# 제 51강 기저의 성질 (2)

Thm. A의 열벡터들의 span이 $\mathbb{R}^n$이다. (열벡터 → 행벡터) ⟶ A의 열벡터들이 $\mathbb{R}^n$의 basis이다. (열벡터 → 행벡터)
(단, A는 n차 정방행렬) span $=\mathbb{R}^n$

i) A가 가역행렬이다. $\Rightarrow \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ : 선형독립
$\mathbb{R}^n \supseteq \mathbb{R}^n$ $\dim(\mathbb{R}^n)=n$, $\{v_1, \cdots, v_n\}=B \Rightarrow \mathbb{R}^n$의 기저다.
$\Rightarrow \mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_n\}=\mathbb{R}^n$

?

ii) $\{v_1, \cdots, v_n\}=\boxed{B}$ $\mathrm{span}(B)=\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ A는 가역
$\dim(\mathbb{R}^n)=n$ $E=\{e_1, \cdots, e_n\} \rightarrow$ n개

$\dim(V)=n \rightarrow n\uparrow$
n개 ↓ 벡터. V
↳ $\{v_1, \cdots, v_{n-1}\}=B$
$\mathrm{span}(B)\neq V$ ?

? ? ? ?

$\boxed{B가}$ $\mathbb{R}^n$의 basis가 아니라면
① 선형독립 ② $\mathrm{span}(B)=\mathbb{R}^n$ $v_1 \sim v_n$ ($\rightarrow v_i$)
$\cancel{v_i} = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_{i-1}v_{i-1} + a_{i+1}v_{i+1} + \cdots + a_nv_n$
$v_n$ : 선형결합인 원소. → 일반성을 잃지 않는다.
↳ $v_n = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_{n-1}v_{n-1}$.
$B'=\{v_1, \cdots, v_{n-1}\}$ $\mathrm{span}(B') \subseteq \mathrm{span}(B)$ ?
$a = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_{n-1}v_{n-1} + 0\cdot v_n$ $a$

$\mathrm{span}(B)=\mathrm{span}(B')=\mathbb{R}^n \Rightarrow$ 집합은 똑같다. $\{v_i\}$ 선형독립.
↳ $b = b_1v_1 + \cdots + b_n(c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_{n-1}v_{n-1})$

$\mathrm{span}B^{\alpha}=\mathbb{R}^n$, $B^{\alpha}$: 선형독립 $\Rightarrow \mathbb{R}^n$의 basis
$|B^{\alpha}|<n$ $n=\dim(\mathbb{R}^n)=|B^{\alpha}|<n$