

Özdeğerler ve Özvektörler

T.C. Trakya Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik - Elektronik Mühendisliği Bölümü
Kontrol Anabilim Dalı

Dr. Öğr. Üyesi Işık İlber Sirmatel
sirmatel.github.io

Kaynak (source)

*Lecture slides for Introduction to
Linear Dynamical Systems*

Stephen Boyd

Konu listesi

1. Determinant
2. Özdeğerler ve özvektörler
3. Köşegenleştirme

Bölüm 1

Determinant

Minör ve kofaktör

A bir $n \times n$ matris olsun. A 'nın i . satır ve j . sütununun (yani, A 'nın A_{ij} elemanını bulunduran satır ve sütunun) silinmesiyle elde edilen $(n - 1) \times (n - 1)$ matrisi M_{ij} ile gösterelim.

M_{ij} 'nin determinantına A_{ij} 'nin minörü (*minor*) denir. A_{ij} 'nin kofaktörü (*cofactor*)

$$(-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

olarak tanımlanır

Determinant

$n \times n$ bir A matrisinin determinanı

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & n = 1 \text{ ise} \\ a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} & n > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlı bir skalerdir. buradaki A_{1j} terimleri A 'nın birinci satırındaki elemanlarla ilişkili kofaktörlerdir

2×2 matrisin determinanı:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

(not: bu formülü bilmeniz **gerekıyor**)

Determinantın bazı özellikleri

- ▶ $n \times n$ A matrisi ancak ve ancak $\det(A) = 0$ ise tekildir (*singular*) (yani, tersi alınabilir değildir)
- ▶ $n \times n$ A ve B matrisleri için: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- ▶ $n \times n$ A matrisi bir üçgen matris ise:

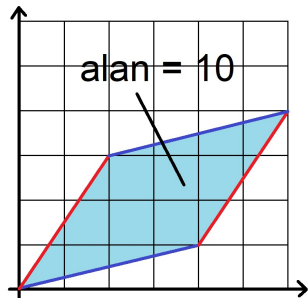
$$\det(A) = \prod_{i=1}^n A_{ii}$$

- ▶ determinant homojen (çarpımla ölçeklenme özelliği olan) bir fonksiyondur: $n \times n$ A matrisi için:
 $\det(cA) = c^n \det(A)$

Determinant ve alan arası ilişki

örnek: $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = 10$$

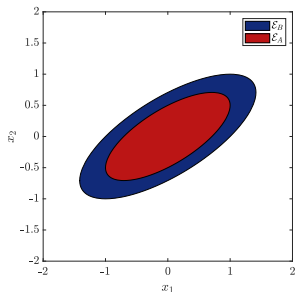


örnek: $\mathcal{E}_A = \{x \mid x^T A x \leq 1\}$

$$\mathcal{E}_B = \{x \mid x^T B x \leq 1\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 4 \quad \det(B) = 1$$



Bölüm 2

Özdeğerler ve özvektörler

Bir matrisin özdeğerleri ve özvektörleri

bir $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisi için

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

şartını sağlayan $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına A matrisinin bir özdeğeri (*eigenvalue*) denir. bu ifade şunlara denktir:

- ▶ $(\lambda I - A)v = 0$ 'ı (yani $Av = \lambda v$ 'yi) sağlayan ve sıfır olmayan bir $v \in \mathbb{C}^n$ vektörü mevcuttur. bu şartı sağlayan her v vektörüne A matrisinin (özdeğer λ ile ilişkili) bir özvektörü (*eigenvector*) denir
- ▶ $w^T(\lambda I - A) = 0$ 'ı (yani, $w^T A = \lambda w^T$ 'yi) sağlayan ve sıfır olmayan bir $w \in \mathbb{C}^n$ vektörü mevcuttur. bu şartı sağlayan her w vektörüne A matrisinin (özdeğer λ ile ilişkili) bir sol özvektörü (*left eigenvector*) denir

(not 1: sıfır vektörü özvektör olarak kabul edilmez)

(not 2: \mathbb{C} : karmaşık sayıların kümesi)

Bir matrisin özdeğerleri ve özvektörleri

- A gerçel olsa da özdeğerleri ve özvektörleri karmaşık olabilir

$$\text{örnek: } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 2 + 3j \quad \lambda_2 = 2 - 3j$$
$$v_1 = \begin{bmatrix} 0.71 \\ 0.71j \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0.71 \\ -0.71j \end{bmatrix}$$

- v , A matrisinin özdeğeri λ ile ilişkili bir özvektör ise, αv de bir özvektördür (her $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$ için)

$$\text{örnek: } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 2 + 3j \quad v_1 = \begin{bmatrix} 0.71 \\ 0.71j \end{bmatrix}$$
$$\alpha = 1 + j \quad \alpha v_1 = \begin{bmatrix} 0.71 + 0.71j \\ -0.71 + 0.71j \end{bmatrix} \quad A\alpha v_1 = \lambda \alpha v_1$$

Bir matrisin özdeğerleri ve özvektörleri

- A ve λ gerçel ise, λ ile ilişkili bir gerçel özvektör v daima bulabiliriz: $Av = \lambda v$ ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{C}^n$) ise

$$A\Re(v) = \lambda\Re(v) \quad A\Im(v) = \lambda\Im(v)$$

olur; dolayısıyla $\Re(v)$ ve $\Im(v)$ (**sıfır olmayan** (*nonzero*) iseler) gerçel özvektörlerdir (içlerinden en az birisi sıfır olmayandır)

örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = -0.37 \quad v_1 = \begin{bmatrix} -2.5 - 3.3j \\ 1.7 + 2.3j \end{bmatrix}$

$$\Re(v) = \begin{bmatrix} -2.5 \\ 1.7 \end{bmatrix} \quad \Im(v) = \begin{bmatrix} -3.3 \\ 2.3 \end{bmatrix}$$

Bir matrisin özdeğerleri ve özvektörleri

- **eşlenik simetri** (*conjugate symmetry*): A matrisi gerçel ise ve $v \in \mathbb{C}^n$ özdeğer $\lambda \in \mathbb{C}$ ile ilişkili özvektör ise, \bar{v} $\bar{\lambda}$ ile ilişkili özvektördür: $Av = \lambda v$ denkleminde her iki tarafın eşleniğini alırsak:

$$\overline{Av} = \overline{\lambda v} \quad \longrightarrow \quad A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 2 + 3j \quad v_1 = \begin{bmatrix} 0.71 \\ 0.71j \end{bmatrix}$

$$\bar{\lambda}_1 = 2 - 3j \quad \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.71 \\ -0.71j \end{bmatrix}$$

buradan itibaren A 'nın gerçel (yani, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$) olduğunu varsayacağız

Karmaşık sayılar (hatırlatma)

- ▶ **sanal birim** (*imaginary unit*): $j = \sqrt{-1}$ (veya $i = \sqrt{-1}$)
- ▶ karmaşık sayı: $c \in \mathbb{C}$, örnek: $c = 2 + 3j$
- ▶ karmaşık sayının eşleniği:

$$\text{örnek: } c = 2 + 3j \quad \bar{c} = 2 - 3j$$

- ▶ karmaşık vektör: $z \in \mathbb{C}^n$, örnek: $z = \begin{bmatrix} 2 + j \\ 3 + 4j \end{bmatrix}$
- ▶ karmaşık vektörün gerçel ve sanal kısımları:

$$\text{örnek: } z = \begin{bmatrix} -2 + j \\ 3 - 4j \end{bmatrix} \quad \Re(z) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Im(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

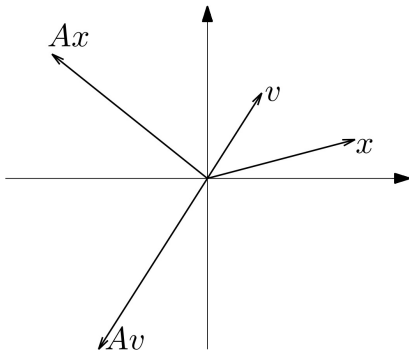
- ▶ karmaşık vektörün eşleniği:

$$\text{örnek: } z = \begin{bmatrix} -2 + j \\ 3 - 4j \end{bmatrix} \quad \bar{z} = \begin{bmatrix} -2 - j \\ 3 + 4j \end{bmatrix}$$

Ölçekleme yorumu

($\lambda \in \mathbb{R}$ varsayalım)

v bir özvektör ise, A 'nın v üzerindeki etkisi λ ile ölçeklemedir



(resimdeki örnek $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ için)

Özdeğerler ve özvektörlerin hesaplanması

bir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ve skaler λ için şu ifadeler denktir:

- ▶ λ , A 'nın bir özdeğeridir
- ▶ $\mathcal{N}(A - \lambda I) \neq 0$
- ▶ $A - \lambda I$ matrisi tekildir
- ▶ $\det(A - \lambda I) = 0$

$\det(A - \lambda I) = 0$ denkleminin A matrisinin karakteristik denklemi (*characteristic equation*) denir

A matrisinin özdeğerleri karakteristik denkleminin kökleridir. bu özdeğerler ile ilişkili özvektörler $(A - \lambda I)x = 0$ denkleminin sıfır olmayan çözümleridir

Özdeğerler ve özvektörlerin hesaplanması

örnek: $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ matrisinin özdeğerlerinin hesaplanması

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc$$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

özdeğerler: $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$ denkleminin kökleri

Özdeğerler ve özvektörlerin hesaplanması

bir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisini ele alalım. $\det(A - \lambda I)$, derecesi n ve bilinmeyen λ olan bir polinomdur (*polynomial*):

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1} \lambda + c_n$$

$\det(A - \lambda I)$ polinomuna A matrisinin karakteristik polinomu (*characteristic polynomial*) denir

(not: $n \times n$ bir matrisin en fazla n adet özdeğeri vardır)

Özdeğerler ve özvektörlerin hesaplanması

örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$$(2 - \lambda)^2 - 1 = 0 \implies \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$$

$$(A - \lambda_1 I)x = 0 \iff \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x_1 + x_2 = 0$$

$$(A - \lambda_2 I)x = 0 \iff \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x_1 - x_2 = 0$$

$x_1 + x_2 = 0$ 'yi sağlayan $v_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ özdeğer λ_1 ile,

$x_1 - x_2 = 0$ 'yi sağlayan $v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ ise özdeğer λ_2 ile ilişkili bir özvektördür

Bölüm 3

Köşegenleştirme

Köşegen matrisler

bir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisini ele alalım. ancak ve ancak \mathbb{R}^n 'deki standart taban vektörleri (e_1, e_2, \dots, e_n) A 'nın özvektörleri ise A köşegendir.

bu durumda A 'nın köşegen üzerindeki elemanları bu özvektörlere karşılık gelen özdeğerlerdir:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \iff Ae_i = \lambda_i e_i, i = 1, 2, \dots, n$$

örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ $\underbrace{\lambda(A) = \{2, -3, 4, -5\}}_{A'nın\ özdeğerleri}$

Köşegenleştirme

v_1, v_2, \dots, v_n , $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi için bir doğrusal bağımsız özvektörler kümesi olsun:

$$Av_i = \lambda_i v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

bu durumu şu şekilde ifade edebiliriz:

$$A \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}}_T = \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}}_T \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\Lambda}$$

$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$ ve $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ile

$$AT = T\Lambda$$

ve sonuç olarak

$$T^{-1}AT = \Lambda$$

yazabiliriz

Köşegenleştirme

- ▶ v_1, v_2, \dots, v_n doğrusal bağımsız olduğundan T tersi alınabilir
- ▶ T ile benzerlik dönüşümü (yani, $T^{-1}AT$) A 'yı köşegenleştirir

diğer taraftan, eğer

$$T^{-1}AT = \Lambda = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

ifadesini sağlayan bir $T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}$ mevcutsa $AT = T\lambda$ olur, yani

$$Av_i = \lambda_i v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

dolayısıyla v_1, v_2, \dots, v_n , $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi için bir doğrusal bağımsız özvektörler kümesidir

Köşegenleştirme

aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa A 'ya köşegenleştirilebilir (*diagonalizable*) denir (bu şartlar denktir)

- ▶ $T^{-1}AT = \Lambda$ 'nın köşegen olmasını sağlayan T mevcuttur
- ▶ A 'nın bir doğrusal bağımsız özvektörler kümesi mevcuttur

(not: A matrisi köşegenleştirilebilir değilse, A 'ya bazen **kusurlu** (*defective*) matris denir)

Köşegenleştirme

her matris köşegenleştirilebilir değildir

örnek: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. karakteristik polinom $\det(\lambda I - A) = \lambda^2$,
dolayısıyla tek özdeğer 0'dadır ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$)

özvektörler $Av = 0v = 0$ şartını ($Av = \lambda v$) sağlar, yani

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

dolayısıyla bütün özvektörler $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ formundadır ($v_1 \neq 0$)

sonuç olarak, A 'nın iki özvektörü doğrusal bağımsız bir vektör kümesi oluşturamaz

Belirgin özdeğerler

A 'nın belirgin (*distinct*) özdeğerleri varsa (yani, $i \neq j$ için $\lambda_i \neq \lambda_j$ ise), A köşegenleştirilebilirdir

bu ifadenin olumsuz versiyonu (yani, “ A 'nın belirgin özdeğerleri yoksa A köşegenleştirilebilir değildir”) yanlıştır: A 'nın tekrarlanmış (*repeated*) özdeğerleri olabilir ancak yine de köşegenleştirilebilir olabilir