

87강 보충강의

$A: m \times n$ 행렬 $b \in \mathbb{R}^m$

$x = A^+b \Rightarrow Ax=b$ 최소제곱해
 \hookrightarrow 최소 norm 을 가진 해이다.

pf) $x = A^+b \in \text{row}(A)$

row(A)에 속함

* A 가 full column rank가 아닐 때 $Ax=b$ 를 만족하는 해는 반드시 존재하고 그 해는 유일하며, 모든 해 중에서 가장 작은 norm을 가진다.

pf) $Ax=b$ $x_0 = \text{proj}_{\text{row}(A)} x_0 + \text{proj}_{\text{null}(A)} x_0$ 로 유일하게 나타낼 수 있다. (\because 정사영 정리)

$$\begin{aligned} b &= Ax_0 = A(\text{proj}_{\text{row}(A)} x_0 + \text{proj}_{\text{null}(A)} x_0) \quad Ax=0 \\ &= A \text{proj}_{\text{row}(A)} x_0 + A \text{proj}_{\text{null}(A)} x_0 = A \text{proj}_{\text{row}(A)} x_0 \end{aligned}$$

$x_1 = \text{proj}_{\text{row}(A)} x_0$ 가 $Ax=b$ 의 해이다. $x_1 \in \text{row}(A)$

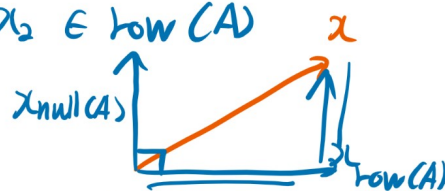
* 유일성 $Ax_2=b$, $x_2 \in \text{row}(A)$

$$\begin{aligned} A(x_1 - x_2) &= Ax_1 - Ax_2 = b - b = 0 \\ \hookrightarrow Ax=0 \text{의 해} \quad &\left(\begin{array}{l} x_1 - x_2 \in \text{null}(A) \\ x_1 - x_2 \in \text{row}(A) \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

* 가장 작은 norm

\hookrightarrow 모든 것보다도 더 작다.



임의의 해를 x 라고 하자 ($Ax=b$ 의 해) $x = \text{proj}_{\text{row}(A)} x + x_{\text{null}(A)}$

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|\text{proj}_{\text{row}(A)} x\|^2 + \|\text{proj}_{\text{null}(A)} x\|^2 \\ &= \|x_1\|^2 + \|\text{proj}_{\text{null}(A)} x\|^2 \geq \|x_1\|^2 \end{aligned}$$

* A^+b 가 왜 최소 norm을 가지는가? $\text{rank}(A)=k$

pf) $A^+b \in \text{row}(A)$

$$A^+b = V'(Z^+ + U^T b) \in \text{row}(A)$$

$$V' = [v_1 \dots v_k] \rightarrow v_1 \sim v_k \text{ row}(A) \text{의 정규직교기저}$$

* V' 은 $\text{row}(A)$ 의 정규직교기저이다. $A: m \times n$ 행렬.

pf) $\text{rank}(A)=k$ 라고 하면, $V' = [v_1 \dots v_k]$

$$A^T A = V D V^T \quad V = [v_1 \dots v_k \mid \underbrace{v_{k+1} \dots v_n}_{n-k\text{개}}] \in \text{null}(A^T A)$$

$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T A) \Rightarrow A^T A$ 의 고유값들 $\lambda_1 \dots \lambda_k \Rightarrow$ 나머지는 영.

$$\text{null}(A) = \text{null}(A^T A)$$

↳ $\text{nullity}(A) = n - k$ (차원정리에 의해. $\text{rank}(A) = k$)

$\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ 은 $\text{null}(A)$ 의 기저임을 알 수 있다.

$\{v_1, \dots, v_k\}$ 은 $\text{span}\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ 에 전부 직교하는 집합이다.

$\{v_1, \dots, v_k\} \subset \text{null}(A)^\perp = \text{row}(A)$ $\text{null}(A)$

$\text{정규 직교} \Rightarrow \text{basis} \Rightarrow \dim(\text{row}(A)) = k$
 $\text{row}(A)$ 의 정규 직교 기저. \triangle

* A 가 $m \times n$ Full column rank

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$$

pf) $A^T A = (V' \Sigma' U'^T) (U' \Sigma' V'^T) = \underbrace{V' \Sigma'^2 V'^T}_{n \times n}$

A 가 Full column rank $\Rightarrow A^T A$ 가 가역이므로

$$(A^T A)^{-1} = (V' \Sigma'^2 V'^T)^{-1} = V' \Sigma'^{-2} V'^T$$

$$V'^{-1} = V'^T$$

$$(A^T A)^{-1} A^T = (V' \Sigma'^{-2} V'^T) (U' \Sigma' V'^T)^T$$

$$= (V' \Sigma'^{-2} V'^T) (V' \Sigma' U'^T)$$

$$= V' \Sigma'^{-1} U'^T = A^+$$