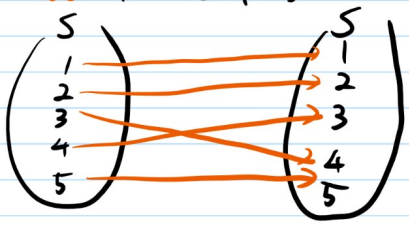
92강 치환 (permutation)

① 치환의 정의

자연수 집합 $S = \{1, 2, \cdots, n\}$의 치환이란, $S \to S$ 인 일대일 대응 함수이다.

$f : S \to S$



$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$e_1 = (1,0,0)$

$\sigma_1 = (1\ 2\ 3)$

ex) $S = \{1, 2, 3\}$ → 3!

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \quad \sigma_6$

$S_3 = \{\sigma_1, \cdots \sigma_6\}$

$4\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$S_4 = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_{12}\}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

② 표기법

i) 두 줄 표기법

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

ii) 한 줄 표기법

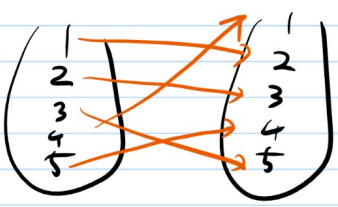
$(3\ 2\ 1\ 4\ 5) \quad (1\ 2\ 3\ 5\ 4)$

iii) 순환표기법

$(1-2-3-5-4) \quad (2-3-5-4-1)$

iv) 정규 순환표기법 (canonical cyclic anotation)

③ 순환 (cycle)



$1-2-3-5-4$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (2\ 3\ 5\ 1\ 4) \quad (1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 4)$

④ 항등치환

$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}$ $(1)(2)(3)(4)(5)$

⑤ 순환(cycle)의 길이. $S=\{1,\cdots,?\}$

$(1-2-4-5)$: 4

$(2-4-5)$: 3 ↳ 몇개.

$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&4&3&5&2&6\end{pmatrix} = (2-4-5)$

$\sigma(2)=4$

⑥ 서로소 (disjoint cycle) : 서로 다른 궤도를 가진 순환 (궤도의 교집합이 $\emptyset$)

$|S_6| = 6!$ 개 $\quad n!$: n개를 뒤섞을 경우의 수

S_6 ∋ ⑥ $(1-2-3)$ $(1-3-6)$ $(4-5-6)$

$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\ \text{6개}&\times\text{5개}&\times4\times3\times2\times1&&&\end{pmatrix} = 6!$

⑦ 궤도 (orbit) ⇒ 순환에 포함된 숫자들의 집합

↳ 집합 $(1-2-3)$ $\{1,2,3\}\cap\{4,5,6\}=\emptyset$ $\{1,3,6\}$

⑧ 호환 : 길이가 2인 순환

↳ 상호교환. $(2-3)$ $(1-2)$ $(4-5)$ $(1-5)$ $(4-1)$

⑨ 치환의 합성

↳ 함수의 합성

S_5

$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&2&4&5\end{pmatrix}$ (f) $\circ$ $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&4&2&1\end{pmatrix}$ (g)

$f\circ g(1)=2$
$f\circ g(2)=5$
$f\circ g(3)=f(4)=4$
$f\circ g(4)=3$
$f\circ g(5)=1$

$f\circ g = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&4&3&1\end{pmatrix} = (25431)$ $\quad f\circ g \neq g\circ f$

순환 ⑪

$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix} = (1-2-3)\circ(4-5) = (4-5)\circ(1-2-3)$

$= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&4&5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&5&4\end{pmatrix}$

* 모든 치환은 서로 서로소인 순환들의 합성으로 나타낼 수 있다. (귀납법)

↳ 곱 ex) $\begin{pmatrix}1&2&\cdots\\a_1&a_2&\cdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdots&n\\\cdots&a_n\end{pmatrix} =$

$S_5 = \{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{120}\}$

$\sigma_1\cdot\sigma_6 = ?$ $\quad (1-a_1-a_k\cdots-)(a_1-\cdots\times)$

* 서로소인 순환은 교환법칙이 성립한다. ↳ 동치류, 분할 → 현대.

* 치환을 서로소인 순환들의 곱으로 분해하면, 교환은 순서만 무시하면, 유일하다.

⑩ 순환 → 호환 분해가능성
모든 ~~유한~~ 순환은 호환분해 가능하다. (2개 짜리 순환)

$(1-3-2) = (1-2)(1-3)$

pf) 계산적인 증명

$(a_1-a_2-\cdots-a_n) = (a_1-a_n)(a_1-a_{n-1})(a_1-a_{n-2})$
$\cdots(a_1-a_2)$

⑪ 인접 호환 분해 가능성 : 모든 호환은 인접호환의 곱으로 표현가능.

$(i,i+1)$, $(i+1,i)$

pf) $(i,i+d) = (i,i+1)(i+1,i+d)(i,i+1)$

$(i+1,i+d) = (i+1-i+2)(i+2,i+d)(i+1,i+2)$

$(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7) = (1\,2\,7\,4\,5\,6\,3)$
↳ $(3-7)$
$= (3-4)(4-7)(3-4)$

3 → d → 4 → d

「행교환, 기본행연산」

여인수 → det.