82강 고유값 분해 (Eigen Value Decomposition)

직교대각화 가능 ⟺ 대칭행렬

A : $n \times n$ 대칭행렬 ⇒ $A = PDP^T$ (단, P는 단위고유벡터를 열벡터로 가지는 행렬.

$P = [v_1\ v_2 \cdots v_n]$: 직교행렬 ($P^{-1} = P^T$) D는 대각원소에 고유값이 있음.)

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$A = PDP^T = \underbrace{[v_1 | v_2 | \cdots | v_n]}_{1\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 I_{1\times1} & \cdots & & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{1\times1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda_n [1] \end{bmatrix}}_{n\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix}}_{n\times 1}$$

$$= \underbrace{[\lambda_1 v_1 | \lambda_2 v_2 | \cdots | \lambda_n v_n]}_{1\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix}}_{n\times 1} = [\lambda_1 v_1 v_1^T + \lambda_2 v_2 v_2^T + \cdots + \lambda_n v_n v_n^T]$$

$$A = \lambda_1 v_1 v_1^T + \lambda_2 v_2 v_2^T + \cdots + \cancel{\overset{0.00001}{\lambda_n} v_n v_n^T}$$ ⇒ 고유값의 절대값의 내림차순으로 정렬.

$v_1 \sim v_n$ 정규직교기저 P : 직교행렬

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \qquad a_1^2 + \sim + a_3^2 = 1$$

$$|a_i| \le 1$$

* 원소의 절대값이 1을 넘지 않는다.

$$v_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [a_1 \cdots a_n] = \begin{bmatrix} a_1 a_1 & a_1 a_2 & & \\ & & & \\ & & & a_n a_n \end{bmatrix}_{n\times n} \qquad |a_i a_j| \le 1$$

정렬

$|\lambda_1|$ $|\lambda_2|$ $\cdots$ $|\lambda_n|$

$$A := \sum_{i=1}^{5} \lambda_i v_i v_i^T$$

A → n^2

λ_1 v_1 (n개) → $n+1$개

λ_2 v_2

$\vdots$

↓

$5(n+1)$개

$5n+5$