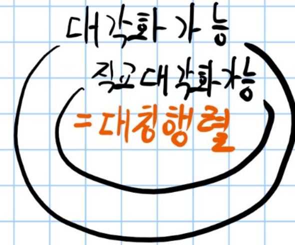
# 81강 직교대각화 하는 방법
(orthogonal diagonalizing)

* 직교대각화 가능 $\Leftrightarrow$ 대칭행렬




Thm. $n \times n$ 실수행렬 $A$가 대각화가능할 필요충분조건은
모든 고유값들의 기하적 중복도의 합이 $n$이 되는 것이다.

↳ $n \times n$ 실수 대칭행렬은 모든 고유값들의 기하적 중복도의 합이 $n$이다.
↳ 대수적 중복도와 기하적 중복도가 같다.

Thm. $A$가 대칭행렬이면 서로 다른 고유공간에 속한 고유벡터는 서로 직교한다.

$\lambda_1 \rightarrow \quad Ax = \lambda_1 x \quad x$의 집합 $\rightarrow V_1$

$\lambda_2 \rightarrow \quad Ax = \lambda_2 x \quad$ 〃 〃 $\rightarrow V_2$ $\qquad V_1 \perp V_2$

pf) $V_1 \cdot V_2 = 0$

$$\lambda_1 V_1 \cdot V_2 = AV_1 \cdot V_2 = V_1 \cdot A^T V_2 = V_1 \cdot AV_2 = V_1 \cdot \lambda_2 V_2$$

$$= V_1 \cdot \lambda_2 I V_2 = V_1 \cdot \begin{bmatrix} \lambda_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 \end{bmatrix} V_2 = \lambda_2 V_1 \cdot V_2$$

$$\lambda_1 V_1 \cdot V_2 - \lambda_2 V_1 \cdot V_2 = 0 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) V_1 \cdot V_2 = 0 \Rightarrow V_1 \cdot V_2 = 0$$

* 직교대각화 하는 방법 (실수 행렬)
↳ 대칭행렬

① $A$의 고유값을 모두 구한다. (실수 고유값이 나온다.)

② $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \Rightarrow$ 고유공간의 basis를 구한다. $\Rightarrow$ 그람슈미트 $\Rightarrow$ 직교기저

$\lambda_1 \qquad B_1 = \{v_1, v_2\}$ 고유공간의 차원 $\Rightarrow$ 기하적 중복도

$\lambda_2 \qquad B_2 = \{v_3, v_4, v_5\}$

n개

↳ $v_1 \cdots v_n$ : n개의 벡터

$B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ : orthonormal basis

③ $P = [v_1 \cdots v_n]$ 직교행렬

$$P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_k \end{bmatrix}$$

ex) $A = \begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$ 를 직교대각화 하시오

i) $\det(\lambda I - A) = \det\left(\overbrace{\begin{bmatrix}1-\lambda&2&2\\2&1-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{bmatrix}}^{A-\lambda I}\right) \xrightarrow{3행-2행} = \det\left(\begin{bmatrix}1-\lambda&2&2\\2&1-\lambda&2\\0&1+\lambda&-\lambda-1\end{bmatrix}\right)$

$= (1-\lambda)\{\underbrace{(1-\lambda)(-1) \quad -2}_{\lambda-3}\}(1+\lambda)$

$+8(\lambda+1)$

$= (1-\lambda)(\lambda-3)(1+\lambda)+8(\lambda+1) = (\lambda+1)\{(1-\lambda)(\lambda-3)+8\}$

$= (\lambda+1)\{-\lambda^2+4\lambda+5\}$

$= -(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda-5) = 0$

→ 대수적 중복도 = 2

↳ 기하적 중복도 = 2

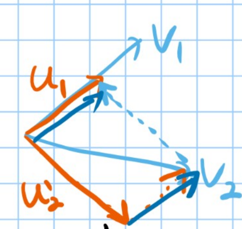
$\lambda = -1, 5$

ii) $\lambda = -1$ $\quad Ax = -x \quad Ax + x = 0 \quad (A+I)x = 0$

$\begin{bmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \to \begin{matrix}x_1 = -x_2 - x_3\\ x_2 = s\\ x_3 = t\end{matrix}$

$X = \begin{bmatrix}-s-t\\s\\t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}s + \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}t$

$v_1 = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ ⇒ 고유벡터 $u_1 \quad u_2$




$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|}v_1 = \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{bmatrix}$

$u_2 = u_2'/\|u_2'\| = \frac{1}{\sqrt{\frac14+\frac14+1}}u_2' = \begin{bmatrix}-\frac{\sqrt6}{6}\\-\frac{\sqrt6}{6}\\\frac{\sqrt6}{3}\end{bmatrix}$

$u_2' = v_2 - \mathrm{proj}_{u_1}v_2$

$= v_2 - \frac{v_2\cdot u_1}{u_1\cdot u_1}u_1$

$= \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac12\\-\frac12\\1\end{bmatrix}$

span$\{v_1, v_2\}$

$\lambda = 5 \quad Ax = 5x \quad Ax - 5x = (A-5I)x = 0$

$\begin{bmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}-2&1&1\\0&-3&3\\0&0&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

$\det(A-5I) = 0$

↳ $x_1 - x_3 = 0$
$x_2 - x_3 = 0$
$x_3.$

$X = \begin{bmatrix}t\\t\\t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}t$

$v_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$

$u_1 \quad u_2 \quad u_3$

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \qquad P^T A P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$