제 48 강 기저 변환과 대각화

Thm. $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$, $B=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$

$$\vec{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)_{\cancel{E}}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)_B$$
$$=(y_1,y_2,\cdots,y_n)_{B'}$$

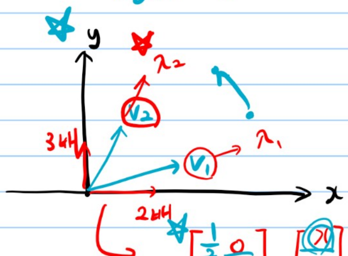
$$\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_1 & v_2 & \cdots & v_n\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}$$ $E \to B$

$$\begin{bmatrix}e_1 & e_2 & \cdots & e_n\end{bmatrix}=I \qquad \begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_1 & \cdots & v_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

$\boxed{B \to B'}$ $B'=\{v_1',v_2',\cdots,v_n'\}$

$E \to B'$

$$\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_1' & v_2' & \cdots & v_n'\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}v_1 & v_2 & \cdots & v_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$



A : 회전변환, 대칭변환, $\boxed{\text{확대변환}}$, ...

허근 X

k개 중근 → k개의 고유벡터 X

→ 유사 축"

축"

D^n D^{-1} → 삼각

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}x\\ 3y\end{bmatrix}$$ ⇒ 축을 기준으로 상수배하는 변환은 $\boxed{\text{대각행렬}}$이다.

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=A,\quad \lambda_1=\frac{5+\sqrt{33}}{2},\quad v_1=\left(\frac{-3+\sqrt{33}}{6},1\right)$$
$$\lambda_2=\frac{5-\sqrt{33}}{2},\quad v_2=\left(\frac{-3-\sqrt{33}}{6},1\right)$$

$B=\{v_1,v_2\}$ $\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}=A'$ $(1,1)_B=v_1+v_2$ $(\lambda_1,\lambda_2)_B$

기저 변환 $E\to B$ $(a_1,a_2)_E=(b_1,b_2)_B$ $A'\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_1 & v_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}$$ $A'x_B : \mathbb{R}^2_B \to \mathbb{R}^2_B$

$B \to E$

$$\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}v_1 & v_2\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}v_1 & v_2\end{bmatrix}\left(A'\begin{bmatrix}v_1 & v_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}\right)_B$$

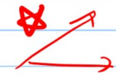
$$\boxed{\begin{bmatrix}v_1 & v_2\end{bmatrix}A'\begin{bmatrix}v_1 & v_2\end{bmatrix}^{-1}}=\boxed{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$ //

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-3+\sqrt{33}}{6} & \frac{-3-\sqrt{33}}{6} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{5+\sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5-\sqrt{33}}{2} \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-3+\sqrt{33}}{6} & \frac{-3-\sqrt{33}}{6} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{B^{-1}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$ ⇒ 대각화 ⇒ 다루기 쉽다.

$\boxed{\text{고유벡터}}$

→ 2차원 → 2개



$\boxed{A = BDB^{-1}}$ 대각화.