

A.

递归的过程其实是对等差数列进行操作。

比如一开始公差为 1，然后为 2，然后为 4，因此只需要记录公差，首项，还有总数量，即可得到需要的信息

对于 1 操作，用 $\text{solve1}(\text{start}, d, n, \text{kth})$ 表示找出执行完递归操作的第 kth 项

如果 $(n + 1) / 2 \geq \text{kth}$ ，那么被分到左边 $\text{solve1}(\text{start}, d * 2, (n + 1) / 2, \text{kth})$

否则，被分到右边 $\text{solve1}(\text{start} + d, d * 2, n / 2, \text{kth} - (n + 1) / 2)$ (减掉左边有多少项)

对于 2 操作， $\text{solve2}(\text{start}, d, n, \text{kth})$ 表示 kth 项最后的位置

if $((\text{kth} - \text{start}) \% d == 0)$ ，同被分到左边 $\text{solve2}(\text{start}, 2 * d, (n + 1) / 2, \text{kth})$

否则，分到右边 $\text{solve2}(\text{start} + d, 2 * d, n / 2, \text{kth}) + (n + 1) / 2$

B

问题 1，如何快速求 $n / 1 + n / 2 + \dots + n / n$ ($n \leq 10^9$)

问题 2，如果允许最暴力的容斥，你会怎么做？

1：对于 n / x ，当 $x * x \leq n$ 的时候，我们可以暴力枚举 $x = 1 \dots \sqrt{n}$

当 n / x ， $x * x > n$ 的时候， n / x 相同的段是 \sqrt{n} 级别的。因为一个树 $n = p * q$ ，当 $p \geq q$ 的时候， q 的取值范围，即从 1 到 $n / p \leq \sqrt{n}$ ，所以对于 $n / p = q$ ($p > \sqrt{n}$) 的时候 q 进行枚举，就是 \sqrt{n} 的复杂度

2. 暴力容斥，设 $f(n, m, p)$ 为 $1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq m$ 的时候， gcd 是 p 的倍数的有多少对不同的 (x, y) $f(n, m, p) = (n / p) * (m / p)$ (因为 gcd 为 p 的倍数，所以可以提取出来)

对数很简单 $f(n, m, 1) - f(n, m, 2) - f(n, m, 3) + f(n, m, 5) + f(n, m, 6) + f(n, m, 10) \dots$

注意到 2，像 4, 8, 12 这种并没有在容斥中出现，我们定义一个莫比乌斯函数， $\text{mobius}(n) = 0$ ，如果包含了平方因子，即质数分解后，有某个质数因子出现次数 ≥ 2 ，如 4, 8, 12

否则 $\text{mobius}(n) = (-1)^k$ ， k 为不同质因子数目，比如 2 的时候，对应于 (-1)

借助这个，将 2 的式子表示为统一的式子， $\sum f(n, m, i) * \text{mobius}(i) = \sum ((n / i) * (m / i) * \text{mobius}(i))$

然后借助 1，我们知道， n / i 只有 \sqrt{n} 段不同的结果，同理 m / i 也是 \sqrt{n} 段，因此，它们的交集也是 \sqrt{n} 级别的，

$\sum ((n / i) * (m / i) * \text{mobius}(i)) = (n / i) * (m / i) * \sum (\text{mobius}(k))$ ， k 中任意一个数满足 $n / i = n / k, m / i = m / k$

还有求和操作，这里没写出来，定义函数 $g_i(n, m, i)$ 表示 gcd 是 p 的倍数的时候，左边的和， $g_j(n, m, i)$ 为右边的和

$g_i(n, m, i) = i * (1 + 2 + \dots + n / i) * (m / i)$

$g_j(n, m, i) = (n / i) * i * (1 + 2 + \dots + m / i)$ ，这两个一样和上面 f 一样优化，

$\sum (i * (1 + 2 + \dots + n / i) * (m / i) * \text{mobius}(i))$ ， $i * \text{mobius}(i)$ 可以合并了，然后 $1 + 2 + \dots + n / i$ 的话，由于 n / i 全部相同，然后就等价于上面的式子

C

C 题, 直接贪心。就是现实生活中的找零钱, 将输入从大到小排序, $\text{for}(\text{int } i = 1; i \leq n; i++)$
 $\text{if}(m \geq a[i]) m -= a[i];$

$\text{if}(!m)$ YES; else NO

证明: 不妨设存在合法方案 $m = c_1 + c_2 + \dots + c_k (c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_k)$

假设你现在要用一个更大的数 X 去取代部分数

求出最小的 i , 使得 $c_1 + c_2 + \dots + c_i \geq X, c_1 + c_2 + \dots + c_{i-1} < X$

尝试去掉 c_1 , 如果 $c_2 + \dots + c_i \geq X$, 最后剩下的串为 $c_j + \dots + c_i \geq X$, 且 $c_{j+1} + \dots + c_i < X$, (否则继续去掉 c_j)

如果 $c_j > X$, 那么 X 一定不能被替换了。

否则, 因为 $c_{j+1} \% c_j = 0, c_i \% c_{i-1} = 0$, 且 $X \geq c_j, X \% c_j = 0$

设 $c_j + \dots + c_i = k_1 * c_j, X = k_2 * c_j, c_{j+1} + \dots + c_i = k_3 * c_j$

$k_1 \geq k_2 > k_3$,

所以 $k_2 \geq k_3 + 1$ 因为 $k_1 - k_3 = 1$, 只差一个 c_j

所以 $k_2 = k_1$, 因此可以直接用 X 替换掉 $c_j + \dots + c_i$

D

DP

先不考虑时间因素, 最简单的 DP $\text{dp}[i][j]$ 表示用了 $\text{dp}[i][j]$ 个数字, 与第一个序列匹配位置为 i , 第二个序列匹配位置为 j , 枚举下一个数字, $\text{dp}[i][j] \rightarrow \text{dp}[\text{next}[i][k]][\text{next}[j][k]]$

$\text{next}[i][k]$ 表示 k 这个数字在 i 之后最近的出现位置。如果没有的话, 设为 $n+1$ 或 $m+1$, 代表没有匹配的子序列了。

这样时间复杂度为 $n * m * k$

优化:

注意到一个事实, 最短的没出现过的子序列, 肯定长度 $\leq 1 + \max(\text{min1}(i), \text{min2}(i))$ $\text{min1}(i)$ 表示 i 这个数字在第一个序列中出现的次数, $\text{min2}(i)$ 同理

这样的话, 如果有 2000 个数字, 那么长度 ≤ 2 , 如果有 200 个, 长度为 10, 所以长度为 n/k

现在反向 DP, $\text{dp}[\text{len}][i]$ 表示你找出的序列长度为 len 的时候, 在第一个串匹配位置为 i , 最远能到达第 2 个序列的位置

这样时间复杂度为 $\max(n, m) / k * n * k$, 约为 n^2 , $\text{next}[i][k]$ 需要预处理

思考题: 考虑一个非常经典的问题, 如果要求序列的 lcs, 那么实间是 $O(NM)$, 但是现在告诉你两者的最长子序列长度 $\geq 95\% * \min(N, M)$, 在 $N, M \leq 10000$ 的情况下, 设置一个不超过的算法

E

这题求的是 $\text{sigma}(\text{cover}(i), i) \% 20140717 (i = 1..n)$

$\text{cover}(i)$ 表示有多少个不同的区间覆盖了 i 这个数

$\text{cover}(i)$ 很容易求, 用树状数组搞一下。

现在问题是求 $c(n,m) \% 20140717$

20140717 不是质数，我们将它分解成质数相乘的形式 $41 * 107 * 4591$

如果知道 $c(n,m) \% 41(107,4591)$ 的结果，我们可以用中国剩余定理联合同余方程，求出 $c(n,m) \% 20140717$ 的结果

$c(n,m) \% \text{prime}$ (prime 不大的话)，这个可以用 lucas 定理 $c(n,m) \% \text{prime} = c(n \% \text{prime}, m \% \text{prime}) * c(n / \text{prime}, m / \text{prime})$ ，然后将 $c[n][m]$ 的范围压缩到 $n, m < \text{prime}$ 内了。

这题因为 prime 最大为 4591，开个 short int 数组，像杨辉三角那样递推就行了

F

增加一条线段，删除一条线段，给出一条线段，判断有多少条线段与这条线段相交

非常经典的题目了，校门外的树 1-3，有兴趣可以百度搜索下

考虑反面，不相交的情况，线段左端点 $> R$ ，或者线段右端点 $< L$ ，两个树状数组维护反面