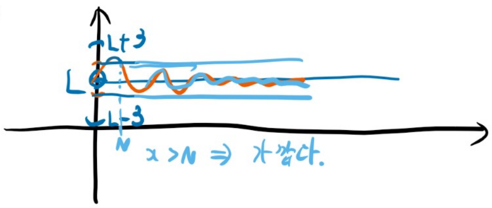
미적분학 1강 극한의 엄밀한 정의

수렴한다.

* $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ⇒ x가 커질 때 f(x)의 값이 L로 충분히 가깝게 다가간다.

~~$|f(x)-L|$ 작아진다~~

↳ 충분히 가깝다는 기준이 다르다.



① $L \pm 3$

② $L \pm 0.1$

* 근방 (N) $N(L;3) = \{x \mid |L-x|<3,\ x\in\mathbb{R}\}$

↳ $L-3 < x < L+3$ $(-3,3)$ 열린구간 $[-3,3]$ 닫힌구간

* 빠진근방 (N') $N'(L;3) = \{x\in\mathbb{R} \mid 0<|L-x|<3\}$

항상 찾을수 있다면

0.1 → $x > N \Rightarrow |f(x)-L| < 0.1$

0.01 $x > N_1 \Rightarrow |f(x)-L| < 0.01$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0$ s.t. $x > N \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$

such that

$\forall \varepsilon > 0,\ x > N \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon > 0$ s.t. $x > N \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$ 무한번 증명해야 할까?

↳ 임의의, 모든

* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ⇒ x가 a로 $\boxed{\text{다가갈 때}}$ f(x)가 L로 충분히 가깝게 다가간다.

충분히 가깝게

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0$ s.t. $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$

↳ 작은수 변수

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon > 0$, s.t. $x > N \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$ $N = f(\varepsilon)$

0.1 $x > N_1 \Rightarrow |f(x)-L| < 0.1$

↳ 보여줘야 된다.

0.01 N_2

0.001 N_3 ⇒ 사실상 무한번 보여줘야 된다.

* 무한히 증명할 땐 ⇒ 무한히 반복가능한 방법을 제시한다. (귀납법)

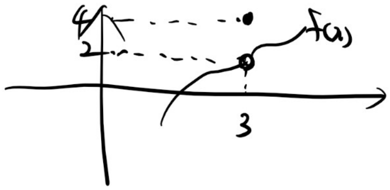
모든 자연수에 대해 증명 ⇒ $n=1$, $n=k \Rightarrow n=k+1$

소수가 무한하다 증명? ⇒ 무한히 새로운 소수를 계속 보여준다.

정수론 강의

$a_1, \cdots, a_n$ $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n + 1$

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ 「$\forall \varepsilon>0, \exists \delta_\varepsilon>0$ s.t. $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$」



$\lim_{x\to 3} f(x) = 2$

$f(3)=?$

$g(t)$가 $\lim_{t\to\infty} g(t)=a$ 를 만족하도록 잡자 (단, $g(t)=a$ 가 되는 t는 존재하지 않는다.)

$g(t)=\frac{1}{t}+a$ → 증명을 하긴 해야함.

$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}+a = a$ 증명

$\forall\varepsilon>0, \exists N_\varepsilon>0$ s.t. $t>N_\varepsilon \Rightarrow 0<|\frac{1}{t}+a-a|<\varepsilon$ 는 참이다.

「아르키메데스 정리」→ 해석학

$\lim_{t\to\infty} g(t)=a$ (단 $g(t)=a$, $\nexists t$)

$\forall\varepsilon>0,\exists N_\varepsilon>0$ s.t. $t>N_\varepsilon \Rightarrow 0<|g(t)-a|<\varepsilon$

$\lim_{x\to a} f(x)=L$ $x=g(t)$

$\Leftrightarrow \lim_{g(t)\to a} f(g(t))=L \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} f(g(t))=L$

$\forall\varepsilon_1>0,\exists M_{\varepsilon_1}>0$ s.t. $t>M_{\varepsilon_1}\Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon_1$

$\forall\varepsilon_2>0,\exists\delta_{\varepsilon_2}>0$ s.t. $0<|x-a|<\delta_{\varepsilon_2}\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon_2$ 을 증명한다면

$\Rightarrow 0<|g(t)-a|<\delta_{\varepsilon_2} \Rightarrow |f(g(t))-L|\varepsilon_2$

$\forall\varepsilon>0,\exists N_\varepsilon>0$ s.t. $t>N_\varepsilon\Rightarrow 0<|g(t)-a|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon_2>0,\exists\delta_{\varepsilon_2}>0$ s.t.

$\Rightarrow \delta_{\varepsilon_2}$에 대해 $\exists N_{\delta_{\varepsilon_2}}>0$ $t>N_{\delta_{\varepsilon_2}} \Rightarrow 0<|g(t)-a|<\delta_{\varepsilon_2}$

$\Rightarrow 0<|x-a|<\delta_{\varepsilon_2}\Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon_2$

$\lim_{x\to a} f(x)=L$

「$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon>0$, s.t. $0<|x-a|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$」

ex) $f(x)=2x+1$

$\lim_{x\to2} 2x+1=5$ 를 증명해라.

「$\forall \overset{0.1}{\varepsilon}>0, \exists \overset{0.001}{\delta_\varepsilon}>0$ s.t. $0<|x-2|<\delta \Rightarrow |2x-4|<\varepsilon$」

$\delta = \boxed{\frac{\varepsilon}{2}}$ 라고 잡으면 $2|x-2|<\varepsilon \Rightarrow |2x-4|<\varepsilon$」

$\frac{0.1}{2}$ $\frac{0.001}{2}$