80강 직교대각화 가능 (Orthogonal Diagonalizability)

① 직교닮음 (orthogonally similar)

$C = P^{-1}AP$ (P가 직교행렬) $P^{-1} = P^T$

$A = PCP^{-1}$

② 직교대각화 (orthogonally diagonalize)

$D = P^{-1}AP$ (직교 닮음 일때)

$= P^TAP$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 확대변환

$T(x) = Ax = PDP^{-1}x$

행, 열 직교, 길이도 1

basis 변환

orthonormal

③ 직교대각화 가능하면 ⇒ 대칭행렬 이다.

pf) A: 직교대각화 가능 ⇒ A가 대칭행렬임을 보이자.

$D = P^TAP$ 를 만족하는 직교행렬 P 존재.

$A = PDP^T$ $(P^{-1} = P^T)$

$A^T = (PDP^T)^T = PDP^T$ (D: 대칭행렬)

$\therefore A^T = A \Rightarrow$ A는 대칭.

④ n×n 행렬 A(실수행렬)가 대칭행렬이면 A는 직교대각화 가능하다.

pf) 귀납법. i) A: 1×1 ii) A: (n-1)×(n-1) ⇒ n×n

i) A: 1×1 $A = [a]$ 대각행렬

$D = [1][a][1]$

$= PAP^T$

ii) (n-1)×(n-1) 인 대칭행렬은 직교대각화 가능

A: n×n 대칭행렬(실수) ⇒ 실수인 고유값 λ를 가져올 수 있다. λ에 해당하는 단위 고유벡터를 v_1라고 하자.

$\mathbb{R}^n$ 공간의 orthonormal basis $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$

$P = [v_1\ v_2 \cdots v_n]$ → 직교행렬

P^TAP는 대칭행렬 $(P^TAP)^T = P^TAP$

$= P^TA[v_1\ \underbrace{v_2 \cdots v_n}_{\alpha}] = P^T[Av_1\ A\alpha]$

$= P^T[\lambda v_1\ A\alpha]$

$= \begin{bmatrix} v_1^T \\ \alpha^T \end{bmatrix}[\lambda v_1\ A\alpha] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \alpha^TA\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0\ 0 \cdots 0\ 0 \\ 0 & \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} v_2^T \\ v_3^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix} v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$P^TAP = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ B는 대칭

대각

$D' = T'^TBT'$

↳ n-1 × n-1 행렬

↳ 직교대각화 가능

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & T' \\ \vdots & \end{bmatrix}$

T^T T

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T'^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & T'^TB \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & T'^TBT' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & D' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & a & \\ \vdots & & b \end{bmatrix}$

↳ 대각행렬

$D = T^T P^T A P T$ $\quad$ P : 직교행렬 T도 직교

$= U^T A U$ $\quad$ $U = PT$: 직교