EEM461 Optimizasyon
Optimizasyona giriş

Dr. öğr. üyesi Işık İlber Sırmatel

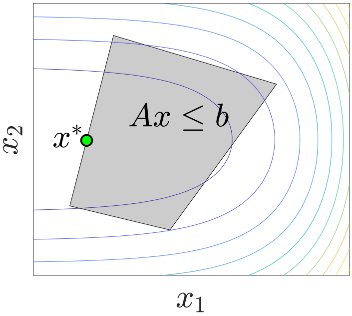
T.C. Trakya Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik - Elektronik Mühendisliği Bölümü
Kontrol Anabilim Dalı

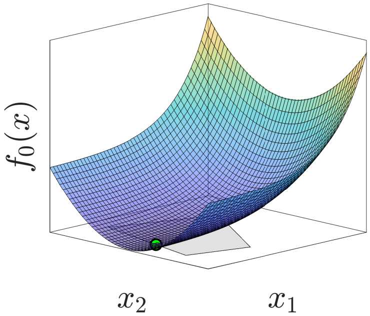
Alt Bölüm 1

Temel kavramlar

Optimizasyonun tanımı

kısıtlı seçenekler arasından en iyisini seçmek





Konular:

- Kısım I - Modelleme (problemi kurmak)
- Kısım II - Teori (yöntemlerin analizi)
- Kısım III - Algoritmalar (problemi çözmek)

Niçin optimizasyon öğrenmeliyiz?

Optimizasyon yöntemleri çeşitli alanlarda çok farklı uygulamalarda kullanılmaktadır:

- **Mühendislik**: Teknik sistemlerin tasarımı, operasyonu, kontrolü
- **Bilim**: Kestirme; modellerin ölçülen veriye uydurulması; deney tasarımı
- **Ekonomi**: Finans; fiyatlandırma; lojistik, yatırım, üretim gibi etkinliklerde kaynak tahsisi/planlama
- **Makina öğrenmesi**: Model eğitimi
- ...

Mühendislik/matematik matrisi

hesaplama/ bilgisayar bilimi		uygulamalı matematik dalları					
		doğrusal cebir	olasılık ve istatistik	otomatik kontrol	optimizasyon	çizge kuramı	...
mühendislik dalları (uygulamalı bilim)	makina						
	gıda						
	bilgisayar						
	inşaat						
	elektrik - elektronik						
	genetik ve biyo-mühendislik						
	⋮						

Optimizasyon problemi (standart form)

$$\boxed{\begin{aligned} \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad & f(x) \\ \text{bağlı} \quad & g(x) \le 0 \\ & h(x) = 0 \end{aligned}}$$

- $x \in \mathbb{R}^n$ (optimizasyon değişkenleri vektörü)
- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (amaç fonksiyonu)
- $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (eşitsizlik kısıtları fonksiyonu)
- $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ (eşitlik kısıtları fonksiyonu)

Optimizasyon problemlerinin unsurları

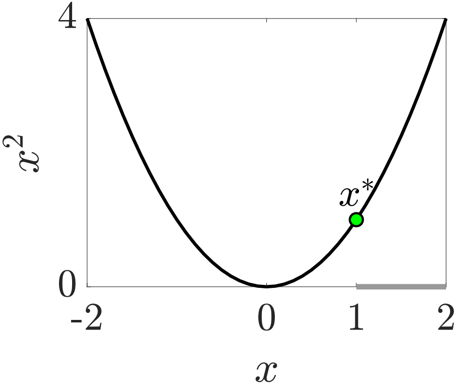
- **Amaç fonksiyonu** $f(x)$ optimizasyonun amacını bir niceliği minimize/maksimize etmek olarak ifade eder.

- **Optimizasyon değişkenleri vektörü** $x \in \mathbb{R}^n$ optimizasyon ile sayısal değerini bulmak istediğimiz değişkenlerden oluşan vektördür.

- **Olanaklı küme** Ω, x vektörünün elemanı olmak üzere kısıtlandığı kümeyi belirtir. Bu küme x'in sağlaması gereken kısıtları belirler ve genellikle $g(x) \leq 0$ (eşitsizlik kısıtları) ve $h(x) = 0$ (eşitlik kısıtları) ile ifade edilir.
$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x) \leq 0,\ h(x) = 0\}$$

Örnek

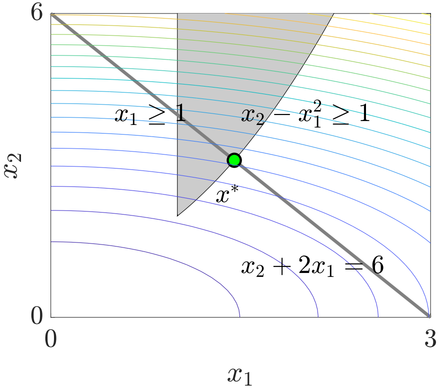
eşitsizlik kısıtlı, bir boyutlu optimizasyon problemi



$$\begin{array}{|rl|}\hline \underset{x\in\mathbb{R}}{\text{minimize}} & x^2 \\ \text{bağlı} & 1 - x \leq 0 \\ \hline \end{array}$$

Örnek

eşitlik ve eşitsizlik kısıtlı, iki boyutlu optimizasyon problemi



$$
\begin{aligned}
\underset{x \in \mathbb{R}^2}{\text{minimize}} \quad & x_1^2 + x_2^2 \\
\text{bağlı} \quad & 1 + x_1^2 \leq x_2 \\
& 1 \leq x_1 \\
& x_2 + 2x_1 = 6
\end{aligned}
$$

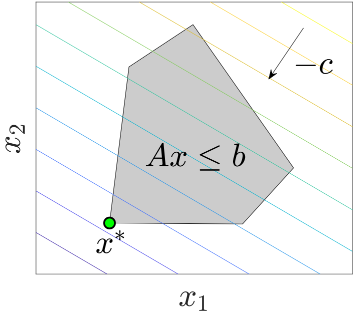
Alt Bölüm 2

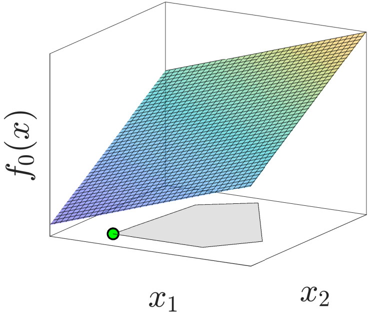
Önemli problem çeşitleri

Doğrusal program (LP)

(not: program = optimizasyon problemi)

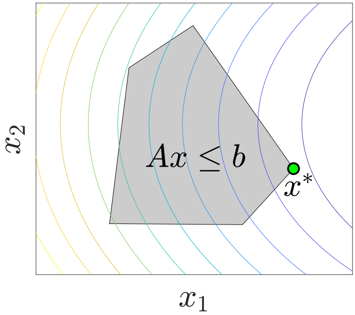
$$\boxed{\begin{aligned} \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad & c^T x \\ \text{bağlı} \quad & Ax \le b \\ & Ex = e \end{aligned}}$$

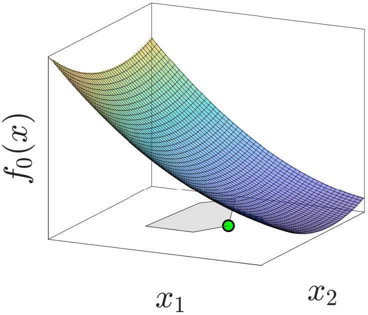




Karesel program (QP)

$$\begin{array}{rl} \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} & \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \\ \text{bağlı} & Ax \leq b \\ & Ex = e \end{array}$$

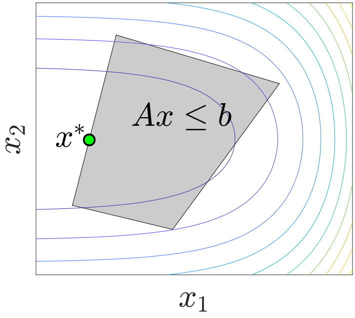


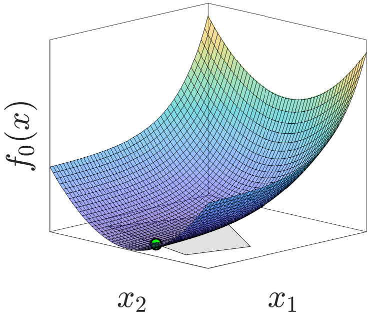


Dışbükey program (convex program)

$$\boxed{\begin{array}{rl} \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} & f(x) \\ \text{bağlı} & x \in \Omega \end{array}}$$

(f dışbükey fonksiyon, Ω dışbükey küme)

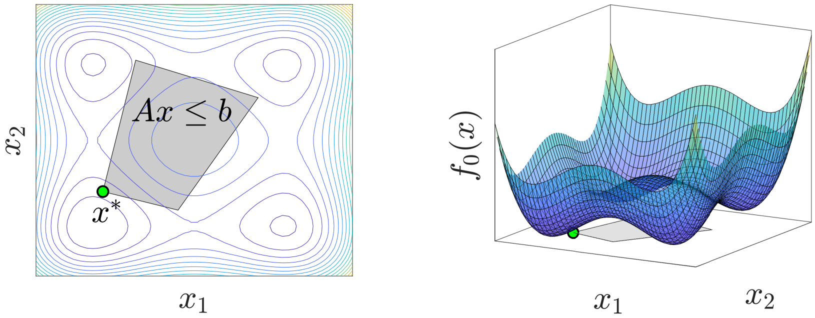




Doğrusal-olmayan program (NLP)

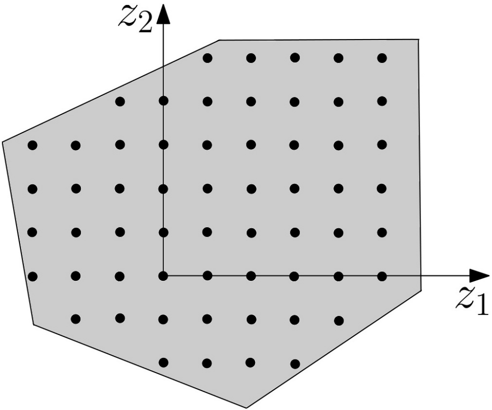
$$\boxed{\begin{aligned} \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad & f(x) \\ \text{bağlı} \quad & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0 \end{aligned}}$$

(f, g ve h türevlenebilir)



Karma-tamsayılı program (MIP)

$$\begin{array}{rl} \underset{x\in\mathbb{R}^n, z\in\mathbb{Z}^m}{\text{minimize}} & f(x,z) \\ \text{bağlı} & g(x,z) \le 0 \\ & h(x,z) = 0 \end{array}$$



Alt Bölüm 3

Uygulama örnekleri

Üretim planlama (LP)

$$\boxed{\begin{aligned} \underset{\text{üretim}}{\text{maksimize}} \quad & \text{kazanç} \\ \text{bağlı} \quad & \text{üretim} \leq \text{hammadde} \\ & \text{sipariş} \leq \text{üretim} \end{aligned}}$$

Stigler tayın problemi[1] (LP)

$$\boxed{\begin{aligned} \underset{\text{malzeme}}{\text{minimize}} \quad & \text{maliyet} \\ \text{bağlı} \quad & \text{kalori} \leq \text{malzeme} \\ & \text{protein} \leq \text{malzeme} \end{aligned}}$$

George J. Stigler

(1911-1991)

[1] George J Stigler. *Journal of Farm Economics* 27.2 (1945), pp. 303–314.

Markowitz portföy problemi[2] (QCQP)

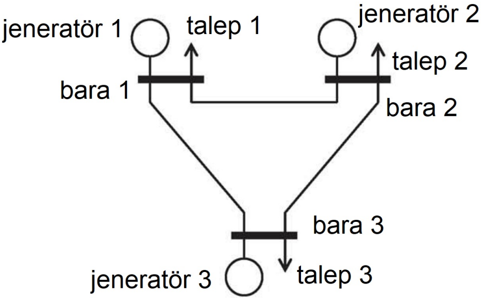
$$\boxed{\begin{aligned} \underset{\text{portföy}}{\text{maksimize}} \quad & \text{kazanç} \\ \text{bağlı} \quad & \text{risk} \le \text{risk limiti} \end{aligned}}$$

Harry Markowitz

(1927-2023)

[2] Harry Markowitz. *The Journal of Finance* 7.1 (1952), pp. 77–91.

Optimal güç akışı (QP)

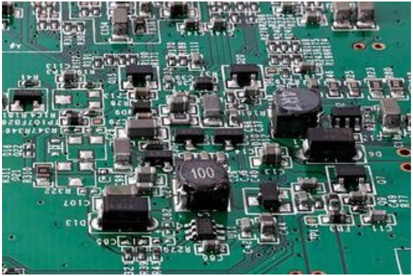


$$\begin{array}{rl} \underset{\text{üretim}}{\text{minimize}} & \text{maliyet} \\ \text{bağlı} & \text{üretim} = \text{talep} \\ & \text{iletim} \leq \text{limitler} \end{array}$$

Birim taahhüt problemi (MIQP)

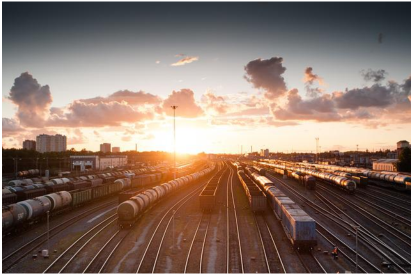
$$
\begin{array}{rl}
\underset{\text{operasyon}}{\text{minimize}} & \text{maliyet} \\
\text{bağlı} & \text{operasyon süresince:} \\
& \quad \text{operasyon} \leq \text{güç limitleri} \\
& \quad \text{talep} \leq \text{operasyon}
\end{array}
$$

Devre tasarımı (GP)



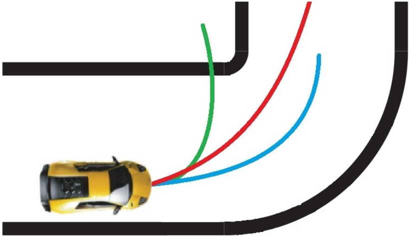
$$\boxed{\begin{array}{rl} \underset{\text{elemanlar}}{\text{minimize}} & \text{zaman gecikmesi} \\ \text{bağlı} & \text{elemanlar} \leq \text{güç limiti} \\ & \text{elemanlar} \leq \text{alan limiti} \end{array}}$$

Lojistik planlama (LP)



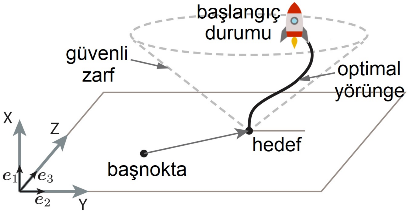
$$\boxed{\begin{aligned} \underset{\text{nakliye}}{\text{minimize}} \quad & \text{maliyet} \\ \text{bağlı} \quad & \text{nakliye} \leq \text{üretim kapasitesi} \\ & \text{talep} \leq \text{nakliye} \end{aligned}}$$

Otonom sürüş (QP, NLP)



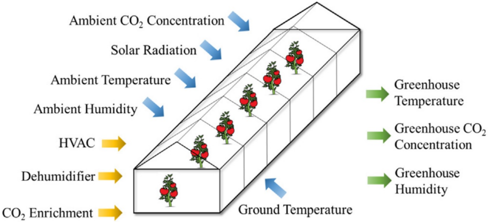
$$\begin{array}{rl} \underset{\text{girişler}}{\text{maksimize}} & \text{katedilen mesafe} \\ \text{bağlı} & \text{seyir süresince:} \\ & \quad \text{yörünge} \leftrightarrow \text{araç dinamiği} \\ & \quad \text{girişler} \leq \text{giriş limitleri} \\ & \quad \text{yörünge} \in \text{pist} \end{array}$$

Roket indirme (SOCP)



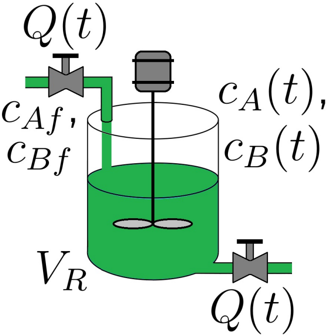
$$\begin{array}{ll} \underset{\text{girişler}}{\text{minimize}} & \text{yakıt tüketimi} \\ \text{bağlı} & \text{seyir süresince:} \\ & \quad \text{yörünge} \leftrightarrow \text{roket dinamiği} \\ & \quad \text{girişler} \leq \text{giriş limitleri} \\ & \quad \text{yörünge} \in \text{güvenli zarf} \\ & \text{son konum} = \text{hedef} \end{array}$$

Sera iklim kontrolü (QP, NLP)



$$
\begin{array}{ll}
\underset{\text{girişler}}{\text{minimize}} & \text{maliyet} \\
\text{bağlı} & \text{operasyon süresince:} \\
& \quad \text{yörünge} \leftrightarrow \text{sera dinamiği} \\
& \quad \text{girişler} \leq \text{giriş limitleri} \\
& \quad \text{yörünge} \in \text{iklim limitleri}
\end{array}
$$

Kimyasal proses kontrol (NLP)



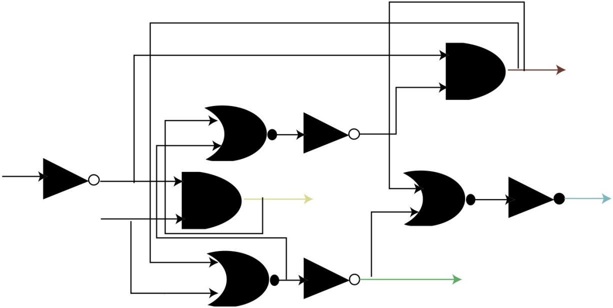
$$\max_{\text{girişler}} \quad \text{kazanç}$$

bağlı operasyon süresince:

yörünge $\leftrightarrow$ proses dinamiği

girişler $\leq$ giriş limitleri

Genetik devre tasarımı (MIDO)



$$\underset{\text{elemanlar}}{\text{minimize}} \quad \|\text{istenen yanıt} - \text{yörünge}\|^2$$

$$\text{bağlı} \quad \text{yanıt süresince:}$$

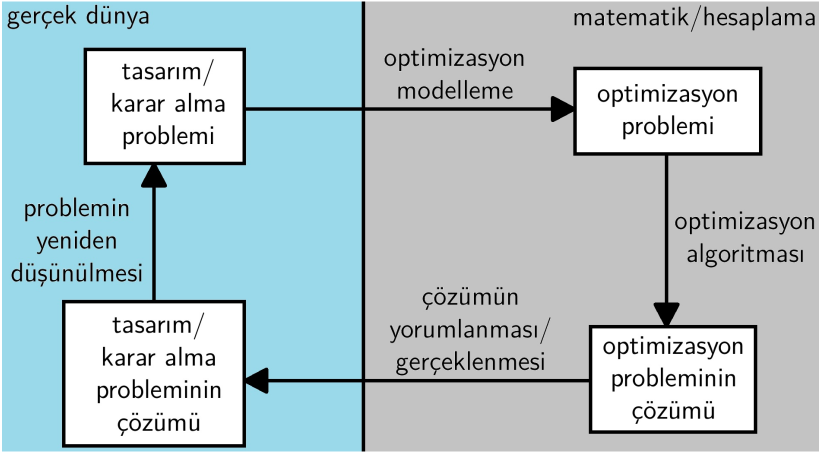
$$\text{yörünge} \leftrightarrow \text{protein seviyesi dinamiği}$$

$$\text{elemanlar} \leq \text{transkripsiyon limitleri}$$

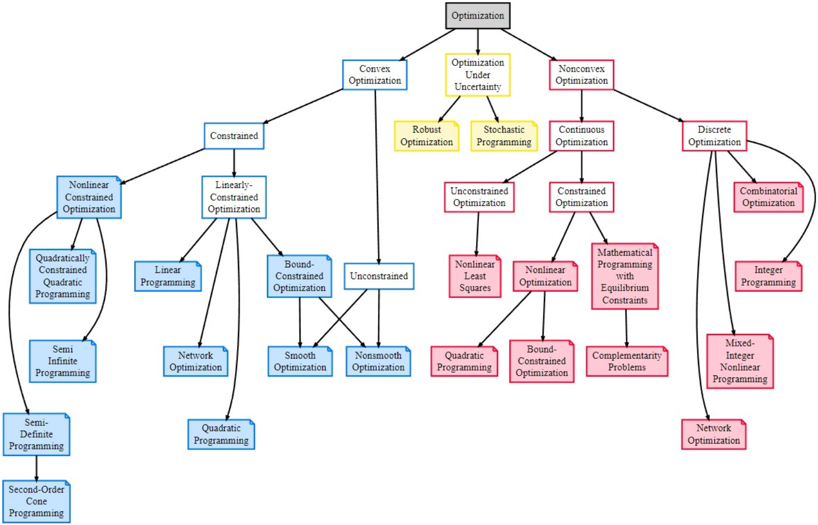
Alt Bölüm 4

Optimizasyon yöntemlerinin sınıflandırılması

Optimizasyon prosedürü



Optimizasyon problemi çeşitleri



Kaynak: https://neos-guide.org/guide/types/

Optimizasyon algoritması çeşitleri

kesin (exact) algoritmalar
(sınırlı sürede çözümü bulma garantisi vardır)

- birinci-derece yöntemler
  - gradyan iniş
  - momentum
- ikinci-derece yöntemler
  - Newton yöntemi
  - yarı-Newton yöntemleri
- kısıtlı optimizasyon
  - aktif küme yöntemi
  - ardışık karesel optimizasyon
  - iç nokta yöntemleri
- ...

buluşsal (heuristic) algoritmalar
(sınırlı sürede çözümü bulma garantisi yoktur)

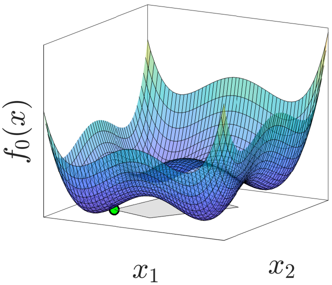
- tabu arama
- genetik algoritmalar
- benzetilmiş tavlama
- parçacık sürü optimizasyonu
- ...

Sürekli/ayrık optimizasyon

sürekli program

$$\begin{array}{ll} \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} & f(x) \\ \text{bağlı} & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0 \end{array}$$

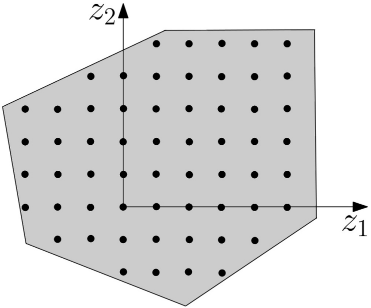
x reel vektör



ayrık program

$$\begin{array}{ll} \underset{x\in\mathbb{R}^n, z\in\mathbb{Z}^q}{\text{minimize}} & f(x,z) \\ \text{bağlı} & g(x,z) \leq 0 \\ & h(x,z) = 0 \end{array}$$

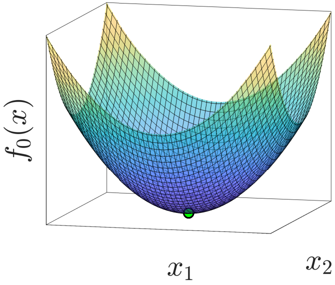
x reel, z tamsayılı vektör



Kısıtsız/kısıtlı optimizasyon

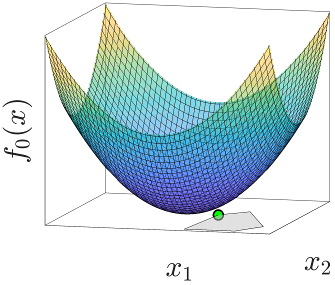
kısıtsız program

$$\boxed{\underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad f(x)}$$



kısıtlı program

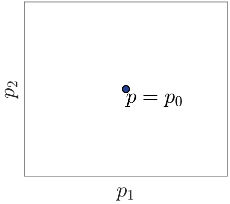
$$\boxed{\begin{aligned} \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad & f(x) \\ \text{bağlı} \quad & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0 \end{aligned}}$$



Belirsizlik içermeyen/içeren optimizasyon

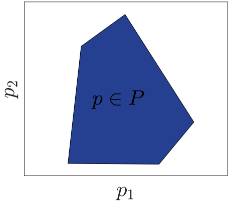
deterministik (belirsizlik içermeyen) program

$$\begin{array}{ll} \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{min.}} & f(x,p) \\ \text{bağlı} & x \in \Omega_p,\ p = p_0 \end{array}$$



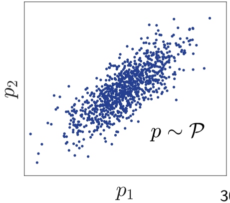
dayanıklı (robust) program

$$\begin{array}{ll} \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{min.}} & \underset{p\in P}{\text{maks.}}\, f(x,p) \\ \text{bağlı} & x \in \Omega_p \end{array}$$



stokastik program

$$\begin{array}{ll} \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{min.}} & \mathbb{E}\{f(x,p)\} \\ \text{bağlı} & x \in \Omega_p,\ p \sim \mathcal{P} \end{array}$$

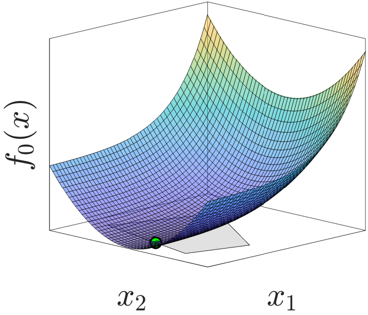


Dışbükey/dışbükey-olmayan optimizasyon

dışbükey program

$$\boxed{\begin{array}{rl} \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} & f(x) \\ \text{bağlı} & x \in \Omega \end{array}}$$

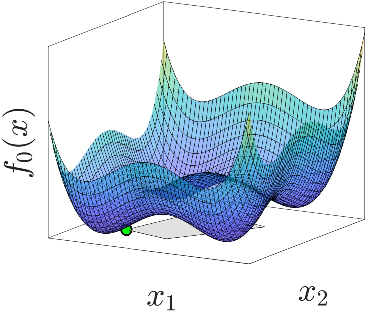
f dışbükey fonksiyon ve
Ω dışbükey küme



dışbükey-olmayan program

$$\boxed{\begin{array}{rl} \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{minimize}} & f(x) \\ \text{bağlı} & x \in \Omega \end{array}}$$

f dışbükey olmayan fonks. veya
Ω dışbükey olmayan küme



Alt Bölüm 5

Kaynaklar

Optimizasyonla ilgili ders kitapları (1/2)

- *Optimization Models and Applications*. Laurent El Ghaoui
- *Convex Optimization*. Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe (kitabın internet sitesinde ek materyaller bulunabilir)
- *Convex Optimization Theory*. Dimitri P. Bertsekas (kitabın internet sitesinde ek materyaller ve çözümlü örnekler bulunabilir)
- *Lecture Notes on Numerical Optimization*. Moritz M. Diehl
- *Convex Optimization and Euclidean Distance Geometry*. Jon Dattorro
- *Algorithms for Optimization*. Mykel J. Kochenderfer, Tim A. Wheeler

Optimizasyonla ilgili ders kitapları (2/2)

- *Lecture Notes on Optimization*. Pravin Varaiya
- *Convex Optimization: Algorithms and Complexity*. Sébastien Bubeck
- *Convex Optimization Algorithms*. Dimitri P. Bertsekas
- *Introduction to Nonlinear Optimization*. Amir Beck
- *Numerical Optimization*. Jorge Nocedal, Stephen J. Wright
- *Model Building in Mathematical Programming*. H. Paul Williams
- *Optimization in Operations Research*. Ronald L. Rardin

Uygulamalı matematikle ilgili ders kitapları

- *Introduction to Applied Linear Algebra – Vectors, Matrices, and Least Squares*. Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe
- *The Matrix Cookbook*. Kaare Brandt Petersen, Michael Syskind Pedersen
- *Linear Algebra*. Jim Hefferon
- *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms*. David J.C. MacKay
- *Mathematics for Machine Learning*. Marc P. Deisenroth, A. Aldo Faisal, Cheng Soon Ong
- *Algorithms for Decision Making*. Mykel J. Kochenderfer, Tim A. Wheeler, Kyle H. Wray

Benzer içerikli dersler

- Convex Optimization I&II. Stephen Boyd, Stanford
- Introduction to Convex Optimization. Stephen Boyd, Pablo Parrilo, MIT
- Optimization Models in Engineering. Gireeja Ranade, UC Berkeley
- Convex Optimization. Somayeh Sojoudi, Laurent El Ghaoui, UC Berkeley
- Introduction to Nonlinear Optimization. Amir Beck, Tel Aviv University
- Numerical Optimization. Moritz Diehl, University of Freiburg
- Convex Analysis and Optimization. Dimitri Bertsekas, MIT
- Nonlinear Optimization. Pablo Parrilo, MIT

Programlama araçları

MATLAB®

GNU Octave

Kaynak: John W. Eaton

Python

Scilab

Julia

SageMath

Kaynak: The Sage team

Optim. modelleme sistemleri/paketleri

- açık kaynak (*open source*)
  - YALMIP (MATLAB®/GNU Octave) (kullanımı kolay, çok sayıda optimizasyon çözücüsünü destekliyor)
  - CVX (MATLAB®) (kullanımı kolay, dışbükey analiz kuralları yaklaşımı)
  - CasADi (MATLAB®/GNU Octave/Python) (sayısal optimal kontrol; algoritmik türev alma özelliği)
  - GEKKO (Python) (karma-tamsayılı/diferansiyel-cebirsel denklemler için optimizasyon; makina ögrenmesi)
  - ...
- ticari (*proprietary*)
  - GAMS®
  - AMPL®
  - AIMMS Development®
  - MOSEK®
  - ...