

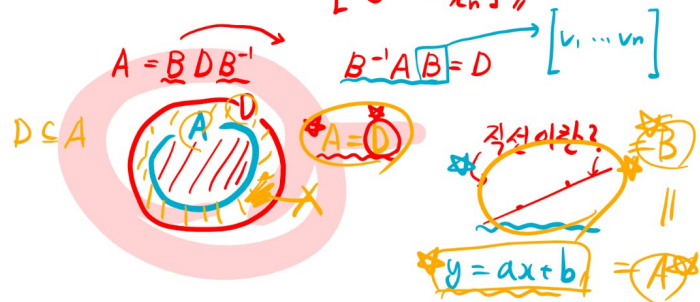
# 제 49 강 대각화가능 행렬과 그 성질들

## Def. 대각화가능 (Diagonalizable)

정사각행렬  $A$ 에 대해서  $p^{-1}Ap$ 가 대각행렬이 되기 하는 가역행렬  $p$ 가 존재한다면, 행렬  $A$ 는 "대각화 가능"하다고 한다.

$\hookrightarrow A: n \times n$   
 $\hookrightarrow v_1 \sim v_n$   
 \*  $n$ 개의 선형독립인 고유벡터가 존재하면  
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$



Thm. 대각화 가능한 행렬  $A$ 는

$n$ 개의 선형독립인 고유벡터를 가진다.

p.t)  $p^{-1}Ap = D$  가역행렬인  $p$ 는 존재.

$$Ap = pD$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$p = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$$

$\hookrightarrow$  선형독립

$$Ax = \lambda x$$

$$Av_1 = \lambda_1 v_1$$

$$Av_2 = \lambda_2 v_2$$

$$\vdots$$

$$Av_n = \lambda_n v_n$$

$$pD = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1 v_1 \ \lambda_2 v_2 \ \dots \ \lambda_n v_n] = A[v_1 \ \dots \ v_n]$$

$$= \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \dots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \dots & v_{n2} \\ v_{13} & v_{23} & \dots & v_{n3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_{11} & & & \\ \lambda_1 v_{12} & & & \\ \vdots & & & \\ \lambda_1 v_{1n} & & & \end{bmatrix} \dots$$

※ 대각화 가능 행렬의 거듭제곱

$$A^n = A \cdot A \cdots A$$

$$P^{-1}AP = D \rightarrow \text{대각}$$

$$D^n = (P^{-1}AP)^n$$

$$= \underbrace{(P^{-1}AP) \cdot (P^{-1}AP) \cdots (P^{-1}AP)}_{n \text{ 회}}$$

$$= P^{-1} A^n P$$

$$\boxed{A^{(n)}} = \cancel{P D^{(n)} P^{-1}} //$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A \cdots A$$

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \lambda_2^n & \\ 0 & \cdots & \lambda_n^n \end{bmatrix}$$