

Optimizasyona Giriş

T.C. Trakya Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik - Elektronik Mühendisliği Bölümü
Kontrol Anabilim Dalı

Dr. Öğr. Üyesi Işık İlber Sirmatel
sirmatel.github.io

Konu listesi

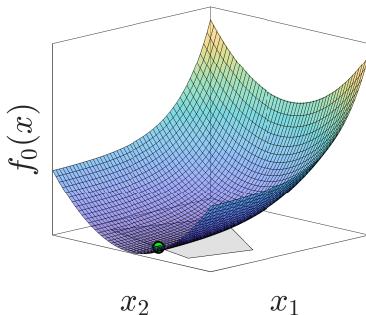
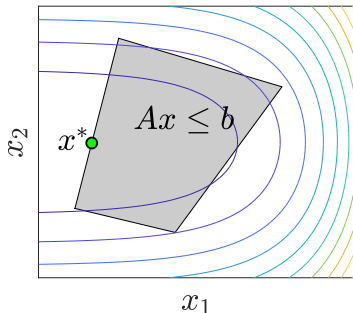
1. Temel kavramlar
2. Önemli problem sınıfları
3. Yöntemlerin sınıflandırılması
4. Algoritmalar
5. Uygulamalar

Bölüm 1

Temel kavramlar

Optimizasyonun tanımı

kısıtlı seçenekler
arasından en iyisini seçmek



optimizasyonun unsurları:

- modelleme (problemleri kurmak)
- teori (yöntemlerin analizi)
- algoritmalar (problemleri çözmek)

Optimizasyon problemi (bir standart form)

$$\begin{array}{ll} \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} & f(x) \\ \text{bağlı} & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0 \end{array}$$

- ▶ $x \in \mathbb{R}^n$ (optimizasyon değişkenleri vektörü)
- ▶ $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (amaç fonksiyonu)
- ▶ $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (eşitsizlik kısıtları fonksiyonu)
- ▶ $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ (eşitlik kısıtları fonksiyonu)

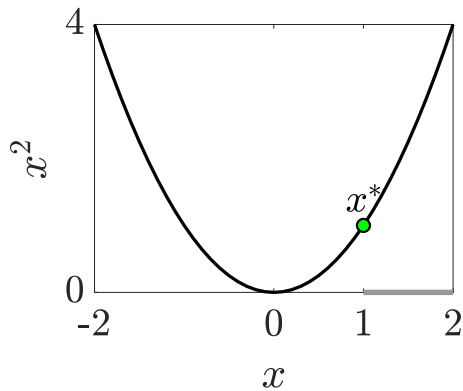
Optimizasyon problemlerinin unsurları

- ▶ **Amaç fonksiyonu** $f(x)$ optimizasyonun amacını bir niceliği minimize/maksimize etmek olarak ifade eder.
- ▶ **Optimizasyon değişkenleri vektörü** $x \in \mathbb{R}^n$ optimizasyon ile sayısal değerini bulmak istediğimiz değişkenlerden oluşan vektördür.
- ▶ **Olanaklı küme** Ω , x vektörünün elemanı olmak üzere kısıtlandığı kümeyi belirtir. Bu küme x 'in sağlaması gereken kısıtları belirler ve genellikle $g(x) \leq 0$ (eşitsizlik kısıtları) ve $h(x) = 0$ (eşitlik kısıtları) ile ifade edilir.

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0, h(x) = 0\}$$

Örnek

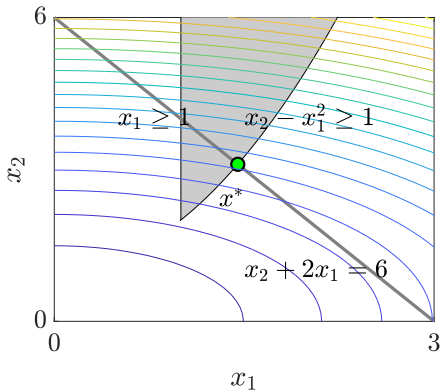
eşitsizlik kısıtlı, bir boyutlu optimizasyon problemi



$$\begin{array}{ll} \underset{x \in \mathbb{R}}{\text{minimize}} & x^2 \\ \text{bağlı} & 1 - x \leq 0 \end{array}$$

Örnek

eşitlik ve eşitsizlik kısıtlı, iki boyutlu optimizasyon problemi



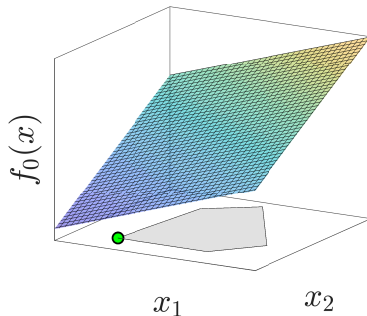
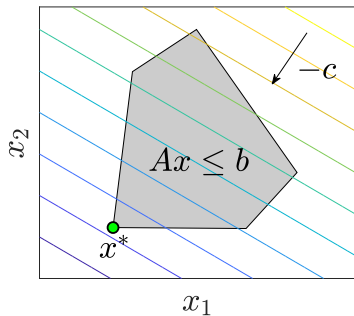
$$\begin{array}{ll} \underset{x \in \mathbb{R}^2}{\text{minimize}} & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{bağlı} & 1 + x_1^2 \leq x_2 \\ & 1 \leq x_1 \\ & x_2 + 2x_1 = 6 \end{array}$$

Bölüm 2

Önemli problem sınıfları

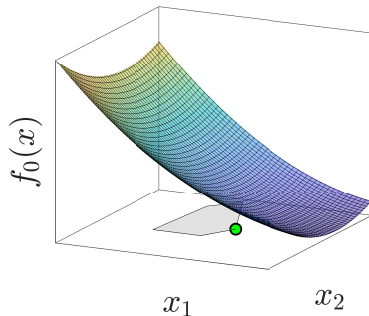
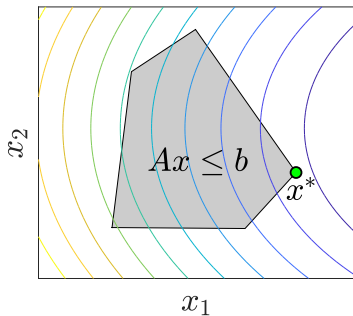
Doğrusal program (LP)

$$\begin{array}{ll}\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} & c^T x \\ \text{bağlı} & Ax \leq b \\ & Ex = e\end{array}$$



Karesel program (QP)

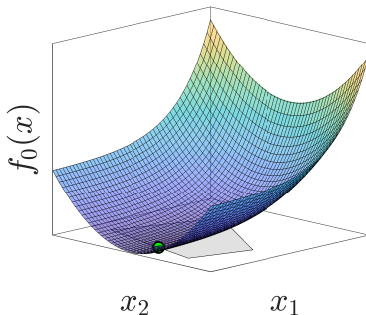
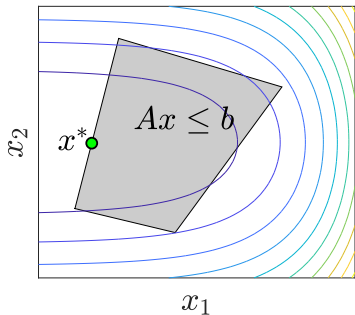
$$\begin{array}{ll}\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} & x^T Q x + c^T x \\ & \text{bağlı} \quad Ax \leq b \\ & \quad \quad Ex = e\end{array}$$



Dışbükey program (convex program)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n & \\ \text{bağlı} & x \in \Omega \end{array}$$

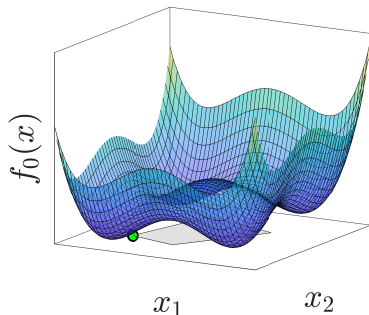
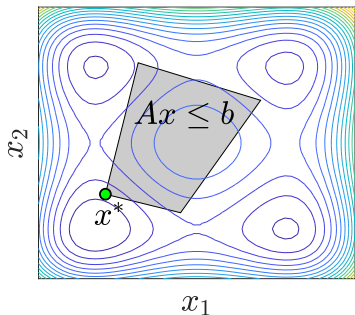
(f dışbükey fonksiyon, Ω dışbükey küme)



Doğrusal-olmayan program (NLP)

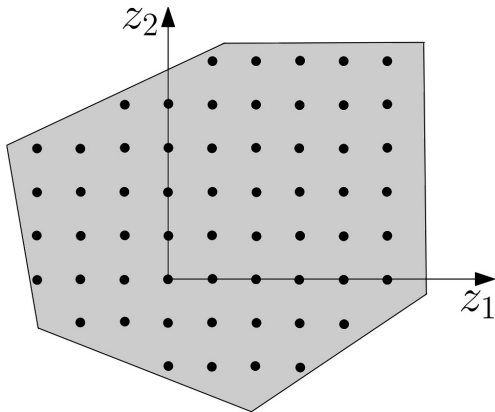
$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & f(x) \\ \text{bağlı} & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0\end{array}$$

(f , g ve h türevlenebilir)



Karma-tamsayılı program (MIP)

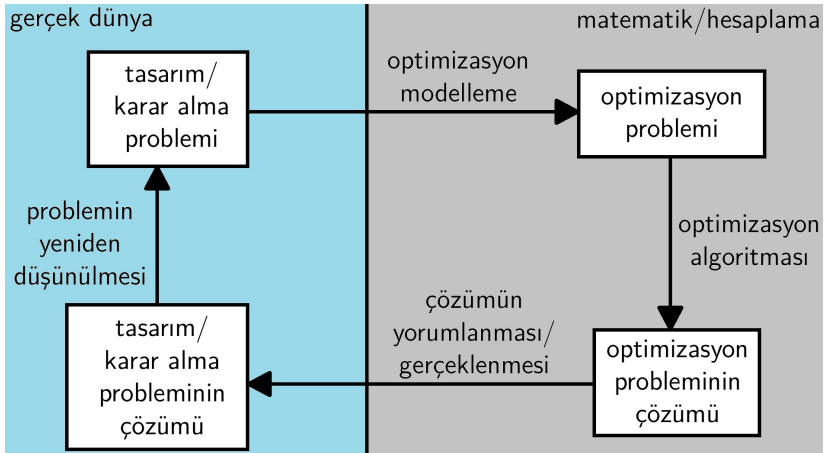
$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & f(x, z) \\ x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{Z}^m & \\ \text{bağlı} & g(x, z) \leq 0 \\ & h(x, z) = 0\end{array}$$



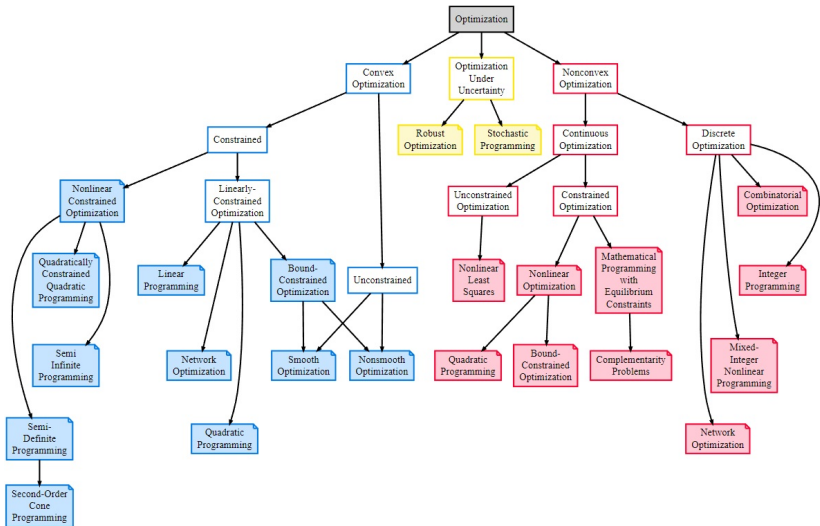
Bölüm 3

Yöntemlerin sınıflandırılması

Optimizasyon prosedürü



Optimizasyon problemi çeşitleri



Kaynak: <https://neos-guide.org/guide/types/>

Optimizasyon algoritması çeşitleri

kesin (exact) algoritmalar
(sınırlı sürede çözümü bulma garantisi vardır)

- ▶ birinci-derece yöntemler
 - gradyan iniş
 - momentum
- ▶ ikinci-derece yöntemler
 - Newton yöntemi
 - yarı-Newton yöntemleri
- ▶ kısıtlı optimizasyon
 - aktif küme yöntemi
 - ardışık karesel optimizasyon
 - iç nokta yöntemleri
- ▶ ...

buluşsal (heuristic) algoritmalar
(sınırlı sürede çözümü bulma garantisi yoktur)

- ▶ genetik algoritmalar
- ▶ benzetilmiş tavlama
- ▶ parçacık sürü opt.
- ▶ ...

fuzuli algoritmalar

- ▶ grey wolf optimizer
- ▶ harmony search algorithm
- ▶ firefly algorithm
- ▶ ...

kaynak:

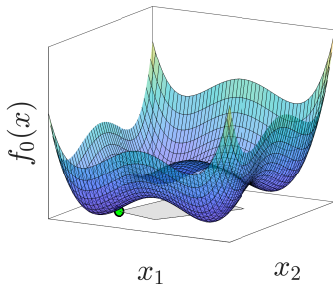
<https://doi.org/10.1111/itor.13176>

Sürekli/ayrık optimizasyon

sürekli program

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n & \\ \text{bağlı} & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0\end{array}$$

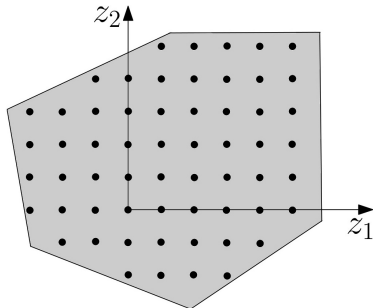
x reel vektör



ayrık program

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & f(x, z) \\ x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{Z}^q & \\ \text{bağlı} & g(x, z) \leq 0 \\ & h(x, z) = 0\end{array}$$

x reel, z tamsayılı vektör

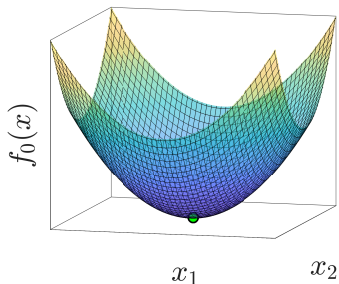


Kısıtsız/kısıtlı optimizasyon

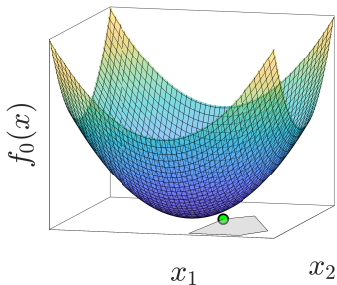
kısıtlı program

kısıtsız program

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad f(x)$$



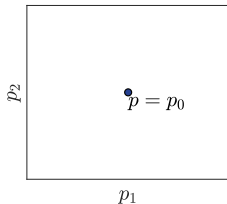
$$\begin{aligned} \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad & f(x) \\ \text{bağlı} \quad & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0 \end{aligned}$$



Belirsizlik içermeyen/içeren optimizasyon

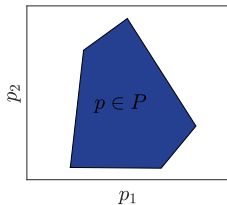
**deterministik
(belirsizlik
içermeyen)
program**

$$\begin{array}{ll} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & f(x, p) \\ \text{bağlı} & x \in \Omega_p, p = p_0 \end{array}$$



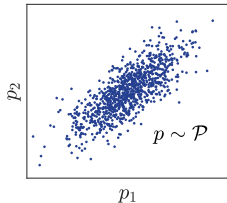
**dayanıklı
(robust)
program**

$$\begin{array}{ll} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & \text{maks. } f(x, p) \\ & p \in P \\ \text{bağlı} & x \in \Omega_p \end{array}$$



**stokastik
program**

$$\begin{array}{ll} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & \mathbb{E}\{f(x, p)\} \\ \text{bağlı} & x \in \Omega_p, p \sim \mathcal{P} \end{array}$$

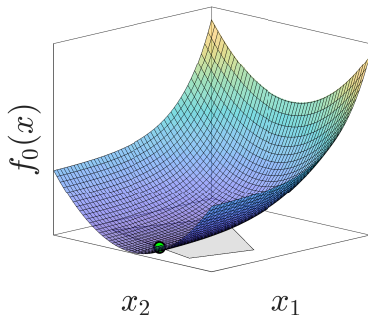


Dışbükey/dışbükey-olmayan optimizasyon

dışbükey program

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & f(x) \\ & x \in \mathbb{R}^n \\ \text{bağlı} & x \in \Omega\end{array}$$

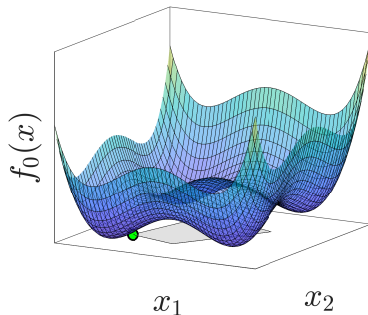
f dışbükey fonksiyon ve
 Ω dışbükey küme



dışbükey-olmayan program

$$\begin{array}{ll}\text{minimize} & f(x) \\ & x \in \mathbb{R}^n \\ \text{bağlı} & x \in \Omega\end{array}$$

f dışbükey olmayan fonks. veya
 Ω dışbükey olmayan küme



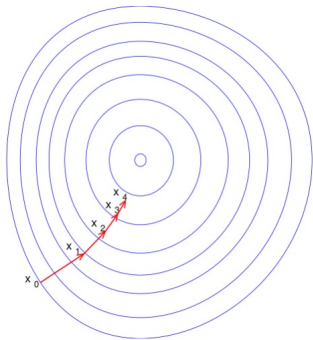
Bölüm 4

Algoritmalar

Gradyan iniş (*gradient descent*)

kısıtsız optimizasyon problemi ($\nabla f(x)$ mevcut)

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad f(x)$$



verilenler: başlangıç noktası $x_0 \in \mathbb{R}^n$

tolerans $\epsilon > 0$

tekrarla: $k = 0, 1, 2, \dots$ için:

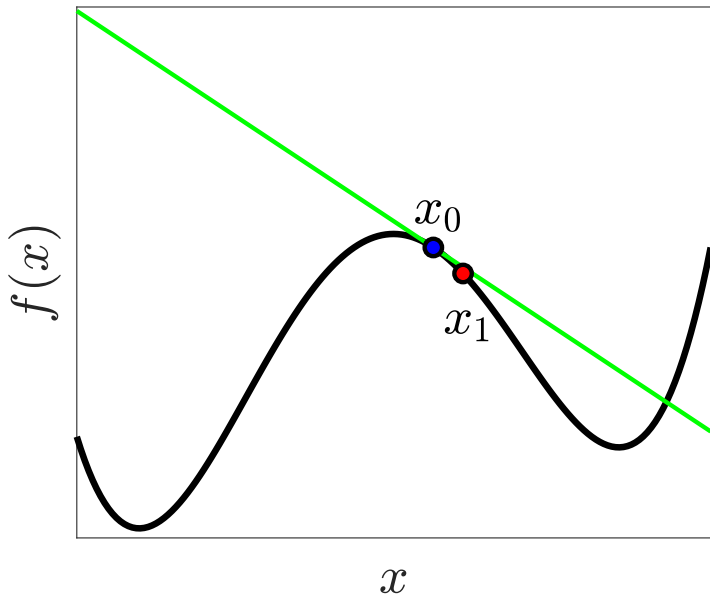
1) $\Delta x_k = -\nabla f(x_k)$

2) adım boyu γ 'yı seç

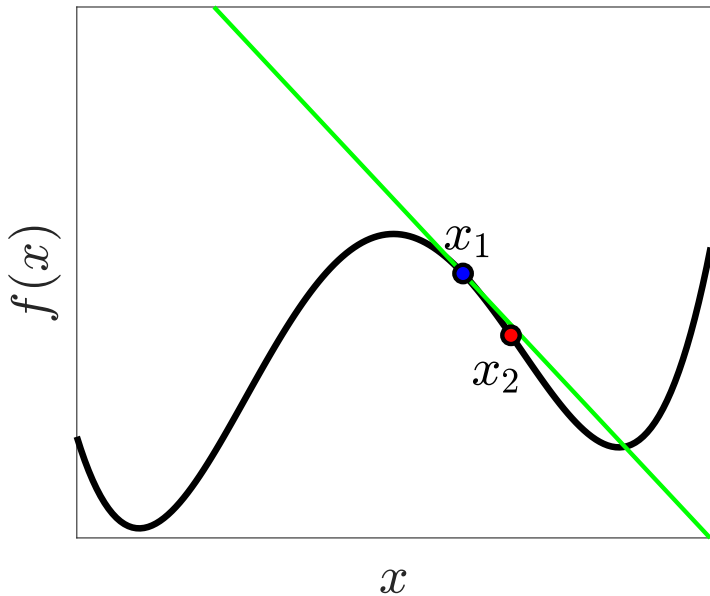
3) $x_{k+1} = x_k + \gamma \Delta x_k$

dur: $\|\nabla f(x_k)\| \leq \epsilon$ ise

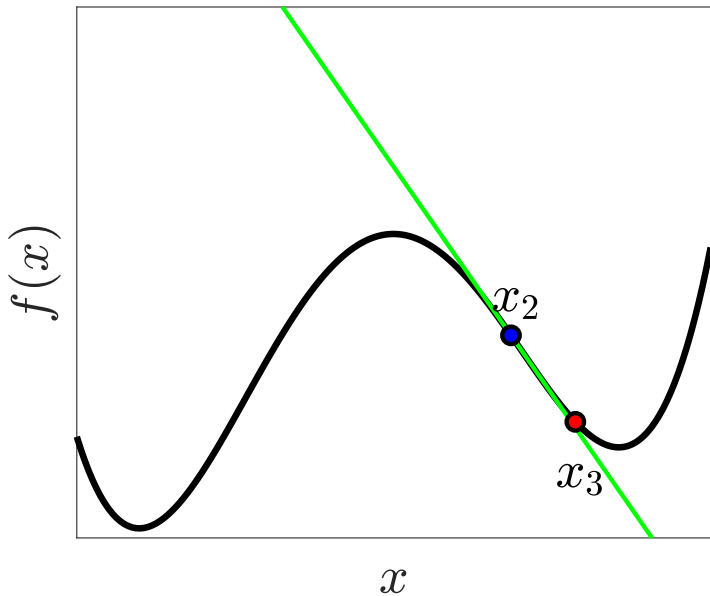
Gradyan iniş - Geometrik yorum



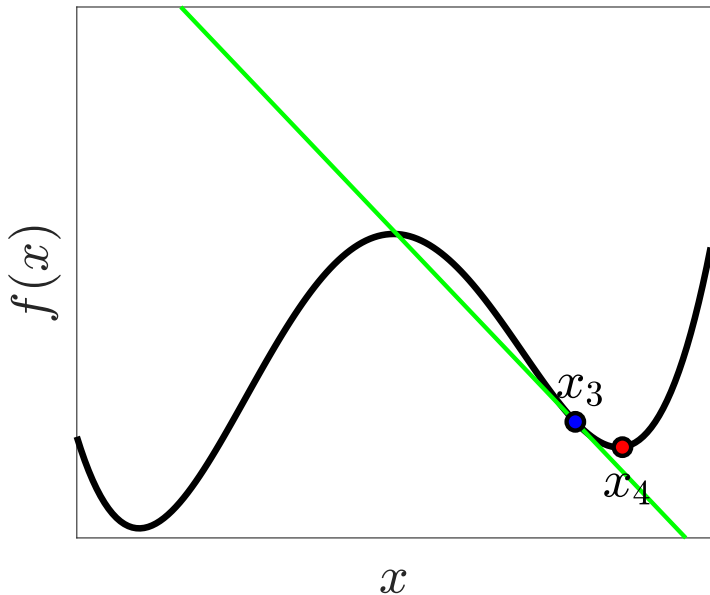
Gradyan iniş - Geometrik yorum



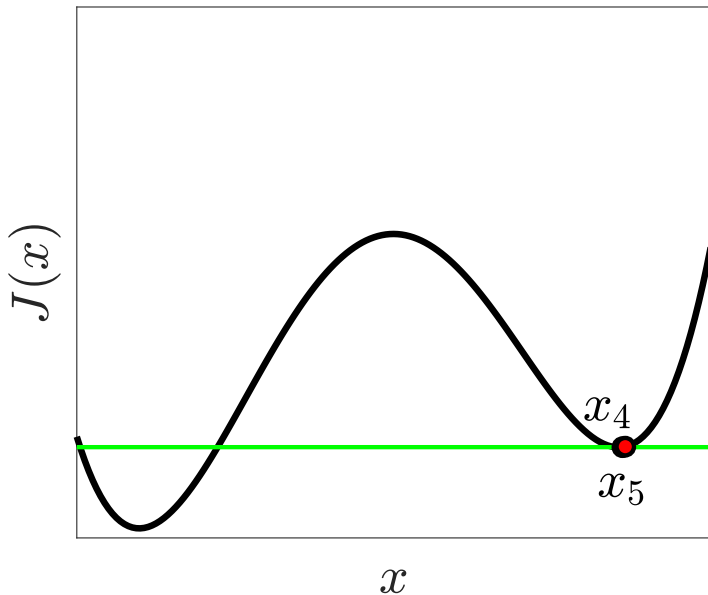
Gradyan iniş - Geometrik yorum



Gradyan iniş - Geometrik yorum



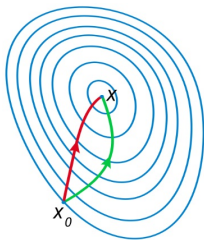
Gradyan iniş - Geometrik yorum



Newton yöntemi

kısıtsız optimizasyon problemi ($\nabla f(x)$ ve $\nabla^2 f(x)$ mevcut)

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad f(x)$$



verilenler: başlangıç noktası $x_0 \in \mathbb{R}^n$

tolerans $\epsilon > 0$

tekrarla: $k = 0, 1, 2, \dots$ için:

1) $\Delta x_k = -\nabla^2 f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k)$

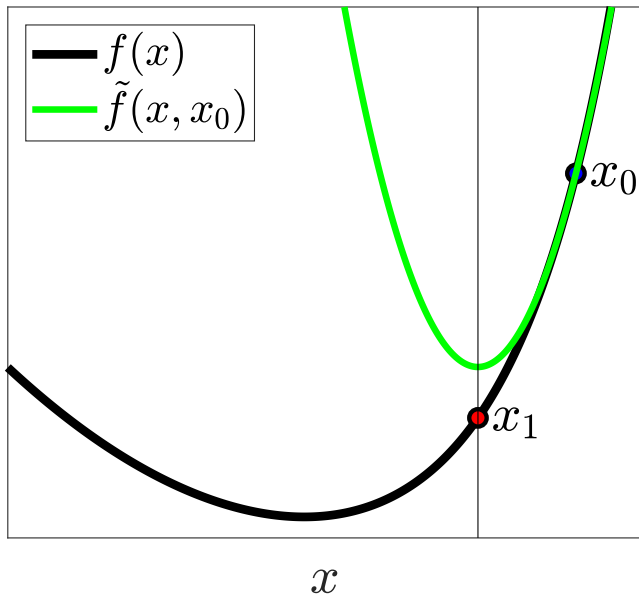
2) $\lambda^2 = \nabla f(x_k)^T \nabla^2 f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k)$

3) adım boyu γ 'yı seç

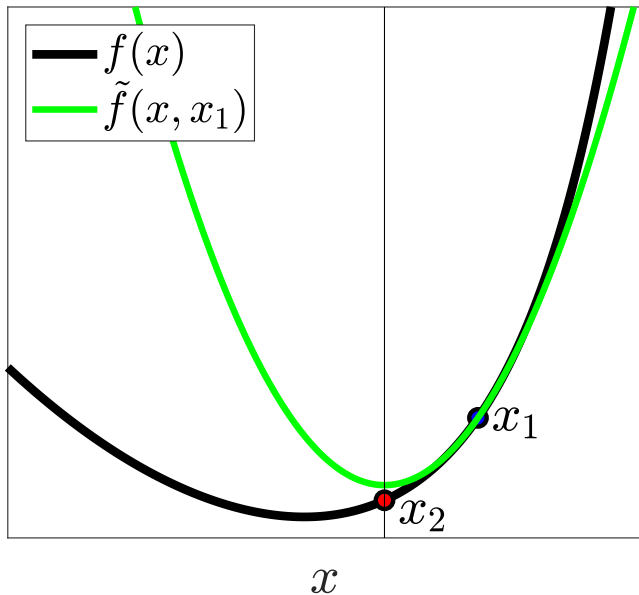
4) $x_{k+1} = x_k + \gamma \Delta x_k$

dur: $\lambda^2/2 \leq \epsilon$ ise

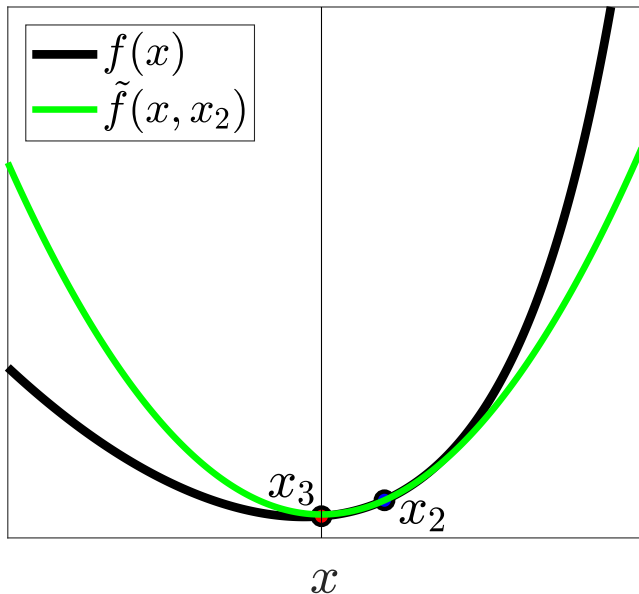
Newton yöntemi - Geometrik yorum



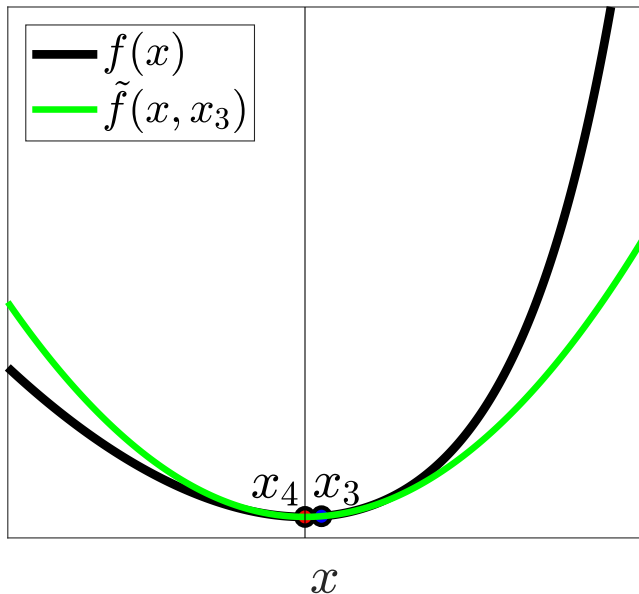
Newton yöntemi - Geometrik yorum



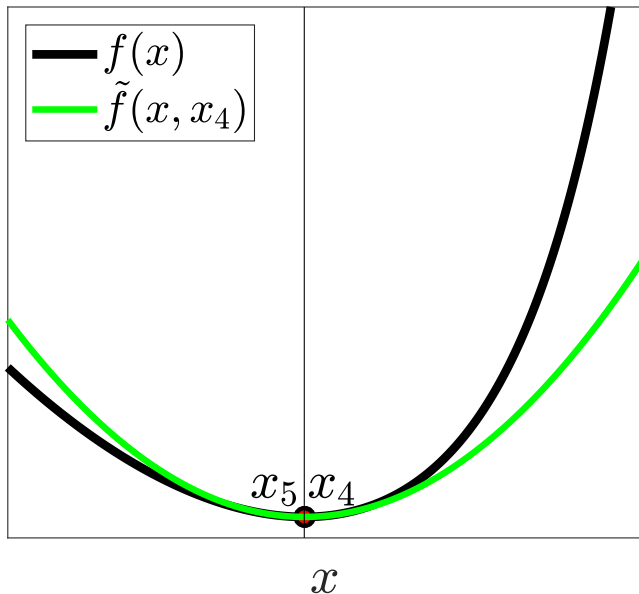
Newton yöntemi - Geometrik yorum



Newton yöntemi - Geometrik yorum



Newton yöntemi - Geometrik yorum



Bölüm 5

Uygulamalar

Üretim planlama (LP)

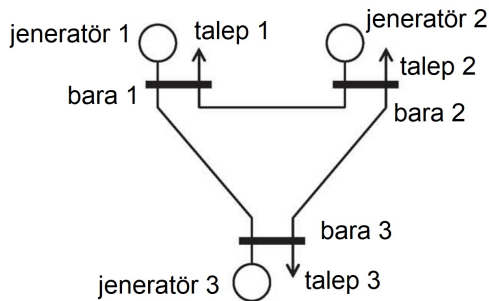


maksimize kazanç
üretim

bağlı üretim \leq hammadde

sipariş \leq üretim

Optimal güç akışı (QP)



minimize maliyet
üretim

bağlı üretim = talep

iletim \leq limitler

Birim taahhüt problemi (MIQP)



minimize
operasyon

maliyet

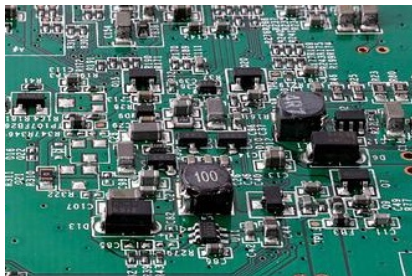
bağlı

operasyon süresince:

operasyon \leq güç limitleri

talep \leq operasyon

Devre tasarımı (GP)



minimize
elemanlar

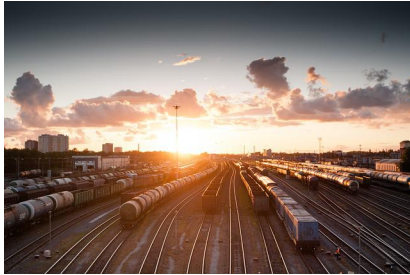
zaman gecikmesi

bağlı

elemanlar \leq güç limiti

elemanlar \leq alan limiti

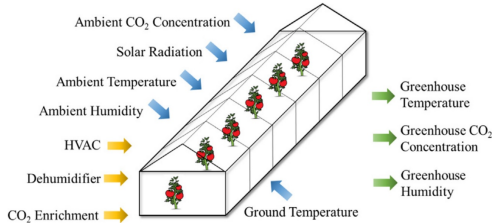
Lojistik planlama (LP)



minimize maliyet
nakliye

bağlı $\text{nakliye} \leq \text{üretim kapasitesi}$
 $\text{talep} \leq \text{nakliye}$

Sera iklim kontrolü (QP, NLP)



minimize maliyet
girişler

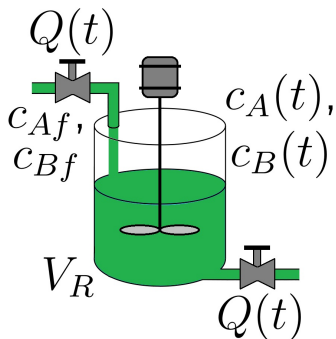
bağlı operasyon süresince:

yörünge \leftrightarrow sera dinamiği

$\text{girişler} \leq \text{giriş limitleri}$

$\text{yörünge} \in \text{iklim limitleri}$

Kimyasal proses kontrol (NLP)



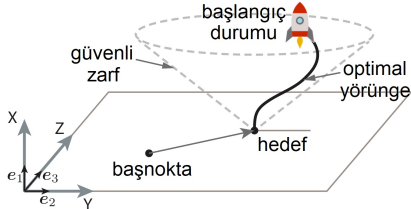
maksimize kazanç
girişler

bağlı operasyon süresince:

yörünge \leftrightarrow proses dinamiği

$\text{girişler} \leq \text{giriş limitleri}$

Roket indirme (SOCP)



minimize girişler yakıt tüketimi

bağlı seyir süresince:

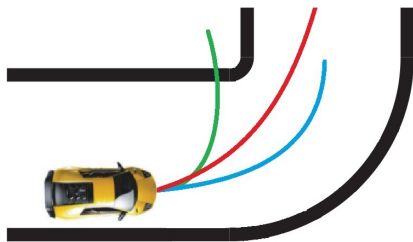
yörünge \leftrightarrow roket dinamiği

girişler \leq giriş limitleri

yörünge \in güvenli zarf

son konum = hedef

Otonom sürüş (QP, NLP)



maksimize
girişler

katedilen mesafe

bağlı

seyir süresince:

yörünge \leftrightarrow araç dinamiği

$\text{girişler} \leq \text{giriş limitleri}$

$\text{yörünge} \in \text{pist}$