제 49강 대각화가능 행렬과 그 성질들

Def. 대각화가능 (Diagonalizable)

정사각행렬 A에 대해서 $p^{-1}Ap$가 대각행렬이 되게 하는 가역행렬 p가 존재한다면, 행렬 A는 "대각화 가능"하다고 한다.

$A : n \times n$ $\quad$ $v_1 \sim v_n$

* n개의 선형독립인 고유벡터가 존재하면

$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ $\qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$A = BDB^{-1}$ $\qquad B^{-1}AB = D$ $\qquad B = [v_1 \cdots v_n]$

Thm. 대각화 가능한 행렬 A는

n개의 선형독립인 고유벡터를 가진다.

pf) $p^{-1}Ap = D$, 가역행렬인 p는 존재.

$Ap = pD$ $\qquad p = [v_1\ v_2 \cdots v_n]$ → 선형독립

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$Ax = \lambda x$

$Av_1 = \lambda_1 v_1$

$Av_2 = \lambda_2 v_2$

$\vdots$

$Av_n = \lambda_n v_n$

$$pD = [v_1\ v_2 \cdots v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1 v_1\ \ \lambda_2 v_2 \cdots \lambda_n v_n] = A[v_1 \cdots v_n]$$

$$= \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & & v_{n2} \\ v_{13} & v_{23} & \cdots & v_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & v_{23} & & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_{11} & & \\ \lambda_1 v_{12} & & \\ \vdots & \cdots & \\ \lambda_1 v_{1n} & & \end{bmatrix}$$

☆ 대각화 가능 행렬의 거듭제곱

$$A^n = A \cdot A \cdots A$$

$$P^{-1}AP = D_{\to \text{대각}}$$

$$D^n = (P^{-1}AP)^n$$

$$= \underbrace{(P^{-1}A\cancel{P})\cdot(\cancel{P^{-1}}A\cancel{P})\cdot(\cancel{P^{-1}}A\cancel{P})\cdots(\cancel{P^{-1}}AP)}_{n\text{개}}$$

$$= P^{-1}A^nP$$

$$\boxed{A^n} = PD^nP^{-1}$$

$A \cdot A \cdots A$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & & 0 \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^n \end{bmatrix}$$