79강 켤레 전치와 대칭행렬 (conjugate transpose & symmetric matrix)

* 켤레 전치 (conjugate transpose)

A가 복소행렬일 때, A의 켤레 전치행렬

$A^* = \overline{A}^T$ → 행렬의 원소가 복소수

↳ $A^H, A^\dagger,$ → 켤레 복소수, $\overline{(a+bi)} = a-bi$

ex) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & i \\ 1+2i & 4 & 3-2i \end{bmatrix}_{2\times 3}$

$\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -i \\ 1-2i & 4 & 3+2i \end{bmatrix}$ $\overline{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1-2i \\ 3 & 4 \\ -i & 3+2i \end{bmatrix}$

* 켤레 전치의 기본 성질

① $(A^*)^* = A$

→ Lemma. $(\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$

pf) $(A)_{xy} = p_{xy} + q_{xy}i$ $\quad (A^T) = p_{yx} + q_{yx}i$

$(\overline{A})_{xy} = p_{xy} - q_{xy}i$ $\quad \overline{(A^T)} = p_{yx} - q_{yx}i$

$(\overline{A}^T)_{xy} = p_{yx} - q_{yx}i$

$(A^*)^* = A$

$(A^T)^T = A$ $\quad (\overline{A}^T)^T = \overline{A}$

$(A^*)^T = \overline{A}$

$(\overline{A^*})^T = A$

$(A^*)^* = A$

② $(AB)^* = B^*A^*$

pf) Lemma. $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$

$\overline{(a+bi)(c+di)} = (a-bi)(c-di)$

pf) $A: m\times n$ $\quad (A)_{xy} = p_{xy} + q_{xy}i$

$B: n\times k$ $\quad (B)_{xy} = r_{xy} + s_{xy}i$

$(\overline{AB})_{xy} = \sum_{t=1}^{n} (\overline{p_{xt} + q_{xt}i})(\overline{r_{ty} + s_{ty}i}) = (\overline{A}\,\overline{B})_{xy}$

$\overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{(a+c)+(b+d)i}$
$= (a+c)-(b+d)i$
$= (a-bi)+(c-di)$

$= \overline{(a+bi)} + \overline{(c+di)}$

Thm $(AB)^* = B^*A^*$

pf) $(AB)^* = (\overline{AB})^T = (\overline{A}\,\overline{B})^T$

$= \overline{B}^T\overline{A}^T = B^*A^*$

$\Rightarrow (A_1A_2\cdots A_k)^* = A_k^* \cdot \cdots \cdot A_1^*$

③ $(\overset{\text{복소수}}{k}A)^* = \overline{k}A^*$

pf) $(A)_{xy} = p_{xy} + q_{xy}i$

$(kA)_{xy} = k(p_{xy}+q_{xy}i)$

$(\overline{kA})_{xy} = \overline{k}\,\overline{(p_{xy}+q_{xy}i)}$

$(\overline{kA}^T)_{xy} = \overline{k}(p_{yx}-q_{yx}i)$

$= (\overline{k}A^*)_{xy}$

Thm 원소가 모두 실수로 이루어진 대칭행렬(symmetric matrix)의 고유값(eigen value)은 항상 실수이다

pf) A의 임의의 고유값을 λ라고 선택하자.
↳ n×n 행렬 ↱ 존재해야 선택가능. ↳ 복소수도 고려하자.

→ 실수 계수로 이루어진 n차 다항식은 복소수 범위에서는 n개의 해가 존재한다.
↳ 대수학의 기본정리
2차 방정식 → 실수 X 복소수 2개 근

$Av = \lambda v \quad (v \neq 0)$ $\quad v^*v = [d] = dI_{1\times1}$ $\quad v^*Av = \lambda v^*v = \lambda d I_{1\times1}$ $\quad A^{T} = A$

$\dfrac{v^*Av}{v^*v} = v^*\lambda v = \lambda \dfrac{\cancel{v^*v}}{\cancel{v^*v}} \Rightarrow \lambda = \dfrac{v^*Av}{v^*v}$ $\quad \dfrac{1}{d}v^*Av = \lambda I$ $\quad [1]_{1\times1}$

v^*v $\quad 1\times1$ $\quad v \neq 0$

$= \boxed{}$ 상수. ≥ 0 (≠)

$\lambda^* = \left(\dfrac{v^*Av}{v^*v}\right)^*$ $\quad \left(\dfrac{1}{d}v^*Av\right)^* = (\lambda I)^*$

$\left(\dfrac{1}{d}v^*AV\right) = (\overline{\lambda}I)$

$= \lambda I$

$\Rightarrow \lambda$: 실수.

$V = \begin{bmatrix} p_1+q_1i \\ p_2+q_2i \\ \vdots \\ p_n+q_ni \end{bmatrix}$ $\quad V^* = [\,p_1-q_1i \quad p_2-q_2i \quad \cdots\,]$

$V^*V = \sum_{k=1}^{n}(p_k-q_ki)(p_k+q_ki)$

$= \sum_{k=1}^{n} p_k^2 + q_k^2 > 0$