

88강 내적 (Inner product)

dot product \Rightarrow 일반화

선형공간, 벡터공간, 체 위에서의 가군 군·환·체 \rightarrow 현대대수

고정관념. 오개념.

23강 벡터공간 \Rightarrow 벡터를 다루기 위해 꼭 벡터 집합이 필요한가?

9가지 공리 만족 \Rightarrow n-tuple 실수 벡터 집합 \Rightarrow 벡터공간.
 $\hookrightarrow (a_1, a_2, a_3, a_4)$ 4-tuple

ex) 벡터공간. 연산체계란? $V \ni a, b$ $a+b$

$(\mathbb{Z}, +)$ 연산체계
 \uparrow 정수집합 \uparrow 덧셈 \rightarrow 함수 : 이항연산

$$f: \underbrace{V}_{a} \times \underbrace{V}_{b} \rightarrow \underbrace{V}_{c} \Rightarrow f(\underbrace{a}_{a \in V}, \underbrace{b}_{b \in V}) = c \in V$$

$$\hookrightarrow f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad \uparrow \quad f(a, b) = a+b = c \in \mathbb{Z}$$

\hookrightarrow 닫혀있고, 결합, 항등원, 역원 \Rightarrow 군
 $(a+b)+c = a+(b+c) \rightarrow a \quad -a \in \mathbb{Z}$

교환법칙까지 성립하면 가환군 (아벨군) $\mathbb{Z} \quad \left(\frac{1}{2}\right)$

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 환, 체

$(\mathbb{R}, +, \times) \rightarrow$ 체의 한 종류



$2V, \sqrt{3}V$

* 벡터공간 \Rightarrow 선형공간 V , 체 위에서 정의된

$+$, \cdot 스칼라배 \rightarrow 23강 9가지 법칙들 만족 \rightarrow 선형공간
 \uparrow 덧셈 \uparrow operator

\hookrightarrow 내적이 정의되면 내적공간, 벡터공간. **super class**

dot product 벡터공간.

(S, \star, Δ) 이항연산. (S, \star) 가환군
 \hookrightarrow 항 \hookrightarrow 체 추상화. \rightarrow 종류

군, 가환군, 환, 체

\Rightarrow 확장이 용이하다.

$\mathbb{R}, +, +$

ex) 군, 정수를 $\text{mod } 3$ 에 대한 정수 덧셈.

$$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\} \quad (3 \equiv 0 \pmod{3}) \rightarrow \text{mod } 3$$

$$\hookrightarrow \text{동치류 분할} \quad (-1 \equiv 2 \pmod{3})$$

$$-1 = (-1) \cdot 3 + 2 \quad \text{나머지}$$

$(\mathbb{Z}_3, +)$ 가환군일까? \Rightarrow 맞다.

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}_3$$

$$(a+b) \in \mathbb{Z}_3$$

$$1+2 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$2+1 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$0+0 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$(-1) \equiv 0, 1, 2 \pmod{3}$$

$$A = \{a, b, c\}$$

항등원

$$a * b = b$$

$$a * b = b * a$$

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

\rightarrow 가환군

$(A, *) \Rightarrow$ 가환군

다항식 환.

* 동형

$$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$$a * b * c * b * c = a$$

$$0 + 1 + 2 + 1 + 2 = 0$$

$$3 + 5 = 8 \quad \text{대체 수}$$

$$(R, +, \cdot) \approx (?, *, \Delta) \quad \text{대체}$$

V 벡터공간 n -tuple \times dot product 사용가능?

* dot product의 정의 \rightarrow 추상화 일반화

$$v_1 = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$v_2 = (b_1, \dots, b_n)$$

$$v_1 \cdot v_2 = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i$$

\Rightarrow 내적 (Inner product)

* $V \ni u, v, w \quad u \cdot v$

$$(1) u \cdot v = v \cdot u$$

$$(2) (u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$$

$$(3) (ku) \cdot v = k(u \cdot v)$$

$$(4) v \cdot v \geq 0, \quad (v \cdot v = 0 \iff v = \vec{0})$$

벡터덧셈. 항등원

norm

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$$

$$v, \text{ } \sqrt{5}, \quad (5 + \sqrt{5})$$
$$\sqrt{20} \sqrt{20} = 20$$

$$d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\|$$