Algorithm Design Exercises

Tomás Spoturno
tomas.spoturno@fing.edu.uy

2023

Contents

1 Emparejamiento estable

1.1 Ejercicio 1.1

Decide si consideras que la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, proporciona una breve explicación. Si es falsa, proporciona un contraejemplo.

¿Verdadero o falso? En cada instancia del Problema de Emparejamiento Estable, existe un emparejamiento estable que contiene una pareja (m, w) tal que m ocupa el primer lugar en la lista de preferencias de w, y w ocupa el primer lugar en la lista de preferencias de m.

Solución: Falso. Consideremos los siguientes grupos de preferencias.

$$m_1 : w_1 \; w_2$$
$$m_2 : w_2 \; w_1$$
$$w_1 : m_2 \; m_1$$
$$w_2 : m_1 \; m_2$$

En esta situación, no es posible obtener un emparejamiento estable que incluya una pareja (m, w), donde m esté en la cima de la lista de preferencias de w y viceversa.

Si m_1 estuviese emparejado con la mujer que ocupa el primer lugar en su lista de preferencias, entonces m_1 estaría emparejado con w_1. Sin embargo, bajo tal arreglo, w_1 no estaría emparejada con m_2, a pesar de que m_2 es su primera opción según su lista de preferencias.

De forma análoga, si m_2 fuese emparejado con la mujer que ocupa el primer lugar en su lista de preferencias, entonces m_2 estaría emparejado con w_2. Sin embargo, en tal escenario, w_2 no estaría emparejada con m_1, a pesar de que m_1 es su elección principal.

Por tanto, en esta situación, es imposible que m_1 y m_2 estén emparejados con la mujer que ocupa el primer lugar en su respectiva lista de preferencias, a la vez que dicha mujer esté emparejada con el hombre que ocupa el primer lugar en su lista de preferencias. Dada esta imposibilidad de obtener un emparejamiento donde ambas partes son la elección preferida de la otra, concluimos que no puede existir un emparejamiento estable que incluya una pareja (m, w) donde m esté en la cima de la lista de preferencias de w y viceversa.

1.2 Ejercicio 1.2

Decide si crees que la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, proporciona una breve explicación. Si es falsa, proporciona un contraejemplo.

¿Verdadero o falso? Considera una instancia del Problema de Emparejamiento Estable en la que existe un hombre m y una mujer w tal que m está clasificado en primer lugar en la lista de preferencias de w y w está clasificada en primer lugar en la lista de preferencias de m. Entonces, en todo emparejamiento estable S para esta instancia, el par (m, w) pertenece a S.

Solución: Verdadero. Esta afirmación es una consecuencia directa del Algoritmo de Gale-Shapley, que se utiliza para resolver el problema del emparejamiento estable. Si un hombre m y una mujer w se prefieren entre sí más que a cualquier otro, siempre estarán juntos en cualquier emparejamiento estable.

Supongamos que hay un emparejamiento estable donde m y w no están juntos. Entonces, cada uno debe estar emparejado con alguien que prefiere menos que al otro, porque ambos se clasifican en primer lugar en las listas de preferencias del otro. Pero esto contradice la definición de emparejamiento estable, porque m y w preferirían estar juntos en lugar de con sus parejas actuales. Entonces, deben estar juntos en cada emparejamiento estable.

Por lo tanto, si un hombre y una mujer se prefieren el uno al otro más que a cualquier otra persona, siempre estarán juntos en cualquier emparejamiento estable.

1.3 Ejercicio 1.3

Hay muchos otros escenarios en los que podemos plantear preguntas relacionadas con algún tipo de principio de "estabilidad". Aquí hay uno que involucra la competencia entre dos empresas.

Supongamos que tenemos dos redes de televisión, a las que llamaremos A y B. Hay n franjas horarias de programación estelar, y cada red tiene n programas de televisión. Cada red quiere diseñar un horario, es decir, asignar cada programa a una franja horaria distinta, para atraer la mayor cuota de mercado posible.

Así es como determinamos qué tan bien les va a las dos redes en comparación entre sí, dado su horario. Cada programa tiene una calificación fija, basada en el número de personas que lo vieron el año pasado; asumiremos que ningún programa tiene exactamente la misma calificación. Una red gana una franja horaria determinada si el programa que programa para esa franja tiene una calificación más alta que el programa que la otra red programa para esa franja. El objetivo de cada red es ganar tantas franjas horarias como sea posible.

Supongamos que en la primera semana de la temporada de otoño, la Red A revela un horario S y la Red B revela un horario T. Con base en este par de horarios, cada red gana ciertas franjas horarias, de acuerdo con la regla mencionada anteriormente. Diremos que el par de horarios (S, T) es estable si ninguna red puede cambiar unilateralmente su propio horario y ganar más franjas horarias. Es decir, no hay un horario $S^{'}$ tal que la Red A gane más franjas horarias con el par $(S^{'}, T)$ de lo que ganó con el par (S, T); y simétricamente, no hay un horario $T^{'}$ tal que la Red B gane más franjas horarias con el par $(S, T^{'})$ de lo que ganó con el par (S, T).

El análogo de la pregunta de Gale y Shapley para este tipo de estabilidad es el siguiente: ¿Para cada conjunto de programas de televisión y calificaciones, siempre hay un par estable de horarios? Resuelve esta pregunta haciendo una de las siguientes dos cosas:

(a) da un algoritmo que, para cualquier conjunto de programas de televisión y calificaciones asociadas, produzca un par estable de horarios; o

(b) da un ejemplo de un conjunto de programas de televisión y calificaciones asociadas para el cual no haya un par estable de horarios.

Solución: Supongamos que existen dos redes, X e Y. Luego supongamos que la Red X tiene tres programas $\{x_1, x_2, x_3\}$ con calificaciones de 20, 40, y 60; y la Red Y tiene tres programas $\{y_1, y_2, y_3\}$ con calificaciones de 10, 30, y 50.

En este caso, si la Red X elige el horario $\{x_1, x_2, x_3\}$ y la Red Y elige el horario $\{y_1, y_2, y_3\}$, la Red Y siempre querrá cambiar su horario a $\{y_2, y_3, y_1\}$ para ganar dos franjas horarias en lugar de una.

Por otro lado, si la Red Y elige el horario $\{y_2, y_3, y_1\}$ y la Red X elige el horario $\{x_1, x_2, x_3\}$, la Red X siempre querrá cambiar su horario a $\{x_2, x_3, x_1\}$ para ganar tres franjas horarias en lugar de dos.

En ambos casos, no se puede encontrar una pareja estable de horarios, demostrando que no siempre existe una pareja estable de horarios para cualquier conjunto de programas y calificaciones.

1.4 Ejercicio 1.4

2 Notacion Big O

3 Grafos

4 Greedy

5 Divide y venceras

6 Programacion dinamica