

제 41강 특성방정식 (characteristic equation)

① 특성 방정식

$$Ax = \lambda x \Rightarrow Ax - \lambda x = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0 \quad \det(A - \lambda I) = 0 : A \text{의 특성방정식}$$

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \Rightarrow 2\text{차원} \Rightarrow \text{축을 2개 찾아야 함} \Rightarrow \text{고유벡터 2개}$$

\Rightarrow 일반적으로는 $n \times n$ 행렬 $\Rightarrow n$ 차원 $\Rightarrow n$ 개의 축 \Rightarrow 고유벡터 n 개 : 모두 선형독립

i) $\det(A - \lambda I) = 0$ 의 해가 n 개 일때

$2\text{차원 } \lambda = \pm 2\text{개} \Rightarrow$ 고유벡터 n 개를 찾아낼수있을까?

서로다른 실수

\hookrightarrow 선형독립

Thm. 특성방정식의 해가 n 개이면, 선형독립인 고유벡터 n 개를 찾아낼수있다. (단, A 는 n 차 정사각행렬)

\hookrightarrow 축을 만들수 있다.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$: n 개의 고유값이 존재한다. 하자

i) $Ax = \lambda_1 x \Rightarrow (A - \lambda_1 I)x = 0$ 동치연립선형방정식이 자명해만을 가질 필요충분조건 \iff 가역

$\hookrightarrow 0 \Rightarrow$ 비가역

$0 \neq \vec{v}_1$ 가 존재한다. $(x_1 - \xi \vec{0}) \in \vec{v}_1$

임의의 \forall

$Ax = 0 \quad \vec{v}_1 = \text{Span}(\vec{v}_1) = \{t\vec{v}_1 \mid t \in \mathbb{R}\}$

ii) $Ax = \lambda_2 x \Rightarrow x_2 - \xi \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_2$

$Ax = \lambda_n x \Rightarrow x_n - \xi \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_n$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ 은 선형독립임을 보자.

귀류법) 선형독립이 아니라고 가정해보자.

$\vec{v}_i = a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_{i-1} \vec{v}_{i-1} + a_{i+1} \vec{v}_{i+1} + \dots + a_n \vec{v}_n$

\vec{v}_1 라고 해도 일반성을 잃지 않는다.

$\vec{v}_1 = a_2 \vec{v}_2 + a_3 \vec{v}_3 + \dots + a_n \vec{v}_n$

$a_i (\lambda_1 - \lambda_i) \vec{v}_i = 0 \hookrightarrow \lambda_1 \neq \lambda_i$

$\hookrightarrow A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{v}_1 &= \lambda_1 (a_2 \vec{v}_2 + a_3 \vec{v}_3 + \dots + a_n \vec{v}_n) = \vec{v}_1 \\ &= \lambda_1 a_2 \vec{v}_2 + \lambda_1 a_3 \vec{v}_3 + \dots + \lambda_1 a_n \vec{v}_n \\ &= A \vec{v}_1 \\ &= A (a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n) \\ &= A a_2 \vec{v}_2 + \dots + A a_n \vec{v}_n \\ &= a_2 A \vec{v}_2 + a_3 A \vec{v}_3 + \dots + a_n A \vec{v}_n \\ &= a_2 \lambda_2 \vec{v}_2 + a_3 \lambda_3 \vec{v}_3 + \dots + a_n \lambda_n \vec{v}_n \end{aligned}$$

$a_2 (\lambda_1 - \lambda_2) \vec{v}_2 + a_3 (\lambda_1 - \lambda_3) \vec{v}_3 + \dots + a_n (\lambda_1 - \lambda_n) \vec{v}_n = 0$

