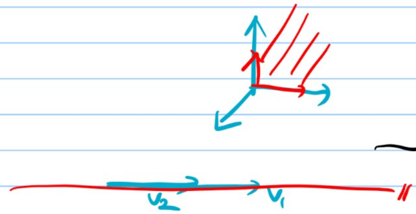
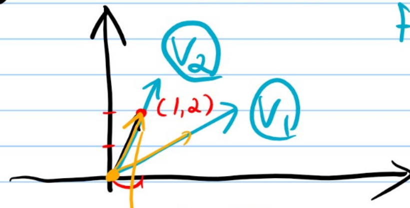
제 45강 기저 (basis)

$S' = \{v_1, v_2\}$
$S = \{e_1, e_2\}$





$(0, \sqrt{5})_{S'} = (1, 2)_S$

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow V_2$, $f(x, y) = x e_1 + y e_2 = (x, y)$

$\mathbb{R} \swarrow \mathbb{R}$
(x, y)
$(1, 2)$

$e_1 = (1, 0)$
$e_2 = (0, 1)$
★ 축을 바꾸기
$\{e_1, e_2\} \longrightarrow \{v_1, v_2\}$

Def. 기저 (basis)

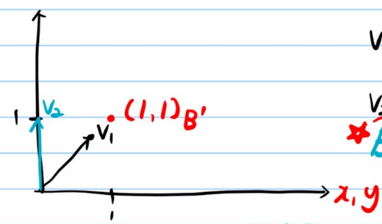
$\mathbb{R}^n$의 부분공간 V(→ 벡터공간)의 기저는 아래 두가지를 만족하는 V의 원소로만 이루어진 집합을 의미한다. $\text{span}(\{e_1, e_2\}) = \mathbb{R}^2$

i) 선형독립인 집합이다. ⇒ n개 보다 많은 벡터를 포함할 수 없다.

ii) 집합의 span이 V이다. ⇒ 적어도 n개의 벡터가 필요하다

⟺ 정확하게 n개의 원소, 선형독립 ⇒ 결국 좌표축으로 이용할 수 있는 집합.

예제)



$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$v_2 = e_2 = (0, 1)$

★ $B = \{v_1, v_2\}$

$B' = \{e_1, e_2\}$

$(2, 3)_{B'}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\frac{1}{\sqrt{2}} + b\cdot 0 \\ a\frac{1}{\sqrt{2}} + b\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

i) $(e_1)_B = (1, 0)_{B'} = (a, b)_B = a v_1 + b v_2$

$= (\sqrt{2}, -1)_B$ $\quad \square = [v_1 \ v_2]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(e_2)_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ii) $(2, 3)_{B'} = 2e_1 + 3e_2 = 2(\sqrt{2} v_1 - 1 v_2) + 3 v_2$

$= 2\sqrt{2} v_1 - 2v_2 + 3v_2 = 2\sqrt{2} v_1 + v_2$

$= (2\sqrt{2}, 1)_B$