제 41강 특성방정식 (characteristic equation)

① 특성 방정식

$Ax = \lambda x \Rightarrow Ax - \lambda x = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)\underset{\to \vec{0}}{x} = 0$ ★ $\det(A - \lambda I) = 0$: A의 특성방정식

↳ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ ⇒ 2차원 ⇒ 축을 2개 찾아야함 ⇒ $\boxed{\text{고유벡터}}$ 2개

↳ 선형독립이어야 한다.

⇒ 일반적으로는 $n \times n$ 행렬 ⇒ n차원 ⇒ n개의 축 ⇒ 고유벡터 n개 : 모두 선형독립

i) $\det(A - \lambda I) = 0$ 의 해가 n개 일때

2차원 $\lambda = \pm$ 2개, ⇒ 고유벡터 n개를 찾아낼수 있을까?

↳ 선형독립

서로다른 실수 ★

Thm. $\boxed{\text{특성방정식}}$의 해가 n개이면, 선형독립인 고유벡터 n개를 찾아낼수 있다. (단, A는 n차 정사각행렬)

↳ 축을 만들수 있다.

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$: n개의 고유값이 존재한다고 하자

i) $Ax = \lambda_1 x \Rightarrow \boxed{(A - \lambda_1 I)}x = 0$ 「동차연립선형방정식이 자명해만을 가질 필요충분조건 ⟺ 가역」

↳ 0 ⇒ 비가역

$\vec{0} \neq \vec{v_1}$ 가 존재한다. $\boxed{X_1 - \{\vec{0}\}} \ni \vec{v_1}$ 임의의 ∀

$Ax = 0$ $\quad v_1 = 0$ $\quad \boxed{\text{Span}(v_1)} = \{tv_1 \mid t \in \mathbb{R}\}$

ii) $Ax = \lambda_2 x \Rightarrow X_2 - \{\vec{0}\} \ni \vec{v_2}$

⋮

$Ax = \lambda_n x \Rightarrow \boxed{X_n - \{\vec{0}\}} \ni \vec{v_n}$

$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_n}$ 은 선형독립 임을 보이자.

귀류법) 선형독립이 아니라고 가정해보자.

$\vec{v_i} = a_1\vec{v_1} + \cdots + a_{i-1}\vec{v_{i-1}} + a_{i+1}\vec{v_{i+1}} + \cdots + a_n\vec{v_n}$

$\vec{v_1}$ 라고 해도 일반성을 잃지 않는다.

✓ $\vec{v_1} = a_2\vec{v_2} + a_3\vec{v_3} + \cdots + a_n\vec{v_n}$

→ ?

$A\vec{v_1} = \lambda_1\vec{v_1}$

$\lambda_1\vec{v_1} = \lambda_1(\boxed{a_2\vec{v_2} + a_3\vec{v_3} + \cdots + a_n\vec{v_n}})$ $= \vec{v_1}$

$= \lambda_1 a_2\vec{v_2} + \lambda_1 a_3\vec{v_3} + \cdots + \lambda_1 a_n\vec{v_n}$

$= A\vec{v_1}$ $\quad Av_2 = \lambda_2 v_2$, $Av_3 = \lambda_3 v_3$

$= A(a_2\vec{v_2} + \cdots + a_n\vec{v_n})$

$= Aa_2v_2 + \cdots + Aa_nv_n$

$= a_2Av_2 + a_3Av_3 + \cdots + a_nAv_n$

$= a_2\lambda_2v_2 + a_3\lambda_3v_3 + \cdots + a_n\lambda_nv_n$

$a_2(\lambda_1 - \lambda_2)v_2 + a_3(\lambda_1 - \lambda_3)v_3 + \cdots + a_n(\lambda_1 - \lambda_n)v_n = \vec{0}$

$a_i\boxed{(\lambda_1 - \lambda_i)}v_i$

↳ 0 $\quad$ ↳ $\boxed{\lambda_1 \neq \lambda_i}$