93강 치환 (2) 홀 짝

① 치환의 홀짝성 (기우성)

홀치환 짝치환

Def. 반전의 개수의 홀짝성을 치환의 홀짝성이라고 하자.

ex) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ ⇒ 홀치환

반전

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & & a_n \end{pmatrix}$ $\forall i, j$ $i > j \rightarrow \sigma(i) < \sigma(j)$ 반전.

* 반전의 개수 세는 법

1 ⇒ 0개
3 ⇒ 1개
2 ⇒ 0개
4 ⇒ 0개

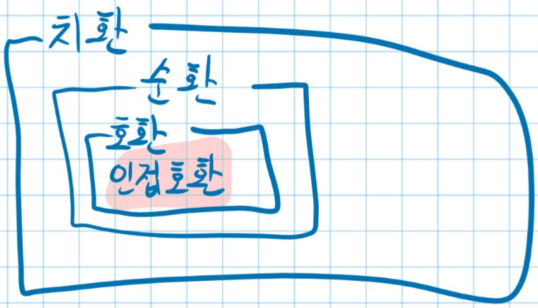
⇒ 1개 ⇒ 홀수 개

Def. 치환의 부호

↳ 홀치환 : -1

짝치환 : 1

$\mathrm{sgn}(\sigma) := \begin{cases} 1 & \text{짝} \\ -1 & \text{홀} \end{cases}$



* 인접호환의 홀짝성

↳ 바로 옆 숫자와 교환 → 반전의 개수는 1개 → 홀치환

Thm 인접호환을 합성하면 홀짝성이 바뀐다. ⇒ 부호도 바뀐다.

$e \circ \underbrace{\sigma}_{\text{짝}} = \text{홀}$

pf) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & & & n \\ a_1 & a_2 & a_i & a_{i+1} & & a_n \end{pmatrix}$ 반전의 개수, $e = (i \ \ i+1)$

$|a_1|$: a_1 기준으로 센 반전의 개수

↳ $|a_1| = m_1$, $|a_2| = m_2$, $\cdots$ $|a_n| = m_n$

$|a_i| = m_i$ $|a_{i+1}| = m_{i+1}$

$e \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & i & i+1 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{i+1} & a_i & \cdots & n \end{pmatrix}$

$|a_1| = m_1$ $|a_2| = m_2$

$|a_i| =$

i) $a_i < a_{i+1}$: $|a_1| + \cdots + |a_n| = m_1 + m_2 + \cdots + m_i + m_{i+1} + 1 + \cdots$

↳ $|a_i| = m_i$, $|a_{i+1}| = m_{i+1} + 1$

$m_1 + \cdots + m_n = M$

$|e \circ \sigma| = M + 1$

ii) $a_i > a_{i+1}$

↳ $|a_i| = m_i - 1$, $|a_{i+1}| = m_{i+1}$

↳ $|e \circ \sigma| = M - 1$

* 정의 교체

p 와 q가 동치인 명제이면 정의로 p를 사용하던걸 q로 대체해도 무방하다.

ex) 이등변삼각형 : 두 변의 길이가 같은 삼각형✓

<=> 두 각의 크기가 같다.

두 각의 크기가 같은 삼각형✓

행렬 → 증명

* 치환의 홀짝성 : 반전의 개수의 홀짝성

Def. 어떤 치환 σ를 호환들의 곱으로 나타냈을 때, 곱해진 호환들의 개수의 홀짝성을 치환의 홀짝성이라고 한다.

치환 → 서로소인 순환들의 곱

엄밀한 증명 X

동치류 분할

↳ 호환의 곱으로 나타낼 수 있다

pf) $\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_k$ → 호환

↳ 치환

(k의 홀짝성) = (반전의 개수의 홀짝성)

= (m의 홀짝성)

중간정리) 호환은 인접호환의 곱으로 표현이 가능하고, 그 개수는 항상 홀수다.

pf) $\underline{(i \; - \; i+d)} = (i \; - \; i+1)(i+1 \; - \; i+d)(i \; - \; i+1)$

$(i+1 \; - \; i+d) = (i+1 \; - \; i+2)(i+2 \; - \; i+d)(i+1 \;\; i+2)$

$(i+d-1 \;\; i+d)$

$\sigma = e_1 e_2 e_3 \cdots e_{2n+1}$ 홀

$= \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{2n}$ 짝수

$\because \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha_{2n} \circ I$ 홀

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = I$ 항등치환 → 짝수치환

$\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_k \quad = e_{11} e_{12} \cdots e_{21} e_{22} \cdots e_{31} e_{32} \cdots e_{k1} e_{k2} \cdots$

호환 $\quad = e_1 e_2 \cdots\cdots e_m$ 인접호환

$\tau_1 = e_{11} e_{12} e_{13} \cdots e_{1m_1}$ 3개 짝수

$\tau_2 = e_{21} e_{22} e_{23} \cdots e_{2m_2}$ 7개

k 와 m의 홀짝성이 같을까? 같다.

$\vdots$

τ_k

$3+7+\cdots+\cdots = m$개 k번

k가 홀수이면

* 치환의 곱셈법칙.

홀 × 홀 = 짝수

짝수 × 짝수 = 짝수

홀 × 짝수 = 홀

짝수 × 홀 = 홀

1 -1 군. 환. 체.

$$\mathrm{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \mathrm{sgn}(\sigma_1) \times \mathrm{sgn}(\sigma_2)$$

pf) 홀 × 홀

$\sigma_1 = a_1 a_2 \cdots a_{2n+1}$ 호환

$\sigma_2 = b_1 b_2 \cdots b_{2m+1}$

$\boxed{\sigma_1 \circ \sigma_2} = a_1 \cdots a_{2n+1} \cdot b_1 \cdots b_{2m+1}$

$(2n+1) + (2m+1) = 2(n+m+1)$

대수 :

호 중 고

숫자 미지수 문자. 행렬 벡터

객체

$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}_{2\times 2} \times \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$