

93강 치환 (2) ↑ ↑ 홀 짝

① 치환의 홀짝성 (기우성)

홀 치환    짝치환

Def. 반전의 개수의 홀짝성을 치환의 홀짝성이라고 하자.

ex)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$  홀치환  $\left[ \sigma = (a_1 a_2 \dots a_n)^{\forall i, j} \quad i > j \Rightarrow \sigma(i) < \sigma(j) \text{ 반전.} \right]$

\* 반전의 개수 세는 법

$1 \Rightarrow 0 \text{ 개}$   
 $3 \Rightarrow 1 \text{ 개}$   
 $2 \Rightarrow 0 \text{ 개}$   
 $4 \Rightarrow 0 \text{ 개}$

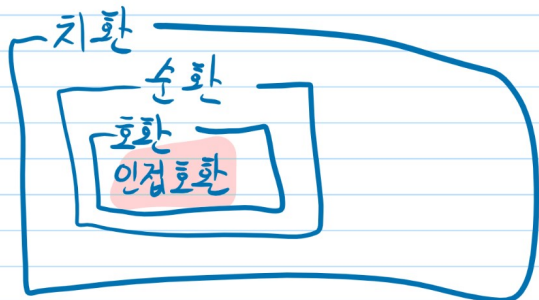
$\Rightarrow 1 \text{ 개} \Rightarrow$  홀수 개

Def. 치환의 부호

$\hookrightarrow$  홀치환: -1

짝치환: 1

$$\text{sgn}(\sigma) := \begin{cases} 1 & \text{짝} \\ -1 & \text{홀} \end{cases}$$



\* 인접호환의 홀짝성

$\hookrightarrow$  바로 옆 숫자와 교환  $\rightarrow$  반전의 개수는 1개  $\rightarrow$  홀치환

Thm 인접호환을 합성하면 홀짝성이 바뀐다.  $\Rightarrow$  부호도 바뀐다.

$$e \circ \sigma = \bar{\sigma}$$

pf)  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$  반전의 개수,  $e = (i \ i+1)$

$|a_i|$ :  $a_i$  기준으로 센 반전의 개수

$\hookrightarrow |a_1| = m_1, |a_2| = m_2, \dots, |a_n| = m_n$

$$|a_i| = m_i \quad |a_{i+1}| = m_{i+1}$$

$$e \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & i & i+1 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{i+1} & a_i & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$|a_1| = m_1, |a_2| = m_2$$

$$|a_i| =$$

$$i) a_i < a_{i+1} : |a_1| + \dots + |a_n| = m_1 + m_2 + \dots + m_i + m_{i+1} + \dots + 1 + \dots$$

$$\hookrightarrow |a_i| = m_i, |a_{i+1}| = m_{i+1} + 1$$

$$|e_0| = M + 1$$

$$m_1 + \dots + m_n = M$$

$$ii) a_i > a_{i+1}$$

$$\hookrightarrow |a_i| = m_i - 1, |a_{i+1}| = m_{i+1} + 1$$

$$\hookrightarrow |e_0| = M - 1$$

\* 정의 교체

$p$  와  $q$  가 동치인 명제이면 정의로  $p$  를 사용하던걸  $q$  로 대체해도 무방하다.

ex) 이등변삼각형 : 두 변의 길이가 같은 삼각형 ✓  
 $\Leftrightarrow$  두 각의 크기가 같다.  
 두 각의 크기가 같은 삼각형 ✓



행렬  $\rightarrow$  증명

\* 치환의 홀짝성 : 반전의 개수의 홀짝성

Def. 어떤 치환  $\sigma$  를 호환들의 곱 으로 나타냈을 때, 곱해진 호환들의 개수의 홀짝성을 치환의 홀짝성이라 한다.

치환  $\rightarrow$  서로소인 순환들의 곱  
 엄밀한 증명 X 동치류분할  
 $\rightarrow$  호환의 곱으로 나타낼 수 있다

$$pf) \sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_k \rightarrow \text{호환} \quad (k \text{의 홀짝성}) = (\text{반전의 개수의 홀짝성})$$

$$\hookrightarrow \text{치환} \quad = (m \text{의 홀짝성})$$

중간정리) 호환은 인접호환의 곱으로 표현이 가능하고, 그 개수는 항상 홀수 다.

$$pf) (i - i+d) = (i - i+1)(i+1 - i+d)(i - i+1)$$

$$(i+1 - i+d) = (i+1 - i+2)(i+2 - i+d)(i+1 - i+2)$$

$$(i+d-1) \overbrace{(i+d)}^{i+d}$$

$$\sigma = \underbrace{e_1 e_2 e_3 \dots e_{2n+1}}_{\text{짝수}} \cdot \underbrace{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}_{\text{홀수}} \cdot \underbrace{\alpha_n \circ I}_{\text{홀수}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = I \text{ 항등치환} \rightarrow \text{짝수 치환}$$

$$\sigma = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_k = \underbrace{e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_m}}_{\text{홀수}} \underbrace{e_{j_1} e_{j_2} \dots e_{j_m}}_{\text{홀수}} \dots \underbrace{e_{k_1} e_{k_2} \dots e_{k_m}}_{\text{홀수}}$$

$$\tau_1 = e_{i_1} e_{i_2} e_{i_3} \dots e_{i_m} \quad 3\text{개}$$

$$\tau_2 = e_{j_1} e_{j_2} e_{j_3} \dots e_{j_m} \quad 7\text{개}$$

⋮

$$3+7+\dots = m\text{개}$$

$\tau_k$

$k$ 가 홀수이면

$k$ 와  $m$ 의 홀짝성이 같은가?  
같다.

\* 치환의 곱셈법칙.

$$\text{홀} \times \text{홀} = \text{짝}$$

$$\checkmark \text{짝} \times \text{짝} = \text{짝}$$

$$\checkmark \text{홀} \times \text{짝} = \text{홀}$$

$$\checkmark \text{짝} \times \text{홀} = \text{홀}$$

1 -1 순. 환. 체.

$$\text{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \text{sgn}(\sigma_1) \times \text{sgn}(\sigma_2)$$

pf)  $\text{홀} \times \text{홀}$

$$\sigma_1 = a_1 a_2 \dots a_{2n+1}$$

$$\sigma_2 = b_1 b_2 \dots b_{2m+1}$$

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = a_1 \dots a_{2n+1} \cdot b_1 \dots b_{2m+1}$$

$$(2n+1) + (2m+1) = 2(n+m+1)$$

✓ 대수 :

홀  
숫자

중  
미지수  
문자.

2  
행렬  
배열

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}_{2 \times 2} \times \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$