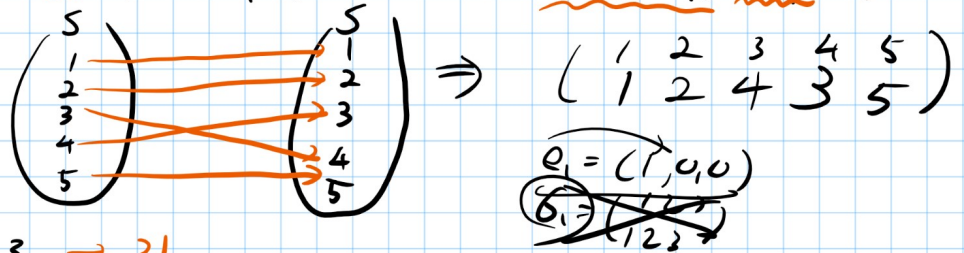


9.2 강 치환 (permutation)

① 치환의 정의

자연수 집합 $S = \{1, 2, \dots, n\}$ 의 치환이란, $S \rightarrow S$ 인 일대일 대응 함수이다.

$$f: S \rightarrow S$$



$$\sigma_1 = (1, 0, 0)$$

~~$\sigma_1 = (1, 1, 1)$~~

ex) $S = \{1, 2, 3\} \rightarrow 3!$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\downarrow \sigma_1 \quad \downarrow \sigma_2 \quad \downarrow \sigma_3 \quad \downarrow \sigma_4 \quad \downarrow \sigma_5 \quad \downarrow \sigma_6$

$$S_3 = \{ \sigma_1, \dots, \sigma_6 \}$$

$\downarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$S_4 = \{ \sigma_1, \dots, \sigma_6 \}$$

$\uparrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

② 표기법

i) 두 줄 표기법

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

ii) 한 줄 표기법

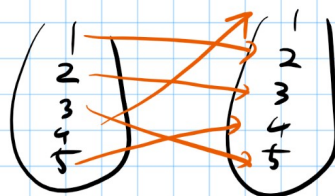
$$(32145) \quad (12354)$$

iii) 순환표기법

$$(1-2-3-5-4) \quad (2-3-5-4-1)$$

iv) 정규 순환표기법 (Canonical cyclic notation)

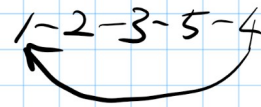
③ 순환 (cycle)



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(23514)$$

$$(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 4)$$



④ 항등 치환

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix} \right)$$

⑤ 순환 (cycle)의 길

$$S = \{1, \dots, ?\}$$

$$(1-2-4-5) : 4$$

$$(2-4-5) : 3$$

↳ 몇개.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (2-4-5)$$

$$\sigma(2) = 4$$

⑥ 서로소 (disjoint cycle): 서로 다른 계도를 가진 순환 (계도의 교집합이 \emptyset)

$$|S_6| = 6! \text{ 개}$$

$n! : n$ 개를 뒤섞을 경우의 수

6개

$$S_6 \supset \textcircled{6}$$

$$(1-2-3) \quad (4-5-6)$$

$$(1-3-6)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 6! = 720$$

⑦ 계도 (orbit) \Rightarrow 순환에 포함된 숫자들의 집합

↳ 집합

$$(1-2-3)$$

$$\{1, 2, 3\} \cap \{4, 5, 6\} = \emptyset$$

$$\{4, 5, 6\}$$

$$\{1, 3, 6\}$$

⑧ 회환 : 길이가 2인 순환

↳ 상반회환.

$$(2-3)$$

$$(1-2)$$

$$(4-5)$$

$$(1-5)$$

$$(4-1)$$

⑨ 치환의 합성

↳ 함수의 합성

S_5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

f

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

g

$$f \circ g(1) = 2$$

$$f \circ g(2) = 5$$

$$f \circ g(3) = f(4) = 4$$

$$f \circ g(4) = 3$$

$$f \circ g(5) = 1$$

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (25431)$$

$$f \circ g \neq g \circ f$$

⑦

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1-2-3) \circ (4-5) = (4-5) \circ (1-2-3) \\ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

* 모든 치환은 서로 서로소인 순환들의 합성으로 나타낼 수 있다. (귀납법)

$$S_5 = \{ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{120} \}$$

$$\sigma_1 \circ \sigma_6 = ?$$

$$\text{ex) } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ (1-a_1-a_k \dots) & (a_1 \dots) \end{pmatrix}$$

* 서로소인 순환은 교환법칙이 성립한다.

↳ 동치류, 분할. → 현대.

* 차환을 서로소인 순환들의 곱으로 분해하면, 교환되는 순서만 무시하면, 유일하다.

⑩ 순환 → 호환 분해 가능성
모든 ~~유한~~ 순환은 호환 분해 가능하다.

$$(1-3-2) = (1-2)(1-3)$$

pf) 계산적인 증명

$$(a_1 - a_2 - \dots - a_n) = (a_1 - a_n)(a_1 - a_{n-1})(a_1 - a_{n-2}) \dots (a_1 - a_2)$$

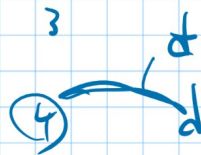
⑪ 인접 호환 분해 가능성: 모든 호환은 인접 호환의 곱으로 표현 가능.

$$(i, i+1), (i+1, i)$$

$$pf) (i, i+d) = (i, i+1)(i+1, i+d)(i, i+1)$$

$$(i+1, i+d) = (i+1, i+2)(i+2, i+d)(i+1, i+2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow (3-7) = (3-4)(4-7)(3-4)$$



행 교환, 기본행연산

