87강 의사 역행렬 (Pseudo Inverse)

* 축소된 SVD

A : $m \times n$ 행렬, $\mathrm{rank}(A) = k$ 일 때,

$A = \underset{m\times k}{U'}\,\underset{k\times k}{\Sigma'}\,\underset{k\times n}{V'^T}$ → 축소된 SVD. EVD ↳ 정사각대칭.

* 가역행렬

A: $n \times n$ 정사각행렬. $\mathrm{rank}(A) = n$.

$A = \underset{n\times n}{U'}\,\underset{n\times n}{\Sigma'}\,\underset{n\times n}{V'^T}$

↳ 모든 대각원소가 0이 아닌 정사각 대각행렬 ⇒ 가역행렬

↳ U'와 V'는 full column rank이고, 정사각 ⇒ 즉, 직교행렬 ⇒ 가역 $B^{-1} = B^T$

$A^{-1} = (U'\Sigma' V'^T)^{-1} = (V'^T)^{-1}(\Sigma')^{-1}(U')^{-1}$

tracktroid. 회전체.
pseudo sphere.

$A^+ = \underbrace{V'(\Sigma')^{-1}\,U'^T}$ ↳ 유사 역행렬 (pseudo inverse)

↳ 보통 곡률이 0이 아닌 상수이면 구. R $\frac{1}{R^2}$ $-\frac{1}{R^2}$

* A가 가역행렬이면 $A^+ = A^{-1}$
  → X A^+

↳ 최소제곱법에 유용하게 쓰인다.

* 슈도 인버스의 자잘한 성질들

A 가역 ⇒ $A^+ = A^{-1}$

A가 정사각 x $m \times n$ 행렬, full column rank.

⇒ $A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$ → 최소제곱법.

* 정규 방정식.

$\boxed{A^TA}x = A^Ty$ → $\mathrm{rank}(\underset{m\times n}{A}) = \mathrm{rank}(A^TA)$ $= n$, n차.

$x = (A^TA)^{-1}A^Ty$ → 유일해.

$= A^+y$

* 적어도, A가 full column rank 일 때,
  $Ax = b$의 최소제곱해는 $x = A^+b$

* full column rank가 아니면 무수히 많은 해.

* A가 $m \times n$ 행렬, $b \in \mathbb{R}^m$ 일 때

$x = A^+b$ 는 $Ax = b$의 최소제곱해이며,
↳ $\in$ row(A)

최소의 norm을 가진다.

A : full column rank → 정규방정식은 유일해
x → 무수히 많은해 → norm이 가장 짧은 벡터.

$A^+ = V'\Sigma'^{-1}U'^T$
↳ row(A)의 정규직교기저 임을 보여야 한다.

* A가 $m \times n$ 행렬, $b \in \mathbb{R}^m$ 일때

$x = A^+ b$ 는 $Ax = b$의 최소제곱해이며,

$\hookrightarrow \in row(A)$

최소의 norm을 가진다.

A : full column rank → 정규방정식은 유일해

x → 무수히 많은해 → norm이 가장 짧은 벡터.

$A^+ = V' \Sigma'^{-1} U'^T$

↳ $row(A)$의 정규직교기저임을 보여야한다.

pf) $A^T A \underline{x} = A^T b$

$A^T A (A^+ b) = V'(\Sigma')^2 \cancel{V'^T} (\cancel{V'} \cancel{\Sigma'^{-1}} U'^T) b$

$A = U' \Sigma' V'^T \quad A^T = V' \Sigma' U'^T$

$A^T A = V' \Sigma' \cancel{U'^T} \cancel{U'} \Sigma' V'^T$

$= V' (\Sigma')^2 V'^T$

$= V' \Sigma' U'^T b$

$= A^T b.$