

# 87강 보충강의

$A: m \times n$  행렬  $b \in \mathbb{R}^m$

$x = A^+b \Rightarrow Ax=b$  최소제곱해  
 $\hookrightarrow$  최소 norm 을 가진 해이다.

pf)  $x = A^+b \in \text{row}(A)$

row(A)에 속함

\*  $A$ 가 full column rank가 아닐 때  $Ax=b$ 를 만족하는 해는 반드시 존재하고 그 해는 유일하며, 모든 해 중에서 가장 작은 norm을 가진다.

pf)  $Ax=b$   $x_0 = \text{proj}_{\text{row}(A)} x_0 + \text{proj}_{\text{null}(A)} x_0$ 로 유일하게 나타낼 수 있다. ( $\because$  정사영 정리)

$$\begin{aligned} b &= Ax_0 = A(\text{proj}_{\text{row}(A)} x_0 + \text{proj}_{\text{null}(A)} x_0) \quad Ax=0 \\ &= A \text{proj}_{\text{row}(A)} x_0 + A \text{proj}_{\text{null}(A)} x_0 = A \boxed{\text{proj}_{\text{row}(A)} x_0} \end{aligned}$$

$x_1 = \text{proj}_{\text{row}(A)} x_0$ 가  $Ax=b$ 의 해이다.  $x_1 \in \text{row}(A)$

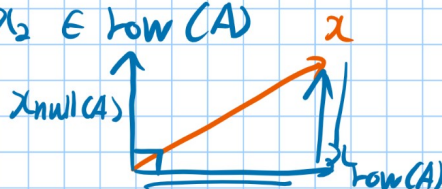
\* 유일성  $Ax_2=b, x_2 \in \text{row}(A)$

$$\begin{aligned} A(x_1 - x_2) &= Ax_1 - Ax_2 = b - b = 0 \\ \hookrightarrow Ax=0 \text{의 해} \quad &\left( \begin{array}{l} x_1 - x_2 \in \text{null}(A) \\ x_1 - x_2 \in \text{row}(A) \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

\* 가장 작은 norm

$\hookrightarrow$  모든 것보다도 더 작다.



임의의 해를  $x$ 라고 하자 ( $Ax=b$ 의 해)  $x = \text{proj}_{\text{row}(A)} x + x_{\text{null}(A)}$

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{\|\text{proj}_{\text{row}(A)} x\|^2 + \|\text{proj}_{\text{null}(A)} x\|^2} \\ &= \sqrt{\|x_1\|^2 + \|\text{proj}_{\text{null}(A)} x\|^2} \geq \|x_1\| \end{aligned}$$

\*  $A^+b$ 가 왜 최소 norm을 가지는가?  $\text{rank}(A)=k$

pf)  $A^+b \in \text{row}(A)$

$$A^+b = \boxed{V'(Z^+ + U^T b)} \in \text{row}(A)$$

$$V' = [v_1 \dots v_k] \rightarrow v_1 \sim v_k \text{ row}(A) \text{의 정규직교기저}$$

\*  $V'$ 은  $\text{row}(A)$ 의 정규직교기저이다.  $A: m \times n$  행렬.

pf)  $\text{rank}(A)=k$  라고 하면,  $V' = [v_1 \dots v_k]$

$$A^T A = V D V^T \quad V = [\underbrace{v_1 \dots v_k}_{\text{row}(A)} \mid \underbrace{v_{k+1} \dots v_n}_{n-k\text{개}}] \in \text{null}(A^T A)$$

$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T A) \Rightarrow A^T A$ 의 고유값들  $\lambda_1 \dots \lambda_k \Rightarrow$  나머지는 영.

$$\text{null}(A) = \text{null}(A^T A)$$

↳  $\text{nullity}(A) = n - k$  (차원정리에 의해.  $\text{rank}(A) = k$ )

$\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ 은  $\text{null}(A)$ 의 기저임을 알 수 있다.

$\{v_1, \dots, v_k\}$ 은  $\text{span}\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ 에 전부 직교하는 집합이다.

$\{v_1, \dots, v_k\} \subset \text{null}(A)^{\perp} = \text{row}(A)$   $\text{null}(A)$

$\text{정규 직교} \Rightarrow \text{basis} \Rightarrow \dim(\text{row}(A)) = k$   
 $\text{row}(A)$ 의 정규 직교 기저.  $\downarrow$

\*  $A$ 가  $m \times n$  Full column rank

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$$

pf)  $A^T A = (V' \cancel{\Sigma'^T} U'^T) (\cancel{U'} \Sigma' V'^T) = \underbrace{V' \Sigma'^2 V'^T}_{n \times n}$

$A$ 가 Full column rank  $\Rightarrow A^T A$ 가 가역이므로

$$(A^T A)^{-1} = (V' \Sigma'^2 V'^T)^{-1} = V' \Sigma'^{-2} V'^T$$

$$V'^{-1} = V'^T$$

$$(A^T A)^{-1} A^T = (V' \Sigma'^{-2} V'^T) (U' \Sigma' V'^T)^T$$

$$= (V' \cancel{\Sigma'^{-2}} \cancel{V'^T}) (\cancel{U'} \Sigma' U'^T)$$

$$= V' \Sigma'^{-1} U'^T = A^+$$