76강 닮음의 성질

Def. 닮음의 정의
서로 같은 크기의 정사각행렬 A와 C에 대해
$C = P^{-1}AP$를 만족하는 가역행렬 P가 존재하면
A와 C는 서로 닮음이다.

A와 B가 닮음이면 ⇒
① $rank(A) = rank(B)$
② $nullity(A) = nullity(B)$
③ A와 B의 대수적 중복도가 같다.

Thm 가역행렬 A에 대해, $rank(AB) = rank(B) = rank(BA)$
A: $n\times n$, B: $n\times n$

pf) $nullity(AB) = nullity(B)$

$rank(AB) + nullity(AB) = n$
$rank(B) + nullity(B) = n$

nullity : 영공간의 차원
영공간: 핵, ker

$ker(AB) = ker(B)$

i) $ker(AB) \subseteq ker(B)$, $\forall v \in ker(AB) \Rightarrow v \in ker(B)$
$\forall v \in ker(AB) \Rightarrow AB\cdot v = 0 \Rightarrow Bv = A^{-1}\cdot 0 = 0$
$\Rightarrow v \in ker(B)$

ii) $ker(B) \subseteq ker(AB)$ $\forall v \in ker(B) \Rightarrow v \in ker(AB)$.
$\forall v \in ker(B) \Rightarrow B\cdot v = 0 \Rightarrow ABv = A0 = 0$
$\Rightarrow v \in ker(AB)$

Thm A와 B가 닮음이면 $rank(A) = rank(B)$
pf) $A = P^{-1}BP$ (P는 가역)

$rank(A) = rank(P^{-1}BP)$
$= rank(\cancel{P}\cancel{P^{-1}}BP\cancel{P^{-1}})$
$= rank(B)$

Thm $nullity(A) = nullity(B)$
pf) 차원정리에 의해 성립한다.
$rank(A) + nullity(A) = n$
$rank(B) + nullity(B) = n$

Thm 행렬 A, B가 닮음이면, 모든 고유값에 대해
대수적 중복도가 같다.
λ가 특성방정식에서 가지는 차수
pf) $det(\lambda I - A) = det(\lambda I - B)$
$A = P^{-1}BP$ P가 존재.

$\lambda I - A = \lambda I - P^{-1}BP = \lambda P^{-1}P - P^{-1}BP$
$= P^{-1}(\lambda P - BP)$
$= P^{-1}(\lambda I - B)P$