

4-2 $N \rightarrow \infty$ の極限と連続行列	107
4-3 完全系のいくつかの例	116
4-4 微分方程式と行列方程式	123
第4章演習問題	126
5 グリーン関数入門	129
5-1 常微分方程式とグリーン関数	129
5-2 偏微分方程式と境界値問題——ラプラス-ボアソン型	141
5-3 波動方程式と初期値問題	153
5-4 拡散型方程式と初期値問題	158
第5章演習問題	164
6 ラプラス変換	167
6-1 ラプラス変換とは	167
6-2 ラプラス逆変換	169
6-3 ラプラス変換と逆変換の例	171
6-4 常微分方程式への応用	188
6-5 過渡現象	198
第6章演習問題	199
さらに勉強するために	203
演習問題略解	205
索引	221

1 フーリエ級数

同じ振舞いを規則的に繰り返す関数を周期関数と呼び、この章ではそのような周期関数 $f(x)$ を扱う。周期関数の代表的な例は三角関数である。フーリエ級数とは、任意の周期関数 $f(x)$ をサインやコサインの無限級数として書こうというものである。

この章ではフーリエ級数の定義からはじめて、いくつかの簡単な例で実際にフーリエ級数をつくりてみる。そのうえでフーリエ級数がもとの関数を再現していることを示す。また、フーリエ級数の応用として簡単な常微分方程式の解をフーリエ級数を用いて議論する。

1-1 フーリエ級数とは

1つの周期関数を考えよう。周期関数には周期がある。このことを見るために図 1-1 に周期関数の例を示してある。横軸が変数 x 、縦軸が周期関数 $f(x)$ である。 x 軸上で $x=L, -L$ の点をそれぞれ A, B とすると、 $f(x)$ は AB 間の形を繰り返している。つまり $f(x)$ は周期 $2L$ の周期関数である。

ところがよく見ると、 x 座標が任意の値 x である点 C と x 座標の値が $x+2L$ である点 D の間を 1 周期とみてもよいのである。 $f(x)$ はこの間の形を繰り返しているともいえる。 $2L$ だけ隔たった 2 点における $f(x)$ の値はどこを

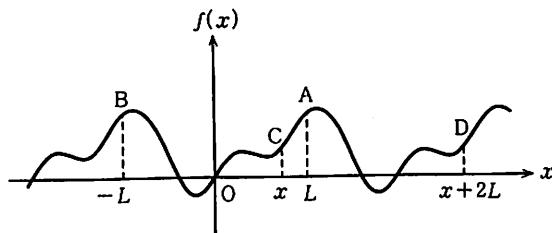


図 1-1

とっても等しいのである。つまり

$$f(x+2L) = f(x) \quad (1.1)$$

がすべての x について成立する。これが周期 $2L$ の周期関数の定義である。

ところが(1.1)からすぐに

$$f(x+4L) = f(x+2L+2L) = f(x+2L) = f(x)$$

となって、 $4L$ もまた周期である。このような周期は無数にあるが、そのうちで最小のものを基本周期とよぶ。図 1-1 では $2L$ が基本周期である。この $2L$ の幅をもつ区間は x 軸上どこでもよいことはすでに述べたが、以下では

$$-L < x < L \quad (1.2)$$

と決める。 $f(x)$ はさらに(1.2)の区間内で連続、または高々有限個の不連続点をもつとする。 $f(x)$ の例が図 1-1 の他に図 1-2~図 1-6 に示されている。図 1-2 では $x=0$ と L で不連続である。 $f(L-0)$ と $f(-L+0)$ は等しくないが $f(L+0)=f(-L+0)$ の意味で周期的である。他の例についても同様である。

一方周期関数としてわれわれは $\cos x, \sin x$ をすぐに思い浮かべる。もっと一般化して $n=0, 1, 2, \dots$ に対して

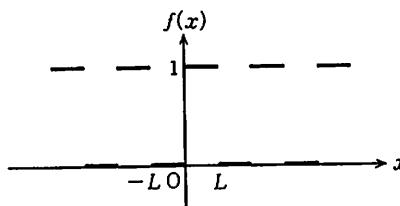


図 1-2

$$\cos \frac{n\pi}{L}x, \quad \sin \frac{n\pi}{L}x$$

は(基本周期ではないが)周期 $2L$ の周期関数である。実際に(1.1)を満たしていることが、次のようにして分かる。

$$\sin \frac{n\pi}{L}(x+2L) = \sin \left(\frac{n\pi}{L}x + 2\pi n \right) = \sin \frac{n\pi}{L}x$$

$\cos \frac{n\pi}{L}x$ についても同様。以下では基本周期かどうかにはこだわらずに周期 $2L$ の関数 $f(x)$ に対して次の問題を考える。

$$\begin{aligned} &\text{「}f(x) \text{ を } \sin \frac{n\pi}{L}x \text{ と } \cos \frac{n\pi}{L}x \text{ } (n=0, 1, 2, \dots) \text{ の無限級数} \\ &\text{で書けないだろうか?」} \end{aligned} \quad (1.3)$$

この問題がフーリエ級数の出発点である。まず、上のように書けたと仮定しよう。そしてそれを次のように書こう。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x \right) \quad (1.4)$$

$a_0/2$ の項は $n=0$ の $\cos \frac{n\pi}{L}x$ の項をとり出して書いたもので、 $1/2$ をつけたのはあとでの便宜上である。(1.4)で $n<0$ の値を省略したのは次の理由による。 $n<0$ も含めて

$$f(x) = \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=\pm 1, \pm 2, \dots} \left(a_n' \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n' \sin \frac{n\pi}{L}x \right) \quad (1.5)$$

と書けたとしよう。 $\sin(-\theta) = -\sin \theta, \cos(-\theta) = \cos \theta$ であるから、(1.5)において、 $n>0$ に対して

$$a_0' = a_0, \quad a_n' + a_{-n}' = a_n, \quad b_n' - b_{-n}' = b_n$$

と置けば(1.5)は(1.4)の形と一致する。以下では(1.4)の展開を考えることにする。そしてそれを $f(x)$ のフーリエ級数(Fourier series)とよぶ。

さて n, m を 1 以上の整数(自然数)として、次の公式を用いる。

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi}{L}x \cos \frac{m\pi}{L}x dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left\{ \cos \frac{(n+m)\pi}{L}x + \cos \frac{(n-m)\pi}{L}x \right\} dx \\ &= \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ L & (m=n) \end{cases} \end{aligned} \quad (1.6a)$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{m\pi}{L} x dx = 0 \quad (1.6b)$$

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{m\pi}{L} x dx &= \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \cos \frac{(n-m)\pi}{L} x - \cos \frac{(n+m)\pi}{L} x \right\} dx \\ &= \begin{cases} 0 & (n \neq m) \\ L & (n = m) \end{cases} \quad (1.6c) \end{aligned}$$

ここで(1.4)に $\sin \frac{n\pi}{L} x$ または $\cos \frac{n\pi}{L} x$ を掛けて $-L$ から L まで積分する。このとき、いったん(1.4)の中の n についての和を 1 からある正の整数 N まで止めておき、最後に $N \rightarrow \infty$ とする。こうすると項別積分が許されるので、(1.6a)~(1.6c)を用いて

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (1.7a)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (1.7b)$$

として展開係数がきまる。これらの a_n, b_n をフーリエ係数(Fourier coefficient)とよぶ。ここで逆に(1.7a, b)できまる a_n, b_n を用いて、 $n=N$ までの和

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right) \quad (1.7c)$$

をつくったとしよう。さて、問題の核心は

$$\begin{aligned} &\text{「}N \rightarrow \infty \text{ で (1.7c) は収束するか? そして収束するなら} \\ &\text{その極限関数はもとの関数 } f(x) \text{ と一致するか?」} \quad (1.8) \end{aligned}$$

ということである。

1-3 節や次章の 2-1 節で見るように、この問題に対する答は、(ある性質をもった関数 $f(x)$ に対しては)yes である。そのことから(1.4)はたしかに正しい等式であるといえる。

このことを示す前に、次の 1-2 節で $f(x)$ のいくつかの例を取りあげ、 a_n, b_n を計算し、(1.4)を作る。そしてそれが $N \rightarrow \infty$ で $f(x)$ を与えるかどうかを調べることにする。 a_n, b_n を求めるのは簡単だが、(1.4)の無限和($N=\infty$ で)を実際に計算するのは難しい。数学的な詳細は次章の 2-1 節にゆずって、ここ

では次節の例で得た a_n, b_n のうちの 1 つについて、(1.4)の無限級数の和をとることができてもとの関数を再現していることを確かめよう。その前に、いくつかの準備をしておかなくてはならない。

実用上、(1.7a)~(1.7c)の特別な場合がよく現われるので、まずそのことについて触れておく。

$f(x)$ が偶関数のとき $f(x)=f(-x)$ と(1.7a)~(1.7c)から、コサインのみ現われることが分かる。

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx, \quad b_n = 0 \quad (1.9a)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x \quad (1.9b)$$

これをフーリエコサイン(cosine)展開とよぶ。

$f(x)$ が奇関数のとき $f(x)=-f(-x)$ を用いて、同様に

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \quad (1.10a)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (1.10b)$$

これをフーリエサイン(sine)展開とよぶ。

さてフーリエ展開を行なう際、複素数 $e^{\frac{i n \pi x}{L}}$ を用いた複素フーリエ展開を用いると便利な場合が多い。まず、ド・モアブル(de Moivre)の公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

から得られる関係式

$$\cos \frac{n\pi}{L} x = \frac{e^{\frac{i n \pi x}{L}} + e^{-\frac{i n \pi x}{L}}}{2}, \quad \sin \frac{n\pi}{L} x = \frac{e^{\frac{i n \pi x}{L}} - e^{-\frac{i n \pi x}{L}}}{2i}$$

を(1.4)へ代入し整理しなおして、複素係数 c_n を定義する。その結果次の展開を得る。

$$f(x) = \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} c_n e^{\frac{i n \pi x}{L}} \quad (1.11)$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (1.12)$$

(1.11)が複素フーリエ展開である。さらに、(1.7a), (1.7b)から

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{i n \pi x}{L}} dx \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1.13)$$

となることも分かる。もし $f(x)$ が実数値をとる関数なら a_n, b_n は実数なので、

$$c_n^* = c_{-n}$$

を満たす。ここで * は複素共役の意味である。

関係式(1.6a, b, c)を利用すると、複素数で書いた次の式が成立することも確かめられる。

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx e^{i \frac{n \pi x}{L}} e^{-i \frac{m \pi x}{L}} = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n) \end{cases} \quad (1.14)$$

ここで 1 周期のとり方について一言注意しておく。ここまで $-L < x < L$ を 1 周期と考えてきたが、式を簡略化するために、次のように周期をとり直す場合もある。

$-\pi < x < \pi$ で考える これは単に便宜上のことであるが、以下ではしばしば $y = \frac{\pi}{L}x$ と変数変換し y を新たに x と書いて 1 周期を $-\pi < x < \pi$ とする。このとき公式が次のようなすっきりした形になる。

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (1.15a)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (1.15b)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1.16)$$

複素数表示では

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (1.17)$$

$$f(x) = \sum_{n=0, \pm 1, \dots} c_n e^{inx} \quad (1.18)$$

である。

1-2 フーリエ級数の例

さていよいよここで、いくつかの例に対するフーリエ級数を作ってみよう。前節の終りで述べたように、1 周期の範囲を $-\pi < x < \pi$ にとる。使う公式は(1.15a, b), (1.16)である。

[例 1]

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < \pi) \\ 0 & (-\pi < x < 0) \end{cases} \quad (1.19)$$

これは図 1-2 で $L=\pi$ とおいたものである。このとき

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dx = 1, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos nx dx = 0 \quad (1.20a)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n} \quad (1.20b)$$

よって展開(1.4)が成立しているとすると、次のようなフーリエ級数を得る。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} \sin nx \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right) \end{aligned} \quad (1.21)$$

もしこれが成立しているとすると、奇妙な感じを受けるかもしれない。なぜなら、(1.19)を見ると、 $0 < x < \pi$ の間で x を動かしても(1.21)の右辺の和は 1 という定数をとらなければならないからである。 $-\pi < x < 0$ では 0 である。このことは次の 1-3 節で議論することとして、ここでは(1.21)が正しいものとしよう。そして特に $x = \pi/2$ とおいてみると、ある関係式が出る。 $\sin \frac{2m+1}{2}\pi = (-1)^m$ ($m=1, 2, 3, \dots$) を用いると

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (1.22)$$

が公式として得られる。右辺が収束すること、そしてその無限和の値が $\pi/4$ であることはライブニッツ(Leibniz)の級数として知られている。この事実は(1.21)が少なくとも $x = \pi/2$ では正しいことを示唆している。

というわけで、(1.21)を数値的に調べるのは重要であることが分かる。実際には和を最初の N 項で止めて、右辺を数値的に評価するのである。次の 1-3 節で調べるように、 N を増していくと複雑な振舞いをしながらも、たしかに(1.19)の関数に近づいていく様子が見える。 N を増すと振幅の小さい、早い周期の細かい振動項が現われて、それが(1.19)を再現するのに役立っていることがわかる。

一方、(1.21)が本当に(1.19)と同じかどうかを解析的に調べることもできる。特に $x=0, \pi$ などの不連続点でどうなっているかにも興味がある。しかしこれらのこととは後にまわし、ここではもうすこしフーリエ級数の例を見ていこう。

[例 2] $f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi)$ (1.23)

これは図 1-3 のような波形、いわゆるのこぎり波を表わす。ここでも L を π とおいた。 $f(-\pi) \neq f(\pi)$ であるから、例えば $x=\pm\pi$ で不連続性をもっている。 $f(x)$ は x の奇関数であるから $a_n=0$ で、 b_n の方は、 $n \geq 1$ として

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx dx = \frac{-2}{\pi} \frac{x \cos nx}{n} \Big|_0^\pi + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos nx}{n} dx \\ &= \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \end{aligned} \quad (1.24)$$

よって、(1.4)の右辺をつくると、(1.23)のフーリエ級数は

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin nx = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right) \quad (1.25)$$

となる。

もし(1.4)が正しいなら、(1.25)の右辺はのこぎり波を表わしているはずで

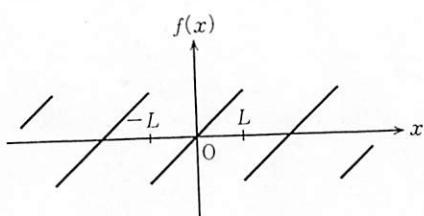


図 1-3

ある。そして $-\pi < x < \pi$ では

$$x = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right) \quad (1.26)$$

となるはずである。ここで $x=\pi/2$ とおくと、ふたたび(1.22)を得る。

[例 3] $f(x) = |x| \quad (-\pi < x < \pi)$ (1.27)

これは図 1-4 のような連続な関数である($L=\pi$ とした)。これは x について偶関数だから $b_n=0$ 、そして $n \neq 0$ では

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} x \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^\pi - \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi n^2} \{(-1)^n - 1\} \end{aligned} \quad (1.28a)$$

$n=0$ では

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \pi \quad (1.28b)$$

よって、もし(1.4)が成立するならば

$$\begin{aligned} |x| &= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2} \{(-1)^n - 1\} \cos nx \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left\{ \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (1.29)$$

これは $x=\pi/2$ では恒等式であり、 $x=0$ では

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \quad (1.30)$$

を得るが、これも正しい式である(章末演習問題[2](a)参照)。

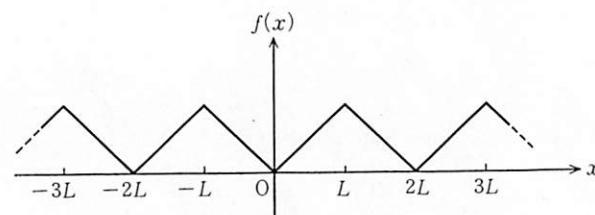


図 1-4

もし(1.29)で項別微分が許されるなら、両辺を x で微分すると

$$\pm 1 = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right) \quad (1.31a)$$

となる。ここで左辺の ± 1 の意味は $0 < x < \pi$ なら $+1$ をとり、 $-\pi < x < 0$ なら -1 をとるということである。(1.31a)の右辺は例1の式(1.21)を用いると $2(f(x) - 1/2)$ となっているが、これがちょうど(1.31a)の ± 1 と一致している。このことは $f(x)$ に(1.19)を代入してみれば確かめられる。たしかに(1.29)では項別微分が許されているのである。

後の便宜上ここに現われた $\frac{1}{2}(f(x) - \frac{1}{2})$ を改めて $f(x)$ と書き例3' としよう。以上をまとめると

[例3']

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < \pi) \\ -1 & (-\pi < x < 0) \end{cases}$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right) \quad (1.31b)$$

となる。なお項別微分の可能性については、次章の2-3節で議論する。

[例4]

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad (-\pi < x < \pi) \quad (1.32)$$

$f(x)$ は図1-5において $L = \pi$ にとった関数であり、 $x = \pm \pi$ で連続である。

$f(x)$ は偶関数であるから $b_n = 0$ であって、

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3} \quad (1.33)$$

$n \geq 1$ では

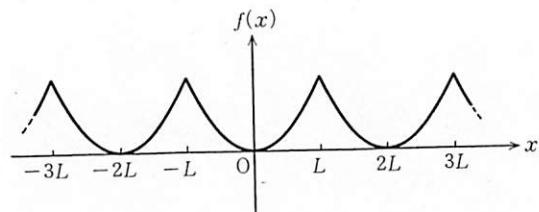


図1-5

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi} x^2 \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^\pi - \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi 2x \sin nx dx \\ &= \frac{4}{\pi n^2} x \cos nx \Big|_0^\pi - \frac{4}{\pi n^2} \int_0^\pi \cos nx dx = \frac{4(-1)^n}{n^2} \end{aligned} \quad (1.34)$$

よって(1.4)は、 $-\pi < x < \pi$ で

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \\ &= \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \dots \right) \end{aligned} \quad (1.35)$$

ここで $x = 0$ とおくと

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \quad (1.36)$$

を得る。もし項別微分が可能であるとすれば、(1.35)から

$$x = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right) \quad (1.37)$$

となり、これは(1.26)と同じである。よって(1.35)の場合も項別微分は許されると考えられる。

じつは図1-5を微分すると図1-3となっている。上で述べたことは、「(1.32)をフーリエ級数展開したものを項別微分すると(1.23)のフーリエ級数展開が得られる」ということをいっているのである。

逆に(1.26)を x について 0 から x まで両辺を積分し、項別積分が右辺に対して許されるとすれば、

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2} &= 2 \left(-\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 4x}{4^2} - \dots + 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \right) \\ &= 2 \cdot \frac{\pi^2}{12} - 2 \left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right) \end{aligned} \quad (1.38)$$

ここで(1.36)を用いた。(1.38)が(1.35)と一致するので、(1.26)に対しては項別積分が許されることが分かる。

[例5] $f(x) = |\sin x| \quad (-\pi < x < \pi) \quad (1.39)$

図1-6を見ると分かるように、この関数は $0 < x < \pi$ における $\sin x$ をくり返したものである。もし $-\pi < x < \pi$ で $f(x) = \sin x$ なら、フーリエ級数は $a_n = 0$, $b_1 = 1$, $b_n = 0$ ($n \neq 1$) である。つまり $\sin x$ のフーリエ展開式は $\sin x = \sin x$ という恒等式となる。しかし $|\sin x|$ となると無限級数でしか表わせない。実際 $b_n = 0$ であるが、

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{4}{\pi}, \quad a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos x dx = 0 \quad (1.40)$$

$n \geq 2$ に対しては

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin(n+1)x - \sin(n-1)x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{(-1)^n + 1}{n+1} - \frac{(-1)^n + 1}{n-1} \right\} = \frac{-2}{\pi} \frac{(-1)^n + 1}{(n-1)(n+1)} \end{aligned} \quad (1.41)$$

よってフーリエ級数(1.4)は次のようになる。

$$\begin{aligned} |\sin x| &= \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{(n-1)(n+1)} \cos nx \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (1.42)$$

ここで a_n のうち偶数の n のみ現われたのは、じつは(1.39)の1周期をもっと小さく $0 < x < \pi$ にとれたことと関係している。

さて(1.42)で特に $x = \pi/2$ とおくと、

$$1 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left\{ -\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots \right\}$$

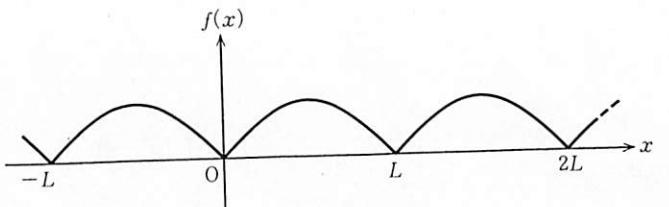


図 1-6

つまり

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \dots \quad (1.43)$$

を得る。(1.42)を項別微分すると、 $0 < x < \pi$ の範囲で

$$\cos x = \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{2 \sin 2x}{1 \cdot 3} + \frac{4 \sin 4x}{3 \cdot 5} + \frac{6 \sin 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right\} \quad (1.44)$$

という級数を得る。これが正しいことも $0 < x < \pi$ で $\cos x$ である関数を周期的にすべての x へ拡張した関数のフーリエ級数を実際つくって確かめることができる。一方、(1.42)を $0 < x < \pi$ として 0 から x まで項別積分すると

$$1 - \cos x = \frac{2}{\pi} x - \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{\sin 2x}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\sin 4x}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{\sin 6x}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \right\}$$

つまり

$$x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos x = 2 \left\{ \frac{\sin 2x}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\sin 4x}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \right\} \quad (1.45)$$

さて、もし右辺の級数が左辺の関数の正しいフーリエ級数になっていれば、フーリエ級数(1.42)に対して項別積分も許されるということになる。このことを調べるため、(1.45)において、 $x - \frac{\pi}{2} = y$ と変換してみる。

$$y - \frac{\pi}{2} \sin y = 2 \left(-\frac{\sin 2y}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\sin 4y}{3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{\sin 6y}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \dots \right) \quad (1.46)$$

x の範囲は $0 < x < \pi$ であるから $-\pi/2 < y < \pi/2$ である。また(1.46)の左辺は y の奇関数であるから、 $0 < y < \pi/2$ を 1 周期と考えて、 $y < 0$ へは奇関数として拡張してもよい。そのときのフーリエ級数は $0 < y < \pi/2$ で定義された関数として計算できるので、

$$a_n = 0 \quad (1.47)$$

$$b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(y - \frac{\pi}{2} \sin y \right) \sin 2ny dy = 2 \frac{(-1)^n}{(2n-1)2n(2n+1)}$$

となる。これはまさに(1.46)の右辺のフーリエ係数と一致している。

1-3 フーリエ級数はもとの関数を再現するか

数学的にはこの問題が中心テーマとなる。以下では $f(x)$ に対する具体的な例を取りあげて、次の 2 つの方法で調べることにする。

数値的に： フーリエ級数を第 N 項で切断した(1.7c)を考え、 $N=1, 2, 3, \dots$ についてその関数が数値的にどのように $f(x)$ を再現しているのかを調べる。

解析的に： フーリエの無限級数、つまり(1.7c)で $N \rightarrow \infty$ として無限和を解析的に実行する。

例としては 1-2 節の例 1 で取り上げた(1.19)で与えられる関数を考える。これからつくったフーリエ級数は(1.21)である。

(1) 数値的に： (1.19)で与えられる $f(x)$ が数値的にどれくらいよく近似されているかを、(1.7c)の有限級数を用いて調べる。 $N \rightarrow \infty$ の場合を知りたいのであるが、これは数値的な方法では不可能なので、 $N=1, 2, 3, \dots$ と変化させて、その動きを見て $N \rightarrow \infty$ を類推する。問題を見やすくするために、(1.19)の代りに、

$$g(x) = \frac{\pi}{2} \left(f(x) - \frac{1}{2} \right) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & (-\pi < x < 0) \\ \frac{\pi}{4} & (0 < x < \pi) \end{cases} \quad (1.48)$$

という関数を考える。 $g(x)$ に対するフーリエ級数は、第 n 項までとると

$$g_n(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \quad (1.49)$$

となる。 $n=1$ のとき $g_1(x) = \sin x$ であり、第 1 段階では(1.48)を $\sin x$ で近似するのである。 $n=2$ では $g_2(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3}$ 。図 1-7(a)で見るよう、たしかに $n=1$ で大きすぎたところは減らし、小さすぎるところは増やしている。このようなことが起こるのは、 $\frac{\sin 3x}{3}$ が $\sin x$ にくらべて振幅が小さくかつ速く振動する関数なので、微調整が可能となるからである。さらに微調整す

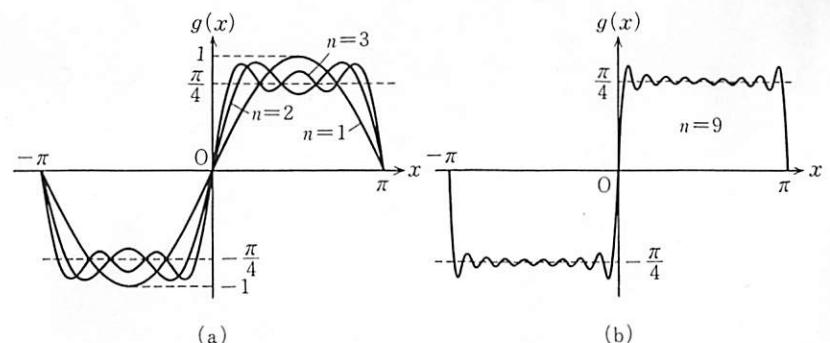


図 1-7

るため $\frac{\sin 5x}{5}$ を加えてというように、だんだんと $g(x)$ との誤差が小さくなっていくように見える。 $\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ は n が大きいと振幅はたいへん小さく非常に速く振動しているので、関数の微細な構造を再現するために有効に用いられていることが分かる。図 1-7 を参照されたい。図 1-7(b)では $n=9$ について示してある。 $n=9$ では(1.48)にかなり近づいていることが分かる。

しかし、この方法ではどうしても改善できない点がある。それは $g(x)$ が不連続となる点においてである。不連続点 $x=0$ ($x=\pm\pi$ でも同じ)において(1.49)は 0 となるが、(1.48)では $x=0$ は定義されておらず $x=0$ へ左右から近づいたときの値

$$\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = g(+0) = \frac{\pi}{4} \quad (1.50a)$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} g(x) = g(-0) = -\frac{\pi}{4} \quad (1.50b)$$

が与えられているのみである。ここで $+0$ は $0 \rightarrow +$ の方から近づくことを意味する。 -0 についても同様である。しかるに(1.49)はすべての N において $x=0$ で 0 を与えてしまう。この不連続点における事実は、数学的には解決すみで「不連続点上ではフーリエ級数の値は、もとの関数の不連続点へ右から近づいた値と左から近づいた値の相加平均と一致する」

ということが知られている。このことは次節で示すが、上の例では $0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right)$

$-\frac{\pi}{4}$ であって、たしかにこの定理をみたしている。

不連続点に関してはもう1つ厄介な事実がある。それは図1-7にも見られるように、 N を大きくしていくと $x=0$ の近くの両側に「ツノ」が出て、これは $N \rightarrow \infty$ でも残りそうである。実際 $N \rightarrow \infty$ でツノの幅はゼロに近づくが高さは有限に残る。このことはギブス(Gibbs)現象として知られていて、これについても次節でこしくわしく調べる。

結局、不連続点の近くをのぞけば(1.49)は $N \rightarrow \infty$ で $g(x)$ に近づいており、しかも不連続点以外ではその近づき方は一様であることも納得できるであろう。ここで関数列 $g_n(x)$ がある区間 $a < x < b$ で一様に $g(x)$ に収束するとは、ある正の量 ϵ が勝手に与えられたとき、この区間内の x の値によらずに N が存在して、 $n > N$ である限り

$$|g(x) - g_n(x)| < \epsilon$$

とできることを意味する。不連続点を含む区間内ではフーリエ級数の収束は一様ではなく、区間内に不連続点がなければ、その区間内では一様に収束するのである。このことも次章でもっとくわしく議論する。

図1-7をもういちど見てみよう。 $x = \pm\pi$ のごく近くでは $|g(x) - g_n(x)|$ という量は n がどんなに大きても有限にとどまってしまって、小さくなれない。よって ϵ が適当に小さいと一様性の条件は破れてしまう。

(2) 解析的に: 解析的に $g_n(x)$ の極限関数を求めてみよう。これができれば、数值的なことと合わせてフーリエ級数がたしかにもとの関数を再現しているという確信をもてるであろう。

まず(1.49)で与えられる $g_n(x)$ の形を簡単な関数で表わそう。 z を複素数として、自然対数 $\log(1+z)$ のテイラー(Taylor)展開

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \quad (1.51)$$

から出発しよう。 $z = e^{i\theta}$ とおくと

$$\log(1+e^{i\theta}) = e^{i\theta} - \frac{e^{2i\theta}}{2} + \frac{e^{3i\theta}}{3} - \frac{e^{4i\theta}}{4} + \dots \quad (1.52)$$

となる。ド・モアブルの公式

$$e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を用い、(1.52)の両辺の虚数部を等しいとおく。一般に複素数 $z = a + ib$ (a, b は実数) の虚数部を $\operatorname{Im} z = b$ と書くと

$$\operatorname{Im} \log(1+e^{i\theta}) = \sin \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} - \frac{\sin 4\theta}{4} + \dots \quad (1.53)$$

となる。これで $g_n(x)$ の $n \rightarrow \infty$ の形に近づいたが、(1.53)は $\sin 2\theta$ や $\sin 4\theta$ などの余計な項を含んでいる。これらが現われないようにするには、(1.51)のかわりに

$$\frac{1}{2} \{ \log(1+z) - \log(1-z) \} = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots \quad (1.54)$$

を考えればよい。実際

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \frac{1}{2} \{ \log(1+e^{i\theta}) - \log(1-e^{i\theta}) \} &= \sin \theta + \frac{\sin 3\theta}{3} + \frac{\sin 5\theta}{5} + \dots \\ &= g_\infty(\theta) \end{aligned} \quad (1.55)$$

となって、望んでいた形が出た。この結果は、(1.49)において、 $n=\infty$ とした無限級数の和をとることができ(1.55)になる、ということをいっている。以下、 x のかわりに θ を用いて(1.55)の $g_\infty(\theta)$ を考えよう。

さてここで、任意の複素数 z (上の z とは関係がない)に対する \log の性質

$$\log z = \log |z| + i \arg z \quad (1.56)$$

を用いる。ここで $|z|$ は z の絶対値、 $\arg z$ は z を極座標表示 $z = re^{i\theta}$ としたときの偏角 θ である。つまり $|z| = r$ 、 $\arg z = \theta$ である。関係式(1.56)は \log 関数の基本的性質 $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$ を用いて、次のように導くことができる。

$$\log re^{i\theta} = \log r + \log e^{i\theta} = \log r + i\theta = \log |z| + i \arg z \quad (1.57)$$

$\log z$ の虚数部は z の偏角に等しいことが分かったので、(1.55)により $g_\infty(\theta)$ は

$$\frac{1}{2} \{ \log(1+e^{i\theta}) - \log(1-e^{i\theta}) \} = \frac{1}{2} \log \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} \quad (1.58)$$

という複素数の偏角で与えられる。

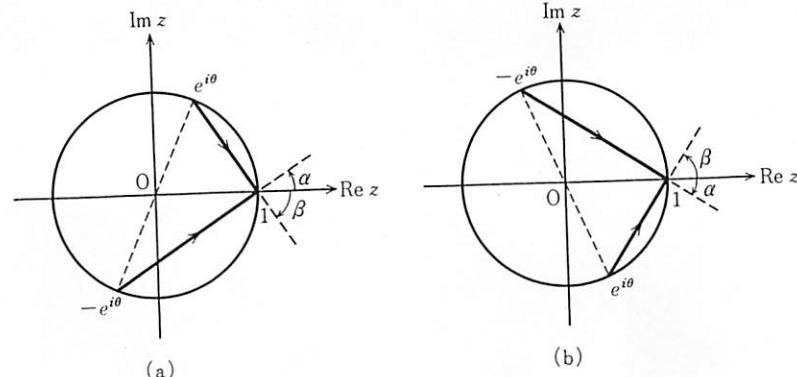


図 1-8

さて、ガウスの複素平面上に単位円を書くと、その円周上偏角 θ の位置で $e^{i\theta}$ が表わされる(図 1-8 参照). 図のように角度 α, β を定義する. 図 1-8(a)は $0 < \theta < \pi$ の場合を、図 1-8(b)は $-\pi < \theta < 0$ の場合を表わし、いずれの場合も

$$\arg \log(1+e^{i\theta}) = \alpha, \quad \arg \log(1-e^{i\theta}) = \beta$$

で与えられる. $\pi > \theta > 0$ なら $\alpha > 0, \beta < 0$ であり、 $-\pi < \theta < 0$ なら $\alpha < 0, \beta > 0$ である. 図中で 2 つの直線に付けられた矢印は $1-e^{i\theta}$ とか $1+e^{i\theta}=1-(-e^{i\theta})$ で与えられるガウス平面上でのベクトルの方向を示している. 明らかに 2 つともベクトルは直交しているので

$$\begin{cases} \alpha - \beta = \frac{\pi}{2} & (0 < \theta < \pi) \\ \alpha - \beta = -\frac{\pi}{2} & (-\pi < \theta < 0) \end{cases}$$

を結論できる. (1.55)に戻れば

$$g_\infty(\theta) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & (0 < \theta < \pi) \\ -\frac{\pi}{4} & (-\pi < \theta < 0) \end{cases}$$

となって、もとの関数(1.48)を再現している.

$\theta=0, \pi$ のときは図 1-8(a), (b)の直角三角形の 1 辺の長さがゼロとなって、上の議論は使えなくなる. このことは、もとに戻って(1.49)の $n \rightarrow \infty$ の極限で現われるギブス現象とも関係している.

解析的に和をとることができると例として $g_\infty(x)$ を考えたが、この方法はたまたま使えたのであって、もっと一般的に「フーリエ級数はもとの関数を再現するか」という問題を考えたい. そのため次章の 2-1 節で、すこし数学的にはなるが、一般的な議論を展開することにする.

留数定理と無限和 最後に留数定理を用いてフーリエ級数の無限和をとる方法を紹介しよう. すこし計算は複雑になるが、この方法も応用範囲の広い興味深い手法である. 例えばこの方法によると、この章に出てきた多くの式を別途証明できる.

例として(1.22)を考えよう. 次の式から出発する.

$$\sum_{m=0,1,2,\dots} \frac{(-1)^m}{2m+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

$$\sum_{m=-1,-2,\dots} \frac{(-1)^m}{2m+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

この両者を加えて 2 で割ると

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{1}{2} \sum_{m=0,\pm 1,\dots} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

さて、 z を複素数として、関数

$$\frac{1}{e^{iz} + 1}$$

を考えると、これは $z = n$ ($n = \pm 1, \pm 3, \dots$) のところに 1 位の極をもっている.

そしてその留数は

$$\lim_{z \rightarrow n} \frac{z-n}{e^{iz} + 1} = \lim_{z \rightarrow n} \frac{\frac{d}{dz}(z-n)}{\frac{d}{dz}(e^{iz} + 1)} = \frac{i}{\pi}$$

である. ここで極限に関するド・ロピタル(de L'Hospital)の定理を用いた.

ここで、複素積分に対するコーシー(Cauchy)の積分定理(留数の定理)を必要とするので、その内容を証明なしに紹介する。

留数の定理 複素平面上の関数 $f(z)$ が $z=a$ において m 位の極を有する場合を考えると、

$$f(z) = \frac{R_m}{(z-a)^m} + \frac{R_{m-1}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{R_2}{(z-a)^2} + \frac{R_1}{z-a} + \tilde{f}(z)$$

と書ける。ここで $\tilde{f}(z)$ は $z=a$ で正則である。このとき

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = R_1$$

が成立する。ここで C は $z=a$ を内部に含む閉曲線で、この中には $z=a$ 以外に特異点はないとする。 C の方向は内部を左に見る、つまり反時計まわりとする(図 1-9 参照)。

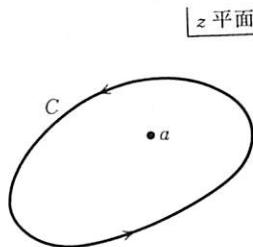


図 1-9

この定理を用いると、次のように複素積分で、無限級数を表わすことができるのである：

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} \frac{i}{4} \frac{1}{z} \frac{e^{\frac{i\pi}{2}z}}{e^{iz} + 1} dz$$

積分路 C_n は図 1-10 のように $z = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \pm (2n-1)$ のまわりを反時計まわりにまわる小さな閉曲線の和である。分子の因子 $e^{\frac{i\pi}{2}z}$ は左辺に符号が交代して現われる(交代級数)ことを保証するために必要である。

まず n を有限としておいて最後に $n \rightarrow \infty$ の極限をとることにする。次に C_n を図 1-11 のように変形する。このようにしても積分の値が変わらないことは、図 1-11 のような合成された 1 つの閉曲線の中の特異点は図 1-10 の小さな閉曲

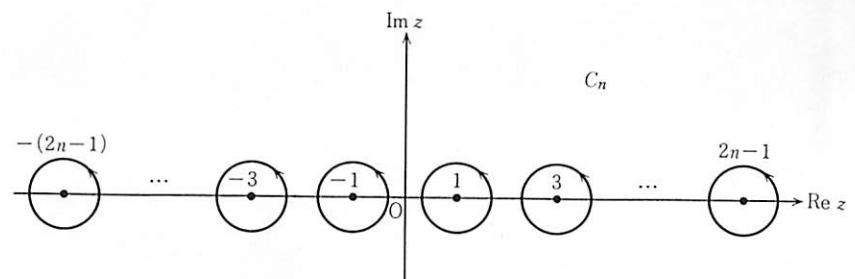


図 1-10

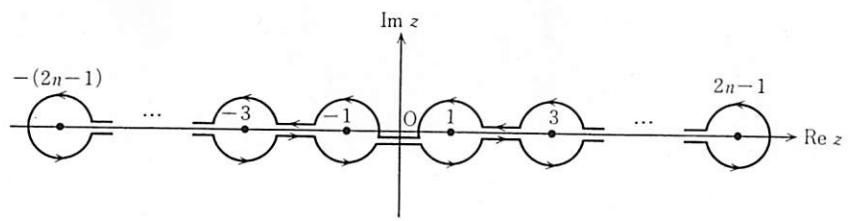


図 1-11

線の中の特異点と変わらないからである。原点 $z=0$ は上の積分表示の被積分関数に $1/z$ があるため特異点となっているので、図 1-11 では原点を閉曲線内に取りこまないようにしてある。

ここで図 1-12 のように \bar{C}_{n+} と \bar{C}_{n-} を加えて上半面と下半面の 2 つの閉曲線 C_{n+}, C_{n-} をつくる。 $\bar{C}_{n\pm}$ は半径 $2n$ の半円で $n \rightarrow \infty$ とともに $\bar{C}_{n\pm}$ 上の複素積分はゼロへいくことが証明できれば、つまり

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bar{C}_{n\pm}} \frac{e^{\frac{i\pi}{2}z}}{e^{iz} + 1} \frac{dz}{z} = 0$$

がいえれば、

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{C_{n+}} + \int_{C_{n-}} \right)$$

となる。ここで C_{n+} (C_{n-}) は上(下)半平面内の曲線すべてを表わすので、お

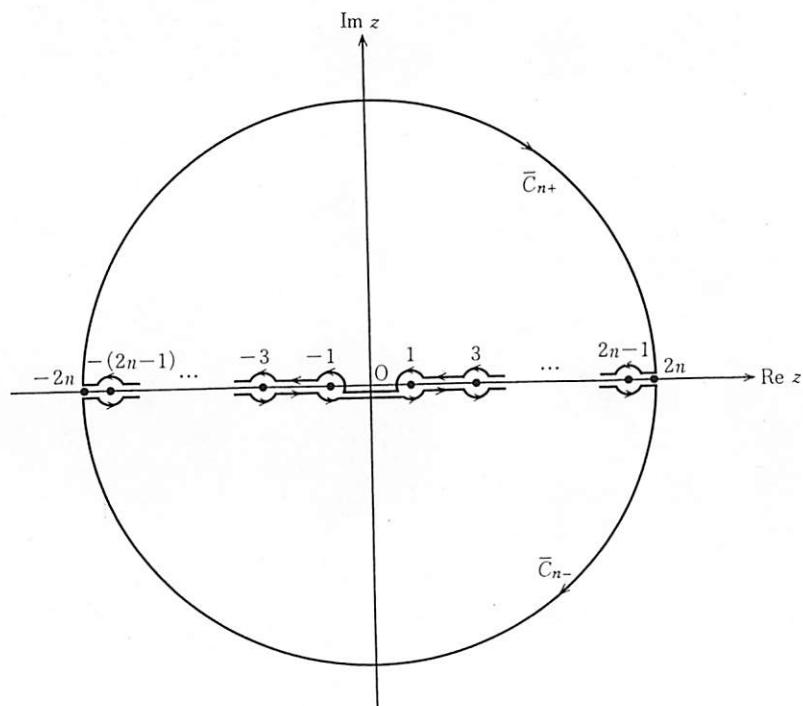


図 1-12

のおの閉じた曲線をつくる。

ここでふたたび留数定理を用いると、閉曲線内の1位の極のみが積分に効く。それは $z=0$ の1位の極であって、 C_{n+} 内にある。よって

$$\int_{C_{n-}} = 0, \quad \int_{C_{n+}} = \frac{i}{4} \cdot \frac{1}{2} 2\pi i (-1) = \frac{\pi}{4}$$

を得る。 $\int_{C_{n+}}$ に現われる最後の -1 は、積分が時計まわりだからである。結局、 $n \rightarrow \infty$ として

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

を得た。

$\bar{C}_{n\pm}$ 上の積分がゼロへいくこと このことを厳密に証明するには、すこしこみ入った議論が必要である。(最初に読むときはとばしてもよい。) まず \bar{C}_{n+} について考える。 $z = R_n e^{i\theta}$ ($R_n = 2n$, $0 \leq \theta \leq \pi$) とおくと、積分は

$$\int_0^\pi \frac{e^{\frac{\pi}{2}iR_n \cos \theta} e^{-\frac{\pi}{2}R_n \sin \theta}}{e^{\pi iR_n \cos \theta} e^{-\pi R_n \sin \theta} + 1} id\theta$$

$0 < \theta < \pi$ では $\sin \theta > 0$ のため、 $n \rightarrow \infty$ つまり $R_n \rightarrow \infty$ では分子の $e^{-\frac{\pi}{2}R_n \sin \theta}$ がゼロへいくので、この積分はゼロへいくことが予想される。しかし θ が 0 と π の近くで $\sin \theta$ が小さいので、本当にゼロとなるのかどうか、不安である。そこで θ を 0 と π の近くの領域とそれ以外の領域とに分ける。

$$\int_0^\pi (\dots) d\theta = \int_0^{\varepsilon_n} (\dots) d\theta + \int_{\varepsilon_n}^{\pi - \varepsilon_n} (\dots) d\theta + \int_{\pi - \varepsilon_n}^\pi (\dots) d\theta$$

ここで $\varepsilon_n = \frac{a}{R_n^\alpha}$ にとると便利である。ただし $1/2 < \alpha < 1$ とする。 $a > 0$ はある定数である。領域 $\varepsilon_n < \theta < \pi - \varepsilon_n$ では

$$R_n \sin \theta > R_n \sin \frac{a}{R_n^\alpha} \xrightarrow[R_n \rightarrow \infty]{} a R_n^{1-\alpha}$$

であるから

$$e^{-\frac{\pi}{2}R_n \sin \theta} \xrightarrow[R_n \rightarrow \infty]{} 0, \quad e^{-\pi R_n \sin \theta} \xrightarrow[R_n \rightarrow \infty]{} 0$$

よって

$$\lim_{R_n \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon_n}^{\pi - \varepsilon_n} (\dots) d\theta = 0$$

次に $\int_0^{\varepsilon_n} (\dots) d\theta$ を考えよう。この領域の上端 $\theta = \varepsilon_n$ では

$$R_n \cos \theta = R_n \cos \frac{a}{R_n^\alpha} \xrightarrow[R_n \rightarrow \infty]{} R_n \left(1 - \frac{a^2}{R_n^{2\alpha}}\right) \xrightarrow[R_n \rightarrow \infty]{} R_n = 2n$$

となる。これは下端 $\theta = 0$ での $R_n \cos \theta$ の値に等しい。よってこの領域では $R_n \cos \theta = 2n$ とおいてよく $e^{i\pi R_n \cos \theta} = 1$ となる。

$$\lim_{R_n \rightarrow \infty} \int_0^{\varepsilon_n} (\dots) d\theta = \lim_{R_n \rightarrow \infty} \int_0^{\varepsilon_n} \frac{(-1)^n e^{-\frac{\pi}{2}R_n \sin \theta}}{1 + e^{-\pi R_n \sin \theta}} d\theta$$

ここまでくると、分母がゼロになる心配はないことが分かる。 $R_n \rightarrow \infty$ で $\varepsilon_n \rightarrow 0$

であるから積分範囲がゼロへいくので、 $\int_0^{\epsilon_n} (\dots) d\theta$ は実際ゼロに近づく。残りの積分 $\int_{\pi-\epsilon_n}^{\pi} (\dots) d\theta$ についても同様に議論できる。さらに \bar{C}_{n+} については積分を

$$\int_{\bar{C}_{n+}} \frac{i}{4} \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}z}}{e^{-iz}+1} dz$$

と書いて $-z=z'$ と変換すれば \bar{C}_{n+} のときと同様にできる。

1-4 フーリエ級数の応用——常微分方程式

フーリエ級数の応用の1つとして、微分方程式の解をフーリエ級数の形で求めよう。この節では力学でよく現われる例をとて考えることにする。

質量 m の質点がばね定数 k のばねの先にとりつけてある。さらに外から時間 t に関して周期的な力 $F(t)$ がかかっているとする。質点の位置座標をばねの自然長からのずれとして測って $x(t)$ とする。ニュートン(Newton)の運動方程式は次のように書ける。

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = -kx(t) + F(t) \quad (1.59)$$

ここで、 m で両辺を割って $k/m=\omega^2$, $F(t)/m=f(t)$ とおくと

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \omega^2 x(t) = f(t) \quad (1.60)$$

$f(t)$ を周期 T の周期関数としてフーリエ展開する。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} t \right) \quad (1.61)$$

さて微分方程式の一般論から、(1.59)の一般解は、(1.59)で $f(t)=0$ とした齊次方程式

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (1.62)$$

の一般解 $x_0(t)$ と、非齊次方程式(1.59)の特殊解 $\tilde{x}(t)$ の和で書ける。

$$x(t) = x_0(t) + \tilde{x}(t) \quad (1.63)$$

$x_0(t)$ は2つの独立な解をもち、いまの場合は $\sin \omega t$ と $\cos \omega t$ の1次結合である。結局

$$x(t) = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t + \tilde{x}(t) \quad (1.64)$$

が(1.59)の一般解となる。 c_1, c_2 は初期条件を2つ与えれば決まる。 $\tilde{x}(t)$ の方は(1.59)の任意の解を1つ取ってくればよいのである。

以下は初期条件によらない $\tilde{x}(t)$ について着目する。 $\tilde{x}(t)$ も $f(t)$ と同じ周期 T の周期関数であると仮定して解をさがす。見つかりさえすればそれでよいのである。そこで

$$\tilde{x}(t) = \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n' \cos \frac{2n\pi}{T} t + b_n' \sin \frac{2n\pi}{T} t \right) \quad (1.65)$$

と仮定してみる。項別微分を許すとして

$$\frac{d^2 \tilde{x}(t)}{dt^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\left(\frac{2n\pi}{T}\right)^2 \left(a_n' \cos \frac{2n\pi}{T} t + b_n' \sin \frac{2n\pi}{T} t \right) \right\} \quad (1.66)$$

(1.61), (1.65), (1.66)を(1.60)に代入して

$$\begin{aligned} \omega^2 \frac{a_0'}{2} - \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} & \left\{ \left(-\left(\frac{2n\pi}{T}\right)^2 + \omega^2 \right) a_n' - a_n \right\} \cos \frac{2n\pi}{T} t \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(-\left(\frac{2n\pi}{T}\right)^2 + \omega^2 \right) b_n' - b_n \right\} \sin \frac{2n\pi}{T} t = 0 \end{aligned} \quad (1.67)$$

これがすべての t で成立するので、次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} a_0' &= \frac{a_0}{\omega^2} \\ a_n' &= \frac{1}{\omega^2 - \left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2} a_n \quad (n \geq 1) \end{aligned} \quad (1.68)$$

$$b_n' = \frac{1}{\omega^2 - \left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2} b_n \quad (n \geq 1)$$

(1.68)は(1.63)の両辺に $m=0, 1, 2, \dots$ として $\cos \frac{2m\pi}{T} t, \sin \frac{2m\pi}{T} t$ を掛けて、 t について0から T まで積分しても得ることができる。(1.68)をふたたび(1.65)に代入すれば、求める $\tilde{x}(t)$ が得られる。具体例をいくつか見てみよう。

[例 1]

$$f(t) = f_0 \sin \omega_0 t \quad (1.69)$$

これは周期 $2\pi/\omega_0 \equiv T$ の周期関数である。このとき(1.7b), (1.6b, c)から $b_1 = f_0$ 以外はすべてゼロである。よって(1.68)を用いると(1.65)においても b_1' 以外はすべてゼロであることが分かる。 $\omega \neq \omega_0$ とすると $b_1' = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2}$ 。よって

$$\ddot{x}(t) = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin \omega_0 t \quad (1.70)$$

$\ddot{x}(t)$ は外力 $f(t)$ と同じ振動数で振動している。

$\omega = \omega_0$ のときは(1.70)はそのままでは使えない。このことはいわゆる共鳴に對応していて、別に取り扱う必要がある。まず(1.64)で与えられる一般解のうち $c_1 \sin \omega t$ から一部借りてきて $\ddot{x}(t)$ の方へ入れて $\omega \rightarrow \omega_0$ の極限がとれるようになる。こうしても(1.60)の解であることには変わりない。そこで

$$\ddot{x}(t) = \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin \omega_0 t - \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin \omega t \quad (1.71)$$

を考えれば、これも(1.60)の解である。ここで $\omega \rightarrow \omega_0$ とすると

$$\ddot{x}(t) = \frac{-f_0}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t \quad (1.72)$$

これが共鳴をあらわす解であり、 t が大きくなると振幅がどんどん大きくなる。

[例 2] 1-2 節の例 1 をとり上げる。 t の 1 周期を $-T/2 < t < T/2$ に変更して、次の $f(t)$ を考える。

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (0 < t < T/2) \\ 0 & (-T/2 < t < 0) \end{cases} \quad (1.73)$$

もちろんこれを周期的に $-\infty < t < \infty$ へ拡張したものを考えるのである。

(1.20a), (1.20b)から、 $\omega_0 = 2\pi/T$ として

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} dx = 1, & a_n &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \cos n\omega_0 t dt = 0 \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \sin n\omega_0 t dt = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \end{aligned} \quad (1.74)$$

よって ω が $n\omega_0$ のどれとも等しくないときは

$$a_0' = \frac{1}{\omega^2}, \quad a_n' = 0, \quad b_n' = \frac{1}{\pi} \frac{1 - (-1)^n}{n(\omega^2 - n^2\omega_0^2)}$$

で与えられる。このとき

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= \frac{1}{2\omega^2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n(\omega^2 - n^2\omega_0^2)} \sin n\omega_0 t \\ &= \frac{1}{2\omega^2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin n\omega_0 t}{n(\omega^2 - n^2\omega_0^2)} \end{aligned} \quad (1.75)$$

という形に求まる。このままの形で n についての和をとることはすこし複雑な計算を必要とするので、ここでは $\omega = 0$ の場合を考えよう。 $\omega \neq 0$ については第 3 章の 3-3 節で例 4 として議論する。

(1.75)において $\omega \rightarrow 0$ の極限をとると $1/2\omega^2$ の項のため、困ったことになる。これは例 1 で $\omega \rightarrow \omega_0$ としたとき(1.70)に無限大が現われたという事情とよく似ている。そこで次のように変数を変える。まず(1.60)で $\omega = 0$ として

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = f(t) = \frac{1}{2} + \left(f(t) - \frac{1}{2} \right) \quad (1.76)$$

を考えよう。便宜上、 $1/2$ を $f(t)$ から分離して、 $f(t)$ が中心値を $1/2$ としてこのまわりに振動しているようにした。さて $y(t)$ として

$$x(t) = y(t) + \frac{t^2}{4} \quad (1.77)$$

を導入すると、 $y(t)$ の微分方程式は

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = f(t) - \frac{1}{2} \quad (1.78)$$

となる。ここで $f(t) - 1/2$ をフーリエ級数に展開しよう。 $x = 2\pi t/T$ と考えれば、(1.21)から $\omega_0 = 2\pi/T$ を考慮して

$$f(t) - \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin n\omega_0 t}{n} \quad (1.79)$$

のように求まる。(1.78)の特殊解を

$$y(t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t \quad (1.80)$$

の形の中でさがそう。 (1.80)を(1.78)へ代入して(1.79)を用いると

$$-n^2\omega_0^2 b_n = \frac{2}{\pi} \frac{1}{n}$$

つまり

$$b_n = -\frac{2}{\pi\omega_0^2} \frac{1}{n^3} \quad (1.81)$$

を得る。こうして $x(t)$ へもどれば

$$x(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{2}{\pi} \frac{1}{\omega_0^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin n\omega_0 t}{n^3} \quad (1.82)$$

となった。この式を(1.75)で $\omega \rightarrow 0$ としたものと比べると、

$$\frac{1}{2\omega^2} \rightarrow \frac{t^2}{4}$$

と置き代っていることが分かる。この t のベキの振舞いは共鳴に特徴的なことであって、(1.72)でも現わされた。

じつは(1.82)の無限和はこれまでの知識で計算できるのである。まず(1.79)を $0 < t < \pi/\omega_0$ で考えよう。この範囲では

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin n\omega_0 t}{n} = \frac{1}{2} \quad (1.83)$$

である。 $0 < t < \pi/\omega_0$ として(1.83)の両辺を 0 から t まで積分する。

$$-\frac{2}{\pi} \frac{1}{\omega_0} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos n\omega_0 t - 1}{n^2} = \frac{1}{2} t$$

ここで(1.30)を用いて

$$-\frac{2}{\pi} \frac{1}{\omega_0} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos n\omega_0 t}{n^2} = \frac{1}{2} t - \frac{\pi}{4\omega_0} \quad (1.84)$$

となる。さらにこの式を t について 0 から t まで積分して

$$-\frac{2}{\pi} \frac{1}{\omega_0^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin n\omega_0 t}{n^3} = \frac{1}{4} t^2 - \frac{\pi}{4\omega_0} t$$

を得るが、この関数が t の奇関数であることを用いて、 $-\pi/\omega_0 < t < 0$ へ拡張する。このようにして

$$g(t) \equiv -\frac{2}{\pi} \frac{1}{\omega_0^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin n\omega_0 t}{n^3}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4} t \left(t - \frac{\pi}{\omega_0} \right) & \left(0 < t < \frac{\pi}{\omega_0} \right) \\ -\frac{1}{4} t \left(t + \frac{\pi}{\omega_0} \right) & \left(-\frac{\pi}{\omega_0} < t < 0 \right) \end{cases} \quad (1.85)$$

という結果に到達する。この関数を図 1-13 に示した。そこでは周期 $2\pi/\omega_0$ を利用してすべての t について書いてある。

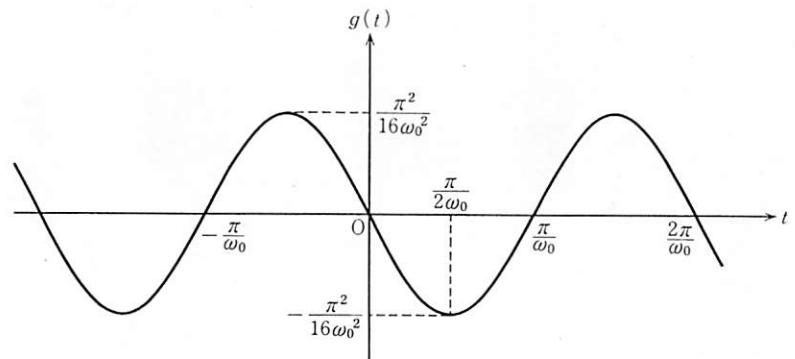


図 1-13

結局(1.76)の一般解は、

$$x(t) = At + B + \frac{t^2}{4} + g(t) \quad (1.86)$$

となる。この解をよく見ると $f(t)=1$ の領域つまり

$$\frac{2m}{\omega_0}\pi < t < \frac{2m+1}{\omega_0}\pi \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

では $x(t)$ の t^2 の係数は $\frac{1}{2}$ となり、 $f(t)=0$ の領域つまり

$$\frac{2m-1}{\omega_0}\pi < t < \frac{2m}{\omega_0}\pi \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

では $x(t)$ の t^2 の係数はゼロ、すなわち $x(t)$ は t の 1 次式である。このこと

は、じつは微分方程式を解くこともなくいえるのであるが、ここでは微分方程式をフーリエ級数で解くという練習問題として取り上げた。

(1.86)の A, B は初期条件で決まる。いま特に

$$t = 0 \text{ で } x(t) = 0, \quad \frac{dx(t)}{dt} = 0$$

という初期条件をとってみる。

$$t = 0 \text{ で } g(t) = 0, \quad \frac{dg(t)}{dt} = -\frac{\pi}{4\omega_0}$$

であるから、 $A = \pi/4\omega_0, B = 0$ となり

$$x(t) = \frac{\pi}{4\omega_0}t + \frac{1}{4}t^2 + g(t) \quad (1.87)$$

と求まる。物理的にいえば、(1.76)は外力 $f(t)$ のもとでの質点の運動を表すニュートン方程式であるから、その解 $x(t)$ は

$$\frac{2m}{\omega_0}\pi < t < \frac{2m+1}{\omega_0}\pi \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

では加速度 1 の等加速度運動を、

$$\frac{2m-1}{\omega_0}\pi < t < \frac{2m}{\omega_0}\pi \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

では等速運動をしている。

第1章演習問題

[1] $-\pi < x < \pi$ を 1 周期とする周期関数

$$f(x) = x^3 - \pi^2 x \quad (-\pi < x < \pi)$$

について、以下のことを示しなさい。

- (a) $f(x)$ のフーリエ級数展開を求めなさい。
- (b) 前問(a)を利用して、次の級数和の公式を示しなさい。

$$\frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots$$

[2] 1-3 節の最後に紹介した複素積分の方法を用いて、次の等式を証明しなさい。

$$(a) \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

$$(b) \frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

$$(c) \frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

$$(d) \frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots$$

[3] $k=2, 4, 6, \dots$ として

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots$$

に対する公式をつくり、 $k=2, 4$ について具体的に書きなさい。

[4] 1-4 節の式(1.60)を拡張して、抵抗 γ の入った方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = f_0 \sin \omega_0 t$$

を考える。ただし $\gamma > 0$ とする。

- (a) フーリエ級数の方法で一般解を求めなさい。
- (b) $t \rightarrow \infty$ での $x(t)$ の振舞いを調べなさい。

2 フーリエ級数の性質

フーリエ級数のもつ数学的な性質をいくつか議論する。まずフーリエ級数を論ずる際もっとも大切な課題、つまりフーリエ級数はもとの関数を表わしているのかという問題を一般的に調べる。この問題は第1章では例を用いて議論した。

バーシバルの等式、項別微分積分に関する知識を得た後、超関数であるディラックの δ 関数について学ぶ。 δ 関数はフーリエ級数を論ずる際に欠かすことのできない便利な関数であるが、見なれた関数とは異なるものであるので、詳しく述べることにしよう。そして関数の不連続点で起こる奇妙な現象(ギブス現象)について調べる。

2-1 フーリエ級数はもとの関数を一般に再現するか

前章の1-3節では例をとってフーリエ級数がたしかにもとの関数を再現することをみた。この節では一般的な証明を考えよう。 $f(x)$ を、証明のできる範囲の関数に制限する。

まず区分的になめらかという概念を導入しよう。図2-1のように区間 $[a, b]$ で定義された関数 $f(x)$ を考える。 $f(x)$ は有限個の小さな区間内ではその微分 $f'(x)$ が連続であるとする。そして不連続点 d_1, d_2, \dots, d_n の両側の極限値 $f(d_i \pm 0), f'(d_i \pm 0)$ は有限であるとする。ただし不連続点の右と左、つまり $+0$ と

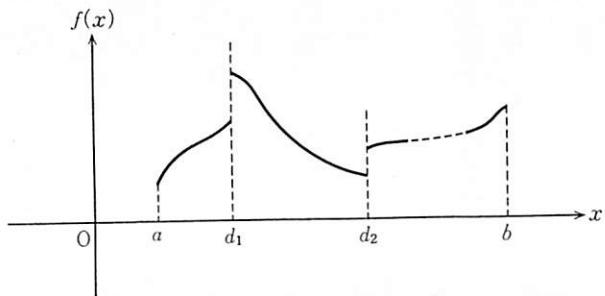


図 2-1

-0 とで $f(x)$ あるいは $f'(x)$ の値が異なっていてよい。ここで次の定理を証明しよう。

定理 2-1 区分的になめらかな周期関数のフーリエ級数は

(1)連続な点ではその関数値へ収束する。

(2)不連続な点ではその両側の極限値の相加平均へ収束する。

定理の内容を式で書こう。 $f(x)$ の周期を 2π として $-\pi < x < \pi$ で考える。フーリエ係数(1.15a), (1.15b)をつくる。

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (2.1)$$

そして

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (2.2)$$

またはその複素表示(1.17), (1.18)より

$$S_N(x) = \sum_{n=0, \pm 1, \dots, \pm N} c_n e^{inx} \quad (2.3)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (2.4)$$

を考える。こうすると上記の定理は、(1), (2)をまとめて

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)) \quad (2.5)$$

と書ける。

[証明] まず $S_N(x)$ を(2.3)の形で書いて、(2.4)を代入する。

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \sum_{n=\pm 1, \dots, \pm N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{n=0, \pm 1, \dots, \pm N} e^{in(x-y)} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+y) \sum_{n=0, \pm 1, \dots, \pm N} e^{-iny} dy \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここで、 $y-x$ を改めて y とおいた。いま

$$D_N(y) = \sum_{n=0, \pm 1, \dots, \pm N} e^{iny} \quad (2.7)$$

と定義すると、 $D_N(y) = D_N(-y)$, $D_N(y+2\pi) = D_N(y)$ である。さらに $f(x+y)$ も y の周期 2π の周期関数であるから、(2.6)はさらに書き変えられて

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) D_N(y) dy \quad (2.8)$$

となる。等比数列(2.7)は次の性質をもつ。

$$D_N(y) = \frac{e^{-iNy} - e^{i(N+1)y}}{1 - e^{iy}} = \frac{\sin((N+1/2)y)}{\sin(y/2)} \quad (2.9)$$

$$\int_0^\pi D_N(y) dy = \pi \quad (2.10)$$

(2.10)は(2.9)から出る。または(2.7)に公式

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{iny} dy = \begin{cases} 0 & (n \neq 0) \\ 2\pi & (n=0) \end{cases}$$

と、 $D_N(y)$ が偶関数であることを適用しても出せる。さて(2.6), (2.8), (2.10)を用いて、

$$S_N(x) = \frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^\pi f(x+y) D_N(y) dy - \pi f(x+0) \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 f(x+y) D_N(y) dy - \pi f(x-0) \right\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \{f(x+y) - f(x+0)\} D_N(y) dy \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \{f(x-y) - f(x-0)\} D_N(y) dy \tag{2.11}
 \end{aligned}$$

のように変形する。 (2.11)の最後の等式の第2項では $y \rightarrow -y$ と変数変換し $D_N(y) = D_N(-y)$ を使った。さて $N \rightarrow \infty$ で (2.11) の2つの項がともにゼロへいくことを示そう。まず第1項について考える。 $D_N(y)$ に (2.9) を代入すると、 $0 < y < \pi$ として分子の $\sin(N+1/2)y$ を除いて

$$\frac{f(x+y) - f(x+0)}{2\pi \sin(y/2)} \equiv g_x(y) \tag{2.12}$$

という関数が現われる。 $g_x(y)$ は、 y が 0 へ右から近づいても $f(x)$ が区分的になめらかであるので、

$$\lim_{y \rightarrow +0} g_x(y) = \frac{1}{\pi} f'(x+0) \tag{2.13}$$

で与えられる有限値をとる。これは x が連続な点ではもちろんのこと、不連続点であっても成立する式である。そこで $g_x(y)$ を、 $0 < y < \pi$ で区分的に連続な関数として定義できる。

ここで閉区間 $[a, b]$ で $f(x)$ が区分的に連続であるとは、有限個の不連続点 d_i ($i = 1, 2, \dots, n$) を除いて、小さな区間内では $f(x)$ は連続で、不連続点 d_i で両側極限値 $f(d_i \pm 0)$ が存在することをいう。区分的になめらかな関数はもちろん区分的に連続である。その逆は正しくない。例として図 2-2 のような関数がある。この関数は $x=d$ を含む範囲で区分的に連続であるが $f'(d+0) = \infty$ ゆえ区分的になめらかではない。

このようにして関数 $f(y)$ が区分的になめらかなら $g_x(y)$ は区分的に連続であることが分かった。しかし $g_x'(y)$ は $y=0$ で $\frac{1}{2\pi} f''(x)$ となり、これは $f(x)$ の微分が不連続な点で無限大となるので、 $f(y)$ の区分的なめらかさは $g_x(y)$

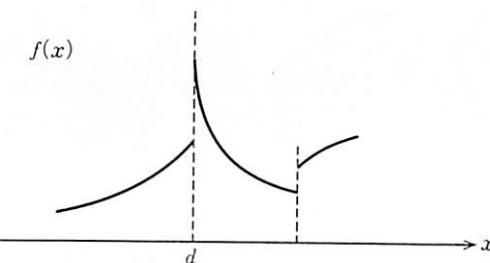


図 2-2

にはそのまま受け継がれてはいない。結局 $g_x(y)$ は図 2-2 のような形をしている。ここで横軸を y にとり $d=0$ と思えばよい。 $y=0$ 以外に不連続点が現われているが、これは (2.12) の定義において $f(x+y)$ が y のある値 (x に依存するような値) で不連続点をもってもよいからである。

さて $S_N(x)$ の $N \rightarrow \infty$ の極限を考える際、(2.11) の第1項から (2.9) を考慮して、

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi g_x(y) \sin\left(N + \frac{1}{2}\right) y dy \tag{2.14}$$

という項が現われる。ところがこれはすぐ後に述べるように、区分的に連続な関数に対するリーマンの補助定理に現われる形そのものである。以下で述べるようにそれによると (2.14) はゼロである。(2.11) の第2項についても同様に示せるので (2.11) は $N \rightarrow \infty$ でゼロ、つまり (2.5) が証明された。われわれはすでに 1-2 節のすべての例で (2.5) が成り立つことを検証すみである。■

さて、(2.5) の収束は x をある値に固定したときその x の各値で収束するものである。この意味で (2.5) は各点収束とよばれる。これに対し後で平均収束という概念が出てくる。

ここでリーマンの補助定理なるものを証明しよう。

リーマン(Riemann)の補助定理(リーマン-ルベーグ(Riemann-Lebesgue)の定理ともいう) 閉区間 $[a, b]$ で $f(x)$ は区分的に連続とする。このとき

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin Nx dx = 0 \tag{2.15}$$

が成立する。

[証明] 区間 $[a, b]$ をその中では連続ないいくつかの小区間に分けて考えればよいので、はじめから $[a, b]$ で $f(x)$ は連続としてよい。このような区間 $[a, b]$ を n 個の等間隔区間 $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 1, 2, \dots, n$) に分ける。間隔 Δ は $\frac{b-a}{n}$ である。

$$x_1 = a, \quad x_{k+1} - x_k = \Delta, \quad x_{n+1} = b \quad (2.16)$$

とおくと

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin Nx dx \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \sin Nx dx \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \sin Nx dx \right| \\ &= \sum_{k=1}^n \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \{f(x) - f(x_k)\} \sin Nx dx + f(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin Nx dx \right| \end{aligned} \quad (2.17)$$

ここで $f(x)$ が連続であるから、 $\epsilon > 0$ を与えたとき、 n を十分大きく選んで、 $x_k \leq x, x' \leq x_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) なら

$$|f(x') - f(x)| < \epsilon \quad (2.18)$$

とできる。 (2.18) を (2.17) へ代入する。

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin Nx dx \right| &\leq \sum_{k=1}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(x_k)| |\sin Nx| dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^n |f(x_k)| \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sin Nx dx \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \epsilon (x_{k+1} - x_k) + M \sum_{k=1}^n \frac{|\cos Nx_{k+1} - \cos Nx_k|}{N} \\ &\leq \epsilon (b-a) + \frac{2nM}{N} \end{aligned}$$

ここで $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$ とおいた。よって $N > \frac{2nM}{\epsilon}$ のとき、

$$\left| \int_a^b f(x) \sin Nx dx \right| \leq \epsilon (b-a+1)$$

$\epsilon \rightarrow 0$ は $N \rightarrow \infty$ に対応するので補助定理が証明された。■

なお上の結論は $\sin Nx$ を $\cos Nx$ に置きかえても成立することは、証明の道

筋から理解できると思う。よって

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos Nx dx = 0 \quad (2.19)$$

以下の節ではフーリエ級数に関して欠かせない重要な数学的性質をいくつか調べることにする。

2-2 パーシバルの等式と完全性

関数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots \quad (2.20)$$

は(2.5)の意味で任意の区分的になめらかな関数を再現しうることを見た。これはそのような関数を展開するとき(2.20)以外のものは必要がないということを意味している。ちょうど線形ベクトル空間で(2.20)がすべての基底ベクトルを尽していて、その空間内の任意のベクトルは(2.20)の線形結合で表わされるという事実に対応している。この空間は基底ベクトルが無限個あるので無限次元である。線形ベクトル空間との対応は第4章でくわしく議論する。以下ではこれまでの議論に沿って、区分的に連続な関数を考える。

$f(x), g(x)$ を2つの区分的に連続な実数値関数とし、その内積を

$$\langle f | g \rangle \equiv \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx \quad (2.21)$$

と定義する。もちろん積分は収束する場合のみを考える。(2.21)の左辺の記号の由来については第4章で述べる。この内積の意味で(2.20)の関数系は互いに直交している。さらに自分自身との内積の平方根をノルム(norm)とよび、次のように書く。

$$\|f\| = \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \right\}^{1/2} = \sqrt{\langle f | f \rangle} \quad (2.22)$$

ノルムが1の関数は正規化されている(normalized)という。(2.20)を正規化して、 $u_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots$) のように名前をつける。

$$u_i(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \quad (2.23)$$

こうすると、関数列 $u_i(x)$ は次のように正規直交関数系をなす。

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_n(x) u_m(x) dx = \langle u_n | u_m \rangle = \delta_{nm} \quad (2.24)$$

ここで δ_{nm} はクロネッカーデルタとよばれるもので、

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & (n=m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \quad (2.25)$$

で定義される。 $u_i(x)$ を用いると、フーリエ展開は

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x) \quad (2.26a)$$

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) u_n(x) dx = \langle f | u_n \rangle \quad (2.26b)$$

と書ける。上のような概念を用いてフーリエ級数のもつ1つの性質を調べよう。まず勝手な実数 α_n を用いて有限和 $\sum_{n=1}^N \alpha_n u_n(x)$ をつくる。そしてこれも勝手な関数 $f(x)$ との差のノルムの2乗を考える。

$$\begin{aligned} J &\equiv \left\| f(x) - \sum_{n=1}^N \alpha_n u_n(x) \right\|^2 \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \sum_{n=1}^N \alpha_n u_n(x) \right\}^2 dx \\ &= \langle f | f \rangle - 2 \sum_{n=1}^N \alpha_n \langle f | u_n \rangle + \sum_{n,m=1}^N \alpha_n \alpha_m \langle u_n | u_m \rangle \\ &= \langle f | f \rangle - 2 \sum_{n=1}^N \alpha_n c_n + \sum_{n=1}^N \alpha_n^2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

ここで(2.24), (2.26b)を用いた。さて J は次のように変形できる。

$$J = \langle f | f \rangle - \sum_{n=1}^N c_n^2 + \sum_{n=1}^N (\alpha_n - c_n)^2 \quad (2.28a)$$

$$\geq \langle f | f \rangle - \sum_{n=1}^N c_n^2 \quad (2.28b)$$

ここで(2.28b)の等号は $\alpha_n = c_n$ のときである。つまり $f(x)$ を $\sum_{n=1}^N \alpha_n u_n(x)$ で

近似するとき $\alpha_n = c_n$ にとれば J を最小にするという意味で最もよい近似となる。フーリエ級数は最良近似の性質をもっているのである。

さてすべての α_n で $J \geq 0$ であるから、 $\alpha_n = c_n$ でも $J \geq 0$ 、つまり(2.28a)から

$$\langle f | f \rangle \geq \sum_{n=1}^N c_n^2 \quad (2.29)$$

ここでは $\langle f | f \rangle$ が有限の場合のみを考えているので、(2.29)により $\sum_{n=1}^N c_n^2$ は $N \rightarrow \infty$ で収束することが分かり、

$$\langle f | f \rangle \geq \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \quad (2.30)$$

これをベッセル(Bessel)の不等式とよぶ。さらに $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ が存在することから

$$\lim_{N \rightarrow \infty} c_N = 0 \quad (2.31)$$

これを具体的に書けば

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos Nx dx &= 0 \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin Nx dx &= 0 \end{aligned}$$

これは(2.15), (2.19)すでに現われたリーマンの補助定理と一致している。

正規直交系 $u_n(x)$ が完全系をなしているとは、(2.30)の等号が任意の $f(x)$ について成立するときをいう。このとき

$$\langle f | f \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \quad (2.32)$$

この条件を完備性(完全性)の条件といい、(2.32)をパーシバル(Parseval)の等式とよぶ。もし(2.32)が成立していると、(2.23)で与えられる $u_n(x)$ にさらに直交する連続関数 $v(x)$ は存在しないことになる。なぜなら(2.26b)の f を v と考えて、 $c_n = \langle v | u_n \rangle = 0$ ($n = 1, 2, \dots$)、よって(2.32)より $\langle v | v \rangle = 0$ 。 $v(x)$ が連続関数なら $v(x) \equiv 0$ 。

ここで次のことに注意しよう。 $\int_{-\pi}^{\pi} v^2(x) dx = 0$ から $v(x) = 0$ が出るのは $v(x)$ が連続関数のときである。もし $v(x)$ に不連続性を許すと、例えば図2-3

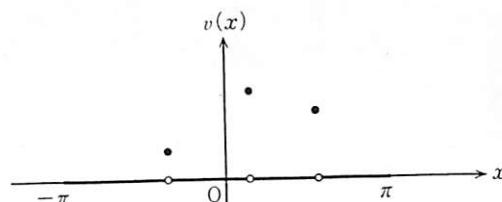


図 2-3

のようなゼロでない関数が存在する。

さて(2.32)が成立しているかどうかを、1-2節の例で見ていくことにしよう。

[1-2節例2] (1.23)から

$$\langle f | f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^3$$

一方、(1.24)から(または(1.26)から) b_n と c_n の間に $\sqrt{\pi}$ の違いがあることに注意して

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\sqrt{\pi}}{n}\right)^2 = 4\pi \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{2}{3}\pi^3$$

ここで

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \quad (2.33)$$

を用いた(第1章演習問題[2](c)参照)。よって(2.32)は成立している。

[1-2節例3] (1.27)から

$$\langle f | f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^3$$

一方、(1.28a), (1.28b)から

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \left(\frac{\pi\sqrt{2\pi}}{2}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{\pi}}{\pi}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots\right)$$

ここで

$$\frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \quad (2.34)$$

を用いると(第1章演習問題[2](d)参照)，

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \frac{\pi^3}{2} + \frac{\pi^3 \times 16}{96} = \frac{2}{3}\pi^3$$

となり、やはり(2.32)を満たしている。

最後に平均収束と各点収束の違いについて述べよう。(2.32)を積分で書けば，
 $S_N(x) = \sum_{n=1}^N c_n u_n(x)$ とおいて

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) - S_N(x)\}^2 dx = 0 \quad (2.35)$$

となるが、このことは(2.5)の各点収束

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = f(x) \quad (2.36)$$

とは異なる。

平均収束 (2.35)が成立するとき， $S_N(x)$ は $N \rightarrow \infty$ で $f(x)$ に平均収束するという。差の関数のノルムがゼロへいくのである。(2.35)と(2.36)が異なるのは、例えば次の関数を考えてみれば分かる。

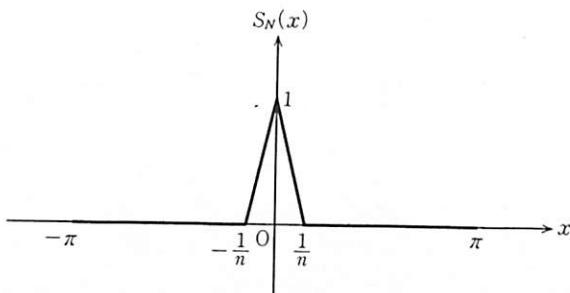


図 2-4

$$S_N(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi < x < -\frac{1}{N}, \frac{1}{N} < x < \pi) \\ N|x - \frac{1}{N}| & (-\frac{1}{N} < x < \frac{1}{N}) \end{cases}$$

これは図 2-4 のような関数で、 $N \rightarrow \infty$ の極限で

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases} \quad (2.37)$$

となる。 $f(x) \equiv 0$ にとると

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) - S_N(x)\}^2 dx = 0$$

つまり $S_N(x)$ は平均収束の意味では $f(x) \equiv 0$ へ近づくが、各点収束の意味では(2.37)という別の関数へ近づく。

ここでは 1-2 節の例 2 と例 3において(2.32)が成立していることを見た。つまりフーリエ級数展開用にいる $u_n(x)$ は完全系をなしているらしい。実際、数学的には次の定理がある。この証明はこみ入っているのでここでは省略する。

定理 2-2 (2.23)の関数系 $u_n(x)$ は $-\pi < x < \pi$ で周期的なすべての連続関数に関して完全系をなす。

1-2 節の例 2, 例 3 はこの定理の条件をみたしている。

2-3 一様収束性と項別微分

この章のはじめに、(2.5)で不連続点も含めてフーリエ級数の各点収束性を示した。それでは $-\pi < x < \pi$ の範囲にわたって x を動かしたとき、その収束性は x に関して一様であるだろうか？ これに関しては、 $f(x)$ が区分的になめらかでしかも $f(x)$ が連続な部分区間にに関するかぎり、一様収束であることが分かっている。定理の形で述べると次のようになる。

定理 2-3 周期 2π の関数 $f(x)$ が区分的になめらかでしかも連続であるとする。このとき $S_N(x)$ は一様に $f(x)$ に収束する。つまり $-\pi \leq x \leq \pi$ を満たす x に関して、 $\epsilon > 0$ を任意に与えたとき x によらない N_0 が ϵ に依存して

とれて、 $N > N_0$ であるかぎり

$$|S_N(x) - f(x)| < \epsilon \quad (2.38)$$

が成立する。

不連続な関数についてはこの定理は成り立たない。そのことを例で見てみよう。1-2 節の例 1 からつくった(1.48)で与えられる $g(x)$ は $x=0, \pi$ で不連続点を含む。図 1-7 の示すように $x=0, \pi$ の近くでは $S_N(x)$ にツノが出て一様に $g(x)$ に近づいていないことが理解できる。 N_0 をどんなに大きくとっても不連続点の近くの x について(2.38)が成立しないのである。

一方、1-2 節の例 3, 例 4, 例 5 は $f(x)$ が連続なので、フーリエ級数は一様収束が期待される。「級数が一様収束すれば項別微分が許される」という基本的な定理があるので、そのことを例について見てみよう。すでに 1-2 節の各々の例のところで指摘したように、 $-\pi < x < \pi$ の区間では

$$\text{例 3 の微分} = \text{例 3}'$$

$$\text{例 4 の微分} = \text{例 2}$$

$$\text{例 5 の微分} = (1.44)$$

の関係がたしかに項別微分によって成立している。例 3, 例 4, 例 5 は区分的になめらかで不連続点を含まないので、定理の条件をみたしている。

項別微分が許されるときは、 $f(x)$ のフーリエ係数 a_n, b_n と $f'(x)$ のフーリエ係数 a'_n, b'_n の間に簡単な関係がある。(1.16)を x で微分して $f'(x)$ の展開と等しいと置く。

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx) \\ &\equiv \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos nx + b'_n \sin nx) \end{aligned}$$

よって $n \geq 1$ に対して

$$a'_n = nb_n, \quad b'_n = -na_n \quad (2.40)$$

を得る。複素表示ではさらに簡単で、 $f(x)$ と $f'(x)$ の展開係数をそれぞれ c_n, c'_n とすると、

$$f(x) = \sum_{n=0, \pm 1, \dots} c_n e^{inx} \quad (2.41)$$

を微分して

$$f'(x) = \sum_{n=0, \pm 1, \dots} i n \pi c_n e^{inx} \quad (2.42)$$

$$= \sum_{n=0, \pm 1, \dots} c_n' e^{inx} \quad (2.43)$$

よって

$$c_n' = i n c_n \quad (2.44)$$

を得る。

それでは不連続点を含む例の微分はどうであろうか。これは上の定理にはあってはならない関数であるが、例1のフーリエ級数(1.21)を例にとって、ためしに項別微分をしてみよう。

$$f''(x) = \frac{2}{\pi} (\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots) \quad (2.45)$$

となり、これは収束しない。左辺も不連続点での微分を含んでいて、意味がつけられないように見える。しかしこの節の後の方で見るよう、δ関数とよばれる超関数を導入すると(2.45)の右辺が定義できて、(2.40)が成立するのである！

2-4 項別積分

それでは項別積分の方はどうであろうか。 $f(x)$ を区別的に連続(なめらかさは要請しなくてよい)な周期 2π の周期関数とする。

$$F(x) = \int_0^x f(y) dy \quad (2.46)$$

を考えよう。 $f(x)$ は積分可能であることに注意。さらに(1.16)の展開の初項 $a_0/2$ を用いて

$$G(x) = F(x) - \frac{a_0}{2} x \quad (2.47)$$

を定義すると、

$$\begin{aligned} G(x+2\pi) &= \int_0^{x+2\pi} f(y) dy - \frac{a_0}{2}(x+2\pi) \\ &= \int_0^x f(y) dy + \int_x^{x+2\pi} f(y) dy - \frac{a_0}{2}(x+2\pi) \end{aligned}$$

ところが $f(y)$ の周期は 2π ゆえ

$$\int_x^{x+2\pi} f(y) dy = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) dy = a_0 \pi$$

よって

$$G(x+2\pi) = G(x) \quad (2.48)$$

が成立し、 $G(x)$ は周期 2π の周期関数である。 $f(x)$ が区分的に連続であれば、 $f(x)$ の積分 $F(x)$ は区分的になめらかである。したがって $G(x)$ は区分的になめらかとなり、上記2-3節の項別微分が許される。したがって

$$G(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nx + d_n \sin nx) \quad (2.49)$$

と展開したとき、

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(x) - \frac{a_0}{2} = f(x) - \frac{a_0}{2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-nc_n \sin nx + nd_n \cos nx) \end{aligned} \quad (2.50)$$

となる。(1.16)で与えられる $f(x)$ のフーリエ級数と(2.50)を比較して、 $n \geq 1$ に対して次の関係を得る。

$$a_n = nd_n, \quad b_n = -nc_n \quad (2.51)$$

c_0 については、 $G(0) = F(0) = 0$ を用いると

$$G(0) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \quad (2.52)$$

のように求まる。よって

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(y) dy = \frac{a_0}{2} x + G(x) \\ &= \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \{ -b_n (\cos nx - 1) + a_n \sin nx \} \end{aligned} \quad (2.53)$$

と決まった。これは直接(1.16)を x で 0 から x まで項別積分したものに等しい。複素表示では(2.41)から

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(y) dy \\ &= c_0 x + \sum_{n=\pm 1, \pm 2} \frac{c_n}{in} (e^{inx} - 1) \end{aligned}$$

としてフーリエ級数展開が求まる。

(2.39)の逆がそのまま項別積分の例となる。つまり

$$\int_0^x (\text{例 } 3') dx = \text{例 } 3$$

$$\int_0^x (\text{例 } 2) dx = \text{例 } 4$$

$$\int_0^x (1.44) dx = \text{例 } 5$$

となっていて、いずれも項別積分が可能なことを示している。

2-5 デルタ関数

ここでは複素表示を用い、さしあたり x を 1 周期 $-\pi < x < \pi$ に限ることにする。(1.18)を(1.17)へ代入して

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0, \pm 1, \dots} c_n e^{inx} = \sum_{n=0, \pm 1, \dots} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) e^{inx} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0, \pm 1, \dots} e^{inx-y} \right\} dy \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\equiv \int_{-\pi}^{\pi} \Delta(x-y) f(y) dy \quad (2.55)$$

ここで(2.54)においては n についての無限和と y についての積分が交換できることを仮定し、(2.55)では $f(x)$ によらない決まった関数

$$\Delta(x-y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0, \pm 1, \dots} e^{inx-y} \quad (2.56)$$

を定義した。(2.55)では、任意の $f(y)$ を右辺に入れたとき、同じ $f(x)$ が左辺に再現されている。 x, y を行と列を指定する指標 i, j とし、積分を和と見なして

$$f_i = \sum_j \Delta_{ij} f_j \quad (2.57)$$

と書いてみる。いまは対応関係をみていくので、正確に積分を和の極限で書く必要はない。こう書いてみると、(2.57)は行列の固有値方程式の形をしていて、任意のベクトル f_i に対して Δ は固有値 1 をもっていることを示している。よって Δ は単位行列で、その成分 Δ_{ij} は

$$\Delta_{ij} = \delta_{ij} \quad (2.58)$$

のはずである。ここで δ_{ij} はクロネッカーデルタ(2.25)である。そこで(2.55)のように連続パラメーター x, y で指定される「単位行列」 δ_{xy} があったとすると、それが $\Delta(x-y)$ のはずである。 Δ は $x-y$ のみの関数であるから

$$\Delta(x-y) = \delta(x-y)$$

と書けるであろう。この $\delta(x)$ が超関数としてのデルタ(δ)関数である。これは量子力学の定式化の際、ディラック(Dirac)によって導入されたものであり、ディラックの δ 関数とよばれている。なお行列との対応関係は第3章でくわしく扱う。

もしこの δ 関数が存在するとすれば、(2.55)は任意の $f(x)$ について

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x-y) f(y) dy \quad (2.59)$$

となるので、(2.59)の積分のうち $y=x$ の近くのみが効いているはずである。このことから $\delta(x-y)$ は次の 2 つの性質をもっていることが予想される。

- (i) $\delta(x-y)$ は $x \neq y$ ではゼロである.
(ii) $\delta(x-y)$ は $x=y$ で積分(2.59)が成立するくらいに大きな(無限大の)値をもつ.

この無限大の程度は $f(y)=1$ とおいて

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x-y) dy \quad (2.60)$$

が成立することからきまる. このことから $\delta(x-y)$ の $x=y$ での無限大は正であって, その近くの“面積”が 1 という性質が出てくる. そこで図 2-5 のように, 高さ R , 幅が $1/R$ の長方形関数 $\delta_R(x-y)$ を考える. こうすると長方形の面積は $S=R \cdot \frac{1}{R}=1$ であって

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \delta_R(x-y) = \delta(x-y) \quad (2.61)$$

が成立すると期待される.

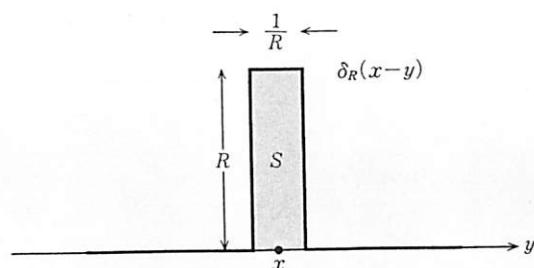


図 2-5

ここで(2.56)にもどろう. こんどは x の周期性も考慮する. (2.56)から $\Delta(x-y)$ は $x-y$ の偶関数であり, $x-y \rightarrow x$ と置き換えて

$$\Delta(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0, \pm 1, \dots} \cos nx = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} (\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots) \quad (2.62)$$

と書ける. いま, 図 2-6 のようなパルスの列を考える. 1つ1つのパルスは図 2-5 に示された関数 $\delta_R(x)$ の形をしている. つまり図 2-6 では高さ R , 幅 $1/R$ のパルスの列が $x=0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ を中心に連なっている.

この周期関数を $\Delta_R(x)$ と書く. 1 周期を $-\pi < x < \pi$ にとって $\Delta_R(x)$ をフー

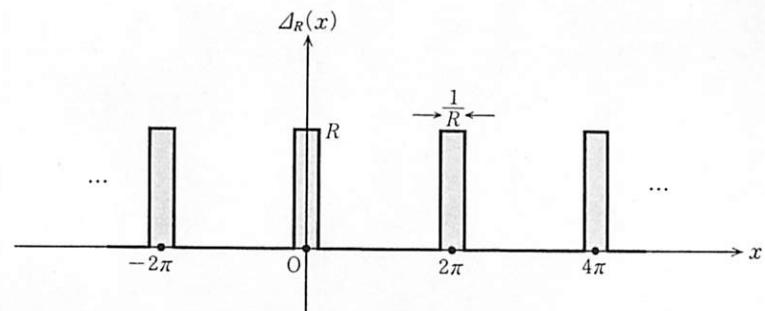


図 2-6

リエ級数展開すると, $b_n=0$ で, a_n の積分に対しては $-1/2R < x < 1/2R$ のみが効いて

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_R(x) \cos nx dx = \begin{cases} \frac{2R}{\pi} \frac{\sin(n/2R)}{n} & (n \neq 0) \\ \frac{1}{\pi} & (n=0) \end{cases} \quad (2.63)$$

よって

$$\Delta_R(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n/2R)}{n/2R} \cos nx \quad (2.64)$$

となる. ここで両辺の $R \rightarrow \infty$ の極限を考える. 左辺は(2.61)により δ 関数の列となる.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_R(x) = \sum_{n=0, \pm 2, \pm 4, \dots} \delta(x-n\pi) \quad (2.65)$$

右辺では \sum_n と \lim_R が交換すると仮定して

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sin(n/2R)}{n/2R} = 1 \quad (2.66)$$

を用いる. 結局, 次の等式を得る.

$$\sum_{n=0, \pm 2, \pm 4, \dots} \delta(x-n\pi) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} (\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots) = \Delta(x) \quad (2.67)$$

$-\pi < x < \pi$ に限れば、左辺は $\delta(x)$ としてよい。一方、(2.67)の右辺と(2.62)の右辺は同じものであるから、当初の予想

$$\Delta(x) = \delta(x) \quad (2.68)$$

つまり(2.56)の $\Delta(x-y)$ は $\delta(x-y)$ に等しいことがいえた。この δ 関数は偶関数である：

$$\delta(x) = \delta(-x) \quad (2.69)$$

δ 関数の性質(i), (ii)は図 2-5 のような長方形の極限のみで表わされるわけではない。図 2-7 のようなテント形の関数を考えてみると、これも $R \rightarrow \infty$ で $\delta(x)$ となる。そこでこれを用いて周期関数 $\bar{\Delta}_R(x)$ を図 2-8 のようにつくつてみる。 $\bar{\Delta}_R(x)$ のフーリエ係数は、 $b_n=0$,

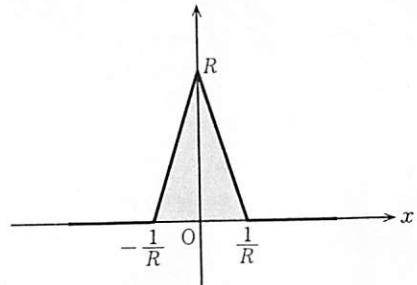


図 2-7

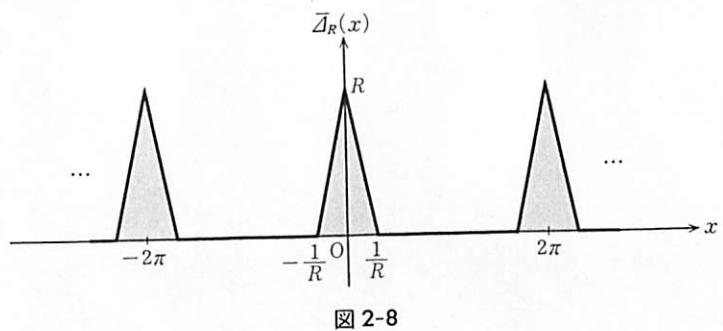


図 2-8

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{\Delta}_R(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/R} R^2 \left(\frac{1}{R} - x \right) \cos nx dx \\ = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{\sin(n/R)}{n/R} - \frac{\cos(n/R) - 1}{n^2/R^2} \right) & (n \neq 0) \\ \frac{1}{\pi} & (n=0) \end{cases} \quad (2.70)$$

ところが $n \neq 0$ では $\lim_{R \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{\pi}$ であるから、 $\bar{\Delta}_R(x)$ のフーリエ展開で両辺の $R \rightarrow \infty$ の極限をとれば、(2.67)と同じ式が得られる。このことは δ 関数を表現するのに性質(i), (ii)が満たされていればよく、細部にはよらないことを示している。このため以下では一般の $\Delta_R(x)$ を考えることとし $\delta_R(x)$ という記号を用いる。

超関数としての δ 関数 δ 関数は $\delta_R(x)$ の $R \rightarrow \infty$ での極限として定義されるものであるから、 $x=0$ でのみゼロでない値をもち、その値が無限大というもので、これはふつうの意味での関数の仲間には入らない。そこで関数の範囲をひろげて超関数(distribution)を考える。これは(2.59)の右辺のように、ある関数 $f(y)$ を掛けた後での積分を通してのみ定義されるものである。そしてこのときの関数 $f(y)$ は無限回微分可能で、 x の全領域で考えるときは $x \rightarrow \pm\infty$ で x のどんなベキよりも早くゼロへいくものとする。このような性質をもつ任意の f について、 δ 関数は

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) f(y) dy \quad (2.71)$$

を満足する。このような定義に従うと、例えば

$$f(x)\delta(x-y) = f(y)\delta(x-y) \quad (2.72)$$

が成立することは、両辺に任意の関数 $g(y)$ をかけて y で積分すると、両辺とも $f(x)g(x)$ となることから分かる。

(i) δ 関数の微分

形式的に(2.71)の右辺を x で微分し、 y 積分と x 微分が交換すると仮定する。

$$\frac{d}{dx} \delta(x-y) = -\frac{d}{dy} \delta(x-y)$$

を用いた後で部分積分すると

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} \delta(x-y) \right) f(y) dy &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dy} \delta(x-y) f(y) dy \\ &= -\delta(x-y) f(y) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) f'(y) dy \\ &= f'(x) \end{aligned}$$

となる。これは(2.71)の左辺を x で微分したものであるから、右辺では x 微分と y 積分を交換してよいという仮定が正しかったことを示している。 $\delta'(x)$ に対する公式として、次式を得る。

$$\int \delta'(x-y) f(y) dy = f'(x) \quad (2.73)$$

または $x=0$ として、(2.69)から導かれる関係式

$$\delta'(-x) = -\delta'(x) \quad (2.74)$$

を用いて次式が示される。

$$\int \delta'(x-y) f(y) dy = -f'(x) \quad (2.75)$$

さらに n を自然数として

$$\int \delta^{(n)}(x-y) f(y) dy = (-1)^n f^{(n)}(x) \quad (2.76)$$

が成立する。ただし次の定義を導入した。

$$\begin{aligned} \delta^{(n)}(x-y) &\equiv \frac{d^n}{dx^n} \delta(x-y) \\ f^{(n)}(x) &\equiv \frac{d^n}{dx^n} f(x) \end{aligned}$$

ここで $\delta'(x)$ がどのような関数形をしているかを見てみよう。微分の定義から

$$\delta'(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta} (\delta(x+\Delta) - \delta(x-\Delta)) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta} \lim_{R \rightarrow \infty} (\delta_R(x+\Delta) - \delta_R(x-\Delta))$$

ここで $\delta_R(x)$ は図 2-5 で与えられる長方形関数としよう。 R, Δ とも有限にとめておくと $\delta'(x)$ は図 2-9 で示された関数の極限である。

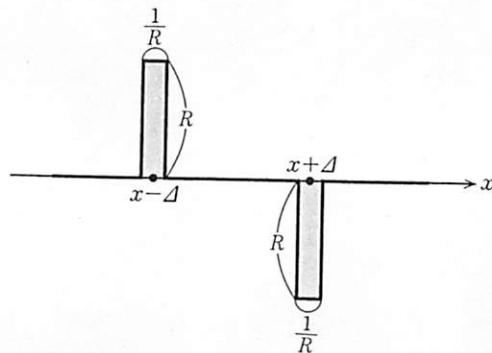


図 2-9

(ii) δ 関数の積分

$$\theta(x-a) = \int_{-\infty}^x \delta(y-a) dy \quad (2.77)$$

を考えると、これは $x < a$ でゼロ、 $x > a$ で 1 となる。この関数を単位階段関数とよぶことがある。逆に

$$\frac{d}{dx} \theta(x-a) = \delta(x-a) \quad (2.78)$$

が成立する。 δ 関数を用いると $\theta(x-a)$ のような不連続関数も微分できるのである。(2.78)を用いて 1-2 節の例 1, 例 2 を見ることにしよう。これらの例はいずれも不連続点をもっている。

[例 1]

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < \pi) \\ 0 & (-\pi < x < 0) \end{cases} \quad (1.19)$$

$f(x)$ は θ 関数を用いて $-\pi < x < \pi$ では

$$\theta(x) - \theta(x-\pi)$$

と書ける。これを全区間へ周期的に拡張して、

$$f(x) = \sum_{n=0, \pm 1, \dots} \{\theta(x-2n\pi) - \theta(x-(2n+1)\pi)\} \quad (2.79)$$

と書く。これを微分すると(2.78)から

$$f'(x) = \sum_{n=0, \pm 1, \dots} \{\delta(x - 2n\pi) - \delta(x - (2n-1)\pi)\} \quad (2.80)$$

この右辺に(2.67)を代入する。(2.80)の右辺第1項へはそのまま(2.67)を代入し、第2項へは(2.67)において $x \rightarrow x - \pi$ としたものを代入する。その結果、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\pi}(\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots) - \frac{1}{\pi}(-\cos x + \cos 2x - \cos 3x + \dots) \\ &= \frac{2}{\pi}(\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots) \end{aligned} \quad (2.81)$$

を得る。これは例1のフーリエ展開(1.21)の右辺を項別微分したものである。(2.45)に関して述べたように、 δ 関数にまで関数をひろげると、ふつうの意味では収束しない級数も意味がつけられるのである。もう1つの例として、1-2節の例2を見よう。

[例2] $f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi) \quad (1.23)$

$-\pi < x < \pi$ では、 $f(x)$ は

$$f(x) = x \{\theta(x+\pi) - \theta(x-\pi)\} \quad (2.82)$$

と書けるので、 x の全領域で

$$f(x) = \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} (x - 2n\pi) \{\theta(x - (2n-1)\pi) - \theta(x - (2n+1)\pi)\} \quad (2.83)$$

と書ける。両辺を微分して

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} (x - 2n\pi) \{\delta(x + \pi - 2n\pi) - \delta(x - \pi - 2n\pi)\} \\ &\quad + \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} \{\theta(x + \pi - 2n\pi) - \theta(x - \pi - 2n\pi)\} \end{aligned} \quad (2.84)$$

(2.84)の右辺第1項において、公式

$$x\delta(x-a) = a\delta(x-a) \quad (2.85)$$

を用いる。これは、(2.72)に $f(x) = x$, $y = a$ を代入すれば得られる。その結果、右辺第1項は

$$-2\pi \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} \delta(x + \pi - 2n\pi) \quad (2.86)$$

と書ける。この式は $x = (2n-1)\pi$ のところで δ 関数で表わされる大きな値をもっているが、これはもとの $f(x)$ が同じところで不連続だったことによる。係数の -2π はそこでの $f(x)$ のとびの値である。

ここで(2.86)に(2.67)の x を $x + \pi$ と置き換えたものを用いると、(2.86)は次のようになる。

$$\begin{aligned} &-2\pi \left\{ \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}(-\cos x + \cos 2x - \cos 3x + \dots) \right\} \\ &= -1 + 2(\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \dots) \end{aligned} \quad (2.87)$$

さて(2.84)の右辺第2項については、じつは、これはすべての x で 1 を与える関数であることが分かる。よって(2.84)の右辺は、(2.87)とともに

$$\begin{aligned} &-1 + 2(\cos x - \cos 2x - \cos 3x - \dots) + 1 \\ &= +2(\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \dots) \end{aligned} \quad (2.88)$$

となる。これはちょうど(1.26)の右辺を項別微分したものになっている。つまり例2のような不連続関数も δ 関数を用いれば項別微分が可能である。

2-6 ギブス現象

$f(x)$ の不連続点の近くで、フーリエ級数は奇妙な振舞いをする。図1-7を見るとよく分かるように、不連続点 $x = 0, \pm\pi, \dots$ の近くでツノが出ることは、すでに1-3節と2-3節で述べた。特に2-3節では、(2.2)で定義される $S_N(x)$ が $N \rightarrow \infty$ で x について一様に $f(x)$ に収束するのは $f(x)$ が連続関数のときであること、さらに、このツノのために不連続関数は一様収束しないことを述べた。さてここでは、このツノの大きさを実際の例で計算する。1-2節の例1について、図1-7を参考にしながら議論をすすめる。まず(1.21)を(1.48), (1.49)で与えられるような $g(x), g_n(x)$ で書きなおす。つまり

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} g(x) \quad (2.89)$$

$$g(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} g_N(x) \quad (2.90)$$

$$g_N(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots + \frac{\sin(2N-1)x}{2N-1} \quad (2.91)$$

となる。ここで(1.49)の n を N と書いた。 $g_N(x)$ がどの x で最大値をとるかを調べるために、 $g_N'(x)$ を微分する。

$$g_N'(x) = \cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2N-1)x \quad (2.92)$$

この和は複素数で計算すると便利である。 $\operatorname{Re} z$ を z の実数部とすると

$$\begin{aligned} g_N'(x) &= \operatorname{Re}(e^{ix} + e^{3ix} + \cdots + e^{i(2N-1)x}) = \operatorname{Re} e^{ix}(1 + e^{2ix} + \cdots + e^{i2(N-1)x}) \\ &= \operatorname{Re} e^{ix} \frac{1 - e^{i2Nx}}{1 - e^{2ix}} = \frac{\operatorname{Re} e^{ix}(1 - e^{i2Nx})(1 - e^{-2ix})}{(1 - e^{2ix})(1 - e^{-2ix})} \\ &= \frac{-2 \sin x \operatorname{Im}(1 - e^{i2Nx})}{(1 - e^{2ix})(1 - e^{-2ix})} = \frac{2 \sin x \sin 2Nx}{(1 - e^{2ix})(1 - e^{-2ix})} \end{aligned} \quad (2.93)$$

よって $g_N'(x)=0$ の解は $\sin x \sin 2Nx=0$ から、 n を整数として $x=n\pi, \frac{n}{2N}\pi$ のように求まる。以下では、 $x=0$ の両側に現われるツノの大きさを調べることにする。図1-7を見ると、このツノは $x=0$ に最も近い極大(小)のところでおこるので、その x の値は $\sin 2Nx=0$ をみたす $x=0$ 以外の最小の x である。つまり

$$x = \pm \frac{\pi}{2N} \quad (2.94)$$

そこで $g_N(x)$ の値が最大(小)値となる。その値を g_N^\pm と書くと、

$$\begin{aligned} g_N^\pm &= \pm \left(\sin \frac{\pi}{2N} + \frac{\sin \frac{3\pi}{2N}}{3} + \frac{\sin \frac{5\pi}{2N}}{5} + \cdots + \frac{\sin \frac{(2N-1)\pi}{2N}}{2N-1} \right) \\ &= \pm \frac{\pi}{2} \frac{1}{N} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2N}}{\frac{\pi}{2N}} + \frac{\sin \frac{3\pi}{2N}}{\frac{3\pi}{2N}} + \cdots + \frac{\sin \frac{(2N-1)\pi}{2N}}{\frac{(2N-1)\pi}{2N}} \right) \end{aligned}$$

ここで $A=\frac{\pi}{2N}$, $h(y)=\frac{\sin y}{y}$ とおくと

$$g_N^\pm = \pm A \sum_{k=1}^N h((2k-1)A) = \pm \frac{1}{2} 2A \sum_{k=1}^N h((2k-1)A)$$

よって

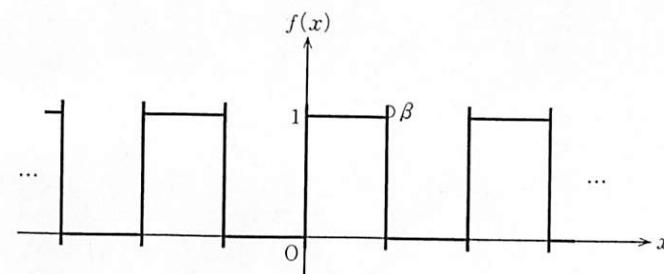


図 2-10

$$g_\infty^\pm \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} g_N^\pm = \pm \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\sin y}{y} dy \cong \pm \frac{1}{2} \times 1.85 \quad (2.95)$$

ここで最後の積分に対する数値を代入した。 $N \rightarrow \infty$ では図1-7は図2-10のようになる。さて、ツノの大きさ β は(2.89)を用いて求めることができる。 $f(x)$ の最大値、最小値 f_{\max}, f_{\min} は

$$f_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} G_\infty^+ = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \frac{1}{2} \times 1.85 \cong 1.09$$

$$f_{\min} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} G_\infty^- = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \frac{1}{2} \times 1.85 \cong -0.09$$

であって図2-10の中のツノの大きさ $\beta=0.09$ を得る。

他の例でも同じようにできる。一般に不連続点の場所にはツノがでて、その大きさに対する公式も分かっている。(2.95)の公式を

$$\begin{aligned} g_\infty^\pm &= \pm \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy - \int_\pi^\infty \frac{\sin y}{y} dy \right\} \\ &= \pm \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} - \int_\pi^\infty \frac{\sin y}{y} dy \right\} \end{aligned}$$

と変形して、 f_{\max} から β を求めると次のようになる。

$$\beta = f_{\max} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \int_\pi^\infty \frac{\sin y}{y} dy \right) - 1$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy \quad (2.96)$$

ここで $\int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2}$ を用いた。一般の公式は(2.96)に不連続点におけるとびの大きさ d をかけたものが、その点におけるツノの大きさであることが知られている。

$$\beta = -\frac{d}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy \quad (2.97)$$

なお数値的には

$$-\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = 0.09$$

である。一般公式(2.97)もここで行なった議論をすこし拡張して導くことができる。興味ある読者は試みられることをお勧めする。

このような不連続点における特異な現象は、フーリエ級数を実際に用いるとき念頭におくべきことである。例えば、数値的にフーリエ級数を評価する際、不連続点の近くでは、フーリエ展開に現われる多数の項を取り入れないと、との関数を再現しないという現象が起こる。

最後に、ここで述べたギブス現象は(2.5)に矛盾しないのか、という疑問がおこると思う。答は次の通り。(2.5)においては $N \rightarrow \infty$ の際、 x は固定されているのである。こうするとギブス現象は拾い出せない。ギブス現象を見るには、 x を(2.94)のように不連続点(この例では $x=0$)へ N とともに近づいていくような点列を考えなければならないのである。その理由は、 $f(x)$ が、 x のそのような値で最大値をとるからである。

かめたい。 $N \rightarrow \infty$ で(a), (b)の積分がどのように振舞うか、その漸近形を求めなさい。

(a) $\int_0^b \cos ax \sin Nx dx$

(b) $\int_0^b x^n e^{-ax} \sin Nx dx$

[3] 次の例はリーマンの補助定理(2.15)に反するように見える。このことに関して次の間に答えなさい。

(a) $b_1 > 0$ として

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-b_1}^{b_1} \frac{\sin Nx}{x} dx = \pi$$

を証明しなさい。

(b) この例がリーマンの補助定理と矛盾しないことを説明しなさい。

[4] ディラックの δ 関数について、次の等式を証明しなさい。

(a) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$

(b) $\delta((x-a)(x-b)) = \frac{1}{|b-a|} (\delta(x-a) + \delta(x-b))$

[5] ディラックの δ 関数に関する次の等式を証明しなさい。

(a) $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2} = \delta(x)$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=-n}^n e^{i2\pi rx} = \delta(x)$

第2章演習問題

[1] 1-2節の例3', 例4について、バーシバルの等式が成立していることを示しなさい。

[2] $b > 0$ として次の2つの例でリーマンの補助定理(2.15)が成り立っていることを確

3 フーリエ変換

前章までは有限の周期 $2L$ をもつ周期関数を考えた。そしてそのような関数は $\cos \frac{n\pi}{L}x, \sin \frac{n\pi}{L}x$ の無限級数として書けることを知った。

それでは周期関数でない一般の関数をサインやコサインで書き表わすことはできるであろうか。ちょっと考えるとサインやコサインは周期関数なので、これらを集めても周期関数にしかならないような気がする。しかしそうではない。周期をもたない関数は、その周期が無限大であるとみなして、 $L \rightarrow \infty$ の極限で考えるとよい。つまりフーリエ級数における n についての和を、この極限で考えるのである。 $\omega_n = n\pi/L$ とおくと n が 1 つ変化すると ω_n は $\frac{\pi}{L}$ だけ変化し、 $L \rightarrow \infty$ では連続に分布する。その結果 n についての和は $\cos \omega x$ や $\sin \omega x$ の ω についての積分になりそうである。周期をもたない関数に対しては、このような操作が実際に可能であることを示すのがこの章の目標である。

3-1 フーリエ級数からフーリエ変換へ

周期 $2L$ の周期関数 $f(x)$ において $L \rightarrow \infty$ とする。周期が無限大ということは周期的な関数ではないことになる。これを非周期的関数とよび以下このような関数を考えよう。当面は不連続点を含まない連続関数に限ることにする。

$L \rightarrow \infty$ の極限を考えるのには、複素フーリエ展開を用いると便利である。

(1.13)を(1.11)へ代入して

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} c_n e^{i \frac{n\pi}{L} x} = \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} \left\{ \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(y) e^{-i \frac{n\pi}{L} y} dy \right\} e^{i \frac{n\pi}{L} x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(y) \left\{ \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} \frac{\pi}{L} e^{in(\frac{\pi}{L})(x-y)} \right\} dy \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここで積分と和の交換が許されると仮定した。(3.1)の{}の中は $L \rightarrow \infty$ で積分におきかわる。 $\Delta\omega \equiv \pi/L$, $\omega_n = n\Delta\omega$ において、 $L \rightarrow \infty$ の極限をとると

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} \Delta\omega e^{i\omega_n(x-y)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(x-y)} \quad (3.2)$$

と書けるので、(3.1)は

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(y) e^{i\omega(x-y)} \quad (3.3)$$

という形に変形される。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy \quad (3.4)$$

とおいて $F(\omega)$ を $f(y)$ のフーリエ(積分)変換(Fourier transformation)とよぶ。

フーリエ逆変換 この $F(\omega)$ を用いると(3.3)からフーリエ(積分)逆変換(Fourier inverse transformation)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (3.5)$$

が得られる。(3.4), (3.5)は対称的なきれいな形をしているが、もっと対称性をよくするため、 $\bar{F}(\omega) = \frac{F(\omega)}{\sqrt{2\pi}}$ を使う方法もある。このとき

$$\bar{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy \quad (3.6)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (3.7)$$

となるが、以下では(3.4), (3.5)の表示を用いることにする。

δ関数 さて(3.3)は

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} D(x-y) f(y) dy \quad (3.8)$$

$$D(x-y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-y)} d\omega \quad (3.9)$$

の形をしているので、(3.8)が任意の $f(x)$ に対して成立することを考えると、 $D(x-y)$ は2-5節で述べたδ関数そのものであるはずである。実際に(2.56)の $\Delta(x-y)$ を書きなおしてみよう。この $\Delta(x-y)$ は1周期内 $-\pi < x-y < \pi$ では $\delta(x-y)$ である。このことは(2.56)以下すでに調べてある。これをすべての x へ周期的に拡張すれば(2.67)を得る。

ここで(2.56), (2.67)において1周期を $-L \sim L$ へ変換しよう。そのため

$$\Delta(x-y) = \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} \delta(x-y-n\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} e^{in(x-y)}$$

において、 $x = \frac{\pi}{L}x'$, $y = \frac{\pi}{L}y'$ のように変数変換する。

$$\begin{aligned} \sum_{n=0, \pm 2, \pm 4, \dots} \delta\left(\frac{\pi}{L}(x'-y') - n\pi\right) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} e^{i\frac{n\pi}{L}(x'-y')} \\ &= \frac{L}{2\pi^2} \frac{\pi}{L} \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} e^{i\frac{n\pi}{L}(x'-y')} \end{aligned} \quad (3.10)$$

これで1周期を $-L < x' < L$ にとることができる。ここで両辺を $\frac{L}{\pi}$ で割って極限 $L \rightarrow \infty$ をとる。

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\pi}{L} \sum_{n=0, \pm 2, \pm 4, \dots} \delta\left(\frac{\pi}{L}(x'-y') - n\pi\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x'-y')} d\omega \\ &= D(x'-y') \end{aligned} \quad (3.11)$$

x', y' の任意の値に対して、 $L \rightarrow \infty$ で左辺では $n=0$ の項のみ効く。その理由は、 $\delta(x)$ が $x=0$ でのみ(無限大の)値をもっているからである。一方 $n=0$ に対してはすべての正の数 a に対して

$$a\delta(ax) = \delta(x) \quad (3.12)$$

が成立するので、(3.11)の左辺は $\delta(x'-y')$ となる。ここで(3.12)は次のように理解できる。(3.12)の両辺に勝手な性質の良い関数 $g(x)$ をかけて積分し、(2.71)で $x=0$ とおいた式を用いて

$$\text{左辺} = \int_{-\infty}^{\infty} a\delta(ax)g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)g\left(\frac{y}{a}\right)dy = g(0)$$

$$\text{右辺} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)g(x)dx = g(0)$$

が導かれる。結局次の公式を得た。

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega \quad (3.13)$$

つまり(3.9)の $D(x-y)$ は予想通り $\delta(x-y)$ に等しいことが分かった。このように、フーリエ級数の1周期 $-L < x' < L$ を $L \rightarrow \infty$ と拡大して、全領域で考えるのがフーリエ変換である。1周期以外の部分はなくなるのである。

(3.13)は次のようにも理解できる。 $D_d(x)$ を次のように定義しよう。

$$D_d(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-d}^d e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^d \cos \omega x d\omega = \frac{1}{\pi} \frac{\sin dx}{x} \quad (3.14)$$

積分領域は $-d$ から d までであって、 $x=0$ の両側に左右対称にとってある。ここで $d \rightarrow \infty$ の極限を考える。超関数の意味での収束を考えるのであるから、 $g(x)$ を十分なめらかで $x \rightarrow +\infty$ で十分はやくゼロとなる任意の関数として、次の積分を調べよう。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin dx}{x} g(x) dx &= \int_{-\delta}^{\delta} \sin dx \frac{g(x)}{\pi x} dx + \int_{\delta}^{\infty} \sin dx \frac{g(x)}{\pi x} dx \\ &\quad + \int_{-\infty}^{-\delta} \sin dx \frac{g(x)}{\pi x} dx \end{aligned} \quad (3.15)$$

ここで δ は小さい正の数である。さて右辺第2、第3項を考える。 M を十分大きい正の数とすると、 $g(x)$ の性質から、任意の正の小さな数 ϵ に対して

$$\left| \int_M^{\infty} \sin dx \frac{g(x)}{\pi x} dx \right| \leq \int_M^{\infty} \frac{|g(x)|}{\pi x} dx < \epsilon$$

$$\left| \int_{-\infty}^{-M} \sin dx \frac{g(x)}{\pi x} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{-M} \frac{|g(x)|}{\pi|x|} dx < \epsilon$$

とすることができる。よって(3.15)の右辺第2、第3項の和は

$$\left| \int_{\delta}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\delta} \right| \leq \left| \int_{\delta}^M \sin dx \frac{g(x)}{\pi x} \right| + \left| \int_{-M}^{-\delta} \sin dx \frac{g(x)}{\pi x} \right| + 2\epsilon \quad (3.16)$$

でおさえられる。ここで $d \rightarrow \infty$ とすると、有限区間の積分に対するリーマンの補助定理(2.15)により、(3.16)の右辺の2つの積分はゼロへいく。 ϵ は任意であったから、このことは

$$\int_{\delta}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-\delta} \rightarrow 0 \quad (d \rightarrow \infty)$$

を意味している。 $g(x)$ は任意であること、 δ は任意に小さい正の数であることを考えると、上のような意味で $x \neq 0$ では

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\sin dx}{\pi x} = 0 \quad (3.17)$$

と結論できる。

$$\frac{\sin dx}{\pi x} \Big|_{x=0} = \frac{d}{\pi}$$

であるから、 $d \rightarrow \infty$ でこれは無限大となる。ところが

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin dx}{\pi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{\pi y} dy = 1 \quad (3.18)$$

であるから、2-5節の δ 関数の定義を参照して(3.17)、(3.18)から次の結論に達する。

$$\lim_{d \rightarrow \infty} D_d(x) = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\sin dx}{\pi x} = \delta(x) \quad (3.19)$$

これを

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega x d\omega = \delta(x) \quad (3.20)$$

と書く。(3.18)は $x=0$ で無限大となる関数が積分すると 1、つまり $\delta(x)$ と x 軸でつくられる“面積”が 1 になるということを意味している。このことは(2.60)のところでも述べた。

いままでは $f(x)$ として連続関数を考えてきたが、不連続点を含む場合は、(3.5)を一般化した次式に置きかえなければならない。

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad (3.21)$$

このとき(3.4)には変更はない。

フーリエ変換の性質 フーリエ変換に関して、いくつかの点を指摘しておこう。

(i) スペクトル関数としての $F(\omega)$: 理工学では ω をスペクトルの値、 $F(\omega)$ をスペクトル関数とよぶ場合が多い。フーリエ級数では(3.5)の ω 積分が和となっていて、 ω は $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$ というように、離散的な値のみをとったが、フーリエ変換ではスペクトル ω が一般には連続値 $-\infty \leq \omega \leq \infty$ をとる。

(ii) 公式(3.3)は

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(y) \cos \omega(x-y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f(y) (\cos \omega x \cos \omega y + \sin \omega x \sin \omega y) \end{aligned} \quad (3.22)$$

と書ける。 $f(x)$ が偶関数ならコサイン部分、奇関数ならサイン部分のみが効くので

$f(x)$ が偶関数のとき :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx \quad (3.23a)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cos \omega x d\omega \quad (3.23b)$$

このとき $F(\omega)$ も ω の偶関数である。これをフーリエコサイン変換といふ。

$f(x)$ が奇関数のとき :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x dx \quad (3.24a)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \sin \omega x d\omega \quad (3.24b)$$

このとき $F(\omega)$ も奇関数である。これをフーリエサイン変換といふ。

(iii) $f(x)$ が実数値をとると、(3.4)の複素共役をとって

$$F(\omega)^* = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\omega y} dy = F(-\omega) \quad (3.25)$$

ここで $F(\omega) = F^R(\omega) + iF^I(\omega)$ というように実部と虚部にわけると、(3.25) から

$$F^R(-\omega) = F^R(\omega), \quad F^I(-\omega) = -F^I(\omega) \quad (3.26)$$

を得る。 $F^R(\omega)$ は偶関数、 $F^I(\omega)$ は奇関数であることが分かる。

(iv) フーリエ積分の存在について : $F(\omega)$ が存在し、さらに逆変換もできるための条件は、超関数まで許すとするとなかなかむずかしい。

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right| < \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \quad (3.27)$$

であるから、右辺が収束すれば $F(\omega)$ は存在することはただちに分かる。しかしこれでは $\delta(\omega)$ のような超関数を除外してしまうことになる。実際、次節の例1でみるように、 $f(x)=1$ に対して $F(\omega)=2\pi\delta(\omega)$ となる。しかし(3.27)の右辺は存在しない。超関数まで含むようなもっとゆるい(広い)条件がほしい。しかしこの問題はこの本の範囲を超えるので、超関数の本にゆすることにする。

(v) 周期関数のフーリエ変換 : ここでは周期関数の周期 $2L$ を $L \rightarrow \infty$ とすることによってフーリエ積分を定義したため、非周期関数のみがフーリエ変換できるように見える。しかし、周期関数にいくらでも似ている非周期関数も存在するので、その極端な場合として周期関数もフーリエ変換できるはずである。実際可能なのであるが、ただし超関数を許しての話である。このことを少しくわしく見てみよう。

変換公式(3.4)において、 $f(y)$ の周期が $2L$ であるとする。因子 $e^{-i\omega y}$ の y についての周期は $2\pi/\omega$ であるから、もし $2L$ が $2\pi/\omega$ の整数倍ならば(3.4)の被積分関数

$$f(y) e^{-i\omega y}$$

は y の周期 $2L$ の周期関数となり、 y で $-\infty$ から $+\infty$ まで積分すると、被積分関数が周期 $2L$ で同じ値をとるので、無限大となる。しかしこの無限大は超関数で表わされるくらいの無限大であり、以下に示すように、ちょうど ω が π/L の整数倍のところでスペクトル関数 $F(\omega)$ が

$$\delta\left(\omega - \frac{\pi n}{L}\right) \quad (3.28)$$

という δ 関数的ピーカーをもつのである。このことを見てみよう。

$f(y)$ は周期 $2L$ の周期関数であるから、フーリエ級数(1.11)に展開できる。これを用いて、

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} c_n e^{i\frac{n\pi}{L} y} \right) e^{-i\omega y} dy$$

ここで積分と和を交換して(3.13)を使うと

$$F(\omega) = \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} 2\pi c_n \delta\left(\omega - \frac{n\pi}{L}\right) \quad (3.29)$$

となり、たしかに(3.28)の項の和で書けている。よって周期 $2L$ の周期関数 $f(y)$ をフーリエ積分で変換したとき、スペクトル関数 $F(\omega)$ は $\omega = n\pi/L$ のところでピーカーをもつ δ 関数の和で書かれる。そしてその重みが $f(y)$ をフーリエ級数展開したときの係数に比例して $2\pi c_n$ で与えられる。 $F(\omega)$ は離散的な値でのみゼロではないのである。

ここで $L \rightarrow \infty$ の極限をとってみよう。 $\omega_n^0 = \frac{n\pi}{L}$ とおき、(3.29)を変形する。

$$F(\omega) = \frac{\pi}{L} \sum_{n=0, \pm 1, \pm 2, \dots} 2Lc_n \delta(\omega - \omega_n^0) \quad (3.30)$$

ここで $\omega_n^0 \rightarrow \omega^0$ (ω^0 はある有限の数)となるように、 $L \rightarrow \infty$ とともに $n \rightarrow \infty$ とする。さらに $L \rightarrow \infty$ で

$$2Lc_n \rightarrow c(\omega^0) \quad (3.31)$$

のように一定値 $c(\omega^0)$ に移行すると、 $L \rightarrow \infty$ で(3.30)は

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega^0 c(\omega^0) \delta(\omega - \omega^0) = c(\omega) \quad (3.32)$$

となる。実際(1.13)から

$$2Lc_n = \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{n\pi}{L} x} dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = F(\omega) \quad (L \rightarrow \infty)$$

であるから、(3.31)、(3.32)は正しい。結局フーリエ級数における係数 c_n とフーリエ積分におけるスペクトル関数 $F(\omega)$ の間には、 $n\pi/L = \omega$ とおいて

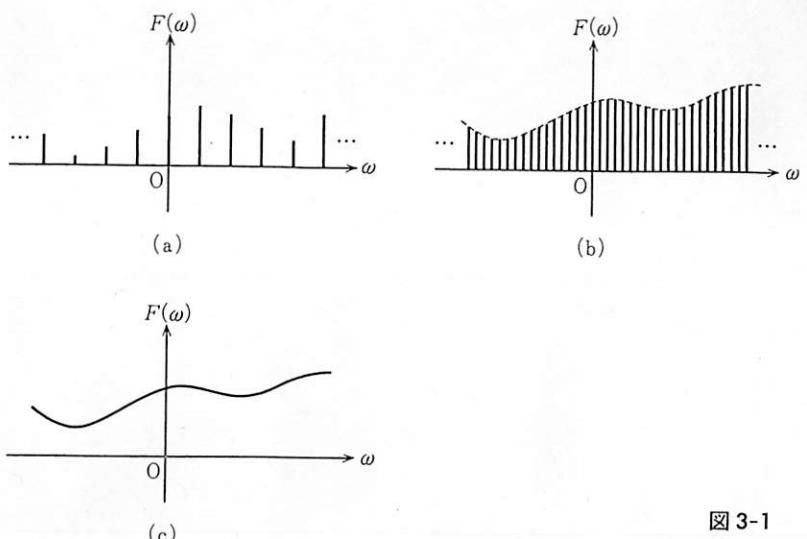


図 3-1

$$\lim_{L \rightarrow \infty} 2Lc_n = F(\omega) \quad (3.33)$$

という関係がある。この左辺は ω の連続関数となるのである。この状況を図 3-1 に示してある。図の(a)→(b)→(c)のように L がだんだん大きくなると離散的なスペクトルが密集してきて、結局 $F(\omega)$ は ω の関数として連続関数となる。この極限でスペクトルは連続に分布するという。離散的な点での値は高さが係数 $2\pi c_n$ に比例するように有限として書いてある。

本章末の演習問題[4]で具体的な例について考える。そこでは 1-2 節の例 2 について、ここで述べたことが成立していることを実際に示すことができる。

3-2 フーリエ変換と逆変換の例

フーリエ変換とその逆変換の例をいくつかみることにしよう。

[例 1]

$$f(x) = 1 \quad (3.34)$$

この場合

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} dx = 2\pi\delta(\omega) \quad (3.35)$$

$$\text{逆変換: } \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega) e^{i\omega x} d\omega = 1$$

ここで(2.59)で $x=0$ とおいたものと(2.69)を用いた。(3.35)より、定数関数のスペクトルは $\omega=0$ のみに存在して、その強度 $|F(\omega)|^2$ は $\omega=0$ で無限大である。

[例 2]

$$f(x) = \delta(x) \quad (3.36)$$

これに対しては

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i\omega x} dx = 1 \quad (3.37)$$

$$\text{逆変換: } \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega = \delta(x)$$

デルタ関数のパルスに対して、そのスペクトルは ω の関数としては定数で、すべてのスペクトルが一様に分布している。 x を時間 t としたとき、 ω は角振動数にあたり、このことはすべての振動数が一様に含まれていることを意味している。光の場合になぞらえてこのようなスペクトル分布を白色スペクトルという。この例は例 2 の x と ω を入れかえたものである。

[例 3]

$$f(x) = \begin{cases} R & \left(-\frac{1}{2R} \leq x \leq \frac{1}{2R}\right) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (3.38)$$

これは 1 つの矩形を表わす関数で、 $R \rightarrow \infty$ で $\delta(x)$ となる。

$$\begin{aligned} F(\omega) &= R \int_{-1/2R}^{1/2R} e^{-i\omega x} dx \\ &= R \frac{e^{-i\omega/2R} - e^{i\omega/2R}}{-i\omega} = 2 \frac{R}{\omega} \sin \frac{\omega}{2R} \\ &= \frac{\sin(\omega/2R)}{\omega/2R} \end{aligned} \quad (3.39)$$

逆変換は次の形をしている。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega/2R)}{\omega/2R} e^{i\omega x} d\omega \quad (3.40)$$

実際(3.40)が(3.38)を再現していることを見よう。 $F(\omega)$ は ω の偶関数だから、(3.40)は

$$\frac{R}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \sin \frac{\omega}{2R} \cos \omega x = \frac{R}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \left\{ \sin\left(\frac{1}{2R} + x\right)\omega + \sin\left(\frac{1}{2R} - x\right)\omega \right\} \quad (3.41)$$

となる。ここで公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \sin a\omega = \varepsilon(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \sin \omega = \varepsilon(a)\pi$$

を用いる。ただし $\varepsilon(a)$ は a の符号関数、つまり $a > 0$ なら $+1$, $a < 0$ なら -1 である。2-5 節の(2.77)で導入した単位階段関数 $\theta(a)$ を用いると、 $\varepsilon(a) = \theta(a) - \theta(-a)$ と書ける。この $\varepsilon(a)$ を用いると、(3.41)は

$$\frac{R}{2} \left\{ \varepsilon\left(\frac{1}{2R} + x\right) + \varepsilon\left(\frac{1}{2R} - x\right) \right\}$$

と書けて、これは(3.38)と一致している。(3.40)で直接 $x=0$ とおくと、右辺は

$$\frac{R}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega/2R)}{\omega} d\omega = \frac{R}{2}$$

となる。これは $\frac{1}{2}\{f(+0) + f(-0)\}$ に等しく、不連続点が存在するときの公式(3.21)と一致している。(3.38)のような矩形に対するスペクトル関数は、(3.39)のように ω について振動しているのである。なお上にでてきた積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega x}{\omega} d\omega = \begin{cases} \pi & (|x| < 1) \\ \pi/2 & (|x| = 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

にはディリクレ(Dirichlet)の不連続因子という名前がある。

[例 4] ガウス型 $f(x) = e^{-ax^2}$ ($a > 0$)

この形をガウス(Gauss)型という。フーリエ変換して

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+i\omega/2a)^2} e^{-\omega^2/4a} dx$$

$$\begin{aligned} &= e^{-\omega^2/4a} \int_{-\infty+i\theta}^{\infty+i\theta} e^{-ay^2} dy \\ &= e^{-\omega^2/4a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a} \end{aligned} \quad (3.43)$$

ここで $y=x+i\theta$, $\theta=\omega/2a$ であり, コーシーの積分定理(1-3節, 20ページ参照)を最後から2番目の等式のところで用いて積分路をずらした. さらにガウス積分の値

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

を用いた.

逆変換: (3.5)を用いて次のように計算できる.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2/4a} e^{i\omega x} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4a}(\omega-i2ax)^2} e^{-ax^2} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sqrt{4\pi a} e^{-ax^2} = e^{-ax^2} \end{aligned}$$

ここで, 実軸上 $-\infty$ から $+\infty$ にわたる ω の積分を複素平面上の $-\infty-i2ax$ から $+\infty-i2ax$ へ移した. この結果をみるとたしかに $f(x)$ が再現されている. ガウス型関数(3.42)のフーリエ変換はふたたびガウス型(3.43)となるという面白い関係がある. ガウス型関数(3.29)は x の大きいところでは関数値が小さくなっているが, それはなめらかに $x \rightarrow \infty$ でゼロへいくようになっている. 一方, 例3の矩形関数は $x=\pm 1/2R$ にすっぱりと切断してあって, $|x|>1/2R$ では $f(x)=0$ である. このため $F(\omega)$ には(3.39)のように ω について振動する振舞いを示した. 一般に

$$f(x) \text{ の鋭い切断} \longleftrightarrow F(\omega) \text{ の振動} \quad (3.44)$$

という関係がある. 切断をゆるやかになめらかにすれば $F(\omega)$ の振動は消える.

[例5] 指数形 $f(x) = e^{-a|x|}$ ($a>0$)

この $f(x)$ に対しては

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-i\omega x} dx + \int_{-\infty}^0 e^{ax} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{i\omega+a} + \frac{1}{a-i\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

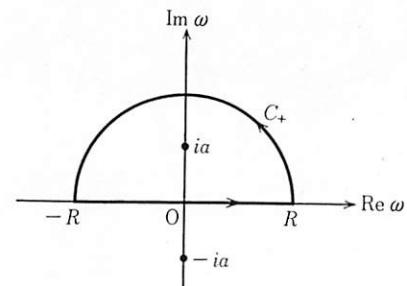


図 3-2

この形はローレンツ(Lorentz)型とよばれる.

$$\begin{aligned} \text{逆変換: } \frac{1}{2\pi} \int F(\omega) e^{i\omega x} d\omega &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\omega-ia} - \frac{1}{\omega+ia} \right) e^{i\omega x} d\omega \\ &\equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^R J(\omega) d\omega \end{aligned}$$

ここで定義された $J(\omega)$ は $\omega=ia$ で1位の極をもつ. まず $x>0$ を考えよう. このときは $e^{i\omega x}$ は $\text{Im } \omega$ が正で絶対値が大きければゼロへいく. そこで図3-2のような, 上半平面での半円をその一部とする閉曲線 C_+ 上での積分を考える. $\omega=ia$ での留数をひろって

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} J(\omega) d\omega = e^{-ax}$$

左辺の積分で $R \rightarrow \infty$ へもっていくと, 半円周上の積分はゼロとなる. よって

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} J(\omega) d\omega = e^{-ax}$$

$x<0$ では, 下半面で同じことをくり返せばよい. 結果は

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} J(\omega) d\omega = e^{ax}$$

となり, 正しくもとの $f(x)$ を再現している.

[例6] $f(x) = x$

この例では $\delta'(\omega)$ が現われる.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-i\omega x} dx = i \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} dx = 2\pi i \delta'(\omega) \quad (3.45)$$

$$\text{逆変換: } \frac{1}{2\pi} 2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(\omega) e^{i\omega x} d\omega = i(-) \left(\frac{\partial}{\partial \omega} e^{i\omega x} \right)_{\omega=0} = x \quad (3.46)$$

ここで公式(2.75)を用いた。超関数に対する公式を形式的に用いることによってフーリエ変換と逆変換が可能なのである。

1-2節の例2の1周期を拡大することによって同じ問題を考えてみよう。そのため(1.23)を1周期 $-L < x < L$ で考える。

$$f(x) = x \quad (-L < x < L) \quad (3.47)$$

これを周期的に拡張した関数の複素フーリエ係数 c_n は、 $x \rightarrow \frac{\pi}{L}x$ と変換して

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L x e^{-i\frac{n\pi}{L}x} dx \\ = \begin{cases} \frac{iL}{n\pi} (-1)^n & (n \neq 0) \\ 0 & (n=0) \end{cases} \quad (3.48)$$

で与えられる。 $\omega = n\pi/L$ において ω が一定となるように $L \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ すれば

$$2Lc_n \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-i\omega x} dx = 2\pi i \delta'(\omega) \quad (3.49)$$

となり、(3.33)が確かめられる。(3.29)の形でいえば(3.35)を用いて

$$F(\omega) = \sum_{n=\pm 1, \pm 2, \dots} \frac{2iL}{n} (-1)^n \delta\left(\omega - \frac{n\pi}{L}\right) \quad (3.50)$$

これが $L \rightarrow \infty$ で $2\pi i \delta'(\omega)$ となるのである。詳しくは、章末演習問題[4]として取り上げてあるので、そちらを見ていただきたい。

[例7] 例6を一般化した関数

$$f(x) = x^n \quad (n \geq 1) \quad (3.51)$$

を考えよう。このとき

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-i\omega x} dx = 2\pi \left(i \frac{d}{d\omega} \right)^n \delta(\omega) \quad (3.52)$$

$$\text{逆変換: } \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \left(i \frac{d}{d\omega} \right)^n \delta(\omega) e^{i\omega x} d\omega = x^n \quad (3.53)$$

は、部分積分をくりかえして証明できる。

[例8] 周期関数のフーリエ変換のもう1つの例として図2-6の $A_R(x)$ をとり上げる。Rは有限にしておくが、周期を $2L$ に変えたいので、 $x \rightarrow \frac{\pi}{L}x$ と変える。こうすると、 A_R の周期は $2L$ になり、そのフーリエ係数は $b_n = 0$,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L A_R(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx = \begin{cases} \frac{2R}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2RL} & (n \neq 0) \\ \frac{1}{L} & (n=0) \end{cases}$$

となる。よって $A_R(x)$ のフーリエ級数は

$$A_R(x) = \frac{1}{2L} + \frac{1}{2} \sum_{n=\pm 1, \pm 2, \dots}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2RL)}{n\pi/2R} \cos \frac{n\pi}{L} x \quad (3.54)$$

で与えられる。さて

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{L} x e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{n\pi}{L}x} e^{-i\omega x} dx = 2\pi \delta\left(\omega - \frac{n\pi}{L}\right)$$

を用いて、 $A_R(x)$ のスペクトル関数は

$$F(\omega) = \frac{\pi}{L} \delta(\omega) + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2RL)}{n\pi/2R} \delta\left(\omega - \frac{n\pi}{L}\right) \quad (3.55)$$

この関数を図3-3にプロットしてある。ただし縦軸は $F(\omega)$ そのものではなく、δ関数にかかっている係数を書いてある。 $L \rightarrow \infty$ で連続スペクトルとなるようすがよくわかる。解析的には次のようにすればよい。

$$F(\omega) = \frac{\pi}{L} \delta(\omega) + \frac{\pi}{L} \sum_{n=\pm 1, \dots}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2RL)}{n\pi/2R} \delta\left(\omega - \frac{n\pi}{L}\right) \\ \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_0 \frac{\sin(\omega_0/2R)}{\omega_0/2R} \delta(\omega - \omega_0) = \frac{\sin(\omega/2R)}{\omega/2R} \quad (3.56)$$

(1.12)より $c_n = a_n/2$ 、よって

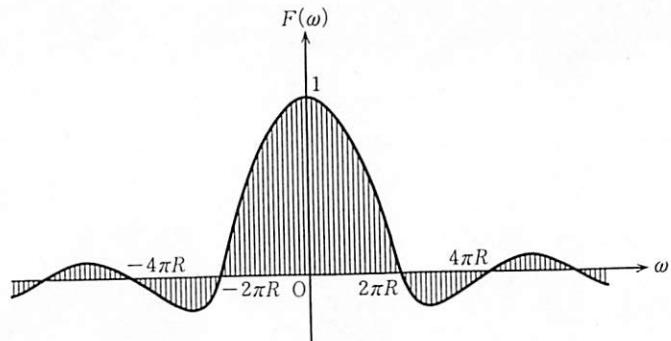


図 3-3

$$2Lc_n = \begin{cases} \frac{\sin(n\pi/2RL)}{n\pi/2RL} & (n \neq 0) \\ 1 & (n = 0) \end{cases}$$

$n=0$ の値は、 $n \neq 0$ の値において $n \rightarrow 0$ とすれば得られるので、形式的には $n \neq 0$ のものをすべての n について用いてよい。 $\omega = n\pi/L$ であったから、(3.33)が成立している。

[例 9] こんどは 1-2 節の例 1を考えよう。 $L \rightarrow \infty$ で新しい概念が出てくる。周期を $2L$ として、図 1-2 を考え、これを $f(x)$ とする。 $f(x)$ は $L \rightarrow \infty$ で階段関数 $\theta(x)$ となる。フーリエ級数の係数は

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L dx = 1, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{-1}{n\pi} \{(-1)^n - 1\}$$

となるので、 $f(x)$ のフーリエ展開は次のようになる。

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\sin(n\pi/L)x}{n} \quad (3.57)$$

スペクトル関数を求めるために、次の積分を考える。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{L} x e^{-i\omega x} dx &= -i \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \omega x dx \\ &= \frac{-i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \cos \left(\omega - \frac{n\pi}{L} \right) x - \cos \left(\omega + \frac{n\pi}{L} \right) x \right\} dx \\ &= \frac{-i}{2} 2\pi \left\{ \delta \left(\omega - \frac{n\pi}{L} \right) - \delta \left(\omega + \frac{n\pi}{L} \right) \right\} \end{aligned}$$

これを用いると

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int f(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \pi \delta(\omega) - i \sum_{n=\pm 1, \pm 3, \dots} \frac{1}{n} \left\{ \delta \left(\omega - \frac{n\pi}{L} \right) - \delta \left(\omega + \frac{n\pi}{L} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} &= \pi \delta(\omega) - i \frac{1}{2} \frac{2\pi}{L} \sum_{n=\pm 1, \pm 3, \dots} \frac{1}{n\pi/L} \left\{ \delta \left(\omega - \frac{n\pi}{L} \right) - \delta \left(\omega + \frac{n\pi}{L} \right) \right\} \\ &\xrightarrow{L \rightarrow \infty} \pi \delta(\omega) - i \frac{1}{2} \int d\omega_0 \frac{1}{\omega_0} \{ \delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0) \} = \pi \delta(\omega) - i \frac{1}{\omega} \end{aligned} \quad (3.59)$$

ここで右辺第 2 項の $\frac{1}{\omega}$ については大切な注意事項がある。(3.58)ではもともと $F(\omega)$ は、間隔 $\delta = 2\pi/L$ で $\omega = \pi/L$ から ∞ まで、または、 $\omega = -\pi/L$ から $-\infty$ まで続いている ω の値において、ゼロではなかった。 $L \rightarrow \infty$ にするとその間隔はゼロへいき、 $-\infty < \omega < \infty$ までスペクトルが並ぶ。 $\omega \neq 0$ ではスペクトルの重みは $\frac{1}{\omega}$ (これは(3.58)において δ 関数の係数が $\frac{1}{n}$ であることからきている)としてよいが、 $\omega = 0$ ではこの重みが無限大となってしまう。ところが $\omega = 0$ についてはもともと $-\delta < \omega < \delta$ にはスペクトルがなかったことを銘記しておく必要がある。このことを

$$P \frac{1}{\omega}$$

と書いてコーシーの主値(principal value)とよぶ。これも超関数の仲間であって、性質のよい関数 $g(\omega)$ をかけて積分して定義される。上に述べたことから、この積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(P \frac{1}{\omega} \right) g(\omega) d\omega = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{1}{\omega} g(\omega) d\omega + \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{\omega} g(\omega) d\omega \right\}$$

と書かれる。これをコーシーの主値積分とよぶ。よって $L \rightarrow \infty$ の極限で次の公式を得る。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\omega x} dx = \pi\delta(\omega) - iP \frac{1}{\omega}. \quad (3.60)$$

この積分は次のような技法でも得られる。まず $F(\omega)$ の積分を考えよう。

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega x} dx$$

ここで $x = +\infty$ での収束を保証するために $e^{-\epsilon x}$ を勝手に挿入する。 ϵ は正の小さな数で、積分のあとで $\epsilon \rightarrow 0$ とする。

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega x - \epsilon x} dx = \frac{1}{i\omega + \epsilon} = \frac{1}{i(\omega - i\epsilon)} \quad (3.61)$$

$F(\omega)$ は ω を複素変数としたとき、 $\omega = i\epsilon$ で 1 位の極をもつ。これも超関数とみて、性質のよい $g(\omega)$ をかけて積分する。その積分を 3 つに分ける

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) g(\omega) d\omega &= \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\omega)}{\omega - i\epsilon} d\omega \\ &= \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{g(\omega)}{\omega - i\epsilon} d\omega + \frac{1}{i} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{g(\omega)}{\omega - i\epsilon} d\omega + \frac{1}{i} \int_{\delta}^{\infty} \frac{g(\omega)}{\omega - i\epsilon} d\omega \end{aligned}$$

δ は正の小さな数だが固定しておいて、 $\epsilon \rightarrow 0$ とする。 $\int_{-\infty}^{-\delta}$ と \int_{δ}^{∞} ではそのまま $\epsilon \rightarrow 0$ の極限がとれて、その後で $\delta \rightarrow 0$ すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(P \frac{1}{\omega} \right) g(\omega) d\omega$$

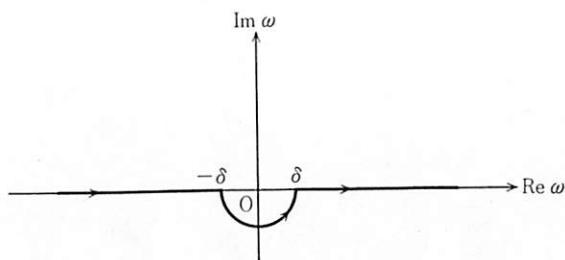


図 3-4

となる。 $\int_{-\delta}^{\delta}$ の部分は $\epsilon \rightarrow 0$ として計算する。それに伴って ω の積分路を図 3-4 のようにとる。この図では下半面に向かって半径 δ の半円になるように積分路を変形してある。 δ は小さいとしてこの部分は次のように計算できる。 $x = \delta e^{i\theta}$ (θ は π から 2π まで) において、 $dx = i\delta e^{i\theta} d\theta$ とし、

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{g(\delta e^{i\theta})}{\delta e^{i\theta}} i\delta e^{i\theta} d\theta \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{} i\pi g(0)$$

これは

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\omega)}{\omega - i\epsilon} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ P \frac{1}{\omega} + i\pi\delta(\omega) \right\} g(\omega) d\omega \quad (3.62)$$

と書けるので、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限で成立する公式

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega - i\epsilon} = P \frac{1}{\omega} + i\pi\delta(\omega) \quad (3.63)$$

を得る。(3.61)を考慮すると、この式は(3.60)と同じものである。

逆変換：(3.61)を用いると逆変換ができる。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{\omega - i\epsilon} d\omega \quad (3.64)$$

この積分に似た形は、すでに何回か出てきている。つまり積分

$$\int_{-R}^R H(\omega) d\omega, \quad H(\omega) \equiv \frac{e^{i\omega x}}{\omega - i\epsilon}$$

を考えて $R \rightarrow \infty$ とするのであるがこの積分は例 5 で出てきたものである。 $x > 0$ なら上半平面の半径 R の大きな半円周上で $H(\omega)$ の積分は $R \rightarrow \infty$ でゼロ

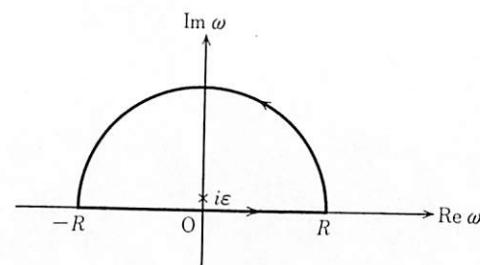


図 3-5

となるので、つけ加えてよい。結局、図3-5のように $H(\omega)$ を閉曲線で積分することになる。この中には $\omega = i\varepsilon$ の1位の極が存在するので、留数定理より

$$\frac{1}{2\pi i} \int H(\omega) d\omega = e^{i\omega(i\varepsilon)} = e^{-\omega\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1$$

となる。 $x < 0$ では下半面の半円周をつけ加えるが、このときは $\omega = i\varepsilon$ の1位の極は閉曲線の外にあるので、

$$\frac{1}{2\pi i} \int H(\omega) d\omega = 0$$

となり、(3.64)は階段関数 $\theta(x)$ となる。

$\theta(x)$ は $\delta(x)$ を積分したものである。(2.77)から

$$\int_{-\infty}^x \delta(y) dy = \theta(x)$$

$\delta(x)$ に対する $F(\omega)$ は 1, $\theta(x)$ に対する $F(\omega)$ は $\frac{1}{i\omega + \varepsilon}$ であったから、1回の積分 $\int_{-\infty}^x dx'$ に対してスペクトル関数には $\frac{1}{i\omega + \varepsilon}$ という因子がかかることが予想される。つまり、スペクトル関数に関しては $\int_{-\infty}^x dx \rightarrow \frac{1}{i\omega + \varepsilon}$ が対応する。

さらにこれをつづけると

$$\int_{-\infty}^x dx' \int_{-\infty}^{x'} dy \rightarrow \frac{1}{(i\omega + \varepsilon)^2}$$

となる。よって

$$\int_{-\infty}^x \theta(x') dx' = \begin{cases} x & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \longrightarrow F(\omega) = \frac{1}{(i\omega + \varepsilon)^2} \quad (3.65)$$

一般に次の関係がある。

$$\begin{cases} \frac{1}{n!} x^n & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \longrightarrow F(\omega) = \frac{1}{(i\omega + \varepsilon)^{n+1}} \quad (3.66)$$

ここですべての公式で $\varepsilon \rightarrow +0$ を意味する。

表3-1に以上の例における $f(x)$ と $F(\omega)$ をまとめておいた。

表3-1

$f(x)$	$F(\omega)$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$\delta(x)$	1
$\frac{d^n \delta(x)}{dx^n}$	$i^n \omega^n$
x	$2\pi i \delta'(\omega)$
x^n	$2\pi i^n \frac{d^n}{d\omega^n} \delta(\omega)$
e^{-ax^2} ($a > 0$)	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a}$
$e^{-a x }$ ($a > 0$)	$\frac{2a}{\omega^2 + a^2}$
$\begin{cases} R & (x < 1/2R) \\ 0 & (x > 1/2R) \end{cases}$	$\frac{2R}{\omega} \sin \frac{\omega}{2R}$
$\theta(x)$	$\frac{1}{i\omega + \varepsilon}$
$\begin{cases} \frac{1}{n!} x^n & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$	$\frac{1}{(i\omega + \varepsilon)^{n+1}}$

3-3 フーリエ変換と微分方程式

フーリエ変換を用いると、微分方程式の解き方として新しい方法を得る。そしてある場合にはこの方法が便利なこともある。このことを例で見ていくことにしよう。

準備として次の数学的问题を考えよう。 ω を連続変数、 $f(\omega)$ をその関数とし、 $f(\omega)$ は超関数まで許すとする。 ω_0 をある与えられた実数として方程式

$$\omega f(\omega) = \omega_0 f(\omega) \quad (3.67)$$

をみたす $f(\omega)$ をさがす。 $\omega \neq \omega_0$ なら $f(\omega) = 0$ はよいが、 $\omega = \omega_0$ では $f(\omega)$ は不定というのがふつうの答である。これを超関数の中でさがすと、 $f(\omega)$ はすべての ω で決まってしまうのである。超関数の意味で(3.67)が成立するとは、(3.67)に性質の良いどんな関数 $g(\omega)$ をかけて積分しても成立するということである。公式(2.84)から、

$$f(\omega) = c\delta(\omega - \omega_0) \quad (3.68)$$

が(3.67)の解である。ただし c は任意定数である。(3.67), (3.68)は

$$(\omega - \omega_0)f(\omega) = 0 \longleftrightarrow f(\omega) = c\delta(\omega - \omega_0) \quad (3.69)$$

と書ける。さらに一般化して

$$(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)f(\omega) = 0 \longleftrightarrow f(\omega) = c_1\delta(\omega - \omega_1) + c_2\delta(\omega - \omega_2) \quad (3.70)$$

を得る。(3.70)をさらに一般化しよう。 $k(\omega)$ を与えられた関数として

$$(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)f(\omega) = k(\omega) \longleftrightarrow f(\omega) = c_1\delta(\omega - \omega_1) + c_2\delta(\omega - \omega_2)$$

$$+ \frac{k(\omega)}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} \quad (3.71)$$

ここで現われた $\omega = \omega_1, \omega_2$ における分母のゼロ点の処理については、例 4 でみることにする。

以上の公式を用いて例題をいくつか考えてみよう。物理的にはいざれも、単振動する質点にいろいろな外力が働いているものである。

[例 1] まず 1-4 節の(1.62)を考える。(1.62)で記号を ω から ν に変える。

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \nu^2x(t) = 0 \quad (3.72)$$

これは外力が働いていない場合である。

これにフーリエ逆変換

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (3.73)$$

を用いると、

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-\omega^2)X(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (3.74)$$

となる。よって(3.72)は次の形をとる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-\omega^2 + \nu^2)X(\omega)e^{i\omega t} d\omega = 0 \quad (3.75)$$

ここで $e^{-i\omega t}$ をかけて t で $-\infty$ から ∞ まで積分し、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega')t} dt = 2\pi\delta(\omega - \omega')$$

を用いて

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} (-\omega^2 + \nu^2)X(\omega)\delta(\omega' - \omega) d\omega' \\ &= (-\omega'^2 + \nu^2)X(\omega') = -(\omega' - \nu)(\omega' + \nu)X(\omega') \end{aligned} \quad (3.76)$$

を得る。ここで(3.71)を用いて

$$X(\omega) = c_1\delta(\omega - \nu) + c_2\delta(\omega + \nu) \quad (3.77)$$

これを $x(t)$ へ代入する。

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{-i\omega t} d\omega = \frac{c_1}{2\pi}e^{-i\nu t} + \frac{c_2}{2\pi}e^{i\nu t} \quad (3.78)$$

$x(t)$ が実数なら

$$\frac{c_1}{2\pi} = \frac{c_2^*}{2\pi} = \frac{a + ib}{2}$$

にとって

$$x(t) = a \cos \nu t + b \sin \nu t \quad (3.79)$$

これは良く知られた一般解で、 a, b は初期条件できるものである。

[例 2] 非齊次方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \nu^2x(t) = k \quad (3.80)$$

を考える。この例は、一様重力場のように一定の外力が働いている場合に対応する。 k は定数とすると、そのフーリエ変換は $\delta(\omega)$ に比例するので

$$k = k \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

と書ける。よって(3.80)から

$$(-\omega^2 + \nu^2)X(\omega) = 2\pi k\delta(\omega)$$

よって、(3.71)から $X(\omega)$ が求まる。

$$X(\omega) = c_1\delta(\omega - \nu) + c_2\delta(\omega + \nu) + \frac{2\pi k\delta(\omega)}{-\omega^2 + \nu^2}$$

右辺第 2 項の分母が $\omega = \pm \nu$ でゼロとなるが分子は $\omega = 0$ 以外でゼロなので問題はない。これから

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{c_1}{2\pi} e^{-i\nu t} + \frac{c_2}{2\pi} e^{i\nu t} + k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\omega)}{-\omega^2 + \nu^2} e^{-i\omega t} d\omega \\ &= a \cos \nu t + b \sin \nu t + \frac{k}{\nu^2} \end{aligned} \quad (3.81)$$

を得る。これはたしかに(3.80)の一般解である。(3.81)右辺の k/ν^2 は非齊次方程式(3.80)の特殊解である。

[例3] 1-4節の例1, すなわち

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \nu^2 x(t) = f_0 \sin \omega_0 t \quad (3.82)$$

をとりあげよう。この例では、周期的な外力が働いている。さて

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega_0 t e^{-i\omega t} dt = \frac{\pi}{i} (\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)) \quad (3.83)$$

であるから、 $\omega_0 \neq \nu$ として次式を得る。

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + \nu^2)X(\omega) &= \frac{\pi f_0}{i} (\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)) \\ X(\omega) &= c_1 \delta(\omega - \nu) + c_2 \delta(\omega + \nu) + \frac{\pi f_0}{i} \frac{\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)}{(-\omega^2 + \nu^2)} \\ x(t) &= \frac{c_1}{2\pi} e^{-i\nu t} + \frac{c_2}{2\pi} e^{i\nu t} + \frac{f_0}{2i} \frac{e^{-i\omega_0 t} - e^{i\omega_0 t}}{-\omega_0^2 + \nu^2} \\ &= a \cos \nu t + b \sin \nu t + f_0 \frac{\sin \omega_0 t}{\nu^2 - \omega_0^2} \end{aligned} \quad (3.84)$$

これは(1.70)に(3.82)の齊次方程式の一般解を加えたものである。

[例4] こんどは1-4節の例2をとりあげる。1-4節では $\nu=0$ としたがここでは $\nu \neq 0$ のままフーリエ変換で解いてみよう。

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \nu^2 x(t) = f(t) \quad (3.85)$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (0 < t < T/2) \\ 0 & (-T/2 < t < 0) \end{cases}$$

$$f(t+T) = f(t)$$

この場合、外力は矩形波の形をしている。 $f(t)$ のフーリエ級数は、(1.74)か

ら

$$f(t) = \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\sin \frac{2n\pi}{T} t}{n\pi} \quad (3.86)$$

フーリエ変換して

$$F(\omega) = \pi \delta(\omega) + \frac{2}{i} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n} \left\{ \delta\left(\omega - \frac{2n\pi}{T}\right) - \delta\left(\omega + \frac{2n\pi}{T}\right) \right\} \quad (3.87)$$

よって

$$X(\omega) = c_1 \delta(\omega - \nu) + c_2 \delta(\omega + \nu) + \frac{F(\omega)}{-\omega^2 + \nu^2} \quad (3.88)$$

これから $x(t)$ を求めると、(1.75)と(c_1, c_2 の項を除いて)一致する。

ここで $T \rightarrow \infty$ とすると、 $t < 0$ では力は働かず時刻 $t=0$ から大きさ 1 の一定の力が働いたことになる。 $f(t)$ の形は

$$f(t) = \theta(t) \quad (3.89)$$

という階段関数である。このとき、3-2節例9で調べたように、あるいは表3-1から

$$F(\omega) = \frac{1}{i\omega + \varepsilon} \quad (\varepsilon \rightarrow +0) \quad (3.90)$$

と求まる。もとの $x(t)$ を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{c_1}{2\pi} e^{i\nu t} + \frac{c_2}{2\pi} e^{-i\nu t} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega - i\varepsilon} \frac{e^{i\omega t}}{-\omega^2 + \nu^2} d\omega \end{aligned} \quad (3.91)$$

この結果をみると、右辺の積分においては $\omega = i\varepsilon$, $\omega = \pm\nu$ の場所に1位の極があって、 $\omega = \pm\nu$ の方は実軸上なので ω 積分はできない。ここでは共鳴がおこっていることに着目し、1-4節例1で実行した(1.71)を導くときに使った手法をここでも用いる。まず

$$\frac{e^{i\omega t}}{-\omega^2 + \nu^2} = \frac{-1}{2\nu} \left(\frac{e^{i\nu t}}{\omega - \nu} - \frac{e^{i\nu t}}{\omega + \nu} \right) \quad (3.92)$$

と書く。 (3.91) の c_1, c_2 が任意であることを利用して、(3.91) の右辺第2項を

$$\begin{aligned} J &\equiv \frac{1}{2\pi i} \frac{-1}{2\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{i\omega t} - e^{i\nu t}}{\omega - \nu} - \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\nu t}}{\omega + \nu} \right) \frac{1}{\omega - i\varepsilon} d\omega \\ &\equiv -\frac{1}{2\nu} (I^{(1)} - I^{(2)}) \end{aligned} \quad (3.93)$$

と変更する。 c_1, c_2 も別の c'_1, c'_2 となる。

R を正の大きな数として

$$I_R^{(1)} \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^R \frac{e^{i\omega t} - e^{i\nu t}}{\omega - \nu} \frac{d\omega}{\omega - i\varepsilon}$$

を考えよう。 $\omega = \nu$ では正則となっている。 $t > 0$ なら $\text{Im } \omega > 0$ の上半面に、原点を中心として半径 R の半円をつけ加えて、積分路を閉曲線としてもよい。その結果 $\omega = i\varepsilon$ の極のみひろって、 $R \rightarrow \infty$ の極限で $I^{(1)}$ は次のように計算される。

$$I^{(1)} = \frac{e^{-it} - e^{i\nu t}}{i\varepsilon - \nu} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} \frac{1 - e^{i\nu t}}{-\nu} \quad (t > 0)$$

$t < 0$ では下半面の半円周をつけ加えて、

$$I^{(1)} = 0 \quad (t < 0)$$

同様に

$$I^{(2)} = \begin{cases} \frac{1 - e^{-i\nu t}}{\nu} & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

よって

$$J = \begin{cases} -\frac{1}{2\nu} \left(\frac{1 - e^{i\nu t}}{-\nu} - \frac{1 - e^{-i\nu t}}{\nu} \right) = \frac{1}{\nu^2} (1 - \cos \nu t) & (t > 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

結局、 $x(t)$ として

$$x(t) = \frac{c'_1}{2\pi} e^{i\nu t} + \frac{c'_2}{2\pi} e^{-i\nu t} + \tilde{x}(t) \quad (3.94a)$$

$$\tilde{x}(t) = \theta(t) \frac{1}{\nu^2} (1 - \cos \nu t) \quad (3.94b)$$

を得る。これが(3.85)の解となっていることを確かめるには、 $\theta'(t) = \delta(t)$ を用いて次のようにすればよい。

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \theta(t) \frac{1}{\nu} \sin \nu t + \delta(t) \frac{1}{\nu^2} (1 - \cos \nu t) = \theta(t) \frac{1}{\nu} \sin \nu t$$

ここで(2.72)を用いた。さらに、次式も同様にして得られる。

$$\frac{d^2\tilde{x}(t)}{dt^2} = \theta(t) \cos \nu t + \delta(t) \frac{\sin \nu t}{\nu} = \theta(t) \cos \nu t$$

これらを用いれば(3.94a)が(3.85)の解であることは確かめられる。この例で見たように、外力 $f(t)$ が $t=0$ で不連続であると、 $x(t), dx(t)/dt$ は $t=0$ で連続であって、 $d^2x(t)/dt^2$ が不連続となる。

[例 5] 最後に

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \nu^2 x(t) = \delta(t) \quad (3.95)$$

を考えよう。これは $t=0$ で大きな瞬間的な力(撃力という)が働いた場合である。 $\delta(t)$ のフーリエ変換は 1 であるから、 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(\omega)$ は次のように求まる。

$$X(\omega) = c_1 \delta(\omega - \nu) + c_2 \delta(\omega + \nu) + \frac{1}{-\omega^2 + \nu^2}$$

$$x(t) = \frac{c_1}{2\pi} e^{i\nu t} + \frac{c_2}{2\pi} e^{-i\nu t} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{-\omega^2 + \nu^2} d\omega$$

$$= a \cos \nu t + b \sin \nu t + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega t}{-\omega^2 + \nu^2} d\omega$$

ここで a が任意であることから、例 4 と同様に次のように変形する。

$$x(t) = a' \cos \nu t + b \sin \nu t + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega t - \cos \nu t}{-\omega^2 + \nu^2} d\omega$$

これで $\omega = \nu$ での特異性がなくなった。積分を実行すると(章末演習問題[2]参照)

$$\begin{aligned}x(t) &= a' \cos \nu t + b \sin \nu t + \tilde{x}(t) \\ \tilde{x}(t) &= \frac{1}{2\nu} \epsilon(t) \sin \nu t\end{aligned}\quad (3.96)$$

を得る。ただし $\epsilon(t)$ は符号関数で $\epsilon(t) = \theta(t) - \theta(-t)$ と書ける。これが (3.95)を満たしていることは、次の微分演算から分かる。(2.78)を用いて得られる関係式 $\epsilon'(t) = 2\delta(t)$ から

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} &= \frac{1}{2} \epsilon(t) \cos \nu t + \frac{1}{\nu} \delta(t) \sin \nu t = \frac{1}{2} \epsilon(t) \cos \nu t \\ \frac{d^2\tilde{x}(t)}{dt^2} &= -\frac{\nu}{2} \epsilon(t) \sin \nu t + \delta(t) \cos \nu t = -\frac{\nu}{2} \epsilon(t) \sin \nu t + \delta(t)\end{aligned}\quad (3.97)$$

撃力の場合には $\tilde{x}(t)$ は連続であるが、 $d\tilde{x}(t)/dt$ はすでに不連続性を含んでいる。 $t=0$ での $d\tilde{x}(t)/dt$ のとびは 1 であり、これは $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ と一致している。力学では $d\tilde{x}(t)/dt$ は運動量にあたり、 $\int f(t) dt$ は力積とよばれる。上のことは「運動量の変化は力積に等しい」という定理の一例である。

3-4 パーシバルの等式とたたみこみ

フーリエ級数の場合のパーシバルの等式(2.32)に対応するものが、フーリエ変換でも存在するはずである。(3.5), (3.4)から、 $f(x)$ を実数として次の等式が導ける。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega') e^{i\omega' x} d\omega' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \omega') F(\omega) F(\omega') d\omega d\omega' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F(-\omega) d\omega\end{aligned}\quad (3.98)$$

ここで $F^*(\omega) = F(-\omega)$ を示そう。(3.4)と $f^*(x) = f(x)$ を用いて

$$F(\omega)^* = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx = F(-\omega)$$

よって(3.98)は次の形をとる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \quad (3.99)$$

これをフーリエ変換に対するパーシバルの等式という。この式自体は $f(x)$ や $F(\omega)$ が超関数の場合には両辺が無限大となり、成立しないのである。例えば、 $f(x)=1$, $F(\omega)=2\pi\delta(\omega)$ では左辺は ∞ 、右辺は形式的には

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) \delta(\omega) d\omega = 2\pi\delta(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega = 2\pi\delta(0)$$

ここで(2.72)を用いた。 $\delta(0)=\infty$ である。しかし超関数を含まない場合、(3.99)を確かめることができる。逆に、(3.99)を利用して積分公式をつくることもできる。例えば、3-2節の例でみてみよう。

[3-2節例3]

$$f(x) = \begin{cases} R & (|x| < \frac{1}{2R}) \\ 0 & (|x| > \frac{1}{2R}) \end{cases}, \quad F(\omega) = \frac{\sin(\omega/2R)}{\omega/2R}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx = R^2 \cdot \frac{2}{2R} = R$$

一方、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{2R}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 dy = R$$

ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 dy = \pi$$

を用いた。たしかに(3.99)が成立している。

[3-2節の例4]

$$f(x) = e^{-ax^2}, \quad F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a}$$

この場合

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2/2a} d\omega = \frac{1}{2a} \sqrt{2a\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}$$

よって(3.99)が確かめられた。

ここでバーシバルの等式を力学の運動方程式に適用してみよう。質点が dx だけ移動したとき外力 F のなす仕事は Fdx であるから、 x_a から x_b まで移動したときの仕事 W_{ab} は

$$W_{ab} = \int_{x_a}^{x_b} F dx = \int_{t_a}^{t_b} F \frac{dx}{dt} dt \quad (3.100)$$

で与えられる。第2の表示は時間積分の形で書かれている。ここで抵抗のある運動方程式

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \eta \frac{dx(t)}{dt} + \nu^2 x(t) = F(t) \quad (3.101)$$

を考えよう。これは(1.59)に抵抗力 $\eta \frac{dx(t)}{dt}$ を加えたもので η は摩擦係数とよばれる。 η の項は、例えればバネにつながれた質点が机の上で振動しているとき、机との摩擦からくる力である。(3.101)に dx/dt をかけて t で積分する。そうすると、右辺から W_{ab} が出る。

$$\begin{aligned} W_{ab} &= \int_{t_a}^{t_b} F \frac{dx}{dt} dt = \int_{t_a}^{t_b} \left(m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \eta \frac{dx(t)}{dt} + \nu^2 x(t) \right) \frac{dx(t)}{dt} dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} dt \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 + \frac{\nu^2}{2} x^2(t) \right\} dt + \int_{t_a}^{t_b} \eta \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 dt \\ &\equiv E(t_b) - E(t_a) + D_{ab} \end{aligned}$$

ここで $E(t)$ は粒子のもつ力学エネルギー、 D_{ab} は摩擦により t_a から t_b の間に生じる熱エネルギーで、

$$E(t) = \frac{m}{2} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 + \frac{\nu^2}{2} x(t)^2$$

$$D_{ab} = \eta \int_{t_a}^{t_b} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt$$

と定義される。 D_{ab} の方は両端 t_a, t_b での何かの量の値では書けないのである。熱エネルギーの $t_b \rightarrow +\infty$, $t_a \rightarrow -\infty$ の極限は、バーシバルの等式に現われる

形をしている

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \frac{dx(t)}{dt} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

を D_{ab} に代入して、この問題では

$$D_{ab} = \frac{\eta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X(\omega)|^2 d\omega \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(\omega) d\omega$$

となる。(熱)エネルギーの意味から、 $\eta \omega^2 |X(\omega)|^2 \equiv \mathcal{E}(\omega)$ をエネルギーのスペクトル関数とよぶ。

たたみこみと積分方程式 2つの関数 $f(x), g(x)$ から、次のような積分を考える。

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy \quad (3.102)$$

これを f と g のたたみこみ(convolution)という。 $f(x), g(x), h(x)$ のフーリエ変換を $F(\omega), G(\omega), H(\omega)$ とする。

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) e^{-i\omega x} dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} g(x-y) e^{-i\omega(x-y)} dy dx \end{aligned}$$

ここで $y=y'$, $x-y=x'$ とおくと、 x', y' は $-\infty < x' < \infty$, $-\infty < y' < \infty$ の範囲を動く。よって

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y') e^{-i\omega y'} dy' \int_{-\infty}^{\infty} g(x') e^{-i\omega x'} dx' = F(\omega) G(\omega) \quad (3.103)$$

よってたたみこみの関係はフーリエ変換した後では単なる積となる。これを応用して、次のような積分方程式が解ける。

$f(x)$ を解くべき関数、 $K(x), L(x)$ を既知の関数とし、積分方程式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy K(x-y) f(y) = L(x)$$

を考える。フーリエ変換して

$$\begin{aligned} K(\omega)F(\omega) &= L(\omega) \\ F(\omega) &= \frac{L(\omega)}{K(\omega)} \end{aligned} \quad (3.104)$$

ここで $K(\omega)$ は実数 ω でゼロにはならないとした。これから

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(\omega)}{K(\omega)} e^{i\omega x} d\omega$$

を用いて $f(x)$ が求まる。 $K(x-y) \equiv K_{x,y}$ と書いて行列のように考えれば、 $K_{x,y}$ はフーリエ変換で対角化され、(3.104)になると考へてもよい。

[例 1] $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-y)^2} f(y) dy = e^{-bx^2} \quad (a > b > 0) \quad (3.105)$

この例では、(3.43)において $K(\omega), L(\omega)$ が知られている。

$$K(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a}, \quad L(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\omega^2/4b}$$

よって

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \sqrt{\frac{a}{b}} \exp\left\{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\omega^2\right\} \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{b}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\omega^2\right\} e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{b}} \sqrt{\frac{4\pi}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}} \exp\left(-\frac{x^2}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}\right) \\ &= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a-b}} \exp\left\{-\frac{ab}{a-b}x^2\right\} \end{aligned} \quad (3.106)$$

実際(3.106)が(3.105)の解であることは

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-y)^2} \exp\left\{-\frac{ab}{a-b}y^2\right\} dy = \frac{\sqrt{\pi(a-b)}}{a} e^{-bx^2}$$

から確かめることができる。

[例 2] 微分方程式も(3.76)を用いれば、積分方程式の形に書ける。例えば

$$K(t-t') = \delta''(t-t') + \nu^2 \delta(t-t')$$

とおくと

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t-t') x(t') dt' = \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \nu^2 x(t)$$

と書ける。よって(3.85)は

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t-t') x(t') dt' = f(t)$$

の形となる。このとき

$$K(\omega) = -\omega^2 + \nu^2$$

であって、3-3節での取扱いと同じになる。

第3章演習問題

[1] 次の関数のフーリエ変換を求め、その逆変換を実行してもとの関数に戻ることを示しなさい。

(a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$

(b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

[2] 3-3節の例5における(3.96)式を示しなさい。つまり次の積分公式を導きなさい。

$$\frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega t - \cos \nu t}{\omega^2 - \nu^2} d\omega = \frac{1}{2\nu} \epsilon(t) \sin \nu t$$

[3] 次の2つの例について、バーシバルの等式(3.99)を示しなさい。

(a) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ (演習問題[1]の(b))

(b) $f(x) = e^{-a|x|}$ ($a > 0$) (3-2節、例5)

[4] 3-2節例6を1-2節例2の $L \rightarrow \infty$ の極限として考えよう。(3.47)で1周期が定義される周期関数を、フーリエ変換すると(3.50)となる。このとき、 $L \rightarrow \infty$ で

$$F(\omega) \rightarrow 2\pi i \delta'(\omega)$$

となることを証明しなさい。これと(3.49)を合わせると、(3.32), (3.33)がこの例でも示されたことになる。

[5] 表3-1の例においては、バーシバルの等式は $\infty = \infty$ となるものがある。ところ

が次のように形式的に等式が成立していることを見ることもできる。(厳密には δ 関数をふつうの関数の極限として定義して証明できる。) 1という量の全積分を

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1 dx = \lim_{\omega \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} dx = \lim_{\omega \rightarrow 0} 2\pi\delta(\omega) = 2\pi\delta(0)$$

と考える。こうすると、表3-1の最初の例 $f(x)=1$, $F(\omega)=2\pi\delta(\omega)$ に対するバーシバルの等式は次のようになる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1^2 dx = \frac{1}{2\pi}(2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(\omega))^2 d\omega$$

左辺は上に述べたことから $2\pi\delta(0)$ 、右辺は、任意の関数 $h(\omega)$ に対して成立する $h(\omega)\delta(\omega)=h(0)\delta(\omega)$ を用いて

$$2\pi\delta(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega = 2\pi\delta(0)$$

となり、形式的にではあるが、バーシバルの等式を示すことができる。この技法で

$$f(x) = x^n, \quad F(\omega) = 2\pi i^n \frac{d^n \delta(\omega)}{d\omega^n}$$

に対しても、形式的にバーシバルの等式が成立していることを示しなさい。

4 線形空間とフーリエ変換

フーリエ級数展開においては、関数の集まり $(\cos \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{n\pi x}{L})$ すべての周期関数が展開可能であった。このことからすぐに思いつくのは、線形ベクトル空間における正規直交完全系をなすベクトル、つまり基底ベクトルである。

それでは、関数をある特定の関数の集まりを用いて展開することと、ベクトル空間の任意のベクトルを基底ベクトルで展開することは、どのように対応しているのであろうか。連続パラメーター x で指定される行列を考えると、この対応は鮮明になる。そして関数 $f(x)$ を、「線形空間におけるベクトル $|f\rangle$ 」の x で指定される基底ベクトル $|x\rangle$ への射影成分 $\langle x|f\rangle$ とみなすことによって対応が完成する。以下のことを見ていく。慣れない概念が入ってくるので議論を複雑にしないように、数学的厳密さは犠牲にして概念の説明に重点を置く。記号 $|f\rangle$, $\langle x|$, $\langle x|f\rangle$ などの意味は以下で説明しよう。

まず2行2列の行列からはじめ、 N 行 N 列さらに連続極限 $N \rightarrow \infty$ を定義する。そこで関数空間との対応が出てくる。ディラックのブラケットによる表示が便利なので、その説明とともに使用する。

4-1 有限次元のベクトルと行列

フーリエ級数による関数の展開形式が、線形ベクトル空間において、任意のベ