제 53강 kernel 과 range
핵 치역

Def. 커널의 정의 → 벡터 공간
선형사상 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = \vec{0}$

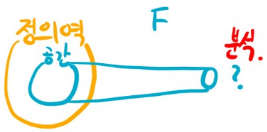
모든 x 들의 집합. $\boxed{\ker(F)}$

Thm. $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, (단, F는 선형사상) 에 대해 (행렬)
ker(F)는 벡터 공간이다.
$\ker(F) \subseteq \mathbb{R}^n$: 벡터공간
↳ 부분공간 //

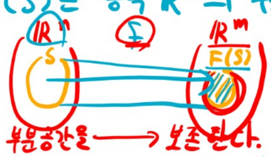
① 스칼라배 : $\forall \vec{u} \in \ker(F)$, $\forall c \in \mathbb{R}$, $c \cdot \vec{u} \in \ker(F)$
$F(\vec{u}) = \vec{0}$
$F(c \cdot \vec{u}) = c\,F(\vec{u}) = c \cdot \vec{0} = \vec{0}$

② 덧셈 $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \ker(F) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in \ker(F)$
$F(\vec{u} + \vec{v}) = F(\vec{u}) + F(\vec{v}) = \vec{0}$ //

$Ax = 0$ 동차연립선형방정식의 해집합.
$= \ker(A)$
영공간 : null space
null(A)



Thm. $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 을 선형사상이라 하고,
집합 S를 정의역 $\mathbb{R}^n$의 부분공간이라고 하면
F(S)는 공역 $\mathbb{R}^m$의 부분공간이다.



pf) $F(S) = S'$ ⇒ $\mathbb{R}^m$의 부분공간임을 증명.
① 스칼라 배
$\forall \vec{a} \in \boxed{S'}$, $\forall c \in \mathbb{R}$, $c \cdot \vec{a} \in S'$,
$F(x) = \vec{a}$, $\exists x \in S$, $\boxed{c \cdot \vec{a}} = c \cdot F(x) = F(c \cdot x)$, $cx \in S$ (공간)

② 덧셈

$\vec{a}, \vec{b} \in S'$, ☆ $\vec{a} + \vec{b} \in S'$

$F(x) = \vec{a}$, $F(y) = \vec{b}$, $\exists x \exists y \in S$

$\boxed{\vec{a} + \vec{b}} = F(x) + F(y) = F(x+y)$

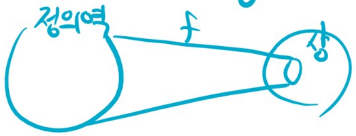
$\boxed{x+y} \in \boxed{S}$ 공간

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 선형사상

$F(\mathbb{R}^n)$: range 치역, ran(F) 정의역의 상이다.

domain

「사상」 ↓ 상이다. ↓ Image



* range는 공역의 부분공간이다.

Thm 선형변환 행렬 A에 대해, ran(A)는 col(A) 이다.

$y = Ax$

$A : \underset{n\text{차원}}{\mathbb{R}^n} \to \underset{m\text{차원}}{\mathbb{R}^m}$

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$A : m \times n$ 행렬

$Ax : (m \times n)(n \times 1) = (m \times 1)$

$$\boxed{Ax} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n$$

$= \text{span}(a_1 \cdots a_n)$

$= \text{col}(A)$