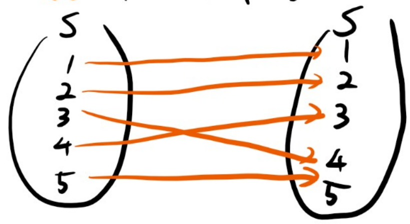
92강 치환 (permutation)

① 치환의 정의

자연수 집합 $S=\{1,2,\cdots,n\}$의 치환이란, $S\to S$ 인 일대일 대응 함수이다.

$f: S\to S$



$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$e_1 = (1,0,0)$

$\cancel{\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}$

ex) $S=\{1,2,3\} \to 3!$

$\underset{\sigma_1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}$, $\underset{\sigma_2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$, $\underset{\sigma_3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}$, $\underset{\sigma_4}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}$, $\underset{\sigma_5}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$, $\underset{\sigma_6}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$

$S_3 = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_6\}$ $\quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$S_4 = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_{12}\}$ $\quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

② 표기법

i) 두줄 표기법

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

ii) 한 줄 표기법

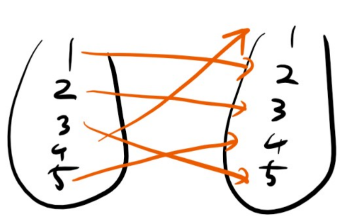
$(3\,2\,1\,4\,5)$ $\qquad (1\,2\,3\,5\,4)$

iii) 순환표기법

$(1-2-3-5-4)$ $\qquad (2-3-5-4-1)$

iv) 정규 순환 표기법 (canonical cyclic anotation)

③ 순환 (cycle)



$1-2-3-5-4$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad (2\,3\,5\,1\,4)$ $\qquad (1\to 2\to 3\to 5\to 4)$

④ 항등치환

$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$

⑤ 순환(cycle)의 길이. $S=\{1,\ \cdots,\ ?\}$

$(1-2-4-5)$: 4

$(2-4-5)$: 3 $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&4&3&5&2&6\end{pmatrix}=(2-4-5)$

↳ 몇개.

$\sigma(2)=4$

⑥ 서로소 (disjoint cycle) : 서로 다른 궤도를 가진 순환 (궤도의 교집합이 $\emptyset$)

$|S_6| = 6!$ 개 $n!$: n개를 뒤섞을 경우의 수

$S_6 \ni \sigma$ $(1-2-3)$ $(1-3-6)$ $(4-5-6)$

$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}$ 6개

6개 $\times$ 5개 $\times 4\times 3\times 2\times 1 = 6!$

⑦ 궤도(orbit) ⇒ 순환에 포함된 숫자들의 집합

↳ 집합 $(1-2-3)$ $\{1,2,3\}\cap\{4,5,6\}=\emptyset$ $\{1,3,6\}$

⑧ 호환 : 길이가 2인 순환

$(2-3)$ $(1-2)$ $(4-5)$ $(1-5)$ $(4-1)$

↳ 상호교환.

⑨ 치환의 합성

↳ 함수의 합성

S_5

$\underset{f}{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&2&4&5\end{pmatrix}} \circ \underset{g}{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&4&2&1\end{pmatrix}}$

$f\circ g(1)=2$
$f\circ g(2)=5$
$f\circ g(3)=f(4)=4$
$f\circ g(4)=3$
$f\circ g(5)==1$

$f\circ g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&4&3&1\end{pmatrix}=(2\,5\,4\,3\,1)$ $f\circ g\neq g\circ f$

군

순환

$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}=(1-2-3)\circ(4-5)=(4-5)\circ(1-2-3)$

$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&4&5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&5&4\end{pmatrix}$

* 모든 치환은 서로 서로소인 순환들의 합성으로 나타낼 수 있다. (귀납법)

↳ 곱   ex) $\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_q&a_n\end{pmatrix}=$

$(1-a_1-a_k\cdots)(a_q-\cdots)$

$S_5=\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{120}\}$

$\sigma_1\cdot\sigma_6=?$

* 서로소인 순환은 교환법칙이 성립한다. ↳ 동치류, 분할 → 현대.

* 치환을 서로소인 순환들의 곱으로 분해하면, 교환되는 순서만 무시하면, 유일하다.

⑩ 순환 → 호환 분해가능성

→ 2개 짜리 순환

모든 ~~유한~~ 순환은 호환분해 가능하다.

$(1-3-2) = (1-2)(1-3)$

pf) 계산적인 증명

$$(a_1-a_2-\cdots-a_n) = (a_1-a_n)(a_1-a_{n-1})(a_1-a_{n-2})\cdots(a_1-a_2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

↳ $(3-7)$

$= (3-4)(4-7)(3-4)$

⑪ 인접 호환 분해 가능성 : 모든 호환은 인접 호환의 곱으로 표현가능.

$(i, i+1)$, $(i+1, i)$

pf) $(i, i+d) = (i, i+1)\boxed{(i+1, i+d)}(i, i+1)$

$(i+1, i+d) = (i+1 - i+2)\boxed{(i+2, i+d)}(i+1, i+2)$

3 d

④ d

「행교환, 기본행연산」 ① - ③

→ 여인수

→ det.