제 46강 기저(basis) (2)

· 차원 : 벡터공간 V , $\dim(V) :=$ V의 기저의 원소 갯수.

2차원 → $\boxed{S(v_1) \in V}$ $\mathbb{R}$

$V = \operatorname{span} B$

Thm $\boxed{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 가 V의 기저이면,
V의 모든 (임의의) 원소 $\vec{a}$는 정확하게
한가지 방법의 B의 원소들의 선형결합 꼴로 표현된다.

26강.

$\vec{a} \in V$, $\vec{a} = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$
$= b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n$

$(c_1, c_2, \cdots, c_n)_B = (b_1, b_2, \cdots, b_n)_B$

$B \Rightarrow$ ① 선형독립이면, span B의 임의의 원소 $\vec{a}$는
유일하게 B의 선형결합의 꼴로 표현된다. → 26강.

기저의 존재성? ⇒ $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ → $\mathbb{R}^n \supseteq \boxed{V} \not\ni e_1$

개념을 만든다. 행렬, 기저, 차원   현실 : 변수가 많다.
이상적으로 정제된 상황.   ↳ 의심, 걱정 ⇒ 이론 ⇒ 증명 ⇒ 「안전」

$s \cdot \vec{0} = \vec{0}$

$\dim(V) \neq 0$

「기저의 존재성」 V가 영이 아닌 $\mathbb{R}^n$의 부분공간이면
최대 n개의 원소를 가지는 V의 기저 B가 $\boxed{\text{존재}}$한다.

$V \ni v_1$ $\boxed{\operatorname{span}(v_1)} \subseteq V$ 스칼라. $\boxed{s \cdot v_1} \in V$

i) $\mathrm{span}(v_1) = V \Rightarrow \{v_1\} = B \Rightarrow$ 기저 존재.

ii) $\mathrm{span}(v_1) \neq V \Rightarrow \underbrace{V - \mathrm{span}(v_1)}_{=A_1} \neq \varnothing$

$A_1 \ni v_2 \Rightarrow$ v_1과 v_2는 $\boxed{\text{선형독립}}$ $\mathrm{span}(v_1)$

$x v_2 \neq \boxed{s v_1}$

$\begin{cases} \mathrm{span}\{v_1, v_2\} = V \Rightarrow B = \{v_1, v_2\} \\ \mathrm{span}\{v_1, v_2\} \subset V \quad V - \mathrm{span}\{v_1, v_2\} = A_2 \end{cases}$

$A_2 \ni v_3$ $\quad v_1, v_2, v_3$

$\begin{cases} \mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\} = V \Rightarrow B = \{v_1, v_2, v_3\} \\ \neq V \end{cases}$

$\vdots$

$\begin{cases} \mathrm{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = V \Rightarrow B_n \\ \mathrm{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \cancel{\neq V} \end{cases}$ $\quad V - \mathrm{span}\{v_1, \dots, v_n\} = A_n$

$A_n \ni v_{n+1}$? $\quad \mathbb{R}^{n}$차원