77강 직교행렬 (orthogonal matrix)

* A가 직교(orthogonal) 행렬이면
  A의 모든 열벡터는 (↳ 행벡터) 서로 정규직교(orthonormal) 이다.

* 직교 변환 (orthogonal transformation) 선형 함수
* $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, T는 길이를 보존하는 선형사상이라고 하자
  linear isometry
  같다 미터(길이)

$\|T(x)\| = \|x\|$ for $\forall x \in \mathbb{R}^n$

↳ 길이가 보존이 되면, 각도도 보존된다.

$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ v_1와 v_2의 각도를 θ라고 하면 $T(v_1)$와 $T(v_2)$의 각도 또한 θ이다.

$v_1 \perp v_2$, $T(v_1) \perp T(v_2)$

T: linear isometry T^{-1}: linear isometry

* 선형사상 T는 $T(x) = Ax$ → 직교행렬
  $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $T: V \to W$ (23강)
  $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (a, b, c) ↳ 9가지.

* 직교변환 (길이를 보존하는 선형사상)

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 선형사상.
$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|T(x)\| = \|x\|$

$\Leftrightarrow$ T는 dot product를 보존한다.
$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $T(x) \cdot T(y) = x \cdot y$

pf) $\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
T(x)\cdot T(y) &= \tfrac{1}{4}(4T(x)\cdot T(y)) \\
&= \tfrac{1}{4}(2T(x)\cdot T(y) + 2T(x)\cdot T(y)) \\
&= \tfrac{1}{4}(T(x)\cdot T(x) + 2T(x)\cdot T(y) + T(y)\cdot T(y) - T(x)\cdot T(x) - T(y)\cdot T(y) + 2T(x)\cdot T(y)) \\
&= \tfrac{1}{4}((T(x)+T(y))\cdot(T(x)+T(y)) - (T(x)\cdot T(x) - 2T(x)\cdot T(y) + T(y)\cdot T(y))) \\
&= \tfrac{1}{4}((T(x)+T(y))^2 - (T(x)-T(y))^2) \\
&= \tfrac{1}{4}(\|T(x)+T(y)\|^2 - \|T(x)-T(y)\|^2) \\
&= \tfrac{1}{4}(\|T(x+y)\|^2 - \|T(x-y)\|^2) \\
&= \tfrac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) \\
&= \tfrac{1}{4}((x+y)\cdot(x+y) - (x-y)\cdot(x-y)) \\
&= \tfrac{1}{4}(x\cdot x + 2x\cdot y + y\cdot y - x\cdot x + 2x\cdot y - y\cdot y) \\
&= \tfrac{1}{4}(4x\cdot y) = x\cdot y
\end{aligned}
$$

$\Leftarrow$

$$
\begin{aligned}
\|T(x)\| &= \sqrt{T(x)\cdot T(x)} \\
&= \sqrt{x\cdot x} \\
&= \|x\|
\end{aligned}
$$

* 각도를 보존한다.

$\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n \qquad v_1 \cdot v_2 = \|v_1\| \|v_2\| \cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\| \|v_2\|} \rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\| \|v_2\|}\right)$$

$T(v_1)$, $T(v_2)$

$$\cos^{-1}\left(\frac{T(v_1) \cdot T(v_2)}{\|T(v_1)\| \|T(v_2)\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\| \|v_2\|}\right)$$