

## 2022-2023 **秋季学期金融期权** 江一鸣教授 • 数学科学学院



22 de noviembre de 2022

苏可铮 2012604

## 1. 布朗运动的期望

## Teorema 1

设  $B_t$  是布朗运动,则证明

$$E[B_t^{2n}] = (2n - 1)!!t^n$$

proof. 由  $B_t$  是布朗运动,则有:

$$\begin{split} E[B_t^{2n}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} -t x^{2n-1} de^{-\frac{x^2}{2t}} \\ &= -\frac{t}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n-1} de^{-\frac{x^2}{2t}} \\ &= -\frac{t}{\sqrt{2\pi t}} (x^{2n-1} e^{-\frac{x^2}{2t}}|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx^{2n-1}) \\ &= -\frac{t}{\sqrt{2\pi t}} \left( 0 - (2n-1) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2t}} x^{2n-2} dx \right) \\ &= \frac{(2n-1)t}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n-2} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\ &= \dots \\ &= \frac{(2n-1)!!t^n}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\ &= \frac{(2n-1)!!t^n}{\sqrt{2\pi t}} \sqrt{2\pi t} \\ &= (2n-1)!!t^n \end{split}$$

则可以得到:  $E[B_t^2] = t$ ,  $E[B_t^4] = 3t^2$ ,  $E[B_t^6] = 15t^3$ ,  $E[B_t^8] = 105t^4$