

제 50 장 기저의 성질

Thm. $\mathbb{R}^n \supseteq V$, $\dim(V)$ 는 V 에서 선형독립일 수 있는 벡터들의 최대 개수이다. $\rightarrow c=n$

귀류법, $\dim(V) = c$ 라고 할 때, c 보다 많은 벡터들이 선형독립이다. $\{v_1, \dots, v_c, v_{c+1}\} = B$

i) $\text{span}(B) = V$, B 는 V 의 basis olct. $\Rightarrow \dim(V) = c+1 \neq c$

ii) $\text{span}(B) \neq V$, $v_1 \sim v_{c+1} \in V$, $\text{span}(B) \subset V$

$V - \text{span}(B) \ni v_{c+2}$ $B \cup \{v_{c+2}\} = B'$ 선형독립

$\text{span}(B') = V \Rightarrow B' \Rightarrow \dim(V) = c+2 \neq c$ $B' \cup \{v_{c+3}\}$

$\text{span}(B') \neq V$, $V - \text{span}(B') \ni v_{c+3}$ $\text{span}(B'')$

$= V \Rightarrow \dim(V) = |B''|$

\uparrow $= n \neq c$

$|B''| = n$, $\text{span}(B'') \neq V$ $V - \text{span}(B'') \neq \emptyset$

(V) B'' 의 원소와 선형독립. (B'') (V) $n+1$ 개

$\mathbb{R}^n \supseteq V$ $\{v_1, \dots, v_{n+1}\} \Rightarrow v_1 \sim v_{n+1} : n$ 차원 벡터

\Rightarrow 가역행렬

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n+1} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \dots & v_{mn+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_{n+1} \\ v_{n+1} \\ \vdots \\ v_{n+1} \\ 0 \end{matrix}$$

$(n+1) \times (n+1)$
 $\hookrightarrow \det = 0$ 비가역

$\dim(V) = n$, 최대,

$n+1$ 개 선형독립 $V \subseteq \mathbb{R}^n$

Thm. $V \supseteq W$, $\dim(V) \geq \dim(W)$

pf) $\dim(V) < \dim(W)$ 귀류법.

B

$B' = \{v_1, \dots, v_{\dim(W)}\}$

$|B| < |B'| \Rightarrow \dots$

\rightarrow 선형독립일 수 있는 최대 개수다

Thm. $\dim(V) = k$ $V \ni v_1, v_2, \dots, v_k$

$B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ 는 V 의 basis olct.

B ① 선형독립. ② $\text{span}(B) = V$

pf) 귀류법 $\text{span}(B) = V$ $V - \text{span}(B) \ni v_{k+1}$

$B' = \{v_1, \dots, v_{k+1}\}$

\hookrightarrow 선형독립

$\text{span}(B') \neq V$ (k)

\hookrightarrow 차원 \uparrow *

$B - \{v_i\} = B_0$ $\text{span}(B_0) \neq V$?

$i: 1 \sim k$

$\text{span}(B_0) \subsetneq \text{span}(B) \subsetneq V$

