

제 49 강 대각화가능 행렬과 그 성질들

Def. 대각화가능 (Diagonalizable)

정사각행렬 A 에 대해서 $p^{-1}Ap$ 가 대각행렬이
되지 않는 가역행렬 p 가 존재한다면,
행렬 A 는 "대각화가능"하다고 한다.

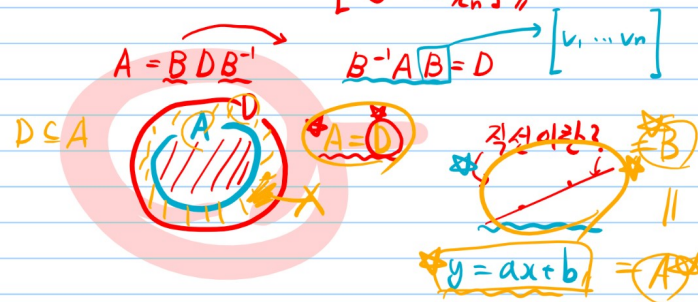
$$\rightarrow A: n \times n$$

$$\rightarrow v_1 \sim v_n$$

* n 개의 선형독립인 고유벡터가 존재하면

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$



Thm. 대각화가능한 행렬 A 는

n 개의 선형독립인 고유벡터를 가진다.

p.t) $p^{-1}Ap = D$ 가역행렬인 p 는 존재.

$$Ap = pD$$

$$p = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}$$

\rightarrow 선형독립

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$Ax = \lambda x$$

$$Av_1 = \lambda_1 v_1$$

$$Av_2 = \lambda_2 v_2$$

$$\vdots$$

$$Av_n = \lambda_n v_n$$

$$pD = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \dots & \lambda_n v_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & v_{n2} \\ v_{13} & v_{23} & \dots & v_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_{11} & & \\ \lambda_1 v_{12} & & \\ \vdots & & \\ \lambda_1 v_{1n} & & \end{bmatrix} \dots$$

★ 대각화 가능 행렬의 거듭제곱

$$A^n = A \cdot A \cdots A$$

$$P^{-1}AP = D \rightarrow \text{대각}$$

$$D^n = (P^{-1}AP)^n$$

$$= \underbrace{(P^{-1}AP) \cdot (P^{-1}AP) \cdots (P^{-1}AP)}_{n\text{회}}$$

$$= P^{-1}A^nP$$

$$\boxed{A^n} = \cancel{P} \cancel{D^n} \cancel{P^{-1}} //$$

$$A \cdot A \cdots A$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \lambda_2^n & \\ 0 & \cdots & \lambda_n^n \end{bmatrix}$$