

73 장 대수적 중복도와 기하적 중복도 (Algebraic multiplicity and geometric multiplicity)

* 블록 행렬의 행렬식 (A가 가역일 경우만.)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$X = \alpha X' \beta$$

$$\det(X) = \det(\alpha X' \beta) = \det(\alpha) \det(X') \det(\beta)$$

$$= \det(X') = \det(A) \det(D - CA^{-1}B)$$

$$* \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = X \quad \det(X) = \det(A) \det(B)$$

Thm $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = X$, A가 가역일 때
↳ X는 정사각행렬일 때만.

$$\det(X) = \det(A) \det(D - CA^{-1}B)$$

$$X: m \times m$$

$$A: n \times n$$

$$D: (m-n) \times (m-n)$$

$$n < m$$

* 대수적 중복도

특성방정식 $A_{m \times n}$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

↳ 고유값

2차 방정식 → 허근 2개
중근 2개
서로 다른 두 실근

λ에 대한 n차 방정식

↳ 최대 n개의 실수해
항상 n개의 복소수해

대수학의 기본정리

중근
 λ_1, λ_2 삼중근 사중근

$$(\lambda - \lambda_1)^3 (\lambda - \lambda_2)^4 = 0$$

* 고유값 λ_1 가 특성방정식의 근으로 중복된 횟수.

* 기하적 중복도

$$Ax = \lambda x \quad x \text{가 고유벡터 } \text{span}(V)$$

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda x \}$$

고유값 λ 의 기하적 중복도는 $\dim(S)$ 이다.