

88강 내적 (Inner product)

dot product \Rightarrow 일반화

선형공간, 벡터공간, 체 위에서의 가군 군·환·체 \rightarrow 현대대수

고정관념 . 오개념.

23강 벡터공간 \Rightarrow 벡터를 다루기 위해 꼭 벡터 집합이 필요한가?

9가지 공리. 만족 \Rightarrow n-tuple 실수 벡터 집합 \Rightarrow 벡터공간.
 $\hookrightarrow (a_1, a_2, a_3, a_4)$ 4-tuple

ex) 벡터공간. 연산체계란? $V \ni a, b$ $a+b$

$(\mathbb{Z}, +)$ 연산체계
 \uparrow 정수집합 \uparrow 덧셈 \rightarrow 함수 : 이항연산

$$f: \underbrace{V \times V}_{\substack{a \quad b}} \rightarrow \underbrace{V}_c \Rightarrow f(\underbrace{a}_{a \in V}, \underbrace{b}_{b \in V}) = c \in V$$

$$\hookrightarrow f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad \uparrow \quad f(a, b) = a+b = c \in \mathbb{Z}$$

\hookrightarrow 닫혀있고, 결합, 항등원, 역원 \Rightarrow 군

$$(a+b)+c = a+(b+c) \quad a \quad -a \in \mathbb{Z}$$

교환법칙까지 성립하면 가환군 (아벨군) $2 \quad (\frac{1}{2})$

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 환, 체

$(\mathbb{R}, +, \times) \rightarrow$ 체의 한 종류



$2V, \sqrt{3}V$

* 벡터공간 \Rightarrow 선형공간 V , 체 위에서 정의된

$+$, \cdot 스칼라배 \rightarrow 23강 9가지 법칙들 만족 \rightarrow 선형공간
 \uparrow 덧셈 \uparrow operator

\hookrightarrow 내적이 정의되면 내적공간, 벡터공간. **super class**
 dot product 벡터공간.

(S, \star, Δ) 이항연산. (S, \star) 가환군
 \hookrightarrow 항 \hookrightarrow 체 추상화. \rightarrow 종류

군, 가환군, 환, 체 \Rightarrow 확장이 용이하다.

$\mathbb{R}, +, +$

ex) 군, 정수론 $\text{mod } 3$ 에 대한 정수 덧셈.

$$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\} \quad (3 \equiv 0 \pmod{3}) \rightarrow \text{mod } 3$$

동치류 분할

$$-1 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$-1 = (-1) \cdot 3 + 2 \quad \text{나머지}$$

$(\mathbb{Z}_3, +)$ 가환군일까? \Rightarrow 맞다.

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}_3$$

$$(a+b) \in \mathbb{Z}_3$$

$$1+2 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$2+1 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$0+0 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$0, -1, 0, 1, 2 \pmod{3}$$

$$A = \{a, b, c\}$$

항등원

$$a \star b = b$$

$$a \star b = b \star a$$

\star	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

\rightarrow 가환군

$$(A, \star) \Rightarrow \text{가환군}$$

다항식 환.

*동형 $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

$$a \star b \star c \star b \star c = a$$

$$0 + 1 + 2 + 1 + 2 = 0$$

$$(R, +, \cdot) \approx (I, \star, \Delta) \quad \text{대체 수}$$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

V 벡터공간 n -tuple \times dot product 사용가능?

★ dot product의 정의

$$\underline{V_1 = (a_1, a_2, \dots, a_n)}$$

$$V_2 = (b_1, \dots, b_n)$$

$$v_1 \cdot v_2 = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i$$

\Rightarrow 내적 (Inner product)

* $V \ni u, v, w$ $u \circ v$

① $u \cdot v = v \cdot u$

$$\textcircled{2} (u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$$

$$\textcircled{3} \quad (ku) \cdot v = k(u \cdot v)$$

④ $v \cdot v \geq 0$, ($v \cdot v = 0 \iff v = \vec{0}$)

Norm $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$

$$V, \bar{z}(S) \quad (S, +, x)$$

$$(2 \times 2) \leq a$$

$$d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\|$$