제 52강 행렬의 닮음 (similarity)

선형변환 A : E

↳ B : $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$

$E \to V$: $P = [v_1 \cdots v_n]^{-1}$

$A = P^{-1}BP$

Def. A와 B가 서로 크기가 같은 정방행렬이고, $B = P^{-1}AP$ 를 만족하는 가역행렬 P가 존재할 때, B는 A와 닮음이라고 한다.

(A는 B와 닮음 ($A = PBP^{-1}$) P^{-1}

* 닮음의 성질

① A와 B가 닮음이면, $\det(A) = \det(B)$이다.

$A = PBP^{-1}$ $\qquad \det(AB) = \det(A)\det(B)$.

$$\det(A) = \det(PBP^{-1}) = \det(P)\times\det(B)\times\det(P^{-1})$$
$$= \det(P)\det(P^{-1})\det(B)$$
$$= \det(P\cdot P^{-1})\det(B)$$
$$= \det(I)\det(B) = \det(B)$$

② $tr(A) = tr(B)$ $\qquad tr(AB) = tr(BA)$

$$tr(A) = tr(PBP^{-1}) = tr(BP^{-1}P) = tr(B)$$

③ A와 B의 고유값은 같다.

pf) A의 특성 방정식 $\det(\lambda I - A) = 0$

$$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - PBP^{-1})$$
$$= \det(P(\lambda P^{-1} - BP^{-1}))$$
$$= \det(P(\lambda I - B)P^{-1})$$
$$= \det(P)\times\det(\lambda I - B)\times\det(P^{-1})$$

선형사상 → 행렬 → 역행렬

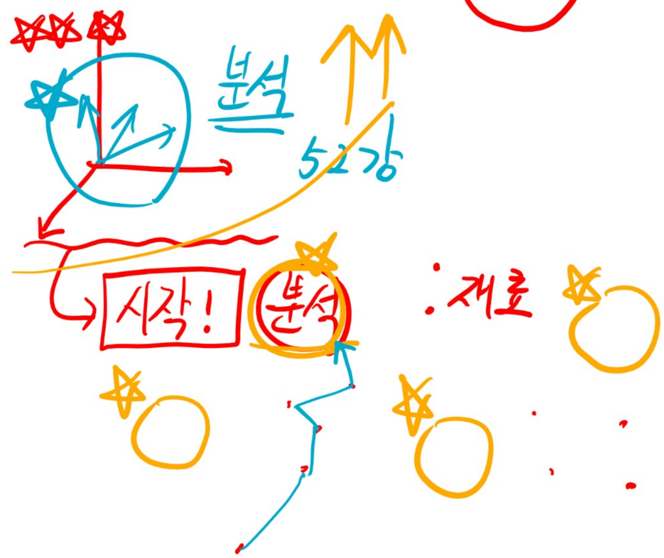
벡터

*해집합

span

벡터 공간의 해석

수치분석, 데이터 분석



$= \det(P)\det(P^{-1})\det(\lambda I - B)$

$= \det(\cancel{PP^{-1}})\det(\lambda I - B)$

$= \det(\lambda I - B)$ ⇒ A와 B의 특성방정식은 같다.
⇒ A와 B의 고유값도 같다.

④ $\boxed{A = P^{-1}BP}$ (즉, 닮음)일 때,

「$\boxed{v_1}$가 λ_1에 대한 A의 고유벡터라면,

기저변환

Pv_1은 λ_1에 대한 B의 고유벡터이다.」

v_2가 λ_2에 대한 B의 고유벡터이면,

$P^{-1}v_2$는 λ_2에 대한 A의 고유벡터이다.

pf) $Av_1 = \lambda_1 v_1$ $\quad \cancel{P^{-1}}BPv_1 = \lambda_1 v_1$

$BPv_1 = \lambda_1 Pv_1$ //