제 43강 특수한 행렬들의 고유값

· $\det(A)$, 대각행렬, 삼각행렬 ⇒ 대각원소의 곱, 영행·영열.
· 특성방정식의 해. ⇒ 특수한 경우?

① 2×2 행렬
  i) 대각행렬

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = A, \quad Ax = \lambda x \quad \det(\lambda I - A) = \left| \begin{bmatrix} \lambda - a & 0 \\ 0 & \lambda - b \end{bmatrix} \right| = (\lambda - a)(\lambda - b) = 0 \quad \lambda = a \ \text{또는} \ b$$

↳ 대각원소 a와 b가 고유값이 된다.

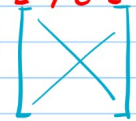$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \bigcirc \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \bigcirc & & & a_{mn} \end{bmatrix} = A \quad \det(\lambda I - A) = \left| \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & & & \bigcirc \\ & \lambda - a_{22} & & \\ & & \lambda - a_{33} \ddots & \\ \bigcirc & & & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} \right| = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn}) = 0$$

$$\lambda = a_{11}, \cdots, a_{nn}$$

↳ 대각행렬의 고유값은 대각원소이다.

  ii) 삼각행렬 ⇒ 삼각행렬의 고유값은 대각원소이다.
  상삼각행렬

$$(A)_{ij} = \begin{cases} \bigcirc & (i > j) \\ a_{ij} & \text{그외의 경우} \end{cases}$$

$$(\lambda I)_{ij} = \begin{cases} \bigcirc & i \neq j \\ \lambda & i = j \end{cases} \times$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn}) = 0$$

$$(\lambda I - A)_{ij} = \begin{cases} \lambda - a_{ij} \ (i = j) \\ \bigcirc \quad i > j \\ -a_{ij} \ \text{그외} \end{cases}$$

$$\lambda = a_{11}, \cdots, a_{nn}$$

↳ 상삼각행렬의 고유값은 대각원소이다.

✦ 하삼각행렬

Thm. $n \times n$ 행렬 A의 고유값을 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 이라 하면,

  i) $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$

  ii) $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$

  을 만족한다.

i) $\det(\lambda I - A) = 0 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$

한 행의 k배. $k|A|$

$\det(-A) = (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n$

$(-1)^n \det(A) = (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n, \quad \det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$

ii) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + \cdots$

$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3) = x^3 + (a_1+a_2+a_3)x^2 + \cdots$

$(x+a_1)\cdots(x+a_n) = x^n + (a_1+\cdots+a_n)x^{n-1}$

$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$
$$= \lambda^n - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots$$

여인수 전개   행, 열   모두 같다 ⇒ 치환 현대대수.

$f(x) = \boxed{ax^2 + bx + c_n} \Rightarrow$ 외울 $\Rightarrow$ 극대. 극소.

$= \boxed{a(x-t)^2 + k}$

③ ④ (1함 3함 (s c, log), ⋯