제 44 강 대각합과 고유값의 관계

Thm. $n\times n$ 행렬 A의 고유값 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$에 대해, $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ 이다.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \det(\lambda I - A) = \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}}_{n\times n} = (\lambda - a_{11})C_{11} + (-a_{12})C_{12} + \cdots + (-a_{12})C_{1n}$$

C_{ij} $(-1)^{i+j}$

$$= \bigcirc + \bigcirc - \bigcirc + \bigcirc + \cdots + \bigcirc - \bigcirc \cdots$$

$$(\lambda - a_{11})(-a_{12}) \cdots \overset{n-2}{\cdots\cdots} (\quad)$$

$$= \boxed{(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn})} + \bigcirc - \bigcirc \cdots \bigcirc$$

↳ λ에 대한 n차식, $n-1$

$n-2$차식

$n-2$차식 X $n-1$ X

$n-2$

$$= \lambda^n - \boxed{(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})} \lambda^{n-1} + \cdots \lambda^{n-2} + \bigcirc$$

Lemma. $\det(\lambda I - A)$의 λ^{n-1}항의 계수는 항상 $-(a_{11} + \cdots + a_{nn})$이다.

$\lambda_1 \sim \lambda_n$ $\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) = 0$

$$= \lambda^n - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots$$

∴ 행렬 A의 대각합은 고유값들의 합과 같다. //