

제 53 강 kernel 과 range

Def. 커널의 정의

선형사상 $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(x) = \vec{0}$



모든 x 들의 집합. $\ker(F)$

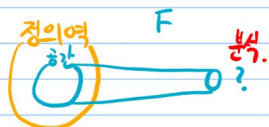
Thm. $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (단, F 는 선형사상)에 대해 $\ker(F)$ 는 벡터공간이다.

$\ker(F) \subseteq \mathbb{R}^n$: 벡터공간
↳ 부분공간 //

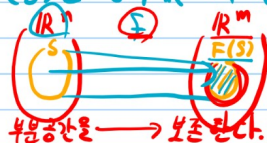
① 스칼라배: $\forall \vec{u} \in \ker(F), \forall c \in \mathbb{R}, c \cdot \vec{u} \in \ker(F)$
 $F(\vec{u}) = \vec{0}$

② 덧셈 $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \ker(F) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in \ker(F)$
 $F(\vec{u} + \vec{v}) = F(\vec{u}) + F(\vec{v}) = \vec{0}$ //

$A\vec{x} = \vec{0}$ 동차연립선형방정식의 해집합.
 $= \ker(A)$
영공간: null space
 $\text{null}(A)$



Thm. $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 을 선형사상이라고,
집합 S 를 정의역 \mathbb{R}^n 의 부분공간이라고 하면
 $F(S)$ 는 공역 \mathbb{R}^m 의 부분공간이다.



pf) $F(S) = S' \Rightarrow \mathbb{R}^m$ 의 부분공간임을 증명.

① 스칼라배 $\forall \vec{x} \in S', \forall c \in \mathbb{R}, c \cdot \vec{x} \in S'$
 $F(\vec{x}) = \vec{a}, \exists \vec{x} \in S, \vec{a} = c \cdot F(\vec{x}) = F(c \cdot \vec{x})$ 공간

② 덧셈
 $\forall \vec{a}, \vec{b} \in S', \quad \vec{a} + \vec{b} \in S'$

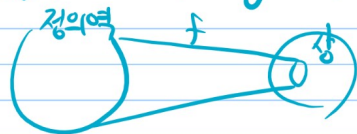
$$F(x) = \vec{a}, F(y) = \vec{b}, \exists x, y \in S$$

$$\vec{a} + \vec{b} = F(x) + F(y) = F(x+y)$$

$$x+y \in S \text{ 공간}$$

$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 선형사상

$F(\mathbb{R}^n)$: range 치역, $\text{ran}(F)$



정의역의
domain

「사상」

↓
상이다.

↓
Image

* range는 공역의 부분공간이다.

Thm 선형변환 행렬 A에 대해, $\text{ran}(A)$ 는 $\text{col}(A)$ 이다.

$$y = Ax$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

n차원

m차원

A: m x n 행렬

$$Ax: (m \times n)(n \times 1) = (m \times 1)$$

$$\begin{aligned} \boxed{Ax} &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots \\ &\quad + x_n a_n \\ &= \text{span}(a_1, \dots, a_n) \\ &= \text{col}(A) \end{aligned}$$