제 44 강 대각합과 고유값의 관계

Thm. $n \times n$ 행렬 A의 고유값 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$에 대해, $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ 이다.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}_{n \times n} \overset{\star}{=} (\lambda - a_{11}) C_{11} + (-a_{12}) C_{12} + \cdots + (-a_{12}) C_{1n}$$

C_{ij} $(-1)^{i+j}$

$= \bigcirc + \bigcirc - \bigcirc + \bigcirc + \cdots + \bigcirc - \bigcirc \cdots$

$(\lambda - a_{11})(-a_{12}) \cdots^{n-2} \cdots\cdots (\quad)$

$= (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn}) + \bigcirc - \bigcirc \cdots$

↳ λ에 대한 n차식, $n-1$

$= \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) \lambda^{n-1} + \cdots$

$(n-1)$차식 $\times$ $(n-1)$차식 $\rightarrow n-2$

Lemma. $\det(\lambda I - A)$의 λ^{n-1}항의 계수는 항상 $-(a_{11} + \cdots + a_{nn})$이다.

$\lambda_1 \sim \lambda_n$ $\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) = 0$

$= \lambda^n - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) \lambda^{n-1} + \cdots$

$\therefore$ 행렬 A의 대각합은 고유값들의 합과 같다. //