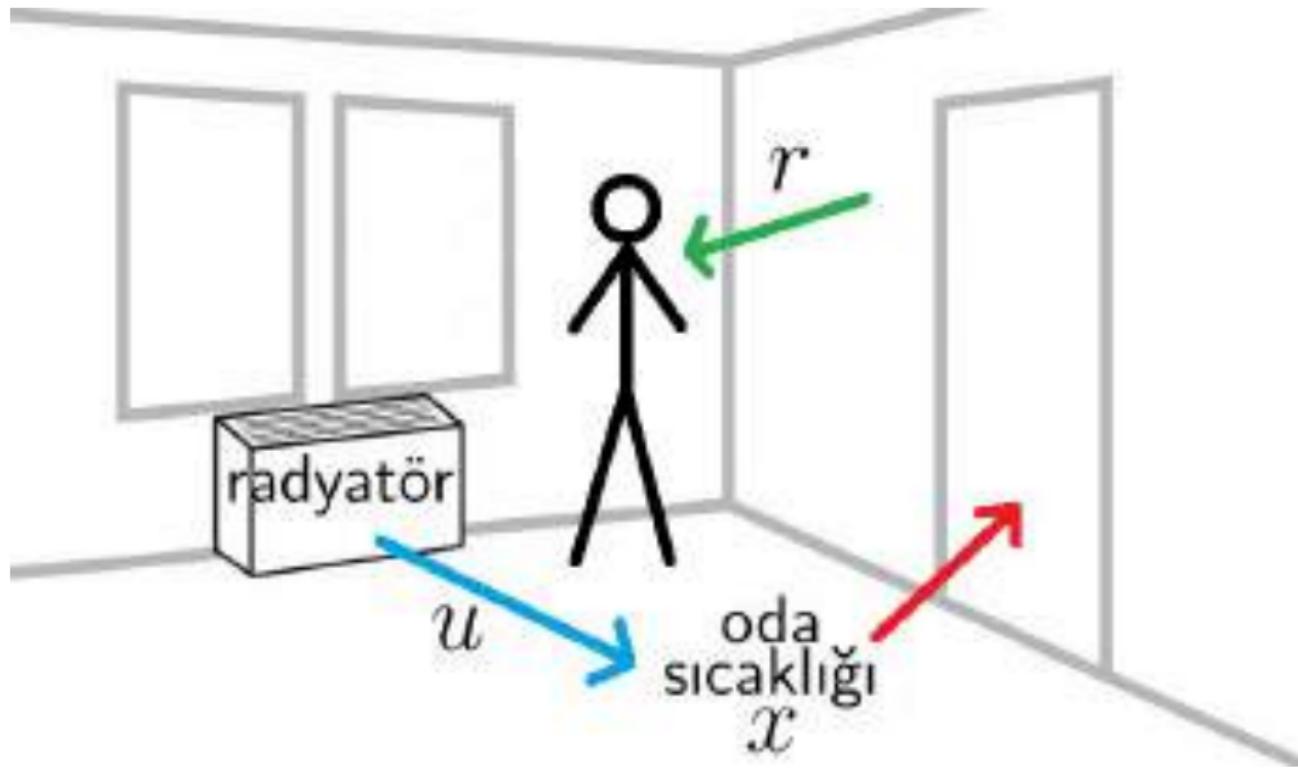


santrifüj regülatör (18. yüzyıl)

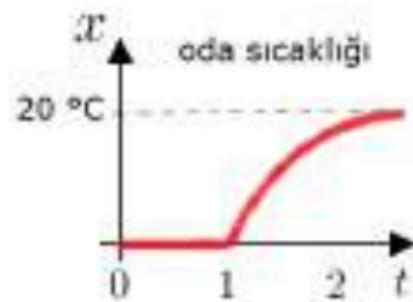
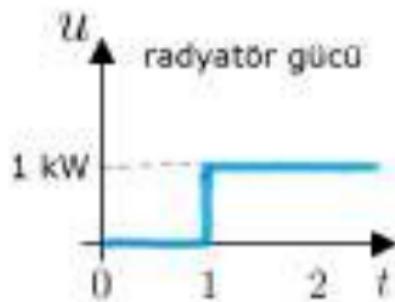
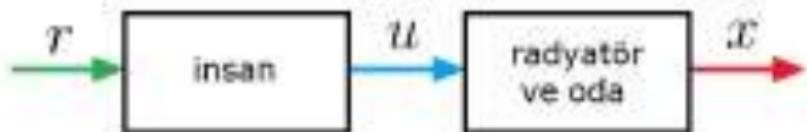
Kaynak: Mirko Junge, CC BY 3.0

Otomatik kontrol, **dinamik sistem**lerin insan müdahalesi olmadan yaklaşık olarak istenen şekilde **davranmasını** sağlayan (ve bunu bozacak **belirsizliklerin** etkisini belli ölçüde giderebilen) **geribeslemeli** mekanizmaların analizi ve tasarımını kapsayan mühendislik/uygulamalı matematik dalıdır.

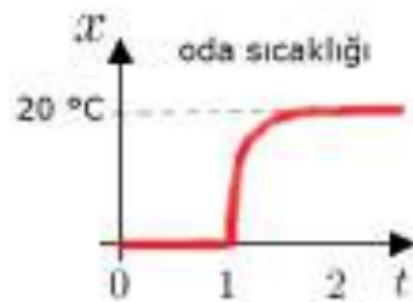
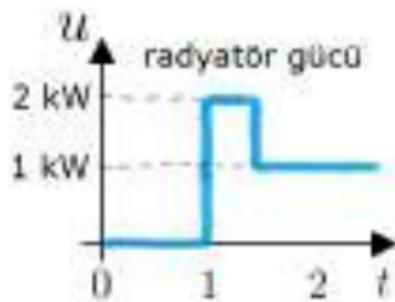
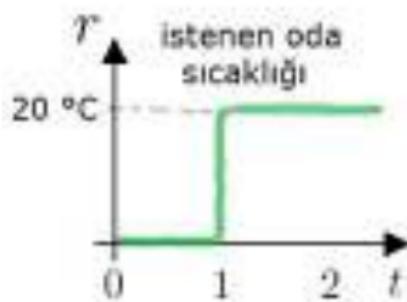
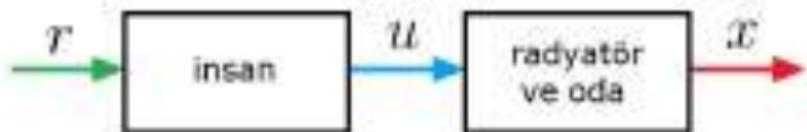
## Örnek: Oda sıcaklığı kontrolü (manuel)



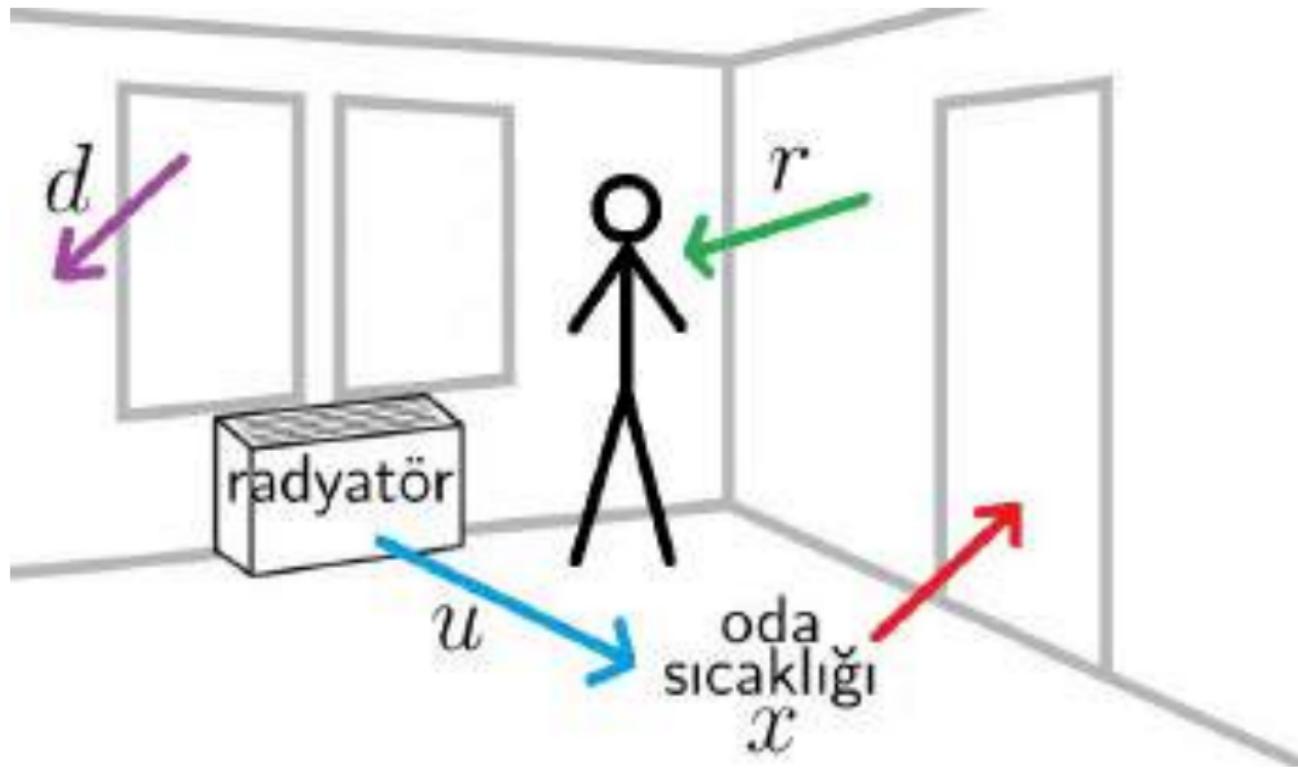
## Örnek: Oda sıcaklığı kontrolü (manuel)



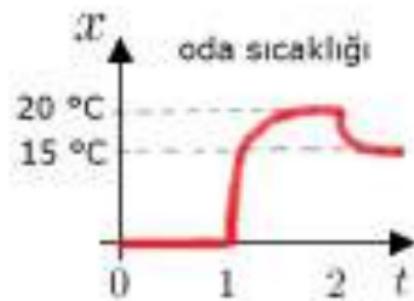
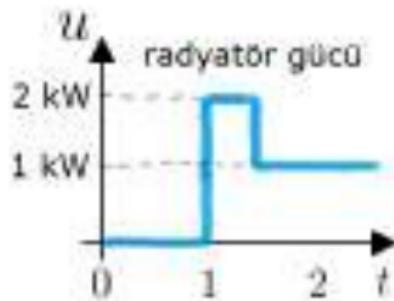
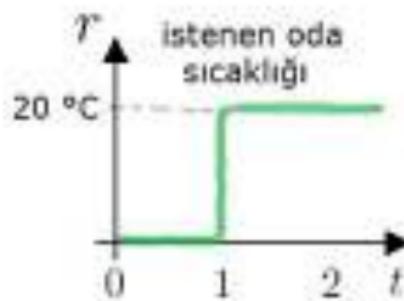
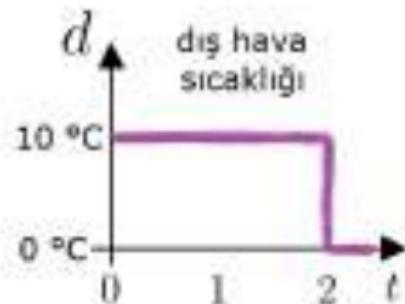
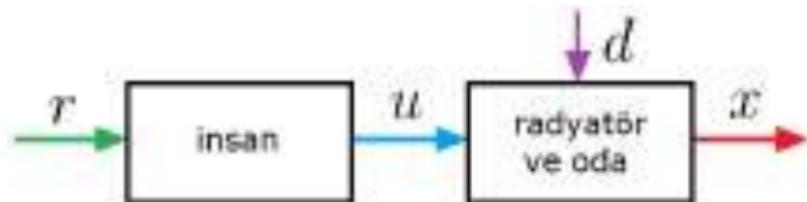
## Örnek: Oda sıcaklığı kontrolü (manuel)



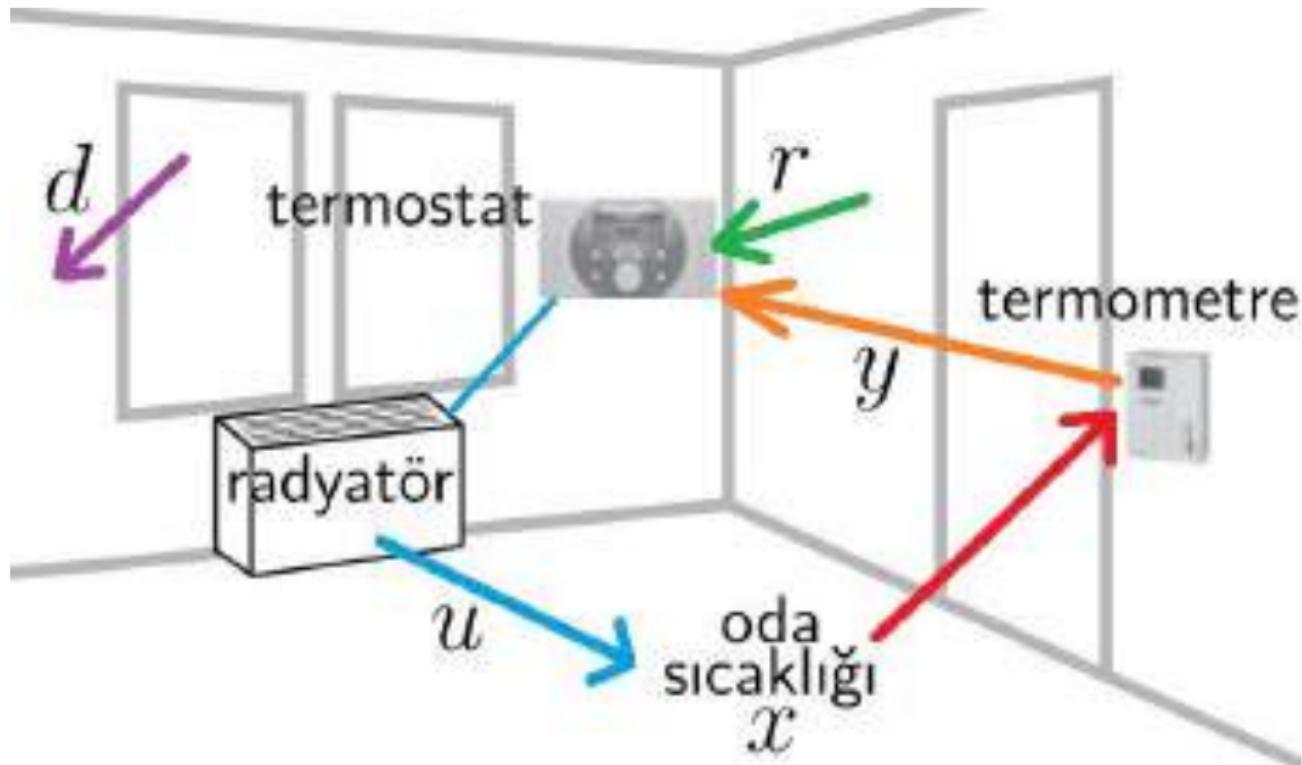
## Örnek: Oda sıcaklığı kontrolü (manuel)



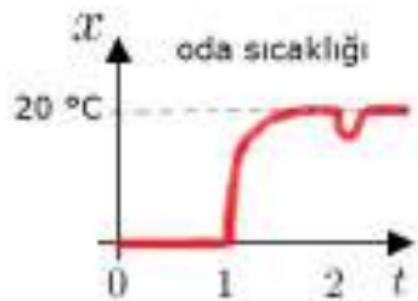
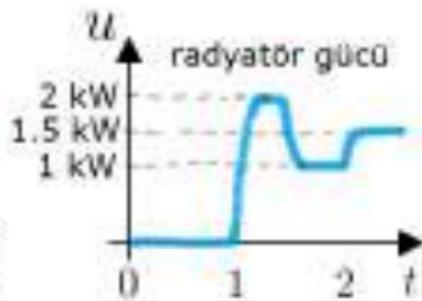
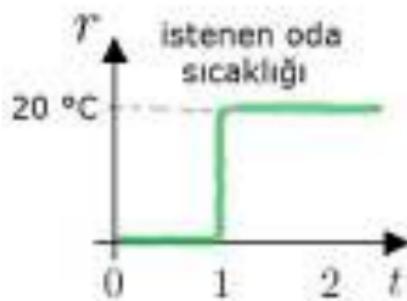
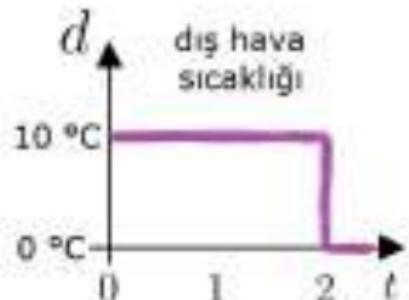
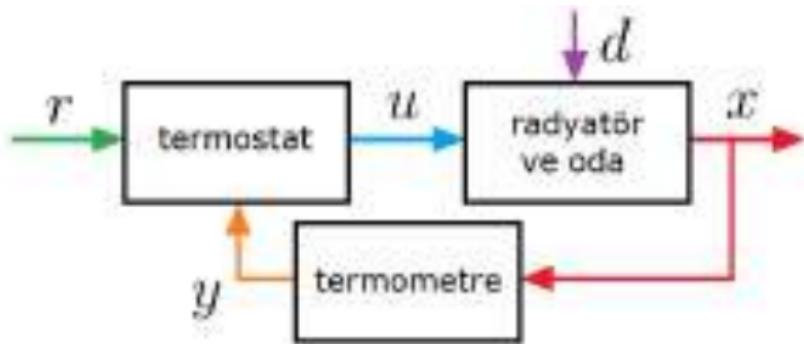
## Örnek: Oda sıcaklığı kontrolü (manuel)



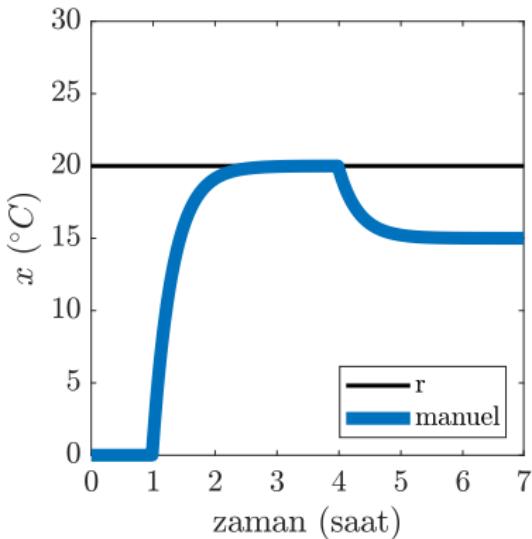
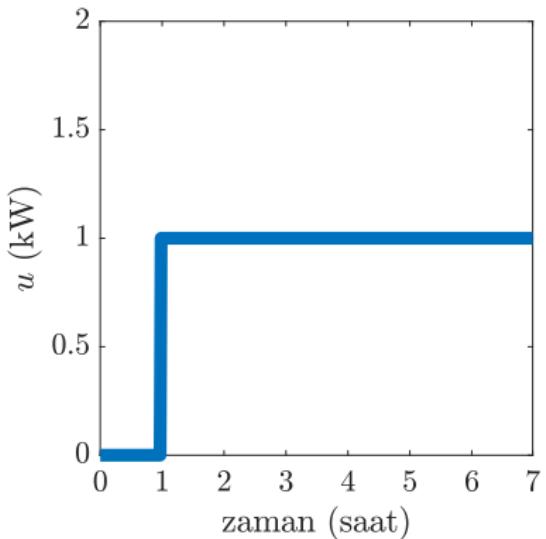
## Örnek: Oda sıcaklığı kontrolü (otomatik)



## Örnek: Oda sıcaklığı kontrolü (otomatik)



## Örnek: Oda sıcaklığı kontrolü

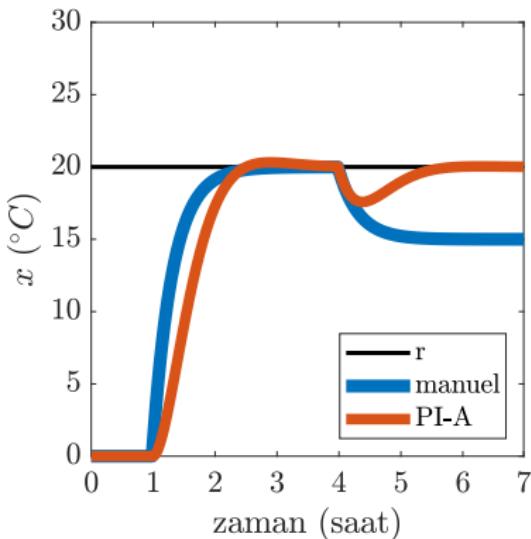
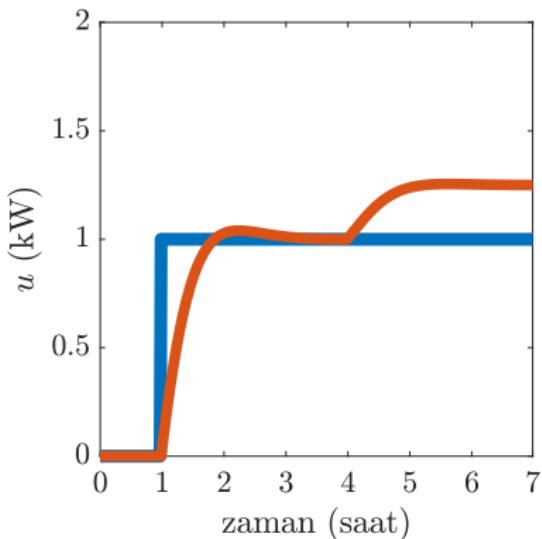


# Örnek: Oda sıcaklığı kontrolü

termostatın içindeki kontrol algoritması (PI):

$$u(k) = u(k-1) + K_P(e(k) - e(k-1)) + K_I e(k)$$
$$e(k) = r(k) - x(k)$$

PI - tasarım A:  $K_P = 20$ ,  $K_I = 2$

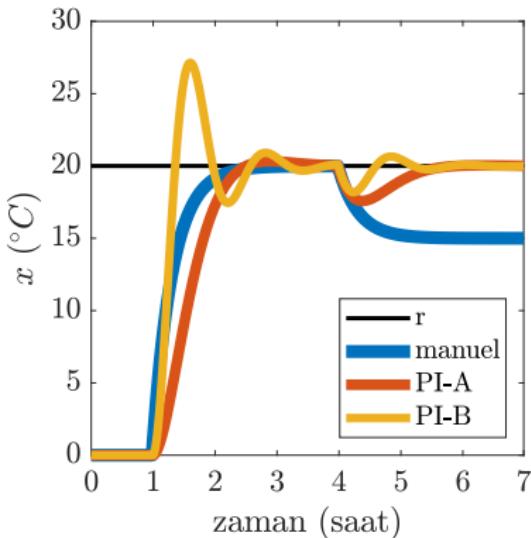
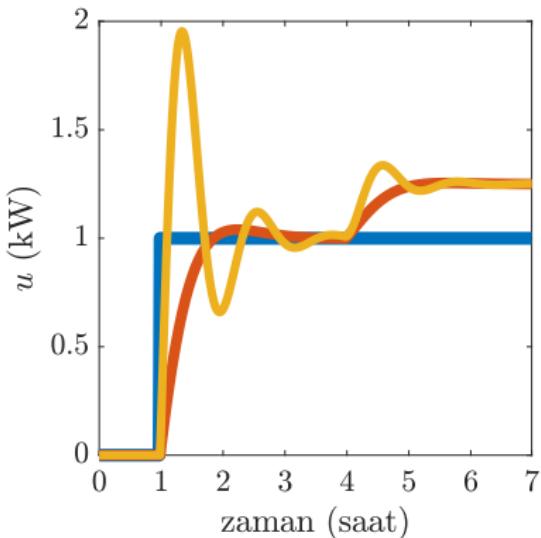


# Örnek: Oda sıcaklığı kontrolü

termostatın içindeki kontrol algoritması (PI):

$$u(k) = u(k-1) + K_P(e(k) - e(k-1)) + K_I e(k)$$
$$e(k) = r(k) - x(k)$$

PI - tasarım B:  $K_P = 5$ ,  $K_I = 8$

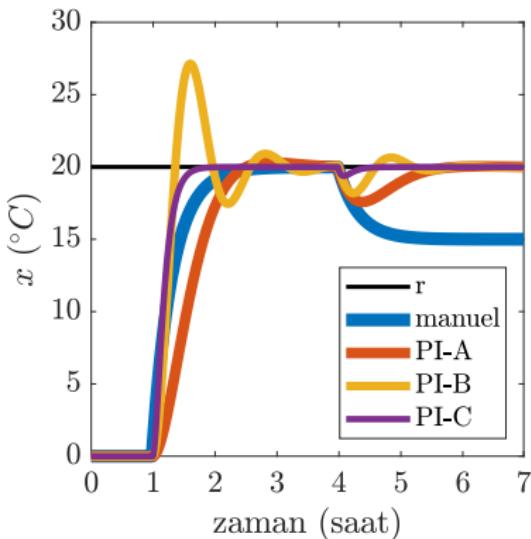
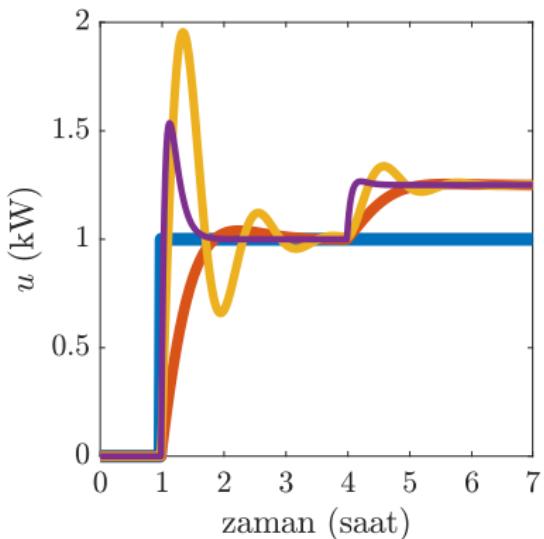


# Örnek: Oda sıcaklığı kontrolü

termostatın içindeki kontrol algoritması (PI):

$$u(k) = u(k-1) + K_P(e(k) - e(k-1)) + K_I e(k)$$
$$e(k) = r(k) - x(k)$$

PI - tasarım C:  $K_P = 250$ ,  $K_I = 25$



## Otomatik kontrolün yararları<sup>1</sup>

- ▶ hassas olmayan elemanlar kullanılarak hassas sistemlerin kurulması
- ▶ bozucuların ve eleman varyasyonlarının etkilerinin azaltılması
- ▶ sistemlerin davranışının regüle edilmesi, kararlılaştırılması ve şekillendirilmesi

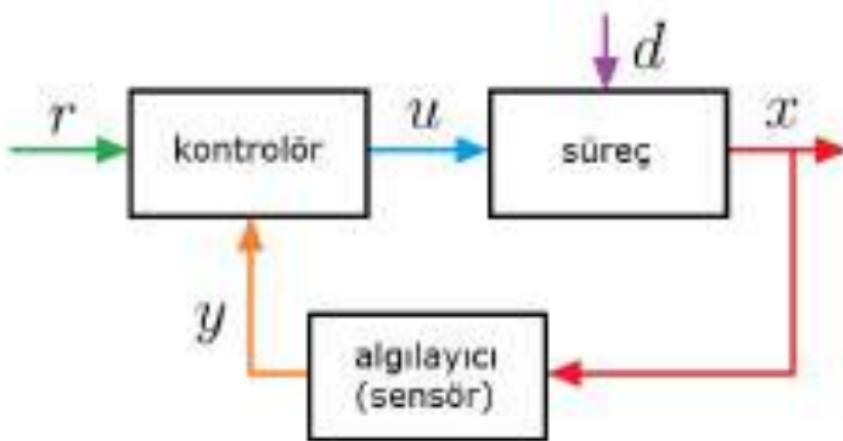
### Otomatik kontrolün sakıncaları

- ▶ kararsızlık tehlikesi (kontrolsüz halde kararlı olan sistem kontrol altında kararsız hale gelebilir)
- ▶ algılayıcı gürültüsünün sisteme girmesi

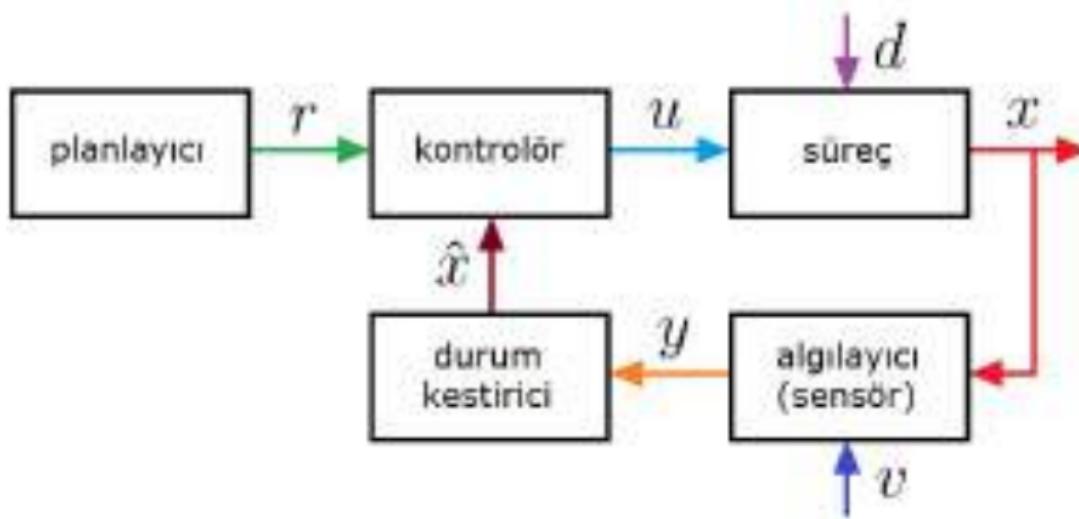
---

<sup>1</sup>The fascinating history and success of feedback control, Karl J. Åström

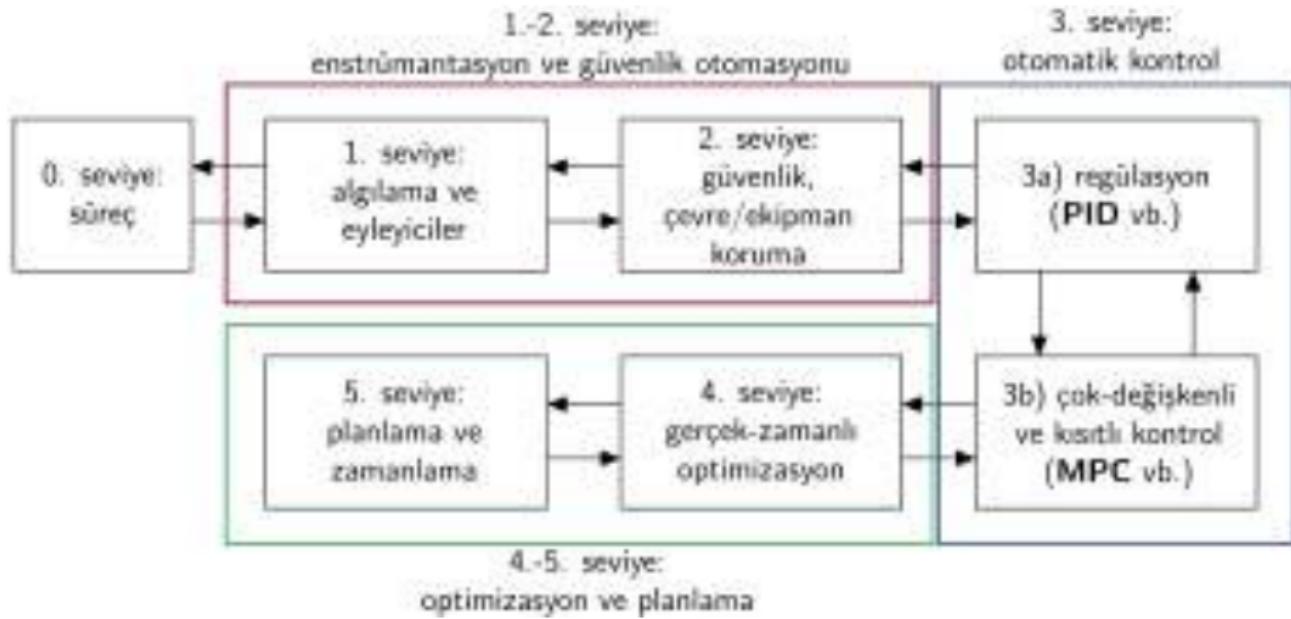
# Otomatik kontrol sistemi - Genel yapı (1)



## Otomatik kontrol sistemi - Genel yapı (2)

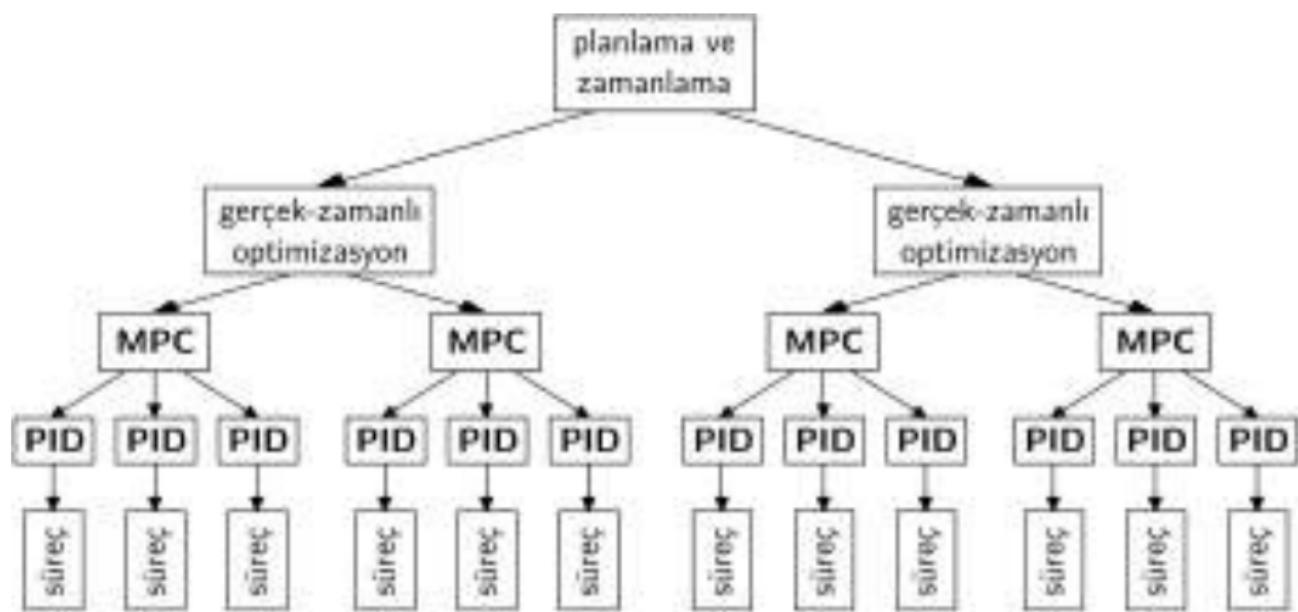


# Süreç kontrol/optimizasyon - Beş seviye<sup>2</sup>



<sup>2</sup>Dale E Seborg et al. *Process Dynamics and Control*. John Wiley & Sons, 2016.

# Süreç kontrol/optimizasyon mimarisi



# Otomatik kontrol projelerinin unsurları

- 1) modelleme (modeling):** sistem davranışının matematiksel (genellikle diferansiyel denklem) olarak ifade edilmesi
- 2) benzetim (simulation):** model kullanılarak sistemin zamana bağlı çalışmasının hesaplanması
- 3) sistem analizi (system analysis):** model kullanılarak sistemin teorik özelliklerinin (kararlılık vb.) incelenmesi
- 4) sistem tanıma (system identification):** sistem ölçümleri kullanılarak modelin/model parametrelerinin tahmini
- 5) model geçerleme (model validation):** sistem ölçümleri ve model kullanılarak modelin geçerliliğinin sınanması
- 6) durum kestirme tasarımı (state estimation design):** sistem ölçümleri ve model kullanarak sistem durumunu tahmin eden mekanizmaların tasarımı
- 7) kontrol tasarımı (control design):** sistem durum bilgisi ve model kullanarak sistem davranışını şekillendiren geribeslemeli mekanizmaların tasarımı

# Kontrol uygulama alanlarına örnekler

taşıtlar



elektrikli/elektronik  
cihazlar



altyapı ağları



robotlar



ulaşım sistemleri

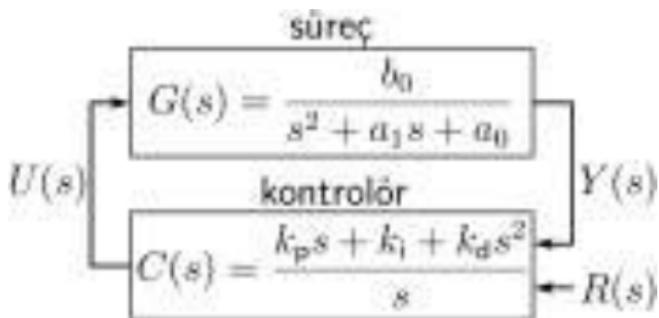


kimyasal tesisler

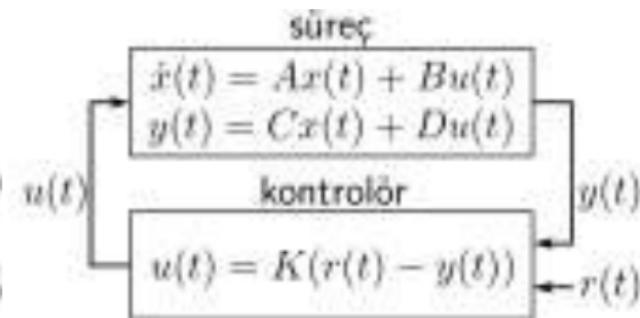


# EEM314 dersi ile bağlantı

## klasik kontrol ( $<1960$ )



## modern kontrol ( $\geq 1960$ )



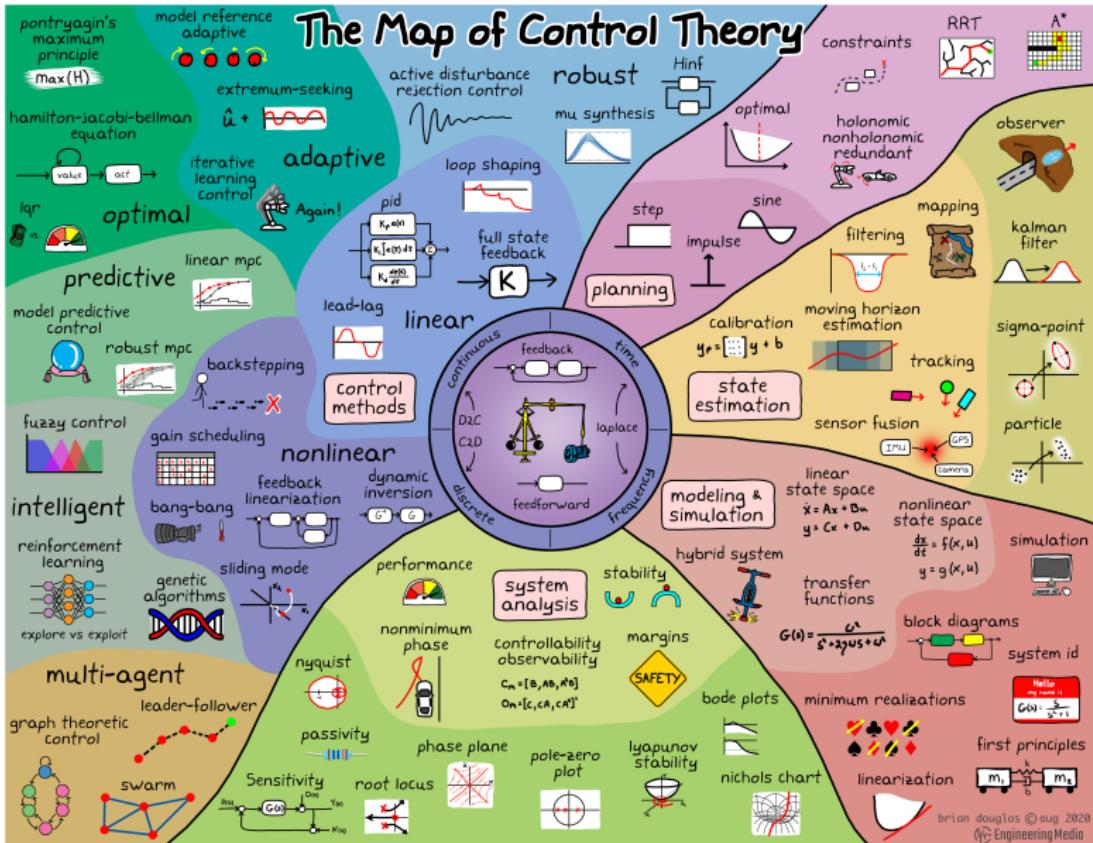
- süreç: tek giriş/tek çıkış
- model: transfer fonksiyonu
- bölge: frekans bölgesi
- matematik: karmaşık analiz
- tasarım: kağıt-kalem ile

- süreç: çok giriş/çok çıkış
- model: durum uzayı
- bölge: zaman bölgesi
- matematik: doğrusal cebir
- tasarım: bilgisayar ile

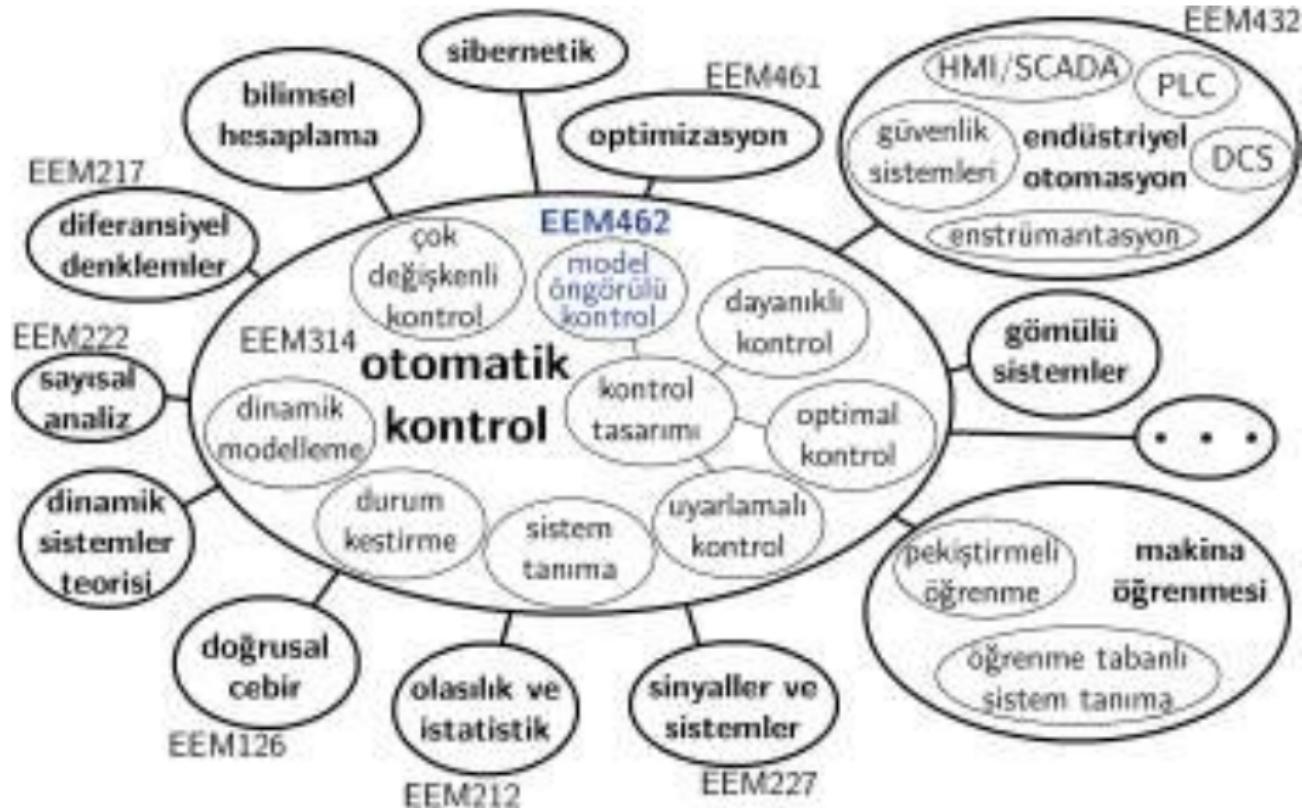
# Otomatik kontrolün tarihçesi



# Kontrol teorisi haritası



# Kontrol ve bağlı alanlar

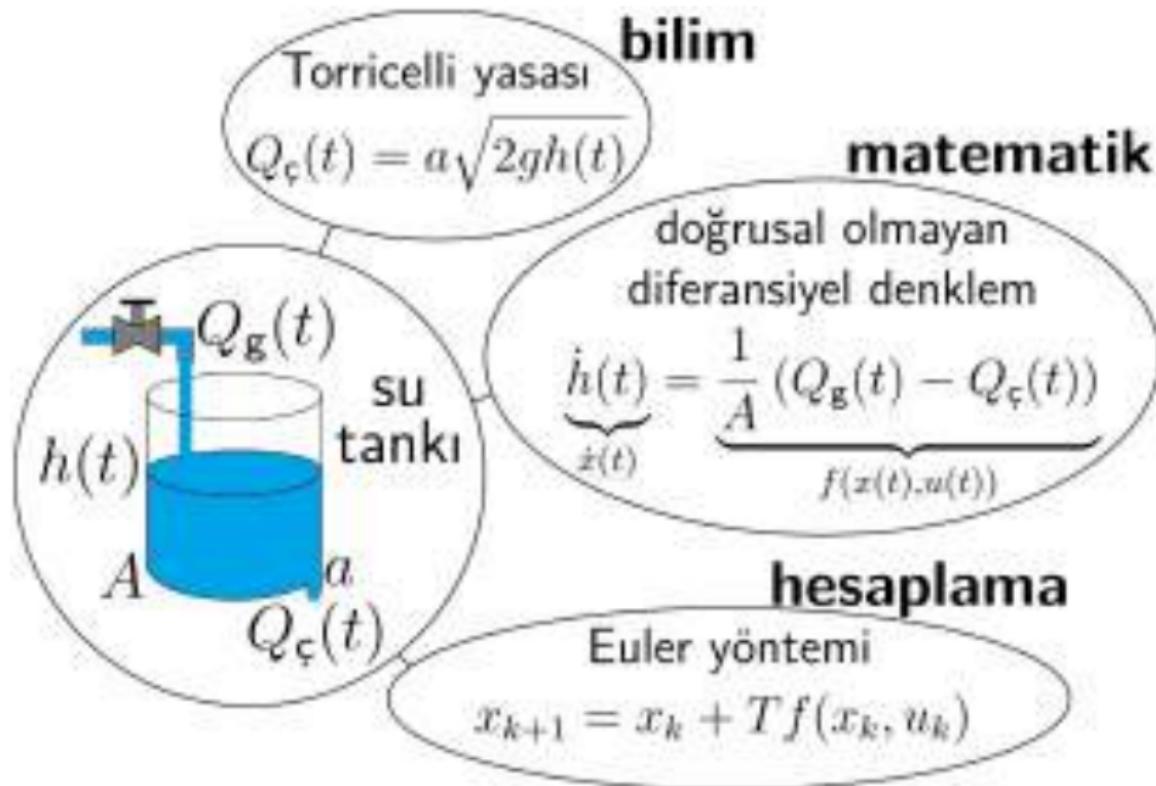


# Mühendislik/matematik matrisi

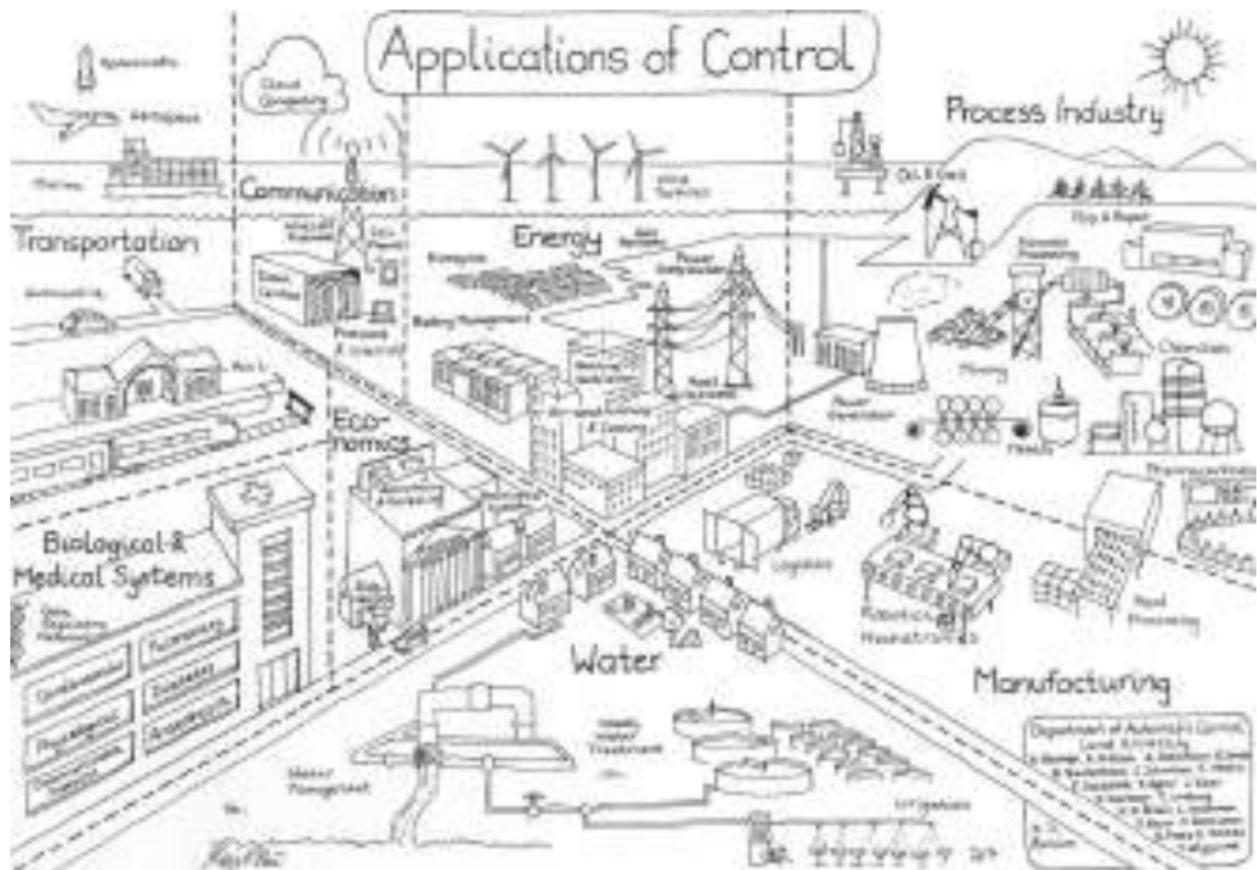
	uygulamalı matematik dalları					bilgisayar bilimi
	doğrusal cümlə	olasılık ve istatistik	otomatik kontrol	optimizasyon	makine öğrenmesi	
mühendislik dalları						
inşaat						
makina						
elektrik						
kimya						
elektronik						
mekatronik						
T						

# Mühendislikte üç temel unsur

Örnek: su tankının modellenmesi ve benzetimi



## Kontrol uygulamala alanları



Kaynak: Otomatik Kontrol Bölümü, Lund Üniversitesi, İsveç

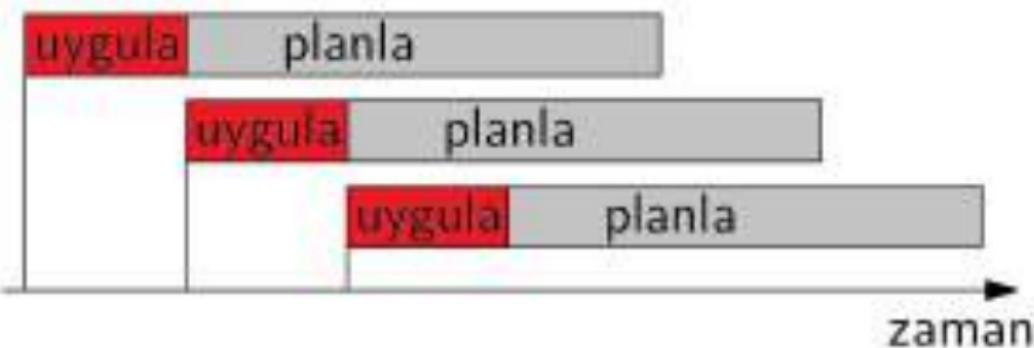
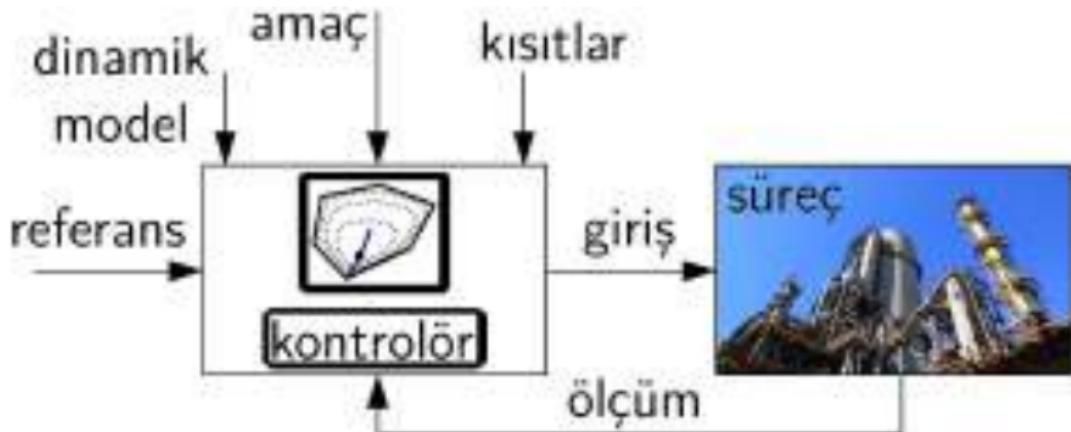
# Otomatik kontrol - Yakın anlamlı kavramlar

otomatik kontrol	<i>automatic control</i>
kontrol mühendisliği	<i>control engineering</i>
kontrol teorisi	<i>control theory</i>
geribeslemeli kontrol	<i>feedback control</i>
geribeslemeli sistemler	<i>feedback systems</i>
kontrol sistemleri	<i>control systems</i>
teknik sibernetik	<i>technical cybernetics</i>
mühendislik sibernetiği	<i>engineering cybernetics</i>

Alt Bölüm 2

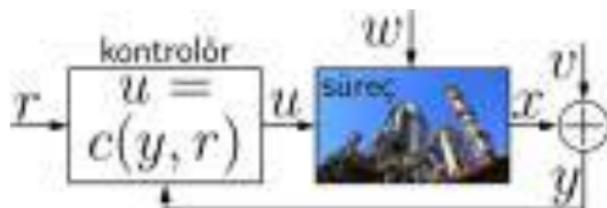
Model Öngörülü Kontrol

# Model öngörülu kontrol - Ana fikir



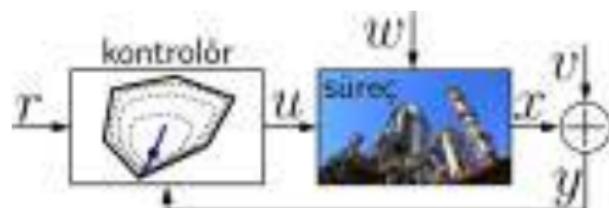
# Kontrol tasarımına iki farklı bakış

standart tasarım:



$u = c(y, r)$ 'deki  $c$ 'yi tasarla

model öngörülu kontrol:



optimizasyon ile  $u$ 'yu seç

ele alınan baskın sorunlar:

- ▶ bozucu etkisi ( $w \rightarrow y$ )
- ▶ gürültü etkisi ( $v \rightarrow y$ )
- ▶ model belirsizliği

kontrol problemi çeşitleri:

- ▶ regülasyon ( $y \sim 0$ )
- ▶ referans izleme ( $y \sim r$ )

ele alınan baskın sorunlar:

- ▶ kontrol kısıtları ( $|u| \leq \bar{u}$ )
- ▶ süreç kısıtları ( $|x| \leq \bar{x}$ )

kontrol problemi çeşitleri:

- ▶ regülasyon ( $y \sim 0$ )
- ▶ referans izleme ( $y \sim r$ )
- ▶ ekonomik optimizasyon

# Kısıtlar ve kontrol tasarıımı

Gerçek dinamik sistemlerin hepsinde **kısıtlar** vardır:

- ▶ Fiziksel kısıtlar (örnek: eyleyici limitleri)
- ▶ Başarım kısıtları (örnek: aşım)
- ▶ Güvenlik kısıtları (örnek: sıcaklık/basınç limitleri)

**optimal operasyon genelde kısıtlara yakındır**

## standart tasarım:

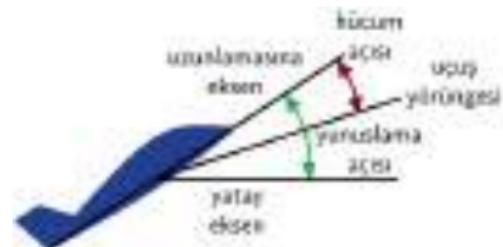
- ▶ tasarımında kısıtlar hesaba katılmaz
- ▶ operasyon noktaları kısıtlardan uzak seçilir
- ▶ operasyon optimalden uzaktır

## model öngörülu kontrol:

- ▶ tasarımında kısıtlar hesaba katılırlar
- ▶ operasyon noktaları kısıtlara yakın seçilir
- ▶ operasyon optimale yakındır

# Kısıtlar ve kontrol tasarıımı

Örnek: Uçaklarda yunuslama kontrolü<sup>3</sup>



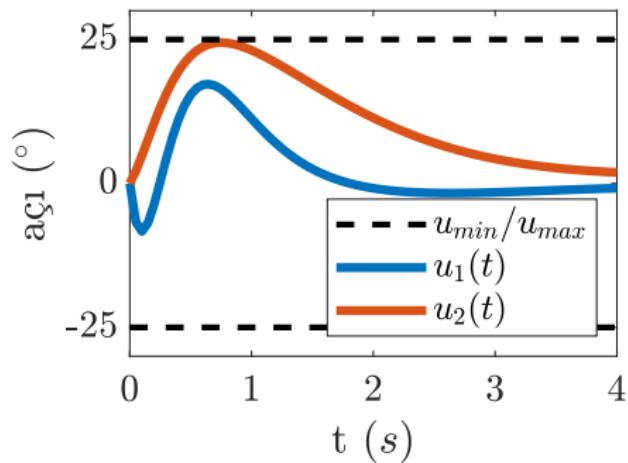
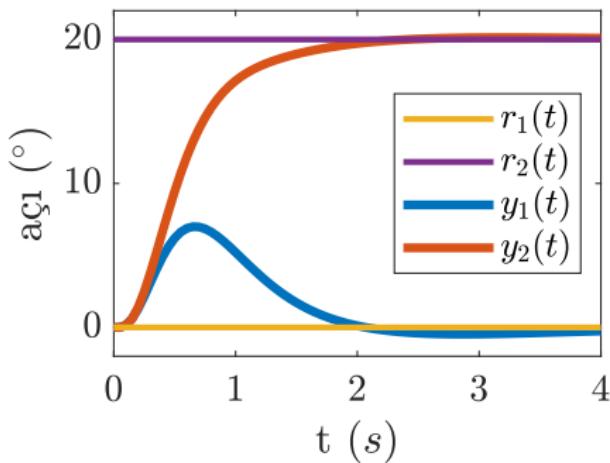
- ▶ girişler: irtifa dümeni ( $u_1(t)$ ), flap/kanatçık açıları ( $u_2(t)$ )
- ▶ çıkışlar: hücum açısı ( $y_1(t)$ ), yunuslama açısı ( $y_2(t)$ )
- ▶ referanslar:  $y_1(t) \rightarrow r_1(t) = 0^\circ$ ,  $y_2(t) \rightarrow r_2(t) = 20^\circ$
- ▶ **kısıtlar:**  $|u(t)| \leq 25^\circ$ , örneklemme: 50 ms ve ZOH
- ▶ **açık-çevrim sistem kararsız**

<sup>3</sup>P Kapasouris, M Athans, and G Stein. "Design of feedback control systems for stable plants with saturating actuators". In: *Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE. 1988, pp. 469–479. URL:  
<https://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/3089/P-1816-19501864.pdf>.

# Kısıtlar ve kontrol tasarıımı

**Örnek:** Uçaklarda yunuslama kontrolü

a) Doğrusal kuadratik integral regülatör (temkinli ayar)

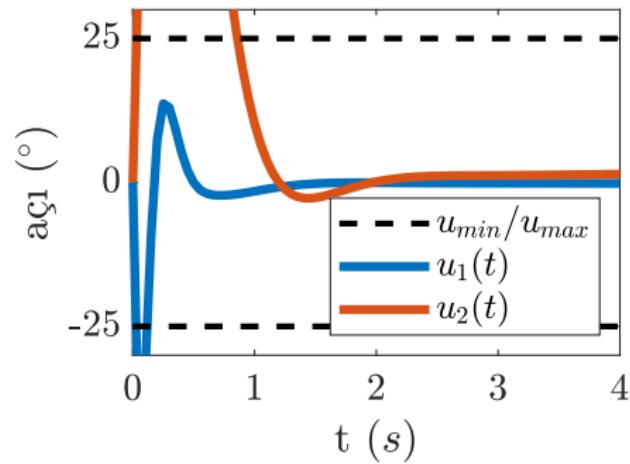
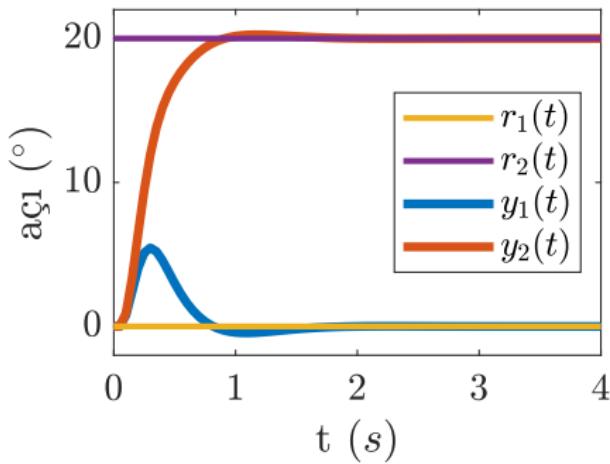


sistem kararlı, **cevap yavaş**

# Kısıtlar ve kontrol tasarıımı

**Örnek:** Uçaklarda yunuslama kontrolü

b) Doğrusal kuadratik integral regülatör (agresif ayar)

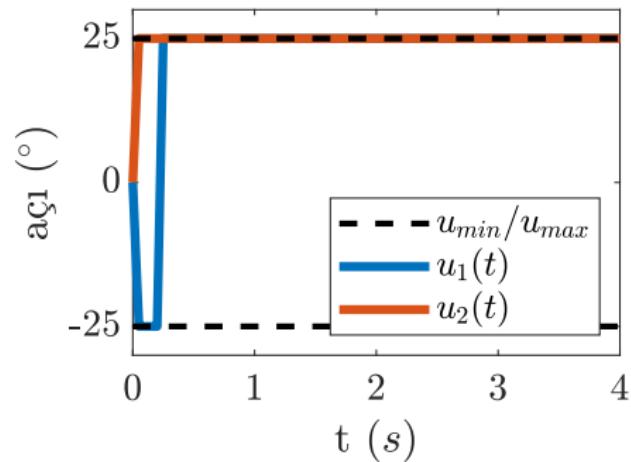
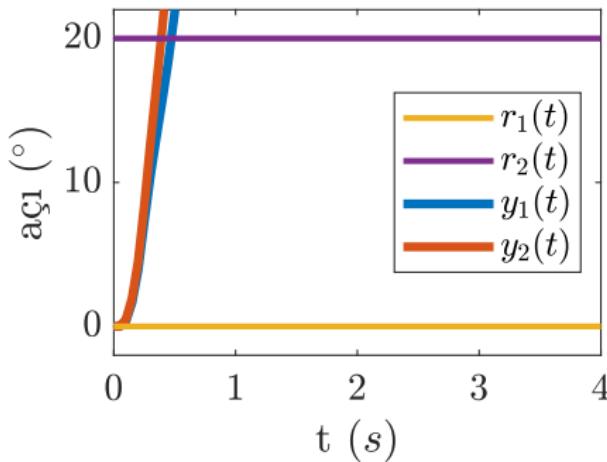


sistem kararlı, cevap hızlı, **kısıtlar sağlanmıyor**

# Kısıtlar ve kontrol tasarıımı

**Örnek:** Uçaklarda yunuslama kontrolü

c) Doğrusal kuadratik integral regülatör (agresif ayar) ve  $|u(t)| \leq 25^\circ$

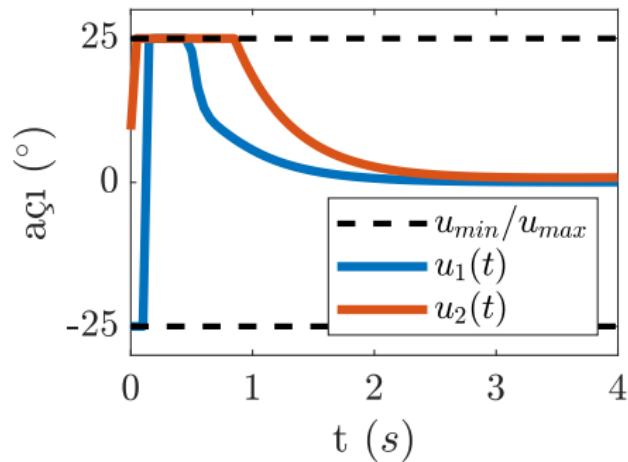
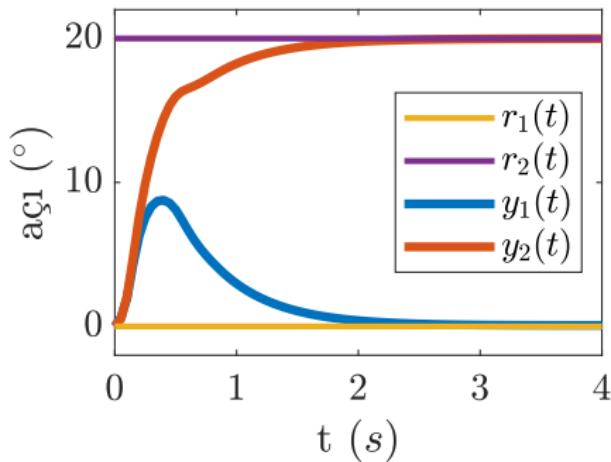


sistem kararsız

# Kısıtlar ve kontrol tasarıımı

**Örnek:** Uçaklarda yunuslama kontrolü

d) Model öngörülü kontrolör (tasarımda  $|u(t)| \leq 25^\circ$ )



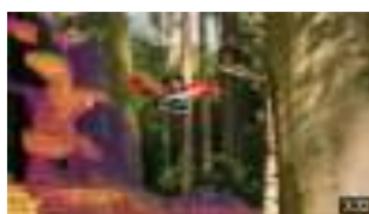
sistem kararlı, cevap hızlı, kısıtlar sağlanıyor

# Çeşitli güncel MPC uygulamaları

humanoid robot



quadrotor



quadruped robot



otonom araç



endüstriyel robot



uçurtma-dinamo



# Endüstrinin bakışı

Control Technology	Current Impact		Future Impact		Control Technology	Current Impact		Future Impact	
	High	Low/No	High	Low/No		High	Low/No	High	Low/No
PID control	91%	0%	78%	6%	Intelligent control	24%	38%	69%	11%
System identification	66%	5%	72%	5%	Nonlinear control	21%	44%	42%	15%
Estimation & filtering	64%	11%	63%	3%	Discrete-event systems	24%	45%	39%	27%
Model-predictive control	82%	11%	85%	2%	Adaptive control	18%	38%	44%	17%
Process data analytics	51%	15%	70%	8%	Repetitive control	12%	74%	17%	51%
Fault detection & identification	48%	17%	8%	8%	Other advanced control technology	11%	64%	25%	38%
Decentralized and/or coordinated control	29%	33%	54%	11%	Hybrid dynamical systems	11%	68%	33%	33%
Robust control	26%	35%	42%	23%	Game theory	5%	78%	17%	52%

Uluslararası Otomatik Kontrol Federasyonu (IFAC) Endüstri Kurulu'nun PID ve ileri kontrol teknolojilerinin güncel ve gelecekteki etkilerine dair yaptığı anketin sonuçları (Kaynak: Tariq Samad, [IFAC Newsletter](#), Nisan 2019)

# MPC - Yakın anlamlı kavramlar

model öngörülü kontrol	<i>model predictive control</i>
öngörülü kontrol	<i>predictive control</i>
model-tabanlı öngörülü kontrol	<i>model-based predictive control</i>
gerileyen ufkulu kontrol	<i>receding horizon control</i>
gerileyen ufkulu planlama	<i>receding horizon planning</i>
gömülü optimizasyon	<i>embedded optimization</i>
gerçek-zamanlı optimizasyon	<i>real-time optimization</i>
dinamik optimizasyon	<i>dynamic optimization</i>

## Alt Bölüm 3

Kaynaklar (opsiyonel)

## Kaynaklar - Ders kitapları

- ▶ *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*, Karl J. Åström, Richard M. Murray (durum uzayında modelleme, analiz ve kontrol konuları için bu kitaptaki 1. Bölüm'den 7. Bölüm'e kadar olan kısımlara bakılabilir) ([kitabın internet sitesinde](#) ek materyaller ve programlama örnekleri bulunabilir)
- ▶ *Supplement: Optimization-Based Control*. Richard M. Murray (optimal kontrol konusu için bu kitaptaki 3. bölüme, optimal kestirme konusu için 6. bölüme, MPC konusu içinse 4. bölüme bakılabilir)
- ▶ *Model Predictive Control: Theory, Computation, and Design*, James B. Rawlings, David Q. Mayne, Moritz M. Diehl (MPC konusu için bu kitaptaki 1. ve 2. bölümlere bakılabilir) ([kitabın internet sitesinde](#) ek materyaller ve programlama örnekleri bulunabilir)

## Kaynaklar - Ders notları

- ▶ *System Analysis and Control (lecture notes)*, Laurent Lessard (dinamik modelleme konusu için “Part I: System modeling” kısmındaki ders notlarına bakılabilir)
- ▶ *Linear Systems (lecture notes)*, Laurent Lessard (durum uzayında modelleme, analiz ve kontrol konuları için ilgili ders notlarına bakılabilir)
- ▶ *Introduction to Optimization (lecture notes)*, Laurent Lessard (optimizasyon konusu için ilgili ders notlarına bakılabilir)
- ▶ *Advanced Control Engineering (lecture notes)*, Laurent Lessard (optimal kontrol ve kestirme konuları için “Part II: Optimal estimation and control” kısmındaki, optimizasyon ve MPC konuları için ise “Part III: Constrained and robust control” kısmındaki ilgili ders notlarına bakılabilir)

## Kaynaklar - Ek ders kitapları

- ▶ *Linear Algebra*, Jim Hefferon (doğrusal cebir)
- ▶ *Introduction to Applied Linear Algebra – Vectors, Matrices, and Least Squares*, Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe (uygulamalı doğrusal cebir)
- ▶ *Convex Optimization*, Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe (dışbükey optimizasyon)
- ▶ *Algorithms for Optimization*, Mykel J. Kochenderfer, Tim A. Wheeler (optimizasyon algoritmaları)
- ▶ *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms*, David J.C. MacKay (uygulamalı istatistik)
- ▶ *Mathematics for Machine Learning*, Marc P. Deisenroth, A. Aldo Faisal, Cheng Soon Ong (temel uygulamalı matematik konuları, makina öğrenmesi)

## Kaynaklar - Internet siteleri

- ▶ [Control Tutorials for MATLAB and Simulink](#) (dinamik sistem modelleme, benzetim ve kontrol üzerine konu ve programlama anlatımlı çok sayıda örneğin bulunduğu bir site)
- ▶ [Resourcium](#) (kontrol ve otomasyon ile ilgili çok sayıda kaynağın linklerini içeren bir site)
- ▶ [Alberto Bemporad - Teaching](#) (dinamik sistemler, kontrol ve optimizasyon üzerine çok sayıda ders materyalinin bulunduğu bir site)
- ▶ [Systems Control and Optimization Laboratory - Teaching](#) (dinamik sistemler, kontrol ve optimizasyon üzerine çok sayıda ders materyalinin bulunduğu bir site)
- ▶ [International Federation of Automatic Control - List of Professional Briefs](#) (dinamik sistemler ve kontrol üzerine kısa ders kitaplarının bulunduğu bir site)

## Kaynaklar - Internet siteleri

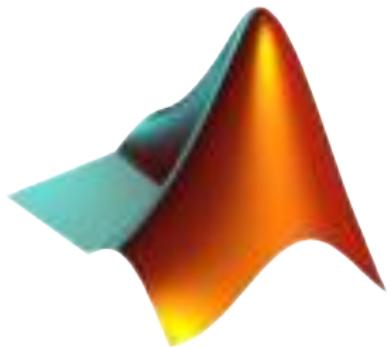
- ▶ [Understanding Model Predictive Control](#) (model öngörülü kontrol ile ilgili konu anlatımlı videolar)
- ▶ [IEEE Control Systems Society - Software Resources](#) (kontrol ve optimizasyonla ilgili açık kaynak yazılımların linklerini içeren bir site)
- ▶ [Brian Douglas](#) (kontrol ve bağlantılı alanlar ile ilgili konu anlatımlı videolar içeren bir kanal)
- ▶ [Steve Brunton](#) (kontrol ve bağlantılı alanlar ile ilgili konu anlatımlı videolar içeren bir kanal)
- ▶ [Christopher Lum](#) (kontrol ve bağlantılı alanlar ile ilgili konu anlatımlı videolar içeren bir kanal)
- ▶ [3Blue1Brown](#) (çeşitli matematik konuları üzerine konu anlatımlı görselleştirmeli videolar içeren bir kanal)
- ▶ [Visually Explained](#) (çeşitli matematik konuları üzerine konu anlatımlı görselleştirmeli videolar içeren bir kanal)

## Tavsiye edilen kaynaklar

- ▶ **Ders kitabı:** *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers.* Karl J. Åström and Richard M. Murray
- ▶ **Ders kitabı (ek):** *Supplement: Optimization-Based Control.* Richard M. Murray
- ▶ **Çözümlü sınav soruları** *Automatic Control 1&2 (2011)* (exercise collection - past written examinations). Alberto Bemporad
- ▶ **Programlama örnekleri:** *Control Tutorials for MATLAB® and Simulink®*
- ▶ **Videolar:** Brian Douglas, Steve Brunton, 4. sayfadaki çalışma listeleri
- ▶ **Sanal kontrol laboratuvarı:** *janismac Control Challenges*

# Programlama dilleri (kontrol prototipleme)

MATLAB®



Scilab



GNU Octave



Kaynak: John W. Eaton

Julia



Python



SageMath



Kaynak: The Sage team

# Model öngörüülü kontrol yazılım paketleri

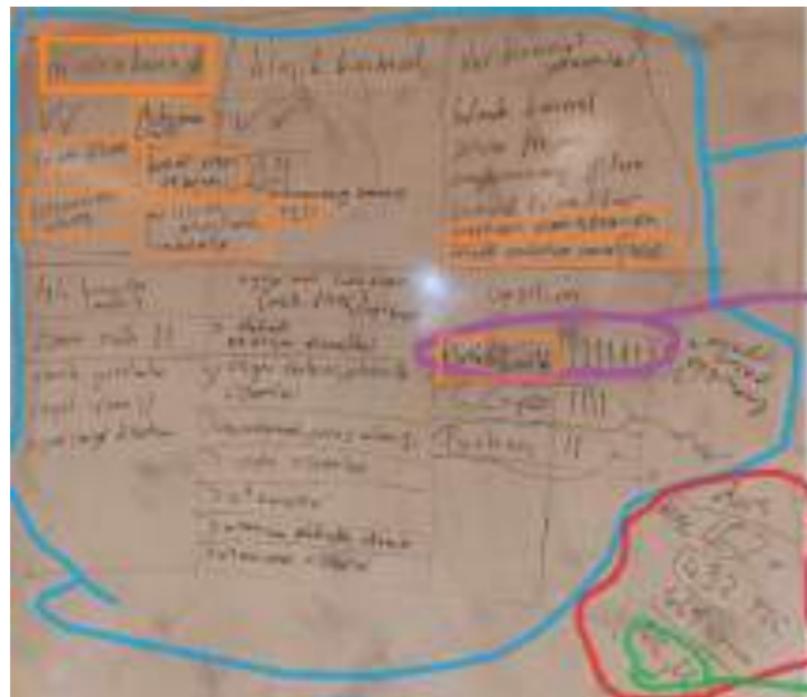
- ▶ [YALMIP](#) (MATLAB®/GNU Octave) (kullanımı kolay, çok sayıda optimizasyon çözümcisini destekliyor)
- ▶ [CVX](#) (MATLAB®) (kullanımı kolay, dışbükey analiz kuralları yaklaşımı)
- ▶ [CasADI](#) (MATLAB®/GNU Octave/Python) (algoritmik türev özelliği var, yüksek başarılı)
- ▶ [MPCTools](#) (MATLAB®/GNU Octave) (CasADI-tabanlı ancak yazılan kodlar daha sade, yüksek başarılı)

## **Genel mesleki tavsiyeler**

aşağıdaki konuları çok iyi bilen (ve iş koluya ilgili yeterli uzmanlık bilgisi olan) bir insan günümüzde her ülkede ve (neredeyse) her iş kolunda çalışabilir

- ▶ **İngilizce**
- ▶ **uygulamalı matematik** (doğrusal cebir, olasılık ve istatistik, optimizasyon)
- ▶ **bilgisayar bilimi**

# Dersin konuları ve sektörde arananlar



otomatik kontrolle  
ilgili iş ilanlarında,  
"adıda aranan  
özellikler" kısmında  
görülen anahtar  
kelimeler

Matlab/Simulink  
mutlaka öğrenin!

ders tavsiyeleri

machine learning,  
deep learning

## Kısım I

# Durum Uzayında Modelleme ve Analiz

# Kısim I: Durum Uzayında Modelleme ve Analiz

## 2. Dinamik modelleme

- Elektrik sistemler
- Mekanik sistemler
- Hidrolik sistemler
- Termik sistemler
- Kimyasal süreç sistemleri
- Çoklu alanlı (*multi-domain*) sistemler
- Durum uzayı modeli
- Uygulama örnekleri

## 3. Sürekli-zamanlı doğrusal sistemler

- Dinamik sistemler ve dinamik modeller
- Doğrusal diferansiyel denklemler
- Doğrusal cebir (hatırlatma)
- Sürekli zamanda durum yanıtı
- Sürekli zamanda kararlılık
- Doğrusallaştırma

## 4. Ayrık-zamanlı doğrusal sistemler

- Doğrusal fark denklemleri
- Ayrık zamanda durum yanıtı
- Ayrık zamanda kararlılık
- Örnekleme

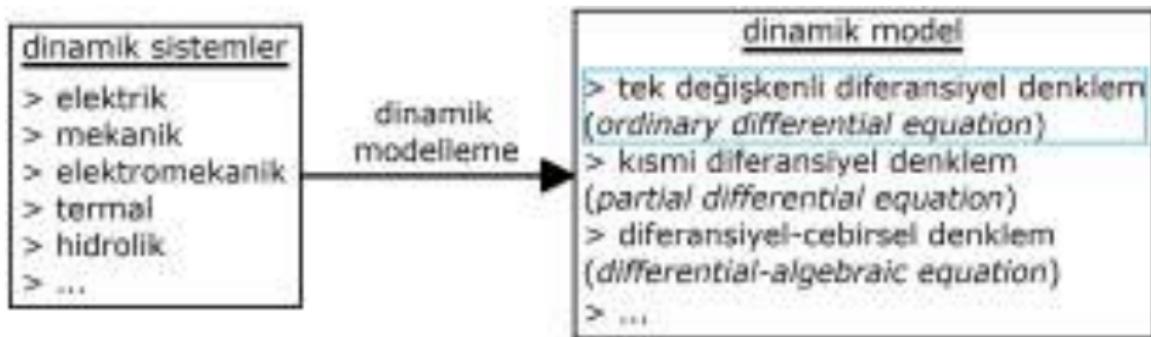
## 5. Sınav sorusu örnekleri - Ara sınav

## Bölüm 2

### Dinamik modelleme

# Dinamik modelleme - Giriş

**dinamik modelleme:** dinamik sistem davranışının matematiksel olarak ifade edilmesi



Dinamik modeller dinamik sistemlerin analizi, benzetimi, ve kontrolü için sistem davranışının temel özelliklerini ifade etmemizi sağlar.

Bu derste bazı mühendislik sistemleri için (tek değişkenli diferansiyel denklem formunda) dinamik modelleme yaklaşımlarını inceleyeceğiz.

# Dinamik modelleme - Giriş

Bütün modeller yanlıştır, ancak bazıları kullanışlıdır.

George E. P. Box

Kusursuz matematik model yoktur. Modeller uygulamanın gerektirdiği kadar karmaşık olmalıdır.

Kontrol için kurulan dinamik modellerin

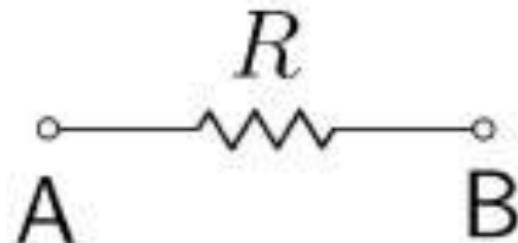
- ▶ **betimleyici** (sistemin temel özelliklerini ifade edebilir)
- ▶ **basit** (model ne kadar basit olursa, kontrol tasarımları ve tasarlanan kontrolör de o kadar basit olur)

olması gereklidir.

Alt Bölüm 1

Elektrik sistemler

# Direnç



$I(t)$ : akım (A)

$V_A(t)$ : A'daki gerilim (V)

$V_B(t)$ : B'daki gerilim (V)

$V_R(t) \triangleq V_A(t) - V_B(t)$

$R$ : direni (resistance) ( $\Omega$ )

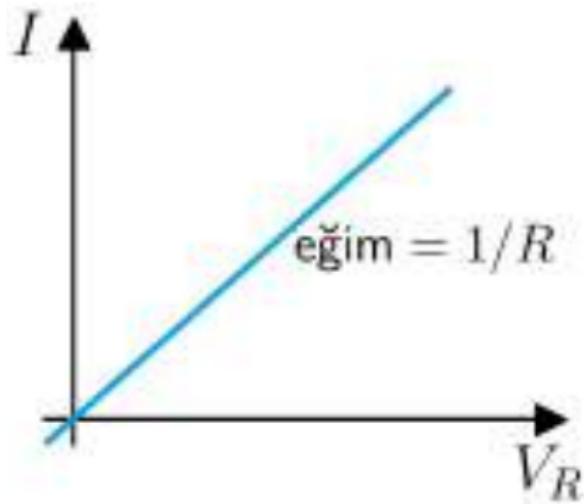
direncin doğrusal modeli (Ohm yasası):

$$V_R(t) = RI(t)$$

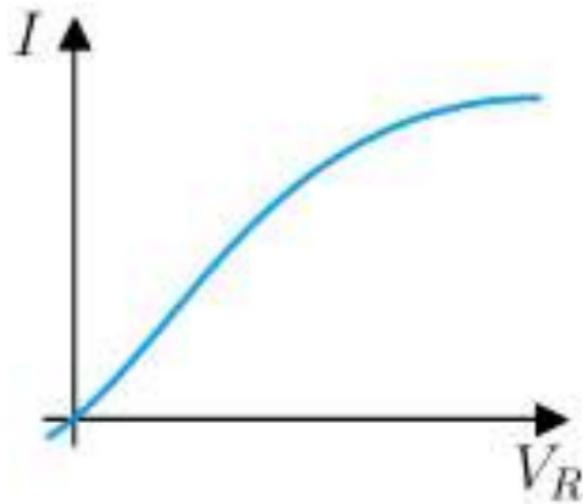
Direnç yitirgen (*dissipative*) elemandır (enerji ısı olarak kaybolur).

# Ohmik ve ohmik-olmayan dirençler (H)

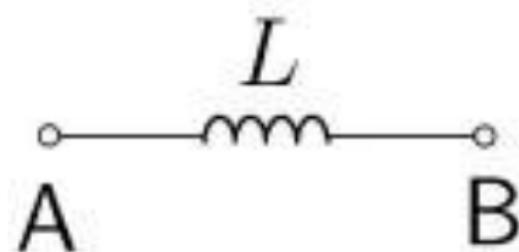
ohmik direnç  
(Ohm yasasına uyar)



ohmik-olmayan direnç  
(Ohm yasasına uymaz)



# Endüktör



$I(t)$ : akım (A)

$V_A(t)$ : A'daki gerilim (V)

$V_B(t)$ : B'daki gerilim (V)

$V_L(t) \triangleq V_A(t) - V_B(t)$

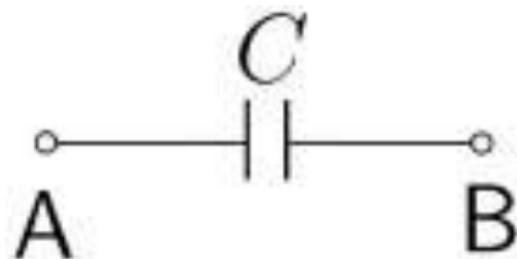
$L$ : endüktans (H)

endüktörün doğrusal modeli (Faraday yasası):

$$L\dot{I}(t) = V_L(t)$$

Endüktör manyetik alanda enerji biriktirir ( $E(t) = \frac{1}{2}LI^2(t)$ ).

# Kapasitör



$I(t)$ : akım (A)

$V_A(t)$ : A'daki gerilim (V)

$V_B(t)$ : B'daki gerilim (V)

$V_C(t) \triangleq V_A(t) - V_B(t)$

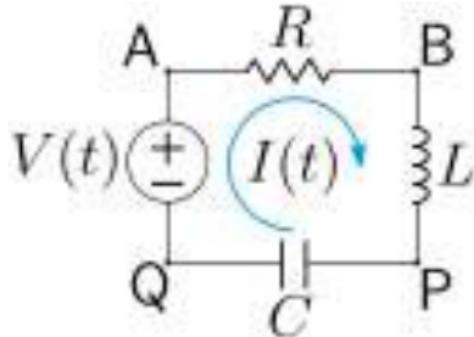
$C$ : kapasitans (F)

kapasitörün doğrusal modeli ([Kirchhoff'un akım yasası](#)):

$$I(t) = C\dot{V}_C(t)$$

Kapasitör elektrik alanda enerji biriktirir ( $E(t) = \frac{1}{2}CV_C^2(t)$ ).

## RLC devresi (1/2)



$I(t)$ : akım (A)

$V(t)$ : uygulanan gerilim (V)

$R$ : direni ( $\Omega$ )

$L$ : endüktans (H)

$C$ : kapasitans (F)

$$V_A(t) - V_B(t) = RI(t) \quad V_B(t) - V_P(t) = L\dot{I}(t)$$

$$V_P(t) - V_Q(t) = \frac{1}{C} \int I(t) dt \quad V(t) = V_A(t) - V_Q(t)$$

bu denklemleri tek denklemde toplarsak

$$V(t) = L\dot{I}(t) + RI(t) + \frac{1}{C} \int I(t) dt$$

şeklinde RLC devresinin doğrusal modelini elde ederiz.

## RLC devresi (2/2)

Bulunan model şu şekilde diferansiyel denklem haline getirilebilir: Kapasitörün üstündeki gerilim düşüşüne  $V_C(t)$  diyelim ( $V_C(t) \triangleq V_P(t) - V_Q(t)$ ).

$$V_C(t) = \frac{1}{C} \int I(t) dt \quad \Leftrightarrow \quad I(t) = C\dot{V}_C(t)$$

Buradan da RLC devresinin doğrusal modelini bir bağışık (*coupled*) diferansiyel denklem takımı olarak elde ederiz:

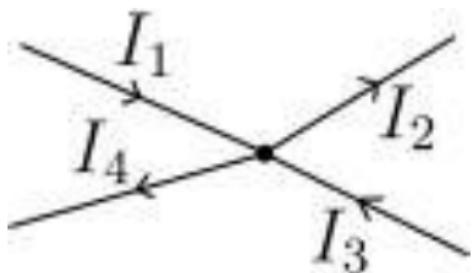
$$\boxed{\begin{aligned} V(t) &= L\dot{I}(t) + RI(t) + V_C(t) \\ I(t) &= C\dot{V}_C(t) \end{aligned}}$$

# Devrelerin davranışını belirleyen iki kural

## Kirchhoff'un akım yasası

Herhangi bir düğüme (*junction*) giren  
ve çıkan akımların toplamları eşittir.

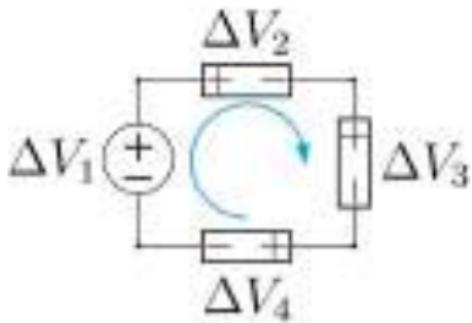
$$I_1 + I_3 = I_2 + I_4$$



## Kirchhoff'un gerilim yasası

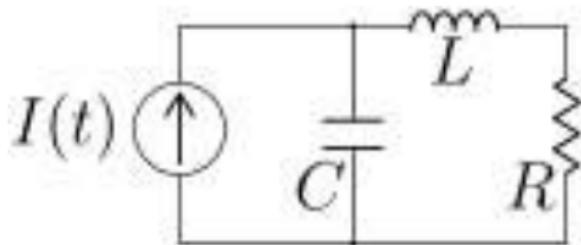
Herhangi bir döngü (*loop*) etrafındaki  
gerilim düşüşlerinin toplamı sıfırdır.

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \Delta V_4 = 0$$



## Sınav sorusu örneği

Aşağıda, parametreleri sırasıyla  $R$ ,  $L$  ve  $C$  olan direnç, endüktör ve kapasitörden oluşan bir RLC devresinin şeması verilmiştir.



Devreye ideal bir akım kaynağından sağlanan akım  $I(t)$  ile gösterilmiştir (not: ideal akım kaynağının devreye sağladığı akım, kaynağın üzerindeki gerilim düşüşünden bağımsızdır). Kapasitör üzerindeki gerilim düşüşüne  $V_C(t)$ , endüktör üzerindeki akıma  $I_L(t)$  diyelim. Devrenin dinamik modelini,  $V_C(t)$  ve  $I_L(t)$ 'nin dinamiklerini ifade edecek şekilde oluşturunuz.

## Sınav sorusu örneği - Çözüm

Kapasitör üzerindeki akıma  $I_C(t)$  diyelim. Kirchhoff'un akım yasasından  $I(t) = I_L(t) + I_C(t)$  ve  $\dot{V}_C(t) = C\dot{I}_C(t)$  yazabiliz. Buradan  $\dot{V}_C(t) = (1/C)I_C(t) = (1/C)I(t) - (1/C)I_L(t)$  yazarak  $V_C(t)$ 'nin dinamiklerini elde ederiz. Direncin ve endüktörün üzerindeki gerilim düşüşlerine sırasıyla  $V_R(t)$  ve  $V_L(t)$  diyelim. Ohm yasasından  $V_R(t) = RI_L(t)$ , Faraday yasasından  $V_L(t) = L\dot{I}_L(t)$  yazabiliz. Sağ taraftaki döngü için Kirchhoff'un gerilim yasasından

$V_C(t) = V_L(t) + V_R(t) = L\dot{I}_L(t) + RI_L(t)$  yazabiliz. Buradan da  $\dot{I}_L(t) = (1/L)V_C(t) - (R/L)I_L(t)$  yazarak  $I_L(t)$ 'nin dinamiklerini elde ederiz. Sonuç olarak RLC devresinin dinamik modeli ( $V_C(t)$  ve  $I_L(t)$ 'nin dinamikleri)

$$\dot{V}_C(t) = (1/C)I(t) - (1/C)I_L(t)$$

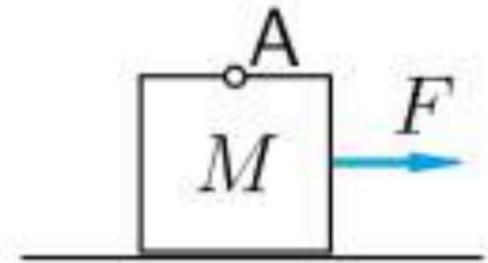
$$\dot{I}_L(t) = (1/L)V_C(t) - (R/L)I_L(t)$$

olarak elde edilir.

Alt Bölüm 2

Mekanik sistemler

# Katı cisim



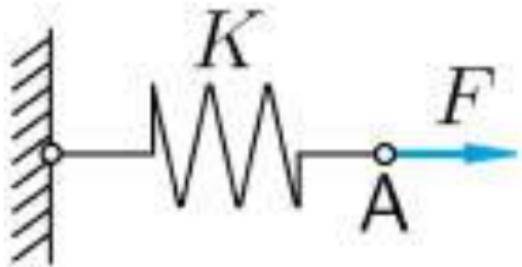
$F(t)$ : uygulanan kuvvet (N)  
 $q(t)$ : A'nın konumu (m)  
 $M$ : cismin kütlesi (kg)

cismin doğrusal modeli (Newton'un 2. yasası):

$$F(t) = M\ddot{q}(t)$$

Cisim harekette enerji biriktirir ( $E(t) = \frac{1}{2}M\dot{q}^2(t)$ ).

## Yay (bir ucu serbest)



$F(t)$ : uygulanan kuvvet (N)  
 $q(t)$ :  $A$ 'nın konumu (m)  
 $K$ : yay sabiti (N/m)

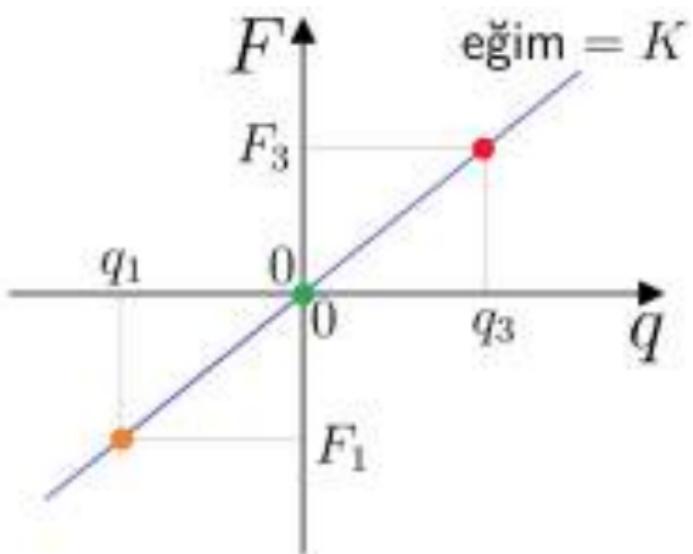
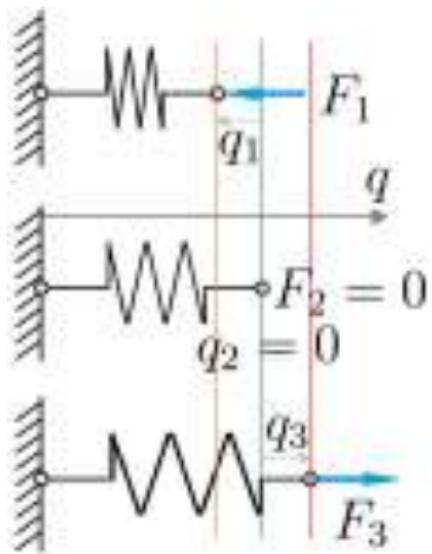
yayın doğrusal modeli (Hooke yasası):

$$F(t) = Kq(t)$$

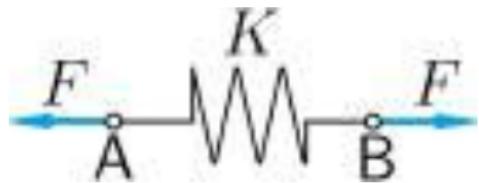
Not:  $q(t)$  yayın durgun (*rest*) konumundan ölçülür (durgun konumda  $q(t) = 0$ ).

Yay şekil değiştirmede enerji biriktirir ( $E(t) = \frac{1}{2}Kq^2(t)$ ).

## Yayın yerdeğiştirme-kuvvet karakteristiği



## Yay (iki ucu serbest)



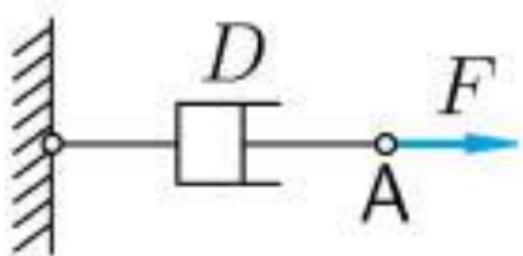
$F(t)$ : uygulanan kuvvet (N)  
 $q_A(t)$ : A'nın konumu (m)  
 $q_B(t)$ : B'nin konumu (m)  
 $K$ : yay sabiti (N/m)

yayın doğrusal modeli (Hooke yasası):

$$F(t) = K (q_B(t) - q_A(t))$$

biriken enerji:  $E(t) = \frac{1}{2}K(q_B(t) - q_A(t))^2$

## Damper (bir ucu serbest)



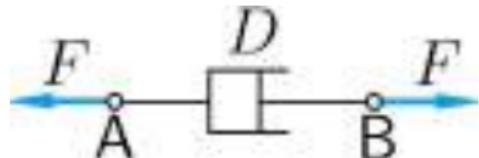
$F(t)$ : uygulanan kuvvet (N)  
 $q(t)$ : A'nın konumu (m)  
 $D$ : sönüm katsayısı (N s/m)

damperin doğrusal modeli ([viskoz sürtünme](#)):

$$F(t) = D\dot{q}(t)$$

Damper yitirgen elemandır (enerji ısı olarak kaybolur).

## Damper (iki ucu serbest)

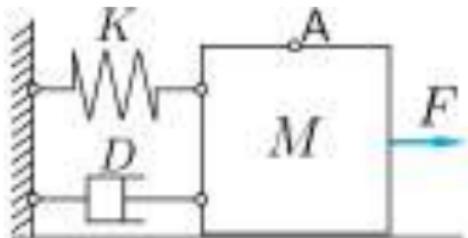


$F(t)$ : uygulanan kuvvet (N)  
 $q_A(t)$ : A'nın konumu (m)  
 $q_B(t)$ : B'nin konumu (m)  
 $D$ : sönüüm katsayıısı (N s/m)

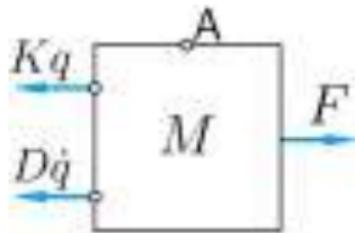
damperin doğrusal modeli ([viskoz sürtünme](#)):

$$F(t) = D (\dot{q}_B(t) - \dot{q}_A(t))$$

## Kütle-yay-damper sistemi



$F(t)$ : uygulanan kuvvet (N)  
 $q(t)$ : A'nın konumu (m)  
 $M$ : cismin kütlesi (kg)  
 $K$ : yay sabiti (N/m)  
 $D$ : sönüüm katsayı (N s/m)



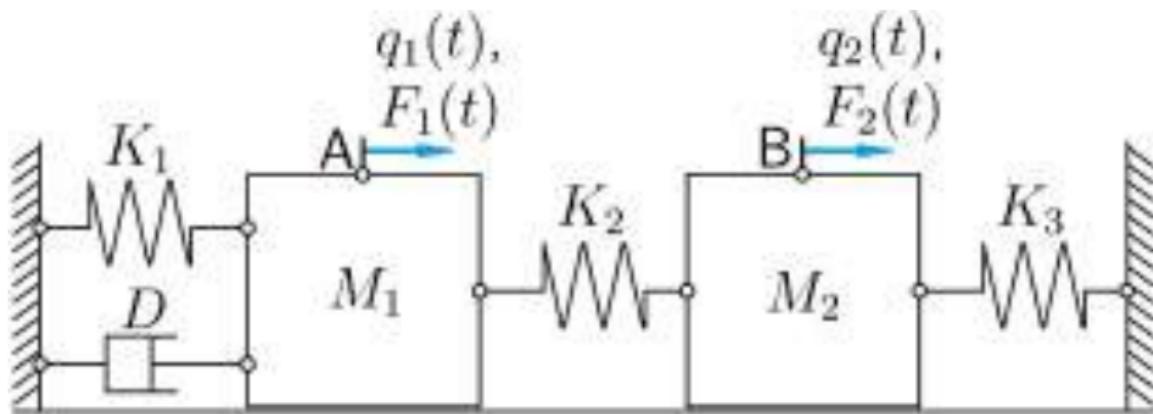
serbest cisim  
diagramı

Newton'un 2. yasası:

$$F(t) - D\dot{q}(t) - Kq(t) = M\ddot{q}(t)$$

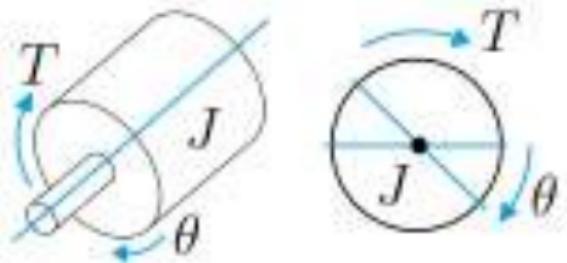
## Sınav sorusu örneği

Aşağıda bir kütle-yay-damper sisteminin şeması verilmiştir.  $M_1$  ve  $M_2$  cisimlerin kütleleri,  $K_1$ ,  $K_2$  ve  $K_3$  yay sabitleri,  $D$  ise sönüüm katsayısıdır.  $q_1(t)$  ve  $q_2(t)$  sırasıyla  $A$  ve  $B$  noktalarının yatay eksendeki konumlarını,  $F_1(t)$  ve  $F_2(t)$  ise cisimlere uygulanan kuvvetleri ifade etmektedir.



Sistemin dinamik modelini oluşturunuz.

# Katı cisim (dönme hareketi)



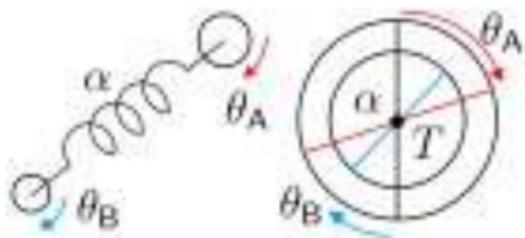
$T(t)$ : uygulanan tork (N m)  
 $\theta(t)$ : açısal konum (rad)  
 $J$ : eylemsizlik momenti ( $\text{kgm}^2$ )

cisinin doğrusal modeli (Newton'un 2. yasası):

$$T(t) = J\ddot{\theta}(t)$$

Cisim harekette enerji biriktirir ( $E(t) = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2(t)$ ).

# Yay (iki ucu serbest) (dönme hareketi)



$T(t)$ : uygulanan tork (N m)  
 $\theta_A(t)$ : A'nın açısal konumu (rad)  
 $\theta_B(t)$ : B'nin açısal konumu (rad)  
 $\alpha$ : yay sabiti (N/m)

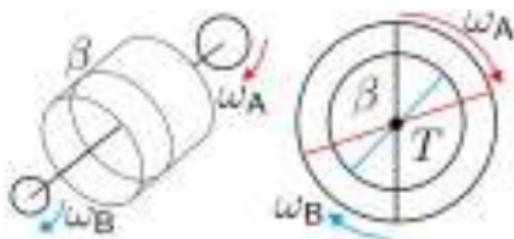
yayın doğrusal modeli (Hooke yasası):

$$T(t) = \alpha (\theta_A(t) - \theta_B(t))$$

Not:  $\theta_A(t)$  ve  $\theta_B(t)$  yayın durgun konumundan ölçülür (durgun konumda  $\theta_A(t) = 0$  ve  $\theta_B(t) = 0$ ).

Yay şekil değiştirmede enerji biriktirir ( $E(t) = \frac{1}{2}\alpha\theta^2(t)$ ).

## Damper (iki ucu serbest) (dönme hareketi)



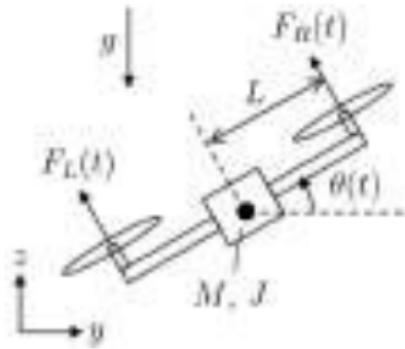
$T(t)$ : uygulanan tork (N m)  
 $\theta_A(t)$ : A'nın açısal konumu (rad)  
 $\theta_B(t)$ : B'nin açısal konumu (rad)  
 $\beta$ : sönüm katsayısı (N m s)

damperin doğrusal modeli (viskoz sürtünme):

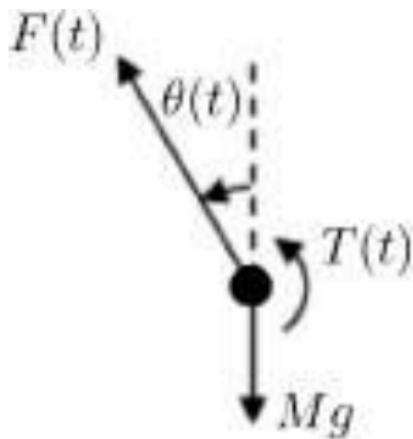
$$F(t) = \beta (\dot{\theta}_A(t) - \dot{\theta}_B(t))$$

Damper yitirgen elemandır (enerji ısı olarak kaybolur).

## Quadrotor (2D) (H)



- $F_L(t), F_R(t)$ : motor itkisi (*thrust*) (N)  
 $F(t)$ : motorun oluşturduğu kuvvet (N)  
 $T(t)$ : motorun oluşturduğu tork (N m)  
 $y(t)/z(t)$ : yatay/düsey konum (m)  
 $\theta(t)$ : açısal konum (rad)  
 $L$ : eksen açıklığı (m),  $M$ : kütle (kg)  
 $J$ : eylemsizlik momenti ( $\text{kgm}^2$ )  
 $g$ : yer çekimi ivmesi ( $\text{m/s}^2$ )



Newton'un 2. yasası:

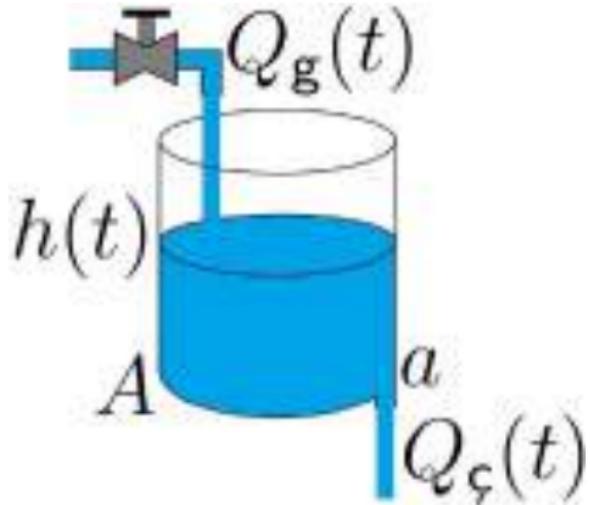
$$\begin{aligned}-F(t) \sin(\theta(t)) &= M\ddot{y}(t) \\ F(t) \cos(\theta(t)) - Mg &= M\ddot{z}(t) \\ T(t) &= J\ddot{\theta}(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(t) &= F_R(t) + F_L(t), \\ T(t) &= (F_R(t) - F_L(t))L\end{aligned}$$

Alt Bölüm 3

Hidrolik sistemler

## Bir tanklı sistem



$h(t)$ : su seviyesi (m)

$Q_g(t)$ : giren debi ( $\text{m}^3/\text{s}$ )

$Q_c(t)$ : çıkan debi ( $\text{m}^3/\text{s}$ )

$A$ : taban alanı ( $\text{m}^2$ )

$a$ : delik alanı ( $\text{m}^2$ )

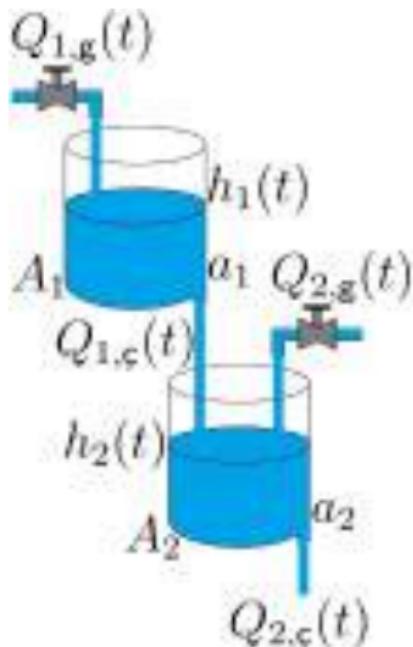
$g$ : yer çekimi ivmesi ( $\text{m}/\text{s}^2$ )

kütle (hacim) dengesi:

$$A \dot{h}(t) = Q_g(t) - Q_c(t)$$

Torricelli yasası:  $Q_c(t) = a\sqrt{2gh(t)}$

## İki tanklı sistem



$h_1(t), h_2(t)$ : su seviyesi (m)

$Q_{1,g}(t), Q_{2,g}(t)$ : giren debi ( $\text{m}^3/\text{s}$ )

$Q_{1,c}(t), Q_{2,c}(t)$ : çıkan debi ( $\text{m}^3/\text{s}$ )

$A_1, A_2$ : taban alanı ( $\text{m}^2$ )

$a_1, a_2$ : delik alanı ( $\text{m}^2$ )

$g$ : yer çekimi ivmesi ( $\text{m}/\text{s}^2$ )

kütle (hacim) dengesi:

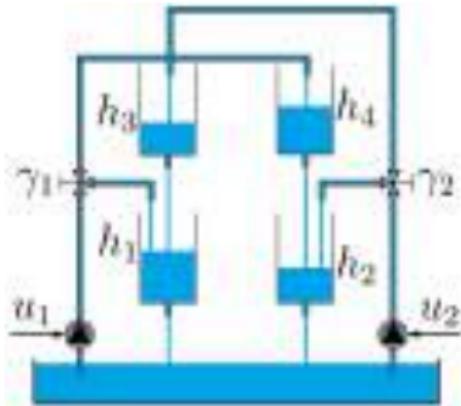
$$A_1 \dot{h}_1(t) = Q_{1,g}(t) - Q_{1,c}(t)$$

$$A_2 \dot{h}_2(t) = Q_{2,g}(t) + Q_{1,c}(t) - Q_{2,c}(t)$$

Torricelli yasası:  $Q_{1,c}(t) = a_1 \sqrt{2gh_1(t)}$

$Q_{2,c}(t) = a_2 \sqrt{2gh_2(t)}$

# Dört tanklı sistem<sup>4</sup> (H)



$i = 1, \dots, 4$  su tankı indisi

$h_i(t)$ : su seviyesi (m)

$A_i$ : taban alanı ( $\text{m}^2$ )

$a_i$ : delik alanı ( $\text{m}^2$ )

$k_1, k_2$ : pompa sabitleri ( $\text{m}^3/\text{Vs}$ )

$\gamma_1, \gamma_2$ : vana katsayıları (—)

$g$ : yer çekimi ivmesi ( $\text{m/s}^2$ )

$$A_1 \dot{h}_1(t) = -a_1 \sqrt{2gh_1(t)} + a_3 \sqrt{2gh_3(t)} + \gamma_1 k_1 u_1(t)$$

$$A_2 \dot{h}_2(t) = -a_2 \sqrt{2gh_2(t)} + a_4 \sqrt{2gh_4(t)} + \gamma_2 k_2 u_2(t)$$

$$A_3 \dot{h}_3(t) = -a_3 \sqrt{2gh_3(t)} + (1 - \gamma_2) k_2 u_2(t)$$

$$A_4 \dot{h}_4(t) = -a_4 \sqrt{2gh_4(t)} + (1 - \gamma_1) k_1 u_1(t)$$

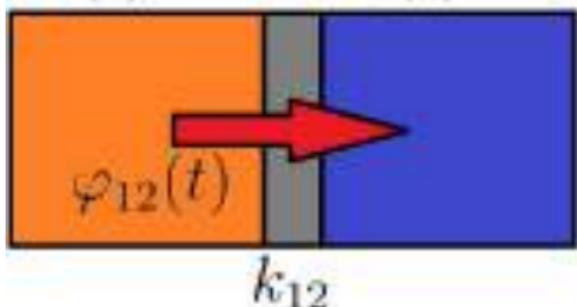
<sup>4</sup>Karl Henrik Johansson. "The quadruple-tank process: A multivariable laboratory process with an adjustable zero". In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 8.3 (2000), pp. 456–465.

Alt Bölüm 4

Termik sistemler

## İki cisimli termik sistem

$$T_1(t), C_1 \quad T_2(t), C_2$$



$T_1(t), T_2(t)$ : sıcaklık (K)

$C_1, C_2$ : ısı sığası (J/K)

$k_{12}$ : ısı geçiş katsayısı (J/K)

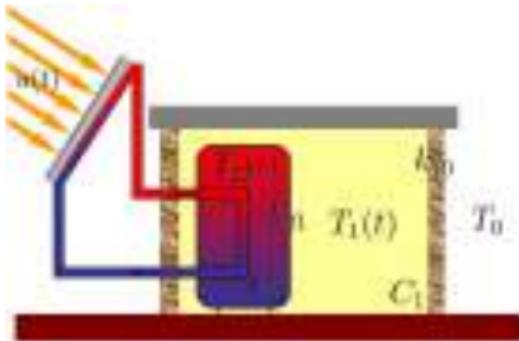
$\varphi_{12}(t)$ : ısı akışı (W)

enerji dengesi (1):  $C_1 \dot{T}_1(t) = -\varphi_{12}(t)$

enerji dengesi (2):  $C_2 \dot{T}_2(t) = \varphi_{12}(t)$

ısı geçiş denklemi:  $\varphi_{12}(t) = k_{12}(T_1(t) - T_2(t))$

# Güneş kolektörü<sup>5</sup>



$T_1(t), T_2(t), T_0$ : sıcaklık (K)

$C_1, C_2$ : ısı sığası (J/K)

$k_{10}, k_{21}$ : ısı geçiş katsayısı (J/K)

$\varphi_{10}(t), \varphi_{21}(t)$ : ısı akışı (W)

$u(t)$ : kolektör gücü (W)

$$\text{enerji dengesi (1): } C_1 \dot{T}_1(t) = -\varphi_{10}(t) + \varphi_{21}(t)$$

$$\text{enerji dengesi (2): } C_2 \dot{T}_2(t) = -\varphi_{21}(t) + u(t)$$

ısı geçiş denklemleri:

$$\varphi_{10}(t) = k_{10}(T_1(t) - T_0)$$

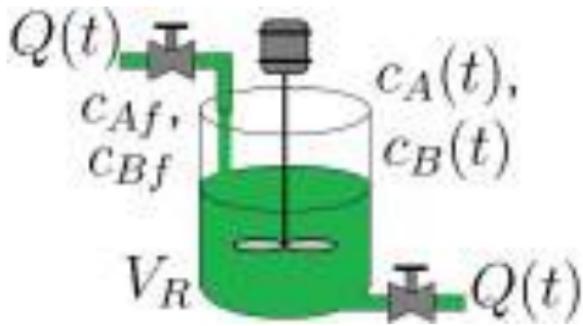
$$\varphi_{21}(t) = k_{21}(T_2(t) - T_1(t))$$

<sup>5</sup>kaynak: [Automatic Control 1&2](#) (ders slaytları), Alberto Bemporad, IMT Lucca

## Alt Bölüm 5

Kimyasal süreç sistemleri

# Sürekli-akışlı karıştırımlı-tank reaktör<sup>6</sup> (H)



tepkime:  $A \rightarrow B$

tepkime hızı =  $k_r c_A(t)$

$k_r$ : tepkime hız sabiti (1/s)

$c_A(t)/c_B(t)$ : A'nın/B'nin molar derişimi (mol/L)

$Q(t)$ : malzeme akışı (L/s)

$c_{Af}/c_{Bf}$ : A'nın/B'nin besleme derişimi (mol/L)

$V_R$ : reaktör hacmi (L)

$$\text{malzeme dengesi (A): } \dot{c}_A(t) = \frac{Q(t)}{V_R} (c_{Af} - c_A(t)) - k_r c_A(t)$$

$$\text{malzeme dengesi (B): } \dot{c}_B(t) = \frac{Q(t)}{V_R} (c_{Bf} - c_B(t)) + k_r c_A(t)$$

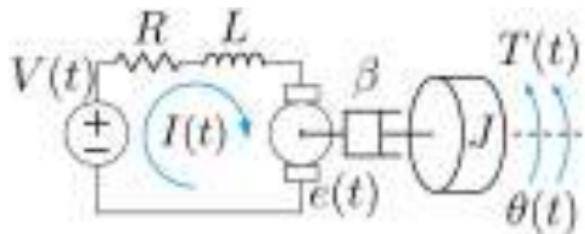
<sup>6</sup>Moritz Diehl, Rishi Amrit, and James B Rawlings. "A Lyapunov function for economic optimizing model predictive control". In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 56.3 (2010), pp. 703–707. URL:

<https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=5672577>.

## Alt Bölüm 6

Çoklu alanlı (*multi-domain*) sistemler

# DC motor (elektromekanik sistem)



$\theta(t)$ : motor mili açısal konumu (rad)

$T(t)$ : motorun ürettiği tork (N m)

$I(t)/V(t)$ : armatür akımı/gerilimi (A)/(V)

$e(t)$ : zıt elektromotor kuvvet (EMK) (V)

$R$ : direnç ( $\Omega$ )     $L$ : endüktans (H)

$J$ : rotor eylemsizlik momenti ( $\text{kgm}^2$ )

$\beta$ : motor sönüümleme katsayısı (N m s)

$K_T$ : motor tork sabiti (N m/A)

$K_E$ : EMK sabiti (V s/rad)

$$J\ddot{\theta}(t) = T(t) - \beta\dot{\theta}(t)$$

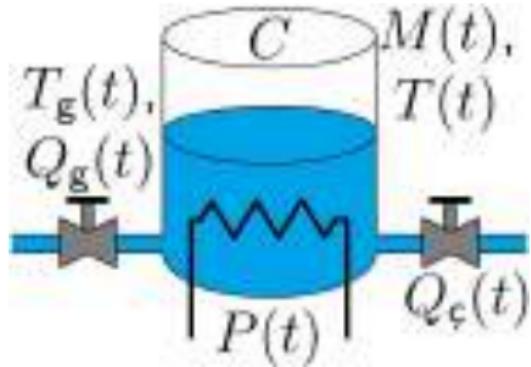
$$V(t) = RI(t) + LI'(t) + e(t)$$

tork-akım denklemi:  $T(t) = K_T I(t)$

zıt EMK-açısal hız denklemi:  $e(t) = K_E \dot{\theta}(t)$

not:  $K_T = K_E$  (enerji korunumu)

## Su ısıtıcısı (termohidrolik sistem) (H)



$M(t)$ : tanktaki su kütlesi (kg)

$Q_g(t)$ : giren debi (kg/s)

$Q_c(t)$ : çıkan debi (kg/s)

$T(t)$ : tanktaki su sıcaklığı (K)

$T_g(t)$ : giren su sıcaklığı (K)

$P(t)$ : ısıtıcı gücü (W)

$C$ : suyun kütlesel ısı sıgası  
(J/(kg K))

$$\text{kütle dengesi: } \dot{M}(t) = Q_g(t) - Q_c(t)$$

$$\text{enerji dengesi: } \dot{T}(t) = \frac{Q_g(t)}{M(t)}(T_g(t) - T(t)) + \frac{P(t)}{M(t)C}$$

## Alt Bölüm 7

Durum uzayı modeli

# Durum uzayı modeli

$n$  boyutlu,  $m$  girişli,  $q$  çıkışlı dif. denklem sistemi

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

durum  
vektörü:  
 $x(t) \in \mathbb{R}^n$

giriş  
vektörü:  
 $u(t) \in \mathbb{R}^m$

çıkış  
vektörü:  
 $y(t) \in \mathbb{R}^q$

Rudolf E.  
Kálmán  
(1930-2016)

$$x(t) \triangleq \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad u(t) \triangleq \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad y(t) \triangleq \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix}$$

$t \in \mathbb{R}$  : sürekli zaman

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  : durum matrisi

$C \in \mathbb{R}^{q \times n}$  : çıkış matrisi

$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  : giriş matrisi

$D \in \mathbb{R}^{q \times m}$  : ileri besleme matrisi



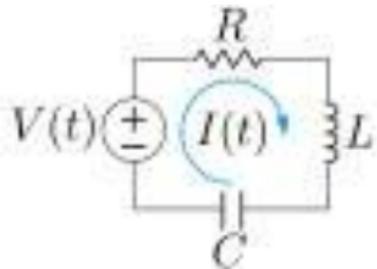
# Durum değişkenlerinin seçimi

**pratik kural:** durum değişkenlerinin sayısı  
= enerji depolayabilen elemanların sayısı

sistem türü	eleman	enerji	durum
elektrik	endüktör kapasitör	pot. manyetik enerji: $\frac{1}{2}LI^2$ pot. elektrik enerji: $\frac{1}{2}CV_C^2$	akım gerilim
mekanik (ötelenme)	kütle yay	kinetik enerji: $\frac{1}{2}M\dot{q}^2$ pot. elastik enerji: $\frac{1}{2}Kq^2$	hız konum
mekanik (dönme)	kütle yay	kinetik enerji: $\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$ pot. elastik enerji: $\frac{1}{2}\alpha q^2$	hız konum
hidrolik	su tankı	pot. yerçekimsel enerji: $mgh$	seviye
termal	ısıl cisim	İç enerji: $CT$	sıcaklık

Durum değişkenlerinin seçimi seçilen çıkış değişkenlerine de bağlıdır.

# Durum uzayı modeli - RLC devresi



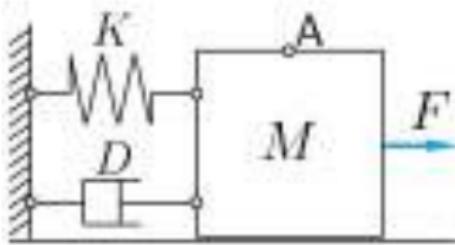
$$\boxed{\begin{aligned}V(t) &= LI(t) + RI(t) + V_C(t) \\I(t) &= CV_C(t)\end{aligned}}$$

$$x_1(t) = I(t) \quad x_2(t) = V_C(t) \quad y_1(t) = V_C(t)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{I}(t) \\ \dot{V}_C(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} I(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{V}_{\tilde{u}}$$

$$\underbrace{y_1(t)}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} I(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_D \underbrace{V(t)}_u$$

## Durum uzayı modeli - KYD sistemi



$$F(t) - D\dot{q}(t) - Kq(t) = M\ddot{q}(t)$$

$$x_1(t) = \dot{q}(t) \quad x_2(t) = \ddot{q}(t) \quad y_1(t) = q(t)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{D}{M} & -\frac{K}{M} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ q(t) \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix}}_B \underbrace{F(t)}_u$$

$$\underbrace{y_1(t)}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q}(t) \\ q(t) \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_D \underbrace{F(t)}_u$$

# EEM314 dersi ile bağlantı

**Örnek:** Transfer fonksiyonundan durum uzayına geçiş

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$(s^2 + a_1 s + a_0) Y(s) = b_0 U(s) \quad \mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

$$x_1(t) \triangleq y(t) \quad x_2(t) \triangleq \dot{y}(t)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad \dot{x}_2(t) = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) + b_0 u(t)$$

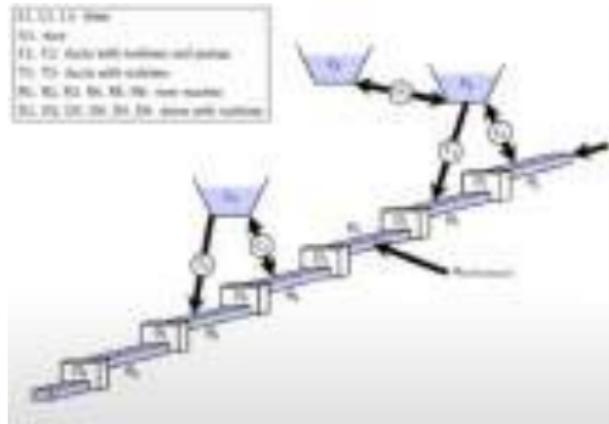
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix}}_B u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_D u(t)$$

## Alt Bölüm 8

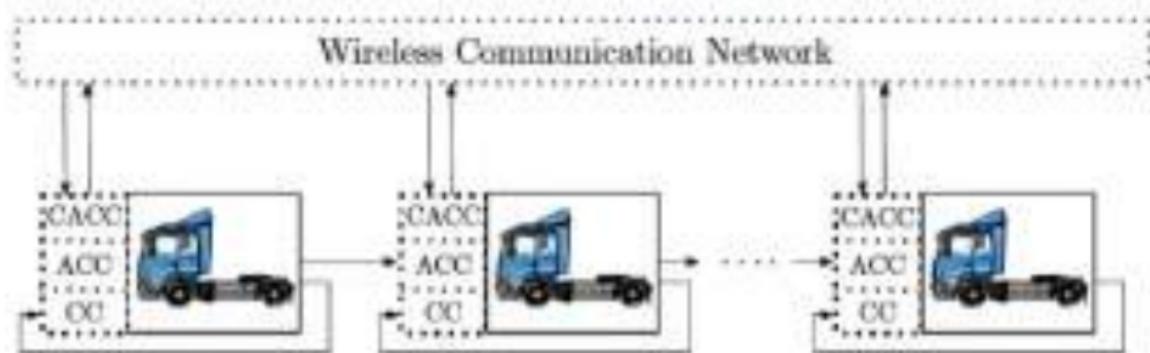
### Uygulama örnekleri

# Hidroelektrik güç vadisi<sup>7</sup>



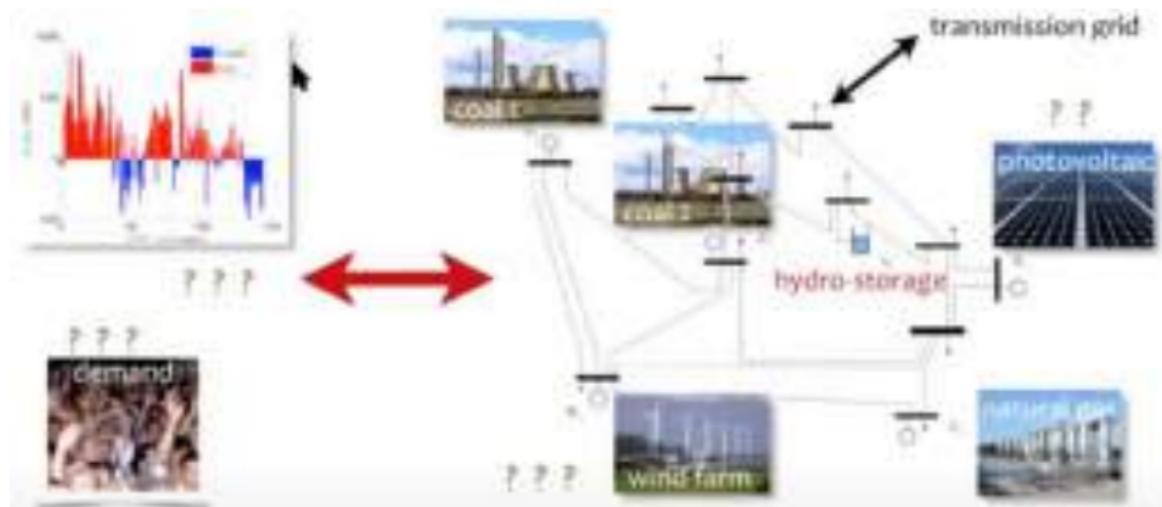
<sup>7</sup>kaynak: *Nonlinear MPC and distributed multiple shooting method (2/2)*, M. Diehl

# Otonom araç konvoyu (*platoon*)<sup>8</sup>



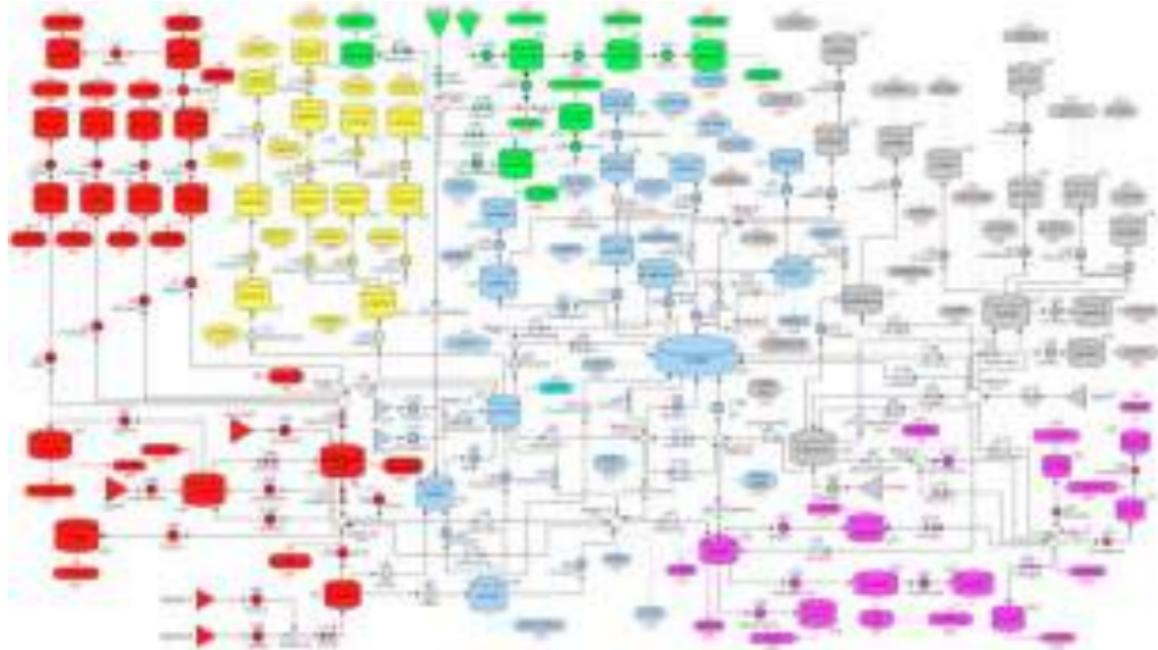
<sup>8</sup>kaynak: *Freight transport using automated truck platoons*, K.H. Johansson

# Akıllı elektrik ağları<sup>9</sup>



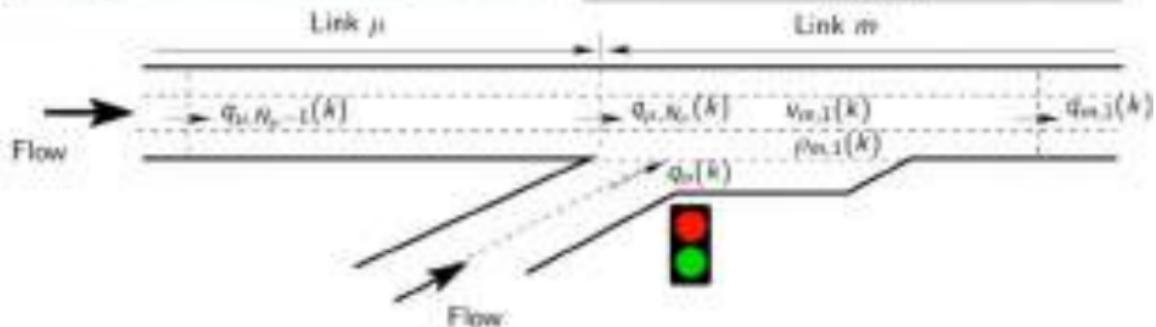
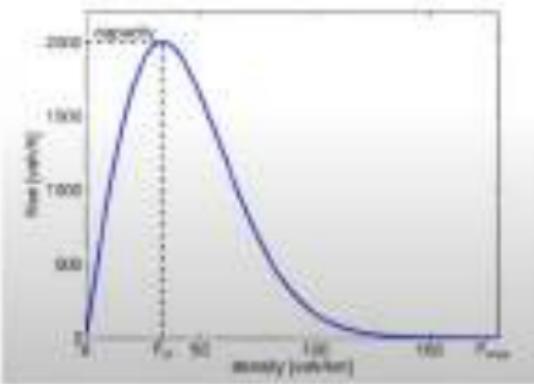
<sup>9</sup>kaynak: *Fast proximal algorithms for nonconvex and large-scale optimization*, P. Patrinos

# Su temin ağları<sup>10</sup>



<sup>10</sup>Ajay Kumar Sampathirao et al. "GPU-accelerated stochastic predictive control of drinking water networks". In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 26.2 (2017), pp. 551–562.

# Karayolu trafiği ağları<sup>11</sup>



<sup>11</sup>kaynak: *Efficient model-based control methods for urban & freeway traffic networks*, B. de Schutter

## Bölüm 3

Sürekli-zamanlı doğrusal sistemler

## Alt Bölüm 1

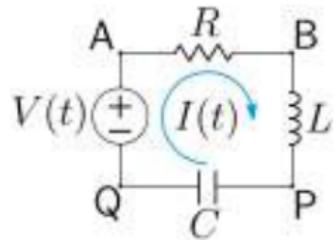
Dinamik sistemler ve dinamik modeller

# Dinamik sistemler

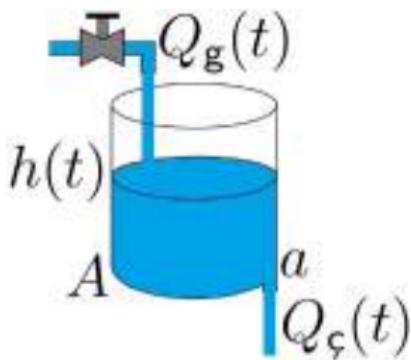
- ▶ Dinamik sistem, bir veya birden fazla cisimden oluşan, davranışı zaman içinde (ve muhtemelen harici etkiler altında) gerçekleşen yapıdır.
- ▶ Dinamik sistemlere örnekler: Taşıtlar, robotlar, elektrik devreleri, canlı popülasyonları, altyapı ağları vb.
- ▶ Sistemin davranışının gerçekleşme şekline sistemin dinamiği (*dynamics*) denir.
- ▶ Bir sistemin dinamik modeli (*dynamical model*), sistemin davranışının zaman içinde, genellikle harici etkiler altında, nasıl gerçekleştiğini açıklayan matematiksel cisimlerdir (genellikle diferansiyel denklem).
- ▶ Bir dinamik sistemle ilgili sorulabilecek temel sorular:
  - Sistemi anlamak (“X ve Y birbirini nasıl etkiler?”)
  - Benzetim (“Z etkisini sisteme uygularsam ne olur?”)
  - Tasarım (“Sistemin istediğim şekilde davranışmasını nasıl sağlarım?”)

# Dinamik sistemlere örnekler (1/2)

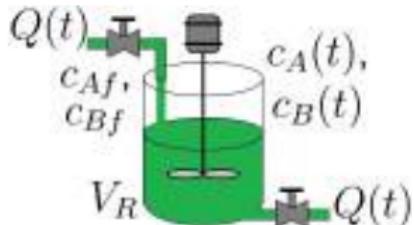
## elektrik sistemler



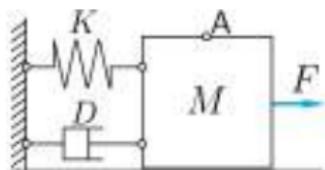
## hidrolik sistemler



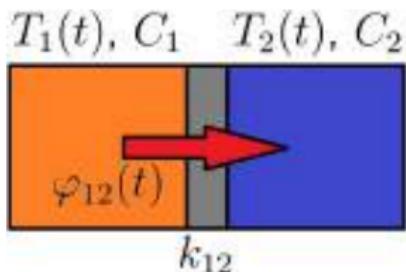
## kimyasal süreç sistemleri



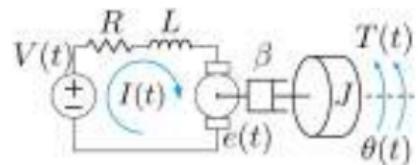
## mekanik sistemler



## termik sistemler



## elektromekanik sistemler



## Dinamik sistemlere örnekler (2/2)

taşıtlar



elektrikli/elektronik  
cihazlar



altyapı ağları



robotlar



ulaşım sistemleri



kimyasal tesisler



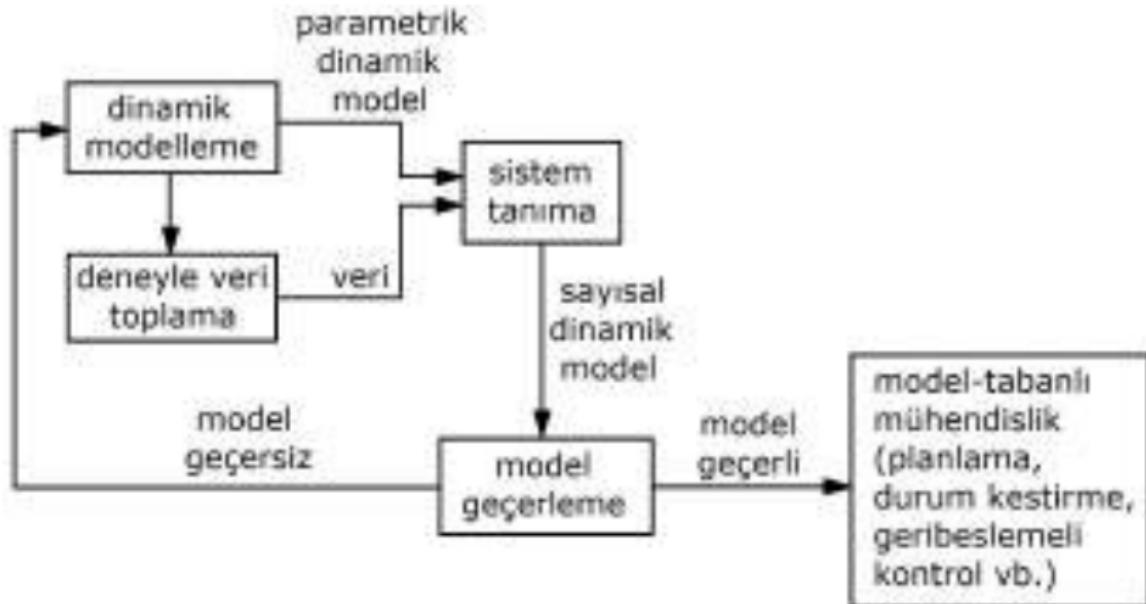
# Dinamik modeller

- ▶ Dinamik sistem üzerinde yapılan deneylerle sistemle ilgili sorulara yanıt verilebilir, ancak bu amaçla deney yapmanın bazı sakıncaları vardır:
  - çok pahalı olabilir (örnek: uzay mekiği fırlatmak)
  - çok tehlikeli olabilir (örnek: nükleer santral)
  - imkansız olabilir (sistem henüz mevcut değil)
- ▶ Buna karşılık, dinamik modellerle
  - sistemde gerçekleşen temel davranışları ifade edebiliriz (örnek: Newton yasası cisme uygulanan kuvvet ivme oluşturur)
  - sistemi analiz edebiliriz (dinamik değişkenler arasındaki ilişkileri inceleyebiliriz)
  - sistemin belirli şartlar ve etkiler altında nasıl davranışlığını benzetim (simülasyon) ve öngörü olarak hesaplayabiliriz (analitik formda, veya bilgisayar ile)

# Dinamik modeller

- ▶ Dinamik model üzerinde çalışmak, gerçek sistem üzerinde deney yapmaya kıyasla çok düşük maliyetlidir (sadece matematiksel düşünme, kağıt üzerinde yazma/hesaplama ve bilgisayar programlama gerektirir)
- ▶ Bununla birlikte sistemin benzetimi (veya dinamik model yardımıyla oluşturulmuş diğer çıkarımlar) dinamik model gerçek sisteme ne kadar yakınsa ancak o kadar iyi olabilir
- ▶ Dinamik modellemede birbiriyle çelişen amaçlar:
  - Model, sistemin temel davranışını ifade edebilecek seviyede betimleyici (*descriptive*) olmalı
  - Model, sistemin analizine (ve bun bağlı benzetim, kontrol tasarımı vb. işlere) mümkün kılacak seviyede basit (*simple*) olmalı

# Uygulamada dinamik modelleme prosedürü



## Alt Bölüm 2

### Doğrusal diferansiyel denklemler

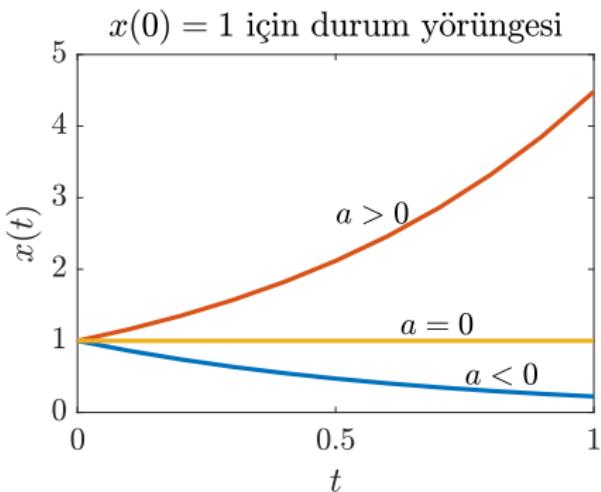
# Doğrusal diferansiyel denklemler

bir boyutlu tek değişkenli diferansiyel denklem

$$\dot{x}(t) = ax(t) \quad x(0) = x_0$$

$$x \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R} \quad \dot{x} \triangleq \frac{dx}{dt} \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

denklemin çözümü:  
 $x(t) = e^{at}x_0$



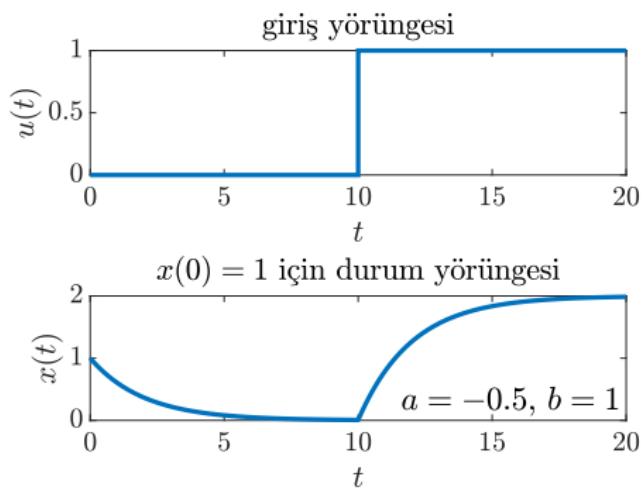
# Doğrusal diferansiyel denklemeler

bir boyutlu, bir girişli tek değişkenli diferansiyel denklem

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \quad x(0) = x_0$$
$$x \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad u \in \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

denklemin çözümü:

$$x(t) = \underbrace{e^{at}x_0}_{\text{doğal çözüm}} \dots$$
$$+ \underbrace{\int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau}_{\text{zorlanmış çözüm}}$$



# Sürekli-zamanlı doğrusal (SZD) sistemler

$n$  boyutlu,  $m$  girişli,  $q$  çıkışlı tek değişkenli  
diferansiyel denklem



**durum uzayı modeli**  $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$

durum vektörü:	giriş vektörü:	çıkış vektörü:
$x(t) \in \mathbb{R}^n$	$u(t) \in \mathbb{R}^m$	$y(t) \in \mathbb{R}^q$

Rudolf E.  
Kálmán  
(1930-2016)

$$x(t) \triangleq \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad u(t) \triangleq \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \quad y(t) \triangleq \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix}$$

$t \in \mathbb{R}$  : sürekli zaman

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  : durum matrisi

$C \in \mathbb{R}^{q \times n}$  : çıkış matrisi

$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  : giriş matrisi

$D \in \mathbb{R}^{q \times m}$  : ileri besleme matrisi

## **n. derece diferansiyel denklem**

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = 0$$

$$x_1 \triangleq y, x_2 \triangleq \frac{dy}{dt}, \dots, x_n \triangleq \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}$$

*n* adet 1. derece dif. denklem:

$$\dot{x} = Ax$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\dot{x}_n = -a_0 x_1 + \cdots - a_{n-1} x_n$$

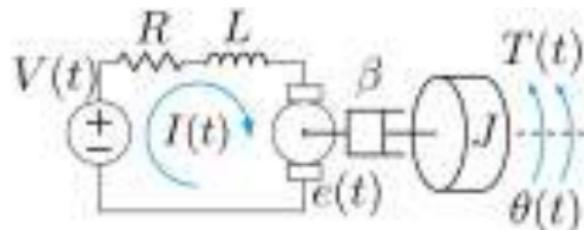
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

**örnek:**  $\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = 0$   
 $x_1 \triangleq y, x_2 \triangleq \dot{y}$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} x$$

## Sınav sorusu örneği

Aşağıda armatür kontrollü bir doğru akım motorunun şeması verilmiştir.



$R$  ve  $L$  direnç ve endüktör elemanlarının parametrelerini,  $\beta$  sönüüm katsayısını,  $J$  rotor eylemsizlik momentini,  $K$  ise motor sabitidir ( $K = K_T = K_E$ ). Sistemin durumu

$x(t) = [\dot{\theta}(t) \quad I(t)]^T$ , girişi  $u(t) = V(t)$ , parametreleri ise  $R = L = \beta = J = K = 1$  olarak verilsin. Verilenlerle oluşan durum uzayı modelini şu şekilde yazabiliriz:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Durum matrisi  $A$ 'yı ve giriş matrisi  $B$ 'yi bulunuz.

## Alt Bölüm 3

Doğrusal cebir (hatırlatma)

# Doğrusal cebir (hatırlatma)

$n$  boyutlu kare matris:

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$n$  boyutlu birim matris:

$$I \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$A$ 'nın karakteristik denklemi:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$A$ 'nın karakteristik polinomu:

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n_1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

## Doğrusal cebir (hatırlatma)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 'nın özdeğerleri, karakteristik polinomunun  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ile gösterilen kökleridir:

$$\det(\lambda_i I - A) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 'nın özvektörleri  $A\nu_i = \lambda_i \nu_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ifadesini sağlayan  $\nu_i \in \mathbb{R}^n$  formundaki vektörlerdir.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 'nın diyagonallaştırılması:

$$\Lambda \triangleq \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = T^{-1}AT \quad T \triangleq \begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_n \end{bmatrix}$$

(not: her matris diyagonallaştırılabilir değildir)

# Doğrusal cebir (hatırlatma)

Matris eksponansiyeli, kare matrisler için

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

şeklinde tanımlanan bir matris fonksiyonudur.

2 boyutlu kare matrisin determinantı:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2. derece denklem ve çözümü:

$$x^2 + px + q = 0 \quad x = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

# Doğrusal cebir (hatırlatma)

**Örnek:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ matrisinin özdeğerlerini bulunuz.}$$

**Çözüm:**

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \right|$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 3 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 10$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 10 = 0$$

$$\rightarrow \lambda_1 = 2.5 + 1.9365j \quad \lambda_2 = 2.5 - 1.9365j$$

## Alt Bölüm 4

Sürekli zamanda durum yanıtı

# SZD sistemlerde durum yanıtı

Aşağıdaki SZD sistem için

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

belirli bir başlangıç durumu  $x(0) = x_0$  ve giriş yörüngesi  $u, \forall t \in [0, T]$  verildiğinde,  $t \in [0, T]$  için sistemin durum yörüngesini analitik olarak şu şekilde hesaplayabiliriz

$$x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{\text{doğal yanıt}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\text{zorlanmış yanıt}}$$

Eğer başlangıç durumu  $x(0) = x_0$ 'ı biliyorsak, durum yörüngesini hesaplamak için sistemin geçmişteki yörüngelerini (yani,  $t < 0$  için  $x(t)$  ve  $u(t)$ 'yi) bilmemiz gerekmektedir.

**Genel olarak, bir dinamik sistemin durumu o sistemin geçmişini eksiksiz olarak özetleyen ve gelecekteki hareketini öngörmemizi sağlayan değişkenlerin oluşturduğu vektördür.**

# SZD sistemlerde doğal yanıt

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

şeklindeki SZD sistem için  $u(t) = 0$  ve  $A$ 'nın köşegenleştirilebilir olduğunu varsayıyalım.

$$A = T\Lambda T^{-1}$$

$$\Lambda \triangleq \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad T \triangleq \begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_n \end{bmatrix}$$

( $\lambda_i$ :  $A$ 'nın özdeğerleri,  $\nu_i$ :  $A$ 'nın özvektörleri ( $i = 1, \dots, n$ ))

# SZD sistemlerde doğal yanıt

$$x(t) = e^{At}x_0 = T e^{\Lambda t} \underbrace{T^{-1}x_0}_{\alpha}$$

(ters çevrilebilen  $Y$  için:  $e^{YXY^{-1}} = Y e^{X} Y^{-1}$ )

$$= [\nu_1 \quad \nu_2 \quad \dots \quad \nu_n] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \alpha$$

$$= [\nu_1 e^{\lambda_1 t} \quad \nu_2 e^{\lambda_2 t} \quad \dots \quad \nu_n e^{\lambda_n t}] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i t} \nu_i$$

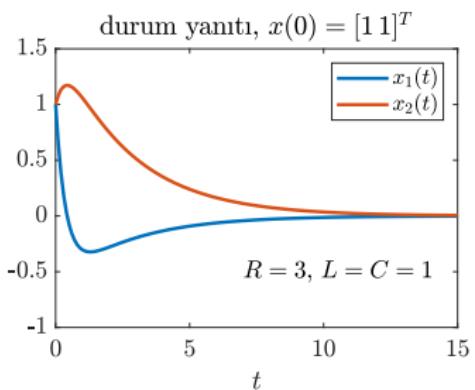
**SZD bir sistemin doğal yanıtı  
 $A$  matrisinin özdeğerlerine bağlıdır.**

# SZD sistemlerde doğal yanıt

Örnek 1: Reel özdeğerler

RLC devresi ( $R = 3$ ,  $L = C = 1$ )

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



$$\Lambda \triangleq \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = -2.62 \quad \lambda_2 = -0.38$$

$$T \triangleq \begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 \end{bmatrix} \quad \nu_1 = \begin{bmatrix} -0.93 \\ 0.36 \end{bmatrix} \quad \nu_2 = \begin{bmatrix} 0.36 \\ -0.93 \end{bmatrix}$$

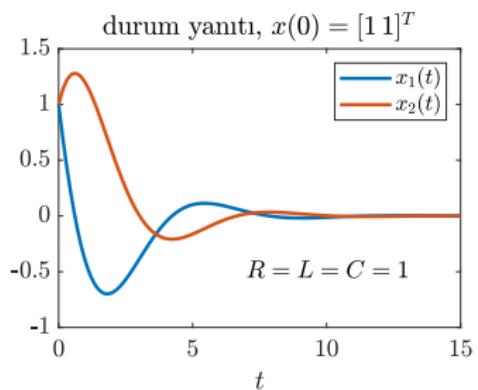
$$\alpha \triangleq T^{-1}x_0 = \begin{bmatrix} -1.73 \\ -1.73 \end{bmatrix} \quad x(t) = \begin{bmatrix} 1.62 \\ -0.62 \end{bmatrix} e^{-2.62t} + \begin{bmatrix} -0.62 \\ 1.62 \end{bmatrix} e^{-0.38t}$$

# SZD sistemlerde doğal yanıt

**Örnek 2:** Karmaşık özdeğerler

RLC devresi ( $R = L = C = 1$ )

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



$$\Lambda \triangleq \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = -0.5 + 0.87j \quad \lambda_2 = -0.5 - 0.87j$$

$$T \triangleq \begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 \end{bmatrix} \quad \nu_1 = \begin{bmatrix} -0.35 + 0.61j \\ 0.71 \end{bmatrix} \quad \nu_2 = \begin{bmatrix} -0.35 - 0.61j \\ 0.71 \end{bmatrix}$$

$$\alpha \triangleq T^{-1}x_0 = \begin{bmatrix} 0.71 - 0.41j \\ 0.71 + 0.41j \end{bmatrix} \quad x(t) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i e^{\lambda_i t} \nu_i$$

## Alt Bölüm 5

Sürekli zamanda kararlılık

## Kararlılığın tanımı (sürekli zaman)

Aşağıdaki doğrusal olmayan sistemi

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

ve bu sistemin  $x_d$  ile verilen bir denge durumunu ele alalım.  
( $f(x_d) = 0$ 'yi sağlayan noktalara denge durumu denir)

Eğer  $x_d$ 'ye yeterince yakın her bir başlangıç durumu  $x(0)$  için, durum yörüngesi  $x$   $x_d$ 'nin yakınında kalıyorsa, bu denge durumuna **kararlı** denir. Matematiksel olarak ifade edersek:

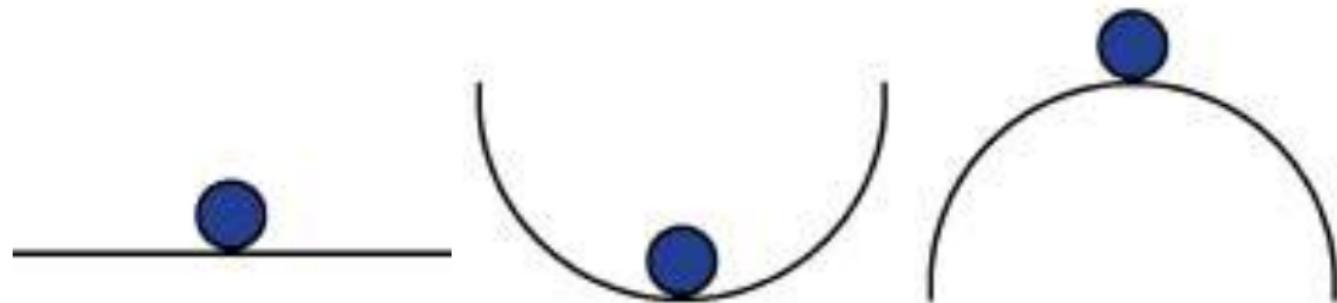
$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \|x(0) - x_d\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_d\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

Eğer denge durumu  $x_d$  kararlıysa ve  $t \rightarrow \infty$  için  $x(t) \rightarrow x_d$  ise,  $x_d$ 'ye **asimptotik kararlı** denir.

Bunların haricindeki durumlarda  $x_d$ 'ye **kararsız** denir.

## Kararlılık çeşitleri

**Örnek:** Yer çekimli ortamda sürtünmeli zeminde top



kararlı  
(sürtünme yoksa  
kararsız)

asimptotik kararlı  
(sürtünme yoksa  
marjinal kararlı)

kararsız

# Bir boyutlu SZD sistemin kararlılığı

Aşağıdaki bir boyutlu SZD sistemi

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \quad x(0) = x_0$$

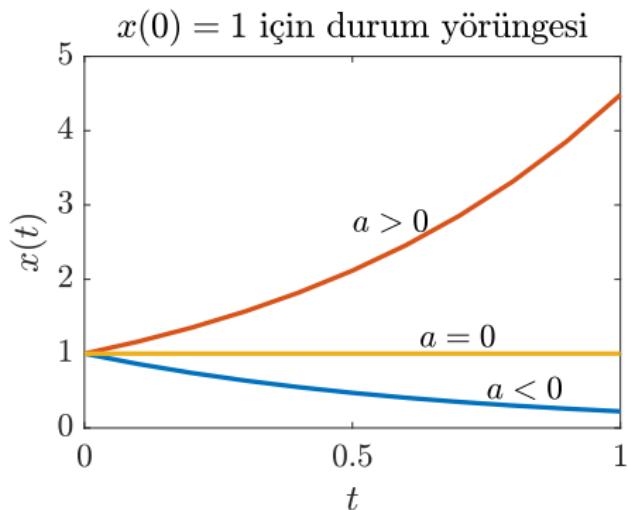
ele alalım ve  $u(t) = 0$ ,  $\forall t \geq 0$  kabul edelim.

Sistemin durum yörüngesi şu şekildedir

$$x(t) = e^{at}x_0$$

Denge durumu  $x_d = 0$ :

- ▶  $a > 0$  ise kararsızdır,
- ▶  $a \leq 0$  ise kararlıdır,
- ▶  $a = 0$  ise marjinal kararlıdır,
- ▶  $a < 0$  ise asimptotik kararlıdır.



## SZD sistemlerin kararlılığı

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  formunda verilen SZD sistemler için, sistemin doğal yanıtı  $x(t) = e^{At}x_0$  şeklinde olduğundan, kararlılık özellikleri yalnızca  $A$  matrisine bağlıdır. Dolayısıyla SZD sistemler için (denge durumunun kararlılığı yerine) sistemin kararlılığını inceleyebiliriz.

**Teorem:**  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  ( $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ) formunda verilen SZD sistem için,  $A$  matrisinin özdeğerlerini  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  ( $m \leq n$ ) ile gösterelim. Bu sistem

- ▶ Eğer  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$  ise **asimptotik kararlı**,
- ▶ Eğer  $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$  ise ve reel kısmı 0 olan tekrarlanmış bir özdeğer yoksa **(marjinal) kararlı**,
- ▶ Eğer herhangi bir  $\lambda_i$  için  $\text{Re}(\lambda_i) > 0$  ise **kararsızdır**.

**SZD bir sistemin kararlılık özellikleri yalnızca  $A$  matrisinin özdeğerlerinin reel kısmına bağlıdır.**

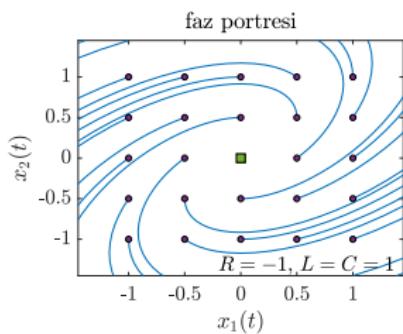
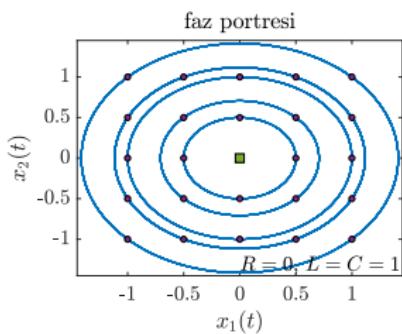
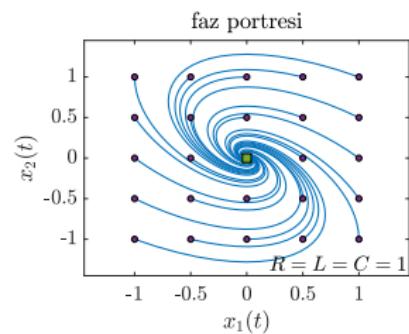
# SZD sistemlerin kararlılığı

**Örnek:** RLC devresinin  $i(0), V_c(0) \in [-1, 1]$  için faz portreleri

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x$$



(marjinal)  
kararlı  
denge

asimptotik  
kararlı  
denge

kararsız  
denge

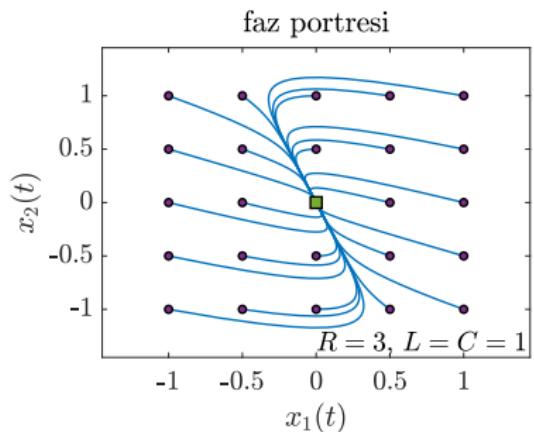
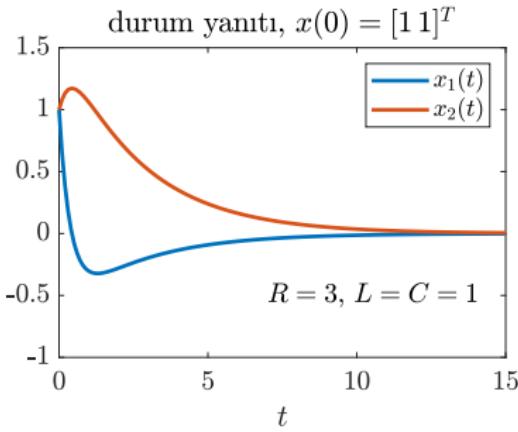
# SZD sistemlerin kararlılığı

**Örnek 1:** RLC devresi ( $R = 3$ ,  $L = C = 1$ )

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

özdeğerler:  $\lambda_1 = -2.62$     $\lambda_2 = -0.38$

$\text{Re}(\lambda_i) < 0$  ( $i = \{1, 2\}$ )  $\Rightarrow$  asimptotik kararlı



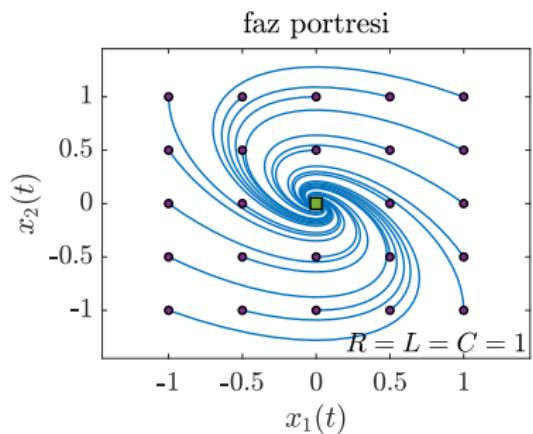
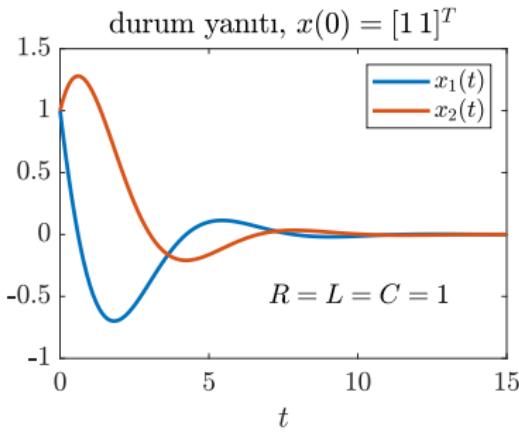
# SZD sistemlerin kararlılığı

**Örnek 2:** RLC devresi ( $R = L = C = 1$ )

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

özdeğerler:  $\lambda_1 = -0.5 + 0.87j$     $\lambda_2 = -0.5 - 0.87j$

$\text{Re}(\lambda_i) < 0$  ( $i = \{1, 2\}$ )  $\Rightarrow$  asimptotik kararlı



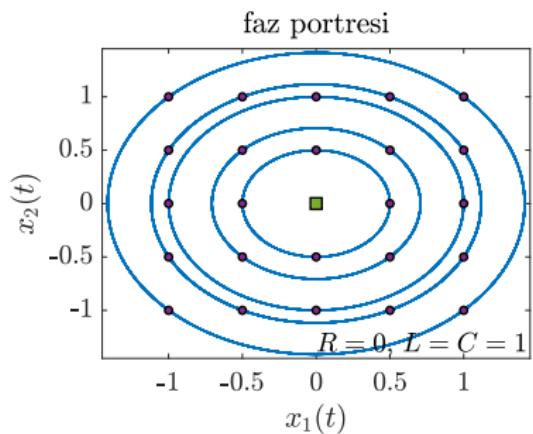
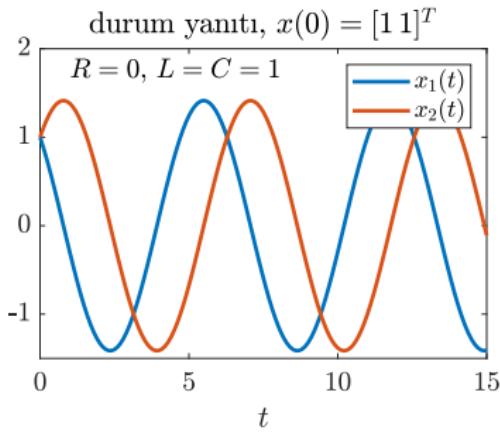
# SZD sistemlerin kararlılığı

**Örnek 3:** RLC devresi ( $R = 0$ ,  $L = C = 1$ )

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

özdeğerler:  $\lambda_1 = +j$     $\lambda_2 = -j$

$\text{Re}(\lambda_i) = 0$  ( $i = \{1, 2\}$ )  $\Rightarrow$  (marjinal) kararlı



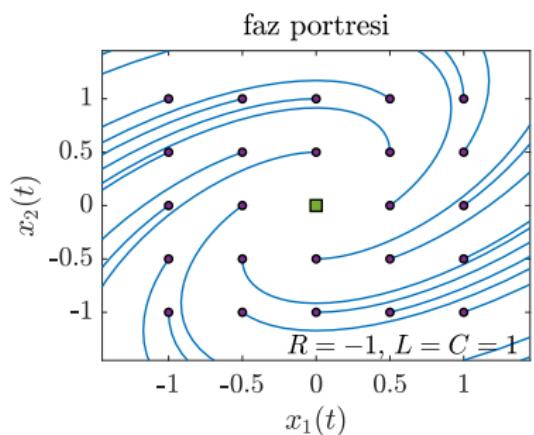
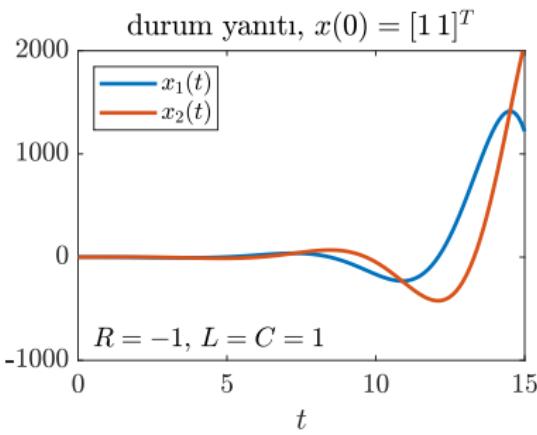
# SZD sistemlerin kararlılığı

**Örnek 4:** RLC devresi ( $R = -1$ ,  $L = C = 1$ )

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

özdeğerler:  $\lambda_1 = 0.5 + 0.87j$     $\lambda_2 = 0.5 - 0.87j$

$\text{Re}(\lambda_i) > 0$  ( $i = \{1, 2\}$ )  $\Rightarrow$  kararsız



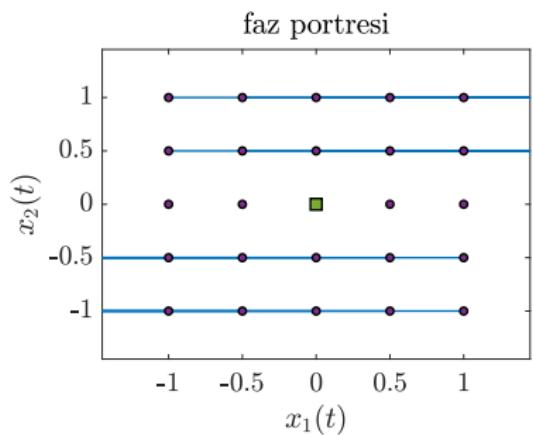
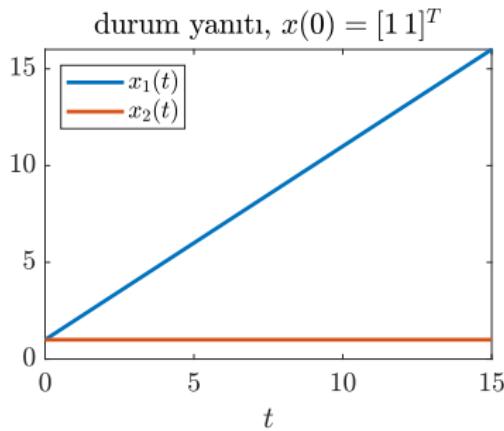
# SZD sistemlerin kararlılığı

**Örnek 5:** Boşlukta hareket eden cisim

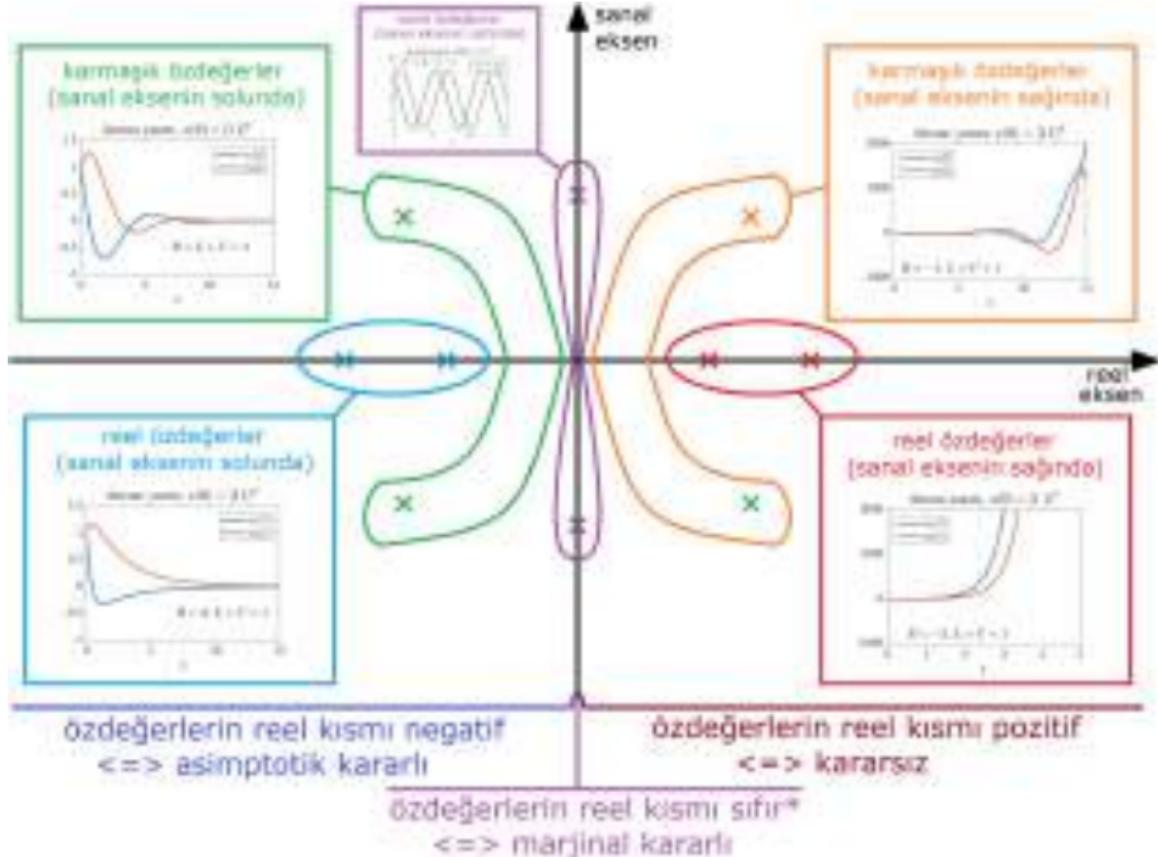
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

özdeğerler:  $\lambda_1 = 0$     $\lambda_2 = 0$

$\text{Re}(\lambda_i) = 0$  olan tekrarlanmış özdeğer  $\Rightarrow$  kararsız



# Özdeğerler, durum yanıtı ve kararlılık



## Sınav sorusu örneği

Sürekli-zamanlı doğrusal bir sistemin durum uzayı modeli aşağıda verilmiştir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Sistemin kararlılığı hakkında ne söylenebilir?

Alt Bölüm 6

Doğrusallaştırma

# Doğrusallaştırma

Aşağıdaki doğrusal olmayan sistemi

$$\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}, \tilde{u})$$

ve denge çifti  $(x_d, u_d)$ 'yi ( $f(x_d, u_d) = 0$ ) ele alalım.

Denge çiftinden sapma şu şekilde tanımlanabilir

$$x \triangleq \tilde{x} - x_d \quad u \triangleq \tilde{u} - u_d$$

Denge çifti etrafındaki SZD modeli şu şekilde elde ederiz

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{\tilde{x}} - \underbrace{\dot{x}_d}_{=0} = f(\tilde{x}, \tilde{u}) = f(x + x_d, u + u_d) \\ &\approx \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_d, u_d)}_{\triangleq A} x + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}(x_d, u_d)}_{\triangleq B} u \quad (\text{Taylor açılımı})\end{aligned}$$

# Doğrusallaştırma

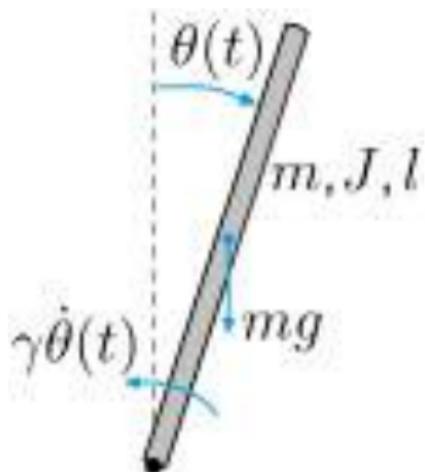
**Örnek:** Basit ters sarkaç sistemi

$$J\ddot{\theta} = \underbrace{\frac{1}{2} \sin(\theta) mgl}_{\text{yer çekimi}} - \underbrace{\gamma\dot{\theta}}_{\text{sürtünme}}$$

$$J = 1 \quad \frac{1}{2}mgl = 1 \quad \gamma = 1$$

$$\tilde{x}_1 \triangleq \theta \quad \tilde{x}_2 \triangleq \dot{\theta}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\tilde{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{x}_2 \\ \sin(\tilde{x}_1) - \tilde{x}_2 \end{bmatrix}}_{f(\tilde{x})}$$



# Doğrusallaştırma

**Örnek:** Basit ters sarkaç sistemi

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\tilde{x}) \\ f_2(\tilde{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_2 \\ \sin(\tilde{x}_1) - \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$x \triangleq \tilde{x} - x_d \quad x_d = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (sarkacın aşağı yönlü konumu)}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \sin(x_1 + \pi) - x_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos(x_1 + \pi) & -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_d) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos(x_1 + \pi) & -1 \end{bmatrix} \Big|_{x_1=0, x_2=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

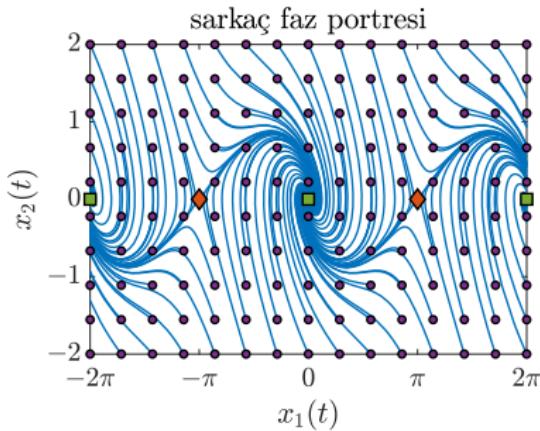
$$\dot{x} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_d)}_{\triangleq A} x \quad \rightarrow \quad \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_A x \quad \text{SZD model}$$

# Doğrusallaştırma

**Örnek:** Basit ters sarkaç sistemi

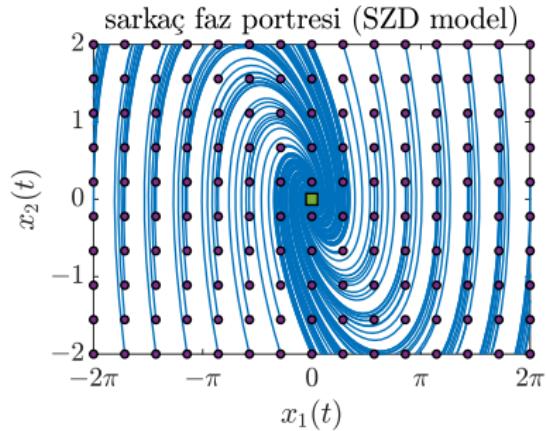
doğrusal olmayan model

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \sin(x_1 + \pi) - x_2 \end{bmatrix}$$



SZD model

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x$$



# Lyapunov'un endirekt yöntemi

**Teorem:** Doğrusal olmayan  $\dot{x} = f(x)$  formunda bir sistemi ele alalım ve bir denge durumunun  $x = 0$  olduğunu kabul edelim. Bu sistemin  $x = 0$ 'da doğrusallaştırılmasıyla elde edilen SZD model  $\dot{x} = Ax$  olsun ( $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ).  $A$  matrisinin özdeğerlerini  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  ( $m \leq n$ ) olarak gösterelim.  $\dot{x} = f(x)$  sistemi için  $x = 0$  noktası:



Aleksandr M.  
Lyapunov  
(1857-1918)

- ▶ Eğer  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$  ise **asimptotik kararlıdır**,
- ▶ Eğer herhangi bir  $\lambda_i$  için  $\text{Re}(\lambda_i) > 0$  ise **kararsızdır**,
- ▶ Eğer  $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$  ve herhangi bir  $\lambda_i$  için  $\text{Re}(\lambda_i) = 0$  ise bu yöntem kapsamında kararlılığa dair bir **kaniya varılamaz**.

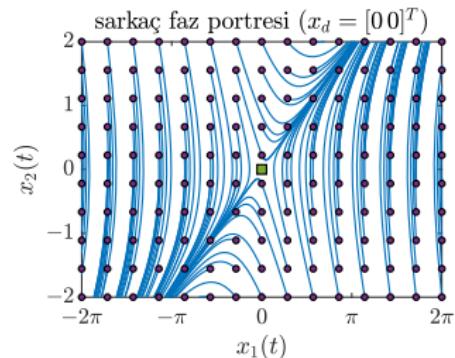
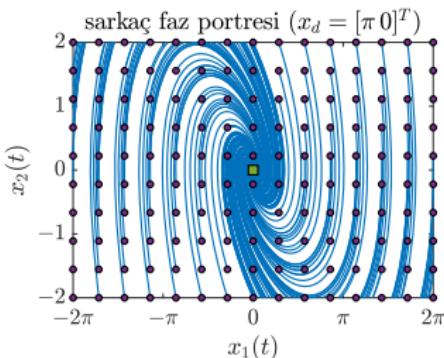
# Lyapunov'un endirekt yöntemi

**Örnek:** Basit ters sarkaç sistemi  $\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_2 \\ \sin(\tilde{x}_1) - \tilde{x}_2 \end{bmatrix}$

$$x_d = [\pi \ 0]^T \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x \quad x_d = [0 \ 0]^T \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x$$
$$\lambda_{1,2} = -0.5 \pm 0.87j \quad \lambda_1 = -1.62 \quad \lambda_2 = 0.62$$

$\text{Re}(\lambda_i) < 0 \ (i = \{1, 2\})$   
 $\Rightarrow x_d$  asimptotik kararlı

$\text{Re}(\lambda_2) > 0$   
 $\Rightarrow x_d$  kararsız



## Sınav sorusu örneği

Doğrusal olmayan ve sürekli-zamanlı bir sistemin durum uzayı modeli aşağıda verilmiştir.

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = \tilde{x}_2(t)$$

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = -a \sin(\tilde{x}_1(t)) - b\tilde{x}_2(t)$$

Buradaki  $a \in \mathbb{R}$  ve  $b \in \mathbb{R}$  model parametreleridir.

- (a) Sistemin denge durumunu bulunuz.
- (b) Sistemin bu denge durumu etrafında doğrusallaştırılmasıyla elde edilen sürekli-zamanlı doğrusal durum uzayı modelini bulunuz.
- (c) Sistemin doğrusallaştırılmasıyla elde edilen bu durum uzayı modeli kullanılarak, doğrusal olmayan sistemin kararlılığı hakkında ne söylenebilir?

## Sınav sorusu örneği

Doğrusal olmayan ve sürekli-zamanlı bir sistemin durum uzayı modeli aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1(t) &= p \exp(-\tilde{x}_1(t)) - \tilde{x}_2(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) &= \tilde{x}_1(t)\end{aligned}$$

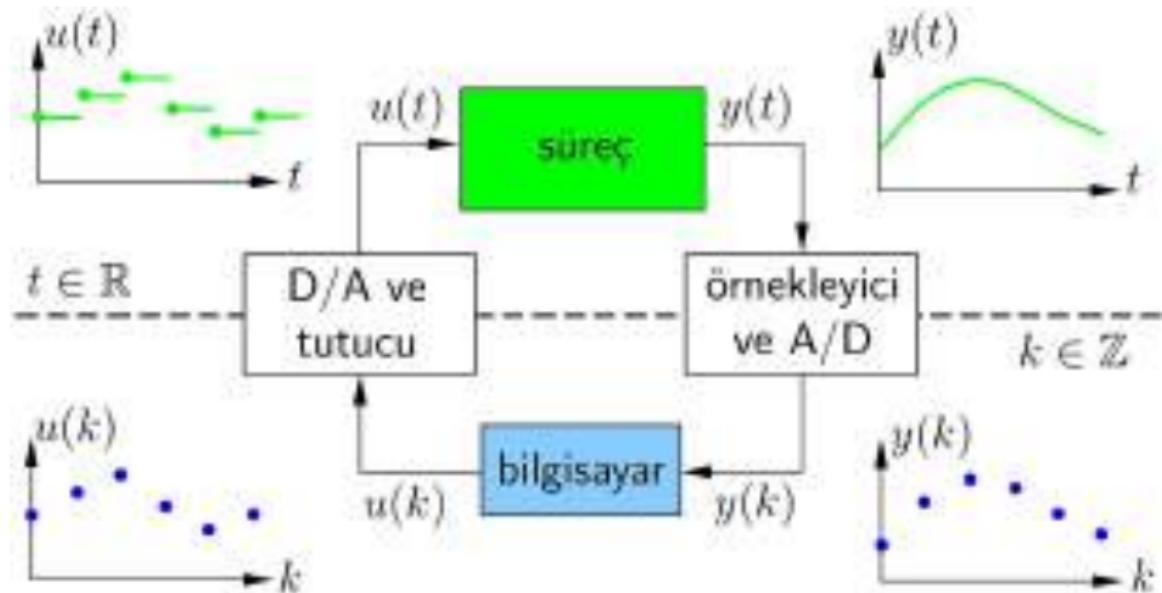
Buradaki  $a \in \mathbb{R}$  ve  $b \in \mathbb{R}$  model parametreleridir.

- (a) Sistemin denge durumunu bulunuz.
- (b) Sistemin bu denge durumu etrafında doğrusallaştırılmasıyla elde edilen sürekli-zamanlı doğrusal durum uzayı modelini bulunuz.
- (c) Sistemin doğrusallaştırılmasıyla elde edilen bu durum uzayı modeli kullanılarak, doğrusal olmayan sistemin kararlılığı hakkında ne söylenebilir?

## Bölüm 4

# Ayrık-zamanlı doğrusal sistemler

# Bilgisayar kontrollü sistem şeması



Kaynak: Björn Wittenmark, Karl J. Åström, Karl-Erik Årzén, Computer Control: An Overview (uyarlandı)

## Alt Bölüm 1

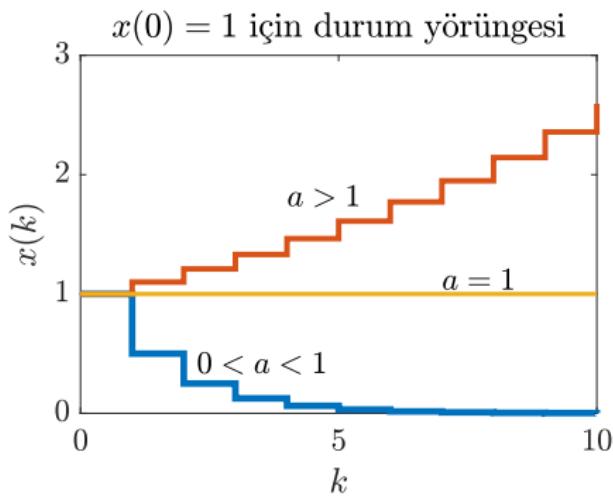
### Doğrusal fark denklemleri

# Doğrusal fark denklemleri

bir boyutlu tek değişkenli fark denklemi

$$x(k+1) = ax(k) \quad x(0) = x_0$$
$$x \in \mathbb{R} \quad k \in \mathbb{Z} \quad a \in \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

denklemin çözümü:  
 $x(k) = a^k x_0$



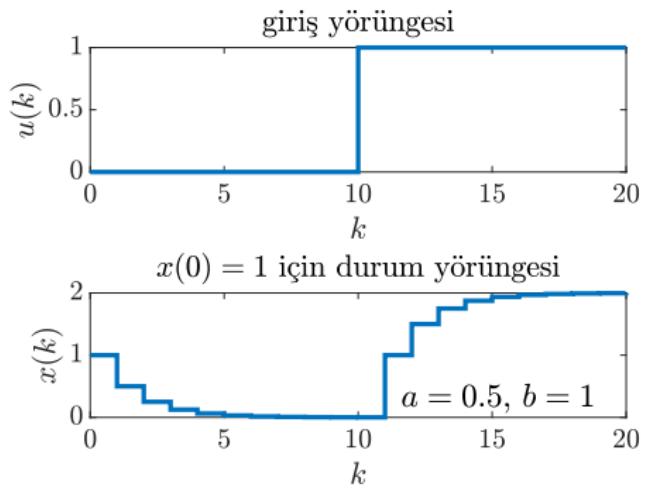
# Doğrusal fark denklemleri

bir boyutlu, bir girişli tek değişkenli fark denklemi

$$x(k+1) = ax(k) + bu(k) \quad x(0) = x_0$$
$$x \in \mathbb{R} \quad k \in \mathbb{Z} \quad a, b \in \mathbb{R} \quad u \in \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

denklemin çözümü:

$$x(k) = \underbrace{a^k x_0}_{\text{doğal çözüm}} \dots$$
$$+ \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} a^i b u(k-1-i)}_{\text{zorlanmış çözüm}}$$



# Ayrık-zamanlı doğrusal (AZD) sistemler

$n$  boyutlu,  $m$  girişli,  $q$  çıkışlı tek değişkenli fark denklemi

**durum uzayı modeli**  $\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ \quad y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$

durum vektörü: $x(k) \in \mathbb{R}^n$	giriş vektörü: $u(k) \in \mathbb{R}^m$	çıkış vektörü: $y(k) \in \mathbb{R}^q$
--	--	--

$$x(k) \triangleq \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad u(k) \triangleq \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{bmatrix} \quad y(k) \triangleq \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_q(k) \end{bmatrix}$$

$k \in \mathbb{Z}$  : ayrık zaman

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  : durum matrisi

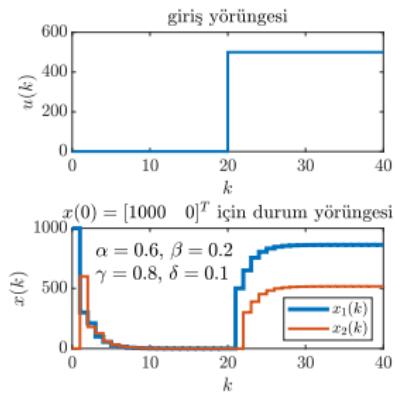
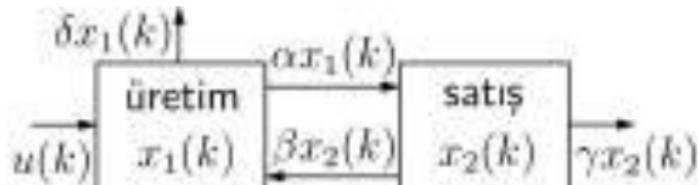
$C \in \mathbb{R}^{q \times n}$  : çıkış matrisi

$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  : giriş matrisi

$D \in \mathbb{R}^{q \times m}$  : ileri besleme matrisi

# Ayrık-zamanlı durum uzayı modeli

**Örnek:** Tedarik zinciri



$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \alpha - \delta & \beta \\ \alpha & 1 - \beta - \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$k$ : zaman adımı

$x_1(k)$ : üreticideki ürün miktarı

$x_2(k)$ : satıcıdaki ürün miktarı

$u(k)$ : üreticinin aldığı ham madde miktarı

$\alpha$ : satıcının aldığı ürün oranı

$\beta$ : üreticiye dönen defolu ürün oranı

$\gamma$ : satıcının sattığı ürün oranı

$\delta$ : üreticinin ıskarta ürün oranı

## **n. derece fark denklemi**

$$a_n y(k-n) + a_{n-1} y(k-n+1) + \dots + a_1 y(k-1) + y(k) = \\ b_n u(k-n) + \dots + b_1 u(k-1) + b_0 u(k)$$

*n* adet 1. derece fark denklemi:

$$x(k+1) = x_2(k)$$

$$x(k+2) = x_3(k)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$x(k+n) = -a_n x_1(k) + \dots - a_1 x_n(k) + u(k)$$

$$y(k) = [c_n \quad \dots \quad c_1] x(k) + b_0 u(k)$$

$$c_n \triangleq b_n - b_0 a_n$$

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C = [c_n \dots c_1], D = b_0$$

## Alt Bölüm 2

Ayrık zamanda durum yanıtı

## AZD sistemlerde durum yanıtı

Aşağıdaki AZD sistem için

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

belirli bir başlangıç durumu  $x(0) = x_0$  ve giriş yörüngesi  $u, \forall k = [0, \dots, K]$  verildiğinde,  $k = [0, \dots, K]$  için sistemin durum yörüngesini analitik olarak şu şekilde hesaplayabiliriz

$$x(k) = \underbrace{A^k x_0}_{\text{doğal yanıt}} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} A^i B u(k-1-i)}_{\text{zorlanmış yanıt}}$$

Eğer başlangıç durumu  $x(0) = x_0$ 'ı biliyorsak, durum yörüngesini hesaplamak için sistemin geçmişteki yörüngelerini (yani,  $k < 0$  için  $x(k)$  ve  $u(k)$ 'yi) bilmemiz gerekmez.

# AZD sistemlerde doğal yanıt

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x_0, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

şeklindeki AZD sistem için,  $u = 0$  ve  $A$ 'nın köşegenleştirilebilir olduğunu varsayıyalım.

$$A = T\Lambda T^{-1}$$

$$\Lambda \triangleq \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad T \triangleq \begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_n \end{bmatrix}$$

( $\lambda_i$ :  $A$ 'nın özdeğerleri,  $\nu_i$ :  $A$ 'nın özvektörleri ( $i = 1, \dots, n$ ))

## AZD sistemlerde doğal yanıt

$$x(k) = A^k x_0 = T \Lambda^k \underbrace{T^{-1} x_0}_{\alpha}$$

(ters çevrilebilen  $Y$  için:  $e^{YXY^{-1}} = Ye^X Y^{-1}$ )

$$= [\nu_1 \quad \nu_2 \quad \dots \quad \nu_n] \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix} \alpha$$

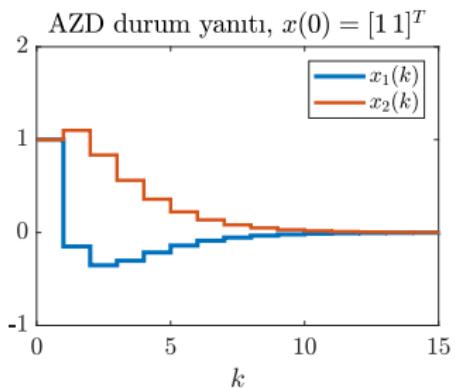
$$= [\nu_1 \lambda_1^k \quad \nu_2 \lambda_2^k \quad \dots \quad \nu_n \lambda_n^k] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k \nu_i$$

**AZD bir sistemin doğal yanıtı (SZD sistemlerde olduğu gibi)  $A$  matrisinin özdeğerlerine bağlıdır.**

# AZD sistemlerde doğal yanıt

**Örnek 1:** Reel özdeğerler

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.15 & -0.3 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$



$$\Lambda \triangleq \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 0.35 \quad \lambda_2 = 0.6$$

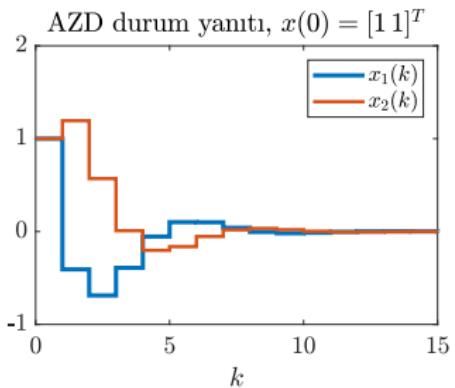
$$T \triangleq \begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 \end{bmatrix} \quad \nu_1 = \begin{bmatrix} -0.83 \\ 0.56 \end{bmatrix} \quad \nu_2 = \begin{bmatrix} 0.56 \\ -0.83 \end{bmatrix}$$

$$\alpha \triangleq T^{-1}x_0 = \begin{bmatrix} -3.6 \\ -3.6 \end{bmatrix} \quad x(k) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} 0.35^k + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} 0.6^k$$

# AZD sistemlerde doğal yanıt

Örnek 2: Karmaşık özdeğerler

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.13 & -0.53 \\ 0.53 & 0.66 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$



$$\Lambda \triangleq \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 0.39 + 0.46j \quad \lambda_2 = 0.39 - 0.46j$$

$$T \triangleq \begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 \end{bmatrix} \quad \nu_1 = \begin{bmatrix} 0.71 \\ -0.35 - 0.61j \end{bmatrix} \quad \nu_2 = \begin{bmatrix} 0.71 \\ -0.35 + 0.61j \end{bmatrix}$$

$$\alpha \triangleq T^{-1}x_0 = \begin{bmatrix} 0.71 + 1.23j \\ 0.71 - 1.23j \end{bmatrix} \quad x(k) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \lambda_i^k \nu_i$$

## Alt Bölüm 3

Ayrık zamanda kararlılık

## Kararlılığın tanımı (ayrık zaman)

Aşağıdaki doğrusal olmayan sistemi

$$x(k+1) = f(x(k))$$

ve bu sistemin  $x_d$  ile verilen bir denge durumunu ele alalım.  
( $f(x_d) = x_d$ 'yi sağlayan noktalara denge durumu denir)

Eğer  $x_d$ 'ye yeterince yakın her bir başlangıç durumu  $x(0)$  için, durum yörüngesi  $x(k)$   $x_d$ 'nin yakınında kalıyorsa, bu denge durumuna **kararlı** denir. Matematiksel olarak ifade edersek:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|x(0) - x_d\| < \delta \rightarrow \|x - x_d\| < \epsilon, \forall k \geq 0$$

Eğer denge durumu  $x_d$  kararlıysa ve  $k \rightarrow \infty$  için  $x(k) \rightarrow x_d$  ise,  $x_d$ 'ye **asimptotik kararlı** denir.

Bunların haricindeki durumlarda  $x_d$ 'ye **kararsız** denir.

# Bir boyutlu AZD sistemin kararlılığı

Aşağıdaki bir boyutlu AZD sistemi

$$x(k+1) = ax(k) + bu(k) \quad x(0) = x_0$$

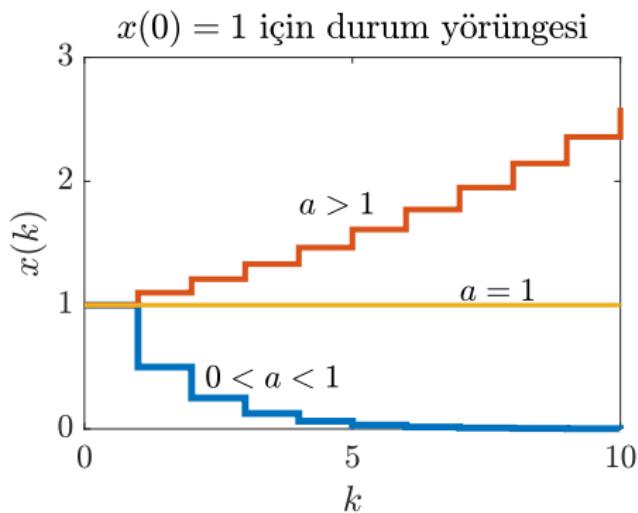
ele alalım ve  $u(k) = 0, \forall k \geq 0$  kabul edelim.

Sistemin durum yörüngesi şu şekildedir

$$x(k) = a^k x_0$$

Denge durumu  $x_d = 0$ :

- ▶  $|a| > 1$  ise kararsızdır,
- ▶  $|a| \leq 1$  ise kararlıdır,
- ▶  $|a| = 1$  ise marjinal kararlıdır,
- ▶  $|a| < 1$  ise asimptotik kararlıdır.



## AZD sistemlerin kararlılığı

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$  formunda verilen AZD sistemler için, sistemin doğal yanıtı  $x(k) = A^k x_0$  şeklinde olduğundan, kararlılık özellikleri yalnızca  $A$  matrisine bağlıdır. Dolayısıyla AZD sistemler için (denge durumunun kararlılığı yerine) sistemin kararlılığını inceleyebiliriz.

**Teorem:**  $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$  ( $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ) formunda verilen AZD sistem için,  $A$  matrisinin özdeğerlerini  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  ( $m \leq n$ ) ile gösterelim. Bu sistem

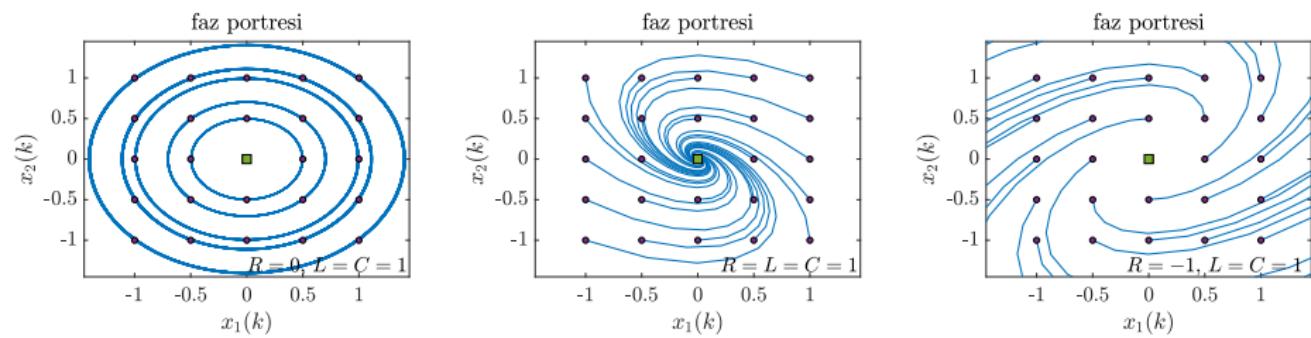
- ▶ Eğer  $|\lambda_i| < 1$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$  ise **asimptotik kararlı**,
- ▶ Eğer  $|\lambda_i| \leq 1$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$  ise ve  $|\lambda_i| = 1$  olan tekrarlanmış bir özdeğer yoksa **(marjinal) kararlı**,
- ▶ Eğer herhangi bir  $\lambda_i$  için  $|\lambda_i| > 1$  ise **kararsızdır**.

**AZD bir sistemin kararlılık özellikleri yalnızca  $A$  matrisinin özdeğerlerinin mutlak değerine bağlıdır.**

# AZD sistemlerin kararlılığı

**Örnek:** RLC devresinin  $i(0), V_c(0) \in [-1, 1]$  için faz portreleri

$$x^+ = \begin{bmatrix} 0.9553 & -0.2955 \\ 0.2955 & 0.9553 \end{bmatrix} x \quad x^+ = \begin{bmatrix} 0.7042 & -0.2553 \\ 0.2553 & 0.9595 \end{bmatrix} x \quad x^+ = \begin{bmatrix} 1.2952 & -0.3446 \\ 0.3446 & 0.95055 \end{bmatrix} x$$



(marjinal) kararlı  
denge

asimptotik kararlı  
denge

kararsız  
denge

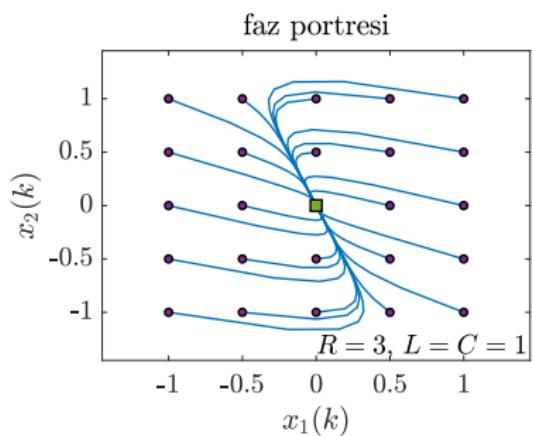
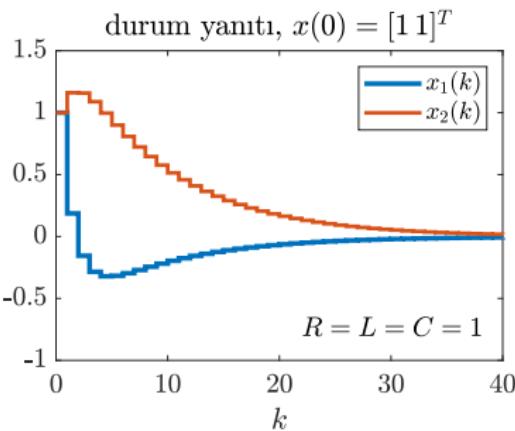
# AZD sistemlerin kararlılığı

**Örnek 1:** RLC devresi ( $R = 3$ ,  $L = C = 1$ )

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.3815 & -0.1949 \\ 0.1949 & 0.9662 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

özdeğerler:  $\lambda_1 = 0.4559$     $\lambda_2 = 0.8917$

$|\lambda_i| < 1$  ( $i = \{1, 2\}$ )  $\Rightarrow$  asimptotik kararlı



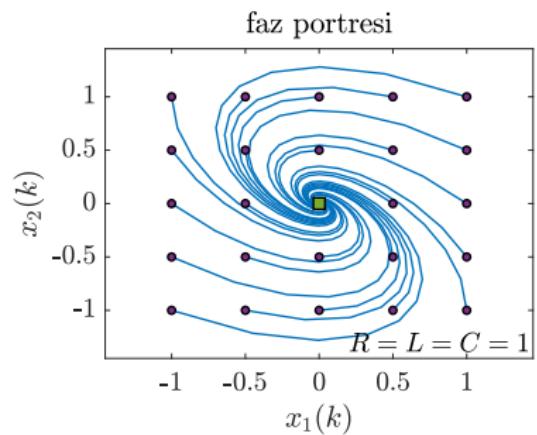
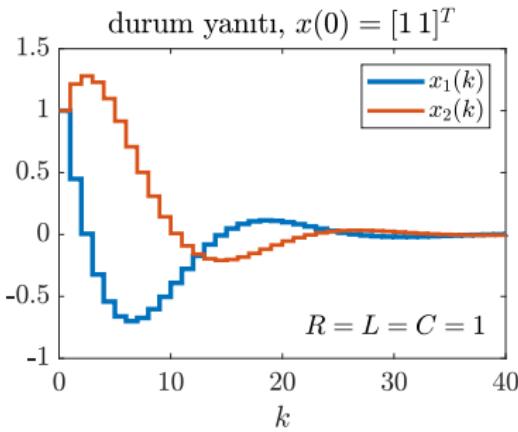
# AZD sistemlerin kararlılığı

**Örnek 2:** RLC devresi ( $R = L = C = 1$ )

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.7042 & -0.2553 \\ 0.2553 & 0.9595 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

özdeğerler:  $\lambda_1 = 0.8318 + 0.2211j$     $\lambda_2 = 0.8318 - 0.2211j$

$|\lambda_i| < 1$  ( $i = \{1, 2\}$ )  $\Rightarrow$  asimptotik kararlı



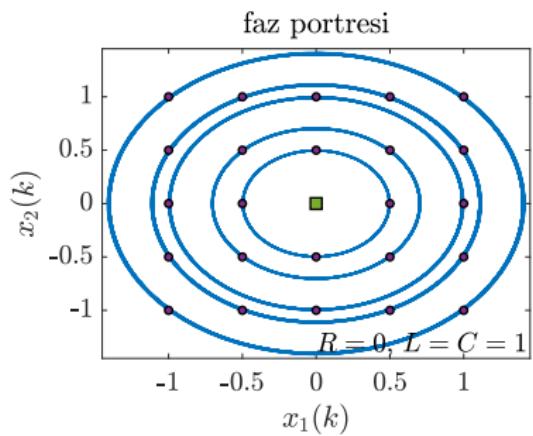
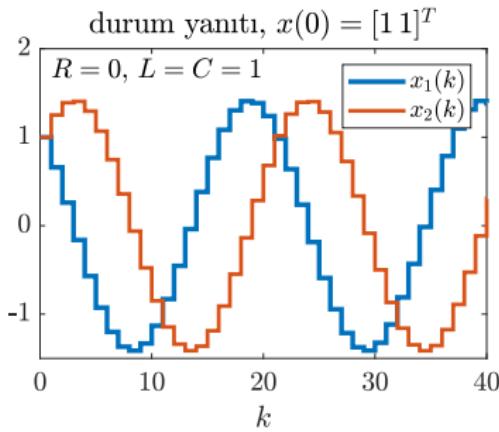
# SZD sistemlerin kararlılığı

**Örnek 3:** RLC devresi ( $R = 0, L = C = 1$ )

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.9553 & -0.2955 \\ 0.2955 & 0.9553 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

özdeğerler:  $\lambda_1 = 0.9553 + 0.2955j$     $\lambda_2 = 0.9553 - 0.2955j$

$|\lambda_i| = 1$  ( $i = \{1, 2\}$ )  $\Rightarrow$  (marjinal) kararlı



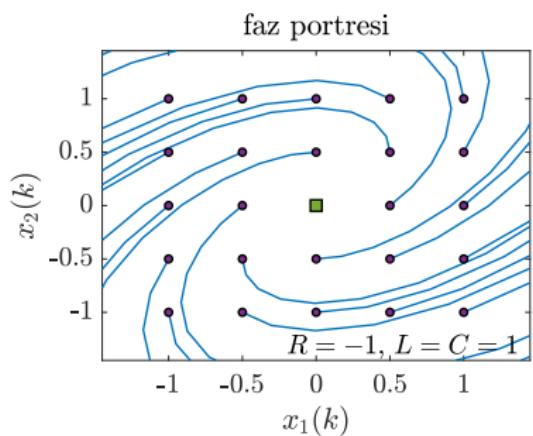
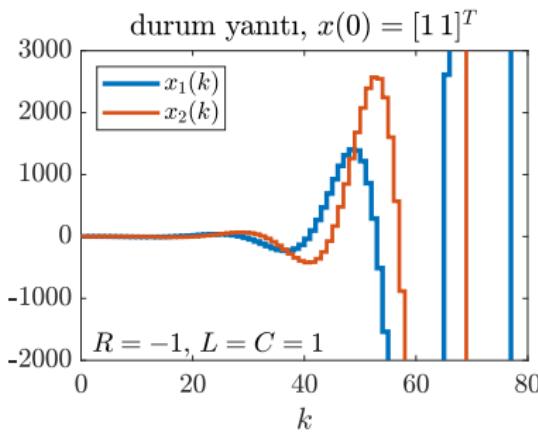
# AZD sistemlerin kararlılığı

**Örnek 4:** RLC devresi ( $R = -1$ ,  $L = C = 1$ )

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1.2952 & -0.3446 \\ 0.3446 & 0.9505 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

özdeğerler:  $\lambda_1 = 1.1228 + 0.2985j$     $\lambda_2 = 1.1228 - 0.2985j$

$|\lambda_i| > 1$  ( $i = \{1, 2\}$ )  $\Rightarrow$  kararsız



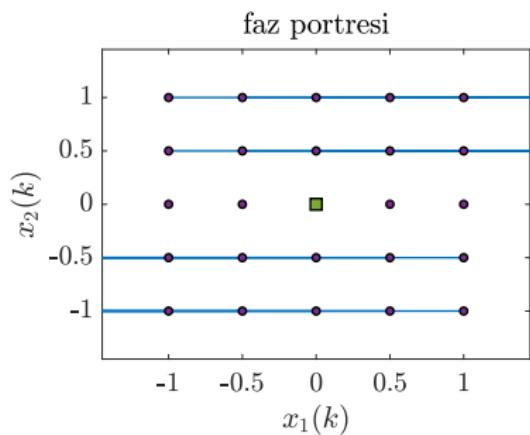
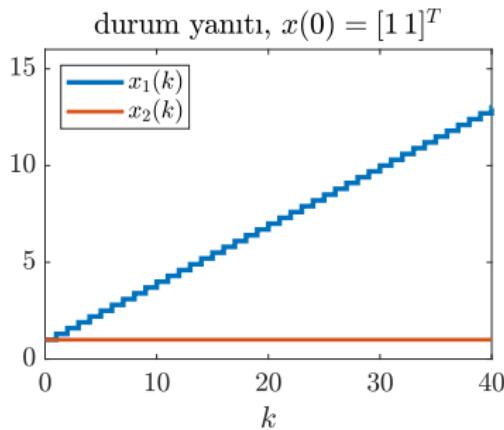
# AZD sistemlerin kararlılığı

**Örnek 5:** Boşlukta hareket eden cisim

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

özdeğerler:  $\lambda_1 = 1$     $\lambda_2 = 1$

$|\lambda_i| = 1$  olan tekrarlanmış özdeğer  $\Rightarrow$  kararsız



Alt Bölüm 4

Örnekleme

## Tam örnekleme

Aşağıda verilen SZD sistemi ele alalım:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

$x(t)$  ve  $y(t)$ 'nin  $t = 0, T, 2T, \dots, kT, \dots$  anlarındaki değerlerini ifade edecek bir model ile, bu SZD sistemi AZD sisteme dönüştürebiliriz ( $T \in \mathbb{R}$ : örnekleme zamanı). Burada ayrıca kontrol girişi  $u(t)$ 'nin birbirini takip eden iki zaman adımı arasında sabit kaldığı kabul edilebilir:

$$u(t) = \bar{u}(k), kT \leq t \leq (k+1)T$$

Bu işlemeye *sıfır-dereceli tutma* (zero-order hold, ZOH) denir. Daha yüksek dereceli tutmalar mümkündür ancak uygulamada genellikle sıfır-dereceli tutma kullanılır.

# Tam örneklemme

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

formundaki SZD sistem,  $u(t)$ 'de sıfır-dereceli tutma uygulanırsa, aşağıdaki dönüşümler kullanılarak

$$\bar{A} \triangleq e^{AT}, \quad \bar{B} \triangleq \left( \int_0^T e^{A(T-\tau)} d\tau \right) B, \quad \bar{C} = C, \quad \bar{D} = D$$

$x(t)$  ve  $y(t)$ 'nin  $t = 0, T, 2T, \dots, kT, \dots$  anlarındaki değerlerini tam olarak verebilen bir AZD sisteme dönüştürülebilir:

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{B}\bar{u}(k)$$

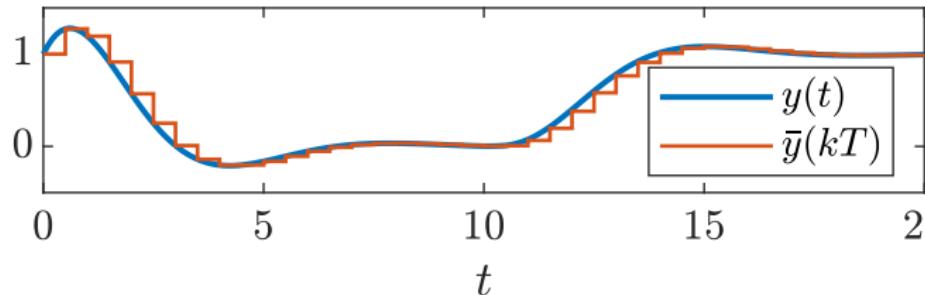
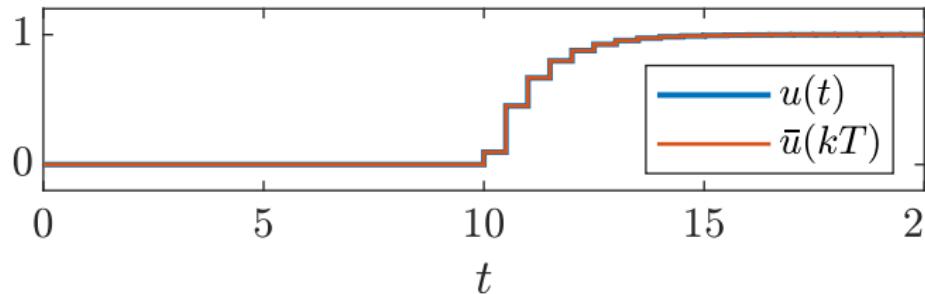
$$\bar{y}(k) = \bar{C}\bar{x}(k) + \bar{D}\bar{u}(k)$$

( $t = kT$ ,  $k = 0, 1, \dots$  için  $x(t) = \bar{x}(k)$  ve  $y(t) = \bar{y}(k)$  olur)

# Tam örnekleme

**Örnek:** RLC devresi ( $R = L = C = 1$ )

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \end{array} \right\} \xrightarrow[T=0.5]{\text{ZOH}} \left\{ \begin{array}{l} \bar{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.52 & -0.38 \\ 0.38 & 0.9 \end{bmatrix} \bar{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.38 \\ 0.1 \end{bmatrix} \bar{u}(k) \\ \bar{y}(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u}(k) \end{array} \right.$$



# Örnekleme zamanının seçimi

**pratik kural:**  $T = 0.1T_r$   
( $T_r$ : yükselme zamanı)

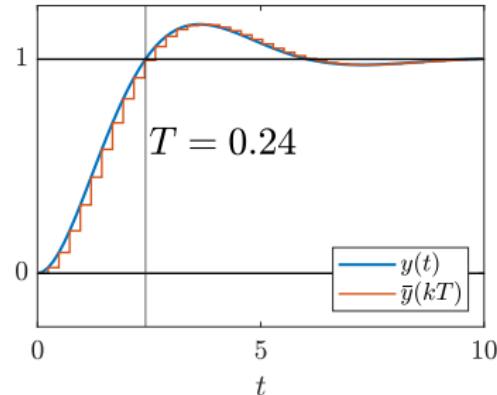
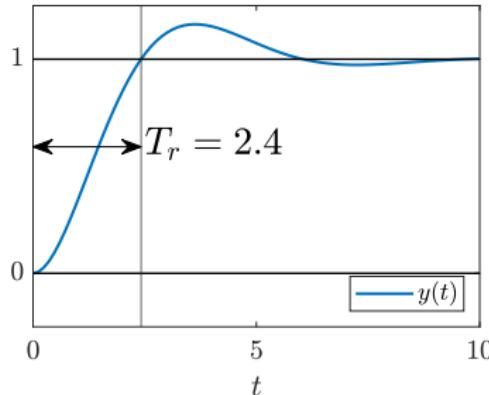
**Örnek:** RLC devresi ( $R = L = C = 1$ )

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\bar{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.76 & -0.21 \\ 0.21 & 0.97 \end{bmatrix} \bar{x}(k) + \begin{bmatrix} 0.21 \\ 0.03 \end{bmatrix} \bar{u}(k)$$

$$\bar{y}(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \bar{u}(k)$$



# Yaklaşık örneklemme

**doğrusal olmayan sistem:**

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \rightarrow \bar{x}(k+1) = F(\bar{x}(k), \bar{u}(k))$$

**Euler yöntemi**

$$\boxed{\bar{x}(k+1) = \underbrace{\bar{x}(k) + Tf(\bar{x}(k), \bar{u}(k))}_{F(\bar{x}(k), \bar{u}(k))}}$$

**Runge-Kutta (RK4) yöntemi**

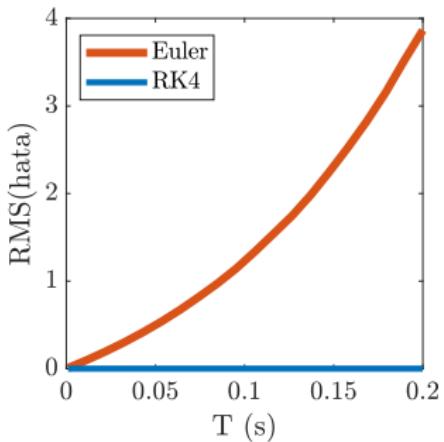
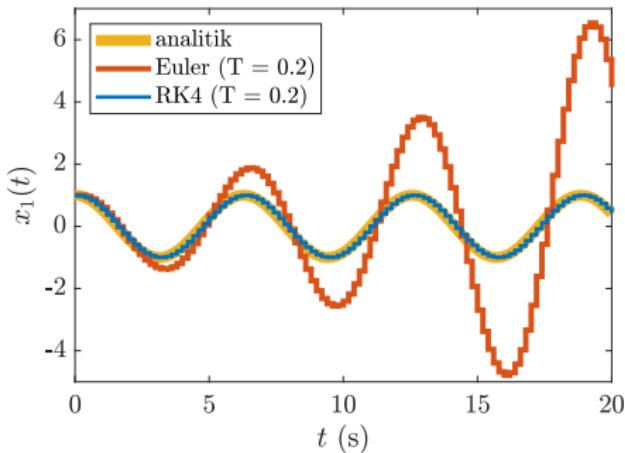
$$\boxed{\begin{aligned} q_1 &= f(\bar{x}(k), \bar{u}(k)) \\ q_2 &= f(\bar{x}(k) + 0.5Tk_1, \bar{u}(k)) \\ q_3 &= f(\bar{x}(k) + 0.5Tk_2, \bar{u}(k)) \\ q_4 &= f(\bar{x}(k) + Tk_1, \bar{u}(k)) \\ \bar{x}(k+1) &= \underbrace{\bar{x}(k) + (T/6)(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4)}_{F(\bar{x}(k), \bar{u}(k))} \end{aligned}}$$

# Yaklaşık örneklemme

**Örnek:** RLC devresi ( $R = 0$ ,  $L = C = 1$ )

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

analitik çözüm:  $x_1(t) = \cos(t)$

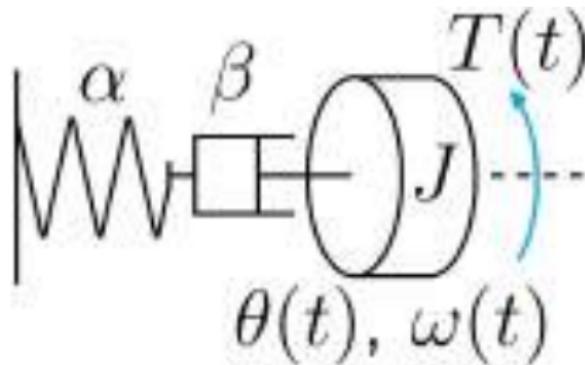


## Bölüm 5

Sınav sorusu örnekleri - Ara sınav

# Durum Uzayında Modelleme ve Analiz

**Soru 1)** Aşağıda bir rotasyonel mekanik sistem verilmiştir.



Sistem eylemsizlik momenti  $J$  olan bir cisim ile cismi sabit bir zemine bağlayan bir yay (yay sabiti  $\alpha$ ) ve bir damper (sönükleme katsayısı  $\beta$ ) elemanından oluşmaktadır. Cismin açısal konumu  $\theta(t)$ , açısal hızı  $\omega(t)$ , sisteme etkiyen tork ise  $T(t)$  olarak isimlendirilmiştir. Sistem girişi sisteme etkiyen tork  $T(t)$  (yani,  $u(t) = T(t)$ ), sistem çıkışı ise cismin açısal hızı olarak seçilmiştir (yani,  $y(t) = \omega(t)$ ).

# Durum Uzayında Modelleme ve Analiz

**Soru 1a)** Sistemin durumunu

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$$

olarak alıp, sistemin sürekli zamanlı bir durum uzayı modelini ifade eden  $A, B, C, D$  matrislerini bulunuz.

**Çözüm 1a)** Cisim için Newton'un ikinci yasasını şu şekilde yazabiliriz:

$$J\ddot{\theta}(t) = T(t) - \alpha\theta(t) - \beta\omega(t)$$

Bu ifadeyi, soruda verildiği gibi  $x_1(t) = \theta(t)$ ,  $x_2(t) = \omega(t)$ ,  $u(t) = T(t)$  ve  $y(t) = \omega(t)$  tanımlarıyla tekrar yazarsak:

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{J} (u(t) - \alpha x_1(t) - \beta x_2(t))$$

ifadesini elde ederiz. Buradan durum uzayı modelini yazabiliriz:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-\alpha}{J} & \frac{-\beta}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Buradan da  $A, B, C, D$  matrislerini elde ederiz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-\alpha}{J} & \frac{-\beta}{J} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

# Durum Uzayında Modelleme ve Analiz

**Soru 1b)** Sistem parametreleri  $J = 1 \text{ kgm}^2$ ,  $\alpha = 1 \text{ N m}$ ,  $\beta = 1 \text{ N m s}$  olarak verilsin. Sistemin kararlılığı hakkında ne söylenebilir?

**Çözüm 1b)** Bu sistem parametreleri için  $A$  matrisi şu şekildedir:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$A$  matrisinin özdeğerlerini şu şekilde hesaplayabiliriz:

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right|$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 1$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

$$\rightarrow \lambda_1 = -0.5 + 0.866j \quad \lambda_2 = -0.5 - 0.866j$$

$A$  matrisinin özdeğerlerinin real kısmı negatif olduğu için sistem asimptotik kararlıdır.

# Durum Uzayında Modelleme ve Analiz

**Soru 2)** Sürekli-zamanlı doğrusal olmayan bir sistemin durum uzayı modeli aşağıda verilmiştir.

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = \tilde{x}_1^3(t) - \tilde{x}_2(t) + 1$$

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = e^{\tilde{x}_2(t)} - 1$$

**Soru 2a)** Sistemin denge durumunu hesaplayınız.

**Çözüm 2a)** Denge durumları  $\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}) = 0$  ifadesini sağlayan durumlardır. Öncelikle

$$\dot{\tilde{x}}_2(t) = 0 = e^{\tilde{x}_{2,d}} - 1$$

denkleminden  $\tilde{x}_{2,d}$  değerini 0 olarak buluruz. Sonra da

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = 0 = \tilde{x}_{1,d}^3 + 1$$

denkleminden  $\tilde{x}_{1,d}$  değerini  $-1$  olarak buluruz. Sonuç olarak sistemin denge durumu

$$\tilde{x}_d = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{1,d} \\ \tilde{x}_{2,d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

# Durum Uzayında Modelleme ve Analiz

**Soru 2b)** 2a) kısmında hesaplanan  $(\tilde{x}_{1,d}, \tilde{x}_{2,d})$  denge durumu etrafında sistemi doğrusallaştırarak, sürekli-zamanlı doğrusal durum uzayı modeli matrisi  $A$ 'yı bulunuz.

**Çözüm 2b)** Öncelikle sistemi doğrusallaştırma hangi nokta etrafında yapılacaksa o noktadan sapma şeklinde durumları tanımlanmış bir sisteme dönüştürmemiz gereklidir:

$$x_1(t) \triangleq \tilde{x}_1(t) - \tilde{x}_{1,d} \quad x_2(t) \triangleq \tilde{x}_2(t) - \tilde{x}_{2,d}$$

Bu tanımla sistem şu şekilde dönüşür:

$$\dot{x}_1(t) = (x_1(t) + \tilde{x}_{1,d})^3 - (x_2(t) + \tilde{x}_{2,d}) + 1$$

$$\dot{x}_2(t) = e^{x_2(t) + \tilde{x}_{2,d}} - 1$$

Denge durumunun değerlerini yerine koyarsak ( $\tilde{x}_{1,d} = -1, \tilde{x}_{2,d} = 0$ )

$$\dot{x}_1(t) = (x_1(t) - 1)^3 - x_2(t) + 1$$

$$\dot{x}_2(t) = e^{x_2(t)} - 1$$

Şeklindeki, durumları  $\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x})$  sisteminin denge durumlarından sapma olarak tanımlanmış sistemi elde ederiz.

# Durum Uzayında Modelleme ve Analiz

Sürekli-zamanlı doğrusal olmayan iki boyutlu sistemlerin aşağıda genel formu verilmiştir:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t)) \end{bmatrix}$$

Bu formdaki sistemler için doğrusallaştırma şu şekilde yapılır:

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_d)}_A x(t) \quad \frac{\partial f}{\partial x} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Dönüştürülmüş sistem için kısmi türevli ifadeler şu şekilde bulunur:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 3(x_1 - 1)^2 \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -1 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = e^{x_2}$$

Sonuç olarak doğrusallaştırma ile aşağıdaki sürekli-zamanlı doğrusal durum uzayı modeli matrisi  $A$ 'yı elde ederiz:

$$A \triangleq \frac{\partial f}{\partial x}(x_d) \triangleq \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{array} \right] \Bigg|_{x_1=0, x_2=0} = \left[ \begin{array}{cc} 3(x_1 - 1)^2 & -1 \\ 0 & e^{x_2} \end{array} \right] \Bigg|_{x_1=0, x_2=0}$$
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Durum Uzayında Modelleme ve Analiz

**Soru 2c)** Sistemin 2b) kısmında hesaplanan doğrusallaştırılmış modeli kullanılarak doğrusal olmayan sistemin denge durumunun kararlılığı hakkında ne söylenebilir?

**Çözüm 2c)** Doğrusallaştırılmış modelin  $A$  matrisinin özdeğerlerini şu şekilde hesaplayabiliriz:

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$$

$$P(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

$$\rightarrow \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 1$$

$A$  matrisinin özdeğerlerinin reel kısmı pozitif olduğu için (Lyapunov'un endirekt yöntemine göre) doğrusal olmayan sistemin denge durumu kararsızdır.

## Kısım II

# Durum Uzayında Kontrol

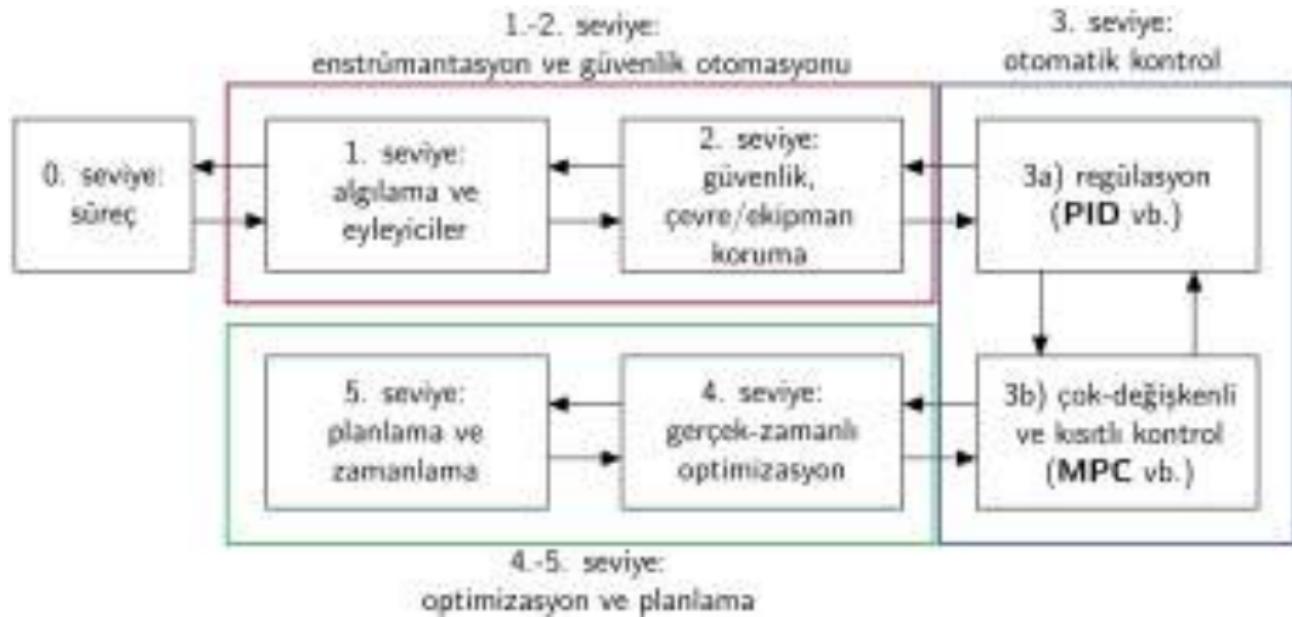
## Kısım II: Durum Uzayında Kontrol

6. PID kontrol\* (H)
7. Durum geribeslemeli kontrol
  - Erişilebilirlik analizi
  - Doğrusal durum geri besleme
  - Referans izleme ve integral etki
8. Durum gözleme ve çıkış geri besleme
  - Gözlenebilirlik analizi
  - Doğrusal durum gözleme
  - Çıkış geri beslemeli kontrol
9. Kontrol tasarımı (örnek): Araç direksiyon kontrolü (H)
10. Optimal kontrol ve kestirme
  - Doğrusal karesel regülatör (LQR)
  - Doğrusal karesel kestirici (LQE) (Kálmánfiltresi)
  - Doğrusal karesel Gauss (LQG) kontrol
  - Özdeğerler, başarım ve LQR

## Bölüm 6

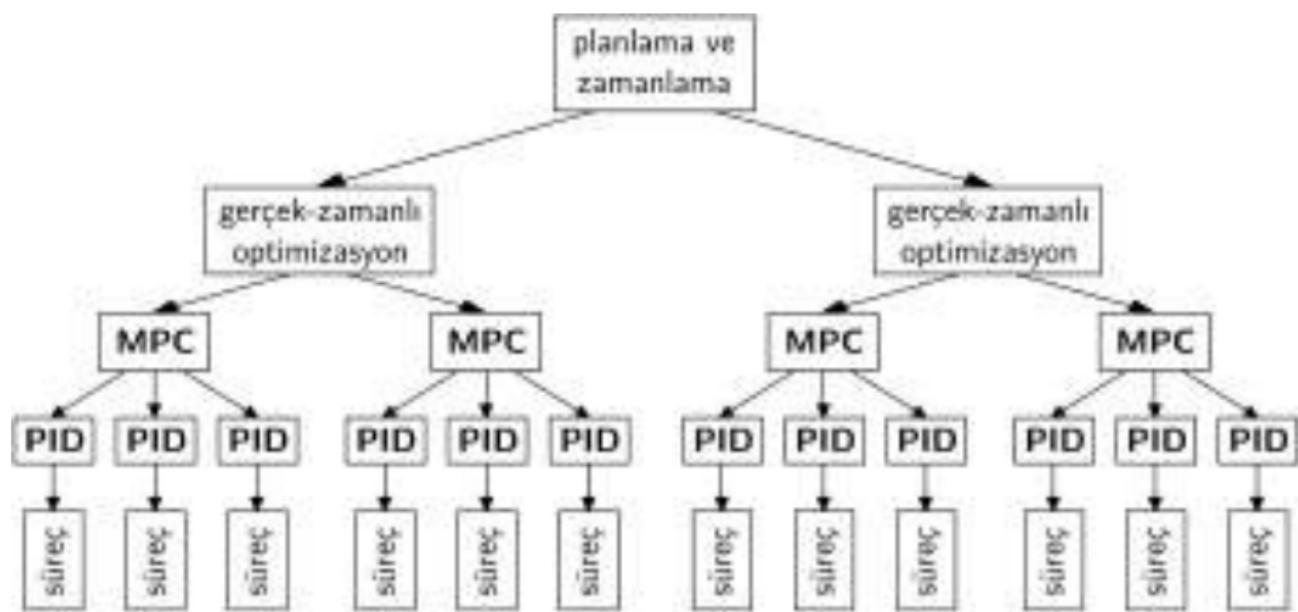
### PID kontrol\* (H)

# Süreç kontrol/optimizasyon - Beş seviye<sup>12</sup>

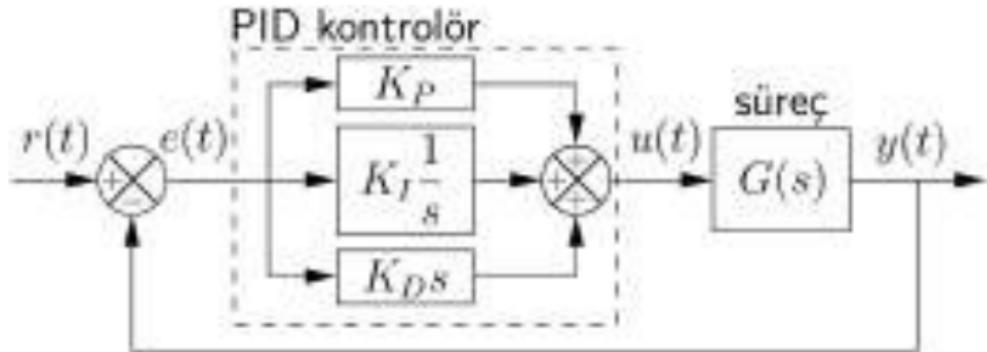


<sup>12</sup>Dale E Seborg et al. *Process Dynamics and Control*. John Wiley & Sons, 2016.

# Süreç kontrol/optimizasyon mimarisi



# PID kontrol<sup>13</sup>



Nicolas Minorsky  
(1885-1970)

$$u(t) = \underbrace{K_P e(t)}_{\text{P etki}} + \underbrace{K_I \int_0^t e(\tau) d\tau}_{\text{I etki}} + \underbrace{K_D \frac{de(t)}{dt}}_{\text{D etki}}$$

<sup>13</sup>Nicolas Minorsky. *Journal of the American Society for Naval Engineers* 34.2 (1922), pp. 280–309. URL:  
<https://doi.org/10.1111/j.1559-3584.1922.tb04958.x>.

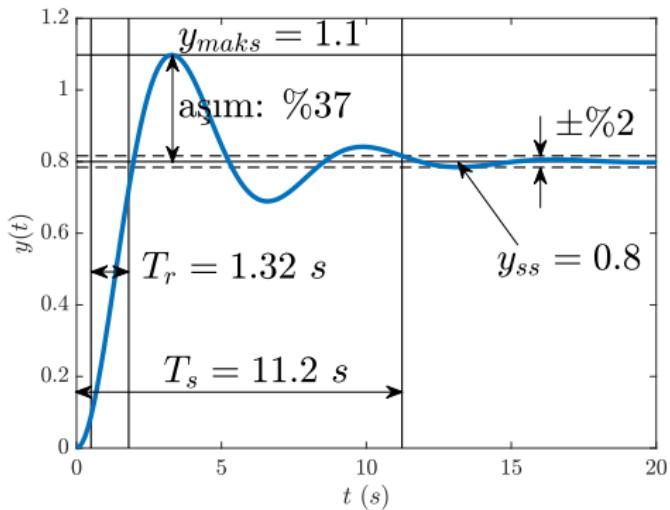
# Basamak yanıtı ve başarım kriterleri

Örnek:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0.8}{s^2 + 0.6s + 1}$$

başarım kriterleri:

- ▶ yükselseme zamanı  $T_r$ :  
 $0.1y_{ss} \rightarrow 0.9y_{ss}$
- ▶ aşım:  $(y_{maks} - y_{ss})/y_{ss}$
- ▶ yerleşme zamanı  $T_s$ :  
 $t = 0 \rightarrow \pm\%2y_{ss}$



# PID terimlerinin başarımı etkileri<sup>14</sup>

PID terimi	yükselme zamanı	aşım	yerleşme zamanı	daimi rejim hatası	kararlılık
$K_P \nearrow$	azalır	artar	az artar	azalır	kötüleşir
$K_I \nearrow$	az azalır	artar	artar	çok azalır	kötüleşir
$K_D \nearrow$	az azalır	azalır	azalır	az değişir	iyileşir

<sup>14</sup>Kiam Heong Ang, Gregory Chong, and Yun Li. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 13.4 (2005), pp. 559–576. URL:  
<https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=1453566>.

## Ziegler-Nichols frekans yanıtı yöntemi<sup>15</sup>

**Adım 1:**  $K_I = 0$  ve  $K_D = 0$  seç,  $K_P$ 'yi kapalı çevrim sistem sönümsüz salınımıma girene kadar arttır.

**Adım 2:** Sönümsüz salınımıma yol açan  $K_P$  değerini *en yüksek kazanç*  $K_u$  olarak, *salınım periyodunu* da  $T_u$  olarak kaydet.

**Adım 3:** Ziegler-Nichols yönteminin tablosunu kullanarak PID parametrelerini ayarla.

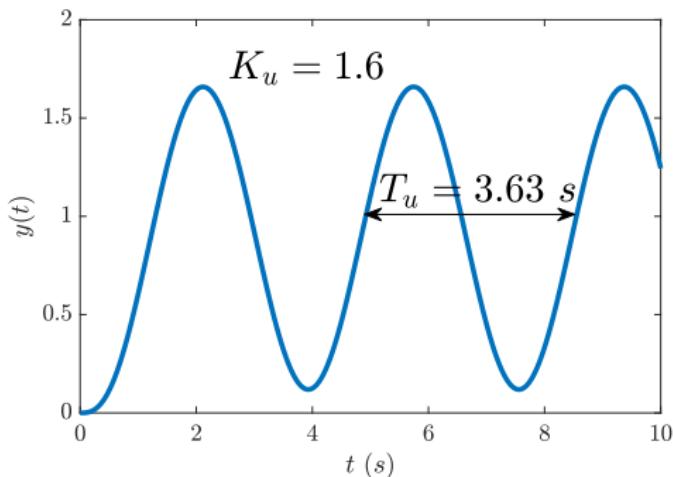
kontrolör tipi	$K_p$	$K_I$	$K_D$
P	$0.5K_u$	—	—
PI	$0.45K_u$	$0.54K_u/T_u$	—
PD	$0.8K_u$	—	$0.1K_u T_u$
PID	$0.6K_u$	$1.2K_u/T_u$	$0.075K_u T_u$

<sup>15</sup>John G Ziegler and Nathaniel B Nichols. *Transactions of the ASME* 64.11 (1942).

# Ziegler-Nichols frekans yanıtı yöntemi

Örnek:

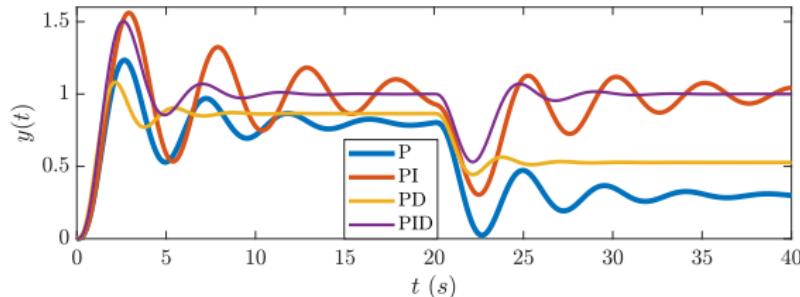
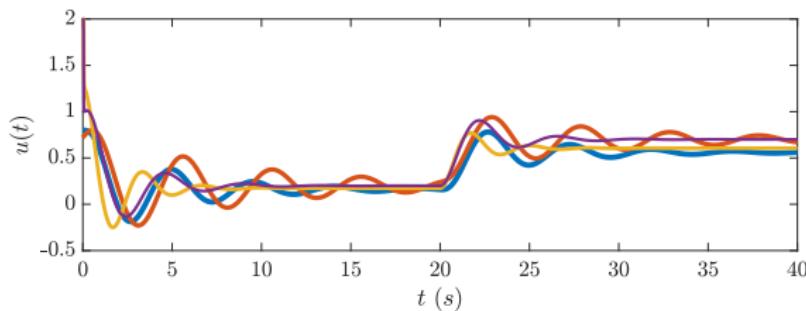
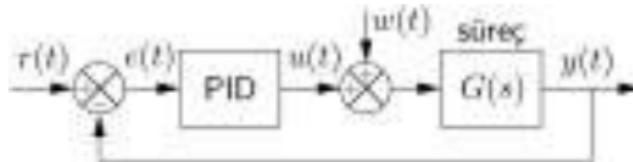
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5}{(s + 1)^3}$$



	$K_p$	$K_I$	$K_D$
P	0.8	—	—
PI	0.72	0.24	—
PD	1.28	—	0.58
PID	0.96	0.53	0.44

# Ziegler-Nichols frekans yanıtı yöntemi

Örnek:



## Bölüm 7

Durum geribeslemeli kontrol

## Alt Bölüm 1

Erişilebilirlik analizi

# Erişilebilirlik analizi

Aşağıdaki AZD sistemi ve durum yanıtını ele alalım:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad x(0) = x_0 \quad x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R}^m$$

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^i B u(k-1-i)$$

**Tanım:** Tüm  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  formundaki durum vektörleri için

$$x_2 = A^k x_1 + \sum_{i=0}^{k-1} A^i B u(k-1-i)$$

denklemini sağlayan sonlu bir  $k \in \mathbb{Z}$  anı ve  $u(0), u(1), \dots, u(k-1) \in \mathbb{R}^m$  şeklinde kontrol girişleri dizisi mevcutsa,  $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$  sistemi **erişilebilirdir**.

Yani, uygun kontrol girişleri uygulayarak, sistemi herhangi bir  $x_1$  durumundan herhangi başka bir  $x_2$  durumuna  $k$  anında getirebiliyorsak, o sistem erişilebilirdir.

## Erişilebilirlik analizi

Sistemin durumunu  $n$  adımda  $x_1$ 'den  $x_2$ 'ye taşımak için gereken  $n$  adet kontrol girişini belirleme problemini ele alalım.

$$x_2 = A^n x_1 + \sum_{i=0}^{n-1} A^i B u(k-1-i)$$

denklemini aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\underbrace{x_2 - A^n x_1}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}}_U$$

## Erişilebilirlik analizi

Sistemin durumunu  $n$  adımda  $x_1$ 'den  $x_2$ 'ye taşımak için gereken  $n$  adet kontrol girişini belirleme problemi

$$RU = X$$

denklemini  $U$ 'ya göre çözmeye denktir.

$R \in \mathbb{R}^{n \times nm}$  matrisine sistemin *erişilebilirlik matrisi* denir.

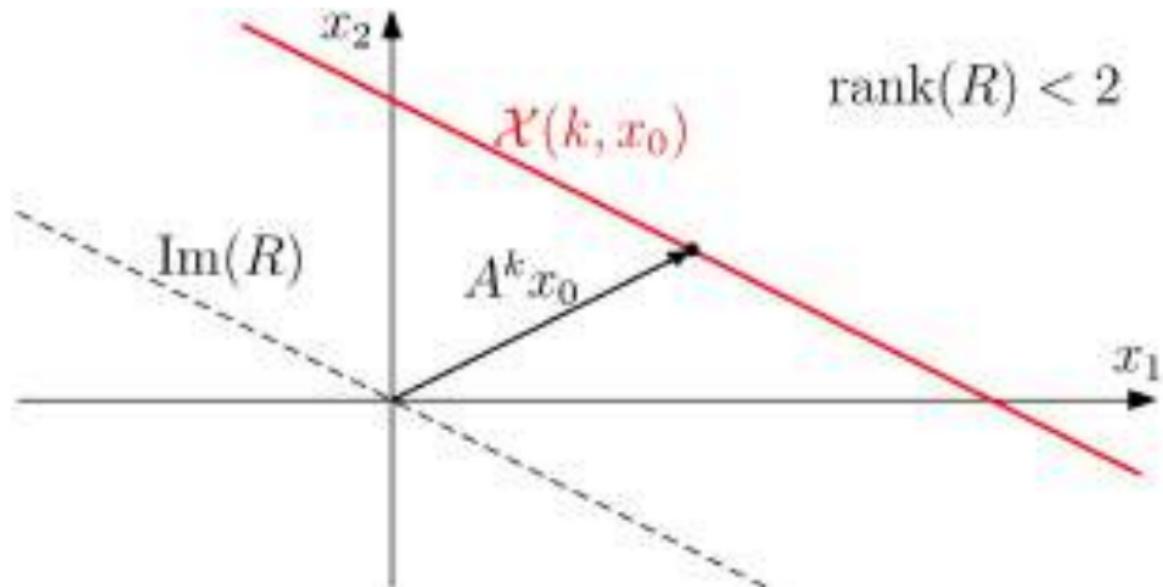
$$\boxed{x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \text{ sistemi erişilebilirdir} \\ \Leftrightarrow \text{rank}(R) = n}$$

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$  formundaki AZD bir sistemin erişilebilirlik özelliği yalnızca  $A$  ve  $B$  matrislerine bağlıdır.

## Erişilebilirlik analizi

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$  sistemi için,  $x(0) = x_0$ 'dan hareketle,  $k$  adımda erişilebilir tüm durumların kümesi:

$$\mathcal{X}(k, x_0) = A^k x_0 + \text{Im}(R)$$



## Kanonik erişilebilirlik dekompozisyonu

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$  sisteminin erişilebilir olmadığı hali ele alalım. Burada  $\text{rank}(R) = n_e < n$  olacaktır. Sistemin erişilebilir ve erişilemez durumlarını ayırmak için

$$T = \begin{bmatrix} w_{n_e+1} & \dots & w_{n_e} & \nu_1 & \dots & \nu_{n_e} \end{bmatrix}$$

ile bir koordinat değişimi yapılabilir. Burada  $\{\nu_1, \dots, \nu_{n_e}\}$   $\text{Im}(R)$  için bir taban oluşturur,  $\{w_{n_e+1}, \dots, w_{n_e}\}$  ise bu tabanı  $\mathbb{R}^n$ 'de bir taban oluşturacak şekilde tamamlar. Yeni koordinatlarda sistem matrisleri  $\tilde{A} = T^{-1}AT$  ve  $\tilde{B} = T^{-1}B$  şeklindedir. Bu forma **kanonik erişilebilirlik formu** denir.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{ez} & 0 \\ A_{21} & A_e \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_e \end{bmatrix}$$

## Kararlılaştırılabilirlik

**Teorem:**  $x(k + 1) = Ax(k) + Bu(k)$  sisteminin erişilemez kısmının tüm özdeğerlerinin mutlak değeri 1'den kesin olarak küçükse bu sistem **kararlılaştırılabilir**dir.

**Örnek:** Aşağıdaki sistemi ele alalım.

$$x(k + 1) = \left[ \begin{array}{c|cc} 1 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 0.5 & -1 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{array} \right] x(k) + \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] u(k)$$

Sistem kanonik erişilebilirlik formundadır. Sistemin kısımları şu şekilde görülebilir:

$$A_{ez} = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad A_e = [1] \quad A_{21} = [-2 \quad 1] \quad B_e = [1]$$

Sistemin erişilemez kısmının (yani  $A_{ez}$  matrisinin) özdeğerleri  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$  şeklindedir. Sistem kararlılaştırılabilirdir.

# Erişilebilirlik/Kararlılaştırılabilirlik

Örnek: Aşağıdaki sistemi ele alalım.

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 9 & 5 & 10 \\ -7 & -7 & -9 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 0.5 & -1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} u(k)$$

$$R = [B \ AB \ A^2B]$$

$\text{rank}(R) = 2 < n \quad (n = 3) \rightarrow \text{sistem erişilemezdir}$

sistemin kanonik erişilebilirlik formunu elde edelim:

$$\text{basis}(\text{Im}(R)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \left[ \begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 4 \\ -1 & -4 & 10 \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array} \right] \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \left[ \begin{array}{cc} -1 & 0.5 \\ 0.5 & -1 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$A_{ez} = [5] \quad A_e = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix} \quad B_e = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix}$$

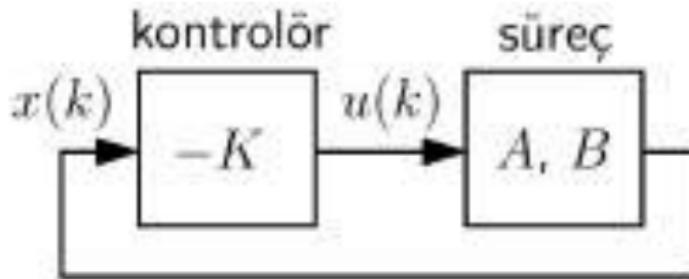
$A_{ez}$  matrisinin özdeğeri:  $\lambda = 5, |\lambda| > 1 \rightarrow \text{sistem kararlılaştırılamazdır}$

## Alt Bölüm 2

Doğrusal durum geri besleme

## Durum geri beslemeyle kararlılaştırma

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ) sistemini asimptotik kararlı hale getiren kontrolörü tasarlama istiyoruz.



**kontrolör:**  $u(k) = -Kx(k)$

Doğrusal durum geri beslemeli kapalı çevrimin asimptotik kararlı olması için geri besleme kazanç matrisi  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 'yi doğru şekilde seçmemiz gereklidir.

## Durum geri beslemeyle kararlılaştırma

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$  formundaki sistem ve  
 $u(k) = -Kx(k)$  formundaki kontrolörden oluşan kapalı-çevrim sistem şu şekildedir:

$$x(k+1) = Ax(k) - BKx(k) = (A - BK)x(k)$$

Kapalı-çevrim sistemin kararlılık özellikleri kapalı-çevrim durum matrisi  $A_c = A - BK$ 'nin özdeğerlerine bağlıdır.

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$  sistemi erişilebilir ise  
 $A_c$  matrisinin özdeğerleri serbestçe seçilebilir.

# Ackermann formülüyle özdeğer atama<sup>16</sup>

Bir girişli  $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$  ( $x(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}$ ,  $\text{rank}(R) = n$ ) formunda bir sistem ele alalım. İstenen kapalı-çevrim karakteristik polinomu şu şekilde yazabiliriz (bu polinomun kökleri kapalı-çevrim sisteme istenen özdeğerlerdir):



$$p_d(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + d_1\lambda + d_0$$

Jürgen

Ackermann

## Ackermann formülü:

$$K = \text{row}_n \left( R^{-1} p_d(A) \right)$$

$$(p_d(A) = A^n + d_{n-1}A^{n-1} + \dots + d_1A + d_0I)$$

Bu formülle tasarlanan  $K$  ile, kapalı-çevrim sistemin özdeğerleri ( $p_c(\lambda) = \det(\lambda I - A + BK)$ 'nin kökleri) istenen özdeğerler olarak atanır ( $p_d(\lambda)$ 'nin köklerine eşit olur).

<sup>16</sup> Jürgen Ackermann. *at-Automatisierungstechnik* 20.1-12 (1972), pp. 297–300.

# Özdeğer atama

**Örnek:** Ayrık-zamanlı doğrusal bir sistemin durum uzayı modeli aşağıda verilmiştir:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.25 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} u(k)$$

Bu dinamik sistem ve  $u(k) = -Kx(k)$  formundaki kontrolörden oluşan kapalı-çevrim sistemin özdeğerlerini 0.5 ve 0.25 olarak atayan  $K = [k_1 \quad k_2]$  matrisini hesaplayınız.

**Çözüm (opsiyon a):** Kapalı-çevrim sistemin özdeğerlerini serbestçe seçebilmemiz için dinamik sistemin erişilebilir olması gereklidir. Sistemin erişilebilir olup olmadığını anlamak için erişilebilirlik matrisini inceleyelim:

$$R = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.125 \\ -0.5 & -3.5 \end{bmatrix}$$

$$\det(R) = (1) \times (-3.5) - (0.125) \times (-0.5) = -3.4375$$

$$\det(R) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rank}(R) = n = 2 \quad \text{sistem erişilebilirdir} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

Kapalı-çevrim sistemin özdeğerlerini 0.5 ve 0.25 olarak atamak istiyoruz. Bu özdeğerlere karşılık gelen istenen kapalı-çevrim karakteristik polinomu şu şekilde yazabiliriz:

$$p_d(\lambda) = (\lambda - 0.5)(\lambda - 0.25) = \lambda^2 - 0.75\lambda + 0.125$$

# Özdeğer atama

Kapalı-çevrim sistemin özdeğerleri, kapalı-çevrim durum matrisi  $A_c$ 'nin özdeğerleridir.

$$A_c = A - BK \quad p_c(\lambda) = \det(\lambda I - A + BK)$$

Bu özdeğerler,  $K$  matrisinin fonksiyonu olarak şu şekilde hesaplanabilir:

$$\begin{aligned}\lambda I - A + BK &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -0.25 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -0.25 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ -0.5k_1 & -0.5k_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda + k_1 & 0.25 + k_2 \\ 3 - 0.5k_1 & \lambda - 1 - 0.5k_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_c(\lambda) &= \det(\lambda I - A + BK) = \begin{vmatrix} \lambda + k_1 & 0.25 + k_2 \\ 3 - 0.5k_1 & \lambda - 1 - 0.5k_2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + k_1)(\lambda - 1 - 0.5k_2) - (3 - 0.5k_1)(0.25 + k_2) \\ &= \lambda^2 + (k_1 - 0.5k_2 - 1)\lambda + (-0.875k_1 - 3k_2 - 0.75)\end{aligned}$$

# Özdeğer atama

Kapalı çevrimde oluşan karakteristik polinomun istenene eşit olması gereklidir:

$$p_c(\lambda) = p_d(\lambda)$$

$$\lambda^2 + (k_1 - 0.5k_2 - 1)\lambda + (-0.875k_1 - 3k_2 - 0.75) = \lambda^2 - 0.75\lambda + 0.125$$

Polinomların katsayılarının eşitliğinden hareketle şu ifadeleri yazabiliriz:

$$k_1 - 0.5k_2 - 1 = -0.75 \quad -0.875k_1 - 3k_2 - 0.75 = 0.125$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.875 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.875 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.875 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.875 \end{bmatrix}$$

$$\left( \text{hatırlatma: } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8727 & -0.1455 \\ -0.2545 & -0.2909 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0909 \\ -0.3182 \end{bmatrix}$$

Sonuç olarak  $K$  matrisi  $K = [k_1 \quad k_2] = [0.0909 \quad -0.3182]$  şeklinde bulunur.

# Özdeğer atama

**Çözüm (opsiyon b):** Bu soruyu Ackermann formülü ile de çözebiliriz:

$$K = \text{row}_2 \left( R^{-1} p_d(A) \right)$$

$$p_d(\lambda) = (\lambda - 0.5)(\lambda - 0.25) = \lambda^2 - 0.75\lambda + 0.125$$

$$p_d(A) = A^2 - 0.75A + 0.125I$$

$$p_d(A) = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.25 \\ -3 & 1.75 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -0.1875 \\ -2.25 & 0.75 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.125 & 0 \\ 0 & 0.125 \end{bmatrix}$$

$$p_d(A) = \begin{bmatrix} 0.875 & -0.0625 \\ -0.75 & 1.125 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.125 \\ -0.5 & -3.5 \end{bmatrix} \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0182 & 0.0364 \\ -0.1455 & -0.2909 \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} p_d(A) = \begin{bmatrix} 1.0182 & 0.0364 \\ -0.1455 & -0.2909 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.875 & -0.0625 \\ -0.75 & 1.125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8636 & -0.0227 \\ 0.0909 & -0.3182 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.0909 & -0.3182 \end{bmatrix}$$

**Çözüm (opsiyon c):** GNU Octave ile çözüm

```
pkg load control
A = [0 -0.25; -3 1]; B = [1; -0.5];
p_d = [0.5; 0.25]; K = acker(A, B, p_d)
```

# Özdeğer atama ile kontrolör tasarıımı

Örnek:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.25 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} u(k)$$

a)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.25$

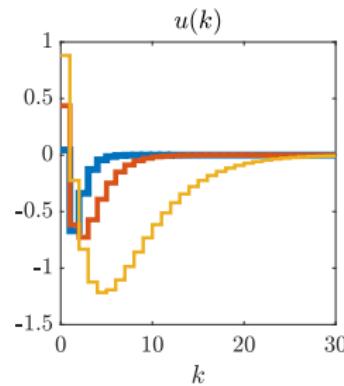
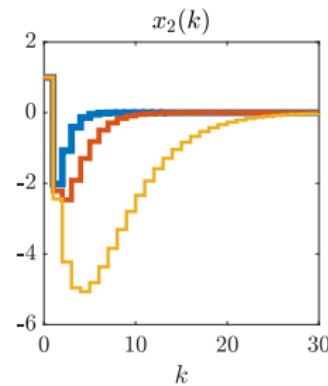
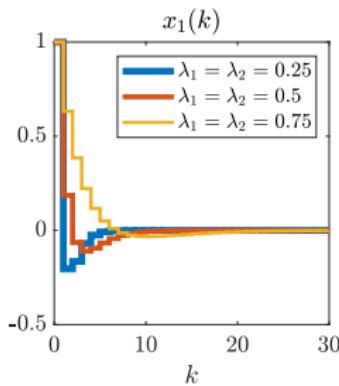
$$K = \begin{bmatrix} 0.32 & -0.36 \end{bmatrix}$$

b)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$

$$K = \begin{bmatrix} -0.15 & -0.29 \end{bmatrix}$$

c)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.75$

$$K = \begin{bmatrix} -0.63 & -0.26 \end{bmatrix}$$

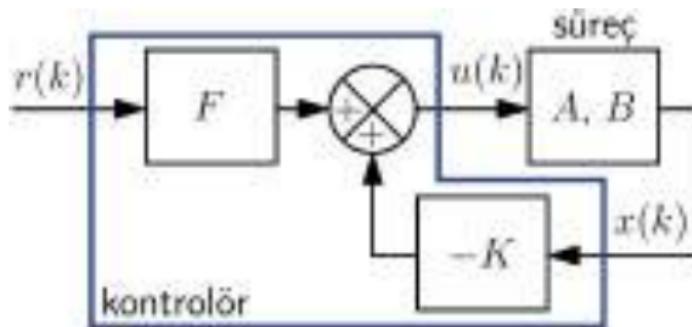


## Alt Bölüm 3

Referans izleme ve integral etki

# Referans izleme

**Ana fikir:**  $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ) sisteminin durumunun istenen sabit bir referans değer  $r(k) = r'$ yi izlemesini sağlayan kontrolörü tasarlamak.



$$\boxed{\text{kontrolör: } u(k) = -Kx(k) + Fr(k)}$$

Kapalı-çevrim sistemin referans izleme yapabilmesi için referans kazanç matrisi  $F$ 'yi doğru şekilde seçmemiz gereklidir.

## Referans izleme

$x(k)$ 'in daimi rejimde  $r(k)$ 'ye eşit olması için  $r(k)$ 'den  $x(k)$ 'e olan daimi rejim kazancının birim kazanç olması gereklidir:

$$x(k+1) = (A - BK)x(k) + BFr(k)$$

daimi rejimde:  $x(k+1) = x(k)$

$$x(k) = (A - BK)x(k) + BFr(k)$$

$$(I - A + BK)x(k) = BFr(k)$$

$$\frac{x(k)}{r(k)} = (I - A + BK)^{-1}BF = I$$

Referans izleme için  $F$ 'yi şu şekilde seçmemiz gereklidir:

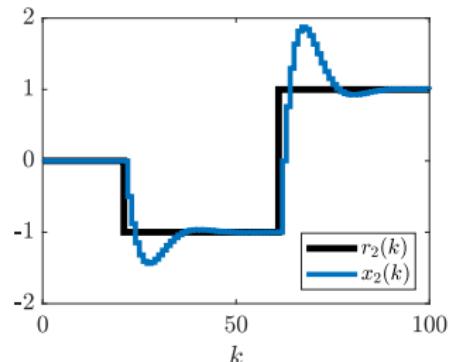
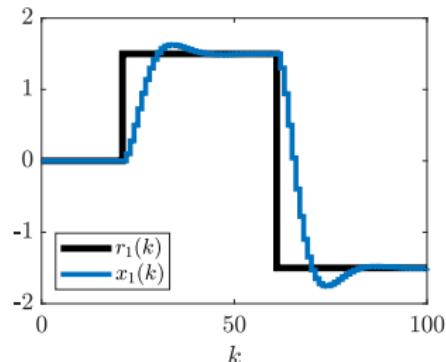
$$F = \left( (I - A + BK)^{-1}B \right)^{-1}$$

Not: a) İfadelerdeki matris terslerinin mevcut olduğu ve b)  
durum ile kontrol girişi boyutlarının eşit olduğu ( $x(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  
 $u(k) \in \mathbb{R}^m$ ,  $n = m$ ) kabul edilmiştir.

## Referans izleme

**Örnek:** Kutuplar  $K$  ile  $\lambda_{1,2} = 0.8 \pm 0.2j$ 'ye atandı.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1.1 & 1 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}}_K \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_F \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} = -\underbrace{\begin{bmatrix} 0.6 & 2.4 \\ -0.2 & 0 \end{bmatrix}}_K x(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ -0.2 & 0.2 \end{bmatrix}}_F r(k)$$

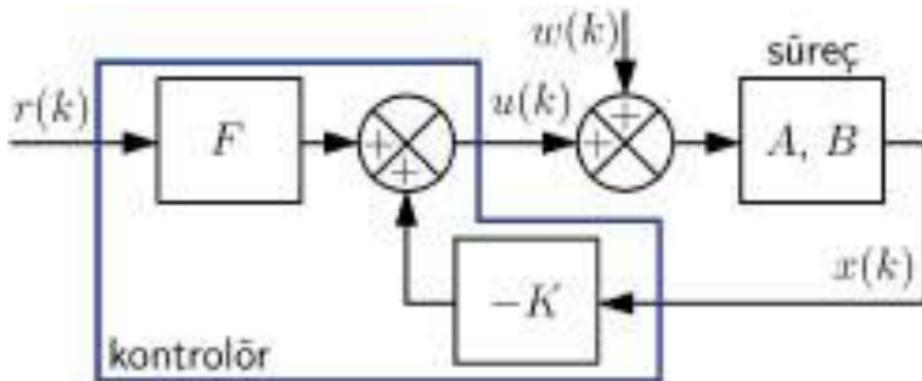


## Referans izleme

```
pkg load control % GNU Octave benzetimi
A = [1.1 1;0 0.8];B = [1 0;0 1];
p_d = [0.8+0.2i;0.8-0.2i];
K = place(A,B,p_d);
F = inv((inv(eye(2) - (A-B*K)))*B);
x = NaN(2,101);x(:,1) = [0;0];
r(1,:) = [ones(1,50) -ones(1,51)];
r(2,:) = [-ones(1,50) ones(1,51)];
for k = 1:100
u(:,k) = -K*x(:,k) + F*r(:,k);
x(:,k+1) = A*x(:,k) + B*u(:,k);
end
```

## Referans izlemede bozucu etkisi

Referans izleme amaçlı kapalı-çevrim sistemi ve ona etkiyen giriş bozucusu  $w(k)$ 'yi ele alalım (giriş bozucusu  $w(k)$  eyleyicideki belirsizlikleri veya ölçülemeyen bir bozucuyu modellemek için kullanılabilir).



Burada izleme hatası  $x(k) - r(k)$ 'dan geri besleme yok. Bu kapalı-çevrim sistem giriş bozucusu  $w(k)$  ile modellenen belirsizliklere karşı dayanıklı değil.

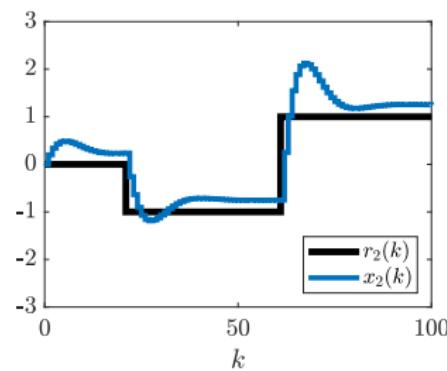
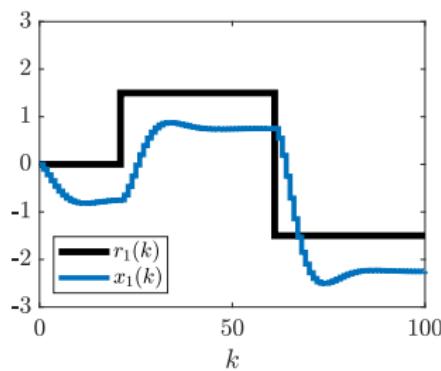
# Referans izlemede bozucu etkisi

Örnek: Kutuplar  $K$  ile  $\lambda_{1,2} = 0.8 \pm 0.2j$ 'ye atandı.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 & 1 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{K} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1(k) \\ w_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} = -\underbrace{\begin{bmatrix} 0.6 & 2.4 \\ -0.2 & 0 \end{bmatrix}}_K x(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 \\ -0.2 & 0.2 \end{bmatrix}}_F r(k)$$

$$w_1(k) = -0.1 \quad w_2(k) = 0.2$$



Kapalı-çevrim sistem referans izleme yapamıyor. Giriş bozucusu  $w(k)$ , kapalı çevrimin kontrolör tasarımindan hesaba katılanlardan farklı koşullarda çalışmasına sebep oluyor.

## Referans izlemede bozucu etkisi

```
pkg load control % GNU Octave benzetimi
A = [1.1 1;0 0.8];B = [1 0;0 1];
p_d = [0.8+0.2i;0.8-0.2i];
K = place(A,B,p_d);
F = inv((inv(eye(2) - (A-B*K)))*B);
x = NaN(2,101);x(:,1) = [0;0];
r(1,:) = [ones(1,50) -ones(1,51)];
r(2,:) = [-ones(1,50) ones(1,51)];
w = [-0.1*ones(1,100);0.2*ones(1,100)];
for k = 1:100
u(:,k) = -K*x(:,k) + F*r(:,k) + w(:,k);
x(:,k+1) = A*x(:,k) + B*u(:,k);
end
```

## Bozucu bastırma için integral etki

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$  sisteminde sistem durumu  $x(k)$ 'nın giriş bozucusu  $w(k)$  etkisi altında referans izleme ( $x(k) \sim r(k)$ ) problemini ele alalım.

Bunun için  $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$  sistemine izleme hatası  $x(k) - r(k)$ 'nin integralini durum olarak ekleyelim:

**integral etki:**  $q(k+1) = q(k) + x(k) - r(k)$

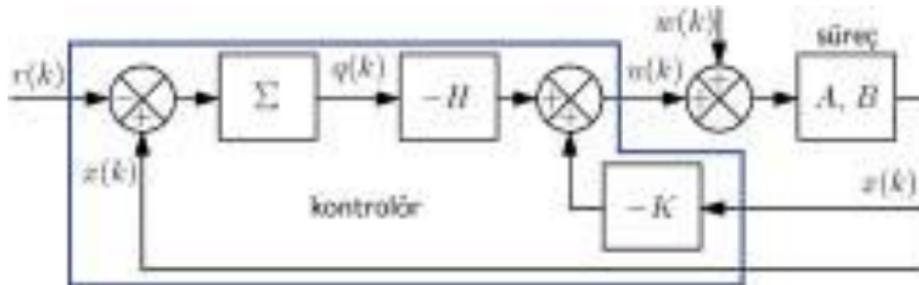
Ek yapılmış sistem şu şekildedir:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ q(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ q(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix} r(k)$$

## Bozucu bastırma için integral etki

Ek yapılmış sistem için şu formda kararlılaştırılan bir durum geri beslemeli kontrolör tasarılanabilir:

$$u(k) = -[K \ H] \begin{bmatrix} x(k) \\ q(k) \end{bmatrix}$$



**Teorem:** Ek yapılmış sistem için kararlılaştırılan bir kontrolör kazanç matrisi  $[K \ H]$ 'nin tasarlanabildiğini varsayalım. Bu durumda, kapalı-çevrim sistem tüm sabit giriş bozucuları  $w(k) = w$  ve referanslar  $r(k) = r$  için daimi rejim hatasını sıfırlayarak referans izleme yapar ( $\lim_{k \rightarrow +\infty} x(k) = r$ ).

## Bozucu bastırma için integral etki

**Kanıt:** Kapalı-çevrimdeki ek yapılmış sistem

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ q(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -BH \\ I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ q(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(k) \\ r(k) \end{bmatrix}$$

formundadır. Sistem kontrolörün tasarıımı gereği asimptotik kararlıdır.

Sabit  $w(k) = w$  ve  $r(k) = r$  için sistemin durumu bir daimi rejim değerine yakınsar.  $q(k)$  için  $\lim_{k \rightarrow +\infty} q(k) = \bar{q}$  diyelim.

Sonuç olarak:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x(k) - r(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} q(k+1) - q(k) = \bar{q} - \bar{q} = 0$$

# Bozucu bastırma için integral etki

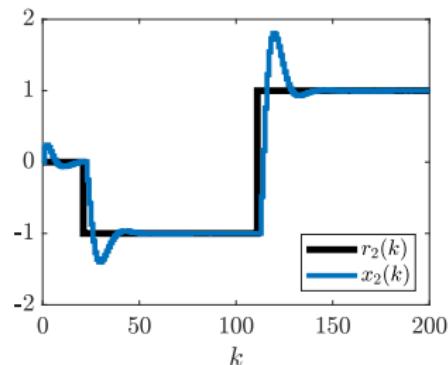
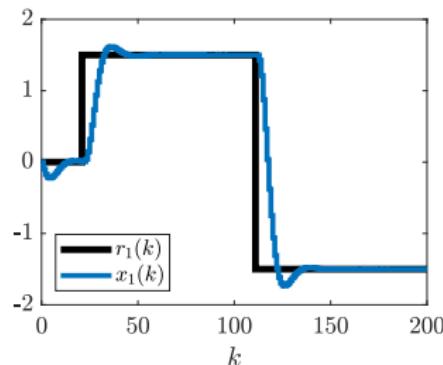
Örnek: Kutuplar  $K$  ile  $\lambda_{1,2} = 0.8 \pm 0.2j$ ,  $\lambda_3 = 0.4$ , ve  $\lambda_4 = 0.5$ 'e atandı.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 & 1 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1(k) \\ w_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_1(k+1) \\ q_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1(k) \\ r_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} = -\underbrace{\begin{bmatrix} 1.74 & 2.49 & 0.21 & 0.25 \\ -0.15 & 0.53 & -0.1 & 0.11 \end{bmatrix}}_{[K \quad H]} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ q_1(k) \\ q_2(k) \end{bmatrix}$$

$$w_1(k) = -0.1 \quad w_2(k) = 0.2$$



## Bozucu bastırma için integral etki

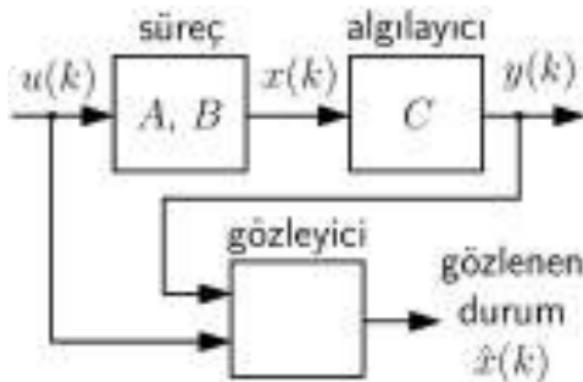
```
pkg load control % GNU Octave benzetimi
A = [1.1 1;0 0.8];B = [1 0;0 1];
A_aug = [A zeros(2,2);eye(2) eye(2)];
B_aug = [B;zeros(2,2)];
p_d_aug = [0.8+0.2i;0.8-0.2i;0.4;0.5];
K_aug = place(A_aug,B_aug,p_d_aug);
x = NaN(2,101);x(:,1) = [0;0];
q = NaN(2,101);q(:,1) = zeros(2,1);
r(1,:) = [ones(1,50) -ones(1,51)];
r(2,:) = [-ones(1,50) ones(1,51)];
w = [-0.1*ones(1,100);0.2*ones(1,100)];
for k = 1:100
u(:,k) = -K_aug*[x(:,k);q(:,k)];
x(:,k+1) = A*x(:,k) + B*u(:,k) + w(:,k);
q(:,k+1) = q(:,k) + x(:,k) - r(:,k);
end
```

## Bölüm 8

Durum gözleme ve çıkış geri besleme

## Durum gözleme

Durum geri beslemeli kontrolde (örneğin,  $u(k) = -Kx(k)$ ) kontrolörün çalışması için sistem durumunun bilgisi gereklidir. Ancak algılayıcılar genellikle doğrudan sistem durumunu ölçmezler (yani,  $y(k)$  genellikle  $x(k)$ 'e eşit değildir).



Giriş  $u(k)$  ve ölçüm  $y(k)$ 'yi kullanarak  $x(k)$  yaklaşık olarak hesaplanabilir. Bu işlemeye *durum gözleme*, işlemi yapan mekanizmaya da *durum gözleyici* denir (durum gözleyicilere *yazılımsal/sanal algılayıcı (soft/virtual sensor)* da denir).

## Alt Bölüm 1

Gözlemebilirlik analizi

## Gözlenebilirlik analizi

Durum gözleme problemini çözmenin (yani,  $u(k)$  ve  $y(k)$ 'yi kullanarak  $x(k)$ 'i hesaplamadan) mümkün olup olmadığını sistemin gözlenebilirlik analizini yaparak öğrenebiliriz.

Aşağıdaki AZD sistemi ele alalım:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Bu sistemin durum yanıtı ve karşılık gelen ölçüm dizisi şu şekildedir:

$$x(k) = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^i Bu(k-1-i)$$

$$y(k) = CA^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} CA^i Bu(k-1-i) + Du(k)$$

# Gözlenebilirlik analizi

$n$  adet ölçüm  $y(k)$  ve giriş dizisi  $u(k)$ 'dan hareketle sistemin başlangıç durumu  $x_0$ 'ı hesaplama problemini ele alalım:

$$y(0) = Cx_0 + Du(0)$$

$$y(1) = CAx_0 + CBu(0) + Du(1)$$

⋮

$$y(n-1) = CA^{n-1}x_0 + \sum_{i=1}^{n-2} CA^i Bu(n-2-i) + Du(n-1)$$

Bu denklemleri şu şekilde yazabiliriz:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(0) - Du(0) \\ y(1) - CBu(0) - Du(1) \\ \vdots \\ y(n-1) - \sum_{i=1}^{n-2} CA^i Bu(n-2-i) - Du(n-1) \end{bmatrix}}_Y = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}}_\Theta x_0$$

## Gözlenebilirlik analizi

$n$  adet ölçüm  $y(k)$  ve giriş dizisi  $u(k)$ 'dan hareketle sistemin başlangıç durumu  $x_0$ 'ı hesaplama problemi

$$Y = \Theta x_0$$

denklemini  $x_0$ 'e göre çözmeye denktir.  $\Theta \in \mathbb{R}^{nq \times n}$  matrisine sistemin *gözlenebilirlik matrisi* denir.

$\text{rank}(\Theta) = n$  ise  $Y = \Theta x_0$  denkleminin eşsiz bir çözümü vardır. Bu denklemin çözümü olan  $x_0$ 'dan hareketle, sistemin durum yanıtı  $x(k) = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^i B u(k-1-i)$  kullanılarak herhangi bir  $k$  anı için  $x(k)$  hesaplanabilir.

$$\boxed{x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \text{ sistemi gözlenebilirdir} \\ \Leftrightarrow \text{rank}(\Theta) = n}$$

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ ,  $y(k) = Cx(k) + Du(k)$  sisteminin gözlenebilirlik özelliği yalnızca  $A$  ve  $C$  matrislerine bağlıdır.

## Kanonik gözlenebilirlik dekompozisyonu

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ ,  $y(k) = Cx(k) + Du(k)$  sisteminin gözlenebilir olmadığı hali ele alalım. Burada  $\dim(\ker(\Theta)) = n - n_g \geq 1$  olacaktır. Sistemin *gözlenebilir* ve *gözlenemez* durumlarını ayırmak için

$$T = \begin{bmatrix} \nu_{n_g+1} & \dots & \nu_n & w_1 & \dots & w_{n_g} \end{bmatrix}$$

ile bir koordinat değişimi yapılabilir. Burada  $\{\nu_{n_g+1}, \dots, \nu_n\}$   $\ker(\Theta)$  için bir taban oluşturur,  $\{w_1, \dots, w_{n_g}\}$  ise bu tabanı  $\mathbb{R}^n$ 'de bir taban oluşturacak şekilde tamamlar. Yeni koordinatlarda sistem matrisleri  $\tilde{A} = T^{-1}AT$ ,  $\tilde{B} = T^{-1}B$ , ve  $\tilde{C} = CT$  şeklindedir. Bu forma **kanonik gözlenebilirlik formu** denir.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{gz} & A_{12} \\ 0 & A_g \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_{gz} \\ B_g \end{bmatrix} \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & C_g \end{bmatrix}$$

## Tespit edilebilirlik

**Teorem:**  $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ ,  $y(k) = Cx(k) + Du(k)$  sisteminin gözlenemez kısmının tüm özdeğerlerinin mutlak değeri 1'den kesin olarak küçükse bu sistem **tespit edilebilirdir**.

**Örnek:** Aşağıdaki sistemi ele alalım.

$$x(k+1) = \left[ \begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0.5 \end{array} \right] x(k) + \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \right] u(k)$$
$$y(k) = [ 1 \ 1 | 0 ]$$

Sistem kanonik gözlenebilirlik formundadır. Sistemin kısımları şu şekilde görülebilir:

$$A_{gz} = [0.5] \quad A_g = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad A_{12} = [0 \ 0] \quad B_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistemin gözlenemez kısmının (yani  $A_{gz}$  matrisinin) özdeğeri  $\lambda = 0.5$  şeklindedir. Sistem tespit edilebilirdir.

# Gözlenebilirlik/Tespit edilebilirlik

Örnek: Aşağıdaki sistemi ele alalım.

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1.1 & -2.5 & -1.15 \\ 2.6 & 6.8 & 2.8 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(k) \quad y(k) = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 3 \\ 1 & 8 & 3 \end{bmatrix} x(k)$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} \quad \text{rank}(\Theta) = 2 < n \quad (n = 3) \quad \rightarrow \quad \text{sistem gözlenemezdir}$$

sistemin kanonik gözlenebilirlik formunu elde edelim:

$$\text{basis}(\ker(\Theta)) = \begin{bmatrix} -0.667 \\ 0.333 \\ -0.667 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} -0.667 & 0 & 0 \\ 0.333 & 1 & 0 \\ -0.667 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 \\ 1.5 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \left[ \begin{array}{c|cc} 2 & -6 & -3 \\ \hline 0 & -0.5 & -0.15 \\ 0 & 2.8 & 0.8 \end{array} \right] \quad \tilde{C} = CT = \left[ \begin{array}{c|cc} 0 & 10 & 3 \\ 0 & 8 & 3 \end{array} \right]$$

$$A_{gz} = [2] \quad A_g = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.15 \\ 2.8 & 0.8 \end{bmatrix} \quad A_{21} = [-6 \quad -3] \quad B_g = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

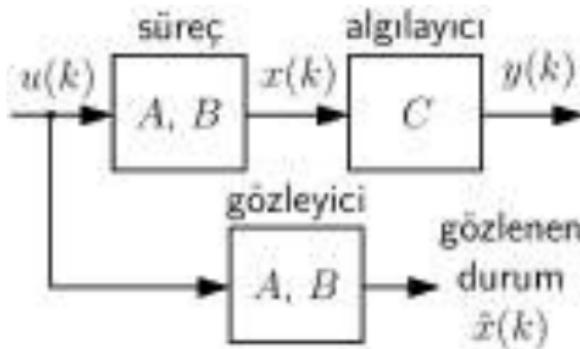
$A_{gz}$  matrisinin özdeğeri:  $\lambda = 2, |\lambda| > 1 \rightarrow$  sistem tespit edilemezdir

## Alt Bölüm 2

Doğrusal durum gözleme

## Doğrusal durum gözleme

Her  $k$  anında, sadece ölçüm  $y(k)$  ve giriş  $u(k)$ 'yı kullanarak, sistem durumu  $x(k)$ 'i yaklaşık olarak ifade eden  $\hat{x}(k)$ 'i hesaplayabilen bir durum gözleyici tasarlamak istiyoruz.



$A$  ve  $B$  matrisleri ile sistemin bir kopyasını oluşturup, sadece  $u(k)$ 'yı kullanarak gözlenen durum  $\hat{x}(k)$ 'i hesaplayabilen bir açık-çevrim durum gözleyici tasarlayabiliriz. Bu gözleyici sistemin kopyası yardımıyla  $\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k)$  ifadesini kullanarak gözlenen durum  $\hat{x}(k)$ 'i hesaplar.

## Açık-çevrim durum gözleyici

Gerçek sistem ve kopyasının dinamikleri şu şekildedir:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad \text{gerçek sistem}$$

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) \quad \text{kopya}$$

Durum gözleme hatası  $e_g(k) \triangleq x(k) - \hat{x}(k)$ 'nin dinamikleri:

$$e_g(k+1) = Ax(k) + Bu(k) - A\hat{x}(k) - Bu(k) = Ae_g(k)$$

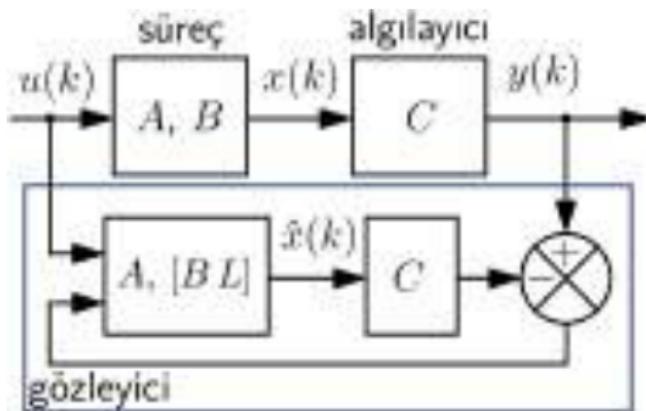
Durum gözleme hatasının ifadesi:  $e_g(k) = A^k e_g(0)$ .

Bu durum ideal değildir, çünkü:

- ▶ Hatanın dinamikleri  $A$  matrisinin özdeğerlerine bağlıdır ve bunları değiştirmek mümkün değildir
- ▶ Hata ancak  $A$  asimptotik kararlı ise yok olur

Burada  $\hat{x}(k)$ 'i hesaplamak için  $y(k)$ 'den faydalananmıyoruz.

# Luenberger gözleyicisi<sup>17</sup>



David G.  
Luenberger

Durum gözleme hatasının ölçümünden geri besleme ile gözleme denklemi düzeltilerek bir kapalı-çevrim durum gözleyici elde edilir:

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + \underbrace{L(y(k) - C\hat{x}(k))}_{\text{hatadan geri besleme}}$$

Buradaki  $L \in \mathbb{R}^{n \times q}$  gözleyici kazanç matrisidir.

<sup>17</sup>David G Luenberger. *IEEE Transactions on Military Electronics* 8.2 (1964), pp. 74–80.

## Durum gözleyicisinde özdeğer atama

Durum gözleme hatası  $e_g(k) \triangleq x(k) - \hat{x}(k)$ 'nin dinamikleri:

$$e_g(k+1) = Ax(k) + Bu(k) - A\hat{x}(k) - Bu(k) - L(y(k) - C\hat{x}(k))$$
$$e_g(k+1) = (A - LC)e_g(k)$$

Durum gözleme hatasının ifadesi:  $e_g(k) = (A - LC)^k e_g(0)$

Gözleyicinin kararlılık özellikleri kapalı-çevrim gözleyici durum matrisi  $A_o = A - LC$ 'nin özdeğerlerine bağlıdır.

**Teorem:**  $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ ,  $y(k) = Cx(k) + Du(k)$  sistemi gözlenebilir ise,  $A_o$  matrisinin özdeğerleri serbestçe seçilebilir.

**Not:**  $e_g(k+1) = (A - LC)e_g(k)$  sisteminin özdeğerlerini  $L$  matrisini tasarılayarak atama problemi,  
 $\ddot{x}(k+1) = (A^T - C^T K)\ddot{x}(k)$  sisteminin özdeğerlerini  $K$  ( $K \triangleq L^T$ ) matrisini tasarılayarak atama problemine denktir.

# Durum gözleyicisinde özdeğer atama

**Örnek:** Ayrık-zamanlı doğrusal bir sistemin durum uzayı modeli aşağıda verilmiştir:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(k) \quad y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Bu dinamik sistem için kapalı-çevrim gözleyici özdeğerlerini 0.4 ve 0.5 olarak atayan  $L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$  matrisini hesaplayınız.

**Çözüm (opsiyon a):** Kapalı-çevrim gözleyici özdeğerlerini serbestçe seçebilmemiz için dinamik sistemin gözlenebilir olması gereklidir. Sistemin gözlenebilir olup olmadığını anlamak için gözlenebilirlik matrisini inceleyelim:

$$\Theta = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$\det(\Theta) = (0) \times (0.25) - (0.5) \times (0.25) = -0.125$$

$$\det(\Theta) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rank}(\Theta) = n = 2 \quad \text{sistem gözlenebilirdir} \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

Kapalı-çevrim gözleyici özdeğerlerini 0.4 ve 0.5 olarak atamak istiyoruz. Bu özdeğerlere karşılık gelen istenen kapalı-çevrim gözleyici karakteristik polinomunu şu şekilde yazabiliriz:

$$p_d(\lambda) = (\lambda - 0.4)(\lambda - 0.5) = \lambda^2 - 0.9\lambda + 0.2$$

# Durum gözleyicisinde özdeğer atama

Kapalı-çevrim gözleyici özdeğerleri, kapalı-çevrim gözleyici durum matrisi  $A_o$ 'nın özdeğerleridir.

$$A_o = A - LC \quad p_c(\lambda) = \det(\lambda I - A + LC)$$

Bu özdeğerler,  $L$  matrisinin fonksiyonu olarak şu şekilde hesaplanabilir:

$$\begin{aligned}\lambda I - A + LC &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.5l_1 \\ 0 & 0.5l_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda - 0.5 & 0.5l_1 \\ -0.5 & \lambda - 0.5 + 0.5l_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_o(\lambda) &= \det(\lambda I - A + LC) = \begin{vmatrix} \lambda - 0.5 & 0.5l_1 \\ -0.5 & \lambda - 0.5 + 0.5l_2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 0.5)(\lambda - 0.5 + 0.5l_2) - (0.5l_1)(-0.5) \\ &= \lambda^2 + (0.5l_2 - 1)\lambda + 0.25(l_1 - l_2 + 1)\end{aligned}$$

# Durum gözleyicisinde özdeğer atama

Kapalı çevrimde oluşan gözleyici karakteristik polinomunun istenene eşit olması gereklidir:

$$p_o(\lambda) = p_d(\lambda)$$

$$\lambda^2 + (0.5l_2 - 1)\lambda + 0.25(l_1 - l_2 + 1) = \lambda^2 - 0.9\lambda + 0.2$$

Polinomların katsayılarının eşitliğinden hareketle şu ifadeleri yazabiliriz:

$$0.5l_2 - 1 = -0.9 \quad 0.25(l_1 - l_2 + 1) = 0.2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.25 & -0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.05 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.25 & -0.25 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.05 \end{bmatrix}$$

$$\left( \text{hattırlatma: } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

Sonuç olarak  $L$  matrisi  $L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \end{bmatrix}$  şeklinde bulunur.

# Durum gözleyicisinde özdeğer atama

**Çözüm (opsiyon b):** Bu soruyu Ackermann formülü ile de çözebiliriz:

$$\left( \text{hatırlatma: } e_g(k+1) = (A - LC)e_g(k) \leftrightarrow \check{x}(k+1) = (A^T - C^T K)\check{x}(k) \right)$$

$$K = \text{row}_2 \left( R^{-1} p_d(A^T) \right)$$

$$p_d(\lambda) = (\lambda - 0.4)(\lambda - 0.5) = \lambda^2 - 0.9\lambda + 0.2$$

$$p_d(A^T) = (A^T)^2 - 0.9A^T + 0.2I$$

$$p_d(A) = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.45 & 0.45 \\ 0 & 0.45 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.05 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 \end{bmatrix} \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} p_d(A) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.05 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \end{bmatrix} \quad L \triangleq K^T \quad L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

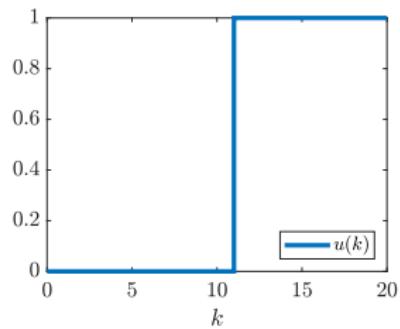
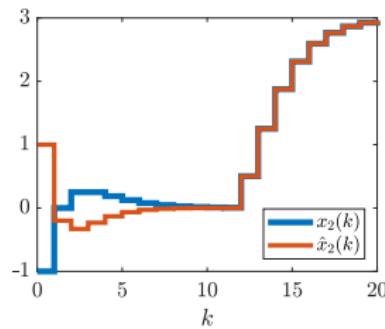
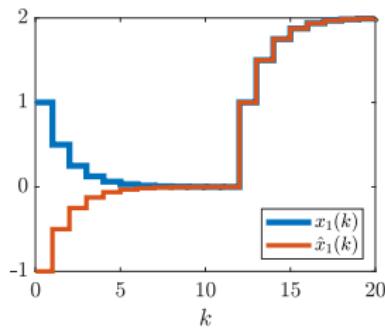
**Çözüm (opsiyon c):** GNU Octave ile çözüm

```
pkg load control
A = [0.5 0; 0.5 0.5]; C = [0 0.5];
p_d = [0.4; 0.5]; L = acker(A', C', p_d)'
```

# Durum gözleyicisinde özdeğer atama

**Örnek:** Gözleyici özdeğerleri  $L$  ile 0.4 ve 0.5'e atandı.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$



## Durum gözleyicisinde özdeğer atama

```
pkg load control % GNU Octave benzetimi
A = [0.5 0;0.5 0.5];B = [1;0.5];
C = [0 0.5];p_d = [0.4;0.5];
L = acker(A',C',p_d)';x = NaN(2,21);
x(:,1) = [1;-1];y = NaN(1,20);
x_hat = NaN(2,21);x_hat(:,1) = [-1;1];
u = [zeros(1,10) ones(1,10)];
for k = 1:20
y(:,k) = C*x(:,k);
x_hat(:,k+1) = A*x_hat(:,k) + B*u(:,k) ...
+ L*(y(:,k) - C*x_hat(:,k));
x(:,k+1) = A*x(:,k) + B*u(:,k);
end
```

# Özdeğer atama ile gözleyici tasarıımı

Örnek:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.81 & -0.82 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad y(k) = \begin{bmatrix} 0.18 & -0.18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

a)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.4$

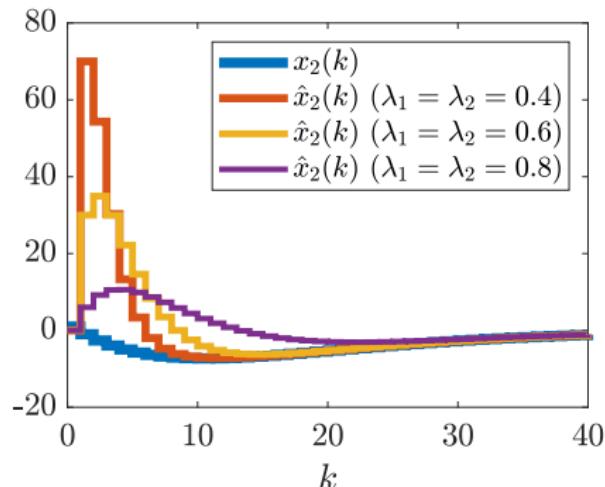
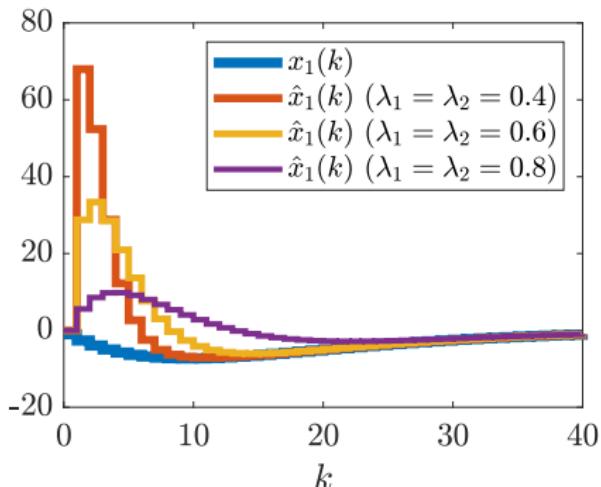
$$L = \begin{bmatrix} -188.8 \\ -194.4 \end{bmatrix}$$

b)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.6$

$$L = \begin{bmatrix} -79.9 \\ -83.3 \end{bmatrix}$$

c)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.8$

$$L = \begin{bmatrix} -15.5 \\ -16.7 \end{bmatrix}$$

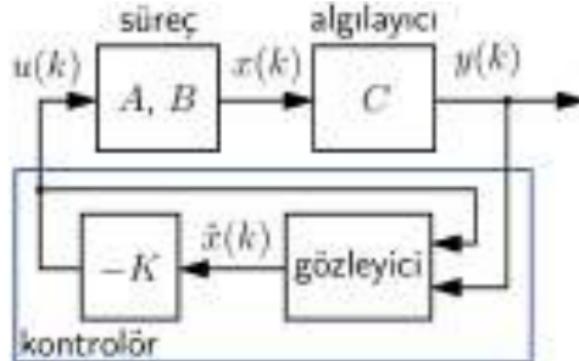


## Alt Bölüm 3

Çıkış geri beslemeli kontrol

## Çıkış geri beslemeli kontrol

Durum geri besleme için sistem durumunun ölçümü (yani,  $y(k) = x(k)$ ) gerekir. Uygulamada ise algılayıcılar genellikle doğrudan sistem durumunu ölçmezler (yani,  $y(k) \neq x(k)$ ).



Çıkış geri beslemeli kontrolde amaç ölçülen çıkış  $y(k)$  ( $y(k) \neq x(k)$ ) ile geri besleme yoluyla kapalı-çevrim sistemin dinamiklerini şekillendirmektir. Bu derste, durum gözleyici ile durum geri beslemeli kontrolörün bu amaç için birlikte kullanılmasını inceleyeceğiz. Bu yapıya *dinamik çıkış geri beslemeli kontrolör* denir.

## Çıkış geri beslemeli kontrol

Aşağıdaki sistemi ele alalım:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\y(k) &= Cx(k)\end{aligned}$$

Sistemin erişilebilir ve gözlenebilir olduğunu varsayılm. Sistem için şu şekilde doğrusal bir durum gözleyici ve doğrusal durum geri beslemeli kontrolör oluşturabiliriz:

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - C\hat{x}(k)) \\u(k) &= -K\hat{x}(k)\end{aligned}$$

Durum gözleme hatası  $e_g(k) \triangleq x(k) - \hat{x}(k)$ 'nin dinamikleri  $e_g(k+1) = (A - LC)e_g(k)$  şeklindedir. Bu dinamikler kontrolör kazanç matrisi  $K$ 'ya bağlı değildir.

## Çıkış geri beslemeli kontrol

Kapalı-çevrim sistem ve gözleyici dinamiklerini toplu olarak şu şekilde yazabiliriz:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - C\hat{x}(k))$$

$$u(k) = -K\hat{x}(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

Bu ifadeyi  $\hat{x}(k)$  yerine  $e_g(k)$  kullanarak yeniden yazarsak:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ e_g(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ e_g(k) \end{bmatrix}$$

$$y(k) = [C \ 0] \begin{bmatrix} x(k) \\ e_g(k) \end{bmatrix}$$

# Çıkış geri beslemeli kontrol

## Ayrışma prensibi:

Kapalı-çevrim sistem ve gözleyici dinamiklerinin kararlılığı

$$\begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerlerine bağlıdır. Bu matris blok üçgen formdadır ve özdeğerleri  $A - BK$  ve  $A - LC$  bloklarının özdeğerleridir. Kapalı-çevrim sistemin ve gözleyicinin özdeğerleri birbirinden bağımsız olarak tasarlabilir.

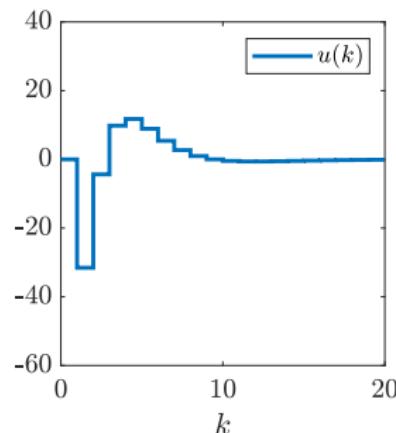
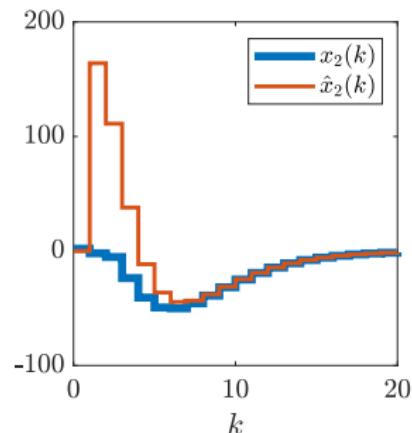
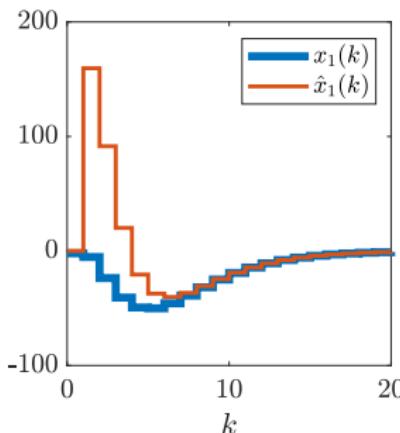
## Gözleyici kazanç matrisi $L$ 'nin seçimi:

pratik kural: Gözleyici özdeğerleri ( $\lambda(A - LC)$ ) kapalı-çevrim sistemin özdeğerlerinden ( $\lambda(A - BK)$ ) yaklaşık olarak 10 kat hızlı olacak şekilde seçilmelidir.

# Çıkış geri beslemeli kontrol

**Örnek:** Gözleyici özdeğerleri  $L$  ile 0.3 ve 0.4'e atandı, kapalı-çevrim sistemin özdeğerleri ise  $K$  ile 0.6 ve 0.7'ye atandı.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.81 & -0.82 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad y(k) = \begin{bmatrix} 0.18 & -0.18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$
$$L = \begin{bmatrix} -221.6 \\ -227.8 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 1.02 & -0.8 \end{bmatrix}$$



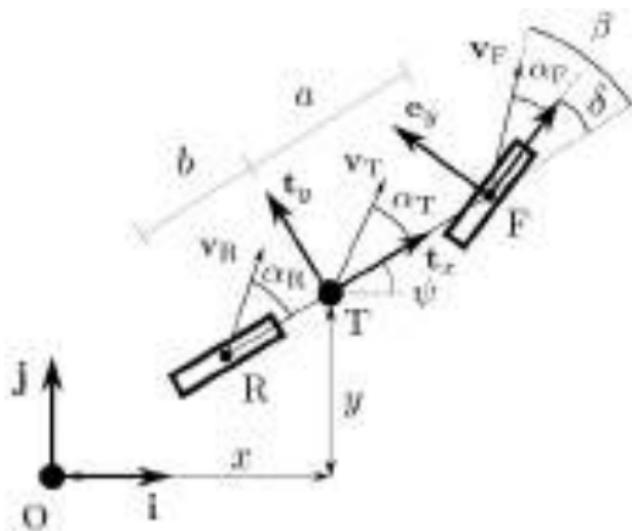
## Çıkış geri beslemeli kontrol

```
pkg load control % GNU Octave benzetimi
A = [1.81 -0.82;1 0];B = [0.5;0];
C = [0.18 -0.18];
L = acker(A',C',[0.3;0.4])';
K = acker(A,B,[0.6;0.7]);
x = NaN(2,21);x(:,1) = [-2;2];
y = NaN(1,20);x_hat = NaN(2,21);
x_hat(:,1) = [0;0];u = NaN(1,20);
for k = 1:20
    y(:,k) = C*x(:,k);
    u(:,k) = -K*x_hat(:,k);
    x_hat(:,k+1) = A*x_hat(:,k) + ...
        B*u(:,k) + L*(y(:,k) - C*x_hat(:,k));
    x(:,k+1) = A*x(:,k) + B*u(:,k);
end
```

## Bölüm 9

Kontrol tasarımı (örnek): Araç direksiyon  
kontrolü (H)

# 3 serbestlik dereceli basit araç modeli<sup>18</sup>



parametreler:

$a$ :  $F$  ve  $T$  arası uzaklık (m)

$b$ :  $T$  ve  $R$  arası uzaklık (m)

$m_T$ : kütle (kg)

$I_T$ : eylemsizlik momenti ( $\text{kgm}^2$ )

$O$ : koordinat başnoktası  
(origin)

$x, y$ : ağırlık merkezinin  
koordinatları

$T/v_T$ : ağırlık merkezinin  
konumu/hızı

$F/R$ : ön/arka dingil  
konumu

$\alpha_F/\alpha_R$ : ön/arka kayma  
açısı (slip angle)

$\alpha_T$ : araç kayma açısı

$\psi$ : araç yalpa (yaw) açısı

$\delta$ : direksiyon açısı

<sup>18</sup><https://andresmendes.github.io/openvd/build/html/simpleVehicleModels.html>

## 3 serbestlik dereceli basit araç modeli

doğrusal olmayan dinamik denklemler:

$$\dot{x} = v_T \cos(\psi + \alpha_T)$$

$$\dot{y} = v_T \sin(\psi + \alpha_T)$$

$$\dot{v}_T = \frac{1}{m_T} (F_{x,F} \cos(\alpha_T - \delta) + F_{x,R} \cos(\alpha_T) + \dots$$

$$F_{y,F} \sin(\alpha_T - \delta) + F_{y,R} \sin(\alpha_T))$$

$$\dot{\alpha}_T = \frac{1}{m_T v_T} (-F_{x,F} \sin(\alpha_T - \delta) - F_{x,R} \sin(\alpha_T) + \dots$$

$$F_{y,F} \cos(\alpha_T - \delta) + F_{y,R} \cos(\alpha_T) - m_T v_T \dot{\psi})$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{I_T} (F_{x,F} a \sin(\delta) + F_{y,F} a \cos(\delta) - F_{y,R} b)$$

# 3 serbestlik dereceli basit araç modeli

$$\text{durum: } \tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \\ \tilde{x}_5 \\ \tilde{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \psi \\ v_T \\ \alpha_T \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad \text{giriş: } \tilde{u} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \\ \tilde{u}_4 \\ \tilde{u}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \\ F_{x,F} \\ F_{x,R} \\ F_{y,F} \\ F_{y,R} \end{bmatrix}$$

doğrusal olmayan dinamik denklemler (durum ve giriş tanımiyla):

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_4 \cos(\tilde{x}_3 + \tilde{x}_5)$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_4 \sin(\tilde{x}_3 + \tilde{x}_5)$$

$$\dot{\tilde{x}}_3 = \tilde{x}_6$$

$$\dot{\tilde{x}}_4 = \frac{1}{m_T} (\tilde{u}_2 \cos(\tilde{x}_5 - \delta) + \tilde{u}_3 \cos(\tilde{x}_5) + \tilde{u}_4 \sin(\tilde{x}_5 - \delta) + \tilde{u}_5 \sin(\tilde{x}_5))$$

$$\dot{\tilde{x}}_5 = \frac{1}{m_T \tilde{x}_4} (-\tilde{u}_2 \sin(\tilde{x}_5 - \delta) - \tilde{u}_3 \sin(\tilde{x}_5) + \tilde{u}_4 \cos(\tilde{x}_5 - \delta) + \tilde{u}_5 \cos(\alpha_T) - m_T \tilde{x}_4 \tilde{x}_6)$$

$$\dot{\tilde{x}}_6 = \frac{1}{I_T} (\tilde{u}_2 a \sin(\delta) + \tilde{u}_4 a \cos(\delta) - \tilde{u}_5 b)$$

kompakt notasyonda:  $\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}, \tilde{u})$

## 3 serbestlik dereceli basit araç modeli

doğrusallaştırma (1/2):  
(varsayımlı: ileri yönde sabit hız  $v_{T,0}$ )

$$\tilde{x}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_{T,0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{u}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x \triangleq \tilde{x} - \tilde{x}_d \quad u \triangleq \tilde{u} - \tilde{u}_d$$

$$\dot{x} = \underbrace{\nabla_{\tilde{x}} f(x_d, u_d)}_{\triangleq A} x + \underbrace{\nabla_{\tilde{u}} f(x_d, u_d)}_{\triangleq B} u$$

## 3 serbestlik dereceli basit araç modeli

doğrusallaştırma (2/2):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_{T,0} & 0 & v_{T,0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/m_T & 1/m_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m_T v_{T,0}} & \frac{1}{m_T v_{T,0}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{I_T} & -\frac{b}{I_T} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

## 3 serbestlik dereceli basit araç modeli

sadeleştirme 1: doğrusal lastik modeli

$$F_{y,F} = -K_F \alpha_T - \frac{a K_F}{v_{T,0}} \dot{\psi} + K_F \delta$$
$$F_{y,R} = -K_R \alpha_T + \frac{b K_R}{v_{T,0}} \dot{\psi}$$

sadeleştirme 2: ileri yönde kuvvetler 0

$$F_{x,F} = 0 \quad F_{x,R} = 0$$

sadeleştirme 3:  $x$  ve  $v_T$  durumları modele dahil olmasın

## 3 serbestlik dereceli basit araç modeli

sadeleştirmelerle doğrusal model şu şekilde oluşur:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & v_{T,0} & v_{T,0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{K_F+K_R}{m_T v_{T,0}} & -\frac{m_T v_{T,0} + \frac{a K_F - b K_R}{v_{T,0}}}{m_T v_{T,0}} \\ 0 & 0 & -\frac{a K_F - b K_R}{I_T} & -\frac{a^2 K_F + b^2 K_R}{I_T v_{T,0}} \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_F}{m_T v_{T,0}} \\ \frac{a K_F}{I_T} \end{bmatrix}$$

## 3 serbestlik dereceli basit araç modeli

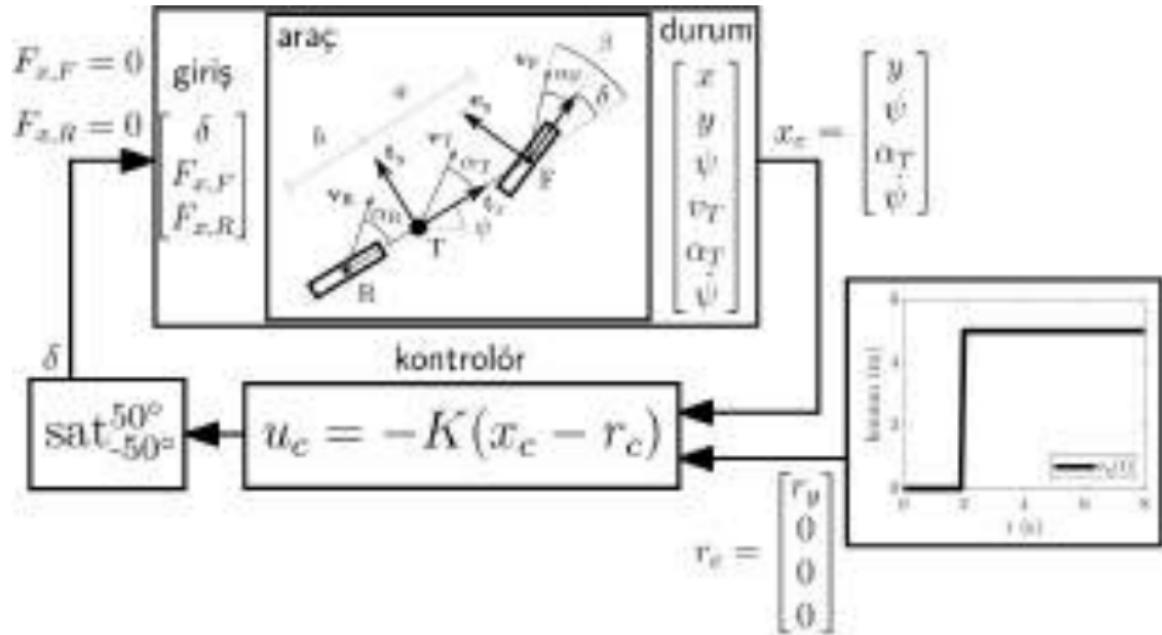
model parametrelerinin sayısal değerleri:  $v_{T,0} = 16.7 \text{ m/s}$ ,  
 $K_F = K_R = 9.1 \cdot 10^4 \text{ N/rad}$ ,  $m_T = 1300 \text{ kg}$ ,  $a = 1.6 \text{ m}$ ,  
 $b = 1.9 \text{ m}$ ,  $I_T = 10^4 \text{ kgm}^2$

doğrusal model sayısal olarak şu şekilde oluşur:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 16.7 & 16.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -8.4 & -0.93 \\ 0 & 0 & 2.5 & -3.4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.2 \\ 14.7 \end{bmatrix}$$

# Direksiyon kontrol sistemi blok diyagramı



# Özdeğer atama ile kontrol tasarıımı

Tasarım 1)  $\lambda(A - BK_1) = \{0.3, 0.35, 0.8, 0.9\}$

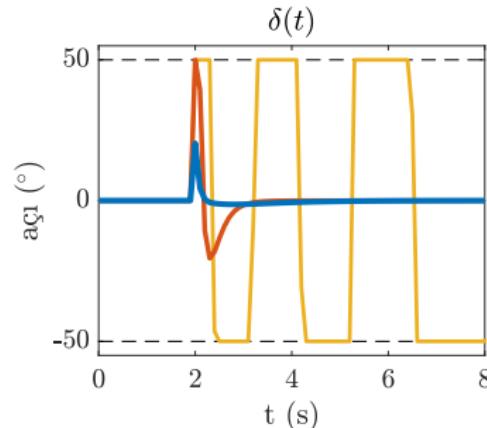
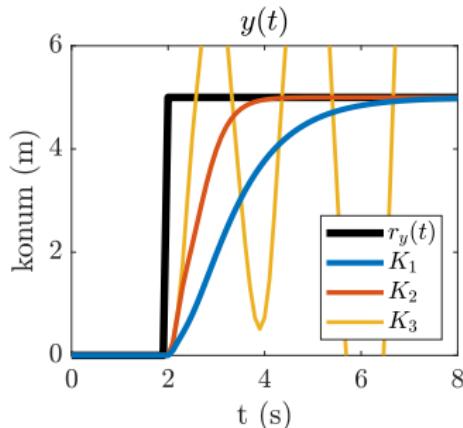
$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.07 & 1.8 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Tasarım 2)  $\lambda(A - BK_2) = \{0.4, 0.45, 0.6, 0.7\}$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 3.4 & 0.7 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Tasarım 3)  $\lambda(A - BK_3) = \{0.1, 0.15, 0.2, 0.25\}$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 3.6 & 12.8 & 6.7 & -0.8 \end{bmatrix}$$



## Bölüm 10

Optimal kontrol ve kestirme

## Alt Bölüm 1

Doğrusal karesel regülatör (LQR)

# Doğrusal karesel (LQ) kontrol

Aşağıdaki AZD sistemi ve amaç fonksiyonunu ele alalım

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m)$$

$$J(x(0), U) = x^T(N)Q_N x(N) + \sum_{k=0}^{N-1} \left( x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k) \right)$$

$J(x(0), U)$  kontrol amacını  $x(k)$ 'i orijine getirmek ve  $u(k)$ 'nun küçük değerler olması olarak ifade eder. Buradaki  $Q_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ve  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  ağırlıklandırma matrisleridir ( $Q_N = Q_N^T \succeq 0$ ,  $Q = Q^T \succeq 0$ ,  $R = R^T \succ 0$ <sup>19</sup>).

---

<sup>19</sup>  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  formundaki bir matris için  $P \succ 0$   $P$ 'nin **pozitif tanımlı** (tüm  $x \neq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  için  $x^T Px > 0$ ) olduğunu,  $P \succeq 0$  ise  $P$ 'nin **pozitif yarı-tanımlı** (tüm  $x \neq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  için  $x^T Px \geq 0$ ) olduğunu belirtir

# Doğrusal karesel kontrol

$J(x(0), U)$  fonksiyonunu minimize eden

$$U = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{bmatrix}$$

formundaki kontrol girişleri dizisini hesaplamak istiyoruz.

**Örnek:**  $Q_N = 0$ ,  $Q = \text{diag}(q_1, \dots, q_n)$ ,  $m = 1$

$$J(x(0), U) = \sum_{k=0}^{N-1} (q_i x_i^2(k) + R u^2(k))$$

# Doğrusal karesel kontrol

doğrusal karesel optimal kontrol problemi:

$$\begin{aligned} \underset{U}{\text{minimize}} \quad & x^T(N)Q_Nx(N) + \sum_{k=0}^{N-1} \left( x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k) \right) \\ & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{J(x(0), U)} \\ \text{bağlı} \quad & x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad k = 0, \dots, N-1 \end{aligned}$$

- ▶  $N$ : zaman ufku
- ▶  $x^T(k)Qx(k)$ :  $x$ 'in orijinden sapmasını ifade eden terim
- ▶  $u^T(k)Ru(k)$ : eyleyici etkinliğini ifade eden terim
- ▶  $x^T(N)Q_Nx(N)$ : son durum  $x(N)$ in orijinden sapmasını ifade eden terim

$J(x(0), U)$ 'deki  $Q$ ,  $R$  ve  $Q_N$  matrisleri optimal kontrol tasarımındaki ayarlama parametreleridir ve doğrudan fiziksel/ekonomik niceliklerle ilişkilidirler.

# LQ optimal kontrol probleminin çözümü

$$J(x(0), U) = x^T(0)Qx(0) + \underbrace{\begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \\ x(N) \end{bmatrix}}_{\bar{Q}}^T \underbrace{\begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & Q_N \end{bmatrix}}_{\bar{Q}} \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \\ x(N) \end{bmatrix} + \dots$$

$$\begin{bmatrix} u^T(0) & u^T(1) & \dots & u^T(N-1) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} R & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & R \end{bmatrix}}_{\bar{R}} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} B & 0 & \cdots & 0 \\ AB & B & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \cdots & B \end{bmatrix}}_{\bar{S}} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix}}_{\bar{N}} x(0)$$

$$\begin{aligned} J(x(0), U) &= x^T(0)Qx(0) + (\bar{S}U + \bar{N}x(0))^T \bar{Q}(\bar{S}U + \bar{N}x(0)) + U^T \bar{R}U \\ &= \frac{1}{2} U^T \underbrace{2(\bar{R} + \bar{S}^T \bar{Q} \bar{S})}_H U + x^T(0) \underbrace{2\bar{N}^T \bar{Q} \bar{S}}_F U + \frac{1}{2} x^T(0) \underbrace{2(Q + \bar{N}^T \bar{Q} \bar{N})}_Y x(0) \end{aligned}$$

# LQ optimal kontrol probleminin çözümü

Bu tanımlar yardımıyla

$$J(x(0), U) = x^T(N)Q_N x(N) + \sum_{k=0}^{N-1} \left( x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k) \right)$$

olarak verilen amaç fonksiyonunu sistemin durum yanıtı ifadesini ( $x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^i Bu(k-1-i)$ ) yerine yazarak

$$J(x(0), U) = \frac{1}{2}U^T HU + x^T(0)FU + \frac{1}{2}x^T(0)Yx(0)$$

şeklinde yeniden yazdık. Bu ifadenin gradyanını alıp 0'a eşitleyerek optimal kontrol girişleri dizisi  $U$ 'yu hesaplayabiliriz:

$$0 = \nabla_U J(x(0), U) = HU^* + F^T x(0)$$

$$U^* = \begin{bmatrix} u^*(0) \\ u^*(1) \\ \vdots \\ u^*(N-1) \end{bmatrix} = -H^{-1}F^T x(0)$$

Bu, açık çevrim bir ifadedir:  $u(k) = c(x(0)), k = 0, 1, \dots, N-1$

# Doğrusal karesel regülatör (LQR)

- ▶ Özdeğer atamayla durum geri beslemeli kontrolde kapalı-çevrim özdeğerlerin belirlenmesi gereklidir.
- ▶ Kapalı-çevrim özdeğerlerin otomatik ve optimal biçimde belirlenmesi kontrol tasarıımı açısından daha uygundur.
- ▶ Otomatik kontroldeki temel amaçlar şunlardır:
  1. Kontrol hatası  $e(k)$ 'nin ( $e(k) \triangleq x(k) - r(k)$ ) küçük değerler alması (regülatöryonda  $r(k) = 0$ )
  2. Kontrol girişi  $u(k)$ 'nın küçük değerler alması

bunlar birbiriyle çelişen amaçlardır

Doğrusal karesel regülatör yöntemiyle kapalı-çevrim özdeğerleri otomatik ve optimal biçimde belirleyen bir doğrusal durum geri beslemeli kontrolör tasarlamak mümkündür.

# Doğrusal karesel regülatör

Dinamik sistemler uzun zaman ufuklarında (prensipte sonsuza kadar) çalıştırılırlar. Doğrusal karesel bir optimal kontrol amaç fonksiyonunu  $x(k)$  başlangıç durumu ve  $N \rightarrow \infty$  için yazarsak:

$$J_{\infty}(x(k)) = \sum_{i=k}^{\infty} (x^T(i)Qx(i) + u^T(i)Ru(i)) \quad (1)$$

ifadesini elde ederiz.

AZD sistem  $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$  için  $J_{\infty}(x(k))$ 'yi minimize edecek  $u(k) = -Kx(k)$  formunda bir doğrusal durum geri beslemeli kontrolör tasarlamak istiyoruz. Bu probleme **doğrusal karesel regülatör problemi** denir.

# Doğrusal karesel regülatör

$$J_{\infty}(x(k)) = \sum_{i=k}^{\infty} \left( x^T(i) Q x(i) + u^T(i) R u(i) \right)$$

ifadesi şu şekilde yazılabılır

$$\begin{aligned} J_{\infty}(x(k)) &= \left( x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k) \right) + \dots \\ &\quad \sum_{i=k+1}^{\infty} \left( x^T(i) Q x(i) + u^T(i) R u(i) \right) \end{aligned}$$

veya

$$J_{\infty}(x(k)) = \left( x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k) \right) + J_{\infty}(x(k+1)) \tag{2}$$

# Doğrusal karesel regülatör

Optimal değer fonksiyonu, amaç fonksiyonunun optimal değerini veren fonksiyon olarak tanımlanır:

$$J_{\infty}^*(x(k)) = \min \underbrace{\sum_{i=k}^{\infty} (x^T(i)Qx(i) + u^T(i)Ru(i))}_{J_{\infty}(x(k))}$$

$J_{\infty}^*(x(k))$ 'nin şu formda olduğunu varsayıyalım:

$$J_{\infty}^*(x(k)) = x^T(k)Px(k) \quad (3)$$

Burada  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  bir matristir. Eğer bu varsayımdan yoluyla optimal doğrusal durum geri beslemeli kontrolörü bulabilirsek varsayımdan geçerli olduğunu söyleyebiliriz.

# Doğrusal karesel regülatör

Denklem (3)'ü denklem (2)'de yerine yazarsak:

$$J_{\infty}^*(x(k)) = x^T(k)Px(k) = \left( x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k) \right) + \dots \\ x^T(k+1)Px(k+1)$$

Bu ifadede  $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ 'i yerine yazarsak

$$J_{\infty}^*(x(k)) = \left( x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k) \right) + \dots \quad (4) \\ (Ax(k) + Bu(k))^T P (Ax(k) + Bu(k))$$

optimal kontrol problemi  $J_{\infty}^*(x(k))$ 'yi  $u(k)$ 'ya göre minimize etme problemine dönüşür.  $J_{\infty}^*(x(k))$ 'nin  $u(k)$ 'ya göre türevini alıp 0'a eşitlersek:

$$\frac{\partial J_{\infty}^*(x(k))}{\partial u(k)} = x^T(k)Px(k) = Ru(k) + B^T P (Ax(k) + Bu(k)) = 0 \\ (R + B^T P B) u(k) = -B^T P A x(k)$$

# Doğrusal karesel regülatör<sup>20</sup>

Buradan optimal kontrol girişi şu şekilde yazılabilir:

$$u(k) = - \left( R + B^T P B \right)^{-1} B^T P A x(k)$$

Bu ifadeden de optimal kontrolör kazanç matrisi şu şekilde bulunur:



Rudolf E.  
Kálmán

(1930-2016)

$$K = \left( R + B^T P B \right)^{-1} B^T P A \quad (5)$$

Bu şekilde tasarlanan doğrusal durum geri beslemeli kontrolöre **doğrusal karesel regülatör** denir.

---

<sup>20</sup>Rudolf E. Kálmán. *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana* 5.2 (1960), pp. 102–119. URL: <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.26.4070&rep=rep1&type=pdf>.

## Doğrusal karesel regülatör

$P$ 'yi bulmak için, denklem (4)'te  $u(k) = -Kx(k)$  ifadesini yerine yazarsak

$$x^T(k) \left( (A - BK)^T P (A - BK) - P + Q + K^T R K \right) x(k) = 0$$

Bu ifadenin tüm  $x(k)$  durumları için sağlanması gerektiğinden, ifade

$$(A - BK)^T P (A - BK) - P + Q + K^T R K = 0 \quad (6)$$

olarak yazılabilir.

# Doğrusal karesel regülatör

Denklem (5)'i denklem (6)'da yerine yazarsak  
(çeşitli sadeleştirmelarından sonra)

$$P = A^T P A + Q - \dots$$

$$A^T P B \left( R + B^T P B \right)^{-1} B^T P A$$

İfadesi elde edilir. Bu denkleme **ayrık-zamanlı cebrik Riccati denklemi** adı verilir. Bu denklem çözülerek  $P$ 'nin bulunması ile doğrusal karesel regülatör kazanç matrisi hesaplanabilir.



Jacopo F.  
Riccati

(1676-1754)

# Doğrusal karesel regülatör

**Teorem:**  $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$  sistemi kararlılaştırılabilir ve

$$J_\infty(x(0)) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k) \right)$$

için  $Q \succeq 0$ ,  $R \succ 0$  ve  $(A, C_q)$  ( $Q = C_q C_q^T$ ) tespit edilebilir olsun.  
Bu durumda doğrusal karesel regülatör  $u(k) = -Kx(k)$   
kontrolündeki kapalı-çevrim sistem asimptotik kararlıdır (yani,  
 $A - BK$  matrisinin tüm özdeğerleri birim çemberin içindedir).

Doğrusal karesel regülatör tasarım prosedürü:

1. Ağırlıklandırma matrisleri  $Q = Q^T \succeq 0$  ve  $R = R^T \succ 0$ 'yi seç
2. Ayrık-zamanlı cebrik Riccati denkleminden  $P$ 'yi hesapla
3.  $K = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$  ifadesinden optimal kontrolör kazanç matrisini hesapla

# Doğrusal karesel regülatör

Örnek:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

$$J_\infty(x(0)) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k) \right)$$

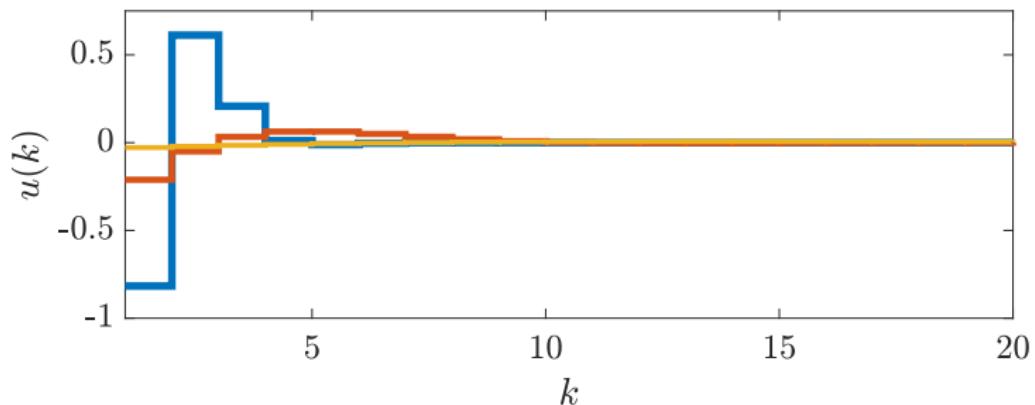
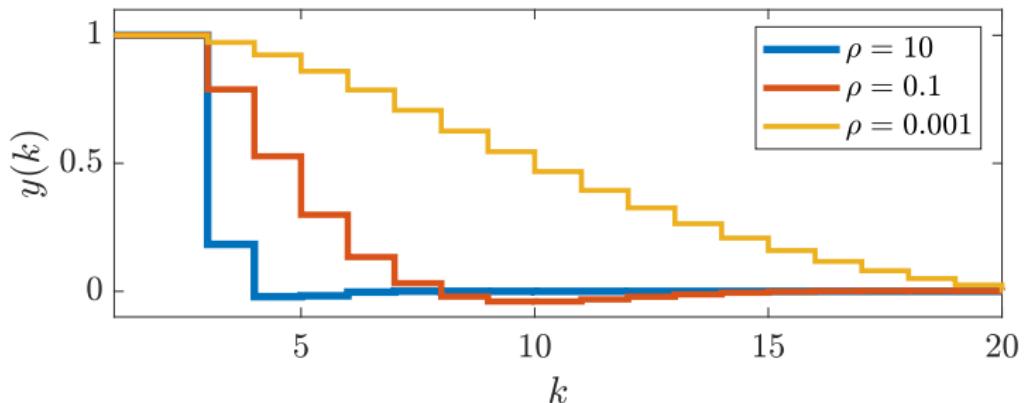
$$Q = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rho > 0 \quad R = 1$$

$$\rho = 10 \rightarrow K = \begin{bmatrix} 0.817 & 1.75 \end{bmatrix}, \text{ eig}(A - BK) = 0.125 \pm 0.226j$$

$$\rho = 0.1 \rightarrow K = \begin{bmatrix} 0.211 & 0.765 \end{bmatrix}, \text{ eig}(A - BK) = 0.618 \pm 0.256j$$

$$\rho = 0.001 \rightarrow K = \begin{bmatrix} 0.028 & 0.251 \end{bmatrix}, \text{ eig}(A - BK) = 0.875 \pm 0.11j$$

# Doğrusal karesel regülatör



# Doğrusal karesel regülatör

```
pkg load control % GNU Octave benzetimi
A = [1 1;0 1];B = [0;1];
rho = 0.1;Q = [rho 0;0 0];R = 1;
K = dlqr(A,B,Q,R);x0 = [1;0];
x = NaN(2,21);x(:,1) = x0;
u = NaN(1,20);
for k = 1:k_max
    u(:,k) = -K*x(:,k);
    x(:,k+1) = A*x(:,k) + B*u(:,k);
end
```

# LQR ile kontrol tasarımı

Örnek: Araç direksiyon kontrolü

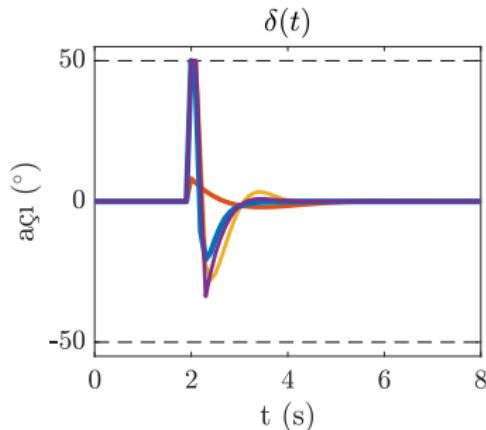
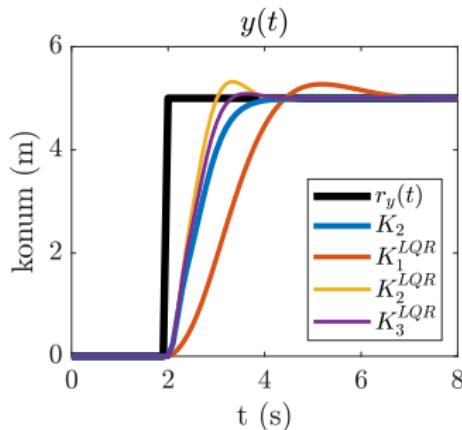
Tasarım 1)  $\lambda(A - BK_2) = \{0.4, 0.45, 0.6, 0.7\}$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 3.4 & 0.7 & 0.4 \end{bmatrix}$$
 (özdeğer atama)

Tasarım 2)  $Q = I$ ,  $R = 1000$ ,  $K_1^{LQR} = \begin{bmatrix} 0.03 & 0.6 & 0.08 & 0.1 \end{bmatrix}$

Tasarım 3)  $Q = I$ ,  $R = 1$ ,  $K_2^{LQR} = \begin{bmatrix} 0.4 & 3 & 0.8 & 0.4 \end{bmatrix}$

Tasarım 4)  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $R = 0.1$ ,  $K_3^{LQR} = \begin{bmatrix} 0.5 & 4.2 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}$

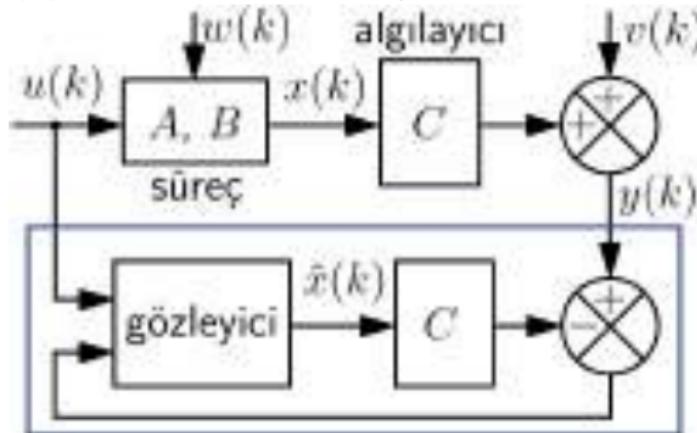


## Alt Bölüm 2

Doğrusal karesel kestirici (LQE) (Kálmán filtresi)

# Doğrusal karesel kestirme (LQE)

**Problem:** Gözleyici özdeğerlerini optimal (durum gözleme hatası  $e_g(k) \triangleq x(k) - \hat{x}(k)$ 'yi minimize edecek) biçimde belirlemek istiyoruz.



Gözleyiciye iki kaynaktan enformasyon gelir: 1) Algılayıcı ölçümleri, 2) dinamik sistemin modeli. Bu iki kaynağı, güvenilirliklerini olasılıksal olarak ifade ederek (sureç ve algılayıcı gürültüsü ( $w(k)$  ve  $v(k)$ ) ile), optimal şekilde birleştirmemiz gereklidir. **Doğrusal karesel kestirici (Kálman filtresi)** bu problemin çözümüdür ve günümüzde mühendislikte (ve diğer alanlarda) en yaygın kullanılan durum kestirme yöntemidir.

(**not:** durum kestirme = durum gözleme + gürültü modeli)

# Modelleme varsayımları

Süreç bir **stokastik doğrusal sistem** olarak modellenir:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k) \quad x(0) = x_0$$

$$y(k) = Cx(k) + v(k) \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^q$$

- ▶ süreç gürültüsü  $w(k) \in \mathbb{R}^n$  **beyaz gürültü** ( $E[w(k)] = 0$  (sıfır ortalamalı),  $E[w(k)w^T(i)] = 0 \forall k \neq i$  (zamanda bağıntısız),  $E[w(k)w^T(k)] = Q \succeq 0$  (pozitif yarı-tanımlı kovaryans matrisi))
- ▶ algılayıcı gürültüsü  $v(k) \in \mathbb{R}^q$  **beyaz gürültü** ( $E[v(k)] = 0$  (sıfır ortalamalı),  $E[v(k)v^T(i)] = 0 \forall k \neq i$  (zamanda bağıntısız),  $E[v(k)v^T(k)] = R \succ 0$  (pozitif tanımlı kovaryans matrisi))
- ▶ başlangıç durumu  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  **rastlantısal vektör**,  $E[x_0] = \bar{x}_0$ ,  $E[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T] = P_0 \succeq 0$
- ▶  $w(k)$ ,  $v(k)$  ve  $x_0$  vektörleri **zamanda bağıntısız** ( $E[w(k)v^T(i)] = 0$ ,  $E[w(k)x_0^T] = 0$ ,  $E[v(k)x_0^T] = 0$ ,  $\forall k, i \in \mathbb{Z}$ )
- ▶  $w(k)$ ,  $v(k)$  ve  $x_0$  vektörleri **normal dağılıma** uyan rastlantısal vektörler ( $w(k) \sim \mathcal{N}(0, Q)$ ,  $v(k) \sim \mathcal{N}(0, R)$ ,  $x_0 \sim \mathcal{N}(\bar{x}_0, P_0)$ )

# Kálmán filtresi

$k$  anına kadar olan çıkışları ( $y(\kappa) : 0 \leq \kappa \leq k$ ) kullanarak kestirme hatası  $x(k) - \hat{x}(k)$ 'nin karesinin ortalamasını, yani

$$P(k) = E[(x(k) - \hat{x}(k))(x(k) - \hat{x}(k))^T]$$

olarak verilen ifadeyi minimize eden durum kestirimini  $\hat{x}(k)$ 'i hesaplayan bir durum kestirici tasarlamak istiyoruz.

Bu doğrultuda kapalı-çevrim bir doğrusal durum gözleyici yapısını ele alalım:

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - C\hat{x}(k))$$

# Kálmán filtresi<sup>21</sup>

**Teorem:** Sayfa 299 ile verilen stokastik dinamik sistemi, süreç ve algılayıcı gürültüsünü ve başlangıç durumunu ele alalım.  $(A, C)$  tespit edilebilir ve  $(A, B_q)$  ( $Q = B_q B_q^T$ ) kararlılaştırılabilir olsun. Bu durumda:

1) Kestirme hatasının karesinin ortalamasını minimize eden gözleyici kazanç matrisi şu şekildedir:

$$L = APC^T \left( CPC^T + R \right)^{-1}$$

$$(P = APA^T - APC^T \left( CPC^T + R \right)^{-1} CPA^T + Q)$$

2) Gözleyici asimptotik kararlıdır (yani,  $A - LC$  matrisinin tüm özdeğerleri birim çemberin içindedir)



Rudolf E.  
Kálmán  
(1930-2016)

<sup>21</sup>Rudolf E. Kálmán. *Journal of Basic Engineering* 82.1 (1960), pp. 35–45. URL:  
<https://www.cs.unc.edu/~welch/kalman/media/pdf/Kalman1960.pdf>.

# Kálmán filtresi

Örnek:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.81 & -0.82 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + w(k)$$

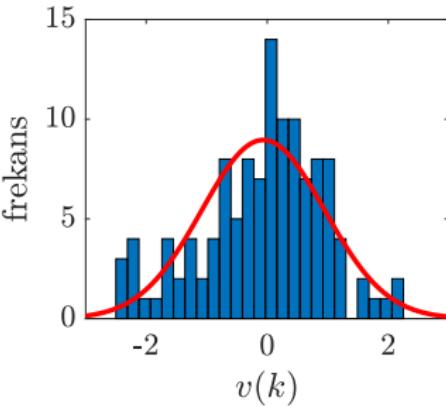
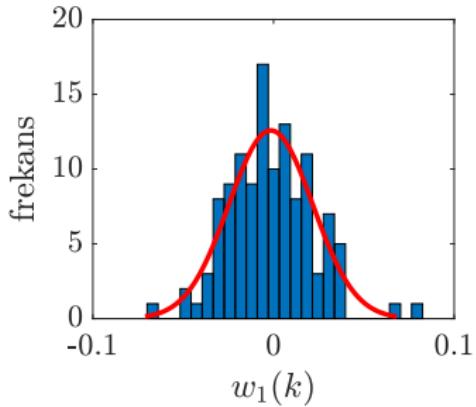
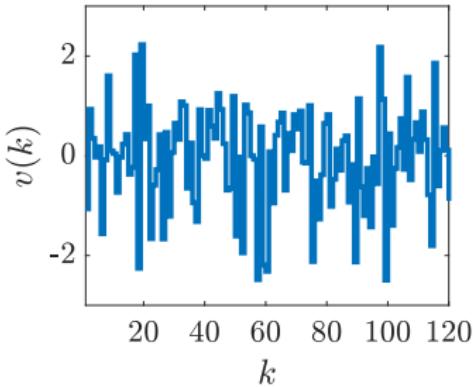
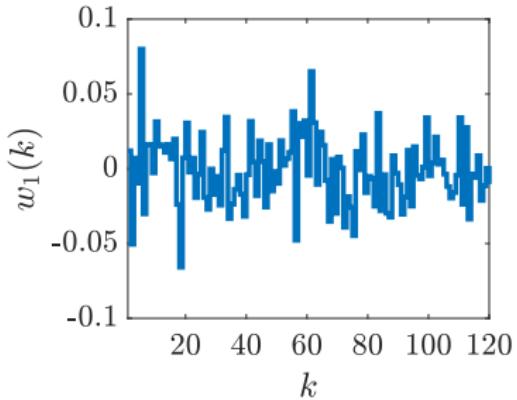
$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + v(k)$$

$$w(k) = \begin{bmatrix} w_1(k) \\ w_2(k) \end{bmatrix} \quad w(k) \sim \mathcal{N}(0, Q) \quad Q = \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 10^{-3} \end{bmatrix}$$

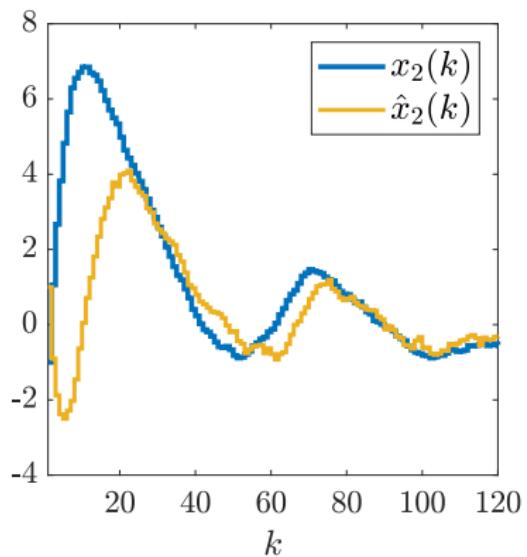
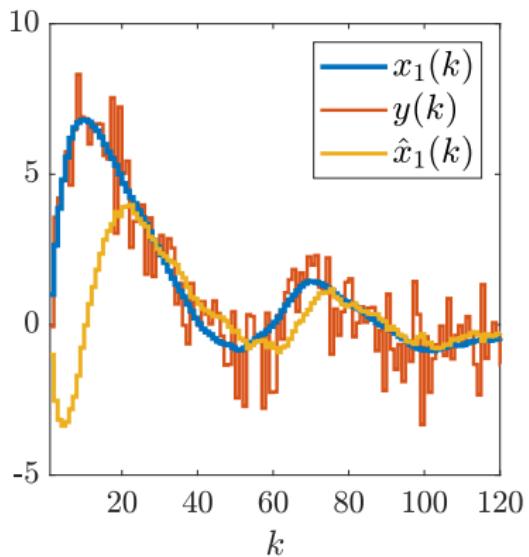
$$v(k) \sim \mathcal{N}(0, R) \quad R = 1$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.1183 & 0.1105 \\ 0.1105 & 0.1068 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0.1105 \\ 0.1058 \end{bmatrix}$$

# Kálmán filtresi



# Kálmán filtresi



## Kálmán filtresi

```
pkg load control % GNU Octave benzetimi
A = [1.81 -0.82;1 0];C = [1 0];
k_max = 120;Q = [5e-4 0;0 10e-4];R = 1;
P = dare(A',C',Q,R);
L = (A*P*C')*inv(C*P*C' + R);
x = NaN(2,k_max+1);x(:,1) = [1;-1];
xh = NaN(2,k_max+1);xh(:,1) = [-1;1];
y = NaN(1,k_max);randn("state",0)
w = sqrt(Q)*randn(2,k_max);
v = sqrt(R)*randn(1,k_max);
for k = 1:k_max
x(:,k+1) = A*x(:,k) + w(:,k);
y(:,k) = C*x(:,k) + v(:,k);
xh(:,k+1) = A*xh(:,k) + L*(y(:,k)-C*xh(:,k));
end
```

## Kálmán filtresi ayarı

- Gerçek bir sistem için ağırlıklandırma matrisleri  $Q$  ve  $R$ 'nin sayısal değerlerini belirlemek genellikle zordur.
- $R$ 'deki diyagonal terimler algılayıcı çıkışlarının ne kadar gürültülü olduğu ile ilgilidir. Algılayıcı spesifikasyonlarından veya kaydedilen ölçümlerden  $R$  ile ilgili çıkarımlar yapılabilir.
- $Q$ 'yu doğrudan fiziksel gürültü ile ilişkilendirmek ( $R$ 'ye göre) daha zordur.  $Q$  esasen  $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$  formundaki modelin ne kadar hassas olduğu ile ilgilidir.
- $Q$  ve  $R$  Kálmánfiltresi için (LQR'deki duruma benzer şekilde) ayar düğmeleridir.
- $Q$ 'ya göre  $R$ 'nin küçük olması halinde Kálmánfiltresinin yakınsaması hızlı olacaktır.

## Alt Bölüm 3

Doğrusal karesel Gauss (LQG) kontrol

# Doğrusal karesel Gauss (LQG) kontrol

Doğrusal karesel Gauss kontrolde doğrusal karesel regülatör (LQR) ile Kálmánfiltresi (KF) birlikte kullanılır.

Aşağıdaki stokastik doğrusal sistem modelini ele alalım:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k) \quad x(0) = x_0$$

$$y(k) = Cx(k) + v(k) \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^q$$

$$w(k) \sim \mathcal{N}(0, Q_{KF}) \quad v(k) \sim \mathcal{N}(0, R_{KF}) \quad x_0 \sim \mathcal{N}(\bar{x}_0, P_0)$$

$Q_{KF} \succeq 0$ ,  $P_0 \succeq 0$ ,  $R_{KF} \succ 0$ ,  $w(k)$  ve  $v(k)$  beyaz gürültü

LQG ile sistem durumu  $x(k)$  yerine çıkış  $y(k)$ 'nin ölçüldüğü hal için aşağıdaki amaç fonksiyonunu minimize etmek istiyoruz

$$J(x(0), U) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( x^T(k) Q_{LQR} x(k) + u^T(k) R_{LQR} u(k) \right)$$

$$Q_{LQR} \succeq 0 \quad R_{LQR} \succ 0$$

# Doğrusal karesel Gauss kontrol

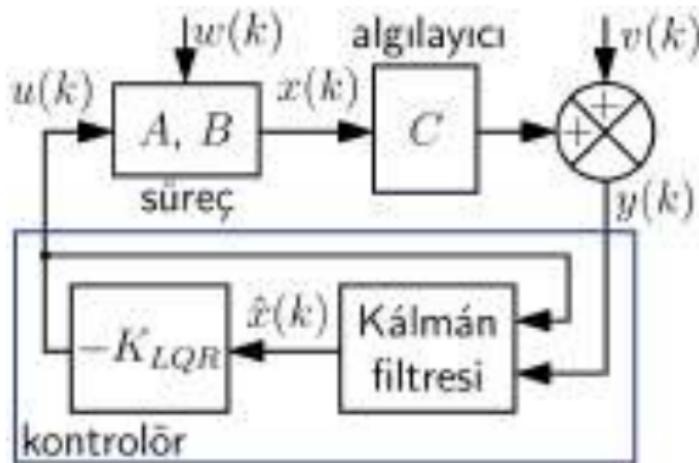
LQR ve Kálmánfiltresi için gereken varsayımları yapalım:

- ▶  $(A, B)$  kararlılaştırılabilir ve  $(A, C_q)$  ( $Q_{LQR} = C_q C_q^T$ ) tespit edilebilirdir
- ▶  $(A, B_q)$  ( $Q_{KF} = B_q B_q^T$ ) kararlılaştırılabilir ve  $(A, C)$  tespit edilebilirdir

LQG kontrolör tasarıımı şu şekilde yapılır:

1. Kontrol girişi  $u(k)$ 'nun bir kontrolör tarafından hesaplandığını ihmali ederek bir Kálmánfiltresi tasarlayıp optimal gözleyici kazanç matrisi  $L_{KF}$ 'yi hesapla
2. Sistem durumu  $x(k)$ 'in bilindiğini (yani, gürültüsüz ölçülebildiğini) varsayıarak bir LQR tasarlayıp optimal kontrolör kazanç matrisi  $K_{LQR}$ 'yi hesapla

## Doğrusal karesel Gauss kontrol



Dinamik çıkış geri beslemeli kontrolördeki duruma benzer şekilde (ayrılaşma prensibinden dolayı) LQG kontrolde kapalı-çevrim sistem ve gözleyici özdeğerleri  $A - BK_{LQR}$  ve  $A - L_{KF}C$  matrislerinin özdeğerleridir. Kapalı-çevrim sistemin ve gözleyicinin özdeğerleri birbirinden bağımsız olarak tasarlanabilir.

# Doğrusal karesel Gauss kontrol

Örnek:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.81 & -0.82 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) + w(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + v(k)$$

$$Q_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_r = 0.1$$

$$w(k) = \begin{bmatrix} w_1(k) \\ w_2(k) \end{bmatrix} \quad w(k) \sim \mathcal{N}(0, Q_e) \quad Q_e = \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$v(k) \sim \mathcal{N}(0, R_e) \quad R_e = 1$$

$$K = \begin{bmatrix} -1.976 & 1.338 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0.1105 \\ 0.1058 \end{bmatrix}$$

## Doğrusal karesel Gauss kontrol

```
pkg load control % GNU Octave benzetimi
A = [1.81 -0.82;1 0];B = [0;1];C = [1 0];
D = 0;k_max = 120;Qe = [5e-4 0;0 10e-4];Re=1;
Qr = [1 0;0 1];Rr = 0.1;K=dlqr(A,B,Qr,Rr);
P=dare(A',C',Qe,Re);L=(A*P*C')*inv(C*P*C'+Re);
x = NaN(2,k_max+1);xh = NaN(2,k_max+1);
x(:,1)=[1;-1];xh(:,1)=[-1;1];y=NaN(1,k_max);
randn("state",0);w = sqrt(Qe)*randn(2,k_max);
u = NaN(1,k_max);v = sqrt(Re)*randn(1,k_max);
for k = 1:k_max
y(:,k)=C*x(:,k)+v(:,k);u(:,k)=-K*xh(:,k);
xh(:,k+1)=A*xh(:,k)+B*u(:,k)+...
L*(y(:,k)-C*xh(:,k));
x(:,k+1)=A*x(:,k)+B*u(:,k)+w(:,k);
end
```

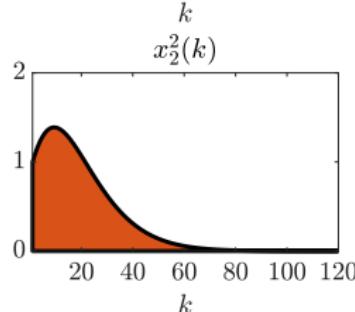
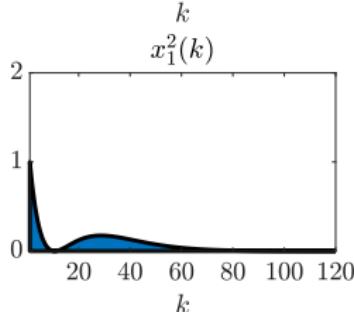
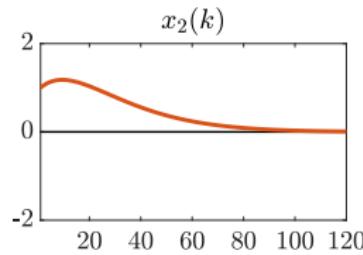
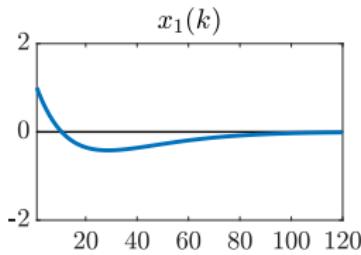
## Alt Bölüm 4

Özdeğerler, başarım ve LQR

## Örnek A: İki boyutlu AZD sistem

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9 & -\alpha \\ \alpha & 0.995 \end{bmatrix} x(k) \quad \alpha = 0.05 \quad \lambda(A) = \{0.95 \pm 0.016i\}$$

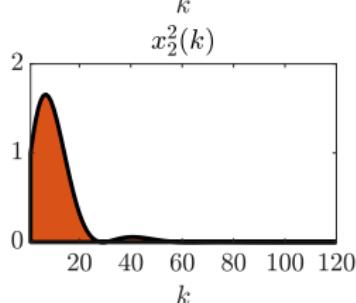
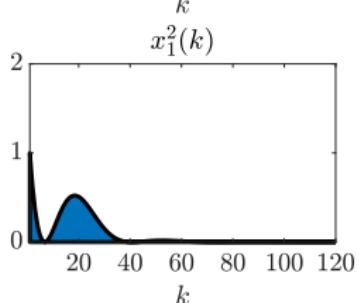
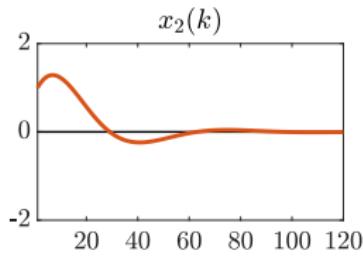
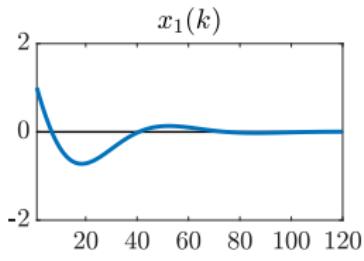
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \sum_{k=0}^{\infty} x(k)^T Q x(k) = 49.9$$



## Örnek A: İki boyutlu AZD sistem

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9 & -\alpha \\ \alpha & 0.995 \end{bmatrix} x(k) \quad \alpha = 0.10 \quad \lambda(A) = \{0.95 \pm 0.088i\}$$

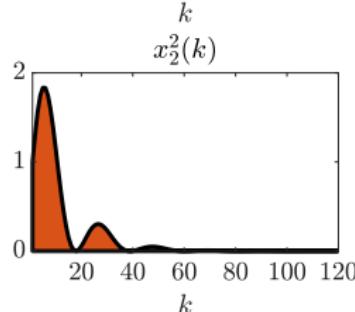
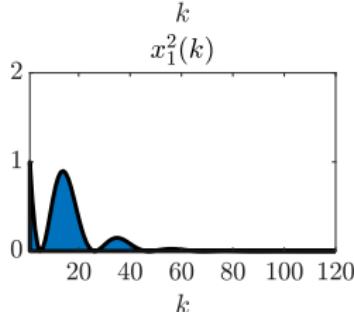
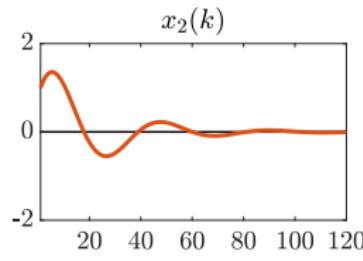
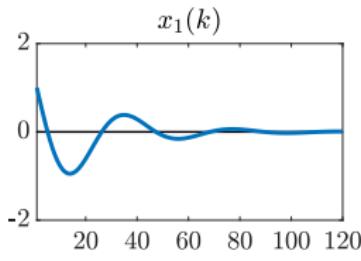
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \sum_{k=0}^{\infty} x(k)^T Q x(k) = 35.3$$



## Örnek A: İki boyutlu AZD sistem

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9 & -\alpha \\ \alpha & 0.995 \end{bmatrix} x(k) \quad \alpha = 0.15 \quad \lambda(A) = \{0.95 \pm 0.142i\}$$

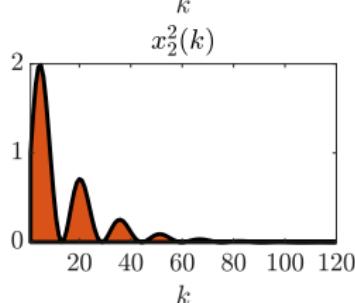
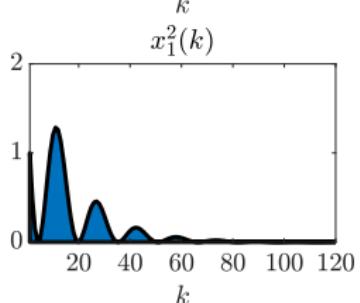
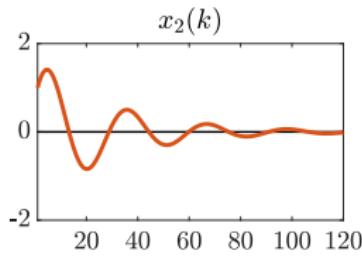
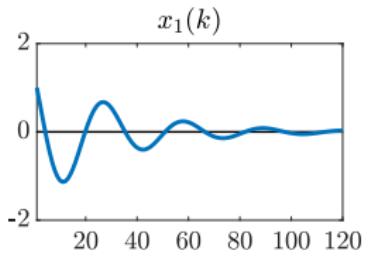
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \sum_{k=0}^{\infty} x(k)^T Q x(k) = 34.4$$



## Örnek A: İki boyutlu AZD sistem

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9 & -\alpha \\ \alpha & 0.995 \end{bmatrix} x(k) \quad \alpha = 0.20 \quad \lambda(A) = \{0.95 \pm 0.194i\}$$

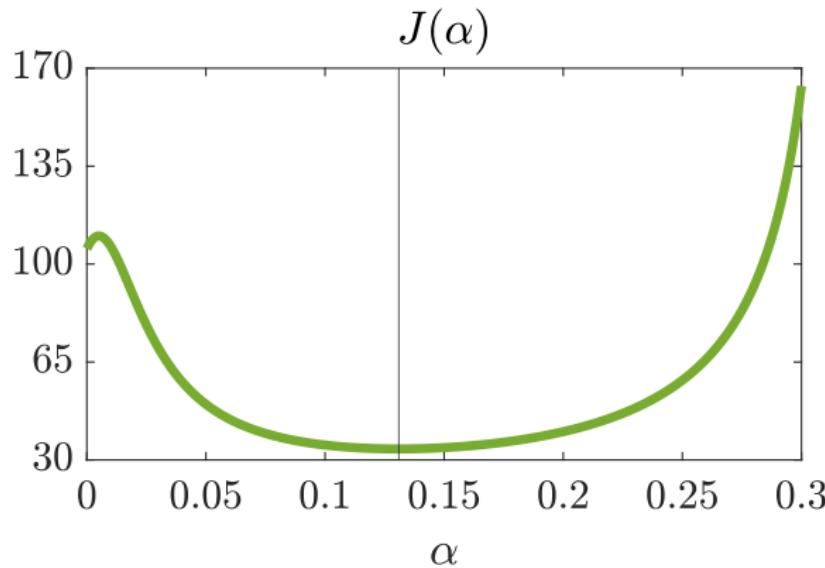
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \sum_{k=0}^{\infty} x(k)^T Q x(k) = 40.1$$



## Örnek A: İki boyutlu AZD sistem

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9 & -\alpha \\ \alpha & 0.995 \end{bmatrix} x(k)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad J(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)^T Q x(k)$$

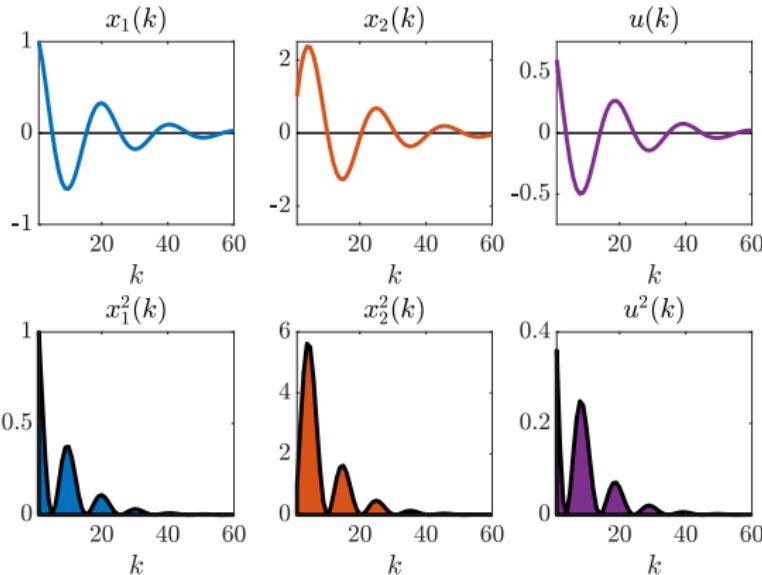


## Örnek B: İki boyutlu, bir girişli AZD sistem

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.1 \\ 0.1 & 0.995 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad K = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(A - BK) = \{0.898 \pm 0.283j\} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 0.1 \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)) = 45.5$$

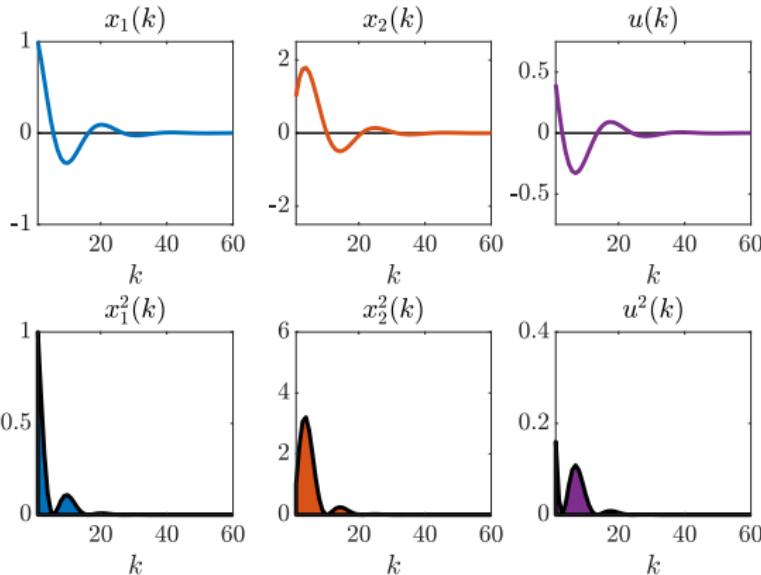


## Örnek B: İki boyutlu, bir girişli AZD sistem

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.1 \\ 0.1 & 0.995 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad K = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(A - BK) = \{0.848 \pm 0.259j\} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 0.1 \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)) = 20.2$$

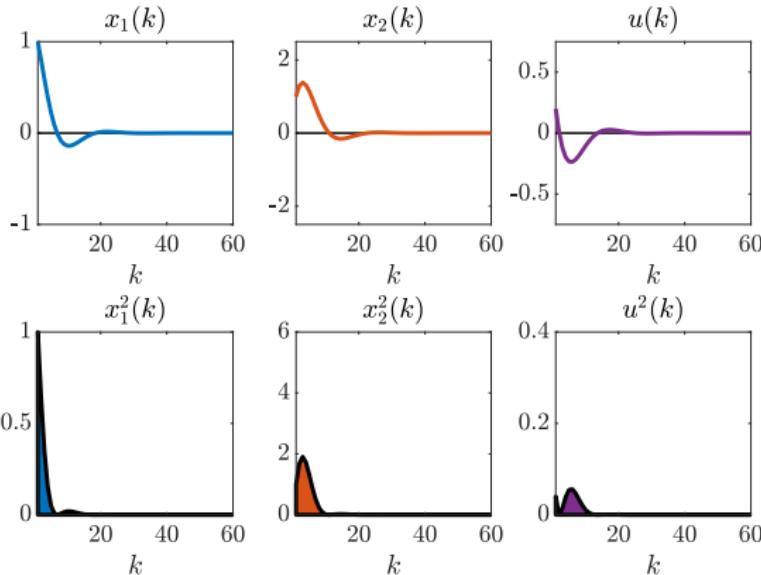


## Örnek B: İki boyutlu, bir girişli AZD sistem

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.1 \\ 0.1 & 0.995 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad K = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(A - BK) = \{0.798 \pm 0.223j\} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 0.1 \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)) = 11.8$$

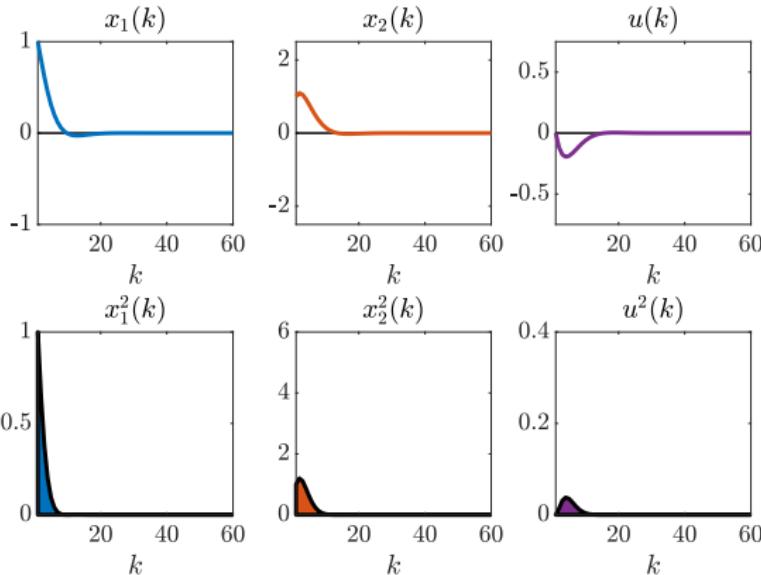


## Örnek B: İki boyutlu, bir girişli AZD sistem

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.1 \\ 0.1 & 0.995 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad K = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(A - BK) = \{0.748 \pm 0.164j\} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 0.1 \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

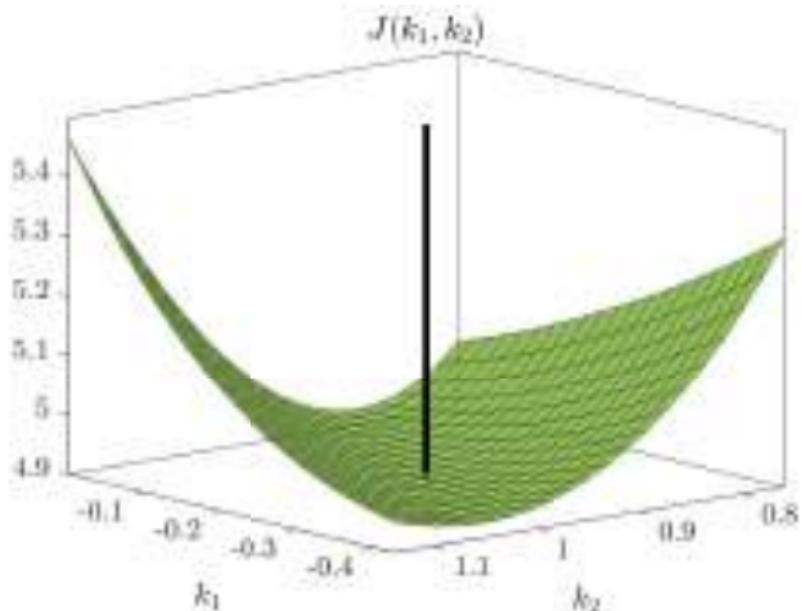
$$\sum_{k=0}^{\infty} (x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)) = 7.95$$



## Örnek B: İki boyutlu, bir girişli AZD sistem

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.1 \\ 0.1 & 0.995 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = 0.1 \quad J(k_1, k_2) = \sum_{k=0}^{\infty} (x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)) \quad K^{LQR} = \begin{bmatrix} -0.215 & 0.949 \end{bmatrix}$$



## Kısim III

# Optimizasyon

# Kısım III: Optimizasyon

## 11. Giriş

Tanım ve notasyon

MPC ve optimizasyon

Bazı önemli problem çeşitleri

Uygulama örnekleri

Optimizasyon yöntemlerinin sınıflandırılması

Kaynaklar

## 12. Optimizasyonun temelleri

Temel kavramlar

Küme oluşturucu notasyonu

Dışbükey optimizasyon

Dualite ve optimalite şartları

## 13. Optimizasyon algoritmaları

Kısıtsız optimizasyon

Eşitlik kısıtlı optimizasyon

İç nokta yöntemleri

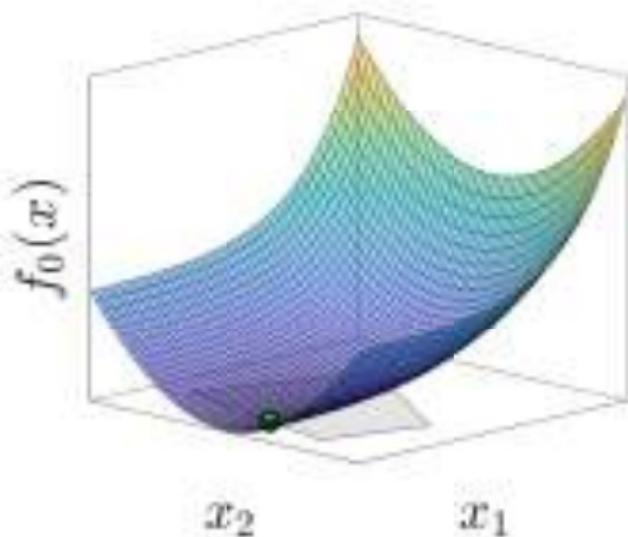
# Bölüm 11

Giriş

## Alt Bölüm 1

### Tanım ve notasyon

# Optimizasyonun tanımı



Optimizasyon, çeşitli **kısıtlar** altında mevcut **seçenekler** arasından belirli bir **ölçüte** göre en iyisini seçmek için kullanılan yöntemler ve bunların teorisini kapsayan uygulamalı matematik dalıdır.

# Niçin optimizasyon öğrenmeliyiz?

Optimizasyon yöntemleri çeşitli alanlarda çok farklı uygulamalarda kullanılmaktadır:

- ▶ **Mühendislik:** Teknik sistemlerin tasarımı, operasyonu, kontrolü
- ▶ **Bilim:** Kestirme; modellerin ölçülen veriye uydurulması; deney tasarımı
- ▶ **Ekonomik faaliyetler:** Finans; fiyatlandırma; lojistik, yatırım, üretim gibi etkinliklerde kaynak tahsis/planlama
- ▶ **Makina öğrenmesi:** Model eğitimi
- ▶ ...

# Optimizasyon problemi

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad f_0(x)$$

$$\text{bağlı} \quad f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

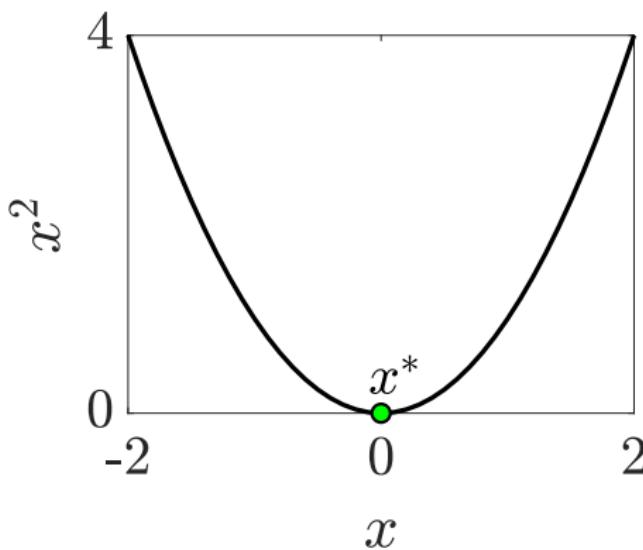
$$h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p$$

- $x \in \mathbb{R}^n$  (karar değişkenleri vektörü)
- $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (amaç fonksiyonu)
- $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$  (eşitsizlik kısıtı fonksiyonları)
- $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, p$  (eşitlik kısıtı fonksiyonları)

# Örnek

Kısıtsız, bir boyutlu optimizasyon problemi

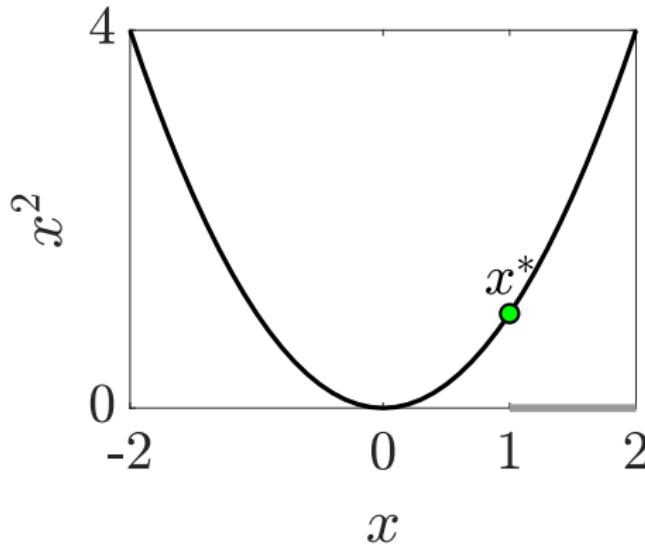
$$\underset{x \in \mathbb{R}}{\text{minimize}} \quad x^2$$



# Örnek

Eşitsizlik kısıtlı, bir boyutlu optimizasyon problemi

$$\begin{array}{ll}\text{minimize}_{x \in \mathbb{R}} & x^2 \\ \text{bağlı} & 1 - x \leq 0\end{array}$$

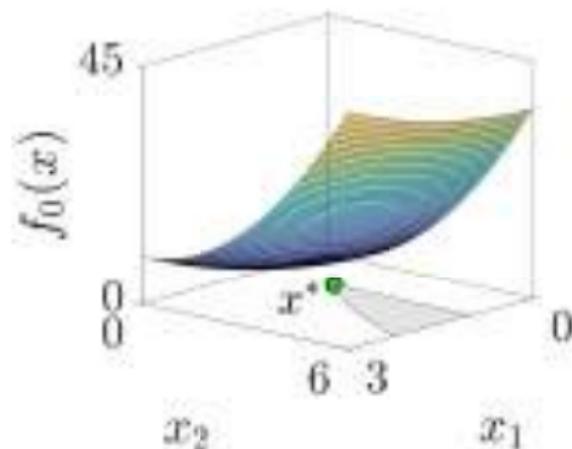
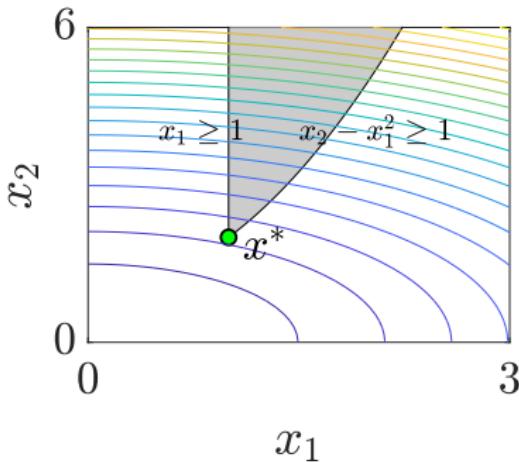


# Örnek

Eşitsizlik kısıtlı, iki boyutlu optimizasyon problemi

$$\begin{array}{ll}\text{minimize}_{x \in \mathbb{R}^2} & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{bağlı} & 1 + x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ & 1 - x_1 \leq 0\end{array}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad f_0(x) = x_1^2 + x_2^2$$
$$f_1(x) = 1 + x_1^2 - x_2$$
$$f_2(x) = 1 - x_1$$

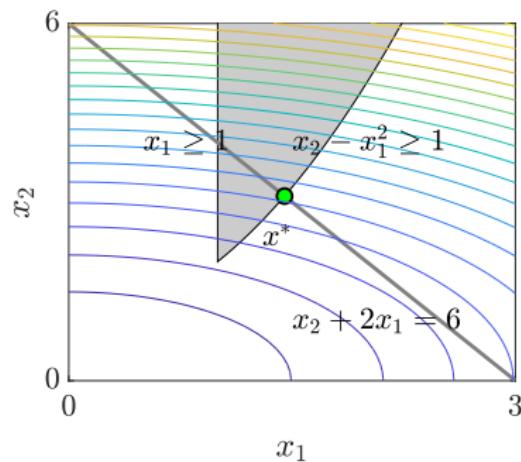


# Örnek

Eşitlik ve eşitsizlik kısıtlı, iki boyutlu optimizasyon problemi

$$\begin{array}{ll}\text{minimize}_{x \in \mathbb{R}^2} & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{bağlı} & 1 + x_1^2 - x_2 \leq 0 \\ & 1 - x_1 \leq 0 \\ & x_2 + 2x_1 - 6 = 0\end{array}$$

$$\begin{aligned}x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} & f_0(x) &= x_1^2 + x_2^2 \\ f_1(x) &= 1 + x_1^2 - x_2 \\ f_2(x) &= 1 - x_1 \\ h_1(x) &= x_2 + 2x_1 - 6\end{aligned}$$



Alt Bölüm 2

MPC ve optimizasyon

# LQR (hatırlatma)

doğrusal karesel (LQ) optimal kontrol problemi:

$$\boxed{\begin{aligned} V^*(x_0) \triangleq \underset{\{u_\kappa\}_{\kappa=0}^\infty}{\text{minimize}} \quad & \sum_{\kappa=0}^{\infty} x_\kappa^T Q x_\kappa + u_\kappa^T R u_\kappa \\ \text{bağlı} \quad & \kappa = 0, \dots, \infty : \\ & x_{\kappa+1} = Ax_\kappa + Bu_\kappa \end{aligned}}$$

problemin analitik çözümü (LQR):

$$u^* = -K^* x$$

$$K^* = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$$

$$P = A^T P A + Q - A^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$$

optimal değer fonksiyonu:  $V^*(x) = x^T P x$

## Kısıtlı optimal kontrol

kısıtlı, doğrusal karesel (LQ) optimal kontrol problemi:

$$\underset{\{u_\kappa\}_{\kappa=0}^{\infty}}{\text{minimize}} \quad \sum_{\kappa=0}^{\infty} x_\kappa^T Q x_\kappa + u_\kappa^T R u_\kappa$$

bağlı  $\kappa = 0, \dots, \infty :$

$$x_{\kappa+1} = Ax_\kappa + Bu_\kappa$$

$x_\kappa \in \mathcal{X}$  (durum kısıtları)

$u_\kappa \in \mathcal{U}$  (giriş kısıtları)

LQR'ın aksine, bu problemin analitik çözümü yoktur. kısıtlı optimal kontrolde, problemin sonlu ufuklu halinin gerçek zamanda tekrarlanan şekilde çözülmesiyle geri besleme sağlanır. bu yönteme model öngörülü kontrol (MPC) denir.

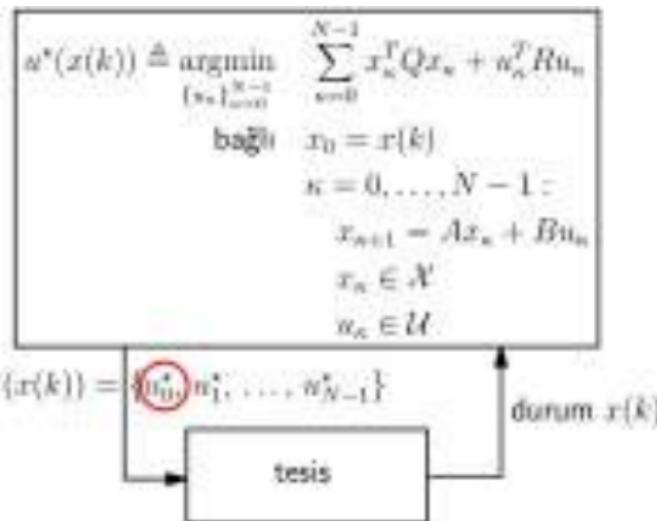
# Doğrusal model öngörülü kontrol

doğrusal model öngörülü kontrol (MPC) problemi:

$$\begin{aligned} & \underset{\{u_\kappa\}_{\kappa=0}^{N-1}}{\text{minimize}} && \sum_{\kappa=0}^{N-1} x_\kappa^T Q x_\kappa + u_\kappa^T R u_\kappa \\ & \text{bağlı} && x_0 = x(k) \quad (\text{ölçüm}) \\ & && \kappa = 0, \dots, N-1 : \\ & && x_{\kappa+1} = Ax_\kappa + Bu_\kappa \\ & && x_\kappa \in \mathcal{X} \\ & && u_\kappa \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

dışbükey  $\mathcal{X}$  ve  $\mathcal{U}$  ile pozitif tanımlı  $Q$  ve  $R$  için, bu problem bir dışbükey karesel programdır (QP).

# MPC kontrollü geribesleme çevrimi



her ayrık zaman adımı  $k$  için:

- ▶ şu anki durum  $x(k)$ 'i ölç/kestir
- ▶ MPC problemini çözerek optimal kontrol girişleri dizisi  $u^*(x(k))$ 'yu hesapla
- ▶ dizinin ilk elemanı  $u_0^*$ 'yu uygula

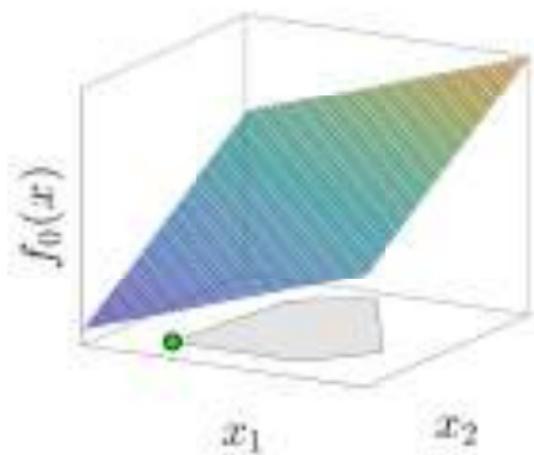
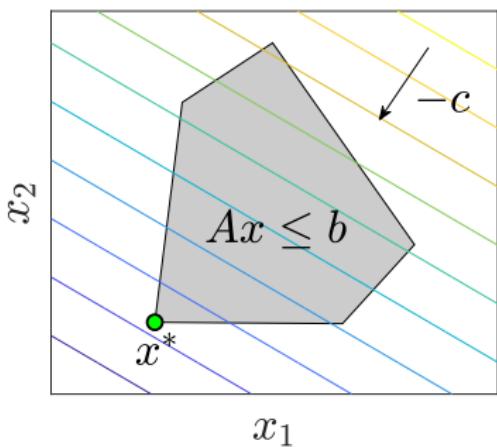
## Alt Bölüm 3

Bazı önemli problem çeşitleri

# Doğrusal program (LP)

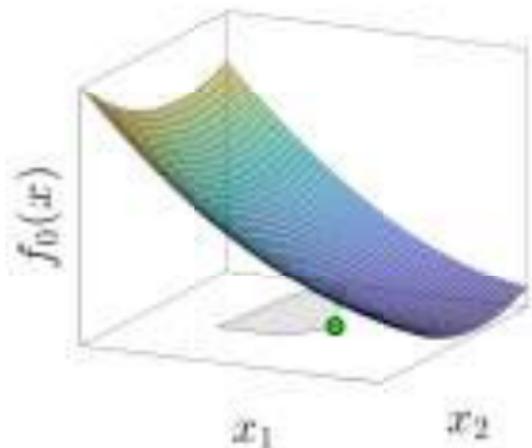
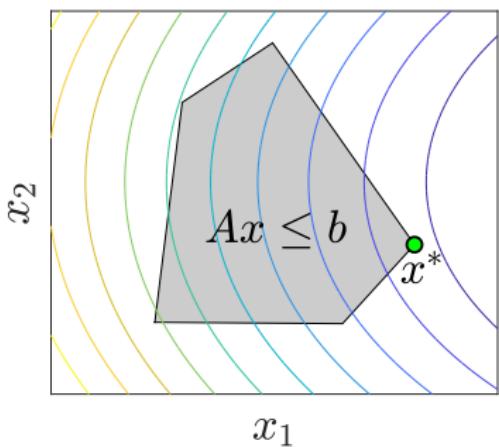
(not: program = optimizasyon problemi)

$$\begin{array}{ll}\text{minimize}_{x \in \mathbb{R}^n} & c^T x \\ \text{bağlı} & Ax \leq b \\ & Ex = e\end{array}$$



# Karesel program (QP)

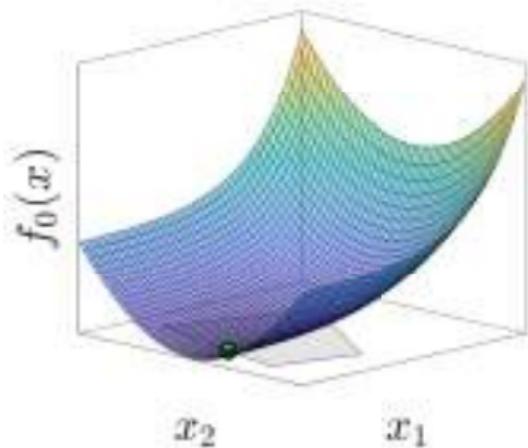
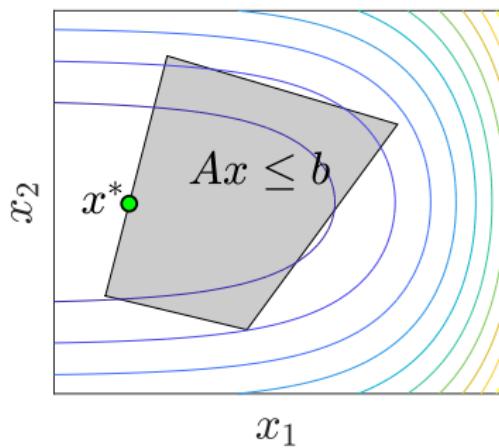
$$\begin{array}{ll}\text{minimize}_{x \in \mathbb{R}^n} & x^T Q x + c^T x \\ \text{bağlı} & Ax \leq b \\ & Ex = e\end{array}$$



# Dışbükey program (convex program)

$$\begin{array}{ll}\text{minimize}_{x \in \mathbb{R}^n} & f_0(x) \\ \text{bağlı} & x \in \Omega\end{array}$$

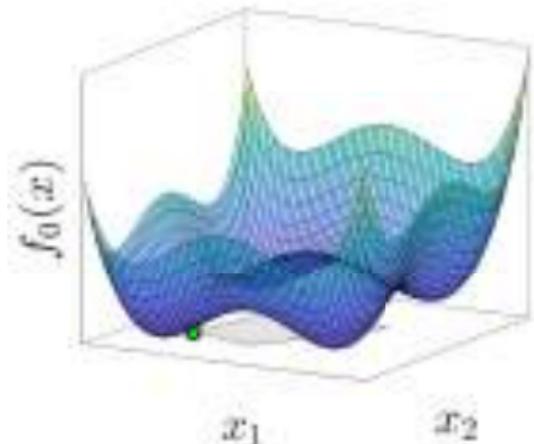
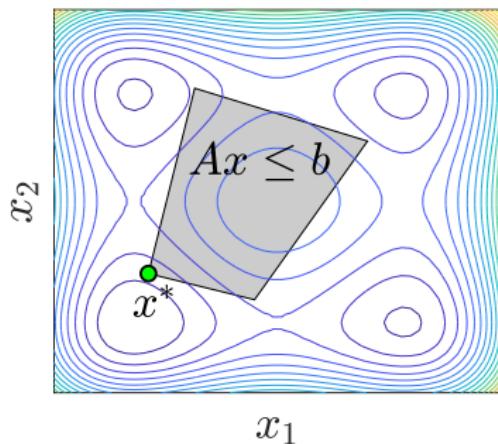
( $f_0$  dışbükey fonksiyon,  $\Omega$  dışbükey kümeye)



## Doğrusal-olmayan program (NLP)

$$\begin{array}{ll}\text{minimize}_{x \in \mathbb{R}^n} & f_0(x) \\ \text{bağlı} & f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, p \\ & h_i(x) = 0, i = 1, \dots, m\end{array}$$

( $f_0$ ,  $h_i$  ve  $f_i$  türevlenebilir)



## Karma-tamsayılı program (MIP)

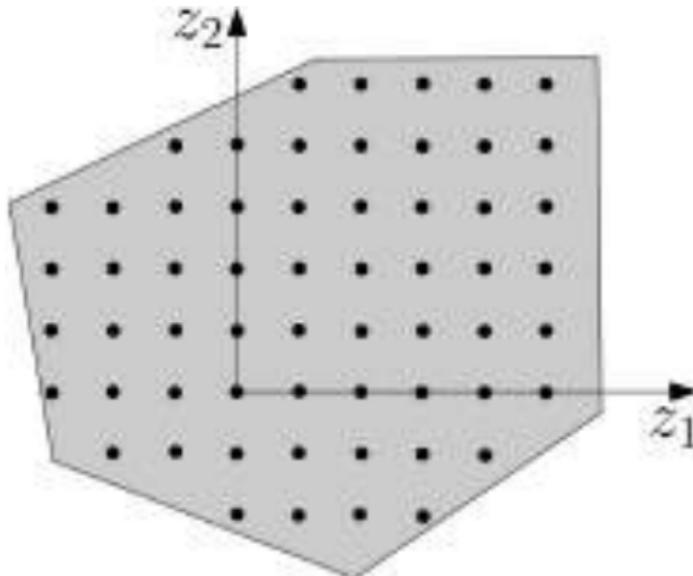
$\underset{x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{Z}^m}{\text{minimize}}$

$$f_0(x, z)$$

bağlı

$$f_i(x, z) \leq 0, i = 1, \dots, p$$

$$h_i(x, z) = 0, i = 1, \dots, m$$



## Alt Bölüm 4

### Uygulama örnekleri

## Üretim planlama (LP)

$$\begin{aligned} \underset{x_1, x_2}{\text{minimize}} \quad & - (r_1 x_1 + r_2 x_2) \\ \text{bağlı} \quad & x_1 + x_2 \leq \bar{x} \\ & \underline{x}_1 \leq x_1 \\ & \underline{x}_2 \leq x_2 \end{aligned}$$



$x_1/x_2 \in \mathbb{R}$  : ürün 1/2'nin üretilme miktarı

$r_1/r_2$  : ürün 1/2'den elde edilen kâr

$\bar{x}$  : stoktaki ham madde miktarı

$\underline{x}_1$  : üretilmesi gereken minimum ürün 1 miktarı

$\underline{x}_2$  : üretilmesi gereken minimum ürün 2 miktarı

## Stigler tayin problemi<sup>22</sup> (LP)

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimize}} \quad c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$\text{bağlı} \quad \underline{K} \leq k_1 x_1 + k_2 x_2 \leq \bar{K}$$

$$\underline{P} \leq v_1 x_1 + v_2 x_2 \leq \bar{P}$$

$$0 \leq x_1 \quad 0 \leq x_2$$



George J. Stigler  
(1911-1991)

$x_1/x_2 \in \mathbb{R}$  : peynir/ekmek miktarı (kg)

$c_1, c_2$  : peynir/ekmek fiyatı (\$/kg)

$k_1, k_2$  : peynir/ekmek kalori değeri (kilokalori/kg)

$v_1, v_2$  : peynir/ekmek protein miktarı (g/kg)

$\underline{K}, \bar{K}$  : minimum/maksimum kalori değeri

$\underline{P}, \bar{P}$  : minimum/maksimum protein miktarı

<sup>22</sup>George J Stigler. *Journal of Farm Economics* 27.2 (1945), pp. 303–314.

# Markowitz portföy problemi<sup>23</sup> (QCQP)

$$\underset{x_1, x_2}{\text{minimize}} \quad -(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2)$$

$$\text{bağlı} \quad x_1 + x_2 = 100$$

$$x^T \Sigma x \leq \mathbf{1}^T \Sigma \mathbf{1} / 4$$

$$0 \leq x_1 \quad 0 \leq x_2$$



Harry Markowitz

$x_1 \in \mathbb{R}$  : varlık 1'deki pozisyon (%)

$x_2 \in \mathbb{R}$  : varlık 2'deki pozisyon (%)

$\mu_1$  : varlık 1'in beklenen getirisi

$\mu_2$  : varlık 2'nin beklenen getirisi

$\Sigma$  : varlık getirilerinin kovaryans matrisi

<sup>23</sup>Harry Markowitz. *The Journal of Finance* 7.1 (1952), pp. 77–91.

## Birim taahhüt problemi (MIQP)

$$\underset{x, \delta}{\text{minimize}} \quad \sum_{k=1}^N q_1 x_{1,k}^2 + c_1 x_{1,k} \dots$$

$$+ q_2 x_{2,k}^2 + c_2 x_{2,k}$$

bağlı  $k = 1, \dots, N :$

$$\delta_{1,k} \underline{x}_1 \leq x_{1,k} \leq \delta_{1,k} \bar{x}_1$$

$$\delta_{2,k} \underline{x}_2 \leq x_{2,k} \leq \delta_{2,k} \bar{x}_2$$

$$x_{1,k} + x_{2,k} \geq \tilde{x}_k$$



$\delta_{1,k}/\delta_{2,k} \in \mathbb{B}$  : santral 1/2'nin  $k$  periyodunda çalışma durumu

$x_{1,k}/x_{2,k} \in \mathbb{R}$  : santral 1/2'nin  $k$  periyodunda güç üretimi

$\underline{x}_1/\bar{x}_1$  : santral 1'in üretebileceği minimum/maksimum güç

$\underline{x}_2/\bar{x}_2$  : santral 2'nin üretebileceği minimum/maksimum güç

$q_1 x_{1,k}^2 + c_1 x_{1,k}$  : santral 1'in  $k$  periyodunda çalışma maliyeti

$q_2 x_{2,k}^2 + c_2 x_{2,k}$  : santral 2'nin  $k$  periyodunda çalışma maliyeti

$\tilde{x}_k$  :  $k$  periyodundaki tahmini güç talebi

# Dijital devre tasarımı<sup>24</sup> (GP)

$$\underset{x_i}{\text{minimize}} \quad D(x_i)$$

$$\text{bağlı} \quad P(x_i) \leq \bar{P}$$

$$A(x_i) \leq \bar{A}$$

$$1 \leq x_i, i = 1, \dots, n$$



$n$  : devredeki cihaz (kapı) sayısı

$x_i \in \mathbb{R}$  : cihaz  $i$ 'nin ölçek faktörü

$D$  : devredeki zaman gecikmesi

$P(x_i)$  : cihazların harcadığı toplam güç

$\bar{P}$  : devrenin harcayabileceği maksimum güç

$A(x_i)$  : cihazların kapladığı toplam alan

$\bar{A}$  : devrenin kaplayabileceği maksimum alan

---

<sup>24</sup>Stephen P Boyd et al. *Operations Research* 53.6 (2005), pp. 899–932. DOI: 10.1287/opre.1050.0254.

# Lojistik planlama (LP)

$$\begin{aligned} \text{minimize}_{x_{ij}} \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \\ \text{bağlı} \quad & \sum_{j=1}^m x_{ij} \leq p_i, \quad i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} \geq d_j, \quad j = 1, \dots, m \\ & x_{ij} \geq 0 \end{aligned}$$



$x_{ij} \in \mathbb{R}$  :  $i$ 'den  $j$ 'ye gönderilen miktar

$n$  : üretim tesislerinin sayısı

$m$  : müşteri konumlarının sayısı

$c_{ij}$  :  $i$ 'den  $j$ 'ye nakliyenin maliyeti

$p_i$  : tesis  $i$ 'nin üretim kapasitesi

$d_j$  : konum  $j$ 'deki talep

## Roket fırlatma/indirme<sup>25</sup> (SOCP)

$$\begin{aligned} \underset{t_f, T_c(\cdot)}{\text{minimize}} \quad & \int_0^{t_f} \|T_c(t)\| dt \\ \text{bağlı} \quad & \ddot{r}(t) = g + T_c(t)/m(t) \\ & \dot{m}(t) = -\alpha \|T_c(t)\| \\ & 0 \leq \rho_1 \leq \|T_c(t)\| \leq \rho_2 \\ & \dots \end{aligned}$$



$T_c$  : araca etkiyen net itki kuvveti vektörü

$r$  : aracın iniş yüzeyine göre konum vektörü

$g$  : iniş gezegenindeki yerçekimi ivmesi

$m$  : aracın kütlesi

$\alpha$  : kütle sarfiyatı oranı sabiti

$\rho_1/\rho_2$  : itki genliğinin alt/üst sınırları

<sup>25</sup>Behçet Açıkmeşe and Scott R Ploen. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 30.5 (2007), pp. 1353–1366. DOI: 10.2514/1.27553.

## Durum geri besleme tasarımı (SDP)

$$\underset{W, Y, \nu}{\text{minimize}} \quad \nu + \eta \|Y\|_2$$

$$\text{bağlı} \quad WA^T + AW + Y^T B^T + BY \prec -I$$

$$I \preceq W \preceq \nu I$$

$K \triangleq YW^{-1}$  : durum geri beslemeli kontrolör kazanç matrisi

$A$  : durum matrisi

$B$  : giriş matrisi

$\dot{x} = Ax + Bu$  : sistemin durum uzayı modeli

$u = Kx$  : doğrusal durum geri beslemeli kontrol yasası

# Model öngörülü kontrol

$$\min_{Q(\cdot)} \int_t^{t+T} -p_B Q(\tau) c_B(\tau) + c_s Q(\tau) d\tau$$

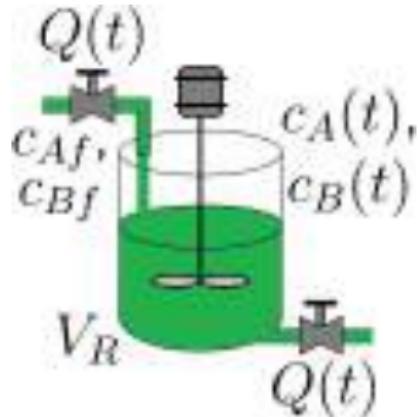
bağlı  $\tau \in [t, t+T]$  için:

$$\dot{c}_A = (Q(\tau)/V_R)(c_{A,f} - c_A(\tau))$$

$$\dots - k_r c_A(\tau)$$

$$\dot{c}_B = (Q(\tau)/V_R)(c_{B,f} - c_B(\tau))$$

$$\dots + k_r c_A(\tau)$$



tepkime:  $A \longrightarrow B$

$p_B Q(t) c_B(t)$ : B'den elde edilen kazanç

$c_s Q(t)$ : ayrıştırma maliyeti

$k_r c_A(t)$ : tepkime hızı ,  $k_r$ : tepkime hız sabiti

$c_A(t)/c_B(t)$ : A'nın/B'nin molar derişimi

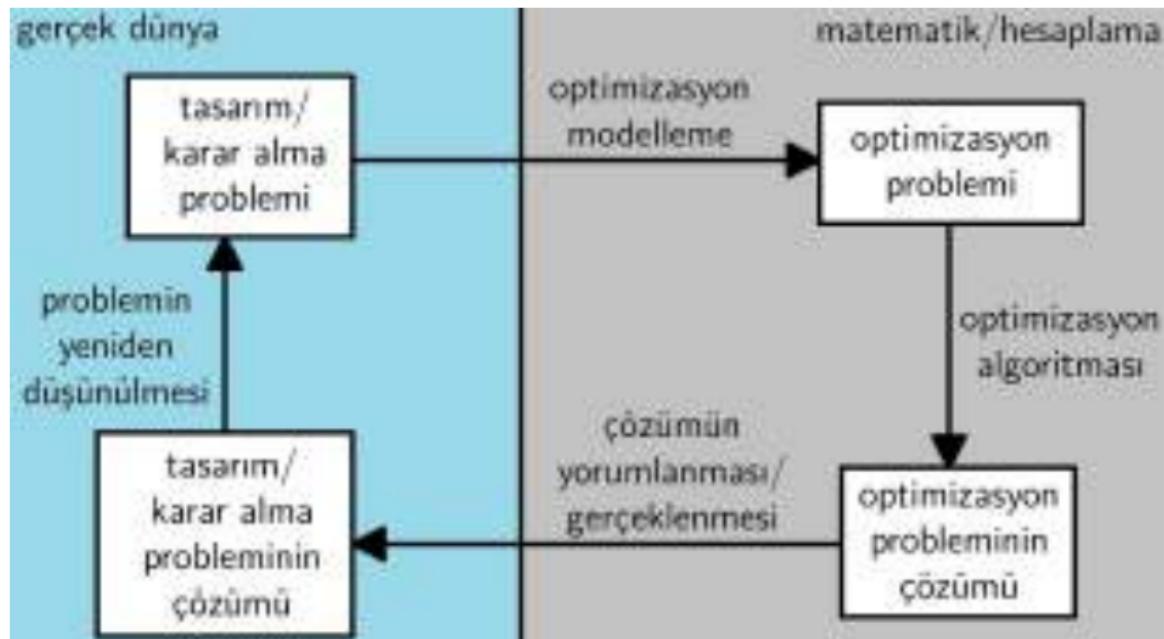
$Q(t)$ : malzeme akışı ,  $V_R$ : reaktör hacmi

$c_{Af}/c_{Bf}$ : A'nın/B'nin besleme derişimi

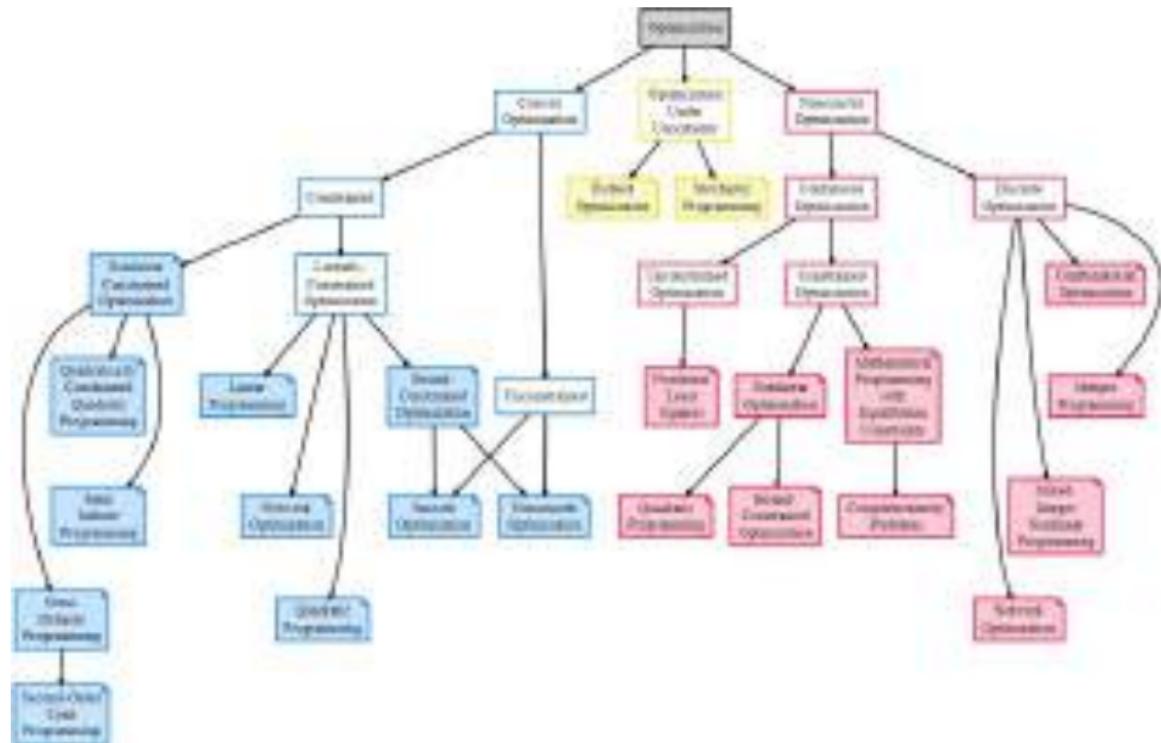
## Alt Bölüm 5

Optimizasyon yöntemlerinin sınıflandırılması

# Optimizasyon prosedürü



# Optimizasyon problemi çeşitleri



Kaynak: <https://neos-guide.org/guide/types/>

# Optimizasyon algoritması çeşitleri

## kesin algoritmalar

(sınırlı sürede çözümü bulma garantisı vardır)

- ▶ birinci-derece yöntemler
  - gradyan iniş
  - momentum
- ▶ ikinci-derece yöntemler
  - Newton yöntemi
  - yarı-Newton yöntemleri
- ▶ kısıtlı optimizasyon
  - aktif küme yöntemi
  - ardışık karesel optimizasyon
  - iç nokta yöntemleri
- ▶ ...

## buluşsal algoritmalar

(sınırlı sürede çözümü bulma garantisı yoktur)

- ▶ tabu arama
- ▶ genetik algoritmalar
- ▶ benzetilmiş tavlama
- ▶ parçacık sürü optimizasyonu
- ▶ ...

# Sürekli/ayırık optimizasyon

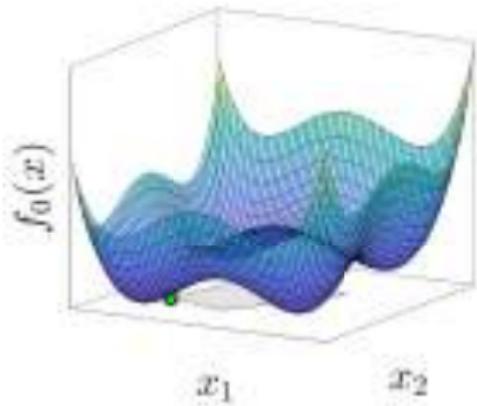
## sürekli program

$$\begin{aligned} & \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} && f_0(x) \\ & \text{bağlı} && f_i(x) \leq 0 \\ & && h_i(x) = 0 \end{aligned}$$

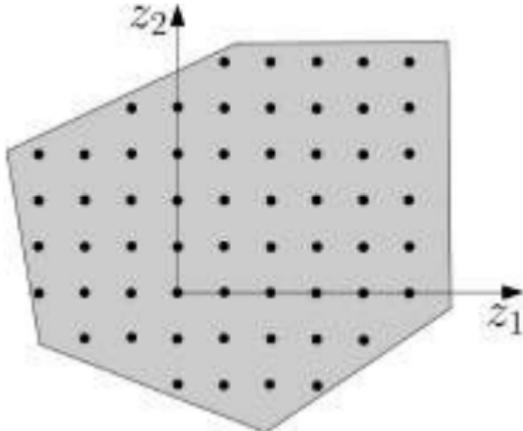
## ayırık program

$$\begin{aligned} & \underset{x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{Z}^q}{\text{minimize}} && f_0(x, z) \\ & \text{bağlı} && f_i(x, z) \leq 0 \\ & && h_i(x, z) = 0 \end{aligned}$$

$x$  reel vektör



$x$  reel,  $z$  tamsayılı vektör

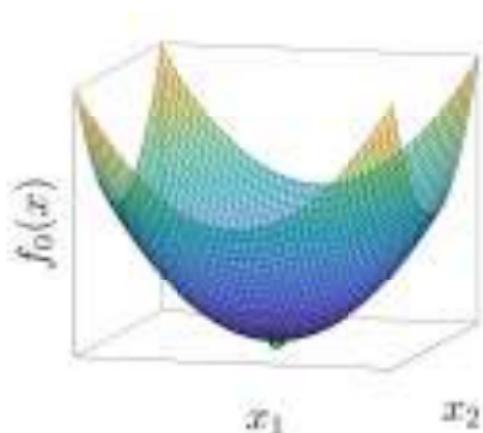


# Kısıtsız/kısıtlı optimizasyon

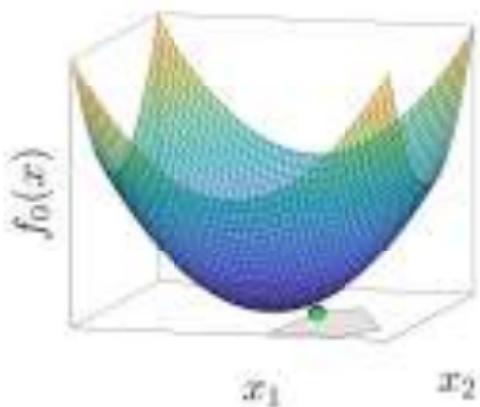
## kısıtlı program

### kısıtsız program

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad f_0(x)$$



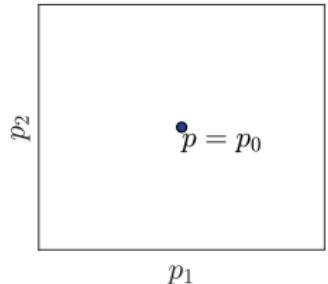
$$\begin{aligned} & \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} && f_0(x) \\ & \text{bağlı} && f_i(x) \leq 0 \\ & && h_i(x) = 0 \end{aligned}$$



# Belirsizlik içermeyen/İçeren optimizasyon

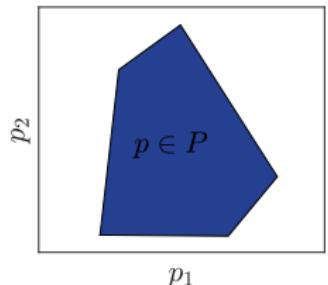
**deterministik**  
(belirsizlik  
içermeyen)  
**program**

$$\begin{array}{ll} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & f_0(x, p) \\ \text{bağlı} & x \in \Omega, p = p_0 \end{array}$$



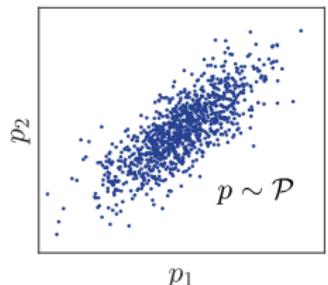
**dayanıklı**  
**program**

$$\begin{array}{ll} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & \max_{p \in P} f_0(x, p) \\ \text{bağlı} & x \in \Omega \end{array}$$



**stokastik**  
**program**

$$\begin{array}{ll} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & \mathbb{E}\{f_0(x, p)\} \\ \text{bağlı} & x \in \Omega, p \sim \mathcal{P} \end{array}$$



# Dışbükey/dışbükey-olmayan optimizasyon

## dışbükey program

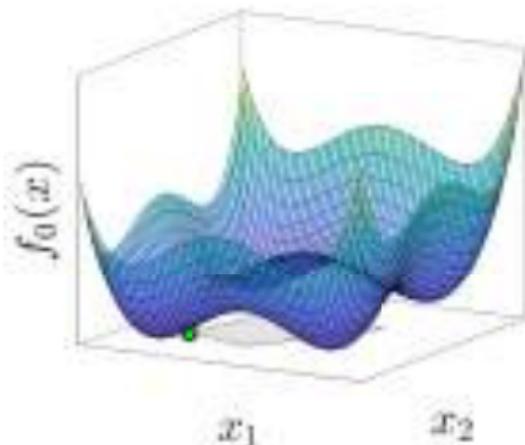
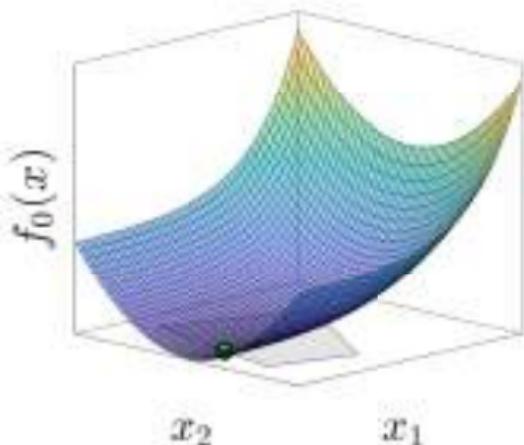
$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & f_0(x) \\x \in \mathbb{R}^n & \\& \text{bağlı } x \in \Omega\end{array}$$

$f_0$  dışbükey fonksiyon ve  
 $\Omega$  dışbükey küme

## dışbükey-olmayan program

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & f_0(x) \\x \in \mathbb{R}^n & \\& \text{bağlı } x \in \Omega\end{array}$$

$f_0$  dışbükey olmayan fonks. veya  
 $\Omega$  dışbükey olmayan küme



## Alt Bölüm 6

Kaynaklar

## Ders kitapları

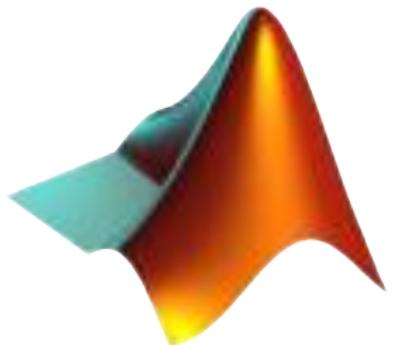
- ▶ *Convex Optimization*. Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe  
([kitabın internet sitesinde ek materyaller bulunabilir](#))
- ▶ *Convex Optimization Theory*. Dimitri P. Bertsekas ([kitabın internet sitesinde ek materyaller ve çözümü örneklər bulunabilir](#))
- ▶ *Convex Optimization Algorithms*. Dimitri P. Bertsekas
- ▶ *Convex Optimization and Euclidean Distance Geometry*. Jon Dattorro
- ▶ *Algorithms for Optimization*, Mykel J. Kochenderfer, Tim A. Wheeler
- ▶ *Lecture Notes on Numerical Optimization*, Moritz M. Diehl
- ▶ *Introduction to Nonlinear Optimization*. Amir Beck
- ▶ *Numerical Optimization*. Jorge Nocedal, Stephen J. Wright

# Dersler

- ▶ [Introduction to Convex Optimization](#). Stephen Boyd, Pablo Parrilo, MIT
- ▶ [Convex Optimization I](#). Stephen Boyd, Stanford
- ▶ [Introduction to Nonlinear Optimization](#). Amir Beck, Tel Aviv University
- ▶ [Convex Analysis and Optimization](#). Dimitri Bertsekas, MIT
- ▶ [Nonlinear Optimization](#). Pablo Parrilo, MIT

# Programlama dilleri (optim. modelleme)

MATLAB®



Scilab



GNU Octave



Kaynak: John W. Eaton

Julia



Python



SageMath



Kaynak: The Sage team

# Optim. modelleme sistemleri/paketleri

- ▶ açık kaynak (*open source*)
  - **YALMIP** (MATLAB®/GNU Octave) (kullanımı kolay, çok sayıda optimizasyon çözümünü destekliyor)
  - **CVX** (MATLAB®) (kullanımı kolay, dışbükey analiz kuralları yaklaşımı)
  - **CasADI** (MATLAB®/GNU Octave/Python) (sayısal optimal kontrol; algoritmik türev özelliği var, yüksek başarılımlı)
  - **GEKKO** (Python) (karma-tamsayılı/diferansiyel-cebirsel denklemler için makina öğrenmesi ve optimizasyon)
- ▶ ticari (*proprietary*)
  - **GAMS®**
  - **AMPL®**
  - **AIMMS Development®**

# Bölüm 12

## Optimizasyonun temelleri

Alt Bölüm 1

Temel kavramlar

# Optimizasyon problemi

$$\begin{array}{ll}\text{minimize}_{x \in \mathbb{R}^n} & f_0(x) \\ \text{bağlı} & x \in \Omega\end{array}$$

- $x \in \mathbb{R}^n$  (karar değişkenleri vektörü)
- $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (amaç fonksiyonu)
- $\Omega$  (olanaklı küme)

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p\}$$

- $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$  (eşitsizlik kısıtı fonksiyonları)
- $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, p$  (eşitlik kısıtı fonksiyonları)

# Optimizasyon problemlerinin unsurları

- ▶ **Amaç fonksiyonu**  $f_0(x)$  optimizasyonun amacını bir niceliği minimize/maksimize etmek olarak ifade eder.
- ▶ **Karar değişkenleri vektörü**  $x \in \mathbb{R}^n$  optimizasyon ile sayısal değerini bulmak istediğimiz optimizasyon değişkenlerinden oluşan vektördür.
- ▶ **Olanaklı küme**  $\Omega$ ,  $x$  vektörünün elemanı olmak üzere kısıtlandığı kümeyi belirtir. Bu küme  $x$ 'in sağlanması gereken kısıtları belirler ve genellikle  $f_i(x) \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$  (esitsizlik kısıtları) ve  $h_i(x) = 0$ ,  $i = 1, \dots, p$  (eşitlik kısıtları) ile ifade edilir.

## Örnek: İki boyutlu optimizasyon problemi

$$\underset{x \in \mathbb{R}^2}{\text{minimize}} \quad x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{bağlı} \quad 1 + x_1^2 - x_2 \leq 0$$

$$1 - x_1 \leq 0$$

$$x_2 + 2x_1 - 6 = 0$$

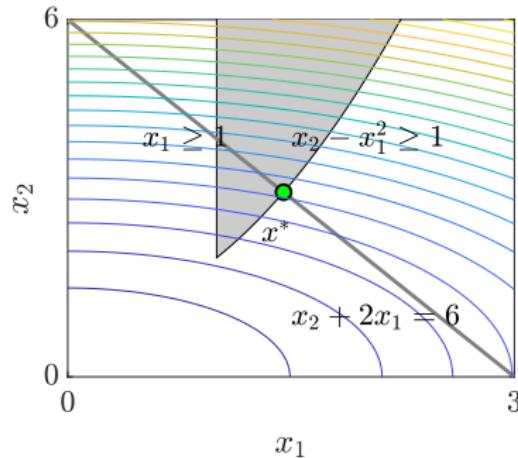
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad f_0(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$f_1(x) = 1 + x_1^2 - x_2$$

$$f_2(x) = 1 - x_1$$

$$h_1(x) = x_2 + 2x_1 - 6$$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + x_1^2 \leq x_2, 1 \leq x_1, x_2 + 2x_1 = 6\}$$



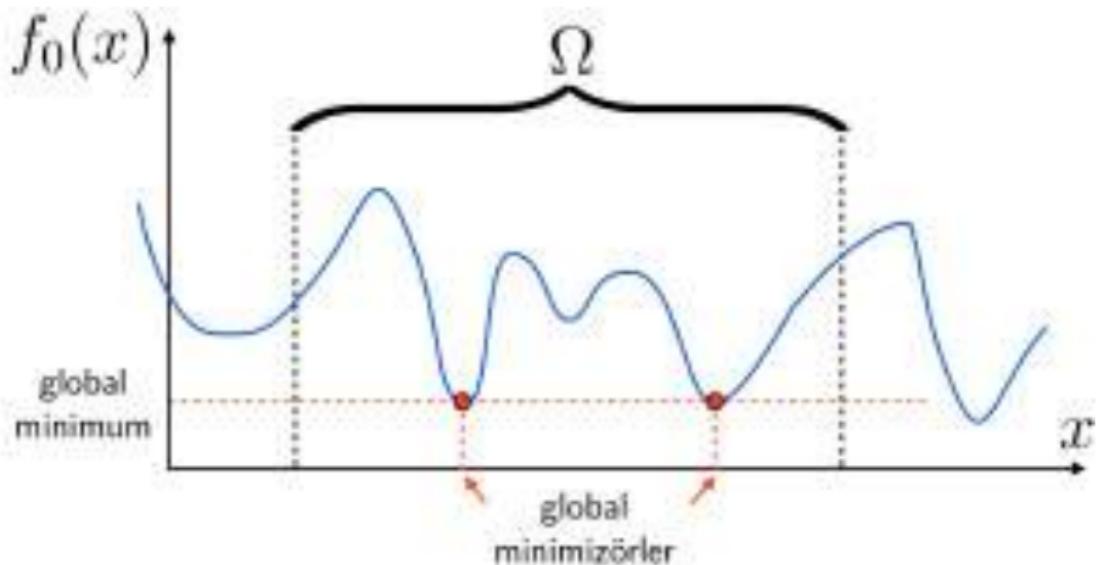
# Problemin çözümünün özellikleri

minimize  $f_0(x)$   
 $x \in \mathbb{R}^n$   
bağlı  $x \in \Omega$

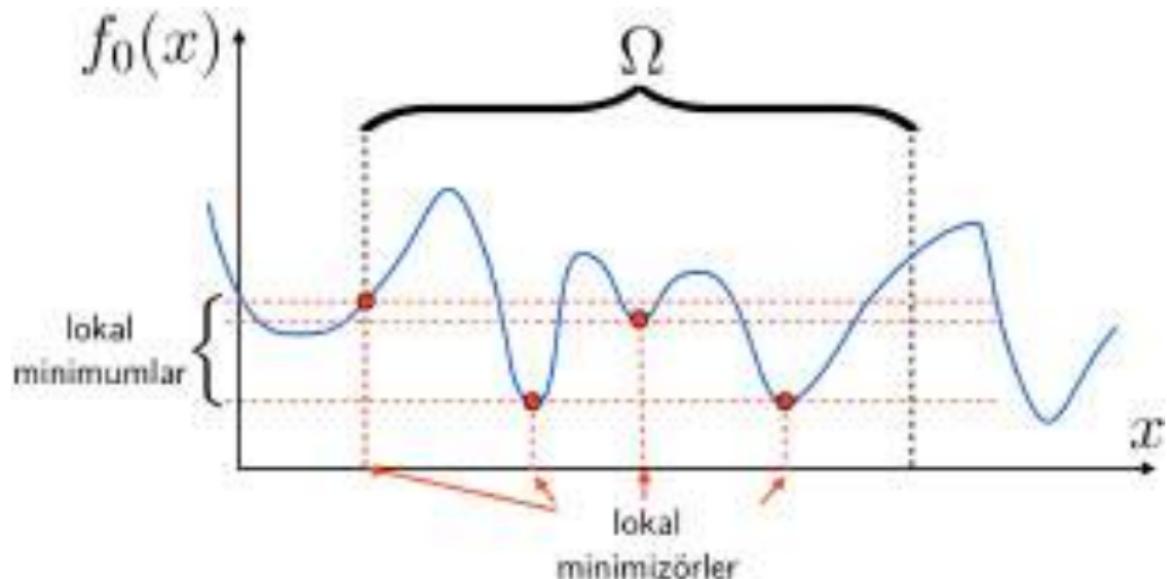
optimal değer:  $p^* = \min\{f_0(x) \mid x \in \Omega\}$

- ▶ problem **olanaksız** (yani, kısıtları sağlayan bir  $x$  mevcut değil, veya  $\Omega$  boş küme) ise  $p^* = \infty$
- ▶ problem **alttan sınırsız** ise  $p^* = -\infty$
- ▶ eğer  $\forall x \in \Omega$  için  $f_0(x) \geq f_0(x^*)$ 'i sağlayan  $x^* \in \Omega$  mevcutsa:
  - $x^*$  P'nin bir **global minimizör**üdür
  - $f_0(x^*)$  P'nin **global minimum**udur
- ▶ eğer  $\|x - x^*\| \leq \sigma$  ile  $\forall x \in \Omega$  için  $f_0(x) \geq f_0(x^*)$ 'i sağlayan  $x^* \in \Omega$  ve  $\sigma > 0$  mevcutsa:
  - $x^*$  P'nin bir **lokal minimizör**üdür
  - $f_0(x^*)$  P'nin bir **lokal minimum**udur

## Global minimizör ve global minimum



# Lokal minimizör ve lokal minimum



# Örtük kısıtlar

standart formdaki optimizasyon probleminde aşağıdaki şekilde **örtük kısıt** (implicit constraint) vardır

$$x \in \mathcal{D} = \text{dom } f_0 \cap \bigcap_{i=1}^m \text{dom } f_i \cap \bigcap_{i=0}^p \text{dom } h_i$$

- ▶  $\mathcal{D}$ 'ye problemin **tanım kümesi** (domain) denir
- ▶  $f_i(x) \leq 0$  ile  $h_i(x) = 0$  **açık kısıtları** (explicit constraint)
- ▶ açık kısıtı olmayan ( $m = p = 0$ ) problem **kısıtsızdır**

**örnek:**

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad - \sum_{i=1}^k \log(b_i - a_i^T x)$$

$a_i^T x < b_i$  şeklinde örtük kısıtları olan bir kısıtsız problemdir

# Olanaklılık problemi

olanaklılık (*feasibility*) problemi

$$\begin{array}{ll} \text{bul} & x \\ x \in \mathbb{R}^n & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{bağlı} & f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \\ & h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p \end{array}$$

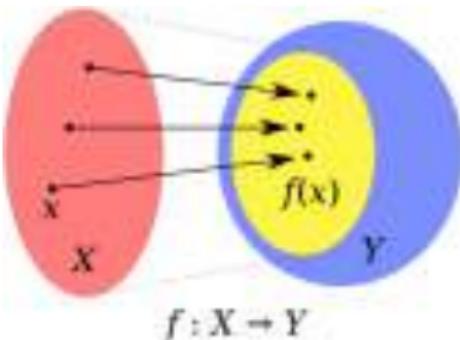
genel problemin  $f_0(x) = 0$  ile oluşan bir özel halidir:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & 0 \\ x \in \mathbb{R}^n & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{bağlı} & f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \\ & h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p \end{array}$$

- ▶ problem olanaklı ise  $p^* = 0$  (olanaklı her  $x$  optimaldir)
- ▶ problem olanaksız ise  $p^* = \infty$

## Not: Tanım, değer ve görüntü kümeleri



Yukarıdaki şekildeki  $f : X \rightarrow Y$  fonksiyonunu ele alalım. Fonksiyonun girdi değerlerinin kümesi  $X$ 'e  $f$ 'nin tanım kümesi (domain, **dom**), çıktı değerlerini elemanı olacak şekilde kısıtlayan küme  $Y$ 'ye  $f$ 'nin değer kümesi (codomain), bütün çıktı değerlerinin kümesine (yani,  $\{f(x) | x \in X\}$ ) ise  $f$ 'nin görüntü kümesi (image veya range) denir.  $f$ 'nin değer kümesinin herhangi bir alt kümesi  $B$  için,  $f$ 'nin tanım kümesinden  $B$ 'nin elemanlarıyla eşleşen tüm elemanların kümesine  $B$ 'nin ters görüntü kümesi (inverse image) denir.

## Alt Bölüm 2

Küme oluşturu<sup>c</sup>u notasyonu

## Küme oluşturucu notasyonu

kümeler bütün elemanları belirtilerek tanımlanabilir. örnekler:

- ▶  $\{7, 3, 15, 32\}$ : 3, 7, 15 ve 32 sayılarını içeren (ve başka hiçbir şey içermeyen) küme
- ▶  $\{a, b, c\}$ :  $a$ ,  $b$  ve  $c$ 'yi içeren (ve başka hiçbir şey içermeyen) küme

kümeler, elemanlarının özellikleri ve sağladığı şartlar belirtilerek de tanımlanabilir. buna küme oluşturucu notasyonu (*set-builder notation*) denir. örnekler:

- ▶  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ : kesin pozitif reel sayıların kümesi
- ▶  $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 1\}$ : mutlak değeri 1'e eşit olan reel sayıların kümesi (yani,  $\{-1, 1\}$ )
- ▶  $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 3\}$ : 3'ten küçük olmayan tamsayıların kümesi

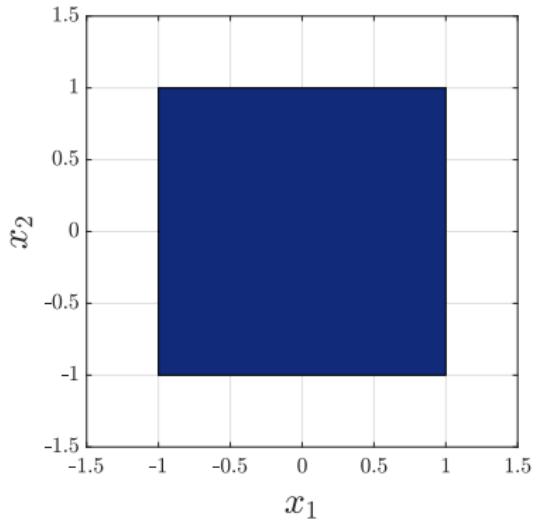
not:  $\mathbb{R}$  reel sayılar,  $\mathbb{Z}$  tamsayılar,  $\mathbb{N}$  doğal sayılar,  $\mathbb{Q}$  rasyonel sayılar,  $\mathbb{I}$  sanal sayılar,  $\mathbb{C}$  karmaşık sayılar

# Küme oluşturucu notasyonu

$\mathbb{R}^2$ 'de örnekler - Örnek 1: Kare

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid Ax \leq b\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



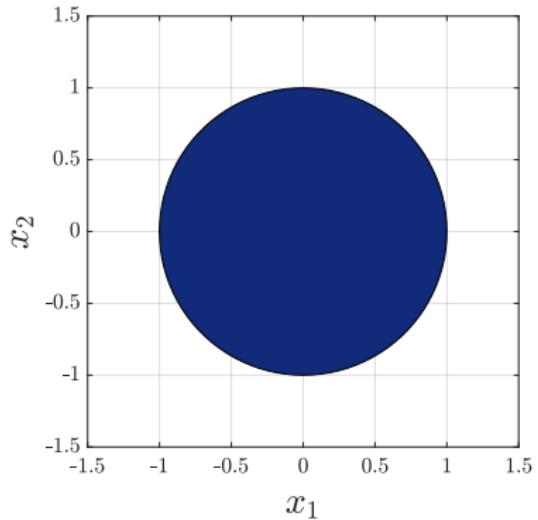
# Küme oluşturucu notasyonu

$\mathbb{R}^2$ 'de örnekler - Örnek 2: Daire

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$$

veya

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^T x \leq 1\}$$

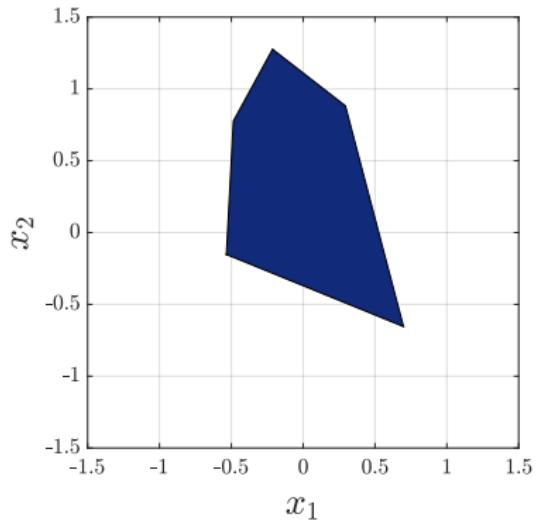


# Küme oluşturucu notasyonu

$\mathbb{R}^2$ 'de örnekler - Örnek 3: Çokgen

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid Ax \leq b\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.9 & 0.5 \\ -1.1 & -2.7 \\ -1.1 & 0.6 \\ 0.7 & 0.9 \\ -1.9 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

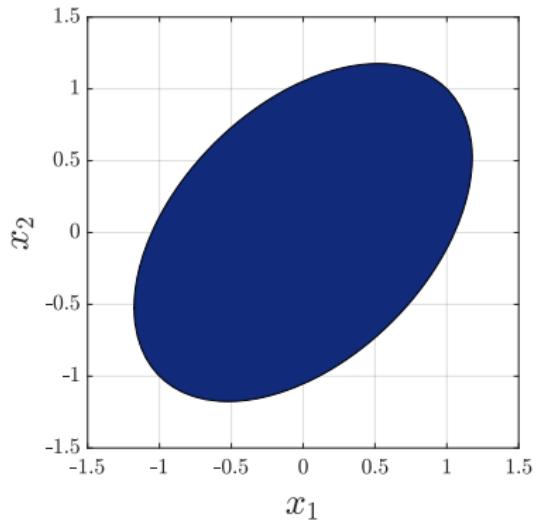


# Küme oluşturucu notasyonu

$\mathbb{R}^2$ 'de örnekler - Örnek 4: Elips

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^T Px \leq 2\}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1.8 & -0.8 \\ -0.8 & 1.8 \end{bmatrix}$$



# Küme oluşturucu notasyonu

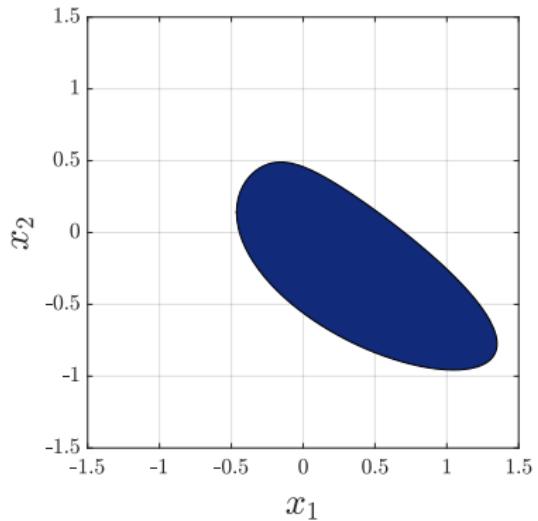
$\mathbb{R}^2$ 'de örnekler - Örnek 5: Spektrahedron

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 A_1 + x_2 A_2 \leq B\}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

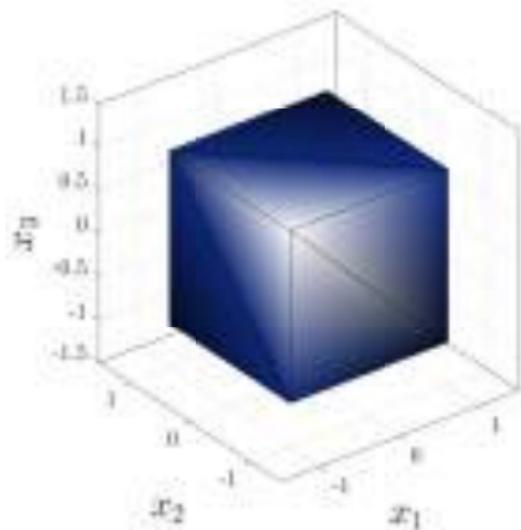


# Küme oluşturucu notasyonu

$\mathbb{R}^3$ 'de örnekler - Örnek 1: Küp

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax \leq b\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



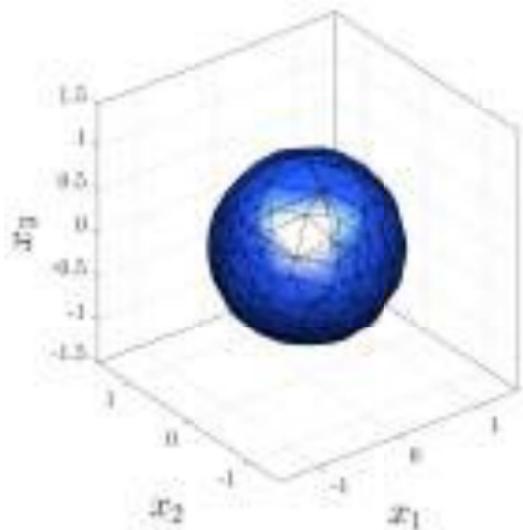
# Küme oluşturucu notasyonu

$\mathbb{R}^3$ 'de örnekler - Örnek 2: Küre

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq 1\}$$

veya

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^T x \leq 1\}$$

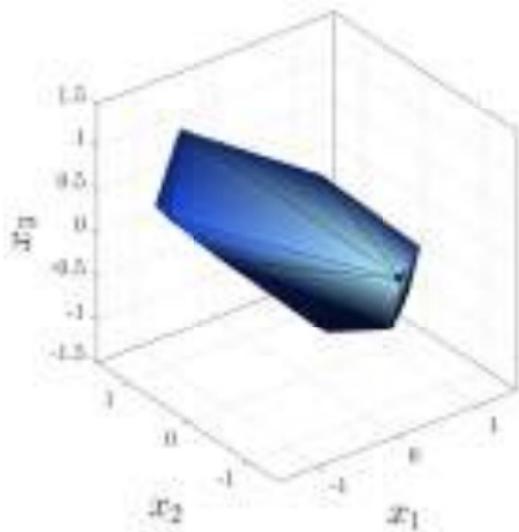


# Küme oluşturucu notasyonu

$\mathbb{R}^3$ 'de örnekler - Örnek 3: Çokyüzlü

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax \leq b\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & -0.7 \\ -0.2 & -0.3 & 1.5 \\ 0.5 & -0.7 & -0.3 \\ -1.2 & 0.1 & -1.2 \\ 1.8 & 0.1 & 0.8 \\ -0.5 & 0.4 & 0.2 \\ 2.6 & 1.4 & 0.4 \\ -1 & -0.9 & -1.2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

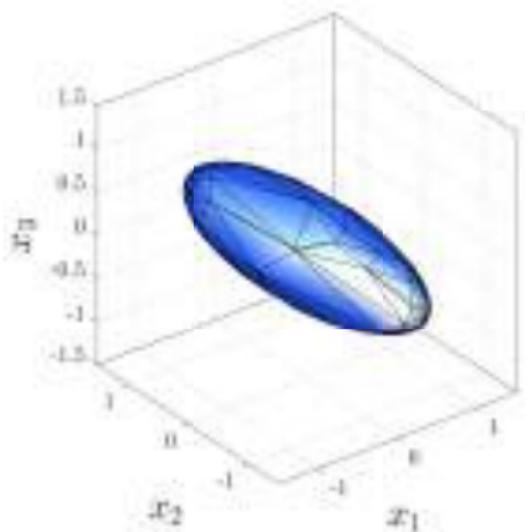


# Küme oluşturucu notasyonu

$\mathbb{R}^3$ 'de örnekler - Örnek 4: Elipsoit

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^T Px \leq 1\}$$

$$P = \begin{bmatrix} 8.8 & 4 & -7.7 \\ 4 & 2.6 & -4.9 \\ -7.7 & -4.9 & 13.1 \end{bmatrix}$$



# Küme oluşturucu notasyonu

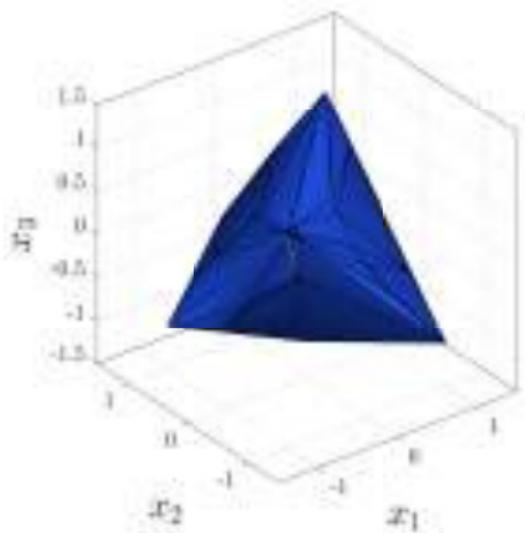
$\mathbb{R}^3$ 'de örnekler - Örnek 5: Spektrahedron

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + I \in \mathbb{S}_+^3\}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



## Alt Bölüm 3

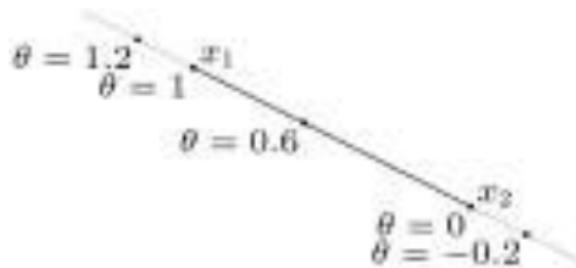
### Dışbükey optimizasyon

# Afin küme

**doğru:**  $x_1$  ve  $x_2$  noktalarından geçen doğru

$$x = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

denklemi ile tanımlanır



**afin küme:** içeridiği herhangi iki ayrı noktadan geçen doğruya  
İçeren küme

**örnek:** doğrusal denklem takımının çözümkümesi

$$\Omega = \{x \mid Ax = b\}$$

(diğer taraftan, her afin küme bir doğrusal denklem takımının  
çözüm kümesi olarak ifade edilebilir)

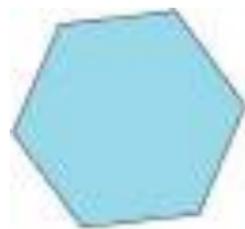
## Dışbükey küme

**doğru parçası:**  $x_1$  ve  $x_2$  noktalarını bağlayan doğru parçası

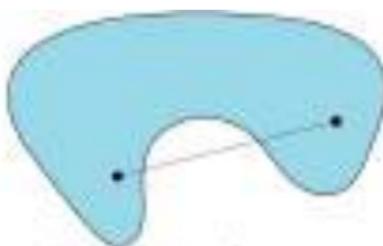
$$x = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \quad (0 \leq \theta \leq 1)$$

denklemi ile tanımlanır

**dışbükey küme:** içerdiği herhangi iki noktayı bağlayan bütün doğru parçalarını içeren küme



dışbükey  
küme



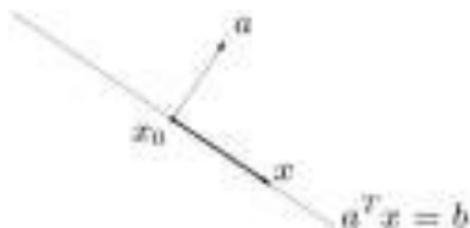
dışbükey olmayan  
küme



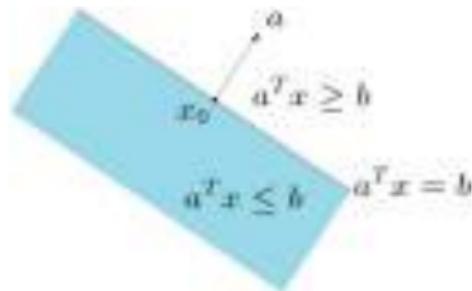
dışbükey olmayan  
küme

# Hiperdüzlem ve yarıuzay

**hiperdüzlem:**  $\{x \mid a^T x = b\}$  ( $a \neq 0$ )



**yarıuzay:**  $\{x \mid a^T x \leq b\}$  ( $a \neq 0$ )



- $a$  ( $a^T x = b$ 'ye) normal vektördür
- hiperdüzlemler afin ve dışbükeydir, yarıuzaylar dışbükeydir

# Norm

$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ile gösterilen ve şu şartları sağlayan fonksiyon

- ▶  $\|x\| \geq 0$  ve  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (pozitif yarıtanımlı)
- ▶  $t \in \mathbb{R}$  için  $\|tx\| = |t|\|x\|$  (homojen)
- ▶  $\|x + y\| \geq \|x\| + \|y\|$  (üçgen eşitsizliğini sağlayan)

norm, bir vektörün uzunluğunun bir ölçüsüdür

**notasyon:**  $\|\cdot\|$  genel (belirtilmemiş) norm,  $\|\cdot\|_{\text{symbol}}$  belirli bir norm için kullanılır

# **$p$ -normu ve sık kullanılan özel halleri**

**$p$ -normu:** ( $p \geq 1$ )

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

**1-normu**  
(taksi normu)

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

**2-normu**  
(Öklit normu)

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

**$\infty$ -normu**  
(maksimum normu)

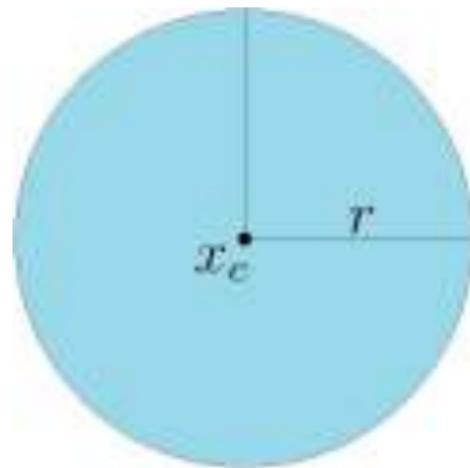
$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

## Norm topu

merkezi  $x_c$  ve yarıçapı  $r$  olan top:  $\{x \mid \|x - x_c\| \leq r\}$

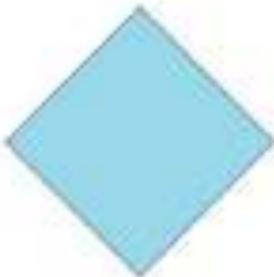
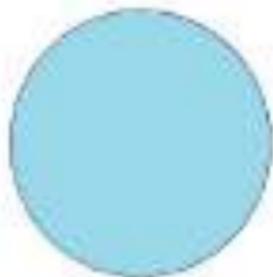
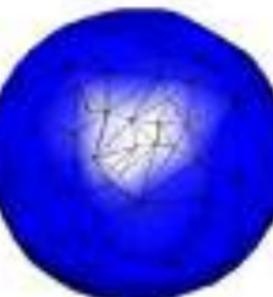
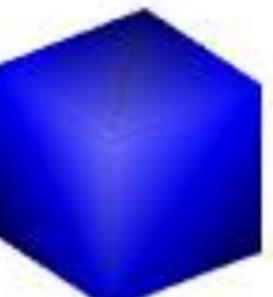
**örnek:** 2-normu topu (Öklityen top)

$$\{x \mid \|x - x_c\|_2 \leq r\} = \{x_c + ru \mid \|u\|_2 \leq 1\}$$



**not:** norm topları dışbükeydir

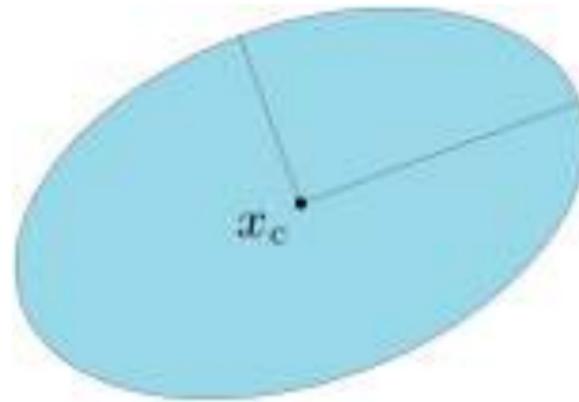
## Norm topu örnekleri

	1-normu topu	2-normu topu	$\infty$ -normu topu
$\mathbb{R}^2$			
$\mathbb{R}^3$			

# Elipsoit

$$\{x \mid (x - x_c)^T P^{-1} (x - x_c) \leq 1\}$$

( $P \in \mathbf{S}_{++}^n$ , yani,  $P$  simetrik pozitif tanımlı)



**elipsoit (alternatif gösterim):**

$$\{x_c + Au \mid \|u\|_2 \leq 1\}$$

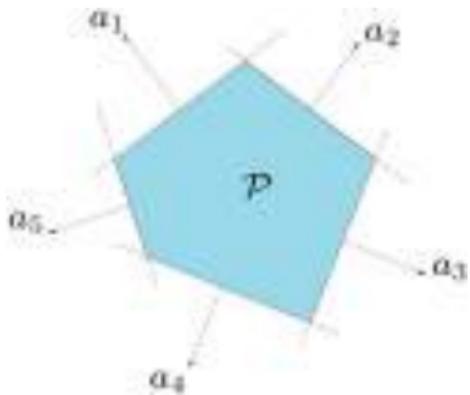
( $A$  kare ve tekil olmayan)

# Çokyüzlü (polyhedron)

sonlu sayıda doğrusal eşitsizlik ve eşitliğin çözüm kümesi

$$\mathcal{P} = \{x \mid Ax \preceq b, Cx = d\}$$

( $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  
 $\preceq$  eleman bazında eşitsizlik)



**not 1:** çokyüzlü, sonlu sayıda yarıuzay ve hiperdüzlemin kesişim kümesidir

**not 2:** afin kümeler (örneğin altuzaylar, hiperdüzlemler, doğrular), ışınlar, doğru parçaları ve yarıuzaylar birer çokyüzlüdür

# Dışbükey fonksiyonun tanımı

eğer  $\text{dom } f$  bir dışbükey küme ise ve

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y)$$

şartı bütün  $x, y \in \text{dom } f$  ve  $0 \leq \theta \leq 1$  için sağlanıyorsa,  
 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  bir **dışbükey fonksiyondur**



- eğer  $-f$  dışbükey ise  $f$  içbükeydir (concave)
- eğer  $\text{dom } f$  dışbükey ise ve

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) < \theta f(x) + (1 - \theta)f(y)$$

şartı bütün  $x, y \in \text{dom } f$  ( $x \neq y$ ) ve  $0 < \theta < 1$  için  
sağlanıyorsa,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  bir **kesin dışbükey fonksiyondur**

## Birinci-derece şart

eğer  $\text{dom } f$  bir açık küme ise ve gradyan

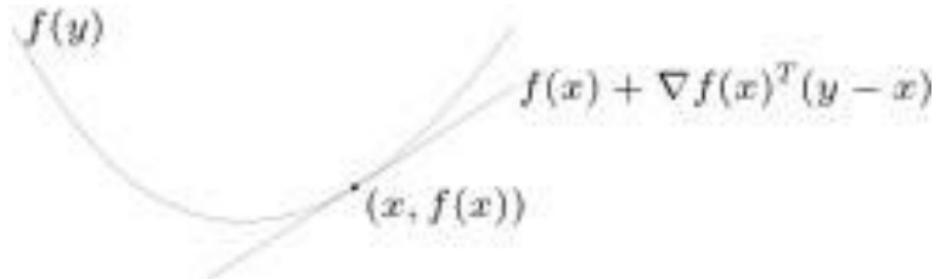
$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}^T$$

her  $x \in \text{dom } f$  için mevcutsa  $f$  türevlenebilirdir

**birinci-derece şart:** türevlenebilir bir  $f$  fonksiyonu (dışbükey  $\text{dom } f$  ile) ancak ve ancak

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) \quad \forall x, y \in \text{dom } f$$

şartını sağlıyorsa dışbükeydir

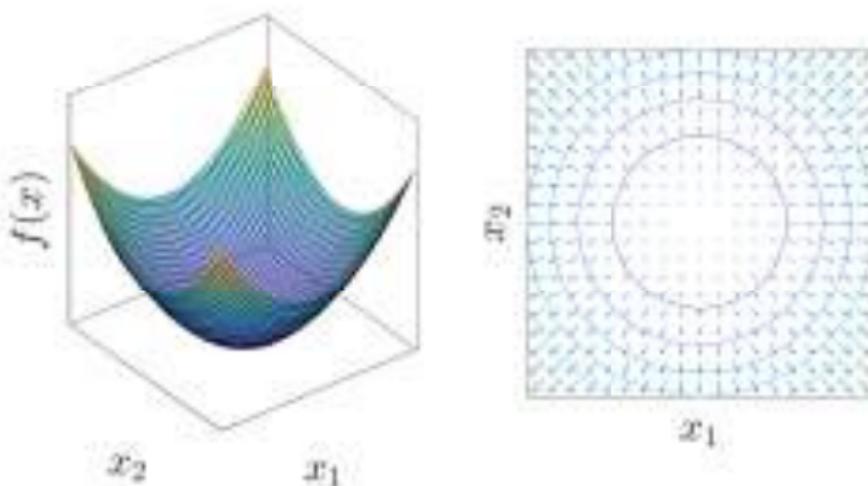


$f'$  in birinci-derece yaklaşılığı global alt-değerlendiricidir

# Gradyan

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

**örnek:**  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$        $f(x) = x_1^2 + x_2^2$        $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$



## **İkinci-derece şartlar**

eğer  $\text{dom } f$  bir açık küme ise ve Hessian  $\nabla^2 f(x) \in \mathbb{S}^n$

$$\nabla^2 f(x)_{ij} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

her  $x \in \text{dom } f$  için mevcutsa  $f$  **iki kere türevlenebilirdir**

**İkinci-derece şartlar:** iki kere türevlenebilir bir  $f$  fonksiyonu için (dışbükey  $\text{dom } f$  ile)

- ▶ ancak ve ancak  $\nabla^2 f(x) \succeq 0 \forall x \in \text{dom } f$  ise  $f$  dışbükeydir
- ▶  $\nabla^2 f(x) \succ 0 \forall x \in \text{dom } f$  ise  $f$  kesin dışbükeydir

## Sınav sorusu örneği

**Soru 1)**  $f(x, y) = x^2 + x \cos(y)$  fonksiyonu verilsin ( $x, y \in \mathbb{R}$ ).

**Soru 1a)**  $f(x, y)$ 'in gradyanını hesaplayınız.

**Çözüm 1a)**

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + \cos(y) \\ -x \sin(y) \end{bmatrix}$$

**Soru 1b)**  $f(x, y)$ 'in Hessian'ını hesaplayınız.

**Çözüm 1b)**

$$\nabla^2 f_0(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_0(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f_0(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f_0(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f_0(x,y)}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\sin(y) \\ -\sin(y) & -x \cos(y) \end{bmatrix}$$

## Sınav sorusu örneği (devam)

**Soru 1c)** Bu fonksiyonun dışbükey olup olmadığını gösteriniz.

**Çözüm 1c)** İki kere türevlenebilir bir  $f$  fonksiyonu

$\nabla^2 f \succeq 0 \forall x \in \text{dom } f$  ise dışbükeydir. Fonksiyonun

Hessian'ının determinantına bakalım:

$$\begin{vmatrix} 2 & -\sin(y) \\ -\sin(y) & -x \cos(y) \end{vmatrix} = -2x \cos(y) - \sin^2(y)$$

Bu determinant bazı  $x, y$  değerleri için negatif olabilir.

Örneğin,  $x = 1$  ve  $y = 0$  için determinant  $-2$  olur. Bu matrisin determinantı negatif ise bazı özdeğerleri negatif demektir, dolayısıyla matris pozitif yarı-tanımlı olamaz ve fonksiyon dışbükey değildir.

Not:  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  formunda bir matrisin determinantı özdeğerlerinin çarpımına eşittir:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

## Sınav sorusu örneği

**Soru 2)**  $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 6x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 + 3x_2 + 3$  fonksiyonu verilsin ( $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ).

**Soru 2a)** Fonksiyonu  $f(x) = 0.5x^T Px + b^T x + c$  formunda yazınız.

**Çözüm 2a)**

$$f(x) = x^T \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}}_P x + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}}_{b^T} x + \underbrace{3}_c$$

**Soru 2b)** Bu fonksiyonun dışbükey olup olmadığını gösteriniz.

**Çözüm 2b)**  $P$  matrisi (fonksiyonun Hessian'ı) pozitif tanımlıdır (özdeğerleri  $\lambda_1 = 3.5279$  ve  $\lambda_2 = 12.4721$ ). Dolayısıyla fonksiyon dışbükeydir.

## Önemli not

$A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  formundaki matrisin özdeğerlerinin hesabı

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\text{tr}(A) = a + d = T \quad \det(A) = ad - bc = D$$

$$\lambda_1 = 0.5T + \sqrt{\frac{T^2}{4} - D}$$

$$\lambda_2 = 0.5T - \sqrt{\frac{T^2}{4} - D}$$

# Dışbükey optimizasyon problemi

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad f_0(x)$$

$$\text{bağlı} \quad f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$a_i^T x = b_i, \quad i = 1, \dots, p$$

$f_0, f_1, \dots, f_m$  dışbükey; eşitlik kısıtları afin

dışbükey optimizasyon problemleri genellikle şu şekilde yazılır:

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad f_0(x)$$

$$\text{bağlı} \quad f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$Ax = b$$

**not:** bir dışbükey optimizasyon probleminin olanaklı kümesi dışbükey kümedir ve amaç fonksiyonu dışbükey fonksiyondur

# Lokal ve global optimumlar

**bir dışbükey problemin her lokal olarak optimal noktası global olarak optimaldır**

**kanıt:**  $x$  lokal olarak optimal bir nokta olsun, ancak

$f_0(y) < f_0(x)$ 'i sağlayan bir  $y$  mevcut olsun

$x$ 'in lokal olarak optimal olması

$$z \text{ olanaklı}, \quad \|z - x\|_2 \leq R \quad \Rightarrow \quad f_0(z) \geq f_0(x)$$

şartlarını sağlayan bir  $R > 0$ 'nin mevcut olduğu anlamına gelir.

$z = \theta y + (1 - \theta)x$  ( $\theta = R/(2\|y - x\|_2)$ ) ifadesini ele alalım

- ▶  $\|y - x\|_2 > R$ , dolayısıyla  $0 < \theta < 1/2$
- ▶  $z$  iki olanaklı noktanın ( $x$  ve  $y$ ) dışbükey kombinasyonudur, dolayısıyla olanaklıdır
- ▶  $\|z - x\|_2 = R/2$  ve

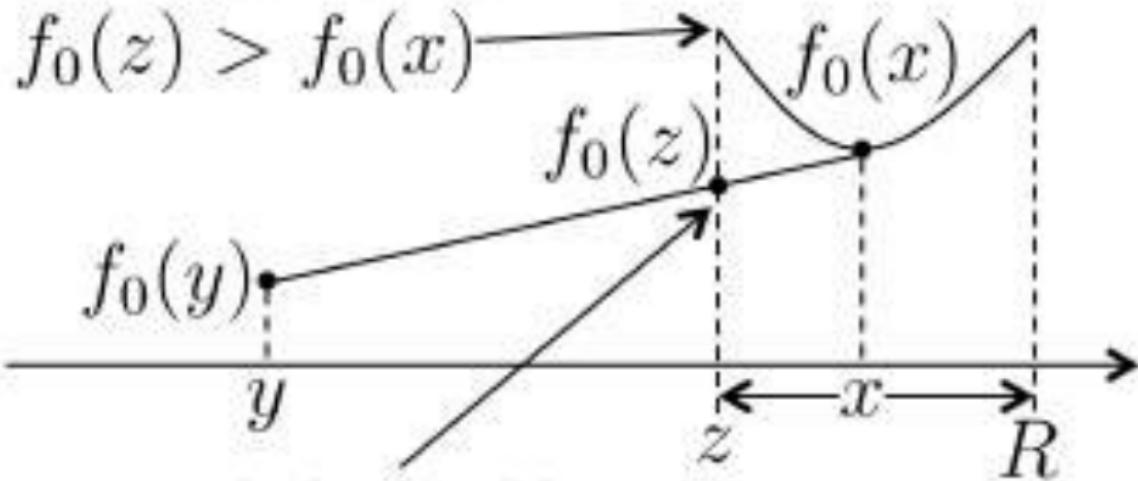
$$f_0(z) \leq \theta f_0(y) + (1 - \theta) f_0(x) < f_0(x)$$

$x$ 'in lokal olarak optimal olması kabulüyle ters düşer

## Lokal ve global optimumlar

kanıt (görsel olarak):

lokal optimalite

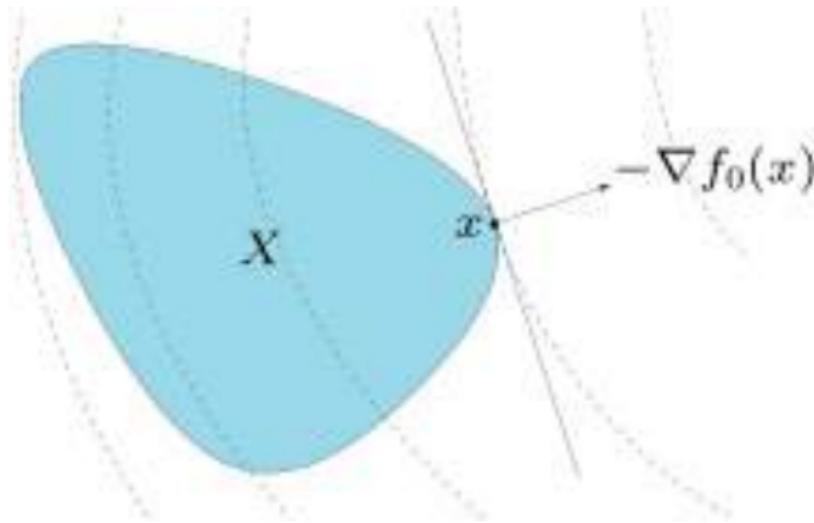


## Türevlenebilir $f_0$ için optimalite şartı

ancak ve ancak  $x$  olanaklı ise ve bütün olanaklı  $y$  noktaları için

$$\nabla f_0(x)^T(y - x) \geq 0$$

şartı sağlanıyorsa  $x$  optimaldir



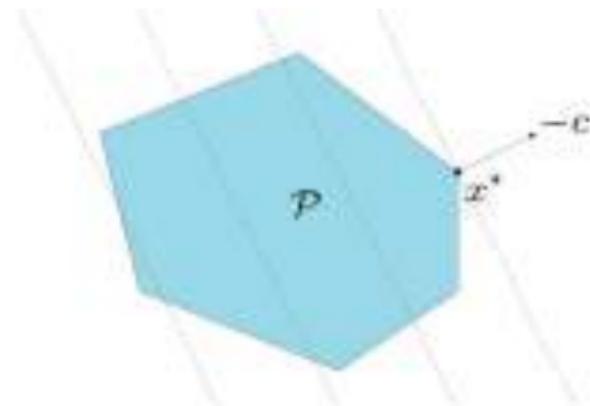
$\nabla f_0(x)$  (sıfırdan farklısa) olanaklı küme  $X$ 'e  $x$  noktasında bir destekleyici hiper düzlem tanımlar

# Doğrusal program (LP)

amaç fonksiyonu ve kısıtları afin olan dışbükey optimizasyon problemlerine doğrusal program denir

$$\begin{array}{ll}\text{minimize}_{x \in \mathbb{R}^n} & c^T x + d \\ \text{bağlı} & Gx \preceq h \\ & Ax = b\end{array}$$

problemin olanaklı kümesi bir çokyüzlüdür

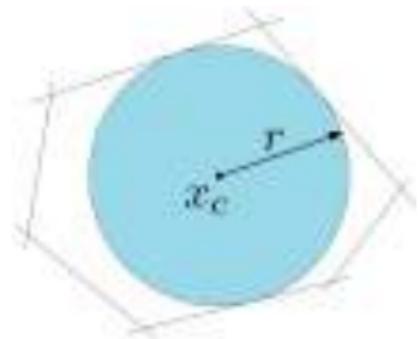


# Doğrusal program (LP)

örnek: bir çokyüzlünün Chebyshev merkezi

$\mathcal{P} = \{x \mid a_i^T x \leq b_i, i = 1, \dots, m\}$  ile verilen  
bir çokyüzlünün Chebyshev merkezi,

$\mathcal{B} = \{x_c + u \mid \|u\|_2 \leq r\}$  ile verilen ve  
yarıçapı  $r$  mümkün olan en büyük değeri  
alan topun merkezidir



ancak ve ancak

$$\sup\{a_i^T(x_c + u) \mid \|u\|_2 \leq r\} = a_i^T x_c + r\|a_i\|_2 \leq b_i$$

için  $a_i^T x \leq b_i \quad \forall x \in \mathcal{B}$  sağlanır. dolayısıyla,  $x_c$  ve  $r$

$$\underset{x_c \in \mathbb{R}^n, r}{\text{minimize}} \quad -r$$

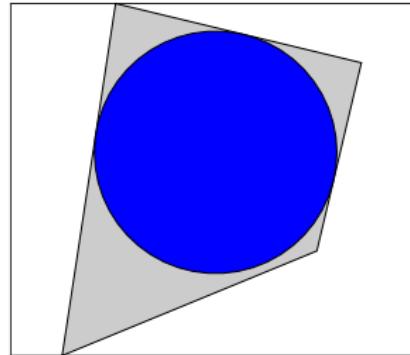
$$\text{bağlı} \quad a_i^T x_c + r\|a_i\|_2 \leq b_i, i = 1, \dots, m$$

ile verilen doğrusal program çözüleerek hesaplanabilir

# Doğrusal program (LP)

örnek: bir çokyüzlünün  
Chebyshev merkezi

YALMIP ile gerçekleme



```
xc = sdpvar(2,1); r = sdpvar(1,1);
rng(0); A = randn(5,2); b = ones(5,1);
m = size(A,1); kisitlar = [];
for i = 1:m
    kisitlar = [kisitlar, A(i,:)*xc + ...
                r*norm(A(i,:),2) <= b(i)];
end
amac_fonksiyonu = -r;
optimize(kisitlar, amac_fonksiyonu)
```

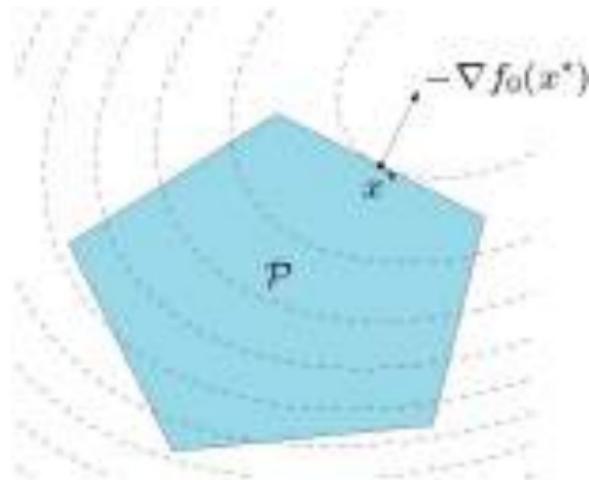
# Karesel program (QP)

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad (1/2)x^T Px + q^T x + r$$

$$\text{bağlı} \quad Gx \preceq h$$

$$Ax = b$$

- $P \in \mathbb{S}_+^n \rightarrow$  amaç fonksiyonu dışbükey karesel
- problemin olanaklı kümesi bir çokyüzlüdür



# Karesel program (QP)

örnek: en küçük kareler problemi

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad \|Ax - b\|_2^2$$

kısıtsız durumda analitik çözüm:  $x^* = A^\dagger b$   
( $A^\dagger$  sahte ters (pseudo-inverse))

probleme doğrusal kısıtlar eklenebilir:

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad \|Ax - b\|_2^2$$

bağlı  $l \preceq x \preceq h$

# Karesel program (QP)

örnek: çokyüzlüler arası uzaklık

$\mathcal{P}_1 = \{x \mid A_1 x \preceq b_1\}$  ve  $\mathcal{P}_2 = \{x \mid A_2 x \preceq b_2\}$  çokyüzlüleri arası uzaklık

$$\text{dist}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \inf\{\|x_1 - x_2\|_2 \mid x_1 \in \mathcal{P}_1, x_2 \in \mathcal{P}_2\}$$

ifadesiyle tanımlanır ve

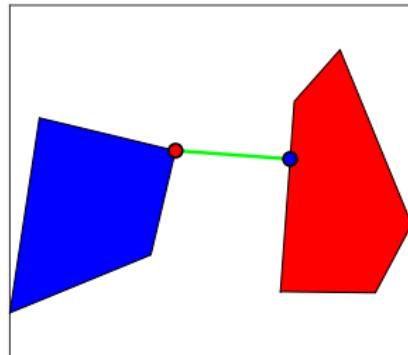
$$\begin{array}{ll}\text{minimize}_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n} & \|x_1 - x_2\|_2^2 \\ \text{bağlı} & A_1 x_1 \preceq b_1 \\ & A_2 x_2 \preceq b_2\end{array}$$

ile verilen QP çözüлerek hesaplanabilir

# Karesel program (QP)

örnek: çokyüzlüler arası  
uzaklık

YALMIP ile gerçekleme



```
x1 = sdpvar(2,1); x2 = sdpvar(2,1);
rng(0); A1 = randn(5,2); b1 = ones(5,1);
rng(5); A2 = randn(5,2); b2 = ones(5,1);
kisitlar = A1*x1 <= 2*b1;
kisitlar = [kisitlar, ...
            A2*(x2 - [4;-1]) <= b2];
amac_fonksiyonu = (x1 - x2)'*(x1 - x2);
optimize(kisitlar, amac_fonksiyonu)
```

## Alt Bölüm 4

Dualite ve optimalite şartları

# Lagrangian

## optimizasyon problemi (standart form)

(dışbükey olmayabilir)

$$\begin{aligned} & \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad f_0(x) \\ & \text{bağlı} \quad f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \quad h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

tanım kümesi  $\mathcal{D}$ , optimum  $p^\star$

**Lagrangian:**

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{dom } L = \mathcal{D} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p)$$

$$L(x, \lambda, \nu) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i h_i(x)$$

- ▶ amaç ve kısıt fonksiyonlarının ağırlıklı toplamıdır
- ▶  $\lambda_i, f_i(x) \leq 0$  ile bağlantılı Lagrange çarpanıdır
- ▶  $\nu_i, h_i(x) = 0$  ile bağlantılı Lagrange çarpanıdır

# Lagrange dual fonksiyonu

**Lagrange dual fonksiyonu:**  $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(\lambda, \nu) &= \inf_{x \in \mathcal{D}} L(x, \lambda, \nu) \\ &= \inf_{x \in \mathcal{D}} \left( f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i h_i(x) \right) \end{aligned}$$

$g$  içbükeydir (bazı  $\lambda, \nu$  için  $-\infty$  olabilir)

**alt sınır özelliği:**  $\lambda \succeq 0$  ise  $g(\lambda, \nu) \leq p^*$  sağlanır

kanıt:  $\tilde{x}$  olanaklı ve  $\lambda \succeq 0$  ise

$$f_0(\tilde{x}) \geq L(\tilde{x}, \lambda, \nu) \geq \inf_{x \in \mathcal{D}} L(x, \lambda, \nu) = g(\lambda, \nu)$$

sağlanır. bütün olanaklı  $\tilde{x}$ 'ler üzerinden minimizasyon ile  $p^* \geq g(\lambda, \nu)$  bulunur

# Lagrange dual fonksiyonu

örnek: doğrusal denklemlerin en küçük norm çözümü

$$\begin{array}{ll}\text{minimize}_{x \in \mathbb{R}^n} & x^T x \\ \text{bağlı} & Ax = b\end{array}$$

## dual fonksiyon

- Lagrangian  $L(x, \nu) = x^T x + \nu^T (Ax - b)$  şeklindedir
- $L$ 'yi  $x$  üzerinden minimize etmek için gradyan sıfıra eşitlenir

$$\nabla_x L(x, \nu) = 2x + A^T \nu = 0 \implies x = -(1/2)A^T \nu$$

- bulunan  $x$   $L$ 'de yerine konarak  $g$  elde edilir:

$$g(\nu) = L(-(1/2)A^T \nu, \nu) = -\frac{1}{4}\nu^T A A^T \nu - b^T \nu$$

bu,  $\nu$ 'nın bir içbükey fonksiyonudur

**alt sınır özelliği:**  $p^* \geq -(1/4)\nu^T A A^T \nu - b^T \nu \quad \forall \nu$

# Lagrange dual fonksiyonu

örnek: doğrusal program (standart form)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize}_{x \in \mathbb{R}^n} & c^T x \\ \text{bağlı} & Ax = b, \quad x \succeq 0 \end{array}$$

## dual fonksiyon

- Lagrangian aşağıdaki şekildedir

$$\begin{aligned} L(x, \lambda, \nu) &= c^T x + \nu^T (Ax - b) - \lambda^T x \\ &= -b^T \nu + (c + A^T \nu - \lambda)^T x \end{aligned}$$

- $L$   $x$ 'e göre afindır, dolayısıyla

$$g(\lambda, \nu) = \inf_x L(x, \lambda, \nu) = \begin{cases} -b^T \nu & c + A^T \nu - \lambda = 0 \\ -\infty & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$g, \{(\lambda, \nu) \mid c + A^T \nu - \lambda = 0\}$  afin tanım kümesi üzerinde doğrusaldır, dolayısıyla içbükeydir

**alt sınır özelliği:**  $A^T \nu + c \succeq 0$  ise  $p^* \geq -b^T \nu$

## Lagrange dual problemi

$$\underset{\lambda, \nu}{\text{maksimize}} \quad g(\lambda, \nu)$$

- $p^*$ 'nin en iyi alt sınırını belirler, Lagrange dual fonksiyonu ile bulunur
  - bir dışbükey optimizasyon problemidir; optimal değer  $d^*$
  - $\lambda \succeq 0$ ,  $(\lambda, \nu) \in \text{dom } g$  ise  $\lambda, \nu$  dual olanaklıdır
  - $(\lambda, \nu) \in \text{dom } g$  örtük kısıtı açık hale getirilerek genellikle basitleşir

**örnek: standart formlu LP ve dual problemi**

$$\begin{array}{ll} \text{minimize}_{x \in \mathbb{R}^n} & c^T x \\ \text{ba\c{g}l\u{u}} & Ax = b \\ & x \succeq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{maksimize}_{\nu} & - b^T \nu \\ \text{ba\u011flu} & A^T \nu + c \succeq 0 \end{array}$$

# Zayıf ve güçlü dualite

**zayıf (*weak*) dualite:**  $d^* \leq p^*$  (dualite açığı (*gap*) =  $p^* - d^*$ )

- ▶ daima sağlanır (dışbükey ve dışbükey-olmayan problemler için)
- ▶ zor problemler için aşikar olmayan (*nontrivial*) alt sınırlar bulmak için kullanılabilir

**güçlü (*strong*) dualite:**  $d^* = p^*$  (dualite açığı = 0)

- ▶ genel olarak sağlanmaz
- ▶ dışbükey problemler için (genellikle) sağlanır
- ▶ dışbükey problemlerde güçlü dualiteyi garanti eden şartlara **kısıt yeterlilikleri** (*constraint qualifications*) denir

# Slater kısıt yeterliliği

$$\begin{array}{ll}\text{minimize}_{x \in \mathbb{R}^n} & f_0(x) \\ \text{bağlı} & f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \\ & Ax = b\end{array}$$

olarak verilen bir dışbükey problem için, problem kesin olanaklı (*strictly feasible*) ise, yani

$$\exists x \in \text{int } \mathcal{D} : \quad f_i(x) < 0 \ (i = 1, \dots, m), \quad Ax = b$$

şartı sağlanıyorsa, güçlü dualite sağlanır

- ▶ Slater kısıt yeterliliğinin sağlanması dual optimuma erişilmesini ( $p^* > -\infty$  ise) garanti eder
- ▶ başka birçok farklı kısıt yeterliliği mevcuttur

# Örnek: Eşitsizlik formlu LP

## birincil (*primal*) problem

$$\begin{array}{ll} \text{minimize}_{x \in \mathbb{R}^n} & c^T x \\ \text{bağlı} & Ax \preceq b \end{array}$$

## dual fonksiyon

$$g(\lambda) = \inf_x \left( (c + A^T \lambda)^T x - b^T \lambda \right) = \begin{cases} -b^T \lambda & A^T \lambda + c = 0 \\ -\infty & \text{aksi halde} \end{cases}$$

## dual problem

$$\begin{array}{ll} \text{maksimize}_{\lambda} & -b^T \lambda \\ \text{bağlı} & A^T \lambda + c = 0, \quad \lambda \succeq 0 \end{array}$$

- Slater şartından: bazı  $\tilde{x}$  için  $A\tilde{x} \prec b$  ise  $p^* = d^*$
- $p^* = d^*$  (birincil ve dual problemlerin olanaksız olduğu durum hariç) sağlanır

## Örnek: QP

**birincil problem** ( $P \in \mathbb{S}_{++}^n$  varsayılmı)

$$\begin{array}{ll}\text{minimize}_{x \in \mathbb{R}^n} & x^T Px \\ \text{bağlı} & Ax \preceq b\end{array}$$

## dual fonksiyon

$$g(\lambda) = \inf_x \left( x^T Px + \lambda^T (Ax - b) \right) = -\frac{1}{4} \lambda^T AP^{-1} A^T \lambda - b^T \lambda$$

## dual problem

$$\begin{array}{ll}\text{maksimize}_{\lambda} & -(1/4) \lambda^T AP^{-1} A^T \lambda - b^T \lambda \\ \text{bağlı} & \lambda \succeq 0\end{array}$$

- Slater şartından: bazı  $\tilde{x}$  için  $A\tilde{x} \prec b$  ise  $p^* = d^*$
- $p^* = d^*$  daima sağlanır

## Sınav sorusu örneği

**Soru** Aşağıda bir dışbükey optimizasyon problemi verilmiştir ( $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m < n$ ).

$$\begin{aligned} & \underset{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m}{\text{minimize}} && a^T x + \mathbf{1}^T \exp(y) \\ & \text{bağlı} && x \preceq 0, \quad Bx = y \end{aligned}$$

**Soru a)** Problemin Lagrangian'ını bulunuz. Birincil ve dual değişkenlerin tanım kümelerini belirtiniz.

**Çözüm a)**

$$\begin{aligned} L(x, y, \lambda, \nu) &= a^T x + \mathbf{1}^T \exp(y) + \lambda^T x + \nu^T (Bx - y) \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^n, \quad \nu \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

# Sınav sorusu örneği (devam)

**Soru b)** Problem için KKT şartlarını yazınız.

## Çözüm b)

1. birincil olanaklılık:  $x \preceq 0$ ,  $Bx = y$
2. dual olanaklılık:  $\lambda \succeq 0$
3. tümleyici gevşeklik:  $\lambda_i x_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$
4. durağanlık:

$$\nabla_{x,y} L(x, y, \lambda, \nu) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{\partial L}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + \lambda + B^T \nu \\ \exp(y) - \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\lambda = -a - B^T \nu \quad y = \log(\nu)$$

## Sınav sorusu örneği (devam)

**Soru c)** Problemin Lagrange dual fonksiyonunu bulunuz.

**Çözüm c)**

$$L(x, y, \lambda, \nu) = a^T x + \mathbf{1}^T \exp(y) + \lambda^T x + \nu^T (Bx - y)$$

$$L(x, y, \lambda, \nu) = x^T(a + \lambda + B^T\nu) + \mathbf{1}^T \exp(y) - \nu^T y$$

$$g(\lambda, \nu) = \begin{cases} \mathbf{1}^T \nu - \nu^T \log(\nu) & \lambda = -a - B^T \nu \\ -\infty & \text{aksi halde} \end{cases}$$

## Sınav sorusu örneği (devam)

**Soru d)** Problemin dual problemini (en sade halde) bulunuz.

**Çözüm d)** Dual problemin tanımı şu şekildedir:

$$\begin{aligned} & \underset{\lambda, \nu}{\text{maksimize}} \quad g(\lambda, \nu) \\ & \text{bağlı} \quad \lambda \succeq 0. \end{aligned}$$

Buradaki  $\lambda \succeq 0$  kısıtını  $g(\lambda, \nu)$ 'nin ifadesindeki  $\lambda = -a - B^T \nu$  kısıtı ile birleştirip  $a + B^T \nu \preceq 0$  olarak yazarak  $\lambda$ 'yı problemden eleyebiliriz. Buradan  $g(\lambda, \nu)$

$$g(\nu) = \begin{cases} \mathbf{1}^T \nu - \nu^T \log(\nu) & a + B^T \nu \preceq 0 \\ -\infty & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak sadeleşir. Dual problem

$$\begin{aligned} & \underset{\nu}{\text{maksimize}} \quad \mathbf{1}^T \nu - \nu^T \log(\nu) \\ & \text{bağlı} \quad a + B^T \nu \preceq 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

## Tümleyici gevşeklik (*complementary slackness*)

güçlü dualitenin sağlandığını varsayalım ( $x^*$  birincil optimal,  $(\lambda^*, \nu^*)$  dual optimal)

$$\begin{aligned} f_0(x^*) &= g(\lambda^*, \nu^*) \\ &= \inf_x \left( f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i^* h_i(x) \right) \\ &\leq f_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x^*) + \sum_{i=1}^p \nu_i^* h_i(x^*) \\ &\leq f_0(x^*) \end{aligned}$$

dolayısıyla, bu iki eşitsizlik eşitlik olarak sağlanır

- $x^* L(x, \lambda^*, \nu^*)$ 'yi minimize eder
- $i = 1, \dots, m$  için  $\lambda_i^* f_i(x^*) = 0$  (tümleyici gevşeklik):

$$\lambda_i^* > 0 \implies f_i(x^*) = 0, \quad f_i(x^*) < 0 \implies \lambda_i^* = 0$$

# Karush-Kuhn-Tucker (KKT) şartları

aşağıdaki dört şarta KKT şartları denir (türevlenebilir  $f_i$  ve  $h_i$  içeren bir problem için):

1. birincil olanaklılık:

$$f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p$$

2. dual olanaklılık:  $\lambda \succeq 0$

3. tümleyici gevşeklik:  $\lambda_i f_i(x) = 0, i = 1, \dots, m$

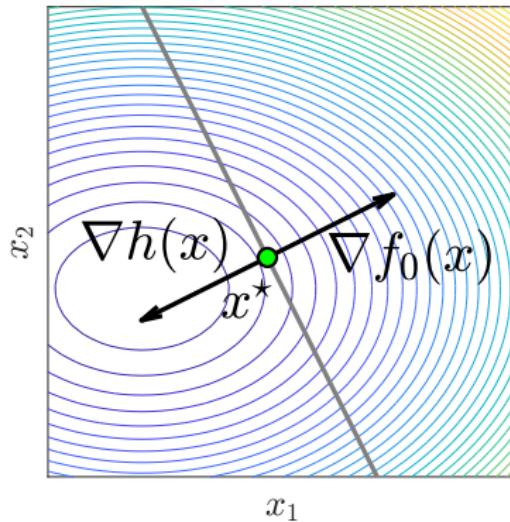
4. durağanlık (*stationarity*):

$$\nabla_x L(x, \lambda, \nu) = \nabla f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i \nabla h_i(x) = 0$$

tümleyici gevşeklikten hareketle: güçlü dualite sağlanıyorsa ve  $x, \lambda, \nu$  optimal ise, bu  $x, \lambda, \nu$  KKT şartlarını sağlamak zorundadır

# Durağanlık şartı (görsel)

$$\begin{array}{ll}\text{minimize}_{x \in \mathbb{R}^2} & f_0(x) = x_1^2 + 2x_2^2 \\ \text{bağlı} & h(x) = -2x_1 - x_2 + 6 = 0\end{array}$$



## Dışbükey problemler için KKT şartları

bir dışbükey problem için  $\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\nu}$  KKT şartlarını sağlıyorsa optimaldir

- ▶ tümleyici gevşeklikten:  $f_0(\tilde{x}) = L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\nu})$
- ▶ durağanlık ve dışbükeylikten:  $g(\tilde{\lambda}, \tilde{\nu}) = L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}, \tilde{\nu})$   
dolayısıyla,  $f_0(\tilde{x}) = g(\tilde{\lambda}, \tilde{\nu})$

**Slater şartı** sağlanıyorsa:

ancak ve ancak KKT şartlarını sağlayan  $\lambda, \nu$  mevcutsa  $x$  optimaldir

- ▶ Slater şartı güçlü dualiteyi ve dual optimumun elde edilmesini gerektirir
- ▶ kısıtsız problemler için  $\nabla f_0(x) = 0$  şeklindeki optimalite şartını genelleştirir

## Sınav sorusu örneği

**Soru 1)** Aşağıda kısıtsız bir karesel programlama problemi verilmiştir.

$$\underset{x \in \mathbb{R}^2}{\text{minimize}} \quad \frac{1}{2} x^T \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix} x$$

Problemin çözümünü bulunuz.

**Çözüm** Amaç fonksiyonu soruda şu şekilde verilmiştir:

$$f_0(x) = \frac{1}{2} x^T \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix} x = \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x$$

## Sınav sorusu örneği (devam)

Kısıtsız optimizasyon problemleri için optimalite şartı:

$\nabla f_0(x) = 0$ .  $f_0(x)$ 'nin gradyanını alırsak :

$$\nabla f_0(x) = Qx + c$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifadeyi sıfıra eşitlersek (bu eşitliği sağlayan  $x$ 'i  $x^*$  olarak göstererek)

$$Qx + c = 0 \longrightarrow x^* = -Q^{-1}c$$

$Q$ 'nun tersi şu şekildedir

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Buradan da  $x^*$

$$x^* = -Q^{-1}c = -\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

## Sınav sorusu örneği

**Soru 2)** Aşağıda bir karesel programlama problemi verilmiştir.

$$\begin{array}{ll}\text{minimize}_{x \in \mathbb{R}^2} & x^T x \\ \text{bağlı} & \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} x = -2\end{array}$$

Problemin çözümünü bulunuz.

**Cözüm** Kısıtlı optimizasyon problemleri için optimalite şartı:

$$\nabla_x L(x, \nu) = 0$$

Lagrangian:  $L(x, \nu) = x_1^2 + x_2^2 + \nu(3x_1 + 5x_2 + 2)$

$$\nabla_x L(x, \nu) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L(x, \nu)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial L(x, \nu)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3\nu \\ 2x_2 + 5\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x^*(\nu) = \begin{bmatrix} -1.5\nu \\ -2.5\nu \end{bmatrix}$$

## Sınav sorusu örneği (devam)

Bulunan  $x^*(\nu)$ ,  $L(x, \nu)$ 'de yerine konarak  $g(\nu)$  elde edilir:

$$g(\nu) = 2.25\nu^2 + 6.25\nu^2 + \nu(-4.5\nu - 12.5\nu + 2) = -8.5\nu^2 + 2\nu$$

$g(\nu)$ 'yu maksimize eden  $\nu$ :

$$\nabla g(\nu) = 0 = -17\nu + 2 \rightarrow \nu^* = 0.1176$$

$\nu^*$ 'yu  $x^*(\nu)$ 'te yerine koyarak  $x^*$ 'i buluruz:

$$x^* = \begin{bmatrix} -1.5\nu^* \\ -2.5\nu^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1765 \\ -0.2941 \end{bmatrix}$$

## Sınav sorusu örneği

**Soru 3)** Aşağıda bir optimizasyon problemi verilmiştir.

$$\underset{x,y}{\text{minimize}} \quad f_0(x,y) = -\log(x) + 0.5y^2$$

$$\text{bağlı} \quad x + y \leq 2$$

**Soru 3a)** Hessian'ı kullanarak amaç fonksiyonunun dışbükey olup olmadığını gösteriniz.

**Çözüm 3a)**

$$\text{Hessian: } \nabla^2 f_0(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_0(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f_0(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f_0(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f_0(x,y)}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Hessian'ın özdeğerleri: } \lambda_1 = \frac{1}{x^2} \quad \lambda_2 = 1$$

Bu özdeğerler  $f_0(x,y)$ 'in tanım kümesinde pozitiftir (not:  $f(x) = \log(x)$  için  $\text{dom } f = \mathbb{R}_{++}$ )  $\rightarrow$  Hessian pozitif tanımlıdır  $\rightarrow f_0(x,y)$  dışbükeydir

## Sınav sorusu örneği (devam)

**Soru 3b)** Problemin Lagrangian'ını yazınız.

**Çözüm 3b)**

$$\text{Lagrangian: } L(x, y, \lambda) = -\log(x) + 0.5y^2 + \lambda(x + y - 2)$$

## Sınav sorusu örneği (devam)

**Soru 3c)** Problemin Lagrange dual fonksiyonunu yazınız.

**Çözüm 3c)**

Lagrange dual fonksiyonu:  $g(\lambda) \triangleq \underset{x,y}{\text{minimize}} L(x, y, \lambda)$

Kısıtsız optimizasyon problemi  $\rightarrow$  gradyan 0'a eşitlenerek çözülür

$$\nabla_{x,y} L(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x} \\ \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/x + \lambda \\ y + \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\rightarrow x^*(\lambda) = \frac{1}{\lambda}, y^*(\lambda) = -\lambda$$

Bulunan  $x^*(\lambda)$  ve  $y^*(\lambda)$ ,  $L(x, y, \lambda)$ 'de yerine konarak Lagrange dual fonksiyonu elde edilir:

$$g(\lambda) = \log(\lambda) - 0.5\lambda^2 - 2\lambda + 1$$

## Sınav sorusu örneği (devam)

**Soru 3d)** Problemin birincil ve dual çözümünü bulunuz.

**Çözüm 3d)** Dual çözüm

$$\begin{array}{ll}\text{maksimize}_\lambda & g(\lambda) \\ \text{bağlı} & \lambda \geq 0\end{array}$$

ile verilen dual problem çözülerek bulunur. Bunun için  $g(\lambda)$ 'nın türevi 0'a eşitlenir

$$\nabla g(\lambda) = 0 = \frac{1}{\lambda} - \lambda - 2 \quad \rightarrow \quad -\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

## Sınav sorusu örneği (devam)

Buradaki karesel denklemin  $\lambda = -1 \pm \sqrt{2}$  ile verilen çözümlerinden  $\lambda^* = -1 + \sqrt{2}$  dual çözüm olarak seçilir ( $\lambda \geq 0$  kısıtından dolayı çözüm  $-1 - \sqrt{2}$  olamaz).

Birincil çözüm, dual çözüm c)'de bulunan  $x^*(\lambda)$  ve  $y^*(\lambda)$  ifadelerinde yerine konarak bulunur:

$$x^* = \frac{1}{-1 + \sqrt{2}}, \quad y^* = 1 - \sqrt{2}$$

# Bölüm 13

## Optimizasyon algoritmaları

## Alt Bölüm 1

### Kısıtsız optimizasyon

# Kısıtsız optimizasyon problemleri

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad f(x)$$

- ▶  $f$  dışbükey, iki kere sürekli türevlenebilir (*twice continuously differentiable*) (dolayısıyla  $\text{dom } f$  açık küme)
- ▶ optimal değer  $p^* = \inf_x f(x)$ 'e erişildiğini ve  $p^*$ 'nin sonlu olduğunu varsayıyoruz

## kısıtsız optimizasyon yöntemleri

- ▶ amaç:  $f(x^{(k)}) \rightarrow p^*$  olmasını sağlayan  $x^{(k)} \in \text{dom } f$ ,  $k = 0, 1, \dots$  noktalar dizisini oluşturmak
- ▶ bu yöntemler, optimalite şartını ( $\nabla f(x^*) = 0$ ) çözmek için yinelemeli (*iterative*) yöntemler olarak yorumlanabilir

# İniş yöntemleri (*descent methods*)

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + t^{(k)} \Delta x^{(k)} \quad (f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)}))$$

- ▶ diğer notasyonlar:  $x^+ = x + t\Delta x$ ,  $x := x + t\Delta x$
- ▶  $\Delta x$ 'e adım yönü (*step direction*) veya arama yönü (*search direction*) denir.  $t$ 'ye adım boyu (*step size*) veya adım uzunluğu (*step length*) denir.
- ▶ dışbükeylikten dolayı,  $f(x^+) < f(x)$  olması  $\nabla f(x)^T \Delta x < 0$  olmasını gerektirir; yani,  $\Delta x$  bir iniş yönündür (*descent direction*)

# Genel iniş yöntemi (algoritma)

**verilenler:** başlangıç noktası  $x \in \text{dom } f$

- tekrarla:**
- 1) bir iniş yönü  $\Delta x$  belirle
  - 2) doğru arama: adım boyu  $t > 0$ 'yi seç
  - 3) güncelle:  $x := x + t\Delta x$

**dur:** sonlandırma kriteri sağlandığında

# Doğru arama (*line search*) yöntemleri

## 1) tam (*exact*) doğru arama

$$t = \operatorname{argmin}_{t>0} f(x + t\Delta x)$$

## 2) geriye dönüslü (*backtracking*) doğru arama

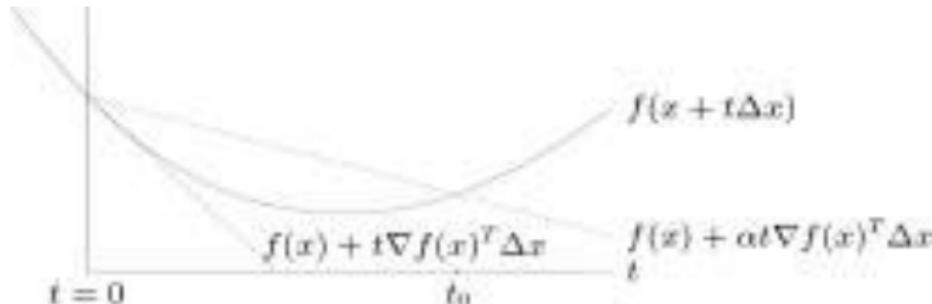
(parametreler:  $\alpha \in (0, 1/2)$ ,  $\beta \in (0, 1)$ )

- ▶  $t = 1$ 'den başla,

$$f(x + t\Delta x) < f(x) + \alpha t \nabla f(x)^T \Delta x$$

olana kadar  $t := \beta t$  işlemini tekrarla

- ▶ görsel yorum:  $t \leq t_0$  olana kadar geriye dönüş yap



# Gradyan iniş yöntemi (algoritma)

$\Delta x = -\nabla f(x)$  ile genel iniş yöntemi

**verilenler:** başlangıç noktası  $x \in \text{dom } f$

- tekrarla:**
- 1)  $\Delta x := -\nabla f(x)$
  - 2) doğru arama: tam veya geriye dönüşlü doğru arama ile adım boyu  $t$ 'yi seç
  - 3) güncelle:  $x := x + t\Delta x$

**dur:** sonlandırma kriteri sağlandığında

## Gradyan iniş yöntemi

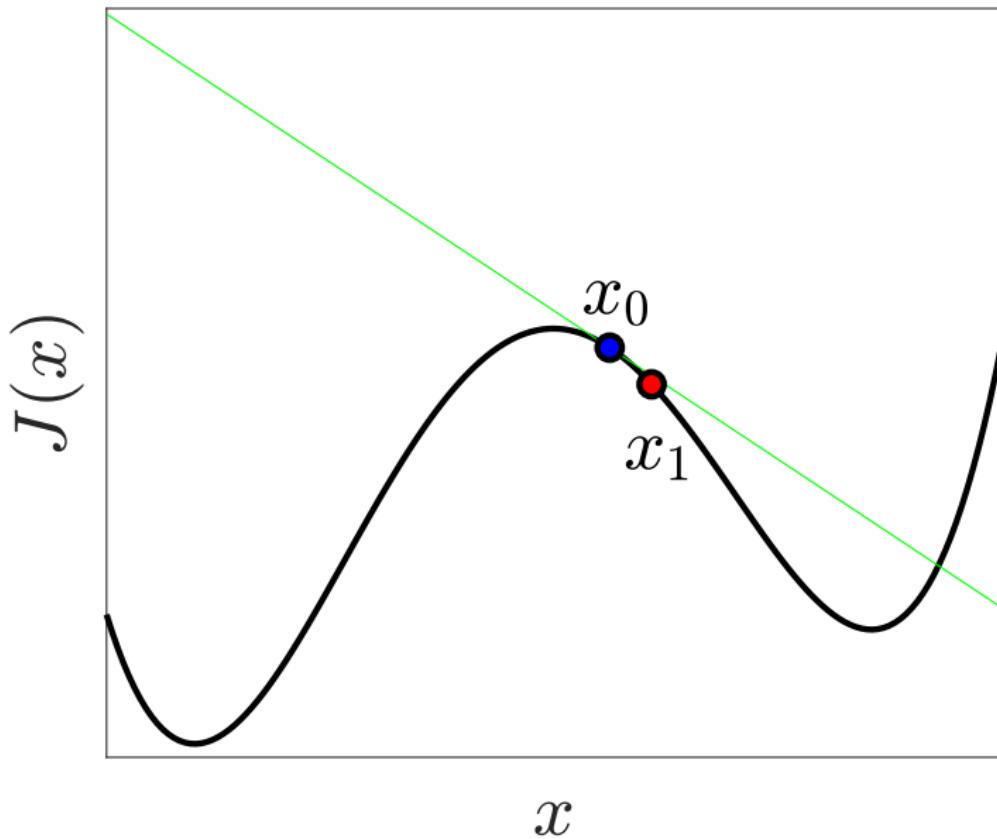
- ▶ sonlandırma kriteri genellikle  $\|\nabla f(x)\|_2 \leq \epsilon$  formundadır
- ▶ yakınsama (*convergence*) özelliği: güçlü dışbükey  $f$  (yani,  $\forall x \in S$  için  $\nabla^2 f(x) \succeq mI$  ifadesini sağlayan  $m > 0$  mevcut) için

$$f(x^{(k)}) - p^* \leq c^k(f(x^{(0)}) - p^*)$$

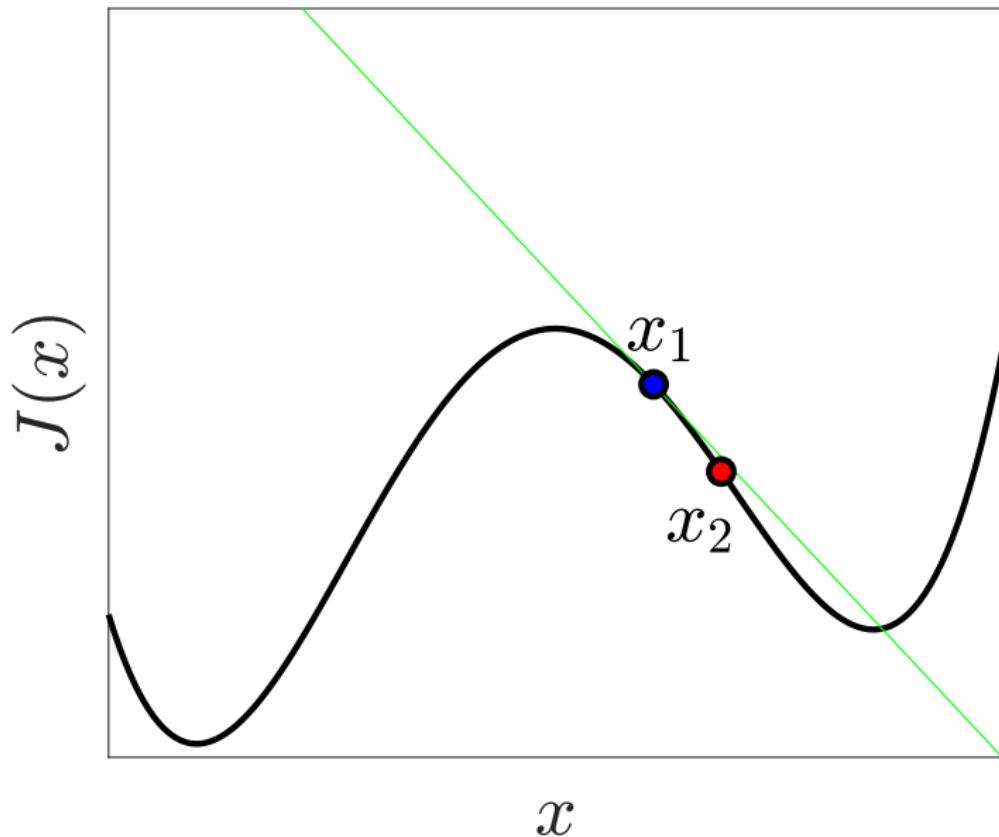
$c \in (0, 1)$   $m$ ,  $x^{(0)}$  ve doğru arama yöntemine bağlıdır

- ▶ çok basittir ancak genellikle çok yavaştır; uygulamada standart haliyle nadiren kullanılır
- ▶ varyantları makina öğrenmesi ve veri analizi gibi çok yüksek boyutlu problemlerle uğraşılan alanlarda çok yaygın olarak kullanılır

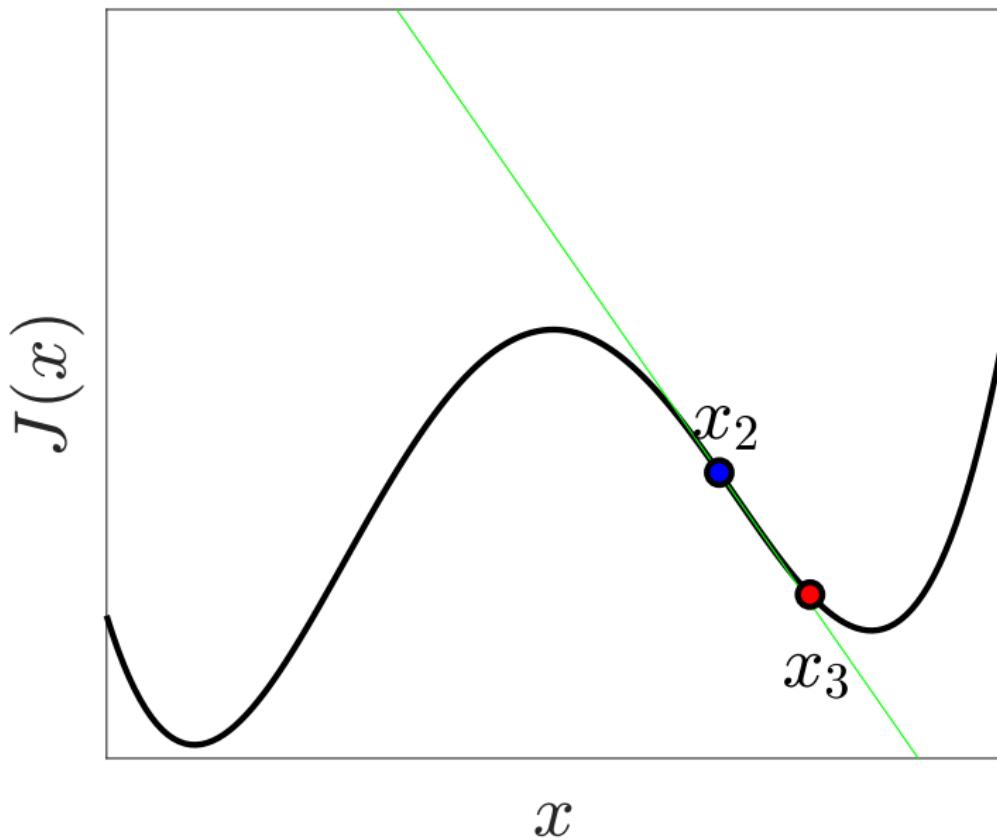
## Gradyan iniş yöntemi - Örnek 1



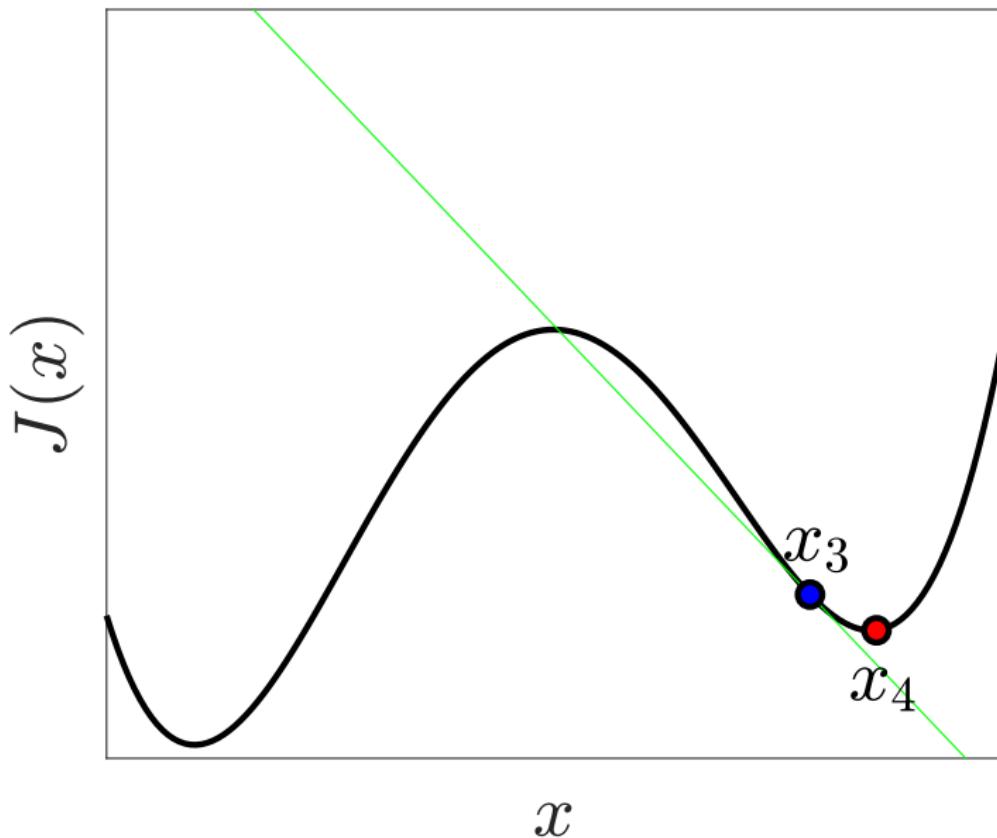
## Gradyan iniş yöntemi - Örnek 1



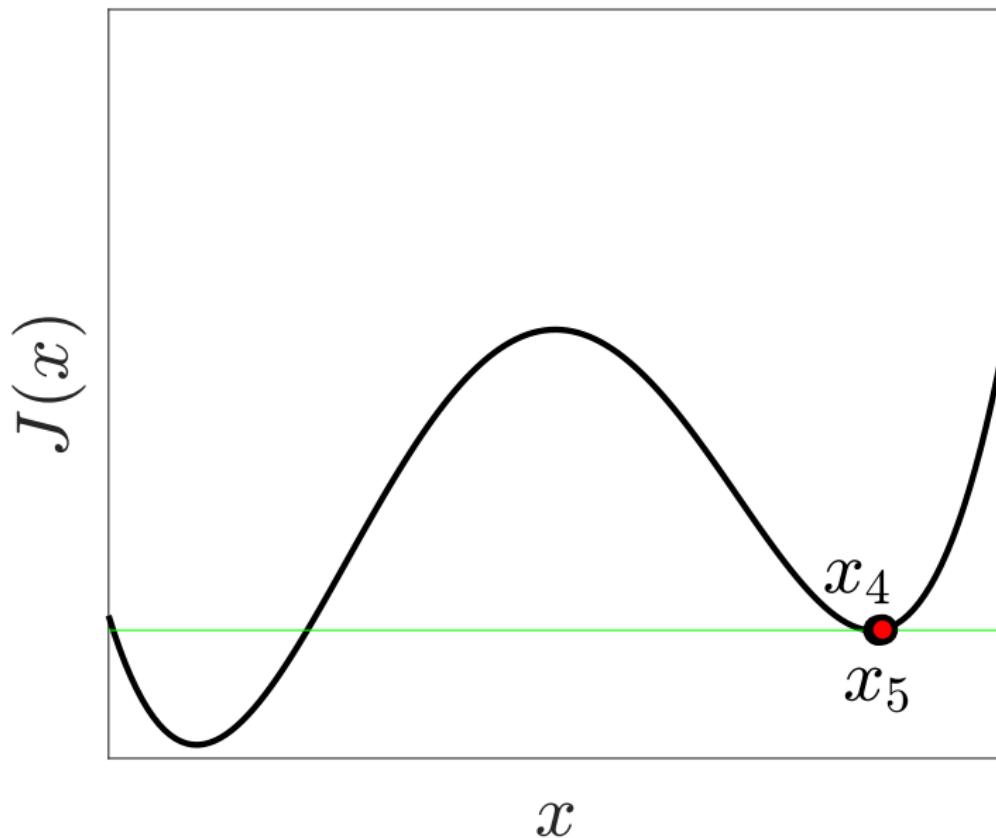
## Gradyan iniş yöntemi - Örnek 1



## Gradyan iniş yöntemi - Örnek 1



## Gradyan iniş yöntemi - Örnek 1



## Gradyan iniş yöntemi - Örnek 2

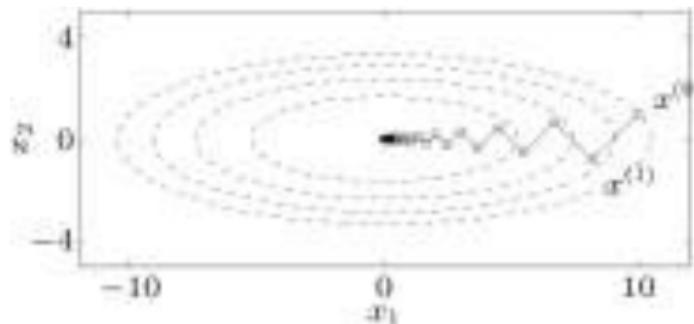
$\mathbb{R}^2$ 'de karesel problem

$$f(x) = (1/2)(x_1^2 + \gamma x_2^2) \quad (\gamma > 0)$$

tam doğru arama ve  $x^{(0)} = \begin{bmatrix} \gamma \\ 1 \end{bmatrix}$  başlangıç noktası ile:

$$x_1^{(k)} = \gamma \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^k, \quad x_2^{(k)} = \left( -\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right)^k$$

- $\gamma \gg 1$  veya  $\gamma \ll 1$  için çok yavaştır
- $\gamma = 10$  için örnek:



# Newton yöntemi

$$\Delta x_{nt} = -\nabla^2 f(x)^{-1} \nabla f(x)$$

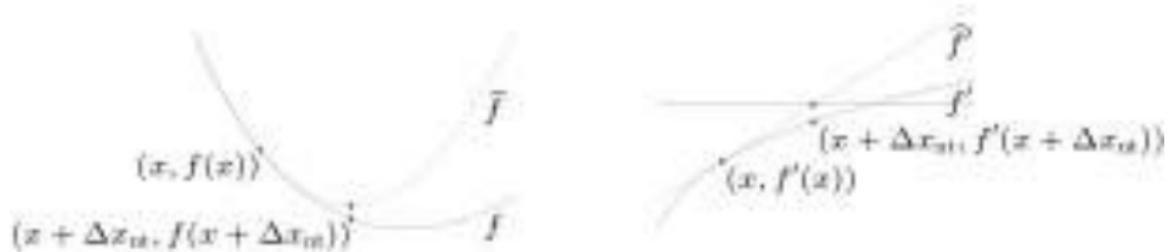
yöntemin yorumlanması:

- 1)  $x + \Delta x_{nt}$ ,  $f(x)$ 'in ikinci derece yaklaşıklığını (*second order approximation*) minimize eder

$$\hat{f}(x + v) = f(x) + \nabla f(x)^T v + \frac{1}{2} v^T \nabla^2 f(x) v$$

- 2)  $x + \Delta x_{nt}$ , doğrusallaştırılmış optimalite şartını çözer

$$\nabla f(x + v) \approx \nabla \hat{f}(x + v) = \nabla f(x) + \nabla^2 f(x)v = 0$$



# Newton yöntemi (algoritma)

**verilenler:** başlangıç noktası  $x \in \text{dom } f$ , tolerans  $\epsilon > 0$

**tekrarla:** 1) Newton adımını ve azalımını hesapla

$$\Delta x_{nt} := -\nabla^2 f(x)^{-1} \nabla f(x)$$

$$\lambda^2 := \nabla f(x)^T \nabla^2 f(x)^{-1} \nabla f(x)$$

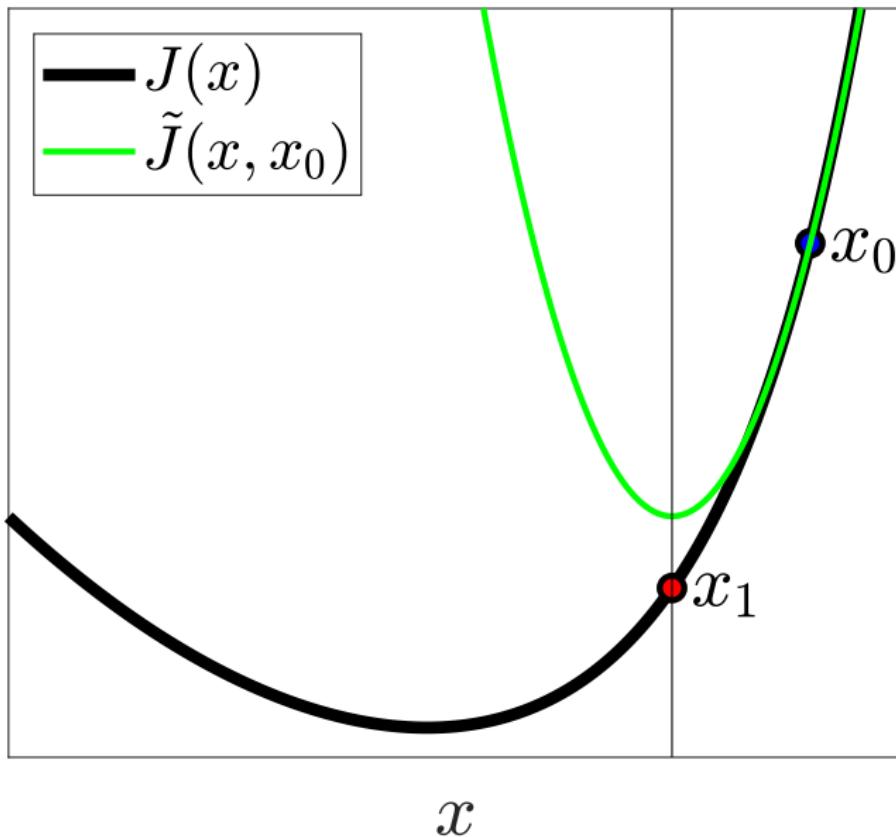
2) Sonlandırma kriteri.  $\lambda^2/2 \leq \epsilon$  ise **dur.**

3) Doğru arama. Geriye dönüşlü doğru  
arama ile adım boyu  $t$ 'yi seç.

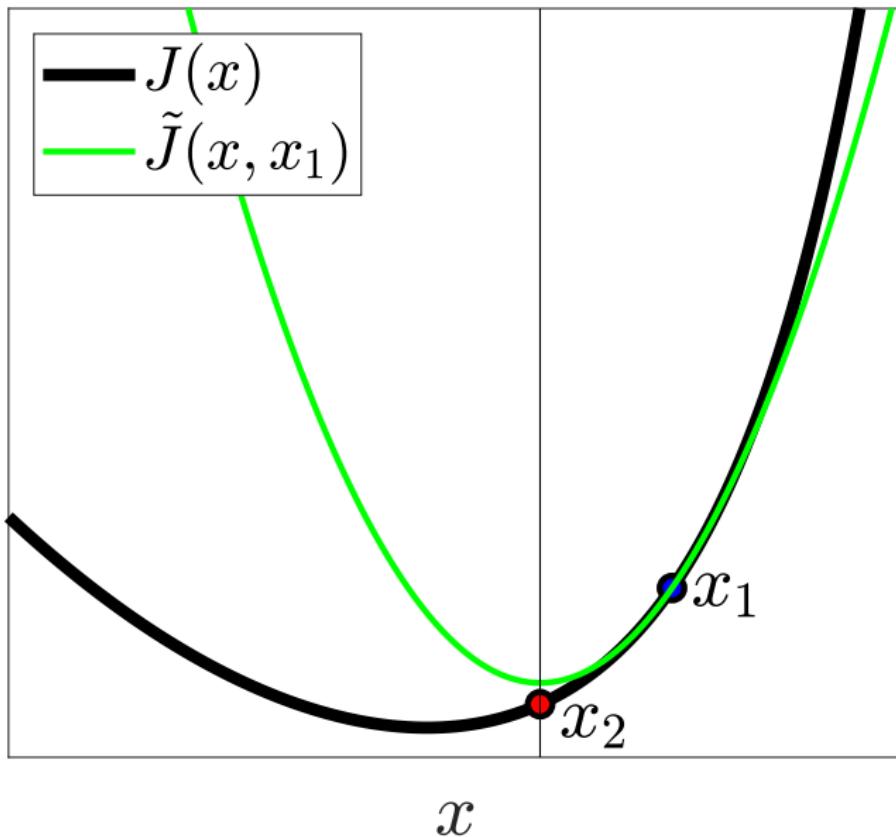
4) Güncelle:  $x := x + t\Delta x_{nt}$

afin değişimsizdir (*affine invariant*) (yani, doğrusal koordinat  
değişimlerinden bağımsızdır):  $\tilde{f}(y) = f(Ty)$  için  
( $y^{(0)} = T^{-1}x^{(0)}$  başlangıç noktası ile) Newton yineleme  
noktaları (*iterate*)  $y^{(k)} = T^{-1}x^{(k)}$  şeklindedir

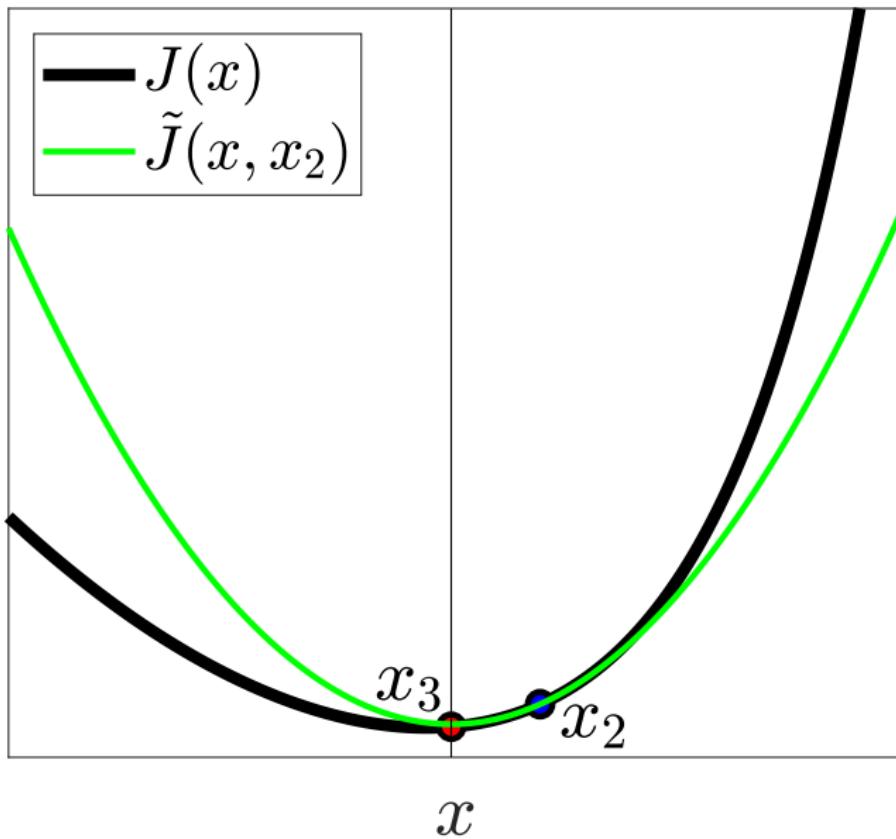
# Newton yöntemi - Örnek



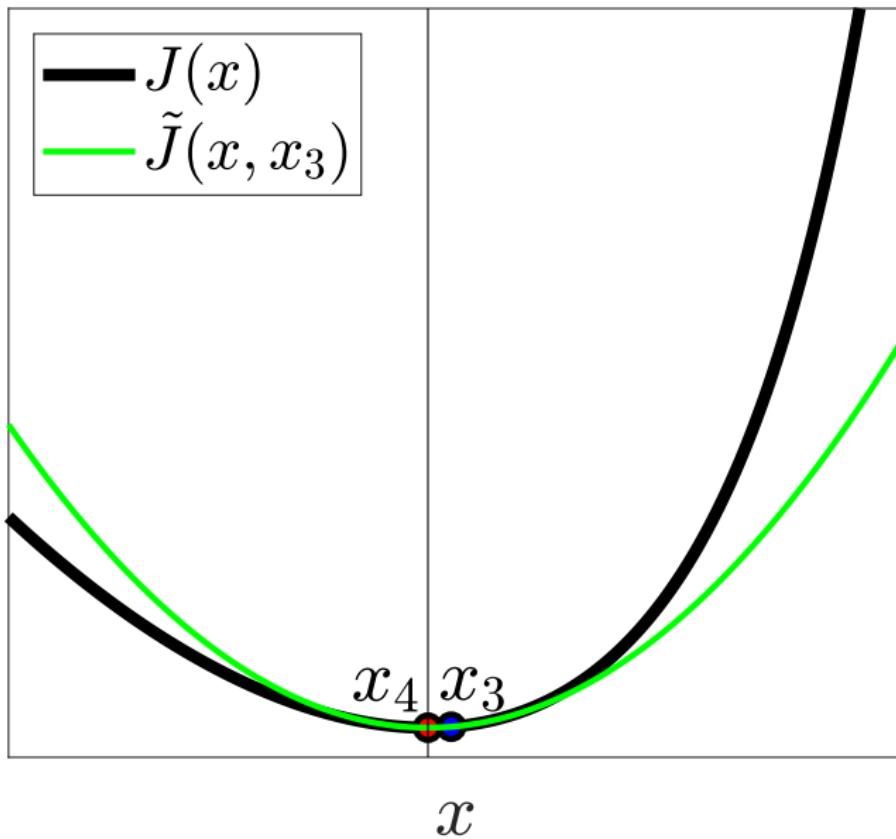
# Newton yöntemi - Örnek



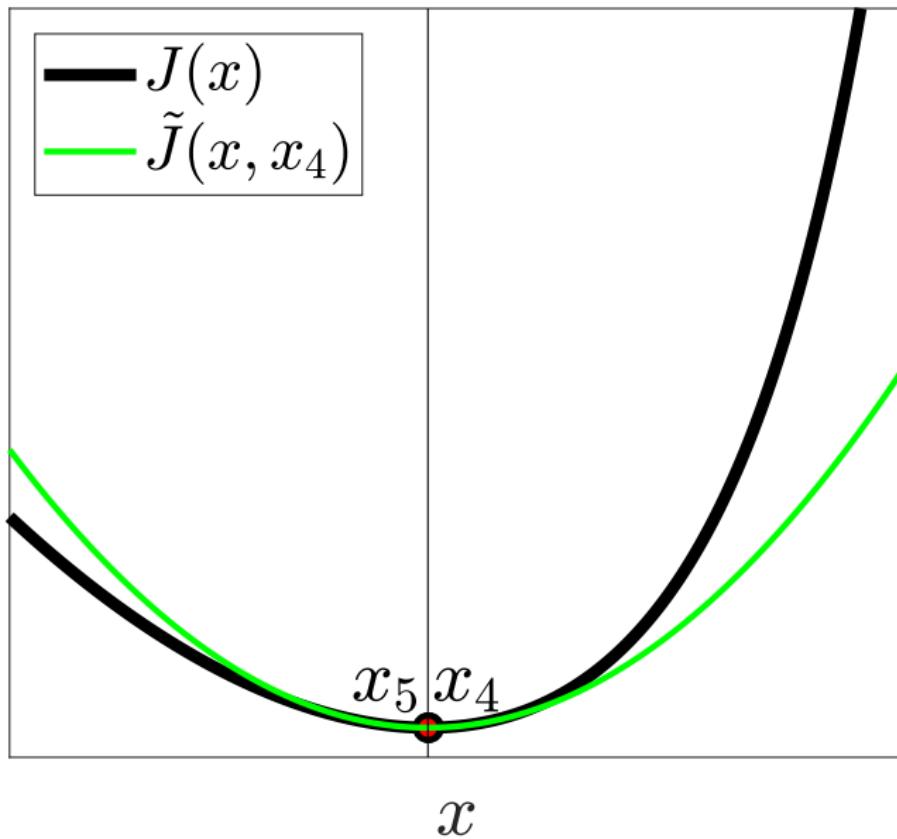
# Newton yöntemi - Örnek



# Newton yöntemi - Örnek



# Newton yöntemi - Örnek



## Alt Bölüm 2

Eşitlik kısıtlı optimizasyon

# Eşitlik kısıtlı optimizasyon problemleri

$$\begin{array}{ll}\text{minimize}_{x \in \mathbb{R}^n} & f(x) \\ \text{bağlı} & Ax = b\end{array}$$

- $f$  dışbükey, iki kere sürekli türevlenebilir
- $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$  ( $\text{rank}(A) = p$ )
- optimal değer  $p^*$ 'e erişildiğini ve  $p^*$ 'nin sonlu olduğunu varsayıyoruz

**optimalite şartları:** ancak ve ancak

$$\nabla f(x^*) + A^T \nu^* = 0, \quad Ax^* = b$$

sartlarını sağlayan bir  $\nu^*$  mevcutsa  $x^*$  optimaldir

# Eşitlik kısıtlı optimizasyon problemleri

örnek: eşitlik kısıtlı karesel program (QP) ( $P \in \mathbb{S}_+^n$ )

$$\begin{array}{ll} \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} & (1/2)x^T Px + q^T x + r \\ \text{bağlı} & Ax = b \end{array}$$

optimalite şartı:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}}_{\text{KKT matrisi}} \begin{bmatrix} x^* \\ \nu^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q \\ b \end{bmatrix}$$

- bu denklem takımına problemin **KKT sistemi** denir
- ancak ve ancak

$$Ax = 0, \quad x \neq 0 \quad \implies \quad x^T Px > 0$$

ise (yani,  $P$   $A$ 'nın sıfır uzayında pozitif tanımlı ise) KKT matrisi tekil-olmayandır

- tekil olmama için denk şart:  $P + A^T A \succ 0$

# Eşitlik kısıtlı Newton yöntemi

## Newton adımı

$f$  için, olanaklı  $x$ 'te Newton adımı  $\Delta x_{nt}$

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 f(x) & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f(x) \\ 0 \end{bmatrix}$$

denkleminin çözümü  $v$  olarak hesaplanır

## yorumlar

- $\Delta x_{nt}$  ikinci derece yaklaşıklığın çözümüdür

$$\boxed{\begin{array}{ll} \underset{v}{\text{minimize}} & f(x) + \nabla f(x)^T v + (1/2)v^T \nabla^2 f(x)v \\ \text{bağlı} & A(x + v) = b \end{array}}$$

- $\Delta x_{nt}$  doğrusallaştırılmış optimalite şartlarının çözümüdür

$$\nabla f(x + v) + A^T w \approx \nabla f(x) + \nabla^2 f(x)v + A^T w = 0, \quad A(x + v) = b$$

# Eşitlik kısıtlı Newton yöntemi (algoritma)

**verilenler:** başlangıç noktası  $x \in \text{dom } f$  ve  $Ax = b$ ,  
tolerans  $\epsilon > 0$

- tekrarla:**
- 1) Newton adımı  $\Delta x_{nt}$ 'i ve  $\lambda(x)$ 'i hesapla.
  - 2) Sonlandırma kriteri.  $\lambda^2/2 \leq \epsilon$  ise **dur**.
  - 3) Doğru arama. Geriye dönüşlü doğru  
arama ile adım boyu  $t$ 'yi seç.
  - 4) Güncelle:  $x := x + t\Delta x_{nt}$

- Newton azalımı:  
$$\lambda(x) = (\Delta x_{nt}^T \nabla^2 f(x) \Delta x_{nt})^{1/2} = (-\nabla f(x)^T \Delta x_{nt})$$
- olanaklı (*feasible*) bir iniş yöntemidir:  $x^{(k)}$  olanaklı ve  
 $f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)})$
- afin değişimsizdir

## Alt Bölüm 3

İç nokta yöntemleri

## Eşitsizlik kısıtlı optimizasyon problemleri

$$\begin{array}{ll}\text{minimize}_{x \in \mathbb{R}^n} & f_0(x) \\ \text{bağlı} & f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \\ & Ax = b\end{array} \quad (7)$$

- ▶  $f_i$  dışbükey, iki kere sürekli türevlenebilir
- ▶  $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$  ( $\text{rank}(A) = p$ )
- ▶ optimal değer  $p^*$ 'ye erişildiğini ve  $p^*$ 'nin sonlu olduğunu varsayıyoruz
- ▶ problemin kesin olanaklı olduğunu varsayıyoruz, yani

$$\tilde{x} \in \text{dom } f_0, \quad f_i(\tilde{x}) < 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad A\tilde{x} = b$$

şartlarını sağlayan bir  $\tilde{x}$  mevcuttur. dolayısıyla, güçlü dualite sağlanır ve dual optimuma erişilir

# Logaritmik bariyer

problem (7)'in gösterge (*indicator*) fonksiyonu ile reformülasyonu:

$$\begin{aligned} & \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad f_0(x) + \sum_{i=1}^m I_-(f_i(x)) \\ & \text{bağlı} \quad Ax = b \end{aligned}$$

buradaki  $I_-$   $\mathbb{R}_-$ 'nin gösterge fonksiyonu:

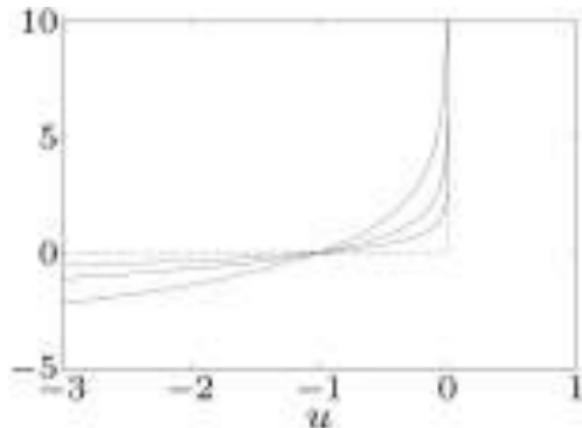
$$I_-(u) = \begin{cases} 0 & u \leq 0 \\ \infty & \text{aksi halde} \end{cases}$$

# Logaritmik bariyer

logaritmik bariyer ile yaklaşırma (*approximation*)

$$\begin{aligned} & \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad f_0(x) - (1/t) \sum_{i=1}^m \log(-f_i(x)) \\ & \text{bağlı} \quad Ax = b \end{aligned}$$

- ▶ bu, bir eşitlik kısıtlı problemdir
- ▶  $t > 0$  için,  $-(1/t)\log(-u)$   $I_-$ 'nın pürüzsüz (*smooth*) yaklaşıklığıdır
- ▶  $t \rightarrow \infty$  ile yaklaşıklık iyileşir



## Merkezi yol (*central path*)

- $t > 0$  için,

$$\begin{array}{ll} \text{minimize}_{x \in \mathbb{R}^n} & tf_0(x) + \phi(x) \\ \text{ba\u0111l\u0111} & Ax = b \end{array}$$

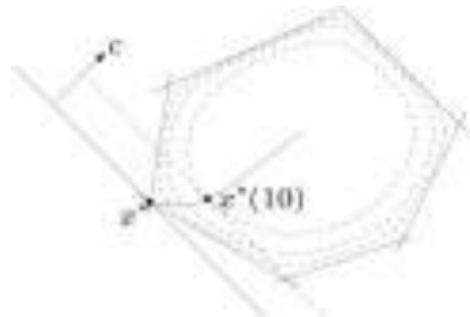
probleminin çözümünü  $x^*(t)$  ile gösterelim ( $x^*(t)$ 'in mevcut olduğunu ve her  $t > 0$  için e\u0111siz olduğunu varsayıyalım)

- merkezi yol:  $\{x^*(t) \mid t > 0\}$

**örnek:** bir LP için merkezi yol

$$\begin{array}{ll} \text{minimize}_{x \in \mathbb{R}^n} & c^T x \\ \text{ba\u0111l\u0111} & a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, 6 \end{array}$$

$c^T x = c^T x^*(t)$  hiperdüzlemi  $x^*(t)$ 'te  $\phi$ 'nin seviye eğrilerine te\u0111ettir



# Merkezi yol

## merkezi yolun KKT şartları yorumu

$x = x^*(t)$ ,  $\lambda = \lambda^*(t)$ ,  $\nu = \nu^*(t)$  aşağıdaki şartları sağlar

1. birincil kısıtlar:  $f_i(x) \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $Ax = b$
2. dual kısıtlar:  $\lambda \succeq 0$
3. yaklaşık tümleyici gevşeklik:  
 $-\lambda_i f_i(x) = 1/t$ ,  $i = 1, \dots, m$
4. durağanlık (Lagrangian'ın  $x$ 'e göre gradyanı sıfır olur):

$$\nabla f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla f_i(x) + A^T \nu = 0$$

bunların KKT şartlarından farkı:  $\lambda_i f_i(x) = 0$  (tümleyici gevşeklik) yerine buradaki 3. şart gelir

# Bariyer yöntemi (algoritma)

## asıl problem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f_0(x)$$

$$\begin{aligned} & \text{bağlı } f_i(x) \leq 0, \\ & i = 1, \dots, m \\ & Ax = b \end{aligned}$$

(8)

## bariyerli versiyon

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} t f_0(x) + \phi(x)$$

$$\text{bağlı } Ax = b$$

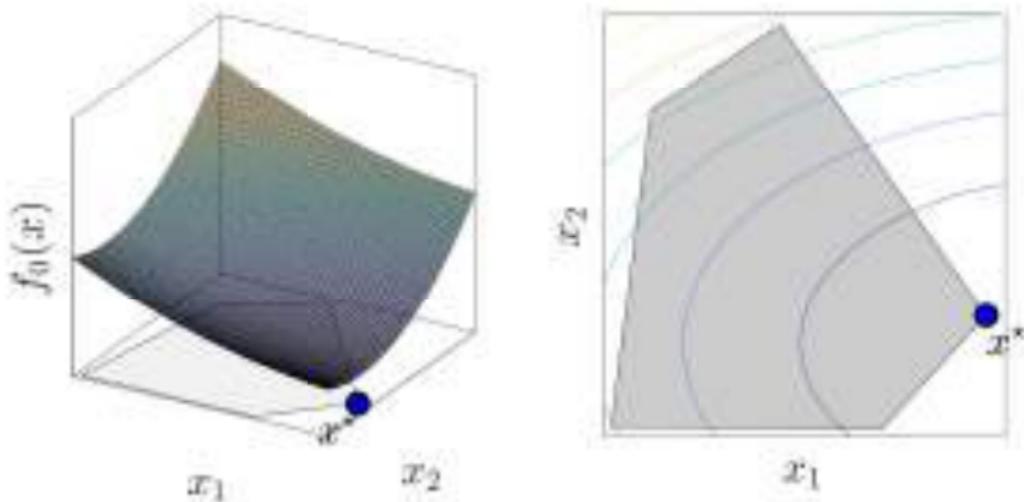
(9)

**verilenler:** kesin olanaklı  $x$ ,  $t := t^{(0)} > 0$ ,  $\mu > 1$ ,  
tolerans  $\epsilon > 0$ .

- tekrarla:**
- 1) Merkezleme adımı. (9) ile verilen problemi  
çözerek  $x^*(t)$ 'i hesapla.
  - 2) Güncelle.  $x := x^*(t)$ .
  - 3) Sonlandırma kriteri.  $m/t < \epsilon$  ise **dur**.
  - 4)  $t$ 'yi artır.  $t := \mu t$ .

## Bariyer yöntemi - Detaylı örnek

$$\begin{aligned} & \underset{x \in \mathbb{R}^2}{\text{minimize}} \quad (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \\ & \text{bağlı} \quad a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$



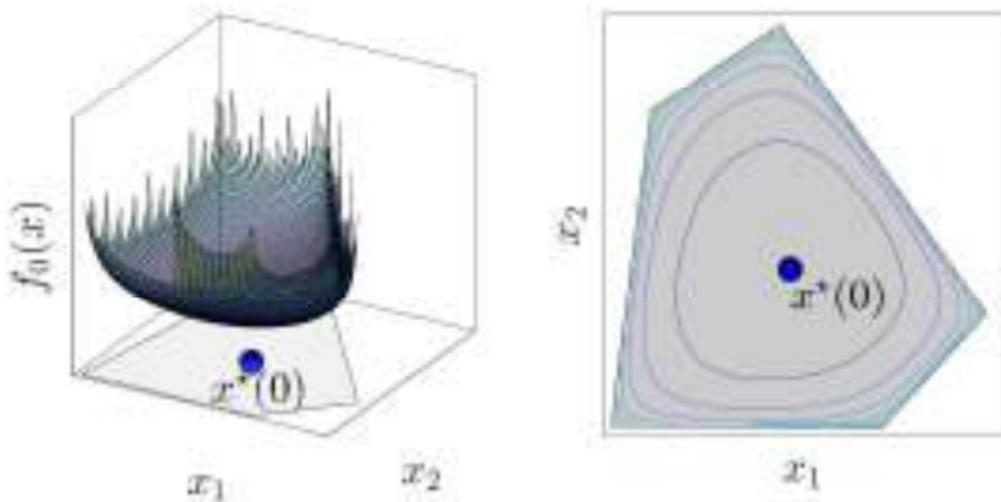
# Bariyer yöntemi - Detaylı örnek

**yineleme 0**

$$\epsilon = 0.01, \mu = 10, m = 5$$

$$x^*(0) = \begin{bmatrix} -0.4644 \\ 0.6236 \end{bmatrix}, t^{(0)} = 0.1$$

sonlandırma kriteri:  $m/t^{(0)} = 50$



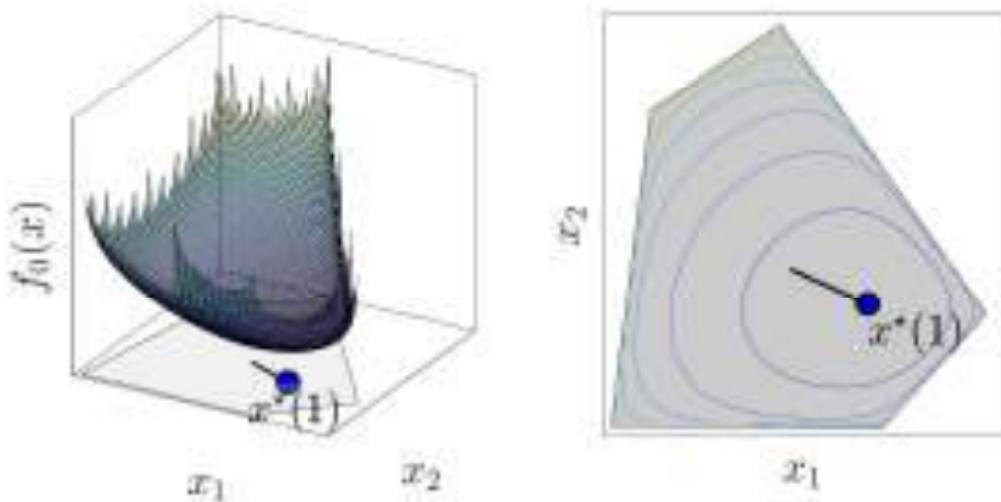
# Bariyer yöntemi - Detaylı örnek

## yineleme 1

$$\epsilon = 0.01, \mu = 10, m = 5$$

$$x^*(1) = \begin{bmatrix} -0.0817 \\ 0.3192 \end{bmatrix}, t^{(1)} = 1$$

sonlandırma kriteri:  $m/t^{(1)} = 5$



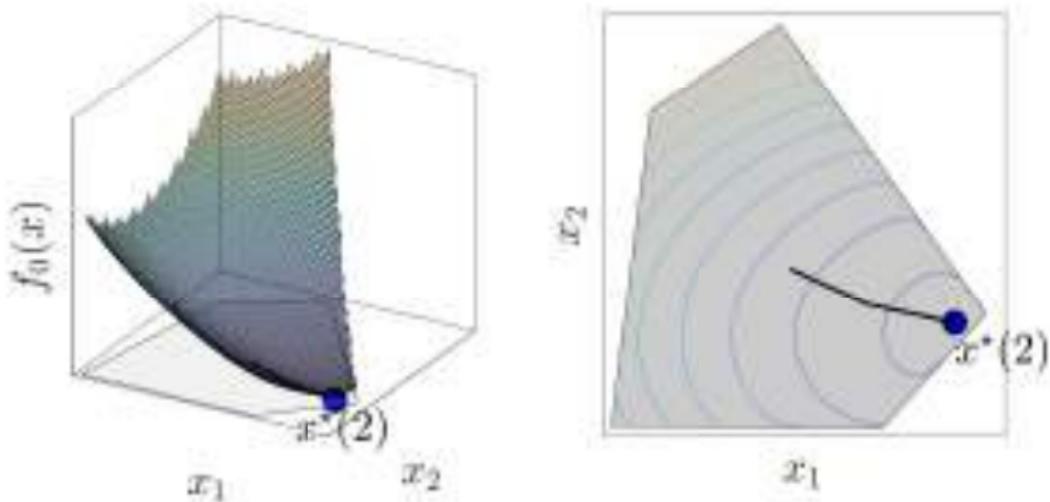
# Bariyer yöntemi - Detaylı örnek

## yineleme 2

$$\epsilon = 0.01, \mu = 10, m = 5$$

$$x^*(2) = \begin{bmatrix} 0.3480 \\ 0.1588 \end{bmatrix}, t^{(2)} = 10$$

sonlandırma kriteri:  $m/t^{(2)} = 0.5$



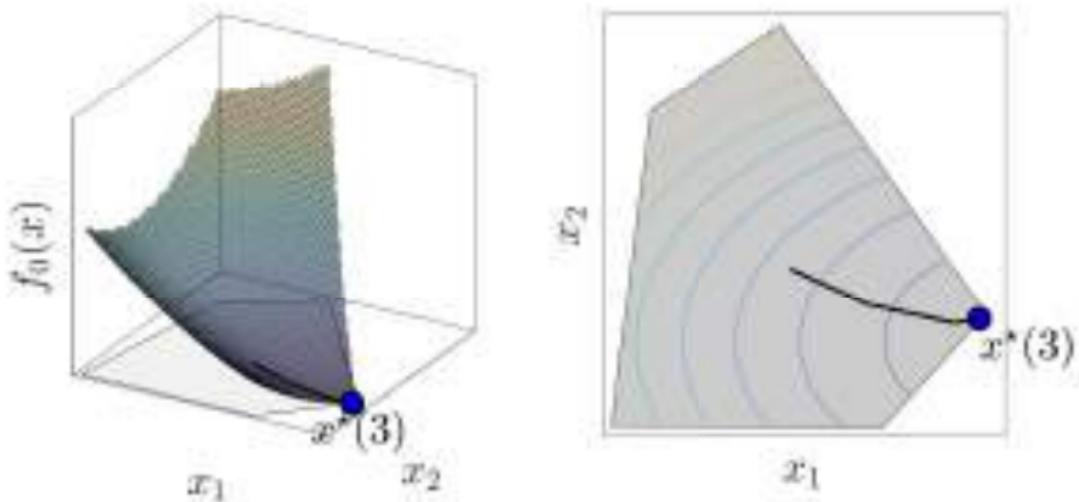
# Bariyer yöntemi - Detaylı örnek

## yineleme 3

$$\epsilon = 0.01, \mu = 10, m = 5$$

$$x^*(3) = \begin{bmatrix} 0.4707 \\ 0.1933 \end{bmatrix}, t^{(3)} = 100$$

sonlandırma kriteri:  $m/t^{(3)} = 0.05$



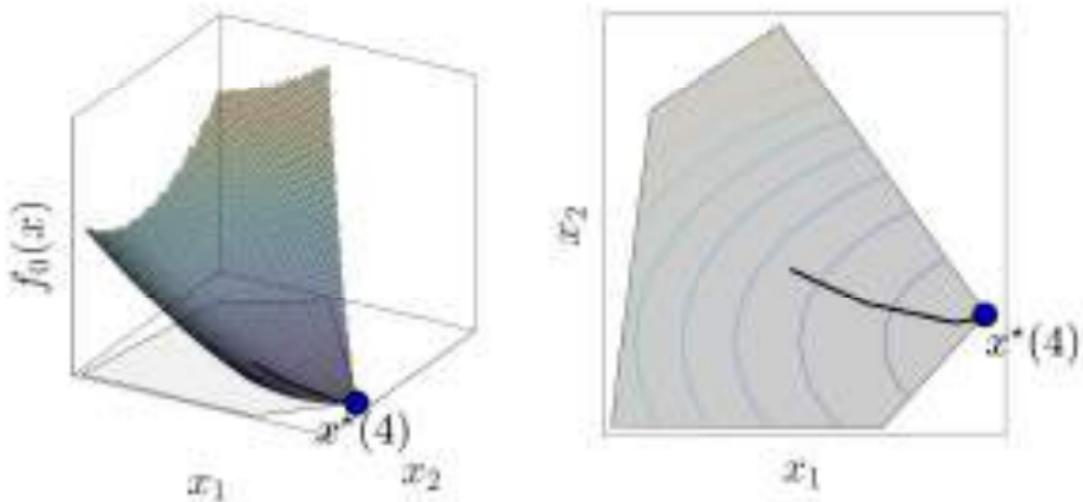
# Bariyer yöntemi - Detaylı örnek

yineleme 4

$$\epsilon = 0.01, \mu = 10, m = 5$$

$$x^*(4) = \begin{bmatrix} 0.4974 \\ 0.2239 \end{bmatrix}, t^{(4)} = 1000$$

sonlandırma kriteri:  $m/t^{(4)} = 0.005 < \epsilon$  (**dur**)



## Bariyer yöntemi

- ▶ algoritma  $f_0(x) - p^* \leq \epsilon$  ile sonlanır (sonlandırma kriteri  $f_0(x^*) - p^* \leq m/t'$ den ileri gelir)
- ▶ merkezleme genellikle Newton yöntemi ile yapılır (o anki yineleme noktası  $x$ 'ten başlanır)
- ▶  $\mu$  parametresinin seçiminde bir ödüntleşme vardır: büyük  $\mu$  daha az harici yineleme ancak daha çok dahili (Newton) yinelemeye neden olur (genellikle  $\mu = 10 \sim 20$  seçilir)
- ▶  $t^{(0)}$ 'nin seçimi için birkaç bulussal yöntem mevcuttur

## Birincil-dual iç nokta yöntemleri (H)

yüksek doğruluk (*accuracy*) gerektiren hallerde bariyer yönteminden daha etkilidir

- ▶ bu yöntemde her yinelemede birincil ve dual değişkenler güncellenir; dahili ve harici yinelemeler arası ayrımlı yoktur
- ▶ genellikle süper-doğrusal (*superlinear*) asimptotik yakınsama gösterir
- ▶ arama yönleri, değiştirilmiş KKT şartları için Newton yönleri olarak yorumlanabilir
- ▶ yöntem olanaksız noktalarda başlayabilir
- ▶ yineleme başına maliyet bariyer yöntemiyle aynıdır
- ▶ iç nokta yöntemlerinin uygulamalarında (genellikle) birincil-dual yöntemler kullanılır

## Kısim IV

# Model Öngörülü Kontrol

## Kısim IV: Model Öngörüülü Kontrol

### 14. Temel kavramlar

Çalışma prensibi

Tasarım

Gerçekleme

### 15. Kararlılık

Kısıtlı sistemlerde kararlılık

Model öngörüülü kontrolde kararlılık

### 16. Uygulamaya dair konular

Yumuşak kısıtlar

Referans izleme

Daimi rejimde hatasız kontrol

### 17. Sınav sorusu örnekleri - Final

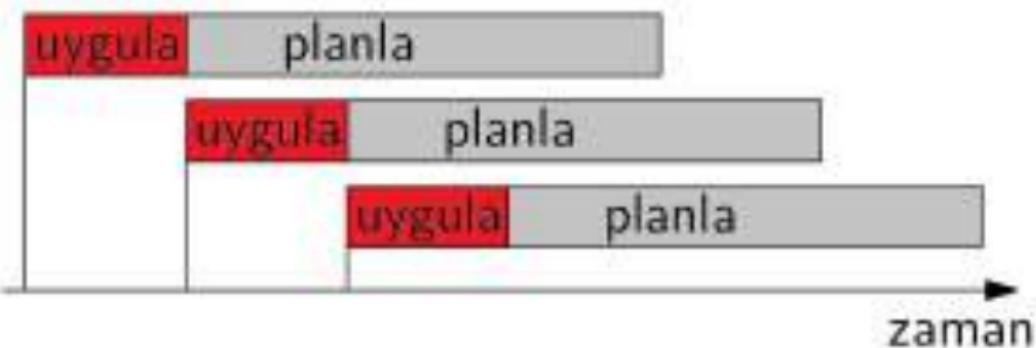
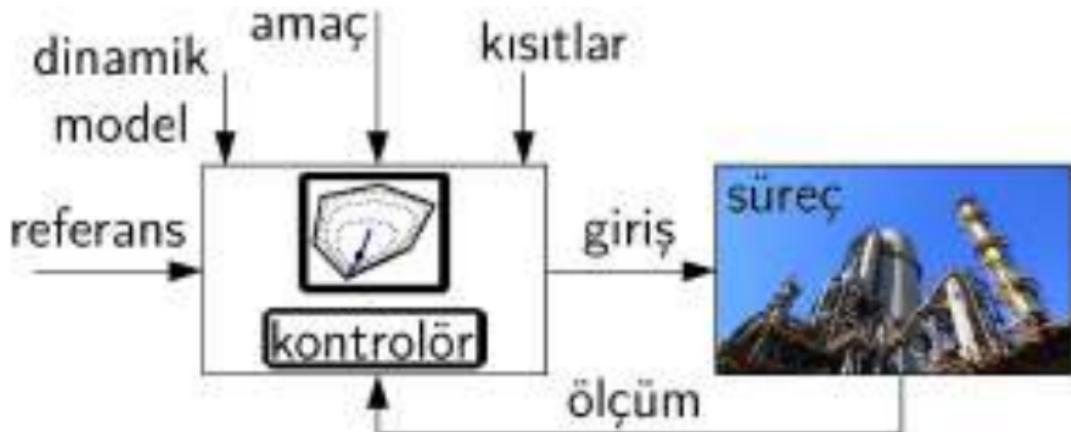
## Bölüm 14

Temel kavramlar

## Alt Bölüm 1

Çalışma prensibi

# Model öngörülu kontrol - Ana fikir



# Kısıtlar ve kontrol tasarıımı

Gerçek dinamik sistemlerin hepsinde **kısıtlar** vardır:

- ▶ Fiziksel kısıtlar (örnek: eyleyici limitleri)
- ▶ Başarım kısıtları (örnek: aşım)
- ▶ Güvenlik kısıtları (örnek: sıcaklık/basınç limitleri)

**optimal operasyon genelde kısıtlara yakındır**

## standart tasarım:

- ▶ tasarımında kısıtlar hesaba katılmaz
- ▶ operasyon noktaları kısıtlardan uzak seçilir
- ▶ operasyon optimalden uzaktır

## model öngörülu kontrol:

- ▶ tasarımında kısıtlar hesaba katılırlar
- ▶ operasyon noktaları kısıtlara yakın seçilir
- ▶ operasyon optimale yakındır

# Model öngörülü kontrol - Motivasyon

dinamik model:  $x(k+1) = F(x(k), u(k))$

durum kısıtları:  $x \in \mathcal{X}$

giriş kısıtları:  $u \in \mathcal{U}$

Bu sistem için aşağıdaki şartları sağlayan bir kontrolör tasarlamak istiyoruz

- 1. durum ve giriş kısıtları sağlanır**
2. kapalı-çevrim sistem asimptotik kararlıdır
3. kontrol başarımı optimize edilir

Model öngörülü kontrol yöntemiyle bu şartları sağlayan kontrolörlerin tasarımı mümkündür.

## Sonsuz ufuklu kısıtlı optimal kontrol

$$P_\infty(x(0)) : \underset{\{u_\kappa\}_{\kappa=0}^\infty}{\text{minimize}} \quad \sum_{\kappa=0}^{\infty} l(x_\kappa, u_\kappa)$$

bağlı     $x_{\kappa+1} = F(x_\kappa, u_\kappa), \quad x_0 = x(0)$

$$x_\kappa \in \mathcal{X}, \quad u_\kappa \in \mathcal{U}, \quad \kappa = 0, 1, \dots, \infty$$

**Aşama maliyeti**  $l(x, u)$  (sistemin  $x$  durumunda bulunmasının ve  $u$  girişini uygulamanın maliyetini ifade eder)

**Durum uzayı modeli**  $x_{\kappa+1} = F(x_\kappa, u_\kappa)$  (en genel halde, doğrusal olmayan bir model olabilir)

İdealde sonsuz ufuklu problemi çözmek isteriz, ancak problem sonsuz sayıda değişken içerdiginden bu mümkün değildir.

Not: Bu problemin bir özel hali olan doğrusal kuadratik problemin ( $l(x, u) = x^T Q x + u^T R u$ ,  $F(x, u) = A x + B u$ , kısıt yok) analitik çözümü vardır (doğrusal kuadratik regülatör).

# Model öngörülü kontrol - Algoritma

$$P_N(x(k)) : \underset{\{u_\kappa\}_{\kappa=0}^{N-1}}{\text{minimize}} \quad \sum_{\kappa=0}^{N-1} l(x_\kappa, u_\kappa)$$

bağlı     $x_{\kappa+1} = F(x_\kappa, u_\kappa), \quad x_0 = x(k)$

$$x_\kappa \in \mathcal{X}, \quad u_\kappa \in \mathcal{U}, \quad \kappa = 0, 1, \dots, N-1$$

---

## Algoritma 1 Model öngörülü kontrol algoritması

---

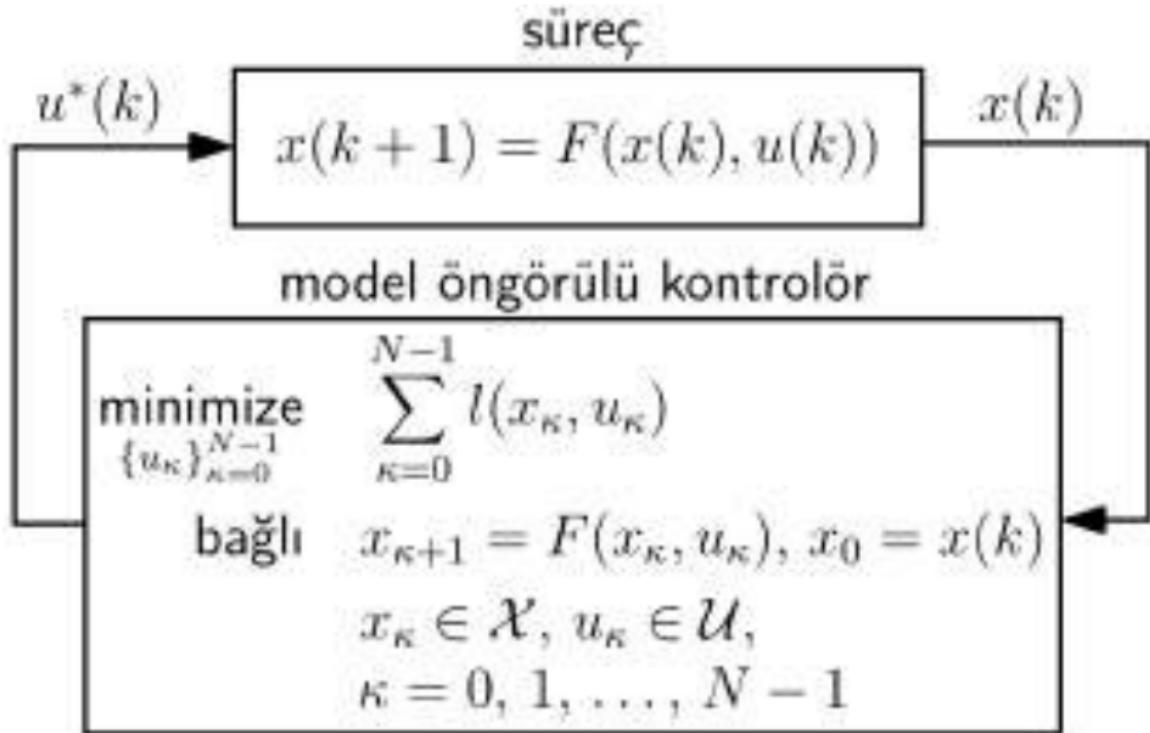
Her ayrık zaman adımı  $k$  ( $k = 0, 1, 2 \dots$ ) için tekrarla:

- 1) Sistem durumu  $x(k)$ 'i ölç
  - 2)  $P_N(x(k))$ 'yi çöz
  - 3)  $U_N^*(x(k)) = [u_0^{*,T} \quad u_1^{*,T} \quad \dots \quad u_{N-1}^{*,T}]^T$ , yu kaydet
  - 4)  $u^*(k)$ 'yu ( $u^*(k) = u_0^*$ ) sisteme uygula
- 

$N$ : öngörü ufkı

$x(k)/u(k)$ : gerçek sistem durumu ve kontrol girişi  
 $x_\kappa/u_\kappa$ : öngörülen sistem durumu ve kontrol girişi

## Model öngörülü kontrol - Blok diyagramı



# MPC probleminin unsurları (genel form)

$$\begin{aligned} \underset{\{u_\kappa\}_{\kappa=0}^{N-1}}{\text{minimize}} \quad & \sum_{\kappa=0}^{N-1} l(x_\kappa, u_\kappa) \\ \text{bağlı} \quad & x_0 = x(k) \\ & \kappa = 0, \dots, N-1 : \\ & x_{\kappa+1} = F(x_\kappa, u_\kappa), \quad x_\kappa \in \mathcal{X}, \quad u_\kappa \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

- ▶  $N$ : öngörü ufku (*prediction horizon*)
- ▶  $\kappa$ : MPC'nin dahili (*internal*) ayrık zaman adımı
- ▶  $x(k)$ : gerçek  $k$  zaman adımındaki durum ölçümü/kestirimi
- ▶  $x_\kappa/u_\kappa$ : öngörülen (*predicted*) durum/giriş
- ▶  $\sum_{\kappa=0}^{N-1} l(x_\kappa, u_\kappa)$ : amaç fonksiyonu (*objective function*)
- ▶  $l(x_\kappa, u_\kappa)$ : aşama maliyeti (*stage cost*)
- ▶  $x_{\kappa+1} = F(x_\kappa, u_\kappa)$ : öngörü modeli (*prediction model*)
- ▶  $\mathcal{X}/\mathcal{U}$ : durum/giriş kısıt kümeleri (*constraint set*)

# Öngörü modeline göre MPC varyantları

## 1) Doğrusal MPC

- model doğrusal:

$$x_{\kappa+1} = Ax_{\kappa} + Bu_{\kappa}$$

- durum ve giriş reel

- kısıtlar dışbükey

problem dışbükey

(genellikle LP veya QP)

## 2) Doğrusal-olmayan MPC

- model doğrusal-olmayan:

$$x_{\kappa+1} = F(x_{\kappa}, u_{\kappa})$$

- durum ve giriş reel

- kısıtlar türevlenebilir

problem dışbükey-olmayan

(genellikle NLP)

## 3) Hibrit (*hybrid*) MPC

- model hibrit:  $x_{\kappa+1} = \begin{cases} A_1x_{\kappa} + B_1u_{\kappa} & x_{\kappa} \geq \bar{x} \\ A_2x_{\kappa} + B_2u_{\kappa} & \text{aksi halde} \end{cases}$

- durum ve giriş karma-tamsayılı (reel ve tamsayı)

- kısıtlar afin karma-tamsayılı

problem karma-tamsayılı (genellikle MILP veya MIQP)

# Amaç fonksiyonuna göre MPC varyantları

$$\begin{aligned} \underset{\{u_\kappa\}_{\kappa=0}^{N-1}}{\text{minimize}} \quad & \sum_{\kappa=0}^{N-1} l(x_\kappa, u_\kappa) \\ \text{bağlı} \quad & x_0 = x(k) \\ & \kappa = 0, \dots, N-1 : \\ & x_{\kappa+1} = F(x_\kappa, u_\kappa), \quad x_\kappa \in \mathcal{X}, \quad u_\kappa \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

## 1) Standart MPC

- aşama maliyeti bir kontrol amacını ifade eder
- regülasyon:  
$$l(x_\kappa, u_\kappa) = \|x_\kappa\|_Q^2 + \|u_\kappa\|_R^2$$
- referans izleme:  
$$l(x_\kappa, u_\kappa) = \|x_\kappa - x_s\|_Q^2 + \|u_\kappa - u_s\|_R^2$$

(not:  $\|x\|_Q^2 \triangleq x^T Q x$ )

## 2) Ekonomik MPC (EMPC)

- aşama maliyeti (genellikle) bir ekonomik optimizasyon amacını ifade eder (gelir maksimizasyonu vb.)
- standart MPC'nin aksine, EMPC'de  $l(x_\kappa, u_\kappa)$ 'nin sabit bir noktaya göre pozitif tanımlı olması gerekmez

# Doğrusal kuadratik model öngörülü kontrol

$$P_N : \underset{\{u_\kappa\}_{\kappa=0}^{N-1}}{\text{minimize}} \quad \sum_{\kappa=0}^{N-1} x_\kappa^T Q x_\kappa + u_\kappa^T R u_\kappa$$

bağlı     $x_{\kappa+1} = Ax_\kappa + Bu_\kappa, \quad x_0 = x(k)$

$$x_\kappa \in \mathcal{X}, \quad u_\kappa \in \mathcal{U}, \quad \kappa = 0, 1, \dots, N-1$$

$Q \succeq 0, R \succ 0$  ve  $\mathcal{X}$  ile  $\mathcal{U}$  dışbükey küme ise  $P_N$  dışbükey bir kuadratik programlama problemidir.

## Örnek: Basit sistemde detaylı operasyon

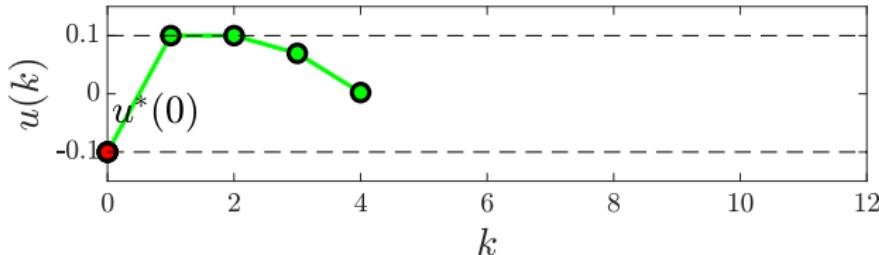
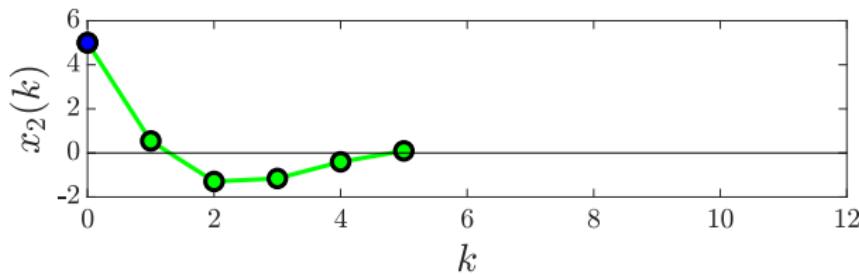
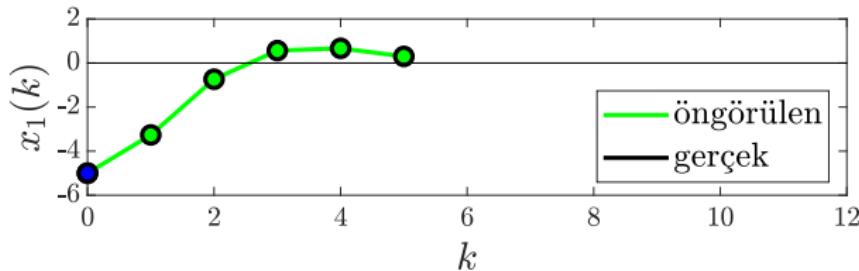
$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.1262 & -0.5335 \\ 0.5335 & 0.6597 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.3403 \\ 0.8738 \end{bmatrix} u(k)$$

$$x(0) = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad x(k) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (regülasyon)}, \quad |u(k)| \leq 0.1$$

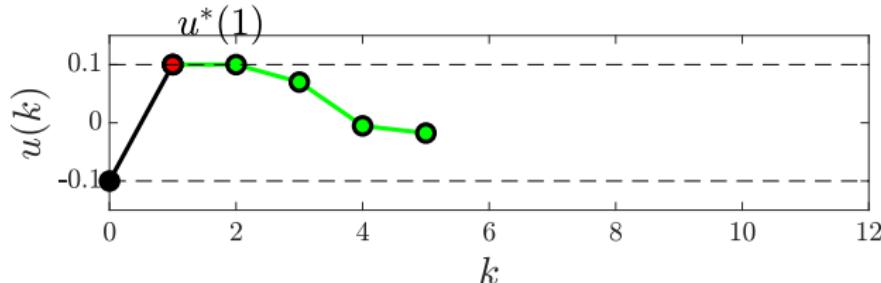
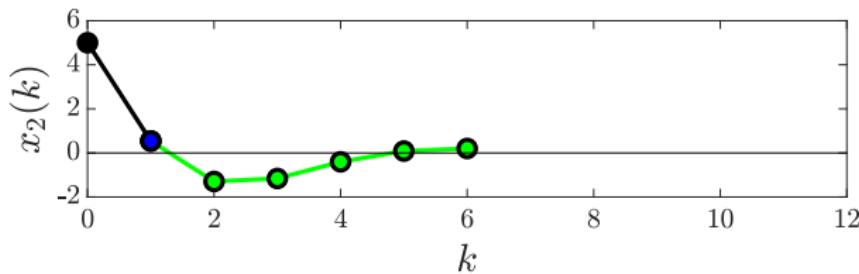
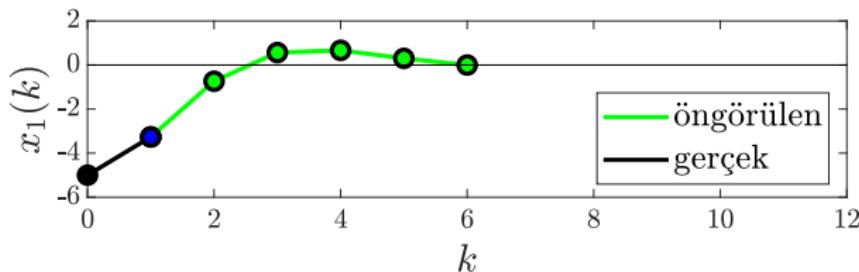
$$\begin{array}{ll}\underset{\{u_\kappa\}_{\kappa=0}^{N-1}}{\text{minimize}} & \sum_{\kappa=0}^{N-1} x_\kappa^T Q x_\kappa + u_\kappa^T R u_\kappa \\ \text{bağlı} & x_{\kappa+1} = Ax_\kappa + Bu_\kappa \\ & -0.1 \leq u_\kappa \leq 0.1 \\ & x_0 = x(k)\end{array}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 10 \quad N = 5$$

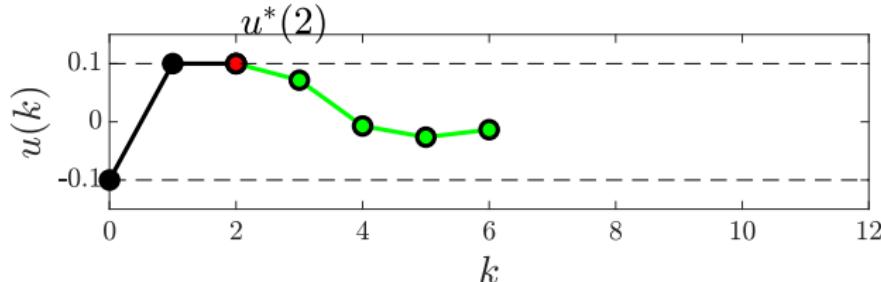
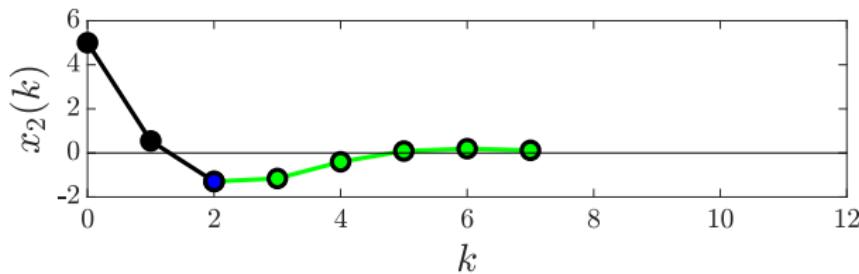
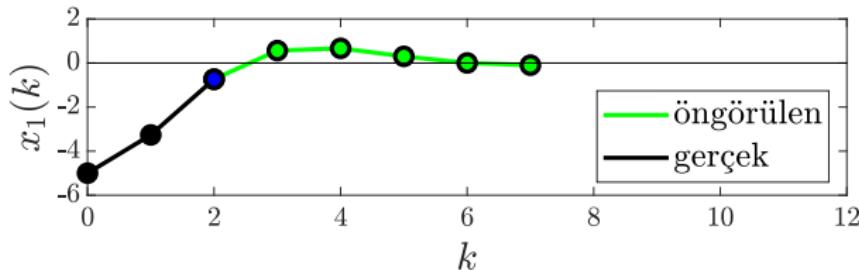
## Örnek: Basit sistemde detaylı operasyon



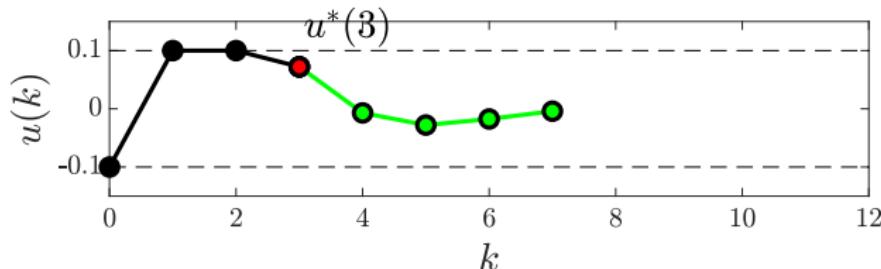
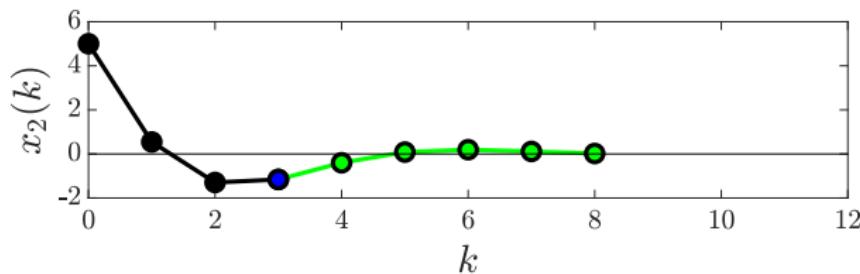
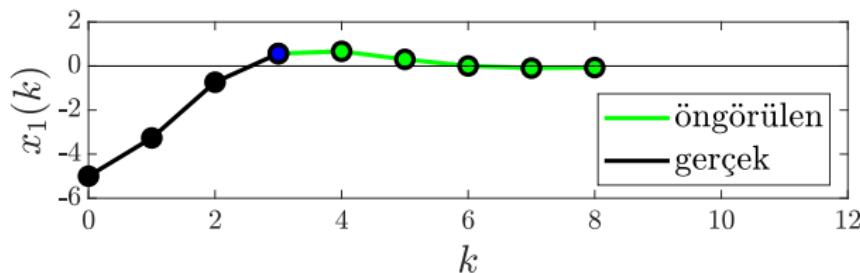
## Örnek: Basit sistemde detaylı operasyon



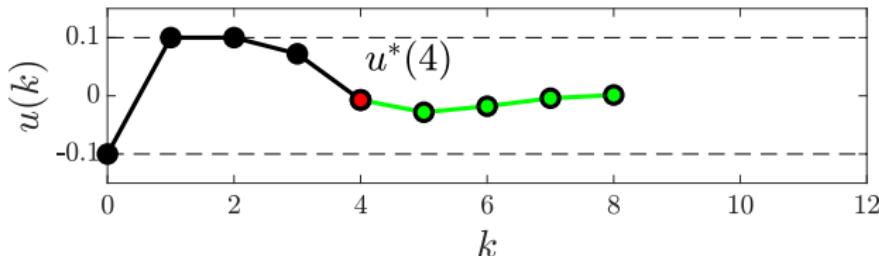
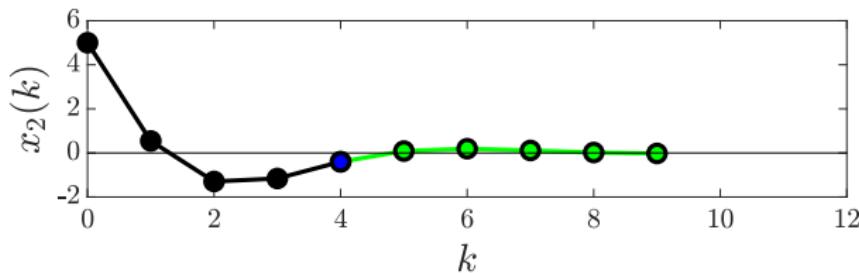
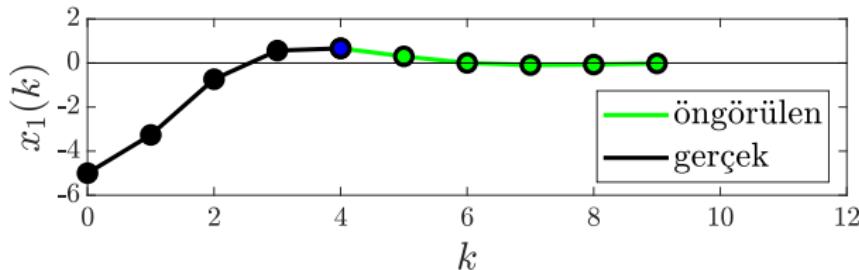
## Örnek: Basit sistemde detaylı operasyon



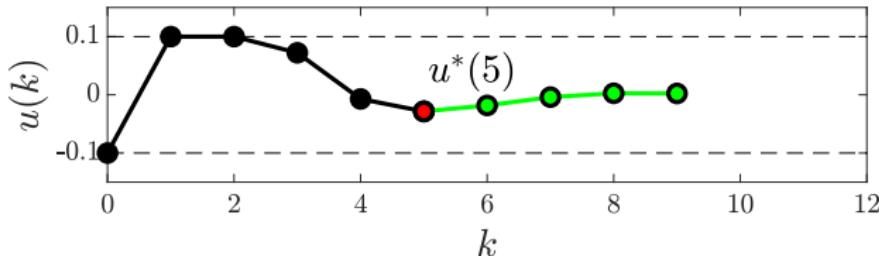
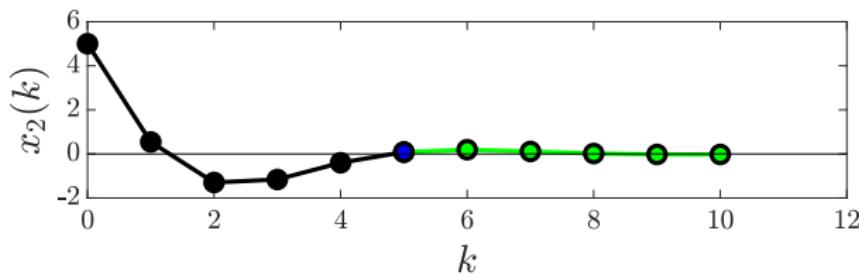
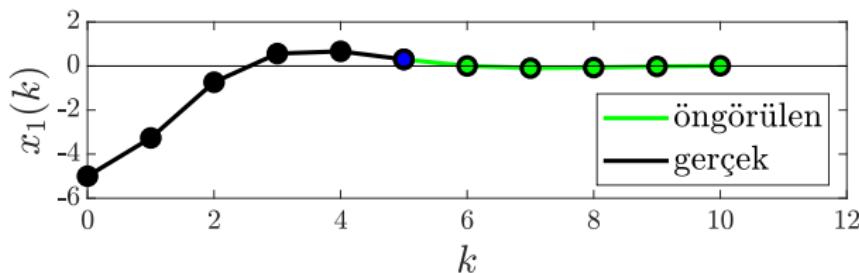
## Örnek: Basit sistemde detaylı operasyon



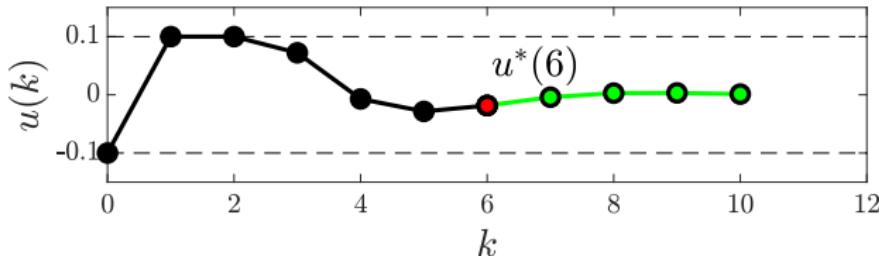
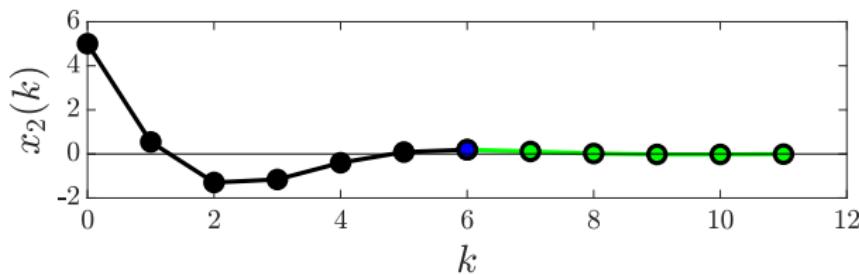
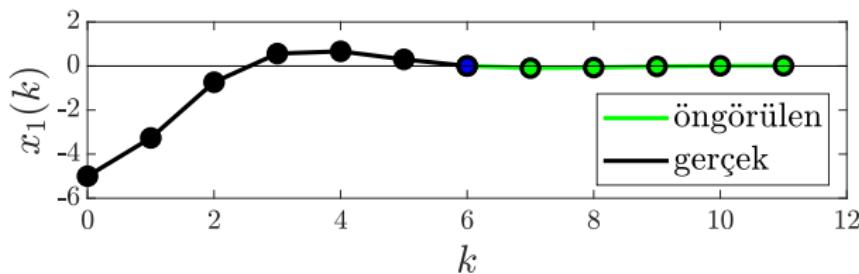
## Örnek: Basit sistemde detaylı operasyon



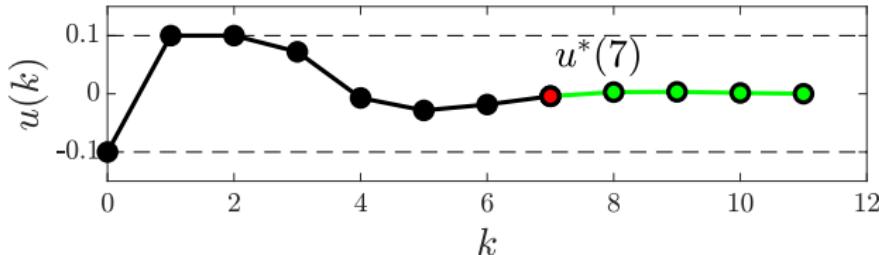
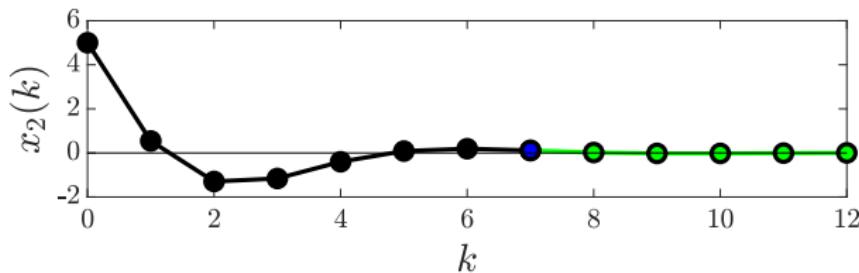
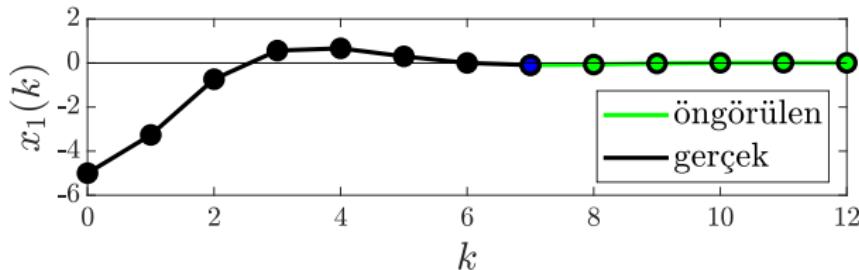
## Örnek: Basit sistemde detaylı operasyon



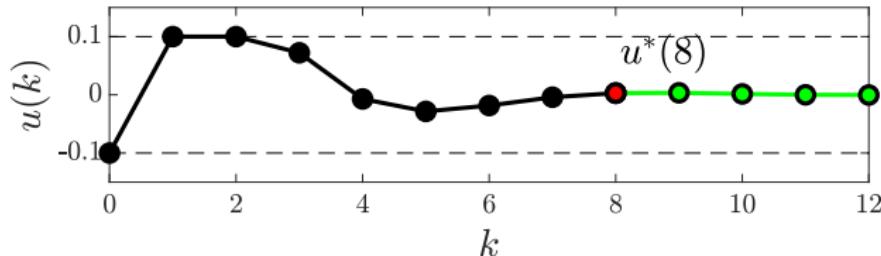
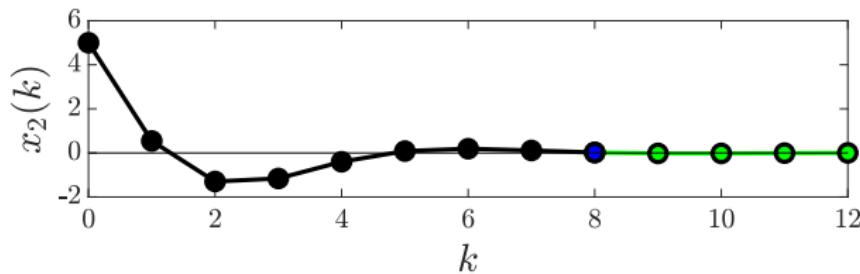
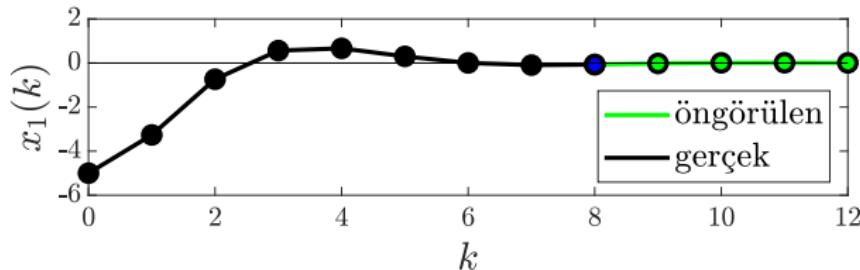
## Örnek: Basit sistemde detaylı operasyon



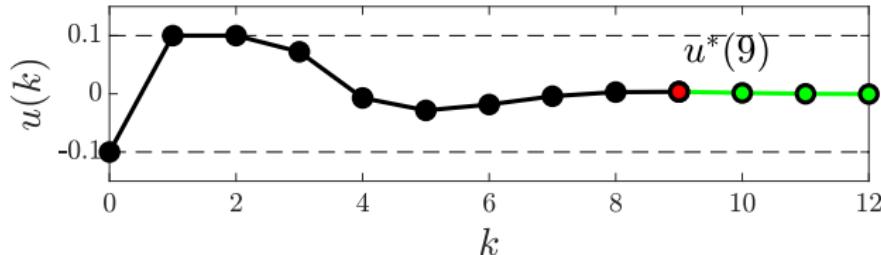
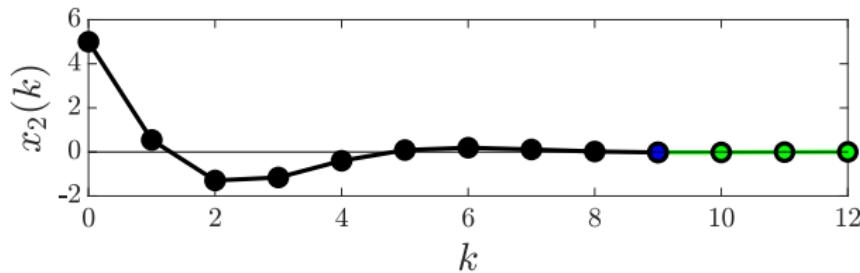
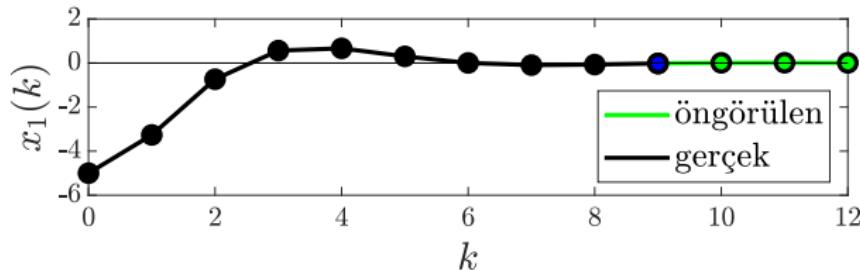
## Örnek: Basit sistemde detaylı operasyon



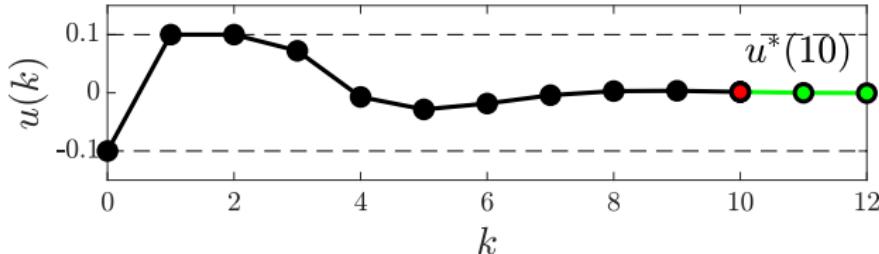
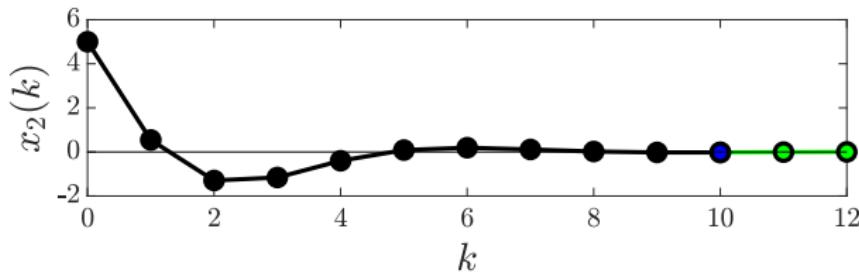
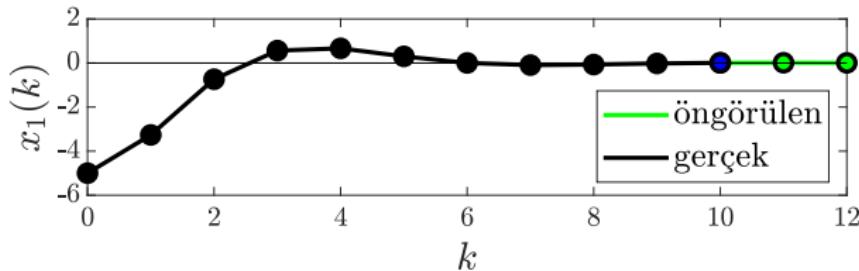
## Örnek: Basit sistemde detaylı operasyon



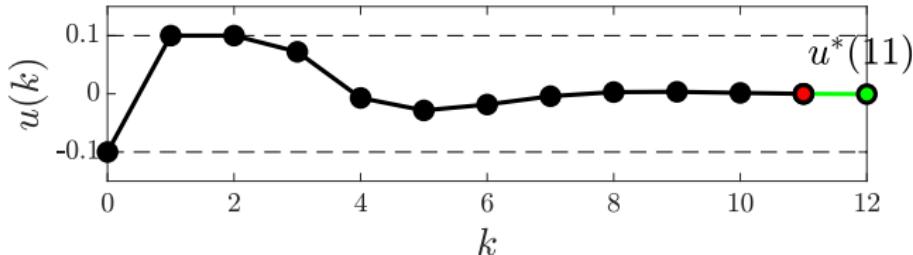
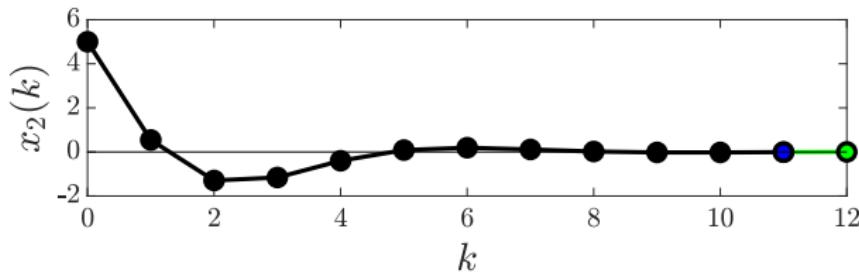
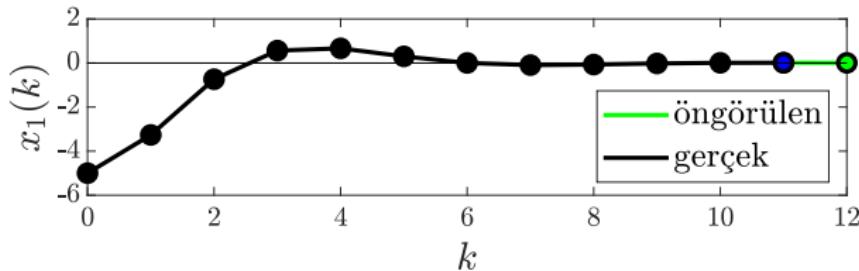
## Örnek: Basit sistemde detaylı operasyon



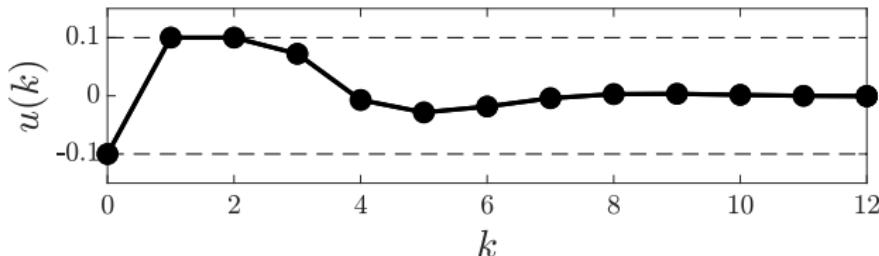
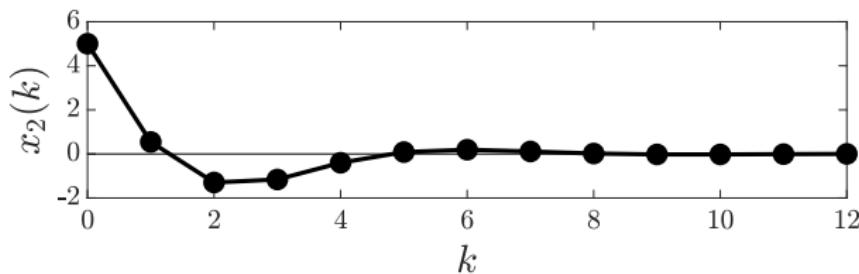
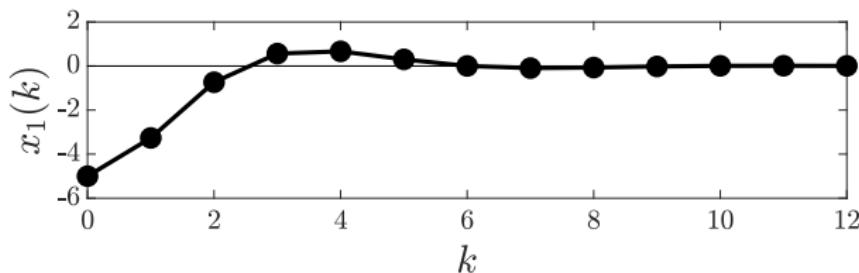
## Örnek: Basit sistemde detaylı operasyon



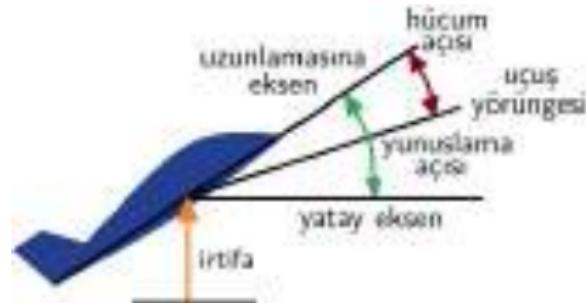
## Örnek: Basit sistemde detaylı operasyon



## Örnek: Basit sistemde detaylı operasyon



## Örnek: Uçaklarda irtifa kontrolü



$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.6136 & 0 & 0.157 & 0 \\ -0.128 & 1 & 0.1904 & 0 \\ -0.8697 & 0 & 0.5248 & 0 \\ -27.5636 & 32.05 & 0.4087 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.4539 \\ -0.4436 \\ -3.1989 \\ 0.6068 \end{bmatrix} u(k)$$

durumlar: hücum açısı ( $x_1$ ), yunuslama açısı ( $x_2$ ),  
yunuslama açısal hızı ( $x_3$ ), irtifa ( $x_4$ ), kontrol girişi: irtifa dümeni açısı ( $u$ )

senaryo:  $x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 50]$        $x(k) \rightarrow [0 \ 0 \ 0 \ 0]$  (regülasyon)

**kısıtlar:**  $|u| \leq 0.262$  rad, örneklemme: 0.25 s ve ZOH

acık-çevrim özdeğerler: 1, 1,  $0.5692 \pm 0.3668j$

**acık-çevrim sistem kararsız**

# Örnek: Uçaklarda irtifa kontrolü

## Doğrusal kuadratik regülatör

$$\min_{u_\kappa} \quad \sum_{\kappa=0}^{\infty} x_\kappa^T Q x_\kappa + u_\kappa^T R u_\kappa$$

bağlı

$$x_{\kappa+1} = Ax_\kappa + Bu_\kappa$$
$$x_0 = x(k)$$

$$Q = I, R = 10$$

analitik çözüm:

$$K = [4.68 \quad -6.65 \quad -0.44 \quad -0.07]$$

## Model öngörülü kontrolör

$$\min_{u_\kappa} \quad \sum_{\kappa=0}^{N-1} x_\kappa^T Q x_\kappa + u_\kappa^T R u_\kappa$$

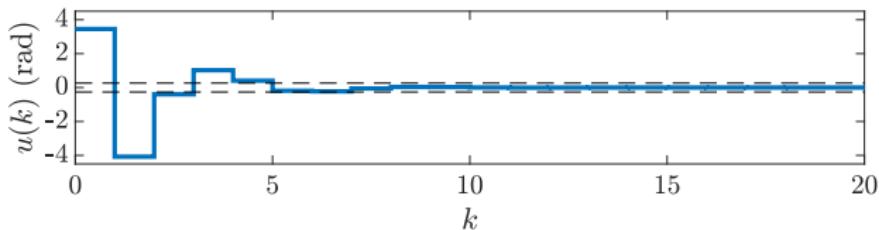
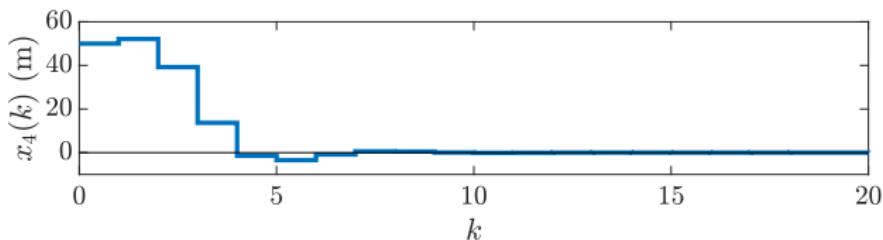
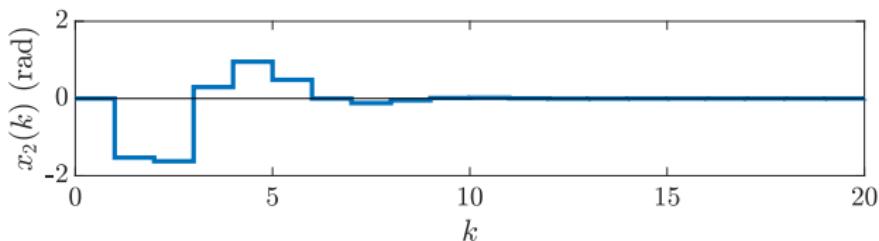
bağlı

$$x_{\kappa+1} = Ax_\kappa + Bu_\kappa$$
$$-0.262 \leq u_\kappa \leq 0.262$$
$$x_0 = x(k)$$

$$Q = I, R = 10, N = 10$$

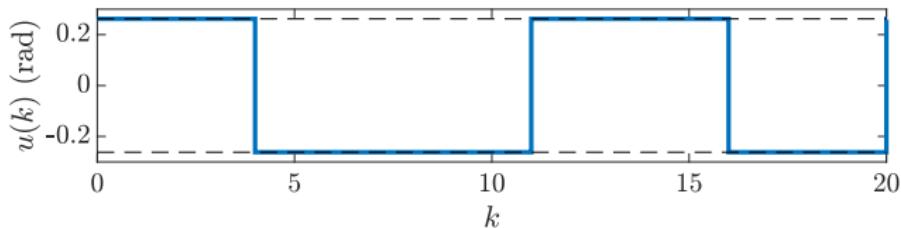
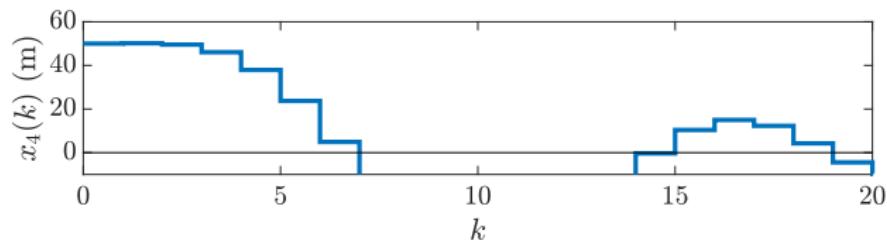
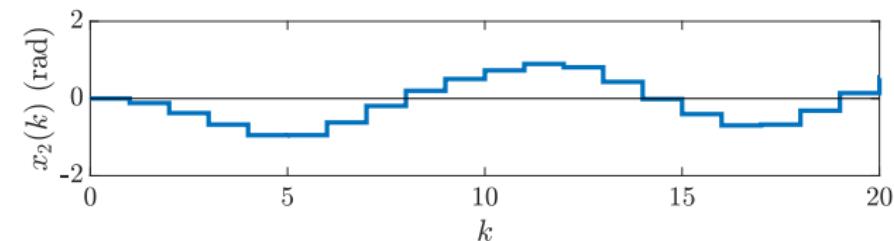
# Örnek: Uçaklarda irtifa kontrolü

## 1) Doğrusal kuadratik regülatör, $u$ 'da kısıt yok



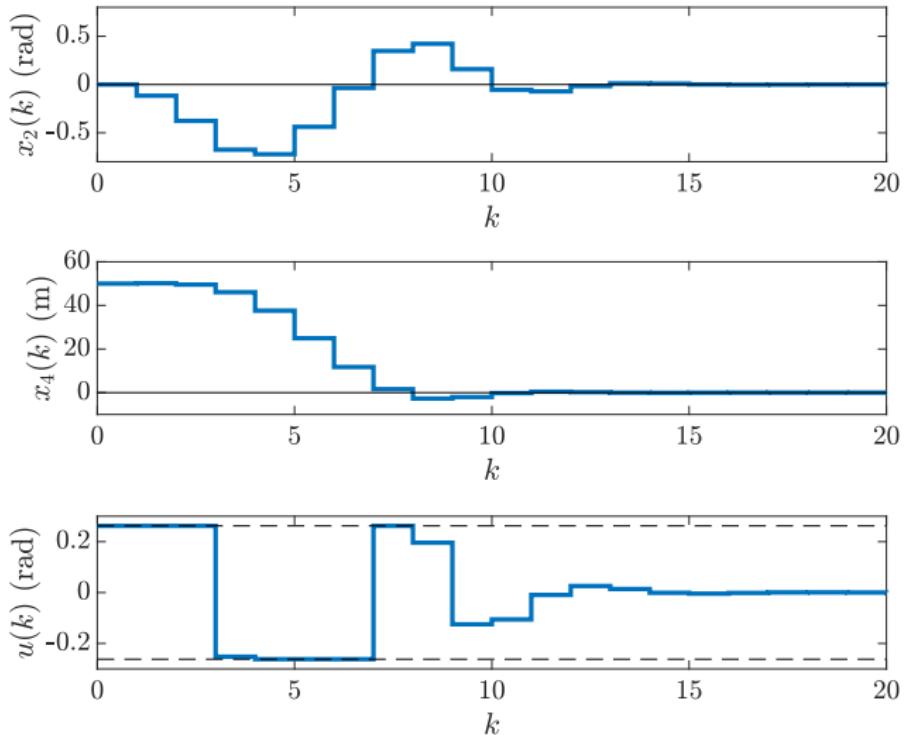
# Örnek: Uçaklarda irtifa kontrolü

2) Doğrusal kuadratik regülatör,  $u$ 'da kısıt var



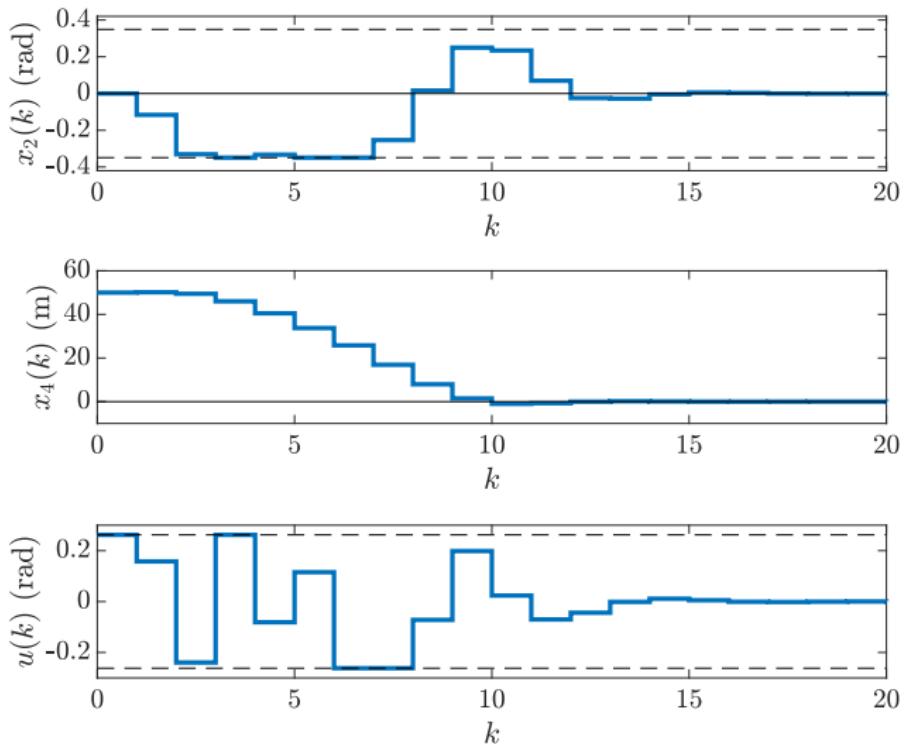
# Örnek: Uçaklarda irtifa kontrolü

## 3) Model öngörülü kontrolör



# Örnek: Uçaklarda irtifa kontrolü

## 4) Model öngörülü kontrolör ( $|x_2| \leq 0.349$ )



Alt Bölüm 2

Tasarım

# Tasarım parametreleri

**1) öngörü modeli  $A$ ,  $B$ :** Sistemin kendisi ile modeli aynı şey değildir. Sistem-model uyusuzluğu kontrol başarımını olumsuz etkiler. Dinamikleri mümkün olduğunca iyi ifade eden ancak düşük boyutlu ve basit (örneğin doğrusal) modeller idealdir. Yüksek boyutlu ve karmaşık (örneğin doğrusal-olmayan) modeller hesaplama eforu açısından sakıncalı olabilir.

**2) öngörü ufku  $N$ :** Genellikle mümkün olduğunca büyük seçilir. Hesaplama kaynakları (CPU gücü) ile sınırlıdır.

**3) ağırlıklandırma matrisleri  $Q$  ve  $R$ :**  $Q$ 'nun elemanları arasındaki farklılıklarla durum değişkenlerinin kontrol amaci açısından önemi belirlenebilir.  $R$ 'nin ( $Q$  sabit kalmak koşuluyla) büyük değerler alması kontrolörün daha küçük kontrol girişleri kullanmasına neden olur.

(not 1: bunlar (öngörü ufku  $N$  hariç) model-tabanlı optimal kontrol tasarım parametreleridir) (not 2:  $N$ ,  $Q$  ve  $R$ 'nin kapali-çevrim sistemin kararlılığına önemli etkileri vardır)

# Tasarım parametreleri

Örnek:

gerçek sistem:  $x(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}}_{A_{\text{gerçek}}} x(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_{\text{gerçek}}} u(k)$

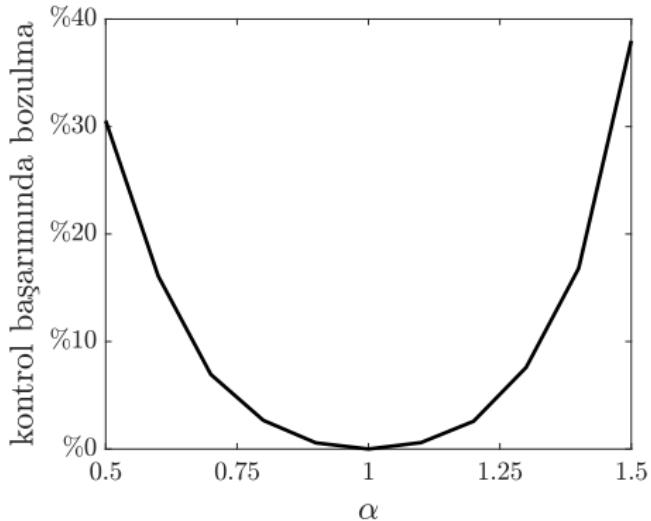
$$x(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}, x(k) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (regülasyon)}, |u(k)| \leq 1.7$$

# Tasarım parametreleri

## 1) öngörü modeli

$$\begin{array}{ll}\min_{u_\kappa} & \sum_{\kappa=0}^{N-1} x_\kappa^T Q x_\kappa + u_\kappa^T R u_\kappa \\ \text{bağlı} & x_{\kappa+1} = Ax_\kappa + Bu_\kappa \\ & -1.7 \leq u_\kappa \leq 1.7 \\ & x_0 = x(k)\end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5\alpha \\ 0.5\alpha & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 1 \quad N = 10$$



kontrol başarımı:

$$\sum_{k=0}^{N_{\text{sim}}} x(k)^T x(k) + u(k)^T u(k)$$

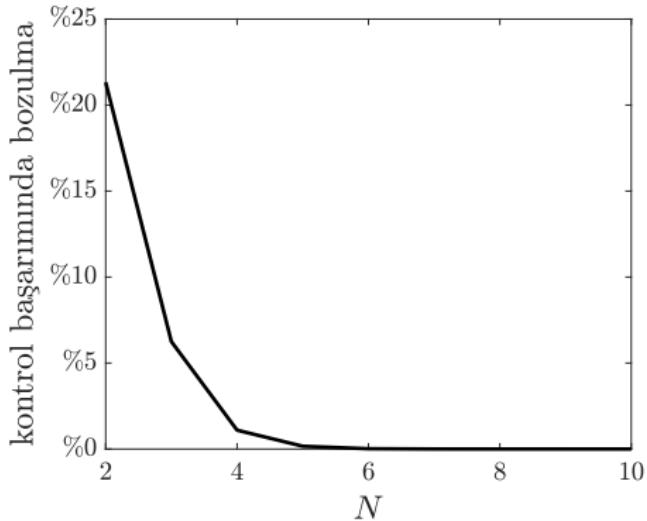
(sapmaların kareleri toplamı)

# Tasarım parametreleri

## 2) öngörü ufkı

$$\begin{aligned} \min_{u_\kappa} \quad & \sum_{\kappa=0}^{N-1} x_\kappa^T Q x_\kappa + u_\kappa^T R u_\kappa \\ \text{bağlı} \quad & x_{\kappa+1} = Ax_\kappa + Bu_\kappa \\ & -1.7 \leq u_\kappa \leq 1.7 \\ & x_0 = x(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ Q &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & R &= 1 \end{aligned}$$



kontrol başarımı:

$$\sum_{k=0}^{N_{\text{sim}}} x(k)^T x(k) + u(k)^T u(k)$$

(sapmaların kareleri toplamı)

# Tasarım parametreleri

## 3) ağırlıklandırma matrisleri

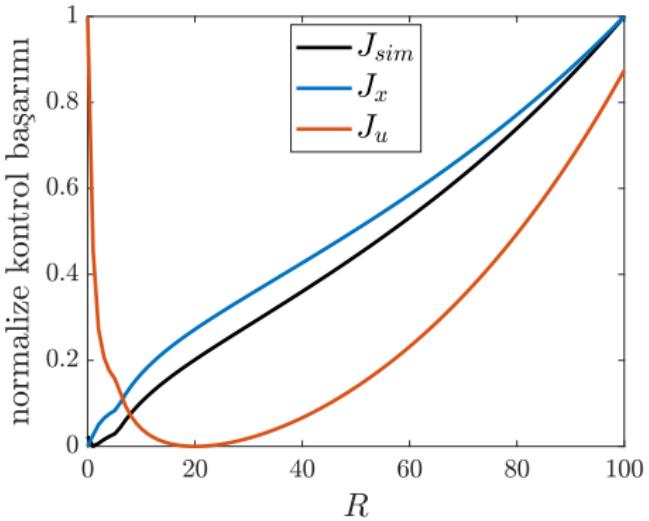
$$\min_{u_\kappa} \quad \sum_{\kappa=0}^{N-1} x_\kappa^T Q x_\kappa + u_\kappa^T R u_\kappa$$

bağlı

$$x_{\kappa+1} = Ax_\kappa + Bu_\kappa$$
$$-1.7 \leq u_\kappa \leq 1.7$$
$$x_0 = x(k)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad N = 10$$



$$J_x = \sum_{k=0}^{N_{\text{sim}}} x(k)^T x(k) \quad J_u = \sum_{k=0}^{N_{\text{sim}}} u(k)^T u(k)$$

$$J_{sim} = J_x + J_u$$

## Alt Bölüm 3

Gerçekleme

# Kuadratik programlama formülasyonu

## doğrusal kuadratik model öngörülü kontrol

$$\begin{aligned} \min_{u_\kappa} \quad & \sum_{\kappa=0}^{N-1} x_\kappa^T Q x_\kappa + u_\kappa^T R u_\kappa \\ \text{bağlı} \quad & x_{\kappa+1} = Ax_\kappa + Bu_\kappa \\ & x_\kappa \in \mathcal{X} \\ & u_\kappa \in \mathcal{U} \\ & x_0 = x(k) \end{aligned}$$

## kuadratik program

$$\begin{aligned} \min_z \quad & z^T H z \\ \text{bağlı} \quad & Gz \leq g \\ & Ez = e \end{aligned}$$

Kuadratik programlama çözümlerini kullanabilmek için model öngörülü kontrol problemini kuadratik program formunda yazmamız gereklidir.

# Kuadratik programlama formülasyonu

Karar değişkenleri vektörü  $z$ 'yi aşağıdaki şekilde tanımlayalım

$$z = \begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T & \dots & x_N^T & u_0^T & u_1^T & \dots & u_{N-1}^T \end{bmatrix}^T$$

Eşitlik kısıtları  $Ez = e$  ise sistemin dinamik modelinden aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & -B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A & I & 0 & 0 & 0 & 0 & -B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A & I & 0 & 0 & 0 & 0 & -B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A & I & 0 & 0 & 0 & 0 & -B \end{bmatrix}}_E z = \underbrace{\begin{bmatrix} A \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_e x_0$$

## Kuadratik programlama formülasyonu

Durum kısıtı ve giriş kısıtı kümelerinin şu şekilde olduğunu varsayıyalım

$$\mathcal{X} = \{x : Fx \leq f\} \quad \mathcal{U} = \{u : Mu \leq m\}$$

Bu tanımlarla eşitsizlik kısıtları  $Gz \leq g$  aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M \end{bmatrix}}_G z \leq \underbrace{\begin{bmatrix} f \\ \vdots \\ f \\ m \\ \vdots \\ m \end{bmatrix}}_g$$

# Kuadratik programlama formülasyonu

Amaç fonksiyonu  $z^T H z$  ise şu şekilde oluşturulur:

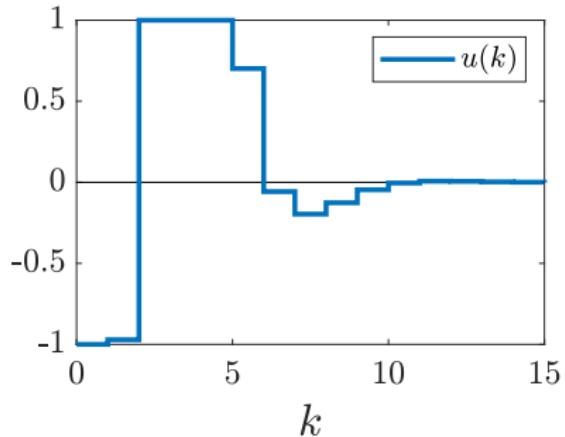
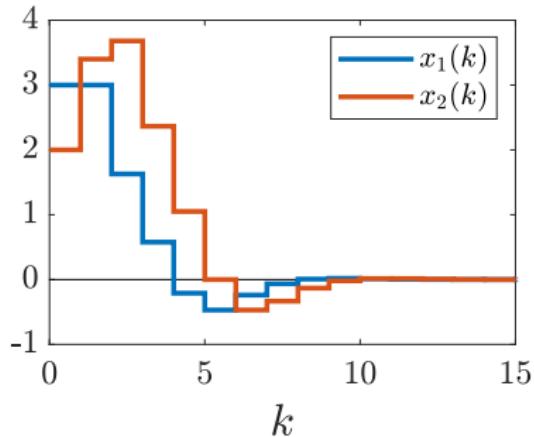
$$H = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix}$$

# YALMIP ile gerçekleme - MPC oluşturma

```
A=[2 -1;1 0.2];B=[1;0];Q=eye(2);R=1;
N=5;x_min=-5;x_max=5;u_min=-1;u_max=1;
x=sdpvar(2,N+1,'full');
u=sdpvar(1,N,'full');con=[];obj=0;
for kp = 1:N
    obj = obj + x(:,kp+1)'*Q*x(:,kp+1) + ...
        u(:,kp)'*R*u(:,kp);
    con = [con, ...
        x(:,kp+1) == A*x(:,kp) + B*u(:,kp)];
    con = [con, x_min <= x(:,kp+1) <= x_max];
    con = [con, u_min <= u(:,kp) <= u_max];
end
ops=sdpsettings;ops.solver='quadprog';
ops.verbose = 2;controller = ...
    optimizer(con,obj,ops,x(:,1),u(:,1));
```

# YALMIP ile gerçekleme - Benzetim

```
k_max = 15; x0 = [3;2];  
x_sim = NaN(2,k_max+1); x_sim(:,1) = x0;  
u_sim = NaN(1,k_max);  
for k = 1:k_max  
    u_sim(:,k)=controller(x_sim(:,k));  
    x_sim(:,k+1)=A*x_sim(:,k) + B*u_sim(:,k);  
end
```



## Bölüm 15

### Kararlılık

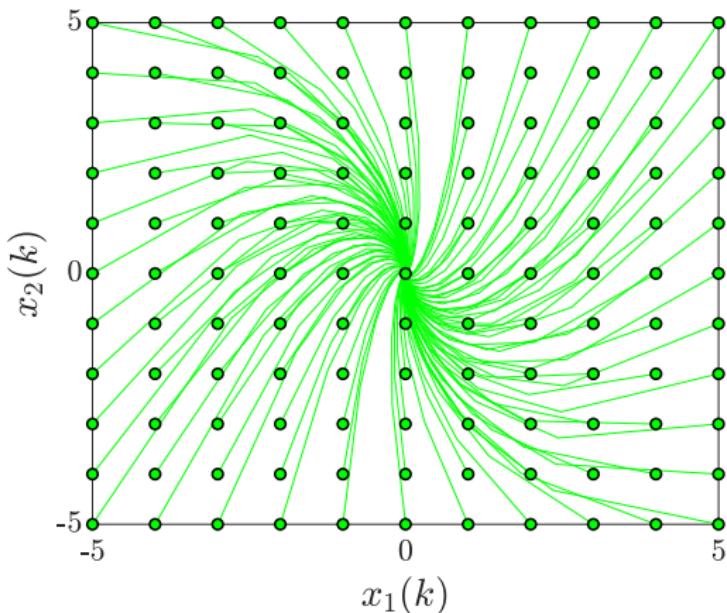
## Alt Bölüm 1

Kısıtlı sistemlerde kararlılık

## Kısıtlı sistemlerde kararlılık

Örnek:  $x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(k)$

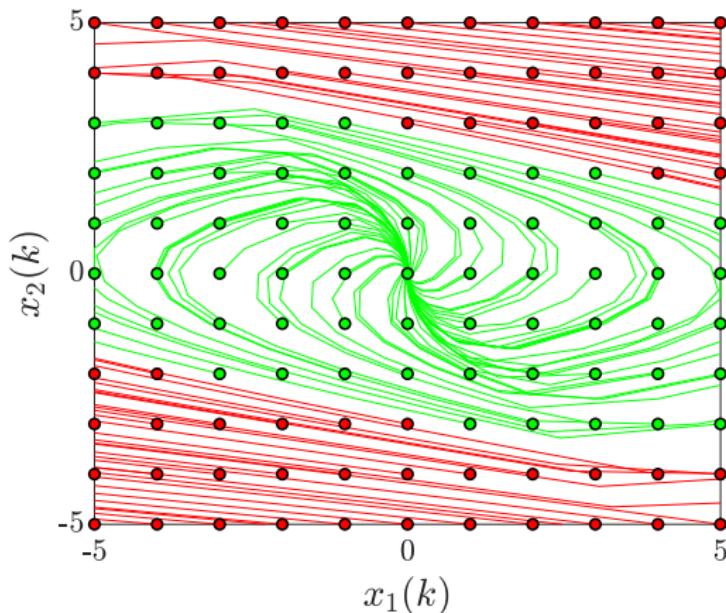
$x(k) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  (regülasyon),  $K_{\text{LQR}} = \begin{bmatrix} 0.686 & 0.957 \end{bmatrix}$ , kısıt yok



## Kısıtlı sistemlerde kararlılık

Örnek:  $x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(k)$

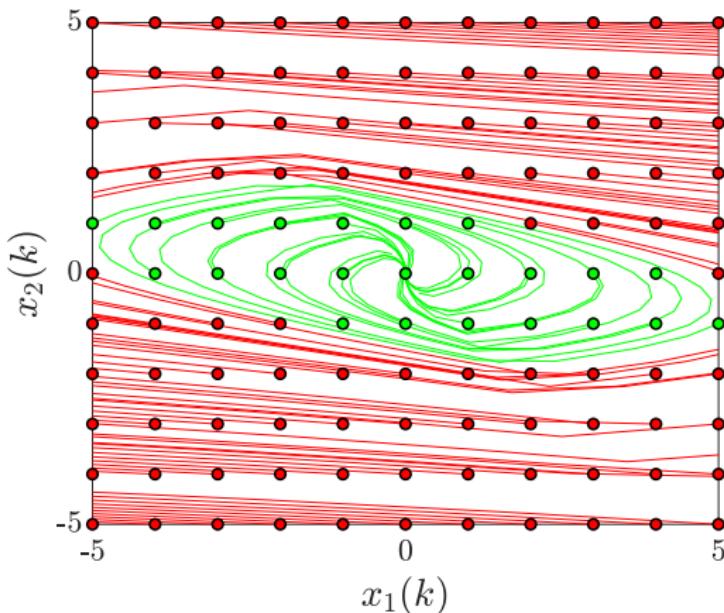
$x(k) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  (regülasyon),  $K_{\text{LQR}} = \begin{bmatrix} 0.686 & 0.957 \end{bmatrix}$ ,  $|u(k)| \leq 1$



## Kısıtlı sistemlerde kararlılık

Örnek:  $x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(k)$

$x(k) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  (regülasyon),  $K_{\text{LQR}} = [0.686 \quad 0.957]$ ,  $|u(k)| \leq 0.5$



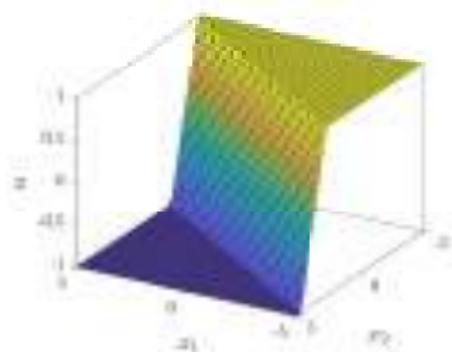
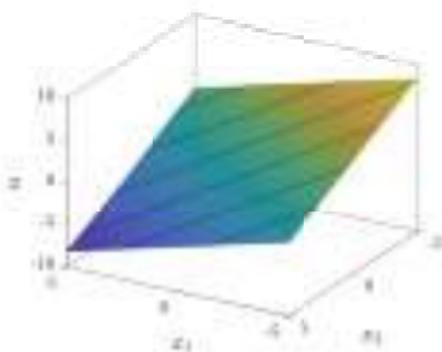
## Kısıtlı sistemlerde kararlılık

Bu örnekler yardımıyla yapılabilecek bazı gözlemler:

- 1) Sistemin dinamik modeli (AZD'de  $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ ) ve kontrolör (LQR için  $u(k) = -K_{\text{LQR}}x(k)$ ) doğrusal olsa da, giriş kısıtlarından dolayı kapalı-çevrim sistem doğrusal olmayan bir sistemdir. Bu tip sistemlerin kararlılık analizi için genellikle Lyapunov'un direkt yöntemi kullanılır.

$$u = -K_{\text{LQR}}x, \text{ kısıt yok}$$

$$u = -K_{\text{LQR}}x, |u| \leq 1$$



- 2) Her başlangıç durumu için sistemi orijine götürmek mümkün olmayabilir. Kararlılık analizi ile birlikte kapalı-çevrim sistemin çekim bölgesi (*domain of attraction*) analizini de yapmak gereklidir.

# Lyapunov'un direkt yöntemi

**Tanım:**  $x(k+1) = F(x(k))$  ( $x(k) \in \mathbb{R}^n$ ) formunda bir sistemi ve  $x = 0$ 'daki (orijin) denge durumunu ele alalım.  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  orijini içeren, kapalı ve sınırlı bir kümeye olsun.  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  orijinde sürekli ve her  $x \in \Omega$  için sonlu bir fonksiyon olsun.  $V$  fonksiyonu



1.  $V(x(k))$   $\Omega$ 'da pozitif tanımlı<sup>a</sup>
2.  $\Delta V(x(k)) \triangleq V(x(k+1)) - V(x(k)),$   
 $\Delta V(x(k))$   $\Omega$ 'da negatif tanımlı

şartlarını sağlıyorsa  $x(k+1) = F(x(k))$  sistemi için  $\Omega$ 'da bir **Lyapunov fonksiyonudur**.

**Teorem:**  $x(k+1) = F(x(k))$  sistemi için bir Lyapunov fonksiyonu bulunabiliyorsa,  $x = 0$  sistem için  $\Omega$ 'da asimptotik kararlı bir denge durumudur.

Aleksandr M.  
Lyapunov  
(1857-1918)

---

<sup>a</sup>Sürekli türevlenebilir bir  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu, orijini içeren bir  $D$  kümesi için: 1)  $f(0) = 0$ , 2)  $f(x) > 0 \forall x \in D \setminus \{0\}$  şartlarını sağlıyorsa, bu fonksiyona " **$D$ 'de pozitif tanımlı**" denir. İkinci şart  $f(x) < 0 \forall x \in D \setminus \{0\}$  ise fonksiyona " **$D$ 'de negatif tanımlı**" denir.

# Lyapunov'un direkt yöntemi

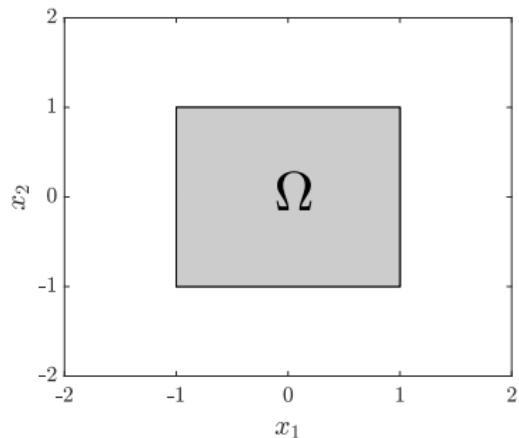
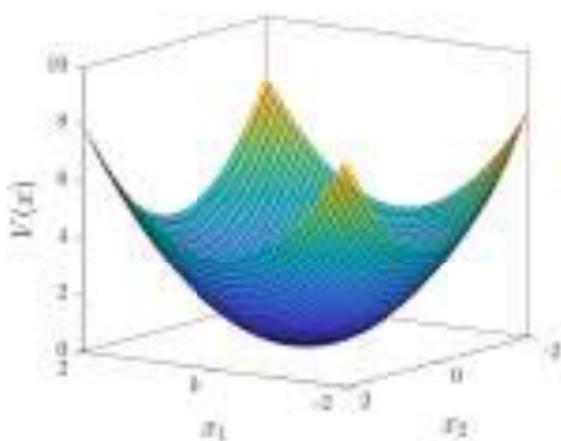
Örnek:

$$x_1(k+1) = -x_2^2(k)$$

$$x_2(k+1) = -x_1^2(k)$$

$$V(x(k)) = x_1^2(k) + x_2^2(k)$$

$$\Delta V(x(k)) = x_1^4(k) + x_2^4(k) - x_1^2(k) - x_2^2(k)$$



$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) > 0, \Delta V(x(k)) < 0\}$$

## Alt Bölüm 2

Model öngörülü kontrolde kararlılık

# Model öngörüülü kontrolde kararlılık

**Ana fikir:** Kapalı-çevrim kararlılığı sistematik olarak sağlamak için MPC problemine **nihai maliyet** (*terminal cost*) ve **nihai kısıt** (*terminal constraint*) eklenir.

$$J^*(x(k)) = \underset{\{u_\kappa\}_{\kappa=0}^{N-1}}{\text{minimize}} \quad \sum_{\kappa=0}^{N-1} x_\kappa^T Q x_\kappa + u_\kappa^T R u_\kappa + \underbrace{x_N^T P x_N}_{\text{nihai maliyet}}$$

bağlı     $x_{\kappa+1} = Ax_\kappa + Bu_\kappa, x_0 = x(k)$

$x_\kappa \in \mathcal{X}, u_\kappa \in \mathcal{U}$

$\underbrace{x_N \in \mathcal{X}_f}_{\text{nihai kısıt}}$

$P$  ve  $\mathcal{X}_f$  sonsuz ufku yaklaşık olarak ifade edecek şekilde belirlenir.

# Nihai maliyetin ( $x_N^T Px_N$ ) belirlenmesi

Sonsuz ufuklu kısıtlı LQR problemini iki alt probleme ayıralım:

**1)**  $k = N$  anına kadar (kısıtlar aktif olabilir) (bu bir MPC problemidir)

$$J^*(x(k)) = \underset{\{u_\kappa\}_{\kappa=0}^{N-1}}{\text{minimize}} \quad \sum_{\kappa=0}^{N-1} x_\kappa^T Q x_\kappa + u_\kappa^T R u_\kappa$$

bağlı     $x_{\kappa+1} = Ax_\kappa + Bu_\kappa$

$x_\kappa \in \mathcal{X}, u_\kappa \in \mathcal{U}$

$x_0 = x(k)$

**2)**  $k > N$  için (kısıtlar aktif değildir) (bu  $x_N$  durumundan başlayan bir LQR problemidir)

$$+ \underset{\{u_\kappa\}_{\kappa=N}^{\infty}}{\text{minimize}} \quad \sum_{\kappa=N}^{\infty} x_\kappa^T Q x_\kappa + u_\kappa^T R u_\kappa$$

bağlı     $x_{\kappa+1} = Ax_\kappa + Bu_\kappa$

İkinci problemdeki sonsuz ufuklu maliyet ( $\kappa = N$ 'den  $\infty$ 'e kadar) LQR kontrolör  $u = -K_{LQR}x$  kullanılarak sınırlanabilir. Bu maliyet  $x_N^T Px_N$  olarak ifade edilebilir. Buradaki  $P$  (LQR'nin analitik çözümündeki) ayrık-zamanlı cebrik Riccati denkleminin çözümüdür.

# Nihai kısıt kümelerinin $(\mathcal{X}_f)$ belirlenmesi

Nihai kısıt, kısıt sağlama için bir yeter şart sağlar.

$$J^*(x(k)) = \underset{\{u_\kappa\}_{\kappa=0}^{N-1}}{\text{minimize}} \quad \sum_{\kappa=0}^{N-1} x_\kappa^T Q x_\kappa + u_\kappa^T R u_\kappa + \underbrace{x_N^T P x_N}_{\text{nihai maliyet}}$$

bağlı     $x_{\kappa+1} = Ax_\kappa + Bu_\kappa, x_0 = x(k)$

$x_\kappa \in \mathcal{X}, u_\kappa \in \mathcal{U}$

$\underbrace{x_N \in \mathcal{X}_f}_{\text{nihai kısıt}}$

- ▶  $\mathcal{X}_f$  içindeki başlangıç durumları için, LQR kontrolörlü ( $u = -K_{LQR}x$ ) kapalı-çevrim sisteme tüm durum ve giriş kısıtları sağlanır.
- ▶ Nihai kısıt kümesi genellikle doğrusal veya kuadratik eşitsizlik kısıtları ile tanımlanır

# Model öngörüülü kontrolde kararlılık - Kanıt

## Ana adımlar:

1. MPC probleminin olanaklı olmasını sağlayan bir başlangıç durumu için, her ayrik zaman adımında bir olanaklı kontrol girişleri dizisinin mevcut olduğunu göstererek **yinelemeli olanaklılığı** (*recursive feasibility*) kanıtla
2. Optimal maliyet fonksiyonu  $J^*(x(k))$ 'nin bir Lyapunov fonksiyonu olduğunu göstererek kararlılığını kanıtla

Burada notasyon sadeliği için maliyet fonksiyonunu aşağıdaki genel formda yazacağız:

$$J^*(x(k)) = \underset{\{u_\kappa\}_{\kappa=0}^{N-1}}{\text{minimize}} \sum_{\kappa=0}^{N-1} \underbrace{l(x_\kappa, u_\kappa)}_{\text{aşama maliyeti}} + \underbrace{V_f(x_N)}_{\text{nihai maliyet}}$$

(kuadratik maliyet fonksiyonu halinde:

$$l(x_\kappa, u_\kappa) = x_\kappa^T Q x_\kappa + u_\kappa^T R u_\kappa, V_f(x_N) = x_N^T P x_N)$$

# Model öngörüülü kontrolde kararlılık - Kanıt

## Varsayımlar:

1. Aşama maliyeti  $l(x, u)$  bir pozitif tanımlı fonksiyondur
2. Nihai kısıt kümesi lokal LQR kontrolör ( $u = -K_{LQR}x$ ) kontrolündeki sistem için bir envariyant kümedir, yani:

$$x^+ = (A - BK_{LQR})x \in \mathcal{X}_f \quad \forall x \in \mathcal{X}_f$$

3.  $\mathcal{X}_f$  içinde tüm durum ve giriş kısıtları sağlanır:

$$\mathcal{X}_f \subseteq \mathcal{X}, -K_{LQR}x \in \mathcal{U} \quad \forall x \in \mathcal{X}_f$$

4. Nihai maliyet  $V_f$ , nihai küme  $\mathcal{X}_f$ 'de bir Lyapunov fonksiyonudur ve aşağıdaki şartı sağlar:

$$V_f(x^+) - V_f(x) \leq -l(x, -K_{LQR}x) \quad \forall x \in \mathcal{X}_f$$

**Teorem:** MPC kontrolündeki kapalı-çevrim sistem için  $x = 0$  asimptotik kararlı bir denge durumudur.

# Model öngörülü kontrolde kararlılık - Kanıt

## Yinelemeli olanaklılık:

- ▶ Başlangıç durumu  $x_0 = x(k)$  için MPC probleminin olanaklı olduğunu varsayıalım ve  $x(k)$  için hesaplanan optimal kontrol girişleri dizisini  $[u_0^*, u_1^*, \dots, u_{N-1}^*]$  ile gösterelim.
- ▶  $x(k+1)$ 'de  $[u_0^*, u_1^*, \dots, -K_{LQR}x_N^*]$  olanaklıdır:
  1.  $x_N \in \mathcal{X}_f \rightarrow -K_{LQR}x_N^*$  olanaklıdır
  2.  $x_{N+1} = (A - BK_{LQR})x_N^* \in \mathcal{X}_f$

Bu kapalı-çevrim sistemdeki MPC yinelemeli olanaklılık özelliğine sahiptir.

(nihai kısıt  $x_N \in \mathcal{X}_f$  yinelemeli olanaklılık sağlar)

# Model öngörüülü kontrolde kararlılık - Kanıt

**Kapalı-çevrim kararlılık:**

$$J^*(x(k)) \triangleq \sum_{\kappa=0}^{N-1} l(x_\kappa^*, u_\kappa^*) + V_f(x_N^*)$$

$x(k+1)$  için olanaklı, optimal-altı kontrol girişleri dizisi:  
 $[u_1^*, u_2^*, \dots, -K_{LQR}x_N^*]$

bu dizi için oluşan durum dizisi:  $[x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*, \tilde{x}_{N+1}]$   
 $(\tilde{x}_{N+1} = (A - BK_{LQR})x_N^*)$

bu diziler için oluşan maliyet:

$$\tilde{J}(x(k)) \triangleq \sum_{\kappa=1}^N l(x_\kappa^*, u_\kappa^*) + V_f(\tilde{x}_{N+1})$$

bu maliyet optimal-altıdır:  $J^*(x(k)) \leq \tilde{J}(x(k))$

## Model öngörülü kontrolde kararlılık - Kanıt

$$\begin{aligned} J^*(x(k+1)) &\leq \tilde{J}(x(k+1)) \triangleq \sum_{\kappa=1}^N l(x_\kappa^*, u_\kappa^*) + V_f(\tilde{x}_{N+1}) \\ &= \sum_{\kappa=0}^{N-1} l(x_\kappa^*, u_\kappa^*) - l(x_0^*, u_0^*) + l(x_N^*, u_N^*) + V_f(\tilde{x}_{N+1}) \\ &= \underbrace{\sum_{\kappa=0}^{N-1} l(x_\kappa^*, u_\kappa^*) + V_f(x_N^*)}_{\triangleq J^*(x(k))} - l(x_0^*, u_0^*) \dots \\ &\quad + V_f(\tilde{x}_{N+1}) - V_f(x_N^*) + l(x_N^*, -K_{LQR}x_N^*) \\ &= J^*(x(k)) - l(x_0^*, u_0^*) + \underbrace{V_f(\tilde{x}_{N+1}) - V_f(x_N^*) + l(x_N^*, -K_{LQR}x_N^*)}_{\text{varsayımlı } 4 \rightarrow \leq 0} \\ &\leq J^*(x(k)) - l(x_0^*, u_0^*) \end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta J^*(x(k)) \triangleq J^*(x(k+1)) - J^*(x(k)) \leq -l(x_0^*, u_0^*)}$$

$J^*(x(k))$ , MPC'nin olanaklı olduğu tüm başlangıç durumlarını içeren kümede,  $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$  sistemi için bir Lyapunov fonksiyonudur.  $x = 0$  bu sistem için asimptotik kararlı bir denge durumudur.

## Model öngörüülü kontrolde kararlılık

- ▶ Nihai kısıt kümesi  $\mathcal{X}_f$  ve nihai maliyet  $x_N^T P x_n$  MPC kontrollü kapalı-çevrim sistem için yinelemeli olanaklılık ve asimptotik kararlılık sağlarlar.
- ▶ Nihai kısıt sistemin çekim bölgesini küçültür.
- ▶ Çekim bölgesi öngörü ufkı artırılarak büyütülebilir.

Nihai kısıtlar uygulamada kullanılır mı?

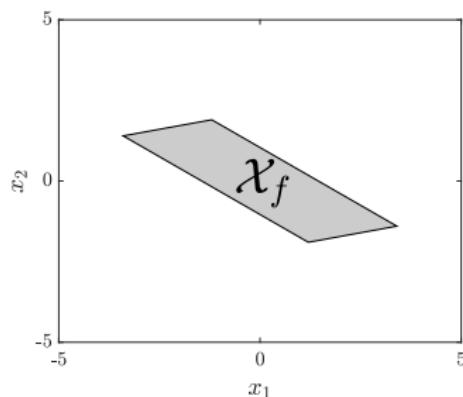
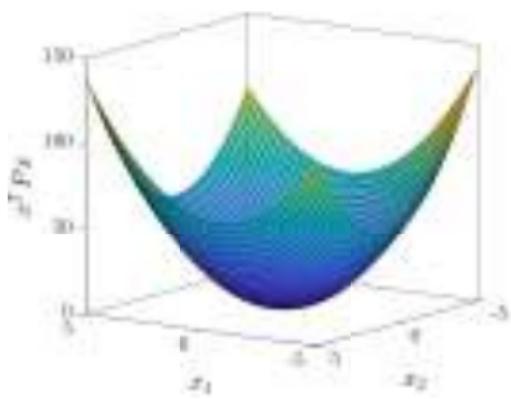
- ▶ Genellikle kullanılmazlar, çünkü:
  - İleri seviye kontrol teorisi gerektirir
  - Hesaplamak için ileri yöntemler gereklidir
  - Çekim bölgesini küçültür
  - Genellikle gereksizdir: Açık-çevrim kararlı sistem ve uzun bir öngörü ufkı için MPC kontrollü kapalı-çevrim sistem  $x = 0$  etrafındaki büyük bir bölge için yinelemeli olanaklılık ve asimptotik kararlılık özelliklerine sahip olur

# Model öngörülü kontrolde kararlılık

Örnek:  $x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(k)$   $x(k) \rightarrow [0 \ 0]^T$

$$Q = I_2 \quad R = 1 \quad K_{\text{LQR}} = \begin{bmatrix} 0.686 & 0.957 \end{bmatrix}, |u(k)| \leq 1$$

$$V_f(x) = x^T \underbrace{\begin{bmatrix} 2.3 & 0.3 \\ 0.3 & 2.7 \end{bmatrix}}_P x \quad \mathcal{X}_f = \{x \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{\begin{bmatrix} 0.72 & 1 \\ -0.72 & -1 \\ -0.23 & 1 \\ 0.23 & -1 \end{bmatrix}}_{G_f} x \leq \underbrace{\begin{bmatrix} 1.04 \\ 1.04 \\ 2.17 \\ 2.17 \end{bmatrix}}_{g_f}\}$$



# Model öngörülu kontrolde kararlılık

$$\underset{u_\kappa}{\text{minimize}} \quad \sum_{\kappa=0}^{N-1} x_\kappa^T Q x_\kappa + u_\kappa^T R u_\kappa + x_N^T P x_N$$

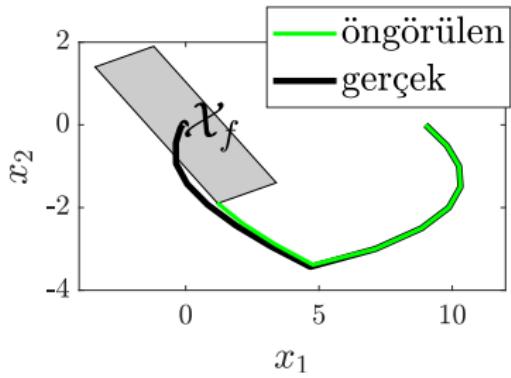
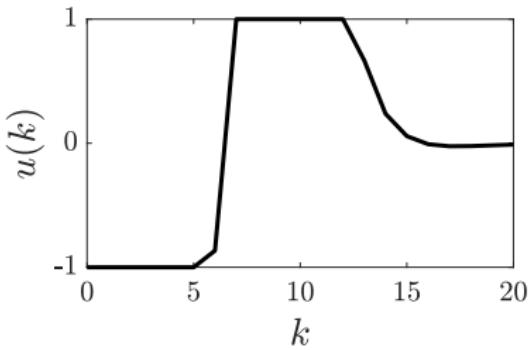
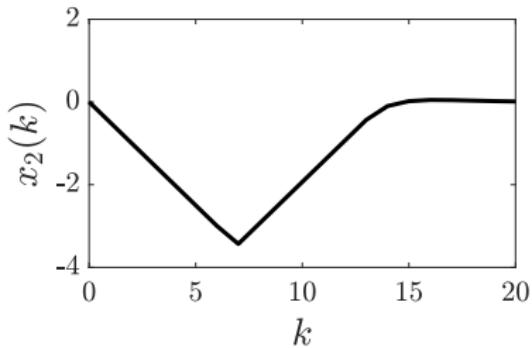
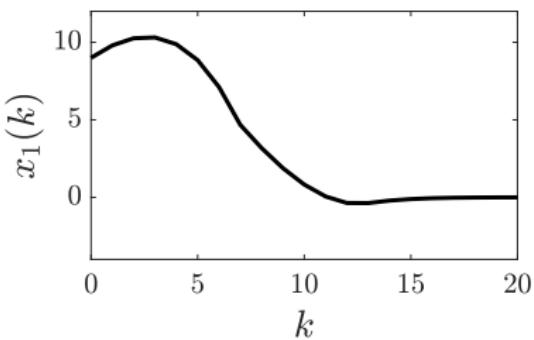
$$\text{bağlı} \quad x_{\kappa+1} = Ax_\kappa + Bu_\kappa$$

$$-1 \leq u_\kappa \leq 1$$

$$G_f x_N \leq g_f$$

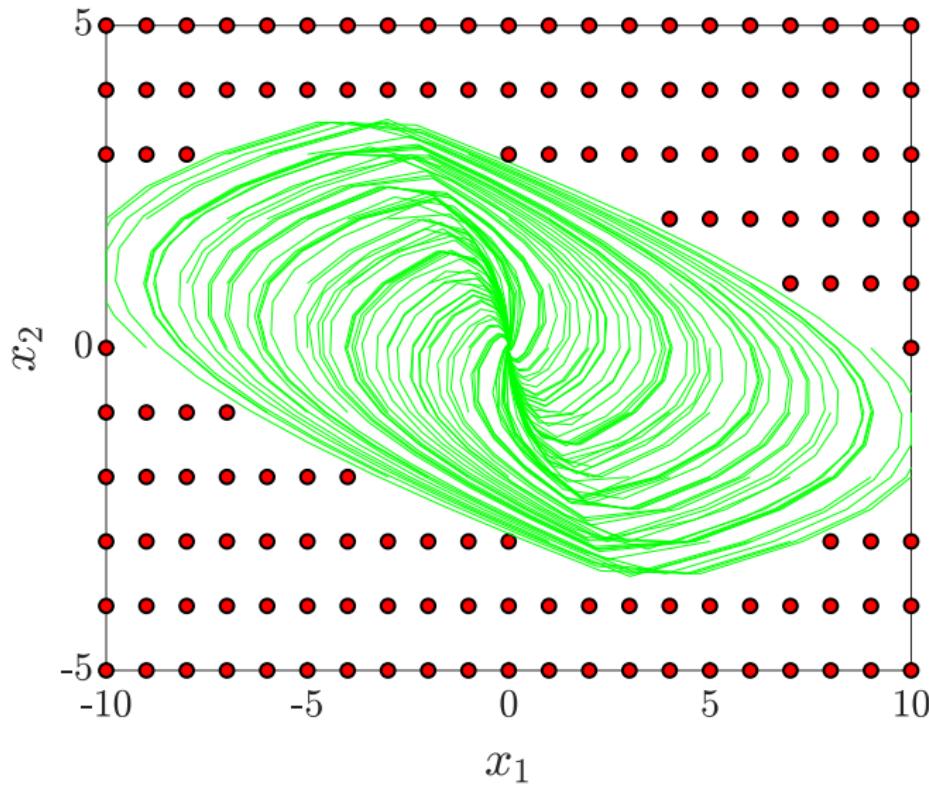
$$x_0 = x(k)$$

# Model öngörülu kontrolde kararlılık



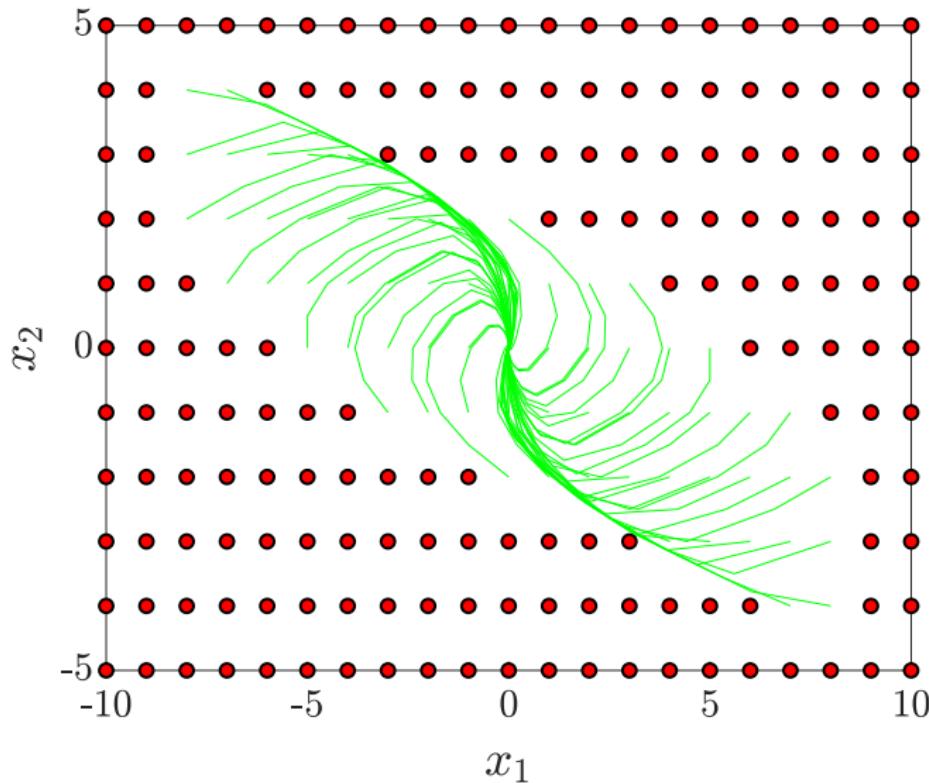
# Model öngörülu kontrolde kararlılık

çekim bölgesi (LQR)



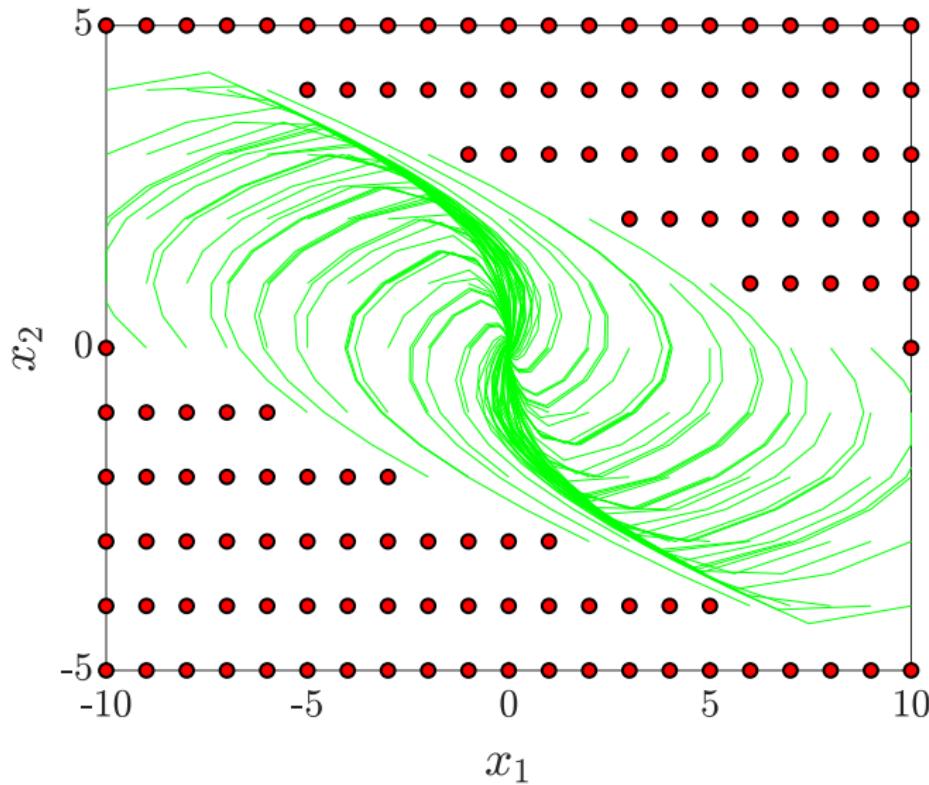
# Model öngörülu kontrolde kararlılık

çekim bölgesi (MPC,  $N = 5$ )



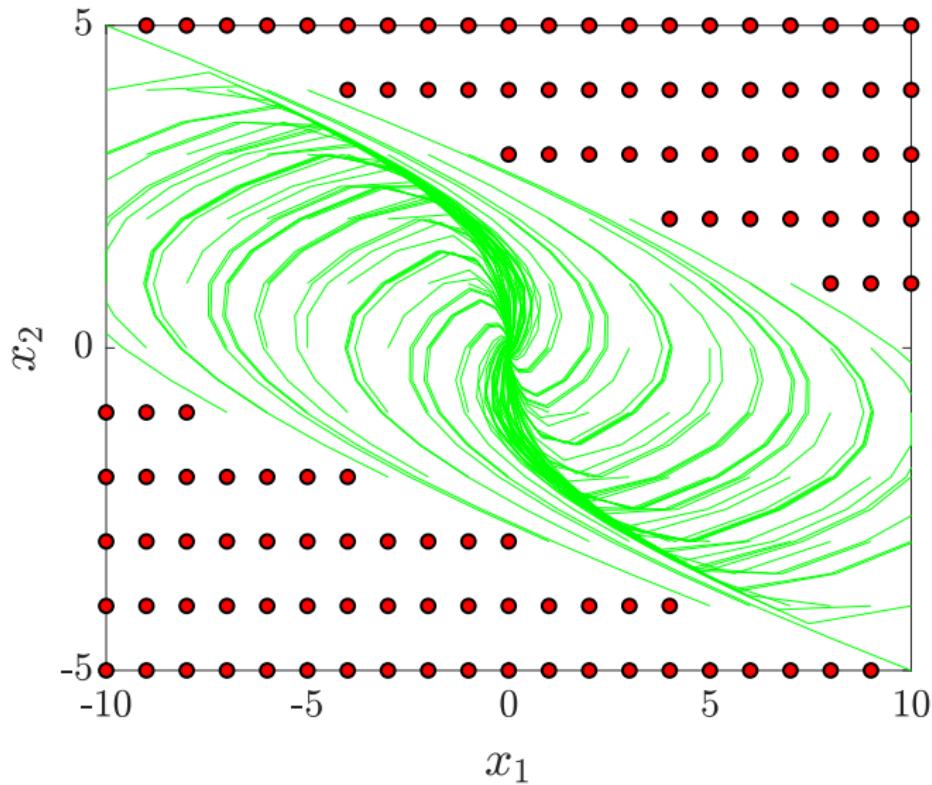
# Model öngörülu kontrolde kararlılık

çekim bölgesi (MPC,  $N = 10$ )



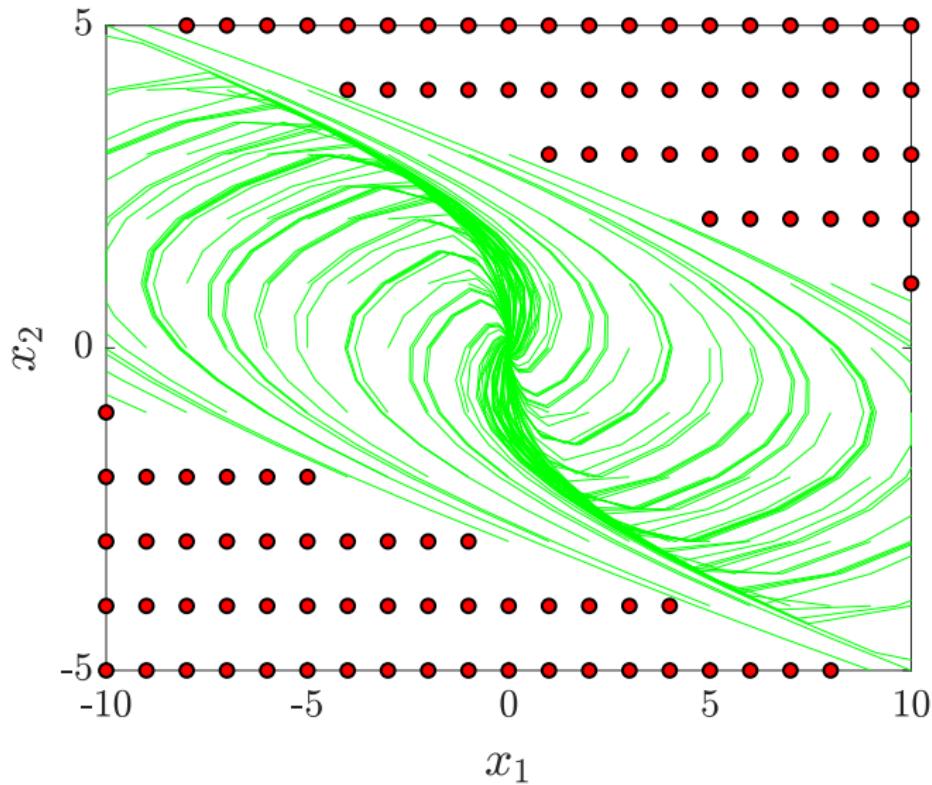
# Model öngörülu kontrolde kararlılık

çekim bölgesi (MPC,  $N = 15$ )



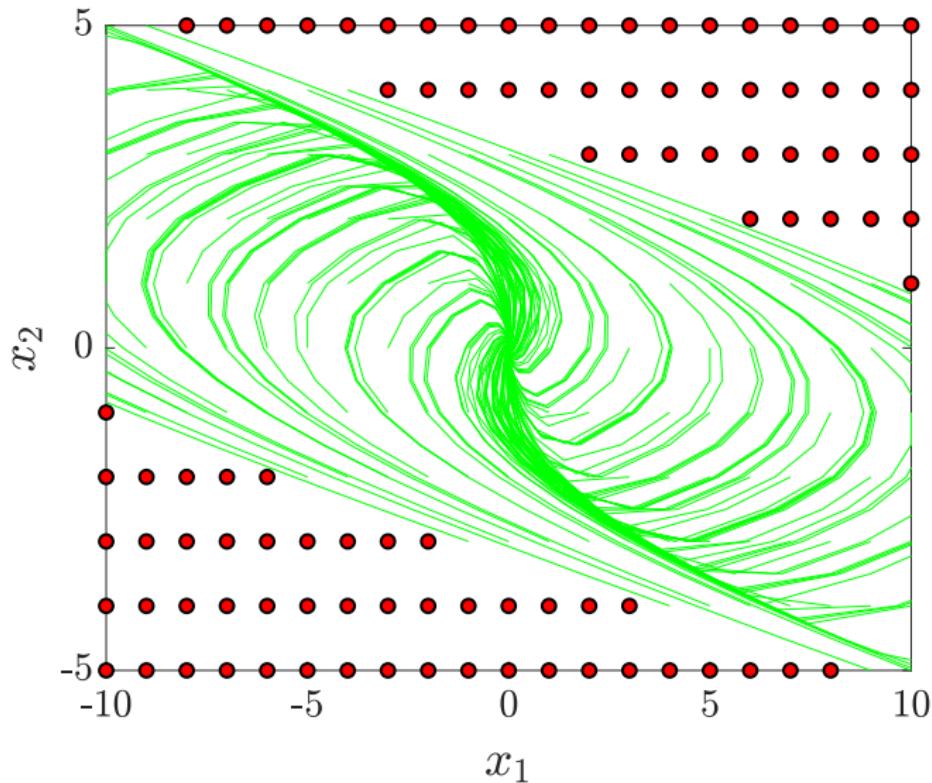
# Model öngörülu kontrolde kararlılık

çekim bölgesi (MPC,  $N = 20$ )



# Model öngörülu kontrolde kararlılık

çekim bölgesi (MPC,  $N = 20$ , nihai maliyet ve kısıt yok)



## Bölüm 16

Uygulamaya dair konular

## Alt Bölüm 1

Yumuşak kısıtlar

# **Yumuşak kısıtlar (soft constraints)**

## **Motivasyon:**

- ▶ Durum kısıtları (nihai kısıt olmasa bile) MPC probleminin olanaksız hale gelmesine yol açabilir.
- ▶ Bu durum uygulamada istenmez çünkü pratik bir kontrolör her durumda bir kontrol girişi hesaplayabilmelidir.

## **Kısıtlarla ilgili gözlemler:**

- ▶ Kontrol girişi kısıtları genellikle eyleyici limitlerini temsil ederler. Bu tip kısıtların uygulamada hesaba katılması ve tam olarak sağlanması gereklidir.
- ▶ Durum kısıtları kontrol başarımıyla ilgili olarak istenen sistem davranışını temsil ederler. Bu tip kısıtlar gerektiğinde geçici olarak ihlal edilebilir.

**Endüstriyel uygulamalarda genellikle yumuşak kısıtlar kullanılır.**

# Yumuşak kısıtlar

## Sert kısıtlı MPC

$$\min_{u_\kappa} \sum_{\kappa=0}^{N-1} l_{LQ}(x_\kappa, u_\kappa)$$

bağlı  $x_{\kappa+1} = Ax_\kappa + Bu_\kappa$   
 $H_x x_\kappa \leq h_x$ ,  $u_\kappa \in \mathcal{U}$   
 $x_0 = x(k)$

$$(l_{LQ}(x_\kappa, u_\kappa) \triangleq x_\kappa^T Q x_\kappa + u_\kappa^T R u_\kappa)$$

## Yumuşak kısıtlı MPC

$$\min_{u_\kappa} \sum_{\kappa=0}^{N-1} l_{LQ}(x_\kappa, u_\kappa) + \rho(\epsilon_\kappa)$$

bağlı  $x_{\kappa+1} = Ax_\kappa + Bu_\kappa$   
 $H_x x_\kappa \leq h_x + \epsilon_\kappa$   
 $0 \leq \epsilon_\kappa$   
 $u_\kappa \in \mathcal{U}$   
 $x_0 = x(k)$

- Durum kısıtları **gevşek değişkenler** (*slack variables*)  $\epsilon_\kappa$  ile gevsetilir.
- Durum kısıtlarının ihlal edilme miktarı maliyet fonksiyonuna eklenen  $\rho(\epsilon_\kappa)$  terimiyle hesaba katılır.

$(\rho(\epsilon_\kappa))$  örneğin kuadratik formda seçilebilir:  $\rho(\epsilon_\kappa) = \epsilon_\kappa^T S \epsilon_\kappa$ )

Alt Bölüm 2

Referans izleme

## Referans izleme

Standart MPC'de sistem durumunun orijine regülatörlerinin (referans) ele alınır.  
 $(x(k) \rightarrow 0)$

$$\begin{aligned} & \underset{\{u_\kappa\}_{\kappa=0}^{N-1}}{\text{minimize}} && \sum_{\kappa=0}^{N-1} x_\kappa^T Q x_\kappa + u_\kappa^T R u_\kappa \\ & \text{bağlı} && x_{\kappa+1} = Ax_\kappa + Bu_\kappa \\ & && H_x x_\kappa \leq h_x \\ & && H_u u_\kappa \leq h_u \\ & && x_0 = x(k) \end{aligned}$$

Uygulamada kontrolörün çıkış için referans izleme  
 $(y(k) \rightarrow r(k))$  yapabilmesi istenir. MPC formülasyonunu  
referans izleme yapabilecek şekilde modifiye etmemiz gereklidir.

## Referans izleme

Aşağıdaki sistemi ele alalım:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

Referans izleme ile oluşan sistem durumu bir denge durumu olmalıdır ve sistemi bu dengede tutabilecek bir kontrol girişi mevcut olmalıdır ( $x_s = Ax_s + Bu_s$ ).

Referans izleme ( $y(k) \rightarrow r$ ), sistem durumu  $x(k)$ 'in  $y_s = Cx_s = r$  denklemini sağlayan hedef durum  $x_s$ 'e ulaşmasıyla gerçekleşir.

Hedef koşulu:

$$\begin{aligned} x_s &= Ax_s + Bu_s \\ Cx_s &= r \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} I - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ u_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}$$

# Denge hedef problemi

Durum ve giriş kısıtları ile referans izlemeyi sağlayan denge çifti  $(x_s, u_s)$ , denge hedef problemi çözülerek hesaplanabilir:

$$\begin{array}{ll}\text{minimize}_{x_s, u_s} & u_s^T R_s u_s \\ \text{bağlı} & \begin{bmatrix} I - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ u_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \\ & H_x x_s \leq h_x \\ & H_u u_s \leq h_u\end{array}$$

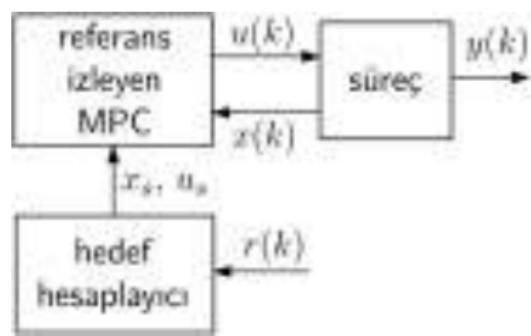
Denge hedef problemi olanaksız ise, aşağıdaki problem çözülerek referans  $r$ 'ye en yakın erişilebilir  $(x_s, u_s)$  hesaplanır:

$$\begin{array}{ll}\text{minimize}_{x_s, u_s} & (Cx_s - r)^T Q_s (Cx_s - r) \\ \text{bağlı} & x_s = Ax_s + Bu_s \\ & H_x x_s \leq h_x \\ & H_u u_s \leq h_u\end{array}$$

# Referans izleyen MPC

Denge hedef problemini çözerek hedef hesaplayan bir mekanizma ile birlikte aşağıdaki referans izleyen MPC formülasyonu kullanılarak MPC-tabanlı referans izleme kontrol sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned} \min. \quad & \sum_{\kappa=0}^{N-1} (x_\kappa - x_s)^T Q (x_\kappa - x_s) + \\ & + (u_\kappa - u_s)^T R (u_\kappa - u_s) \\ \text{bağlı} \quad & x_{\kappa+1} = Ax_\kappa + Bu_\kappa \\ & H_x x_\kappa \leq h_x \\ & H_u u_\kappa \leq h_u \\ & x_0 = x(k) \end{aligned}$$



## Alt Bölüm 3

Daimi rejimde hatasız kontrol

# Sabit bozucuların etkisi

Sisteme etkiyen zamanda sabit bozucular sistemin durum yörüngelerinin nominal model ile öngörülenden farklımasına sebep olur ve **daimi rejim hatasına** (*offset*) yol açar.

## Kısıtsız kontrol yaklaşımı:

- ▶ Kısıtsız kontrolde modele integral etki ekleyerek daimi rejim hmasını giderebiliriz.
- ▶ İntegral etki giriş kısıtları mevcutsa **integral sarması** (*integral windup*) problemine sebep olabilir. Sarma engelleyici yöntemler kullanmak gereklidir.

## Kısıtlı kontrol/MPC yaklaşımı:

- ▶ Bozucuyu modelle
- ▶ Çıkış ölçümlerini ve sistem modelini kullanarak (yani, durum kestirme ile) sistem durumunu ve bozucuyu kestir
- ▶ Bozucu kestirimini kullanarak daimi rejim hmasını giderecek kontrol girişlerini hesapla

## Ek yapılmış sistem

Bozucu modelini ekleyerek ek yapılmış sistemi elde ederiz:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + B_d d(k)$$

$$d(k+1) = d(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + C_d d(k)$$

$$x(k) \in \mathbb{R}^n \quad d(k) \in \mathbb{R}^p \quad y(k) \in \mathbb{R}^q$$

$B_d$  ve  $C_d$  matrisleri ek yapılmış sistem gözlenebilir olacak şekilde seçilmelidir.

Ek yapılmış sistem ancak ve ancak  $(A, C)$  gözlenebilir ise ve

$$\begin{bmatrix} A - I & B_d \\ C & C_d \end{bmatrix}$$

matrisi tam sütun ranklı ise (yani rankı  $n+p$  ise) gözlenebilirdir.  
⇒ Bozucu boyutu  $p \leq q$  ile sınırlıdır.

## Durum ve bozucu kestirme

Ek yapılmış sistem modeli kullanılarak durum kestirici tasarılayabiliriz:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{d}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_d \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ \hat{d}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \dots \\ + \begin{bmatrix} L_x \\ L_d \end{bmatrix} (C\hat{x}(k) + C_d\hat{d}(k) - y(k))$$

Buradaki  $\hat{x}(k)$  durum kestirimimi,  $\hat{d}(k)$  ise bozucu kestirimidir.

Gözleyici kazanç matrisi  $L = [L_x \quad L_d]^T$ , kestirici dinamiklerinin asimptotik kararlı olmasını sağlayacak şekilde seçilmelidir. Bu seçim özdeğer atama ile veya (ek yapılmış sistem modelinde süreç ve algılayıcı gürültüsü hesaba katılarak) Kálmánfiltresi yöntemiyle yapılabilir.

# Daimi rejimde hatasız MPC

Durum ve bozucu kestirici uygun MPC formülasyonuyla birleştirilerek daimi rejimde hatasız MPC-tabanlı kontrol sistemi elde edilir:

$$\min. \sum_{\kappa=0}^{N-1} x_{\kappa}^T Q x_{\kappa} + u_{\kappa}^T R u_{\kappa}$$

bağlı  $x_{\kappa+1} = Ax_{\kappa} + Bu_{\kappa} + B_d \hat{d}(k)$

$$H_x x_{\kappa} \leq h_x$$

$$H_u u_{\kappa} \leq h_u$$

$$x_0 = \hat{x}(k)$$

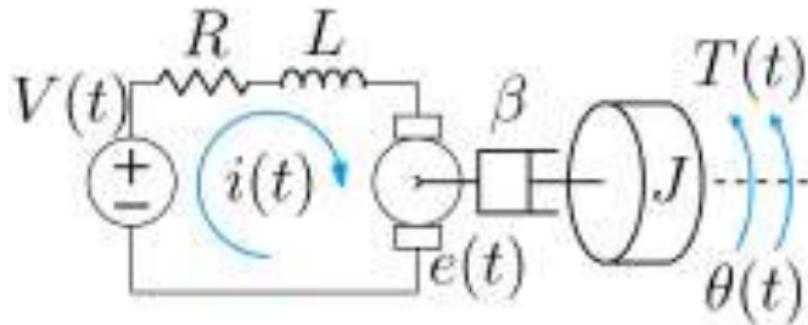


## Bölüm 17

Sınav sorusu örnekleri - Final

# Durum Uzayında Modelleme ve Analiz

**Soru 1)** Aşağıda armatür kontrollü bir doğru akım motorunun şeması verilmiştir.



**Soru 1a)** Bu sistemin dinamik denklemleri şu şekilde verilsin:

$$\ddot{\theta}(t) + 10\dot{\theta}(t) = i(t)$$

$$\dot{i}(t) + 2i(t) = V(t) - 0.02\dot{\theta}(t)$$

Giriş  $V(t)$ , çıkış  $\dot{\theta}(t)$  olacak şekilde sistemin durum uzayı modelini yazınız.

# Durum Uzayında Modelleme ve Analiz

**Çözüm 1a)** Sistemin durumlarını  $x_1 = \dot{\theta}$  ve  $x_2 = i$  olarak seçelim. Bu seçimler ve soruda istenen  $u = V$  tanımiyla sistemin dinamik denklemlerini şu şekilde yeniden yazabiliriz:

$$\dot{x}_1(t) + 10x_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) + 2x_2(t) = u(t) - 0.02x_1(t)$$

Bu denklemleri düzenleyerek ve soruda istenen  $y = \dot{\theta}(t)$  tanımiyla sistemin durum uzayı modelini şu şekilde elde ederiz:

$$\dot{x}_1(t) = -10x_1(t) + x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -0.02x_1(t) - 2x_2(t) + u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Matris formunda yazarsak:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ -0.02 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

# Durum Uzayında Modelleme ve Analiz

**Soru 1b)** Bu sistemin durum uzayı modeli 0.25 saniyelik örneklemme zamanı ve sıfır dereceli tutma ile zamanda ayrıklaştırılarak aşağıdaki ayrık-zamanlı model elde edilmiştir.

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.082 & 0.0655 \\ -0.0013 & 0.6063 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.0131 \\ 0.1967 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

# Durum Uzayında Modelleme ve Analiz

**Soru 1b)-1)** Sistem erişilebilir midir?

**Çözüm 1b)-1)** Sistemin erişilebilirlik matrisini şu şekilde yazabiliriz:

$$R = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0131 & 0.014 \\ 0.1967 & 0.1192 \end{bmatrix}$$
$$\det(R) = -0.0012 \neq 0$$

$R$  tam ranklidir ( $\text{rank}(R) = 2$ ). Sistem erişilebilirdir.

**Soru 1b)-2)** Sistem gözlenebilir midir?

**Çözüm 1b)-2)** Sistemin gözlenebilirlik matrisini şu şekilde yazabiliriz:

$$\Theta = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.082 & 0.0655 \end{bmatrix}$$
$$\det(\Theta) = 0.0655 \neq 0$$

$\Theta$  tam ranklidir ( $\text{rank}(\Theta) = 2$ ). Sistem gözlenebilirdir.

# Durum Uzayında Kontrol

**Soru 1b)-3)** Bu dinamik sistem ve  $u(k) = -Kx(x)$  formundaki kontrolörden oluşan kapalı-çevrim sistemin özdeğerlerini 0.5 ve 0.25 olarak atayan  $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$  matrisini hesaplayınız.

**Çözüm 1b)-3)** Bu soruyu Ackermann formülü ile çözebiliriz:

$$K = \text{row}_2 \left( R^{-1} p_d(A) \right)$$

$$p_d(\lambda) = (\lambda - 0.5)(\lambda - 0.25) = \lambda^2 - 0.75\lambda + 0.125$$

$$p_d(A) = A^2 - 0.75A + 0.125I$$

$$p_d(A) = \begin{bmatrix} 0.0066 & 0.0451 \\ -0.0009 & 0.3675 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0615 & 0.0491 \\ -0.001 & 0.4547 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.125 & 0 \\ 0 & 0.125 \end{bmatrix}$$

$$p_d(A) = \begin{bmatrix} 0.0701 & -0.004 \\ 0.0001 & 0.0378 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0131 & 0.014 \\ 0.1967 & 0.1192 \end{bmatrix} \quad R^{-1} = \begin{bmatrix} -100.7559 & 11.7941 \\ 166.2053 & -11.0691 \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} p_d(A) = \begin{bmatrix} -100.7559 & 11.7941 \\ 166.2053 & -11.0691 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0701 & -0.004 \\ 0.0001 & 0.0378 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.066 & 0.8529 \\ 11.6566 & -1.09 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 11.6566 & -1.09 \end{bmatrix}$$

# Durum Uzayında Kontrol

**Soru 2)** Ayrık-zamanlı doğrusal bir sistemin durum uzayı modeli aşağıda verilmiştir:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.95 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

**Soru 2a)**  $x_1$  ve  $x_2$  durumlarının erişilebilirlik ve gözlemebilirlikleri hakkında ne söylenebilir?

**Çözüm 2a)**  $x_1$  erişilemezdir ( $u$ 'nun  $x_1$ 'e etkisi yok) ancak gözlemebilirdir ( $y = x_1$ ).  $x_2$  gözlenemezdir ( $x_2$ 'in  $y$ 'ye etkisi yok) ancak erişilebilirdir ( $x_2(k+1) = 0.95x_2(k) + 0.1u(k)$ ).

# Durum Uzayında Kontrol

**Soru 2b)** Bu dinamik sistem ve  $u(k) = -Kx(x)$  ( $K = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$ ) formundaki kontrolörden oluşan kapalı-çevrim sistemin özdeğerlerini bulunuz.

**Çözüm 2b)** Kapalı-çevrim durum matrisi şu şekildedir:

$$A_c = A - BK$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.95 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.75 \end{bmatrix}$$

Matrisin özdeğerleri 0.6 ve 0.75 olarak bulunur.

# Durum Uzayında Kontrol

**Soru 2c)** Bu dinamik sistem ve  $u(k) = -Kx(x)$  formundaki kontrolörden oluşan kapalı-çevrim sistemin çıkışı,  $K$ 'dan bağımsız olarak neden daima asimptotik kararlıdır?

**Çözüm 2c)** Sistemin çıkışını ve dinamiklerini yazarsak:

$$\begin{aligned}y(k) &= x_1(k) \rightarrow y(k+1) = x(k+1) = 0.6x(k) = 0.6y(k) \\&\qquad\qquad\qquad y(k+1) = 0.6y(k)\end{aligned}$$

Kapalı-çevrim sistemin çıkışının dinamiklerini ifade eden özdeğerin ( $\lambda_1 = 0.6$ ) mutlak değeri 1'den küçük olduğu için çıkış asimptotik kararlıdır.  $x_1$  durumu erişilemezdir, yani  $x_1$  durumuna karşılık gelen özdeğerin ( $\lambda_1 = 0.6$ ) yeri  $K$  matrisi ile değiştirilemez.  $x_1$  durumu, dolayısıyla da sistemin çıkışı  $K$ 'dan bağımsız olarak daima asimptotik kararlıdır.

# Durum Uzayında Kontrol

**Soru 2d)** Bu sistem için tasarlanmış bir doğrusal kuadratik regülatör

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1.5907 \end{bmatrix},$$

karşılık gelen ayrık-zamanlı cebrik Riccati denkleminin çözümü ise

$$P = \begin{bmatrix} 15.625 & 0 \\ 0 & 20.1115 \end{bmatrix}$$

olarak verilsin. Verilenlere göre ağırlıklendirme matrisleri  $Q$  ve  $R$ 'yi hesaplayınız.

# Durum Uzayında Kontrol

**Çözüm 2d)** Doğrusal kuadratik regülatör formülü şu şekildedir:

$$K = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A$$

İfadelerin sayısal değerlerini yerine koyup yeniden yazarsak:

$$B^T P B = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15.625 & 0 \\ 0 & 20.1115 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} = 0.2011$$

$$B^T P A = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15.625 & 0 \\ 0 & 20.1115 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.95 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1.9106 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1.5907 \end{bmatrix} = \frac{1}{R + 0.2011} \begin{bmatrix} 0 & 1.9106 \end{bmatrix}$$

Buradan  $R = 1$  olarak bulunur.

# Durum Uzayında Kontrol

**Çözüm 2d) (devam)** Ayrık-zamanlı cebrik Riccati denklemi şu şekildedir:

$$P = A^T PA + Q - A^T PB \left( R + B^T PB \right)^{-1} B^T PA$$
$$Q = P - A^T PA + A^T PB \left( R + B^T PB \right)^{-1} B^T PA$$

İfadelerin sayısal değerlerini yerine koyup yeniden yazarsak:

$$A^T PA = \begin{bmatrix} 5.625 & 0 \\ 0 & 18.1506 \end{bmatrix} \quad A^T PB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.9106 \end{bmatrix}$$

$$R + B^T PB = 1.2011 \quad B^T PA = \begin{bmatrix} 0 & 1.9106 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 15.625 & 0 \\ 0 & 20.1115 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5.625 & 0 \\ 0 & 18.1506 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.9106 \end{bmatrix} \frac{1}{1.2011} \begin{bmatrix} 0 & 1.9106 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 15.625 & 0 \\ 0 & 20.1115 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5.625 & 0 \\ 0 & 18.1506 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3.0392 \end{bmatrix}$$

Buradan  $Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$  olarak bulunur.

# Durum Uzayında Kontrol

**Soru 2e)** Bu sistem için tasarlanmış

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1.5907 \end{bmatrix}$$

formundaki doğrusal kuadratik regülatörün gerçekleştirilmesi neden imkansızdır?

**Çözüm 2e)** Bu kontrolör ile kontrol girişinin hesaplanması için ( $u(k) = -Kx(k)$ ) sistem durumunun (yani,  $x_1$  ve  $x_2$ 'in) bilgisi gereklidir. Ancak  $x_2$  gözlenemezdir, dolayısıyla  $x_2$ 'in bilgisini kontrolöre aktarmak ve kontrolörü gerçekletemek imkansızdır.

# Model Öngörülü Kontrol

**Soru 3)** Ayrık-zamanlı doğrusal bir sistemin durum uzayı modeli aşağıda verilmiştir:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

**Soru 3a)** Bu sistem için (nihai maliyet kullanmadan, nihai kısıtı ise  $x_N = 0$  olarak seçerek) öngörü ufkunu  $N$ , durum ve giriş kısıtlarını  $|x_1| \leq 3$  ve  $|u| \leq 1$ , başlangıç durumunu ise  $\bar{x}_0$  olarak belirterek doğrusal kuadratik model öngörülü kontrol problemini yazınız.

**Çözüm 3a)**

$$\underset{\{u_\kappa\}_{\kappa=0}^{N-1}}{\text{minimize}} \quad \sum_{\kappa=0}^{N-1} x_\kappa^T Q x_\kappa + u_\kappa^T R u_\kappa$$

bağlı  $x_{\kappa+1} = Ax_\kappa + Bu_\kappa$

$$-3 \leq x_{1,\kappa} \leq 3$$

$$-1 \leq u_\kappa \leq 1$$

$$x_N = 0$$

$$x_0 = \bar{x}_0$$

# Model Öngörüülü Kontrol

**Soru 3b)** Bu sistem için durum ve giriş matrisleri aşağıdaki şekilde verilsin:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3a) şıkkındaki doğrusal kuadratik model öngörüülü kontrolör için öngörü ufkı  $N = 2$  olarak seçilsin.  $[-2; 2] \times [-1; 1]$  olarak verilen kümede model öngörüülü kontrol problemini olanaksız hale getiren bir başlangıç durumu  $\bar{x}_0$  bulunduğu gösteriniz.

# Model Öngörülü Kontrol

**Çözüm 3b)** Model öngörülü kontrolörün hesapladığı (öngörülen) sistem durumu yörüngelerini başlangıç durumundan ( $\kappa = 0$ ) nihai duruma ( $\kappa = N = 2$ ) kadar kısıtları bilinenler ( $\bar{x}_0$ 'in elemanları ( $x_{1,\kappa=0}$  ve  $x_{2,\kappa=0}$ ),  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $x_N$ ) cinsinden ifade ederek problemin verilen  $\bar{x}_0$  kümесinden hangi değer için olanaksız hale geldiğini bulabiliriz.

Öncelikle sembolik olarak  $\kappa = 0$ 'dan  $\kappa = 1$ 'e durum yörüngelerini hesaplayalım:

$$\begin{bmatrix} x_{1,\kappa=1} \\ x_{2,\kappa=1} \end{bmatrix} = A \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1,\kappa=0} \\ x_{2,\kappa=0} \end{bmatrix}}_{\bar{x}_0} + Bu_0$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,\kappa=1} \\ x_{2,\kappa=1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,\kappa=0} \\ x_{2,\kappa=0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_0$$

$$x_{1,\kappa=1} = x_{1,\kappa=0} + 0.1x_{2,\kappa=0}$$

$$x_{2,\kappa=1} = x_{2,\kappa=0} + u_0$$

# Model Öngörülü Kontrol

**Çözüm 3b) (devam)** Sonra da  $\kappa = 1$ 'den  $\kappa = 2$ 'ye durum yörüngelerini hesaplayalım:

$$\begin{bmatrix} x_{1,\kappa=2} \\ x_{2,\kappa=2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{1,\kappa=1} \\ x_{2,\kappa=1} \end{bmatrix} + Bu_1$$

$$\begin{bmatrix} x_{1,\kappa=2} \\ x_{2,\kappa=2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,\kappa=1} \\ x_{2,\kappa=1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1$$

Önceki sayfada bulunan  $x_{1,\kappa=1}$  ve  $x_{2,\kappa=1}$  ifadelerini burada yerine yazarsak:

$$\begin{bmatrix} x_{1,\kappa=2} \\ x_{2,\kappa=2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,\kappa=0} + 0.1x_{2,\kappa=0} \\ x_{2,\kappa=0} + u_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1$$

$$x_{1,\kappa=2} = x_{1,\kappa=0} + 0.1x_{2,\kappa=0} + 0.1x_{2,\kappa=0} + 0.1u_0$$

$$x_{2,\kappa=2} = x_{2,\kappa=0} + u_0 + u_1$$

# Model Öngörülü Kontrol

**Çözüm 3b) (devam)**  $\bar{x}_0$  için verilen  $[-2; 2] \times [-1; 1]$  kümelerinden (yani,  $-2 \leq x_{1,\kappa=0} \leq 2$ ,  $-1 \leq x_{2,\kappa=0} \leq 1$ )

$\bar{x}_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$  şeklinde bir nokta seçip deneyelim:

$$x_{1,\kappa=2} = x_{1,\kappa=0} + 0.1x_{2,\kappa=0} + 0.1x_{2,\kappa=0} + 0.1u_0$$

$$x_{1,\kappa=2} = -2 + 0.1u_0$$

Nihai kısıttan dolayı  $x_{1,\kappa=N} = x_{1,\kappa=2} = 0$  olması gerekmektedir.  $x_{1,\kappa=2} = -2 + 0.1u_0$  ifadesinden  $x_{1,\kappa=2} = 0$  şartını sağlayan  $u_0$  değerinin 20 olduğu görülür. Ancak  $-1 \leq u_\kappa \leq 1$  şeklindeki giriş kısıtından dolayı  $u_0$ 'yu 20 seçmek mümkün değildir. Dolayısıyla bu model öngörülü kontrol problemi  $\bar{x}_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$  başlangıç durumu için olanaksızdır.