제 43강 특수한 행렬들의 고유값

- $\det(A)$, 대각행렬, 삼각행렬 ⇒ 대각원소의 곱, 영행·영열.
- 특성방정식의 해. ⇒ 특수한 경우?

① 2×2 행렬

i) 대각행렬

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = A, \quad Ax = \lambda x \quad \det(\lambda I - A) = \left| \begin{bmatrix} \lambda - a & 0 \\ 0 & \lambda - b \end{bmatrix} \right| = (\lambda - a)(\lambda - b) = 0 \quad \lambda = a \text{ 또는 } b$$

↳ 대각원소 a와 b가 고유값이 된다.

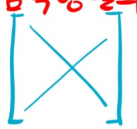
$$\begin{bmatrix} a_{11} & & O \\ & a_{22} & \\ O & \ddots & a_{nn} \end{bmatrix} = A \qquad \det(\lambda I - A) = \left| \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & & O \\ & \lambda - a_{22} & \\ & & \lambda - a_{33} \\ O & & \ddots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} \right| = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn}) = 0$$

$$\lambda = a_{11}, \cdots, a_{nn}$$

↳ 대각행렬의 고유값은 대각원소이다.

ii) 삼각행렬 ⇒ 삼각행렬의 고유값은 대각원소이다.

상삼각행렬



$$(A)_{ij} = \begin{cases} 0 & \boxed{i > j} \\ a_{ij} & \text{그 외의 경우} \end{cases}$$

$$(\lambda I)_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \lambda & \boxed{i = j} \end{cases} \times$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn}) = 0$$

$$(\lambda I - A)_{ij} = \begin{cases} \lambda - a_{ij} & i = j \\ \boxed{0} & \boxed{i > j} \\ -a_{ij} & \text{그 외} \end{cases} \qquad \lambda = a_{11}, \cdots, a_{nn}$$

↳ 상삼각행렬의 고유값은 대각원소이다.

☆ 하삼각행렬

Thm. $n \times n$ 행렬 A의 고유값을 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 이라 하면,

i) $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n$

ii) $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$

을 만족한다.

i) $\det(\cancel{\lambda I} - A) = 0 = (\cancel{\lambda} - \lambda_1)(\cancel{\lambda} - \lambda_2) \cdots (\cancel{\lambda} - \lambda_n)$

↳ ☆ 한 행의 k배. $k|A|$

$\det(-A) = (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n$

$\cancel{(-1)^n} \det(A) = \cancel{(-1)^n} \lambda_1 \cdots \lambda_n$, $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$

ii) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + \cdots$

$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3) = x^3 + (a_1+a_2+a_3)x^2 + \cdots$

$(x+a_1)\cdots(x+a_n) = x^n + (a_1+\cdots+a_n)x^{n-1}$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$
$$= \lambda^n - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots$$

여인수 전개 행, 열 모두 같다」 ⇒ 치환 현대대수.

$f(x) = \boxed{ax^2+bx+c}$ ⇒ $\boxed{\text{미분}}$ ⇒ 극대·극소.

$= \boxed{a(x-t)^2+k}$

3 4 다항 초월(sc, log), ⋯