78강 직교행렬의 성질 (orthogonal matrix)

Thm $A^{-1} = A^T$ 이면 A를 직교행렬이라 한다. ($n \times n$)

pf) $\Rightarrow$ A가 직교행렬임을 보이자.

$T(x) = Ax \Rightarrow$ 직교변환이려면?

↳ 길이 보존 $\Leftrightarrow$ dot product 보존

$\forall x, \forall y \in \mathbb{R}^n$, $T(x)\cdot T(y) = Ax \cdot Ay$

$= (Ax)^T Ay$

$= x^T A^T Ay$

$= x^T \cancel{A^{-1}} \cancel{A} y$

$= x^T y = x \cdot y$

$\Leftarrow$ $T(x)\cdot T(y) = x\cdot y = x^T y$ ($\to I$)

$= Ax \cdot Ay = x^T A^T A y$

$\boxed{AA^T = I}$

$AA^TA = KA$

$\cancel{A} = K\cancel{A}$

$k = I$

$AA^T = A^TA = I$, $A^{-1} = A^T$

Thm A가 직교행렬이면 A의 열벡터는 모두 orthonormal (정규직교) 하다.

pf) A: $n\times n$ 행렬, $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$

↳ standard unit vectors

$e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)$

i) 직교

$e_i \perp e_j$ $(i \neq j)$ $\Rightarrow (Ae_i) \perp (Ae_j)$

↳ $e_i \cdot e_j = 0$

$A = [v_1\ v_2 \cdots v_n]\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} i$ $\Rightarrow (v_i) \perp (v_j)$

ii) 정규

$1 = \|e_i\| = \|Ae_i\| = \|v_i\|$

Thm A의 열벡터들이 정규직교하면 $A^{-1} = A^T$이다. (즉, A는 직교행렬.)

pf) $A^TA = I$ $\quad A = [a_1\ a_2\ \cdots\ a_n]$

$$A^TA = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

i) $\|a_i\| = 1$
ii) $a_i \cdot a_j = 0$

$$= \begin{bmatrix} a_1^Ta_1 & a_1^Ta_2 & \cdots & a_1^Ta_n \\ \vdots & & & \\ a_n^Ta_1 & \cdots & & a_n^Ta_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \|a_1\|^2 & a_1\cdot a_2 & \cdots & a_1\cdot a_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n\cdot a_1 & \cdots & & \|a_n\|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & O \\ & 1 & \\ O & & \ddots \end{bmatrix} = I$$

Thm A가 직교행렬이면
A^T도 직교행렬이다.

pf) $A^T A = I$
$\Rightarrow A = (A^T)^T$
$A^T (A^T)^T = I$
$(A^T)^T A^T = I$

$(A^T)^{-1} = (A^T)^T$
$(B)^{-1} = B^T$

Thm A가 직교행렬이면
A^{-1}도 직교행렬이다.

pf) $A^{-1} = A^T \Rightarrow (A^{-1})^T = (A^T)^T = A = (A^{-1})^{-1}$
$B^T = B^{-1}$

Thm A, B가 직교행렬이면
AB도 직교행렬이다.

pf) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^T A^T = (AB)^T$

Thm A가 직교행렬이면
$\det(A) = \pm 1$

pf) $A^T A = I$

$\det(A^T A) = 1$
$\det(A^T) \cdot \det(A) = 1$
$\det(A) \cdot \det(A) = 1$
$\det(A)^2 = 1$