

정수론 9강 선형방정식의 해 (2)

$ax+by=\textcircled{g}$ 의 선형방정식의 해.

$$\Rightarrow (x_0 + k \cdot \frac{b}{g}, y_0 - k \cdot \frac{a}{g})$$

* 이번 시간

$ax+by=c$ 를 알아보자. $\gcd(a,b)=g$

i) $g \nmid c \Rightarrow ax+by$ 값의 꼴. \Rightarrow 해가 없다.
 $\hookrightarrow g$ 의 배수.

$$ax_0+by_0=\textcircled{g} \quad (x_0, y_0) \quad (x_1, y_1)$$

$$\boxed{ax+by} = g \text{의 배수. } x_1 = x_0 + \alpha, y_1 = y_0 + \beta$$

$$ax_1+by_1 = a(x_0+\alpha) + b(y_0+\beta)$$

$$= ax_0 + a\alpha + by_0 + b\beta$$

$$= g + a\alpha + b\beta$$

$$g|a, g|b \Rightarrow g|a\alpha, g|b\beta \Rightarrow g|a\alpha+b\beta+g$$

ii) $g|c$, $\frac{a}{g}u + \frac{b}{g}v = 1$ 가 되게 하는

(u_0, v_0) 가 있을까? $\gcd(\frac{a}{g}, \frac{b}{g}) = 1$
 확장된 유클리드 알고리즘

$$\Rightarrow ax+by=c \text{ 에서 } x_0 = \frac{c}{g}u_0, y_0 = \frac{c}{g}v_0$$

$$a \frac{c}{g}u_0 + b \frac{c}{g}v_0 = c(\frac{a}{g}u_0 + \frac{b}{g}v_0) = c$$

$$(x_1, y_1) \quad \begin{array}{r} ax_0+by_0=c \\ - ax_1+by_1=c \\ \hline a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)=0 \end{array}$$

$$\cancel{a}(x_0-x_1) = -\cancel{b}(y_0-y_1)$$

$$\frac{a}{g} | y_0-y_1 \Rightarrow$$

$$\frac{b}{g} | x_0-x_1 \Rightarrow$$

$$x_1 = x_0 + k \cdot \frac{b}{g}$$

$$y_1 = y_0 - k \cdot \frac{a}{g}$$