87강 의사 역행렬 (Pseudo Inverse)

* 축소된 SVD

A : $m \times n$ 행렬, $\mathrm{rank}(A)=k$ 일 때,

$A = \underset{m\times k}{U'}\,\underset{k\times k}{\Sigma'}\,\underset{k\times n}{V'^T}$ → 축소된 SVD.

EVD
↳ 정사각대칭.

* 가역행렬

A: $n\times n$ 정사각행렬. $\mathrm{rank}(A)=n$.

$A = \underset{n\times n}{U'}\,\underset{n\times n}{\Sigma'}\,\underset{n\times n}{V'^T}$

↳ 모든 대각원소가 0이 아닌 정사각 대각행렬 ⇒ 가역행렬

↳ U'와 V'는 full column rank 이고, 정사각

⇒ 즉, 직교행렬 ⇒ 가역 $B^{-1}=B^T$

$$A^{-1} = (U'\Sigma'V'^T)^{-1} = (V'^T)^{-1}(\Sigma')^{-1}(U')^{-1}$$

tracktroid. 회전체.
pseudo sphere.
구
↳ 보통 곡률이 0이 아닌 상수이면 구. R $\frac{1}{R^2}$ $-\frac{1}{R^2}$

$A^+ = \underbrace{V'(\Sigma')^{-1}U'^T}$
↳ 유사 역행렬 (pseudo inverse)

* A가 가역행렬이면 $A^+ = A^{-1}$
→ X A^+

↳ 최소제곱법에 유용하게 쓰인다.

* 슈도 인버스의 자잘한 성질들

A 가역 ⇒ $A^+ = A^{-1}$,

A가 정사각x $m\times n$ 행렬, full column rank.

⇒ $A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$ → 최소제곱법.

* 정규 방정식.

$\boxed{A^TA}x = A^Ty$ → $\underset{m\times n}{\mathrm{rank}(A)} = \mathrm{rank}(A^TA)$ $= n$ n차.

$x = (A^TA)^{-1}A^Ty$ → 유일해.
$= A^+y$

* 적어도, A가 full column rank 일 때,
$Ax=b$의 최소제곱해는 $x = A^+b$

* full column rank가 아니면 무수히 많은 해.

* A가 $m\times n$ 행렬, $b\in\mathbb{R}^m$ 일 때

$x = A^+b$ 는 $Ax=b$의 최소제곱해이며,
↳ $\in \mathrm{row}(A)$

최소의 norm을 가진다.

A : full column rank → 정규방정식은 유일해
x → 무수히 많은 해 → norm이 가장 짧은 벡터.

$A^+ = V'\Sigma'^{-1}U'^T$
↳ $\mathrm{row}(A)$의 정규직교기저 임을 보여야 한다.

* A가 $m \times n$ 행렬, $b \in \mathbb{R}^m$ 일때

$x = A^+b$ 는 $Ax=b$의 최소제곱해이며,

↳ $\in row(A)$

최소의 norm을 가진다.

A : full column rank → 정규방정식은 유일해

x → 무수히 많은해 → norm이 가장 짧은 벡터.

$$A^+ = V'\Sigma'^{-1}U'^T$$

↳ row(A)의 정규직교기저 임을 보여야 한다.

pf) $A^TA\underline{x} = A^Tb$

$$A^TA(A^+b) = V'(\Sigma')^2\cancel{V'^T}(\cancel{V'}\cancel{\Sigma'^{-1}}U'^T)b$$

$$A = U'\Sigma'V'^T \qquad A^T = V'\Sigma'U'^T$$

$$A^TA = V'\Sigma'\cancel{U'^T}\cancel{U'}\Sigma'V'^T$$

$$= V'(\Sigma')^2V'^T$$

$$= \underline{V'\Sigma'U'^T}b$$

$$= A^Tb.$$