제 50 강 기저의 성질

Thm $\mathbb{R}^n \supseteq V$, $\dim(V)$는 V에서 선형독립일 수 있는 벡터들의 최대 갯수이다. → $c = n$

귀류법, $\dim(V) = c$ 라고 할 때, c보다 많은 벡터들이 ~~선형독립~~이다. $\{v_1, \cdots, v_c, v_{c+1}\} = B$

i) $\mathrm{span}(B) = V$, B는 V의 basis이다. $\Rightarrow \dim(V) = c+1 \neq c$

ii) $\mathrm{span}(B) \neq V$. $v_1 \sim v_{c+1} \in V$, $\mathrm{span}(B) \subsetneq V$

$V - \mathrm{span}(B) \ni v_{c+2}$ $\quad B \cup \{v_{c+2}\} = B'$ 선형독립

$\begin{cases} \mathrm{span}(B') = V \Rightarrow B' \Rightarrow \dim(V) = c+2 \neq c \\ \mathrm{span}(B') \neq V \end{cases}$ $\quad V - \mathrm{span}(B') \ni v_{c+3}$ $\quad B' \cup \{v_{c+3}\}$ $\quad \mathrm{span}(B'')$

$\vdots$

$= V \Rightarrow \dim(V) = |B^\alpha| = n \neq c$

$|B^\alpha| = n$, $\mathrm{span}(B^\alpha) \neq V$ $\quad V - \mathrm{span}(B^\alpha) \neq \emptyset$

v_α B^α의 원소와 선형독립. B^α, v_α $n+1$개

$\mathbb{R}^n \supseteq V$ $\{v_1, \cdots, v_{n+1}\} \Rightarrow v_1 \sim v_{n+1}$: n차원 벡터

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & & v_{n+1\,1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{n+1\,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & & v_{n+1\,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} \Rightarrow \text{가역행렬}$$

↳ $\det = 0$ 비가역

$\dim(V) = n$, 최대, $\quad$ $n+1$개 선형독립 $\quad V \subseteq \mathbb{R}^n$

Thm. $V \supseteq W$, $\dim(V) \geq \dim(W)$

pf) $\dim(V) \not< \dim(W)$ 귀류법.

B $\quad B' = \{v_1, \cdots, v_{\dim(W)}\}$

$|B| < |B'| \Rightarrow \cdots$

↳ 선형독립일수 있는 최대 갯수다

Thm. $\dim(V) = \boxed{k}$ $\quad V \ni v_1, v_2, \cdots, v_k$

$B = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$는 V의 basis이다.

B ① 선형독립. ② $\boxed{\mathrm{span}(B) = V}$

pf) 귀류법 $\quad \mathrm{span}(B) = V$ $\quad V - \mathrm{span}(B) \ni v_{k+1}$

$B' = \{v_1, \cdots, v_{k+1}\}$ $\quad \boxed{\mathrm{span}(B')} \neq V$ $\quad k$

↳ 선형독립 $\quad$ 차원↑ ✳

$B - \{v_i\} = B_0$ $\quad \mathrm{span}(B_0) \neq V$?

$i : 1 \sim k$ $\quad \mathrm{span}(B_0) \subseteq \mathrm{span}(B) \subseteq V$