88강 내적 (Inner product)

dot product ⇒ 일반화

선형공간, 벡터공간, 체 위에서의 가군 군·환·체 → 현대대수

고정관념. 오개념.

★23강 벡터공간 ⇒ 벡터를 다루기 위해 꼭 벡터 집합이 ~~필요한가~~?

9가지 공리. 만족 ⇒ n-tuple 실수벡터집합 ⇒ 벡터공간.

↳ (a_1, a_2, a_3, a_4) 4-tuple

ex) 벡터공간. 연산체계란? $V \ni a, b$ $a+b$

$(\mathbb{Z}, +)$ 연산체계 → 함수 : 이항연산

정수집합 덧셈

$f: \underset{a}{V} \times \underset{b}{V} \to \underset{c}{V} \Rightarrow f(a, b) = c \in V$

$a \in V$ $b \in V$

↳ $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 0 $f(a, b) = a+b = c \in \mathbb{Z}$

↳ 닫혀있고, 결합, 항등원, 역원 ⇒ 「군」 a $-a \in \mathbb{Z}$

$(a+b)+c = a+(b+c)$

교환법칙까지 성립하면 가환군 (아벨군) 2 $\frac{1}{2}$

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 환, 체 환 → 역 → 체

$(\mathbb{R}, +, \times)$ → 체의 한 종류 $2v$, $\sqrt{3}v$

* 벡터공간 ⇒ 선형공간 V, 체 위에서 정의된

double

+, 스칼라배 → 23강 9가지 법칙을 만족 → 선형공간

덧셈

operator

↳ 내적이 정의되면 내적공간, 벡터공간. super class

dot product 벡터공간.

$(S, \ast, \triangle)$ 이항 연산. $(S, \ast)$ 가환군

↳ 환 → 체 추상화. → 종류

군, 가환군, 환, 체 ⇒ 확장이 용이하다.

$\mathbb{R}$, +, +

ex) 군, 정수론 mod 3 에 대한 정수 덧셈.

$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ → 동치류 분할

$3 \equiv 0 \pmod 3$
$-1 \equiv 2 \pmod 3$ → mod 3

$-1 = \underset{\text{몫}}{(-1)} \cdot 3 + \underset{\text{나머지}}{2}$

$(\mathbb{Z}_3, +)$ 가환군 일까? ⇒ 맞다.

$\forall a, b \in \mathbb{Z}_3$ $\quad a+b = c \in \mathbb{Z}_3$

$1 + 2 \equiv 0 \pmod 3$ O, $\quad -1 \to 0, 1, 2 \quad (7, 4 \bmod 3)$
$2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$
$0 + 0 \equiv 0 \pmod 3$

$A = \{\underset{\text{항등원}}{a}, b, c\}$ $\quad ☆ \quad$ $a ☆ b = b ☆ a$

$a ☆ b = b$

☆	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

→ 가환군

$(A, ☆)$ ⇒ 가환군

다항식 환.

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

* 동형 $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

$a ☆ b ☆ c ☆ b ☆ c = a$

$0 + \underbrace{1 + 2}_{3} + \underbrace{1 + 2}_{3} = 0$

$3 + 3 = 6$ ☆ 대체 수

$(\mathbb{R}, \cancel{+}, \times) \approx (?, ☆, \triangle)$ 대수

V 벡터공간 n-tuple x dot product 사용가능?

※ dot product 의 정의 → 추상화, 일반화

$V_1 = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$

$V_2 = (b_1, \cdots\cdots, b_n)$

$$V_1 \cdot V_2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$$

⇒ 내적 (Inner product)

※ $V \ni u, v, w$ $u \cdot v$

① $u \cdot v = v \cdot u$

② $(u+v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$

③ $(ku) \cdot v = k(u \cdot v)$

④ $v \cdot v \geq 0$, $(v \cdot v = 0 \iff v = \vec{0})$

벡터덧셈. 항등원

norm $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$

V, 체 S (S, + x)

$x \times x = a$

$d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\|$