제 52강 행렬의 닮음 (similarity)

선형변환 A : E
↳ B : $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

$E \to V$: $p = [v_1 \cdots v_n]^{-1}$

$A = p^{-1} B p$

Def. A와 B가 서로 크기가 같은 정방행렬이고, $B = p^{-1} A p$ 를 만족하는 가역행렬 p가 존재할 때, B는 A와 닮음이라고 한다.
(A는 B와 닮음 ($A = pBp^{-1}$) p^{-1}

* 닮음의 성질

① A와 B가 닮음이면, $\det(A) = \det(B)$이다.

$A = pBp^{-1}$ $\quad \det(AB) = \det(A)\det(B)$.

$$\det(A) = \det(pBp^{-1}) = \det(p) \times \det(B) \times \det(p^{-1})$$
$$= \det(p)\det(p^{-1})\det(B)$$
$$= \det(p \cdot p^{-1})\det(B)$$
$$= \det(I)\det(B) = \det(B)$$

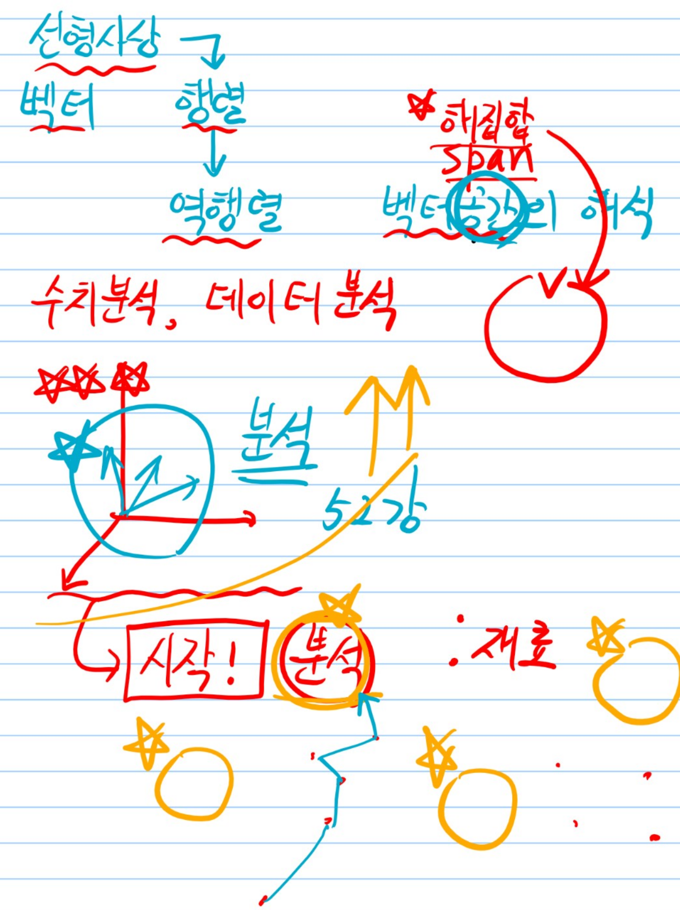
② $tr(A) = tr(B)$ $\quad tr(AB) = tr(BA)$

$$tr(A) = tr(pBp^{-1}) = tr(Bp^{-1}p) = tr(B)$$

③ A와 B의 고유값은 같다.

pf) A의 특성 방정식 $\det(\lambda I - A) = 0$

$$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - pBp^{-1})$$
$$= \det(p(\lambda p^{-1} - Bp^{-1}))$$
$$= \det(p(\lambda I - B)p^{-1})$$
$$= \det(p) \times \det(\lambda I - B) \times \det(p^{-1})$$



$= \det(p)\det(p^{-1})\det(\lambda I - B)$

$= \det(p\cancel{p^{-1}})\det(\lambda I - B)$

$= \det(\lambda I - B)$ ⇒ A와 B의 특성방정식은 같다.
⇒ A와 B의 고유값도 같다.

④ $\boxed{A = p^{-1}Bp}$ (즉, 닮음) 일 때,

「 $\boxed{v_1}$ 가 λ_1에 대한 A의 고유벡터라면,

기저변환

pv_1은 λ_1에 대한 B의 고유벡터이다.」

v_2가 λ_2에 대한 B의 고유벡터이면,

$p^{-1}v_2$는 λ_2에 대한 A의 고유벡터이다.

pf) $Av_1 = \lambda_1 v_1$ $\quad p^{-1}Bpv_1 = \lambda_1 v_1$

$Bpv_1 = \lambda_1 pv_1$ //