経済分析のための統計的方法

（第2版）

岩田暁一 著

東洋経済新報社

第 2 版のための序文

この書物の第 1 版を世に出してから早くも 15 年余りの歳月が流れた．この間に，大型コンピュータの高性能化，パソコン・電卓などの普及・低廉化が驚くほどの勢いで進行してきた．一方，本格的な情報化社会の到来にともない，各種多様な大量のデータを処理して意思決定に役立つ有用な情報を抽出することへの要求は以前にも増して高まっている．このような背景の下で，経済データの統計的分析が一部の学術研究者のみならず一般のエコノミスト達の間でも，15 年前と比較にならないほど広く行なわれるようになってきた．

しかしそれとともに，第 1 版の序文で指摘したような統計的方法の誤用の傾向もいっそう強まってきたといえる．特に，近頃は既製の統計計算用のプログラム・パッケージが簡単に利用できるようになっているので，それらを用いての分析が盛んに行なわれる．もちろんこのこと自体は結構なことであるが，コンピュータから出てくる計算結果の意味を正確に読みとれないことも多くなっているようである．このようなことでは，自然現象と比較にならないほど複雑な経済現象の構造を正しく捉えられるはずはない．複雑さをいっそう増している現代においては，適切かつ微妙な判断を行なっていくために統計的方法の基礎的な考え方をしっかり身につけることがますます必要になっているといえよう．

さて，第 1 版は未熟な著作であったにもかかわらず，今日まで参考書やテキストとして使用していただいてきた．この間，文字や行の差し替え程度の小さ

な訂正を増刷の機会がある度に行なってきた．しかし，年とともに厳密でない言い方や舌足らずな表現が目につくようになった．これらは部分的な小訂正では直しきれないものであるため，心ならずも放置されていた．また，使用されている具体例も時代離れしたものになってきた．今回，ようやく全面的な改訂の機会をえたことは，永年の重荷から解放される心地がして筆者にとりたいへん嬉しいことである．

この第２版での改訂の主要な点は次のとおりである．

第１に，どのような命題の提出に際しても，それに証明や理由をつけるかあるいは参照すべき文献を指示するという形で，かならずその根拠を与えることを徹底した．その際，できるだけ厳密な説明を与えるようにした．しかし分かりやすさが失われるおそれがあるときには，厳密な説明は脚注において補足的に与えるという形をとった．

第２に，時代の進歩に合わせて次のような改良を行なった．初学者向けの第I部の内容を若干レベルアップした．たとえば平均自乗誤差や検定力関数など従来は中級向けの第II部で説明していたものを，分かりやすい形にして第I部に移した．また第II部の第14，15，16章については完全に書き直した部分が特に多い．たとえば，回帰係数の検定を今回は線形制約の検定の中で統一的に説明したり，推定量の漸近的性質の説明を強化したりした．

第３に，あまりに分厚い本になることを避けるためかならずしもこの本に載せなくてもよいと思われる次の節を割愛した．順列・組合せ，標本抽出の実際，OC 曲線，非心F分布．

以上のような改訂を行なったけれども，全体として旧版の持ち味を損うことのないように配慮した．節の順序を変えたり，時代遅れの例題を取り替えたりしたが，章の配列はもとのままである．また，第I部における＊印を付した節や小節はやや高度の内容であるので初学者はスキップしても構わないという点も第１版と同様である．

第１版に対してはこれまで諸先生方や読者から，ご書評やコメント，誤りの箇所のご指摘を数多くいただいてきた．特に，慶応義塾大学商学部・経済学部の先輩，同僚の方々からは初版刊行以来本書に温かく接していただき，機会あるごとにご教示を賜わってきた．牧厚志教授からは例題の計算の大部分をチェックしていただいた．また浜田文雅，鳥居泰彦，新井益洋，吉岡完治，桜本光，

樋口美雄の諸先生方から今回の改訂のための貴重なご意見をいただいた．今日，第２版をこのような形でまとめることができるのはこれらの方々のご厚情の賜物である．ここに厚くお礼申し上げたい．この版ではご批判に基づき誤りの訂正に万全を期したつもりではあるが，経験法則によれば思わざるミスが未だ多く残っていると思われる．この版に対してもご叱正をいただければ幸いである．

末尾になったが，東洋経済新報社の山下乾吉氏からはこの10年来旧版の誤植訂正でお世話になっているが，今回の改訂作業においても，プランづくりから装幀にいたるまで終始熱心にご尽力いただいた．深く感謝したい．

1983年１月

岩　田　暁　一

第1版のための序文

この本は，経済の定量的な分析に従事しようとする人たちに，統計的方法の基礎を提供することを目的としている．

最近，経済や経営関係の統計資料が充実し，また電子計算機などのデータ処理機構が目ざましい発達を遂げてきた．そのため経済分析における統計的方法の適用分野は急速に拡大してきた．しかし，その際適用の仕方を間違ったり，誤った結論を導いたりすることがしばしば見受けられる．これは分析を行なっている人が，自分の使っている方法の意味を十分理解していないからであろう．

この本では，経済分析で実際に使うという立場から内容を選択し，しかもその方法の意味や限界を読者に理解させるように記述を工夫した．定理の証明はなるべく省略せず，統計学の論理を納得させることに力点をおいた．いわゆるモンテカルロ法によって，いろいろな分布を実験的に実際につくってみせていることも特徴の1つといえよう．

この本は第Ⅰ部と第Ⅱ部に分かれており，第Ⅰ部は初等的基礎的，第Ⅱ部は中級程度の内容となっている．第Ⅰ部は大学の教養課程の1年間の講義に適当な内容である．ただ配列の都合上，第Ⅰ部にかなり高度な部分（＊印をつけた章，節）もはさまれている．＊印の部分は最初はスキップしてかまわない．

第Ⅱ部は行列の説明から始まる．行列の知識は経済分析を行なうものにとって現在欠くことのできないものであるので，統計的方法を理解するうえに必要最少限の知識をまとめておいた．回帰分析は実用上著しく重要であるので，特

に詳しく取り扱った．第Ⅱ部は全体として，計量経済学的方法への橋渡しとなると思う．

いうまでもなく，現代の統計学は膨大な内容を持っている．この本では経済分析にとり重要な題目に内容を限定したわけであるが，それでもたとえば順序統計量，時系列分析，多変量解析などの重要なトピックを割愛せざるをえなかった．その他，筆者の不勉強のため不完全な点が多々あると思われる．読者の叱正を得て他日の改訂を期したいと思う．

この本を書くことを最初に勧めて下さったのは，辻村江太郎教授，小尾恵一郎教授である．その際，学生が卒業してからも座右において参考にできるようなテキストをという注文であったが，その要望をどの程度満たしえているか，大方の批判を仰ぎたい．沓掛暁氏には草稿を閲読していただいた．蓑谷千凰彦氏からは演習問題の作成その他において特にお世話になった．また尾崎巌教授，西川俊作教授，鳥居泰彦氏，黒田昌裕氏その他三田統計グループの方々から有益な示唆をいただいたことを感謝したい．また表やグラフの作成において常木英子，塚本登紀子，加納美枝，坂本由美子のみなさんのお世話になった．モンテカルロ実験においては慶応大学産業研究所三田電子計算室の IBM 1620 を利用させていただいた．

著者の学生時代にはじめて統計学の手ほどきを賜わって以来，ひきつづき御薫陶いただいている寺尾琢磨先生，鈴木諒一先生にこの機会に心からお礼申し上げたい．また，工学部管理工学科における6年間の在職時代に統計学の御指導をいただいた坂元平八先生，そして山内二郎先生をはじめとする管理工学科の諸先生に感謝の念を捧げたい．

最後に，この本の出版にあたって東洋経済新報社の田宮肇氏，高橋健一郎氏，渡部孝夫氏に一方ならずお世話になったことを感謝する．

1967年5月

岩　田　暁　一

目　　次

計算方法

-1, 1, 2, 5, 7
-1〜7 つまり
範囲は 8のこと

1 2 4 5 7 9 11 12
範囲は ①と③の差つまり
①=3 ③=10
10−3=7

奇数の場合 2 5 8 9 12
中央値

偶数の場合 2 4 7 9 11 12
8

1, 2, 2, 3, 4, 6, 6, 6, 7
たくさんの人がとった点数のこと
最頻値

第 I 部

第 1 章

資料の記述

1.1 母集団と標本

次ページのデータは，1980 年の勤労者世帯の所得(年間現金実収入，税込み，単位は万円)に関する 90 世帯分の数字である．

われわれの目的は，1980 年における全国の勤労者世帯の所得の実態を知ることにあるとしよう．われわれがいまもっているのは勤労者世帯全体の中のごく一部の世帯に関するデータにすぎない．このようなデータからどの程度まで全体の世帯の所得の有様を知ることができるであろうか．

統計学では，このような全国の勤労者世帯の所得額の数値全体の集まりを母集団 (population)[1] と呼び，そこからなんらかの方法で抜き出されてきたいくつかの世帯の所得に関する数値の集まりを標本(sample)と呼ぶ．

われわれが通常手にすることのできる資料は標本に関するものであり，母集団全体についての資料を手に入れることはまれである．それゆえ，手許にある標本を種々の角度から分析し，そこから得られる限りの情報を抽き出して，母

1) このように母集団とは，たとえば勤労者世帯の所得額の集まりであり，勤労者世帯そのものの集まりではない．勤労者世帯はその他いろいろな特性をもっている．たとえば，消費支出額，世帯主の年齢，有業人員数，未成年者数，信仰している宗教，支持政党，等々がある．これらを標識(mark)と呼ぶ．われわれが母集団と呼ぶのは 1 つまたは数個の標識に関する数値の集まり全体のことである(宗教などは数値で表わせないように考えられるが，たとえば仏教=1，キリスト教=2，その他=3 というふうにすればよい)．

表 1.1　勤労者世帯 90 世帯の所得

(単位　万円)

238	277	269	467	433	390	370	579	584	433
918	349	352	723	527	172	760	491	180	425
878	312	427	397	375	352	342	236	287	262
351	321	721	462	344	420	524	520	180	303
455	342	455	330	209	330	510	343	332	417
616	348	257	290	600	389	343	811	398	620
435	335	428	255	339	772	655	281	1,050	458
359	684	538	424	209	699	204	682	409	468
186	315	614	545	366	424	397	211	299	230

集団の性質を推測することが重要になる．

全国の勤労者世帯全体についてその所得額を調査することは，膨大な調査費用と人手をかければおそらく可能であろう．しかし通常はそのようにしてまで所得額の分布を正確に知る必要はない．そこでわれわれは，その一部の世帯の所得額を標本として抽出し調査するわけである．

その場合，全国の勤労者世帯からどのような仕方で調査すべき世帯を選び出してくるかが問題となる．たとえば世帯主が特定の会社に勤務する勤労者世帯のみを抽出したのでは，全国の勤労者世帯の所得の分布を知るのには不適当である．それゆえ，なるべく母集団全体をよく反映し代表するような仕方で標本を抽出しなくてはならない．

しかし母集団を代表するような標本といっても，その母集団をわれわれはこれから知ろうというのであるから，どのような標本が母集団を代表しているかはあらかじめは分からない．そこで 1 つの方法は，全国の勤労者世帯全体に通し番号をつけておき(たとえば全国に 1000 万世帯あるとすれば，1 番から 1000 万番までの番号をつける)，一方，0 から 9 までの番号を書いた 10 枚のカードを 7 組つくり，各組を 7 個の箱に入れ，箱に番号を 1 から 7 までつける．箱の中をよくかき混ぜ，各箱から 1 枚ずつカードを抜き出した結果，第 1 の箱から 4，第 2 の箱から 3，以下 9, 7, 0, 2, 1 というカードが出たら，439 万 7021 番の世帯を調査対象とする．次にそれぞれの箱にカードを戻してまたよくかき混ぜ，次の抽出を行ない次の世帯を選び出す．なお，7 枚すべて 0 ならば 1000 万番の世帯を選ぶ．このようにして，90 世帯を選び出すことができる．

このような操作は，なるべく**無作為に** (at random) 母集団から標本を抜き出すことを目的に行なうものである．このような標本抽出を**無作為抽出** (random sampling) といい，その結果抽出された標本を**無作為標本** (random sample) と呼ぶ．

無作為標本は母集団をよく代表しているであろうか．もちろんその保証はない．運が悪ければ，その所得が平均より大きい世帯のみを偶然抽出してしまうこともある．しかし，母集団の性質が分からない状態では，標本の無作為抽出はわれわれにとり最良の方法なのである.[2] そうして以下の章で述べる統計的方法の大部分が適用できるのは無作為標本に関してである．無作為抽出の意味を理解するためには，第 2 章以下の確率論を学ぶ必要がある．そこで標本の抽出の仕方については第 4 章まで保留しなければならない．この第 1 章ではこのようにして抽出された標本が与えられているときに，その標本のもっている情報をいかに整理し記述するかについて説明する.[3]

1.2　資料の分類

1.2.1　度数分布表の作成

表 1.1 の勤労者世帯の所得に関する 90 個の数値を，大きさ 90 の標本と呼ぶ．すなわち**標本の大きさ** (sample size) とは，標本を構成している数値の個数である．これを 90 個の標本という呼び方をしてはならない．

この大きさ 90 の標本から母集団の所得分布の状態を知るには，標本の性質をまず分析する必要がある．そこでこのままの形では見にくいので，データをいくつかの**階級** (class) に分類することが考えられる．以下に，データを階級分けする際に注意すべき事項をまとめてみよう．

データには通勤時間，体重，身長，電力消費量などのように，測定の精度さえ増せば，小数点以下何桁でも測れる連続した数量のものと，サイコロの目の

2)　実際の家計調査は本文で述べたような単純な無作為抽出を行なってはいない．実際に用いられる標本抽出の方法一般については西平重喜『統計調査法』培風館，1975 年などを参照せよ．

3)　与えられた標本がかならずしも無作為標本とは考えられない場合でも，この章で述べる整理や記述の仕方がとられてよいが，その場合にはあとに述べる標本分散などは母集団の分散の適切な推定値とならないことに注意すべきである．

数，所得金額，1カ月の雨の日の数，会社の従業者数などのように，ある単位より以下の桁には本来意味のない，不連続な数量とがある．前者を**連続型**(continuous type)，後者を**離散型**(discrete type)という．

表1.1の所得のデータは本来の最低単位が円だから離散型に属する．しかもこのデータでは1万円未満は四捨五入されて，万を最低単位としている．連続型のデータは，観測の精度が高ければいくらでも多くの桁数で表示しうるのであるが，通常は特定の桁で止められ，以下は切り捨てられるか，なんらかの方法で丸めが行なわれている．たとえば身長のデータでは169.3センチというふうにせいぜいミリの桁までである．

われわれがデータを階級分けする目的は，それによってデータ(標本)の特性を見やすくするためである．そのために**階級の数**を適当な個数に定めなければならない．これは標本の大きさに依存するが，通常10個から20個くらいの間が適当であろう．具体的には次のような手順で定めてゆけばよい．

(イ) **階級の幅の決定**……標本の数値の中から最大値と最小値を探し

$$R=\text{最大値}-\text{最小値}$$

を計算する．Rはあとで説明する**レインジ** (range) と呼ばれる量であるが，次に $R/10$, $R/20$ を計算し，階級の幅として $R/20$ と $R/10$ の間の適当な割り切れる数値を選ぶ．この例では最大値は1050，最小値は172であるからレインジは $R=1050-172=878$ である．それゆえ $R/20=43.9$, $R/10=87.8$ である．標本の大きさは90であまり大きくないから，階級の幅は大きめにとって，75とする．[4]

(ロ) **階級の境の決定**……階級の境は，データの有効最小桁の単位と0.5単位ずらせる．例では162.5を最初の階級の境とする(このようにとれば次に述べる階級値が簡単な値となる)．このようにすれば，データのどの数値もちょうど境に等しくなることはない．この場合，できればデータの最小値と最小階級の下の境との差が，階級の上の境とデータの最大値との差と大略等しくなるように境の位置を決めたほうがよい．

階級の個数はこのようにして境を区切ってゆけばおのずと決まる．

4) この説明では便宜上階級の幅は各階級同一としているが，かならずしも同一でなくともよい．

(ハ) **階級値の決定**……階級値とは各階級の両端の境の中央に位する値である．分類されたデータはその階級の階級値によって以後その値が代表される．それゆえこの階級値がなるべく簡単な数になるように階級の幅や境を決めておく必要がある．

(ニ) **各階級への分類**……これは表1.2のような**度数分布表**を作成することによって容易に行なえる．度数とはその階級に落ちる数値の個数である．

表1.2 度数分布表

階級番号	階級	階級値		度数	累積度数
	万円 万円	万円			
1	162.5～ 237.5	200	正 正	10	10
2	237.5～ 312.5	275	正 正 丅	12	22
3	312.5～ 387.5	350	正 正 正 正 一	21	43
4	387.5～ 462.5	425	正 正 正 正	20	63
5	462.5～ 537.5	500	正 丅	7	70
6	537.5～ 612.5	575	正	5	75
7	612.5～ 687.5	650	正 一	6	81
8	687.5～ 762.5	725	𤴓	4	85
9	762.5～ 837.5	800	丅	2	87
10	837.5～ 912.5	875	一	1	88
11	912.5～ 987.5	950	一	1	89
12	987.5～1,062.5	1,025	一	1	90

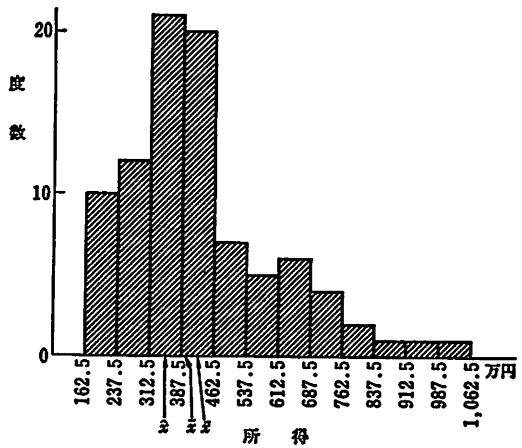
表1.2の最右端の欄は**累積度数**(cumulative frequency)であって，その階級ならびにそれより下の階級の度数の総計を示す．たとえば312.5～387.5万円の階級の累積度数は $10+12+21=43$ である．

1.2.2 ヒストグラムと累積多角形

次の段階は，上のようにして得られた度数分布表をグラフ化することである．その場合最も普通に用いられるのは**ヒストグラム**(度数柱状図，histogram)と**累積多角形**(cumulative distribution polygon)である．表1.2についてそれらを描くと図1.1，図1.2のようになる．

これらの図から明らかなように，ヒストグラムは，横軸に階級の境を等分に目盛り，縦軸に度数をとったものであり，累積多角形は，横軸はヒストグラムと同一であるが，各階級の右側の境界値に対応する高さに累積度数をとってあ

図 1.1　ヒストグラム



る.

1.2.3　度数分布の記号化

次のような記号の約束をしよう.

k：階級の番号

m：階級の総数

h：階級の幅

x_k：第 k 階級の階級値

f_k：第 k 階級の度数

F_k：第 k 階級の累積度数

すると表 1.2 の度数分布表は次の表 1.3 のような形になる.

標本の大きさを n とすれば，度数の定義から当然

$$f_1+f_2+\cdots+f_m=n \tag{1}$$

である.

ここで和または総計を表わす記号 $\sum$(シグマ)を導入しよう. このギリシャ文字は英語の S に相当し，summation の頭文字の意味である. これによれば

$$\sum_{k=1}^{m} f_k=f_1+f_2+\cdots+f_m$$

図 1.2　累積多角形

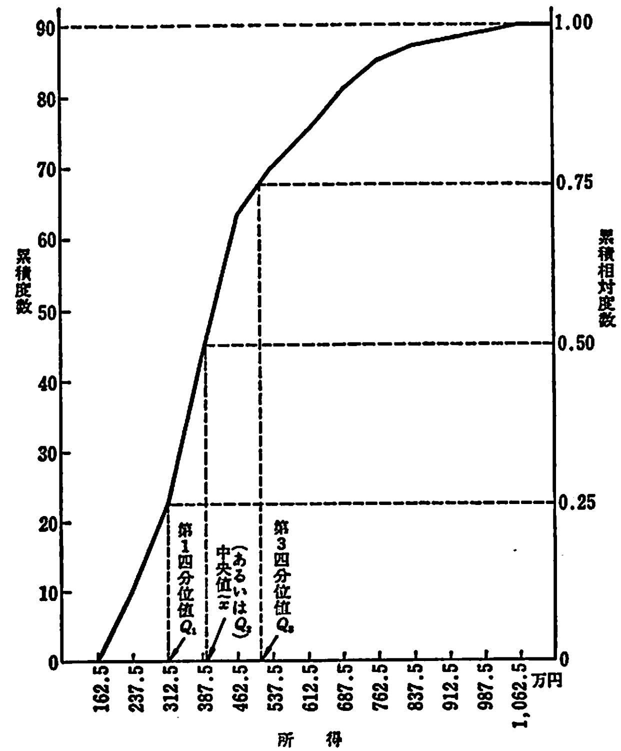


表 1.3　記号化した度数分布表

階級番号	階　　級	階級値	度　数	累積度数
1	$x_1-\frac{h}{2}\sim x_1+\frac{h}{2}$	x_1	f_1	F_1
2	$x_2-\frac{h}{2}\sim x_2+\frac{h}{2}$	x_2	f_2	F_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
k	$x_k-\frac{h}{2}\sim x_k+\frac{h}{2}$	x_k	f_k	F_k
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	$x_m-\frac{h}{2}\sim x_m+\frac{h}{2}$	x_m	f_m	F_m

と書き表わされる．すなわち $\sum_{k=1}^{m} f_k$ は f_k の添字(suffix) k に1から m までの自然数を置き換えた場合の f_k の合計を意味する．添字が動く範囲が明らかな場合には，たんに $\sum f_k$ と書くこともある．

この $\sum$ を使用する例を次に示してみよう．

1)　$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_5^2=\sum_{i=1}^{5} a_i^2$

一般に添字としては何を用いてもよい．$\sum_{i=1}^{5} a_i^2=\sum_{\alpha=1}^{5} a_\alpha^2=\sum_{K=1}^{5} a_K^2$ 等々である．

2)　$(a+bx_1)+(a+bx_2)+\cdots+(a+bx_n)=\sum_{i=1}^{n}(a+bx_i)$

$$=\sum_{i=1}^{n} a+\sum_{i=1}^{n} bx_i=na+b\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$\sum_{i=1}^{n} a$ は a が n 個合計されることを意味するから na に等しい．また $\sum_{i=1}^{n} bx_i$ は $bx_1+bx_2+\cdots+bx_n=b(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ であるから $b\sum_{i=1}^{n} x_i$ に等しい．すなわち添字に無関係な定数や変数は $\sum$ の外へ出る．

3)　$(a_1b_1+a_1b_2+\cdots+a_1b_m)+(a_2b_1+a_2b_2+\cdots+a_2b_m)$

$$+\cdots+(a_nb_1+a_nb_2+\cdots+a_nb_m)$$

$$=a_1\sum_{j=1}^{m} b_j+a_2\sum_{j=1}^{m} b_j+\cdots+a_n\sum_{j=1}^{m} b_j$$

$$=\sum_{i=1}^{n} a_i\sum_{j=1}^{m} b_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_ib_j$$

このような記号法を用いれば累積度数 F_k は

$$F_k=f_1+f_2+\cdots+f_k=\sum_{j=1}^{k} f_j \qquad (2)$$

である．また

$$F_m=\sum_{j=1}^{m} f_j=n$$

である．

演習問題

1　下記のデータは，1982年2月末現在のわが国化学産業に属する東京株式市場第1部上場会社67社の自己資本比率(%)である．このデータについて，度数分布表をつくり，ヒストグラム，累積多角形を作成せよ．

6.3	9.5	0.0	12.3	17.4	6.1	10.6	14.9	6.6	34.9
17.6	5.2	12.6	21.1	5.5	19.2	15.3	16.2	18.2	23.0
22.9	8.2	10.7	33.2	22.9	34.8	23.1	31.2	41.3	8.2
53.0	52.2	37.5	31.8	8.5	30.9	20.9	28.4	27.3	25.3
11.4	9.0	19.1	7.9	18.4	26.5	15.5	11.5	11.2	5.8
13.1	23.6	72.4	28.1	16.5	31.0	25.9	26.3	49.3	23.2
32.9	5.5	15.5	22.3	31.6	11.9	43.5			

(自己資本比率＝純資産÷総資産，資料：『会社四季報』東洋経済新報社)．

2　$x_1=4$, $x_2=-1$, $x_3=0$, $x_4=2$; $y_1=2$, $y_2=7$, $y_3=5$, $y_4=6$ のとき次を計算せよ．$\sum x_i$, $\sum y_i$, $\sum x_i^2$, $\sum x_iy_i$, $\sum y_i^2$, $\sum(x_i-y_i)^2$.

3　$\sum_{i=1}^{n}(x_i+a)(y_i+b)=\sum x_iy_i+a\sum y_i+b\sum x_i+nab$ となることを証明せよ．

1.3　標本特性値

データを階級分けしたり，グラフで表わしたりすれば，標本がどのような特性をもっているか大略理解できる．このようなやり方で標本を構成する数値の分布の有様が手にとるように分かるのであるが，一方，標本のこのような性質を，数個の数値で代表して表わせないだろうかということも考えられる．このような標本の性質を代表して表わす数値を**統計量** (statistic) と呼ぶ．この節では，統計量として統計学で最もよく用いられる標本平均と標本標準偏差を説明しよう．

1.3.1　標本平均

標本平均(sample mean)あるいはたんに平均は通常，算術平均と呼ばれるものと同じである．いま大きさ n の標本を構成している数値を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ で表わせば，この標本の標本平均は $\bar{x}$ で表わされ

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (1)$$

で定義される．階級分けされたデータの場合には，$x_1, x_2, \cdots, x_m$ を階級値を表わすものとすれば

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} x_kf_k \qquad (2)$$

によって定義される．通常は，(1)によるものと(2)によるものとでは平均 $\bar{x}$ の値が若干異なるであろう．これは(2)で階級分けによる誤差が混入するためである．

(2)において x_k を質点の(原点からの)距離，f_k を質点の質量とすれば，$\bar{x}$ の定義は物理学における1次の積率 (moment) の定義に等しい．1次の積率は重心の位置を表わす．それゆえ，標本データのヒストグラムの図形を均質な厚板から切りとったとすれば，横軸の標本平均の位置にナイフの刃を上向きに当てれば，左右釣り合うはずである．すなわち平均は分布の重心の位置を表わす．

先の所得のデータの階級分けしない数値で平均を計算すると

$$\bar{x}=\frac{1}{90}(238+277+269+\cdots+299+230)$$

$$=\frac{38,617}{90}=429.078$$

となる．一方，階級分けしたデータを用いれば

$$\bar{x}=\frac{1}{90}(200\times 10+275\times 12+\cdots+1,025\times 1)$$

$$=\frac{38,775}{90}=430.833$$

となる．両者の間には $429.078-430.833=-1.755$ の相違が生じている．

1.3.2　標本標準偏差

標本平均は同じであるが，分布のちらばり具合が異なる2個の標本が考えられる．たとえば，第1の標本を(8, 3, 4, 1, 9)，第2の標本を(4, 5, 3, 6, 7)とすれば，いずれも標本平均 $\bar{x}$ は5である．しかし明らかに第1の標本のほうが，第2よりも5を中心に左右に大きくばらついている．このような分布のばらつきの程度を表わす指標として，**標本標準偏差** (sample standard deviation) がある．標本標準偏差は s という記号で表わされ

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \tag{3}$$

によって定義される．また，標本標準偏差の平方 s^2 を**標本分散** (sample variance) という．すなわち

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \tag{4}$$

である．[5]

階級分けしたデータについては標本標準偏差は次のように定義される．

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{m}(x_k-\bar{x})^2 f_k} \tag{5}$$

ただしこの(5)の場合は，x_k は第 k 階級の階級値を表わす．また標本分散は

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{m}(x_k-\bar{x})^2 f_k \tag{6}$$

である．

なお実際に標本分散や標準偏差を計算するときには，次の関係を利用するほうが計算が容易となることがある．

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\sum(x_i^2-2\bar{x}x_i+\bar{x}^2)$$

$$=\sum x_i^2-2\bar{x}\sum x_i+n\bar{x}^2$$

$$=\sum x_i^2-n\bar{x}^2=\sum x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2$$

であるから(4)より

$$s^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum x_i^2-n\bar{x}^2\right)=\frac{1}{n-1}\left\{\sum x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2\right\} \tag{7}$$

また，階級分けしたデータについては

$$\sum_{k=1}^{m}(x_k-\bar{x})^2 f_k=\sum x_k^2 f_k-2\bar{x}\sum x_k f_k+\bar{x}^2\sum f_k$$

$$=\sum x_k^2 f_k-2n\bar{x}^2+n\bar{x}^2$$

$$=\sum_{k=1}^{m}x_k^2 f_k-n\bar{x}^2$$

$$=\sum_{k=1}^{m}x_k^2 f_k-\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{m}x_k f_k\right)^2$$

であるから

$$s^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=1}^{m}x_k^2 f_k-n\bar{x}^2\right)=\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{k=1}^{m}x_k^2 f_k-\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{m}x_k f_k\right)^2\right\} \tag{8}$$

が得られる．平均 $\bar{x}$ が割り切れない数になり，平均からの偏差 $x_i-\bar{x}$ の桁数が

---

5)　テキストによっては，標本分散の定義として $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ を採用しているものもある．(4)の定義による標本分散は，あとの7.5で述べるように，無作為標本を前提とするとき母集団の分散の不偏推定量となるというメリットをもつ．

多くなる場合などに(7)，(8)を使えば計算が容易になる．

先の例で，(7)，(8)を使い標本分散を計算してみよう．まず，階級分けされていないデータの標本分散は

$$s^2=\frac{1}{90-1}\left[\{(238)^2+(277)^2+\cdots+(230)^2\}-\frac{1}{90}\times(38,617)^2\right]$$

$$=31,877.061$$

$$s=\sqrt{31,877.061}=178.541$$

また階級分けされているデータでは

$$s^2=\frac{1}{90-1}\left[\{(200)^2\times10+(275)^2\times12+\cdots+(1,025)^2\times1\}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{90}\times(38,775)^2\right]$$

$$=31,756.320$$

$$s=\sqrt{31,756.320}=178.203$$

となる．

演　習　問　題

1　次のデータの標本平均，標本分散，標本標準偏差を求めよ．

(a)　12　7　24　−10　16　9　−2　−1

(b)　20.8　20.1　21.9　20.4　20.6

2　前節演習問題1で作成した度数分布表に基づいて，標本平均，標本分散，標本標準偏差を計算せよ．

3　採点を終えた答案の点数に次の修正を加えると，標本平均と標本標準偏差はどのように変化するか．

(a)　すべての点数に15点を加えた場合．

(b)　すべての点数を1割増しとした場合．

1.4　その他の特性値

前節で，統計量の中で最もよく使用される標本平均と標本標準偏差について説明した．しかし標本の特性を示す指標としては，このほかに種々なものがある．この節ではいわゆる「平均」を示す統計量として中央値，最頻値を，またばらつきを示す統計量として，レインジ，四分位範囲などを説明しよう．

1.4.1　中央値と最頻値

ある標本の**中央値**または**ミーディアン**(median)とは，標本を構成するn個の数値を大きさの順に並べたとき，そのちょうど中央の値(nが奇数のとき)または2つの中央の値の算術平均(nが偶数のとき)をいう．以下中央値を$\tilde{x}$で表わすことにする．

たとえば標本(5.1, 2.0, 3.4, 1.0, 11.3)は大きさの順に並べれば(1.0, 2.0, 3.4, 5.1, 11.3)となるから，この標本の中央値は3.4である．また標本(2, 7, 4, 5, 2, 5, 3, 6)は(2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7)となり，中央の値は4と5であるから中央値は4.5である．

階級分けしたデータの中央値は直線補間により求める．それゆえ次の式のように定義される．

$$\tilde{x}=x_*-\frac{h}{2}+\left(\frac{\frac{n}{2}-F_{*-1}}{f_*}\right)h \qquad (1)$$

ただし＊は中央値が含まれている階級の番号を示す．その他の記号は表1.3の通り．F_{*-1}は中央値が含まれている直前の階級の累積度数である．

表1.2のデータについて中央値を求めてみよう．中央値が含まれている階級は，$n=90$より45番目と46番目の大きさの数値をもつ個体が属している階級だから，$*=4$であることは累積度数より容易に分かる．そこで

$$x_*=x_4=425,\quad h=75,\quad F_{*-1}=F_3=43,\quad f_*=f_4=20$$

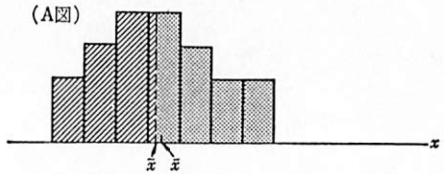
であるから

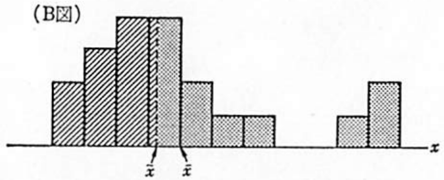
$$\tilde{x}=425-\frac{1}{2}\times(75)+\left(\frac{\frac{90}{2}-43}{20}\right)\times(75)=395$$

となる．

幾何学的には，中央値はヒストグラムの面積をちょうど2等分する縦線の横軸上の位置を示す．図1.3には2つのヒストグラムにおける中央値が示されている．A図は大体歪みのない分布を示しているが，B図ではデータに他に比べ非常に大きな値が含まれているので，右にすそが長い形になっている．そのため標本平均$\bar{x}$はBのほうが大となる．しかし両者の中央値$\tilde{x}$の位置は同一である．このように，中央値は，極端な値に左右されないという特性をもっている．

図 1.3　中央値 $\tilde{x}$ と標本平均 $\bar{x}$





このため，たとえば各国の個人の所得水準を示すには，各人の所得の算術平均よりは，中央値を用いたほうが適切だと考えられることがある．なぜなら，算術平均だと極端な高額所得者がわずかでもいると，大多数が低所得者であっても平均としてはかなり高くなってしまうからである．

「平均」を示すその他の指標として**最頻値**または**並数**または**モード**(mode)と呼ばれるものがある．これは標本において最大の頻度をもっている数値をいう．たとえば標本(5, 2, 7, 6, 4, 5, 2, 5)の最頻値は5である．また(4, 3, 5, 2, 9)では最頻値は存在しない．また標本(2, 4, 3, 5, 5, 3, 1, 6)では3と5の2つの最頻値をもつ．このように最頻値は存在しないこともあるし，2つ以上あることもある．最頻値が1個だけの分布を**ユニモーダル**(unimodal)な分布と呼ぶ．最頻値を以下 $\hat{x}$ で表わす．階級分けしたデータにおいてはもしそれが最大度数の階級をただ1つもつならば，その階級値が最頻値である．最頻値は，標本の大きさが小さいときには，階級のとり方に依存して大幅に変化しやすいという難点をもつ．

一般にユニモーダルな分布では，右すそが長いならば

$$\hat{x}<\tilde{x}<\bar{x} \qquad (2)$$

左すそが長いならば

$$\hat{x}>\tilde{x}>\bar{x} \qquad (3)$$

となり，左右対称ならば3者は一致する．先の図1.1では(2)の関係が成立

していることが分かる．

1.4.2　レインジと四分位範囲

標本を構成する数値の最大値と最小値との差を**レインジ**または**範囲**(range)と呼ぶ．たとえば標本(4, 7, 2, 2, 3, 10)において最大値は10，最小値は2であるから，この標本のレインジは $10-2=8$ である．レインジを R という記号で表わすことが多い．レインジは計算が簡単なので標本のちらばりを示す特性値として，標本標準偏差とともによく用いられる尺度である．

要素を大きさの順に並べた標本において中央値は真中の要素の値であった．この考え方を拡張して，それら要素の列を4等分する3つの境の値を Q_1, Q_2, Q_3 で表わし，それぞれ第1，第2，第3**四分位値**(quartile)と呼ぶ．第2四分位値は中央値に等しい．同様に10等分の境界の値を**十分位値**(deciles)と呼び $D_1, D_2, \cdots, D_9$ で表わす．また100等分する境界の値を**百分位値**(percentiles)と呼び，$P_1, P_2, \cdots, P_{99}$ で表わす．

レインジや標本標準偏差は，その大きさが極端な値に直接影響を受ける．この欠点を避けたちらばりを表わす特性値として，**四分位範囲**(interquartile range)がある．四分位範囲とは第3四分位値と第1四分位値との差すなわち Q_3-Q_1 として定義される．

データが階級分けされている場合には，図1.2のような累積多角形を利用すると，四分位値等は容易に求めることができる．図1.2には右側の縦軸に，累積相対度数(F_k/n)が目盛られている．第1四分位値 Q_1 は，F_k/n が0.25となる x の値であるから，累積多角形の高さが0.25となる横軸の位置が Q_1 である．この場合データを補間した形で値が求められるので，このようにして求めた第2四分位値すなわち中央値の値は(1)の定義により求めた値と一致する．十分位値，百分位値も累積多角形を使って簡単に求められる．

演 習 問 題

1　次のデータの標本平均，中央値，最頻値を求めよ．

(a)　3　5　8　6　2　9　5　3　4　3

(b)　27.1　30.5　40.2　90.0　11.2

2　前問の(a)，(b)のデータについて，レインジを計算せよ．

3　本章第2節演習問題1で作成した累積多角形を使って，自己資本比率のデータの各四分位値ならびに四分位範囲を求めよ．

第 2 章

確　　率

2.1 古典的確率

まず最初に確率(probability)という言葉の意味を考えてみよう．

いま1枚の硬貨を机の平らな面の上に投げるという**試行**(trial)を考えてみる．その結果硬貨は表(head)か裏(tail)のいずれかを上に向けるであろう．表をH，裏をTという記号で表わせば，この試行の結果は

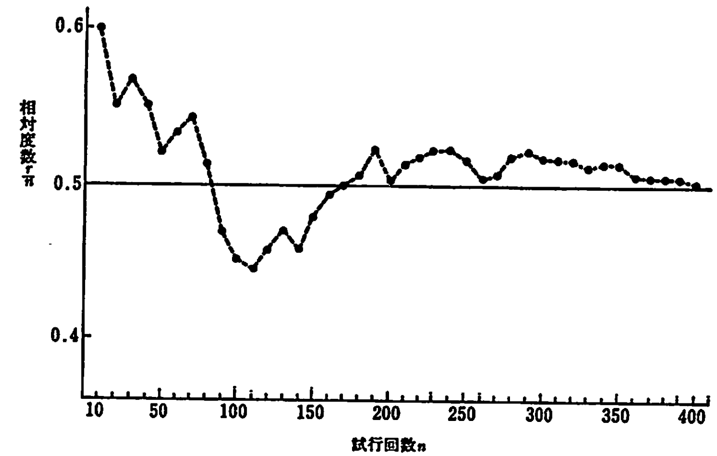
$$\underset{(表)}{H},\ \underset{(裏)}{T}$$

のいずれか一方となる．表裏どちらにもならず，ちょうど縁を下にして硬貨が立ってしまうとか，机の下へころがってしまうというようなことも起こるであろうが，これは勘定に入れずやり直しをすることにする．もしその硬貨が片側が他方より重いとか，いびつになっているとかせずに，均質にできているとすれば，H(表)が出るかT(裏)が出るかはまったく等しい可能性で生ずるといえそうである．

しかし実際に10回投げてみてH(表)とT(裏)がちょうど5回ずつ出るということはむしろまれで，たとえばHが4回，Tが6回とか，場合によっては10回ともHが出るというようなことも生ずるであろう．100回投げたらどうであろうか．Hが出る回数の割合はちょうど1/2(すなわちHが50回，Tが50回)になることはまれであるにしても，1/2に近い値になることが，10回投げるときよりも多くなるであろう．一般にn回投げるときに，r回H(表)が出たとし

よう．このとき相対度数r/nはある特定の値(いまの例では1/2)を中心にばらつくが，そのばらつき方の程度はnが大になるにつれて小さくなる．下記の図2.1は，10円銅貨を繰り返し投げたときの，表Hの回数の割合の記録である．試行回数nが増えるにつれ，それまでに出た表の回数rの割合r/nは途中凹凸はあるけれども，だんだん0.5の線に近づいている．

図 2.1　銅貨投げにおける表の相対度数の記録



このように実験または試行を同一の条件の下で多数回繰り返すとき，ある事象(event)の生ずる相対度数が試行回数nを大きくするにつれて一定の値に近づくことがよくある．たとえば生まれる子供が男である割合は，10家族くらいの調査では随分ばらつくであろうが，大量に観察すれば0.51から0.52程度の値になることが多い．このような相対度数の極限値が存在するとしたときこの値のことをその事象の**統計的確率**(statistical probability)と呼ぶ．

しかし，このような統計的確率の大きさを求めることは多くの場合不可能である．というのは，「同一の条件の下で多数回試行を繰り返す」ことができる事象というものは，あまり存在しないからである．しかもそれが可能であるにしても，無限に繰り返すわけにはゆかないから永久に正確な統計的確率の値は分からない．しかし計算の可能性と意味とは別物であり，確率が，このように相対度数の極限値という意味をもっていることを認識しておく必要がある．

このように，確率は確かに相対度数の極限値という意味をもっているが，しかし，これだけで確率を定義してしまうのには問題がある．たとえば，彼がA大学を受かる確率は8割だろうとか，彼女は1/2の確率でこの手紙に返事をくれるだろうとかいうような場合，試行を多数回繰り返す可能性は最初から存在しない．これらの例では確率は信念の強さを示す尺度のような意味をもっている．このような意味で確率という言葉を使う場合これを**主観的確率**(subjective probability)と呼ぶ．一方，たとえば歪みのないサイコロを1回振ったときに1の目が出る確率は1/6であるというように，多数回繰り返すまでもなくその確率の値が客観的に明らかと思われる場合もある．

このように，確率はいろいろな意味をもって使われている．したがって確率とはこれこれであるときちんと定義することはなかなか難しく，昔から論争の的になってきた．1933年にコルモゴロフ(Kolmogorov)は初めて確率を公理系によって扱った．ここでは確率とは何かという定義を避け，確率の基本的性質を3つの公理によって定める．これらの公理を満たすものに確率という名称を与える.[1] 現代の確率論はこの考え方を基本にして展開されている．しかし，その線にそって確率についての説明をすることはかなり高度な数学を必要とするので，この本ではより理解の容易な古典的確率論の説明を採用しよう．

---

1)　ここで確率の公理的扱いについてごく簡単に述べておこう．1つの試行のすべての可能な結果を要素とする集合Ωを考え，事象EはΩの1つの部分集合として表わされる．試行の結果をωで表わすとき$\omega\in E$であれば事象Eが生じたという．Ωの部分集合の集まりとしてはσ集合体だけを対象とする．ある集合族(集合の集合)$\mathscr{F}$がσ集合体と呼ばれるのは次の2つの条件を満たす場合である．①$A\in\mathscr{F}$ならば$A^c\in\mathscr{F}$，②$A_1, A_2, \cdots\in\mathscr{F}$ならば$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$．ただし$A^c$は$A$の補集合を示す．たとえば$A$を$\Omega$の部分集合とすると$\mathscr{F}=\{\Omega, \phi, A, A^c\}$は$\sigma$集合体である．ただし$\phi$は空集合($=\Omega^c$)である．

Ωの部分集合からなる1つのσ集合体を$\mathscr{F}$とし，$\mathscr{F}$に属する任意の部分集合Aに対して次の条件を満たす集合関数$P(A)$が定められるとき，$P(A)$をAの確率と呼ぶ．

(i)　すべての$A\in\mathscr{F}$に対し$P(A)\geqq 0$

(ii)　$P(\Omega)=1$

(iii)　$A_1, A_2, \cdots\in\mathscr{F}$，ただし$A_i\cap A_j=\phi$ $(i, j=1, 2, \cdots;\ i\neq j)$，に対し

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

古典的確率(classical probability)とは次のようなものである．

いま硬貨を2枚投げるという試行を考えてみよう．この試行の結果は，表(H)1枚，裏(T)1枚か，2枚とも表かあるいは2枚とも裏かのいずれかである．この3つのケースはしかし等しい可能性で生ずるとはいえない．これは2枚の硬貨を1枚目の硬貨と2枚目の硬貨と区別し，表裏の出方をその順序で区別すれば可能な結果としては

HH	HT	TH	TT
(表表)	(表裏)	(裏表)	(裏裏)

の4種類となる．この4つの場合はいずれも等しい可能性をもって生ずることは納得がゆくであろう．この場合1枚表(H)，1枚裏(T)という場合はHTおよびTHの2つの場合が該当する．それゆえ1枚表1枚裏という事象が生ずる確率は 2/4=1/2 であるといえそうである．

このように，等しい可能性で生ずる可能な場合を全部あげ，その中で事象(これをいまEで表わす)に該当する場合の数の全体の可能な場合の数に対する比率をつくり，これが事象Eの確率であるとする確率の定義の仕方がある．このようにして定義された確率を古典的確率と呼ぶ．

〔定義〕　いま全体でN個の可能な場合があって，どの2つの場合も同時に起こらず，またどの場合が起こることも同様に確からしいとする．ある事象Eがあって，Eに相当する場合の数を$n(E)$とするとき，Eの起こる確率$P(E)$を

$$P(E)=\frac{n(E)}{N} \tag{1}$$

たとえば硬貨投げの場合$\Omega=\{H, T\}$，$\mathscr{F}=\{\Omega, \phi, H, T\}$において$P(H)=\frac{1}{2}$，とすると(ii)より$P(\Omega)=1$．(iii)より$P(H\cup T)=P(\Omega)=P(H)+P(T)=1$だから$P(T)=\frac{1}{2}$．また(iii)より$P(\Omega\cup\phi)=P(\Omega)=P(\Omega)+P(\phi)=1$だから$P(\phi)=0$である．

$(\Omega, \mathscr{F}, P)$を確率空間(probability space)と呼ぶ．このように設定された確率空間から出発してさらに複雑な事象や確率変数に関する定理を導いていく．詳しくは A.N.Kolmogorov, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Julius Springer, Berlin, 1933(根本・一条訳『確率論の基礎概念』東京図書，1969年)参照．

で定義する．

例題 2.1.1　サイコロを1個振るとき，出る目の数は1, 2, 3, 4, 5, 6の6個の可能な場合に分かれるが，このうち2以下の目が出るという事象をEとすれば，Eに相当する場合は1および2の2個の場合であるから，$N=6$, $n(E)=2$ で $P(E)=n(E)/N=2/6=1/3$ である．

例題 2.1.2　サイコロを2個投げるとき，可能な場合は

(1, 1)　(1, 2)　(1, 3)　(1, 4)　(1, 5)　(1, 6)
(2, 1)　(2, 2)　(2, 3)　(2, 4)　(2, 5)　(2, 6)
(3, 1)　(3, 2)　(3, 3)　(3, 4)　(3, 5)　(3, 6)
(4, 1)　(4, 2)　(4, 3)　(4, 4)　(4, 5)　(4, 6)
(5, 1)　(5, 2)　(5, 3)　(5, 4)　(5, 5)　(5, 6)
(6, 1)　(6, 2)　(6, 3)　(6, 4)　(6, 5)　(6, 6)

の36通りである．ただしたとえば(5, 4)とは第1のサイコロが5の目，第2のサイコロが4の目が出るという場合である．いま2個のサイコロの目の合計が10となる事象をEとすれば，Eに相当する場合は

(4, 6)　(5, 5)　(6, 4)

の3個である．したがって事象Eの確率は $P(E)=n(E)/N=3/36=1/12$ である．

例題 2.1.3　ジョーカーを除いた52枚のトランプをよく切って1枚抜くとき，その1枚がスペードである確率は，52枚の可能な場合のうちスペードであるという事象に相当する場合は13枚あるから，13/52=1/4 である．

事象EがあってEが生じないという事象をEの**余事象**(complementary event)といい，これを$\bar{E}$で表わす．すべての可能な場合の数をNで表わし，Eに相当する場合の個数を $n(E)$ で表わす．すると余事象に相当する場合の個数 $n(\bar{E})$ は余事象の定義から

$$n(\bar{E})=N-n(E)$$

である．それゆえ余事象$\bar{E}$の確率は

$$P(\bar{E})=\frac{n(\bar{E})}{N}=\frac{N-n(E)}{N}=1-\frac{n(E)}{N}=1-P(E) \qquad (2)$$

である．

またEに相当する場合が全然存在しない($n(E)=0$)か，可能な場合全部がEに相当する場合であるかの2つの両極端の場合が考えられるから

$$0\leqq P(E)\leqq 1 \qquad (3)$$

である．すなわち確率は非負でかつ1を越えない数であることが分かる．[2)]

演　習　問　題

1　古典的確率の定義を用いて次の確率を求めよ．

(a)　2個のサイコロを投げて目の合計が8になる確率．

(b)　4枚の硬貨を投げて少なくとも3枚表が出る確率．

2.2　複数個の事象の確率

この節では古典的確率の定義を用いて，事象が複数個ある場合の確率の問題を考えていく．

2.2.1　確 率 の 加 法

いまトランプの52枚のカード(例題2.1.3参照)から1枚抜くとき，それがスペードであるという事象をA，それがキングであるという事象をBで表わそう．このとき，その1枚がスペードかキングのいずれか一方または両方であるという事象(これをスペードかキングか少なくとも一方であるという事象といってもよい)を $A\cup B$ で表わす．事象 $A\cup B$ の確率はいくらであろうか．52枚の等しい確からしさで生ずる可能な場合の中で，$A\cup B$ に相当するのは13枚のスペードと4枚のキングであるが，そのうちスペードのキングはA, Bどちらにも相当するから，$A\cup B$ に相当する場合の数は $13+4-1=16$ である．それゆえ求める $A\cup B$ の確率 $P(A\cup B)$ は16/52である．

事象AとBが両方同時に起こっているという事象をAB(または $A\cap B$) で表わす．そして全体の可能な場合の総数をN，Aに相当する場合の数を $n(A)$,

2)　以上の確率は，N個の等可能な場合を仮定し，そのうち事象Eに相当する場合の数を $n(E)$ とするとき比 $n(E)/N$ によって定義されていた．しかし「等可能」とはそもそも何かといえば，それは「確率が等しい」ということであるから，この定義は確率を前提にして確率を説明する一種の循環論である．これに対し注1)で述べた公理系に基づく確率論によれば等可能な事象を想定する必要はない．

等々で表わせば

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(AB) \tag{1}$$

である．それゆえ

$$P(A\cup B)=\frac{n(A\cup B)}{N}=\frac{n(A)+n(B)-n(AB)}{N}$$
$$=\frac{n(A)}{N}+\frac{n(B)}{N}-\frac{n(AB)}{N}$$
$$=P(A)+P(B)-P(AB)$$

すなわち

〔**定理 2.1**〕（加法定理）事象Aと事象Bの少なくとも一方が起こる確率は

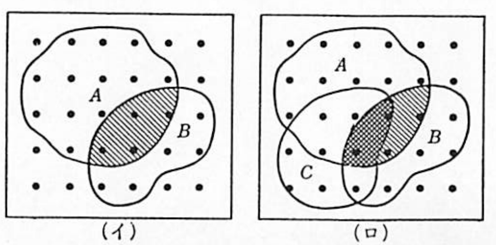
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{2}$$

である．

この関係は次の図 2.2(イ)によりよく理解できるであろう．この図で四角で囲んだ領域の中の黒丸は等可能な場合全体を表わす．また丸で囲んだAという領域はその中の黒丸が事象Aに相当する場合であることを表わす．Bも同様に事象Bに相当する場合であることを示す．そのとき $A\cup B$ に相当する場合は領域Aと領域Bのいずれか(両者が重複する斜線部分も含めて)にはいっている黒丸全体である．また斜線部分にはいっている黒丸は事象ABに相当する．それゆえ $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(AB)$ であることは容易に分かる．

これと同様にして，次に事象 $A\cup B\cup C$ の確率も図 2.2(ロ)から理解される．

図 2.2　確率の加法の説明のための図



$A\cup B\cup C$ とは事象 A, B, C の少なくとも1つ(すなわち3つのうちのいずれか1つあるいは2つあるいは3つ)が生ずるという事象である．図(ロ)では図(イ)にさらに事象Cに相当する領域が追加されている．この場合には二重に斜線を施した部分は事象 ABC を表わす．この図から

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(AB)$$
$$-n(AC)-n(BC)+n(ABC) \tag{3}$$

となることは容易に分かるであろう．またこのことから前と同様に

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)$$
$$-P(BC)+P(ABC) \tag{4}$$

となることもただちに導かれる．

さて，前出のトランプの例で，1枚のカードを抜くときそれがスペードであるという事象をA，ハートであるという事象をBで表わそう．このときには，事象ABに相当する場合は存在しない．1枚のカードが同時にスペードでかつハートであるということはないからである．それゆえ $n(AB)=0$．この場合事象Aは事象Bの**排反事象**(exclusive event)(またはBはAの排反事象)，あるいはAとBとは相互に**排反**であるという．AとBが相互に排反であれば

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B) \tag{5}$$

である．同様に，事象 A, B, C があってどの2つをとっても相互に排反であれば

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C) \tag{6}$$

である．

事象が4個以上の場合の関係は，以上の(2)，(4)，(5)，(6)式の関係から類推できるであろう．

2.2.2　確 率 の 乗 法

次のような例を考えよう．1つの壺の中に白球2個，赤球3個がはいっているとしよう．白球，赤球ともに均質な材料でつくられ，手で触れただけではまったく区別がつかないものとしよう．

いまこの壺から球を1個無作為に抽出しその色を記録する．次にその球を壺に返さないで(残り4個の中から)また1個抽出し記録する．このとき第1回目の抽出で白球が出るという事象をA_1，その余事象である赤球が出るという事象をB_1で表わす．また第2回目の抽出で白が出るという事象をA_2，そのとき

赤であるという事象を B_2 で表わす．このとき，このような2回の抽出を行なった結果の事象としては，次の4つがあることが分かる．

$$\underset{(\text{白白})}{A_1A_2}\quad \underset{(\text{白赤})}{A_1B_2}\quad \underset{(\text{赤白})}{B_1A_2}\quad \underset{(\text{赤赤})}{B_1B_2}\ .$$

ただしこの4つの事象は同じ確率であるとは限らない．これらの事象の確率はそれぞれいくらであろうか．これを古典的確率の定義を用いて計算してみよう．2個の白球に番号をつけて w_1, w_2 で表わし，3個の赤球も同様に r_1, r_2, r_3 で表わし，またたとえば2回の抽出で最初に w_1, 次に r_3 が抽出されることを (w_1, r_3) で表わす．すると

$$\underset{(\text{白白})}{A_1A_2}\cdots\cdots(w_1, w_2),\ (w_2, w_1)$$

$$\underset{(\text{白赤})}{A_1B_2}\cdots\cdots(w_1, r_1),\ (w_1, r_2),\ (w_1, r_3),\ (w_2, r_1),\ (w_2, r_2),\ (w_2, r_3)$$

$$\underset{(\text{赤白})}{B_1A_2}\cdots\cdots(r_1, w_1),\ (r_1, w_2),\ (r_2, w_1),\ (r_2, w_2),\ (r_3, w_1),\ (r_3, w_2)$$

$$\underset{(\text{赤赤})}{B_1B_2}\cdots\cdots(r_1, r_2),\ (r_1, r_3),\ (r_2, r_1),\ (r_2, r_3),\ (r_3, r_1),\ (r_3, r_2)$$

がそれぞれ対応する．括弧の中の順列はこれ以外にはないから，等可能な場合の数 n は合計20通りである．これらの，場合の数は次の表2.1のように整理できるであろう．ここで第2回の結果は問わないで，とにかく第1回に白が出るのは A_1A_2, A_1B_2 のいずれかが起こるときで，これらは相互に排反であるから，それらの場合の数は $n(A_1)=n(A_1A_2)+n(A_1B_2)$ である．このように A_1

表 2.1　確率の乗法の説明のための表

		第2回 白	第2回 赤	周辺度数
第1回	白	2 $n(A_1A_2)$	6 $n(A_1B_2)$	8 $n(A_1)$
	赤	6 $n(B_1A_2)$	6 $n(B_1B_2)$	12 $n(B_1)$
周辺度数		8 $n(A_2)$	12 $n(B_2)$	20 N

のみを考えた場合の度数を A_1 の**周辺度数** (marginal frequency) という．この表では A_1, B_1, A_2, B_2 の周辺度数が示されている．表の上側の数字はこの例における場合の数を表わしている．

$$n(A_1)+n(B_1)=n(A_2)+n(B_2)=N$$

が成立していることは当然である．

この表2.1を利用して次の確率を考えてみよう．最初に白球が出たことが分かったあとで，第2回に白球が出る確率．これを事象 A_1 が起こったという条件の下での A_2 の**条件付確率**(conditional probability)といい $P(A_2|A_1)$ と書く(A_1 の下での A_2 の条件付確率と読む)．事象 A_1 が生じたという条件の下での等可能な場合は

$$(w_1, w_2),\ (w_2, w_1),\ (w_1, r_1),\ (w_1, r_2)$$
$$(w_1, r_3),\ (w_2, r_1),\ (w_2, r_2),\ (w_2, r_3)$$

の8通り，つまり $n(A_1A_2)+n(A_1B_2)=n(A_1)$ である．この中で2回目に白球が出るという場合は (w_1, w_2), (w_2, w_1) の2通り $(=n(A_1A_2))$ であるから

$$P(A_2|A_1)=\frac{n(A_1A_2)}{n(A_1)} \tag{7}$$

ところで

$$P(A_1)=\frac{n(A_1)}{N} \tag{8}$$

$$P(A_1A_2)=\frac{n(A_1A_2)}{N} \tag{9}$$

であるから

$$P(A_2|A_1)=\frac{n(A_1A_2)}{n(A_1)}=\frac{n(A_1A_2)}{N}\cdot\frac{N}{n(A_1)}=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)} \tag{10}$$

となる．(10)を書き換えれば

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1) \tag{11}$$

が得られる．すなわち A_1 と A_2 が同時に起こる確率は，A_1 が起こる確率と，A_1 が起こったという条件の下での A_2 の条件付確率との積である．なお A_1 の確率 $P(A_1)$ は，第2回に A_2 が起ころうが B_2 が起ころうが，それとは無関係に第1回にとにかく A_1 が起こる確率であり，これを事象 A_1 の**周辺確率**(marginal probability)と呼ぶ．

次に第2回に A_2 が起こったという条件の下での A_1 の条件付確率 $P(A_1|A_2)$

を考えてみよう．これは先の表 2.1 で第2回白の欄を縦に見ればよい．A_2 の条件の下での等可能な場合の度数は $n(A_1A_2)+n(B_1A_2)=n(A_2)$ すなわち A_2 の周辺度数に等しい．それゆえ前と同様にして

$$P(A_1|A_2)=\frac{n(A_1A_2)}{n(A_2)}=\frac{n(A_1A_2)}{N}\cdot\frac{N}{n(A_2)}=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)} \tag{12}$$

であり，書き換えれば

$$P(A_1A_2)=P(A_2)P(A_1|A_2) \tag{13}$$

が成立する．以上の(11)，(13)の結果を合わせれば，次の乗法定理を得たわけである．

〔定理 2.2〕（乗法定理）　事象 A_1 と事象 A_2 とが同時に起こる確率は，周辺確率と条件付確率の積として次のように表わせる．

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=P(A_2)P(A_1|A_2) \tag{14}$$

先の壺の中の球の例では $P(A_1A_2)=n(A_1A_2)/N=2/20=1/10$ であり $P(A_1)=n(A_1)/N=8/20=2/5$ であるから

$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{1}{10}\Big/\frac{2}{5}=\frac{1}{4}$$

また，第1回に赤が出たという条件の下での第2回の白の出る条件付確率 $P(A_2|B_1)$ は，$P(B_1A_2)=n(B_1A_2)/N=6/20=3/10$，$P(B_1)=n(B_1)/N=12/20=3/5$ であるから

$$P(A_2|B_1)=\frac{P(B_1A_2)}{P(B_1)}=\frac{3}{10}\Big/\frac{3}{5}=\frac{1}{2}$$

である．このように第2回に白が出る確率は第1回に白が出たか赤が出たかでその大きさが 1/4，1/2 と異なる．

ところでこれに対して，抽出の仕方を，第1回抽出を行なったら次にその抽出した球を元の壺に戻すやり方に変えたらどうであろうか．このような抽出の方法を復元抽出 (sampling with replacement) と呼ぶ．この場合には，第2回を始めるときは白球2個，赤球3個という最初の状態を保っており，第1回抽出の結果に影響されない．それゆえ

$$P(A_2|A_1)=P(A_2) \tag{15}$$

である．また逆に第1回抽出で白が出る確率は第2回抽出の結果を条件づけられることによっては影響されないから

$$P(A_1|A_2)=P(A_1) \tag{16}$$

である．この(15)，(16)のいずれを使っても，定理 2.2 の(14)式は

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2) \tag{17}$$

となる．この(15)，(16)，(17)のいずれかが成立するとき(いずれか1つが成り立てば他の2つは自動的に成り立つ)，事象 A_1 と A_2 とは独立(independent)であるという．

3個以上の事象についてはそれらが同時に生ずる確率は次のようになる．それらを $A_1, A_2, \cdots, A_m$ で表わせば，

$$\begin{aligned}P(A_1A_2\cdots A_m)=&P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\\&\cdots P(A_m|A_1A_2\cdots A_{m-1})\end{aligned} \tag{18}$$

となる．これは次のように証明できる．事象を事象 $A_1\cdots A_{m-1}$ と事象 A_m の2つだと考える．このときには定理 2.2 により

$$P(A_1\cdots A_m)=P(A_1\cdots A_{m-1})P(A_m|A_1\cdots A_{m-1})$$
$$P(A_1\cdots A_{m-1})=P(A_1\cdots A_{m-2})P(A_{m-1}|A_1\cdots A_{m-2})$$

これを繰り返してゆけば(18)が得られる．

また，$A_1, \cdots, A_m$ からのどのような事象の組合せ $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_r} (r=2, 3, \cdots, m)$ についても

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_r})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_r}) \tag{19}$$

が成立するとき事象 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ は独立であるという.[3)]

最後にベイズの定理について説明しておこう．

(12)で，第2回目に白球が抽出されたときに第1回目に白球が抽出される条件付確率は

---

3)　たとえば $m=3$ の場合には，A_1, A_2, A_3 が独立であるための必要十分条件は

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3) \tag{i}$$
$$\left.\begin{aligned}P(A_1A_2)&=P(A_1)P(A_2)\\P(A_1A_3)&=P(A_1)P(A_3)\\P(A_2A_3)&=P(A_2)P(A_3)\end{aligned}\right\} \tag{ii}$$

である．(i)だけが成り立っても(ii)が成立しない場合もあるし，逆に(ii)が成り立っても(i)が成立しない場合もありうる．それらの例については本間鶴千代『確率』筑摩書房，1971年，14～15ページを参照されたい．

$$P(A_1|A_2)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)} \tag{20}$$

であった．これをあとの第2回目の結果を知って第1回目の確率を求めるという意味で，A_1 の事後確率 (posterior probability) と呼ぶ．A_2 が生じているのは A_1A_2 と B_1A_2 の場合であるから

$$P(A_2)=P(A_1A_2)+P(B_1A_2) \tag{21}$$

である．また定理2.2により

$$\left.\begin{array}{l} P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1) \\ P(B_1A_2)=P(B_1)P(A_2|B_1) \end{array}\right\} \tag{22}$$

である．(21)，(22)を(20)に代入すれば，A_1 の事後確率は

$$P(A_1|A_2)=\frac{P(A_1)P(A_2|A_1)}{P(A_1)P(A_2|A_1)+P(B_1)P(A_2|B_1)} \tag{23}$$

となる．(23)の関係をベイズ(Bayes)の定理と呼ぶ．

例題 2.2.1　ある商品は甲，乙2社によって製造されており，両社の製品は見かけ上区別がつかないとしよう．甲社，乙社のマーケット・シェアは 0.6，0.4 である．また甲社の製品の不良率は20%，乙社は10%である．いま，ある店でその商品を1個買い求めたところ，それが不良品であった．その商品が甲社の製品である確率はいくらか．

甲社の製品であるという事象を A_1，乙社の製品であるという事象を B_1 とする．また不良品であるという事象を A_2，良品であるという事象を B_2 とおく．このとき $P(A_1)=0.6$，$P(B_1)=0.4$，$P(A_2|A_1)=0.2$，$P(A_2|B_1)=0.1$ であるから，その不良品が甲社の製品である確率は(23)より

$$P(A_1|A_2)=\frac{0.6\times0.2}{0.6\times0.2+0.4\times0.1}=0.75$$

である．

演習問題

1　5人の人を1列に並べるとき，特定の2人が隣り合う確率を求めよ．

2　5個の赤球，4個の白球，3個の青球のはいっている箱から1度に3個の球を抽出するとき，2個が赤球，1個が白球である確率を求めよ．

3　ジョーカーを除く52枚のカードから成るトランプから2枚を抜き出したとき，それらが同点である確率はいくらか．

4　ジョーカーを除く52枚のトランプカードから1枚抜き，それを元に戻さないで2枚目を抜く．このとき次を求めよ．

(a)　1枚目がハートか絵札である確率

(b)　2枚目がハートか絵札である確率

(c)　1枚目がハートで2枚目がクラブである確率

(d)　1枚目がハートであることが分かったとき2枚目がクラブである確率

(e)　2枚目がキングであることが分かったとき1枚目がクイーンである確率

(f)　1枚目がキングで2枚目がハートである確率

2.3　数学的期待値

ある地方自治団体が宝くじを次のような条件で発行したとする．10万枚発行し，その内訳は次の通りであったとする．

1等	1,000,000円	1枚
2等	500,000円	5枚
3等	10,000円	100枚
4等	200円	10,000枚
等外	0円	89,894枚

この宝くじの価格は1枚100円だとする．1枚の宝くじを買うことによって人は平均的にどれだけの賞金を期待できるであろうか．平均的にとは，この宝くじを10万枚全部買い占めたとき，宝くじ1枚当りの平均の賞金額のことである．賞金総額は

$$1{,}000{,}000\times1+500{,}000\times5+10{,}000\times100+200\times10{,}000$$
$$=6{,}500{,}000(\text{円})$$

であるから，1枚当りでは $6{,}500{,}000\div100{,}000=65$(円) となる．この65円は宝くじの価格100円より明らかに少ないから，全部買い占めれば確実に損することが分かる．しかし，そうだからといって人々は宝くじを買わないわけではない．

この65円のような数値を宝くじの賞金の数学的期待値(mathematical expectation)またはたんに期待値と呼ぶ．

数学的期待値は，次のように定義される．相互に排反な n 個の事象 E_1, E_2, …, E_n があってそれぞれ確率 $P(E_1)$, $P(E_2)$, …, $P(E_n)$ で生じ，しかも $P(E_1)+P(E_2)+\cdots+P(E_n)=1$ であるとしよう．いまある変数 x (たとえば賞金の額)があって E_1 が生じれば x は x_1, E_2 が生じれば x は x_2, 以下同様，の値をとるとすれば，x の数学的期待値 $E(x)$ は

$$E(x)=x_1P(E_1)+x_2P(E_2)+\cdots+x_nP(E_n) \tag{1}$$

である．

また，x の一価関数として一般に $\varphi(x)$ を考えると，$\varphi(x)$ の数学的期待値 $E\{\varphi(x)\}$ も

$$E\{\varphi(x)\}=\varphi(x_1)P(E_1)+\varphi(x_2)P(E_2)+\cdots+\varphi(x_n)P(E_n) \tag{2}$$

と定義される．

前述の宝くじの例では1枚当りの賞金額を出すことは賞金の数学的期待値を出しているに等しい．なぜならば

$$E(x)=1,000,000\times\frac{1}{100,000}+500,000\times\frac{5}{100,000}$$
$$+10,000\times\frac{100}{100,000}+200\times\frac{10,000}{100,000}+0\times\frac{89,894}{100,000}=65$$

であるから．

演　習　問　題

1　サイコロを1個振って出た目の数の2乗だけの金額(円)がもらえるとする．このときの金額の期待値はいくらか．

2　ある傘の小売商はもし雨が降れば1日1万円の売上げがあり，雨が降らなければ1日5000円の売上げがあるとする．雨の確率が0.2とするとき，1日の売上げの期待値を求めよ．

第3章

確率変数と確率分布

3.1　2　項　分　布

硬貨を3枚投げるとき，表(H)と裏(T)の出方としては

$$HHH\quad HHT\quad HTH\quad THH\quad HTT\quad THT\quad TTH\quad TTT$$

の8通りの場合がある．このうち，表が2枚出ている場合は HHT　HTH　THH の3通りであるが，なぜこれが3通りとなるかは組合せの考え方で解釈できる．相異なる3枚の中から2枚を選び，それらをH(表)として登録する．このとき2枚の選び出し方(組合せ)は何通りあるか．その答えは

$$_3C_2=\frac{3!}{2!1!}=3 \tag{1}$$

である．

一般に n 枚中 x 枚が表である場合は同様な考え方から

$$_nC_x=\frac{n!}{x!(n-x)!} \tag{2}$$

通りあるわけである．

さて3枚中表が2枚という $_3C_2=3$ 通りの場合は

$$HHT\quad HTH\quad THH$$

であるが，いま HHT という事象が生ずる確率を考えてみよう．1枚目にH(表)，2枚目にH(表)，3枚目にT(裏)が出るという事象は互いに独立であるから

$$P(HHT)=P(H)\cdot P(H)\cdot P(T)=\{P(H)\}^2\cdot P(T) \tag{3}$$

である．他の2つの事象についても

$$P(HTH)=P(H)\cdot P(T)\cdot P(H)=\{P(H)\}^2\cdot P(T)$$
$$P(THH)=P(T)\cdot P(H)\cdot P(H)=\{P(H)\}^2\cdot P(T)$$

となる．一方3枚中表が2枚という事象は，事象 HHT, HTH, THH のいずれかが生ずることであり，しかも，それらは排反事象であるから

$$\begin{aligned}P(3\text{枚中表が}2\text{枚})&=P(HHT+HTH+THH)\\&=P(HHT)+P(HTH)+P(THH)\end{aligned}$$

一方，上の3つの式から

$$P(3\text{枚中表が}2\text{枚})={}_3C_2\cdot\{P(H)\}^2\cdot P(T)$$

となる．ところで

$$P(H)=P(T)=\frac{1}{2}$$

であるから

$$P(3\text{枚中表が}2\text{枚})={}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)={}_3C_2\frac{1}{2^3}$$

となる．

そこで一般に n 枚の硬貨を投げて x 枚表が出る確率を $P(x)$ で表わせば

$$P(x)={}_nC_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}={}_nC_x\frac{1}{2^n} \tag{4}$$

で表わされる．

一般に，1つの試行を行なって事象Eが生ずるか生じない（Eの余事象 $\bar{E}$ が生ずる）かのいずれかであるとする．このような試行を**ベルヌーイ試行**(Bernoulli trials)という．

〔定理 3.1〕　事象Eの確率をpとし，ベルヌーイ試行を独立にn回行なうとき，そのうちx回に事象Eが生ずる確率を $f(x)$ で表わせば $f(x)$ は

$$f(x)={}_nC_xp^xq^{n-x}\qquad x=0,\ 1,\ \cdots,\ n \tag{5}$$

である．$f(x)$ を**2項分布**(binomial distribution)と呼ぶ．ただし $q=1-p$ である．

この定理は以上の硬貨投げの説明から明らかである．

2項分布の名称は2項式の冪（べき）乗の展開した各項に2項分布と同一の形が現われることからきている．いま $(q+p)^n$, $n=1, 2, \cdots$, を展開してみよう．

$$(q+p)^1=q+p$$
$$(q+p)^2=q^2+2pq+p^2$$
$$(q+p)^3=q^3+3pq^2+3p^2q+p^3$$
$$(q+p)^4=q^4+4pq^3+6p^2q^2+4p^3q+p^4$$

一般に

$$\begin{aligned}(q+p)^n&={}_nC_0p^0q^n+{}_nC_1p^1q^{n-1}+{}_nC_2p^2q^{n-2}+\cdots\\&\quad+{}_nC_xp^xq^{n-x}+\cdots+{}_nC_{n-1}p^{n-1}q^1+{}_nC_np^nq^0\end{aligned} \tag{6}$$

が成立する．(6)式の一般項は(5)の2項分布と同一の形である．(6)式の右辺は，$\sum_{x=0}^{n}{}_nC_xp^xq^{n-x}$ すなわち x を0から n まで動かしたときの確率 $f(x)$ の合計になっている．それは x が0から n までの整数いずれかの値をとる確率にほかならない．x はその他の値はとりえないから，$\sum_{x=0}^{n}f(x)$ は1に等しくなければならない．ところで，(6)式の左辺で $q=1-p$ とおけば $(q+p)^n=1$ である．それゆえ

$$\sum_{x=0}^{n}f(x)=\sum_{x=0}^{n}{}_nC_xp^xq^{n-x}=1 \tag{7}$$

が証明されたことになる．

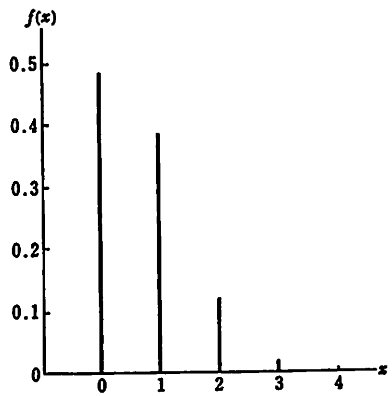
例題 3.1.1　サイコロを4回投げてそのうち1の目が x 回出る確率は

$$\left.\begin{aligned}f(0)&=\frac{4!}{0!4!}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{625}{1296}=0.4823\\f(1)&=\frac{4!}{1!3!}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{500}{1296}=0.3858\\f(2)&=\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{150}{1296}=0.1157\\f(3)&=\frac{4!}{3!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{20}{1296}=0.0154\\f(4)&=\frac{4!}{4!0!}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^0=\frac{1}{1296}=0.0008\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

である．

図3.1にはこの確率を棒グラフで示してある．

図 3.1　サイコロを4回投げて1の目が x 回出る確率



演　習　問　題

1　サイコロを4回投げて1の目または2の目のいずれかが x 回出る確率を計算し，図3.1のようなグラフをつくれ．

2　5人の子供をもつ2000家族のうち少なくとも2人男の子供がいる家族は何家族あると期待されるか．ただし男の生まれる確率は前に生まれた子供の性別と関係なく0.52であるとせよ．

3.2　離散確率変数

サイコロを4回投げ，そのうち1の目が出た個数を x で表わせば，x は(3.1.8)式に示した確率で 0, 1, 2, 3, 4 のいずれかの値をとる．このように実現する値に確率が付されている変数を確率変数(random variable)と呼ぶ(あとで述べる連続確率変数の場合にはこのいい方は正確ではない)．[1)] そのうち実数の不連続な点でしかその値をとりえない確率変数を離散確率変数(discrete random variable)と呼ぶ．上例のサイコロの1の目の出る回数は離散確率変数である．一定量のラジウムから10秒間に放射される α (アルファ)粒子の個数，無作為に抽出された100人の有権者のうち，某候補者を支持する人の数，無作為に抽出された世帯のその月の消費支出額(円以下の単位では支出されないから)，等々が離散確率変数の例である．もちろん離散確率変数はかならずしも整数値だけをとるとは限らない．実数軸上の有限個またはたかだか可付番無限個の点 $x_1, x_2, \cdots$ をそれぞれ正の確率でとる確率変数をいう．

いま離散確率変数を x で表わし，x は $x_1, x_2, \cdots$ の値をそれぞれ $f(x_1), f(x_2), \cdots$ の確率でとるものとしよう．そのとき $f(x)$ を x の確率関数(probability function)と呼ぶ．

確率関数は次の性質をもっている．

$$\left.\begin{aligned} f(x)&>0 \quad x=x_i,\ i=1,2,\cdots,\ のとき \\ &=0 \quad x\ がその他の値のとき \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)=1 \tag{2}$$

また任意の実数 a, b，ただし $a<b$ について

$$P(a\leqq x\leqq b)=\sum_{a\leqq x_i\leqq b} f(x_i) \tag{3}$$

である．

また離散確率変数の累積分布関数(cumulative distribution function，たんに分布関数と呼ぶこともある)を次のように定義する．

$$F(x)=\sum_{x_i\leqq x} f(x_i) \tag{4}$$

すなわち累積分布関数とは x より小または等しい x_i の確率の合計である．累積分布関数が次の性質をもつことはその定義から明らかである．

$$F(-\infty)=0,\quad F(\infty)=1 \tag{5}$$

$$0\leqq F(x)\leqq 1 \tag{6}$$

$$P(a<x\leqq b)=F(b)-F(a) \tag{7}$$

確率関数と累積分布関数との関係を図示すると図3.2のようになる．$F(x)$

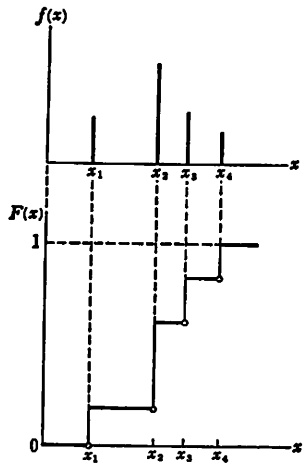
1) 確率変数をより厳密な仕方で定義すると次のようになる．いま2.1の注1)で述べた確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, P)$が与えられているとしよう．このとき Ω の上で定義された実数値関数 $X(\omega)$ が，任意の実数 x に対して

$$\{\omega : X(\omega)\leqq x\}\in\mathcal{F}$$

となっているとき，$X(\omega)$ を確率変数という．

なお，確率変数と，確率変数の実現値(一定値)とを区別するため前者を大文字，後者を小文字で表わすことも多いが，この本では記号の節約のため，原則として両者に同一の文字(主として小文字)を使用する．

図 3.2 確率関数と累積分布関数



は図の太線によって表わされている．

演 習 問 題

1 硬貨を5枚投げたとき表を向く枚数 x の累積分布関数を求め，図に描け．

3.3 連続確率変数

いま平らにおかれた広い紙に1本の直線を引き，直線上の1点 P の10センチ真上から1本の針を落としたとしよう．平面における落ちた針の先端の位置の直線までの最短距離を x で表わそう．この場合，直線で区切られた平面の一方の領域を距離のプラスの方向，他方をマイナスとする．すると x は原理的には $-\infty$ から ∞ までの任意の値をとりうる確率変数である．上のような条件の下で針を落とす実験を200回繰り返したとし，その実験結果を度数分布表にまとめた結果次の表3.1のようになったとしよう．相対度数を階級の幅 c で除した $f_k/(nc)$ を縦軸にとってヒストグラムに書けば図3.3のようになる．この図で $\sum_{k=1}^{10} c\left(\dfrac{f_k}{nc}\right)=1$ であるから，ヒストグラム全体の面積は1である．

いまこの実験の回数をさらに多くしてゆけば相対度数のヒストグラムは図

3.3とは異なる形になるが，次第に一定の極限の形に近づいてゆくであろう．そして同時に階級の幅 c を細かくして(階級の数を増やして)ゆくと，極限においてヒストグラム(図3.3の太線の部分)は図3.4の上方の図のようななめらかな曲線で表わされることになろう．図の横軸の任意の値 x に対応するこの曲線の高さを $f(x)$ で表わす．階級幅で除した相対度数 $(f_k/(nc))$ の極限としてのこのような曲線 $f(x)$ の存在を想定することができるならば，たとえば x が0から4までの間の曲線の下の面積は x が0から4までの

表 3.1 針の先端から直線までの距離の分布

k	階 級 (cm)	度数	相対度数
1	$-10<x\leqq-8$	2	0.010
2	$-8<x\leqq-6$	7	0.035
3	$-6<x\leqq-4$	14	0.070
4	$-4<x\leqq-2$	24	0.120
5	$-2<x\leqq0$	51	0.255
6	$0<x\leqq2$	51	0.255
7	$2<x\leqq4$	30	0.150
8	$4<x\leqq6$	13	0.065
9	$6<x\leqq8$	6	0.030
10	$8<x\leqq10$	2	0.010
合	計	200	1.000

図 3.3 針の先端から直線までの距離 x のヒストグラム

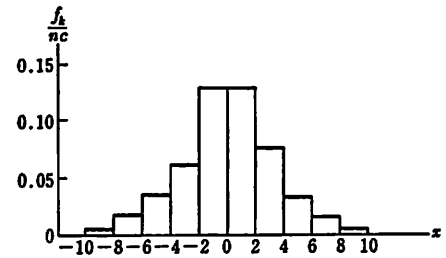
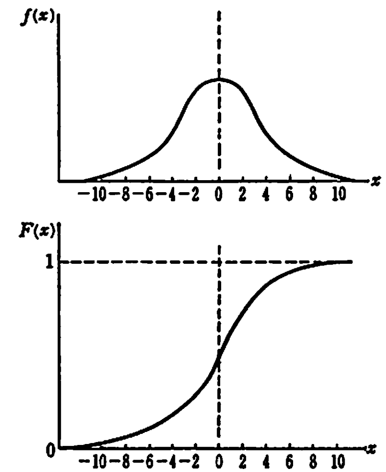


図 3.4 連続確率変数の分布



間の値をとる確率を表わすことになる．すなわち

$$P(0<x\leqq4)=\int_0^4 f(x)\,dx$$

である．

このような x は連続確率変数(continuous random variable)の1つの例である．この例のように，一般に連続確率変数は実数軸上のある区間(1個または複数個の)の中のどのような値もとりうる可能性をもつ．

より厳密にいえば，任意の実数 a, b(ただし $a<b$) に対して

$$P(a\leqq x\leqq b)=\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

が成立するような関数 $f(x)$ が存在するとき，x は連続確率変数である．またこのような $f(x)$ を x の**確率密度関数**(probability density function)あるいはたんに密度関数と呼ぶ.[2]

このとき $f(x)$ は当然次の性質をもつ．

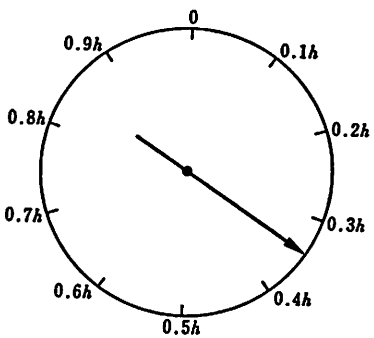
$$\left.\begin{aligned}&f(x)\geqq 0\\&\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

また連続確率変数の累積分布関数は次のように定義される．

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\,d\xi \tag{3}$$

連続型の場合の累積分布関数も，前節の離散型のそれと同じ性質をもち(3.2.5)～(3.2.7)式が成立する．図 3.4 の下方に前の例の累積分布関数を示した．

図 3.5　回転する針と円板



連続確率変数の最も単純な場合として次のようなものがある．いま平らにおかれた円板があって，その中心を軸にして矢が回転できるようになっているとしよう．図 3.5 を見よ．円板の回りの長さを h とし，これに時計の方向に図のような目盛りがついている．いま無作為な力で矢を回転させるとき，幾回転かあとに矢が停止する．その場合，矢の先端はこの円周上のどの点にもまったく等しい可能性で向くとしよう．いま 0 目盛りからの円周上の距離を x で表わす．x は定義的に 0 以上 h 以下の値しかとらない．このとき x は連続確率変数であってその確

2)　確率密度関数 $f(x)$ の値は確率ではない．連続確率変数 x がある値 a において $f(a)>0$ であっても，$x=a$ である確率はゼロである．したがって $P(\alpha\leqq x\leqq\beta)=P(\alpha<x<\beta)=P(\alpha\leqq x<\beta)=P(\alpha<x\leqq\beta)$ が成立する．

率密度は

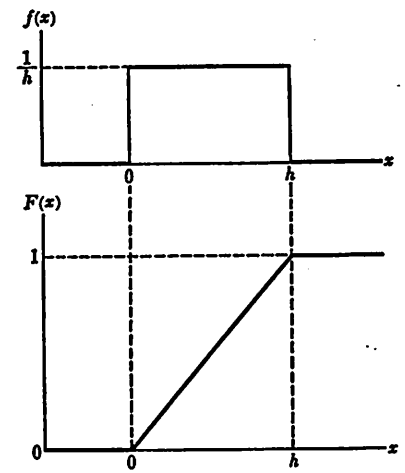
$$\left.\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{h}, &&0\leqq x\leqq h\\&=0, &&x<0 \text{ および } x>h\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

である．その累積分布関数は

$$\left.\begin{aligned}F(x)&=0 &&x<0\\&=\int_0^x \frac{1}{h}\,d\xi=\frac{x}{h} &&0\leqq x\leqq h\\&=1 &&x>h\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

である．このような分布を(連続型の)**一様分布** (uniform distribution) あるいは**矩形分布**(rectangular distribution)と呼ぶ．図に示せば図 3.6 のようになる．

図 3.6　一　様　分　布



一様分布の密度関数によって囲まれる面積はもちろん 1 である．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_0^h \frac{1}{h}\,dx=\left[\frac{x}{h}\right]_0^h=1$$

以下，密度関数が区間$[a, b]$で $1/(b-a)$ である一様分布を $U(a, b)$ という記号で表わす．上の例の一様分布は $U(0, h)$ である．

演習問題

1　xを次のような密度関数をもつ連続確率変数とする．

$$f(x)=\frac{x}{2},\quad 0\leqq x\leqq 2$$
$$=0,\quad x<0 \text{ および } x>2$$

このときxの累積分布関数を求めよ．また次の確率を計算せよ．

(a)　$0\leqq x\leqq 1$　(b)　$0.5<x\leqq 1.5$　(c)　$x=1.5$

3.4　確率変数の平均と標準偏差

3.4.1　平均と標準偏差

次に，確率分布の性質を示す特性値である平均，標準偏差，分散を定義する．

まず確率分布（または確率変数）の平均（mean）は通常記号μ（ミュー）で表わされる．連続確率変数の平均は

$$\mu=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx \tag{1}$$

また離散確率変数の平均は

$$\mu=\sum_x x_i f(x_i) \tag{2}$$

で表わされる．ただし$\sum_x$は$f(x_i)>0$なるx_i全体についての合計を表わすものとする．

たとえば一様分布(3.3.4)式の平均は

$$\mu=\int_0^h x\frac{1}{h}dx=\frac{1}{h}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h=\frac{h}{2} \tag{3}$$

である．3枚の硬貨投げの場合の2項分布の平均は

$$\mu=\sum_{x=0}^{3}x\cdot{}_3C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}$$
$$=\sum_{x=0}^{3}x\frac{3!}{x!(3-x)!}\cdot\frac{1}{8}$$
$$=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}$$
$$=1.5$$

である．

なお一般の2項分布の平均は

$$\mu=\sum_{x=0}^{n}x_nC_xp^x(1-p)^{n-x}$$
$$=np \tag{4}$$

となる．この証明は5.3.1で行なう．

次に確率変数の分散（variance），標準偏差（standard deviation）は次のように定義される．通常，標準偏差はσ（シグマ），分散はσ^2で表わされる．連続確率変数xの分散は

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2f(x)dx \tag{5}$$

また離散確率変数xの分散は

$$\sigma^2=\sum_x(x_i-\mu)^2f(x_i) \tag{6}$$

である．xの分散を$\mathrm{Var}(x)$と書くこともある．標準偏差はそれぞれ分散の平方根のプラスの値として定義される．

たとえば，先の一様分布の分散は

$$\sigma^2=\int_0^h\left(x-\frac{h}{2}\right)^2\frac{1}{h}dx$$
$$=\int_0^h\left(x^2-hx+\frac{h^2}{4}\right)\frac{1}{h}dx$$
$$=\frac{1}{h}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{hx^2}{2}+\frac{h^2x}{4}\right]_0^h$$
$$=\frac{h^2}{12}$$

したがってその標準偏差は

$$\sigma=\frac{h}{\sqrt{12}}$$

である．また硬貨を3枚投げる試行の表の枚数xの分散は

$$\sigma^2=\sum_{x=0}^{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2{}_3C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}$$
$$=\sum\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\frac{3!}{x!(3-x)!}\cdot\frac{1}{8}$$
$$=\left(0-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{8}+\left(1-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{8}+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{8}+\left(3-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{8}$$

$$=\frac{3}{4}$$

である．

一般の2項分布の分散は

$$\sigma^2=\sum_{x=0}^{n}(x-np)^2{}_nC_x p^x(1-p)^{n-x}$$

$$=np(1-p) \tag{7}$$

で与えられる．この証明は5.3.1で行なう．

以上の定義を数学的期待値(2.3)の記号を用いていえば，連続確率変数は

$$\mu=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx=E(x) \tag{1'}$$

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2f(x)\,dx=E\{(x-\mu)^2\} \tag{5'}$$

であり，離散確率変数は同様に

$$\mu=\sum_x x_i f(x_i)=E(x) \tag{2'}$$

$$\sigma^2=\sum_x (x_i-\mu)^2 f(x_i)=E\{(x-\mu)^2\} \tag{6'}$$

である．すなわち連続型，離散型を問わず，確率変数の平均とは，その確率変数そのものの数学的期待値 $E(x)$ にほかならず，また分散とは，その確率変数の平均 μ からの偏差の自乗の数学的期待値 $E\{(x-\mu)^2\}$ にほかならない．

また，a, b を一定値とするとき1次式

$$y=a+bx$$

により定義される確率変数 y の平均 μ_y と分散 $\sigma_y{}^2$ は次のようになる．

$$\mu_y=E(y)=E(a+bx)=a+bE(x)=a+b\mu \tag{8}$$

$$\sigma_y{}^2=E\{(y-\mu_y)^2\}=E\{[a+bx-(a+b\mu)]^2\}$$

$$=E\{[b(x-\mu)]^2\}=b^2E\{(x-\mu)^2\}$$

$$=b^2\sigma^2 \tag{9}$$

したがって y の標準偏差 σ_y は $|b|\sigma$ であり，a と無関係になる．

確率変数を x とし，k を整数，a を一定値とするとき

$$E\{(x-a)^k\} \tag{10}$$

を x に関する a の回りの k 次の**積率**(**moment**)という．

平均 $\mu=E(x)$ は(10)で $k=1$, $a=0$ とおいた場合に相当し，原点の回りの1次の積率である．また分散 $\sigma^2=E\{(x-\mu)^2\}$ は平均の回りの2次の積率である．

次の関係は容易に確かめられる．

$$\sigma^2=E\{(x-\mu)^2\}=E(x^2)-\{E(x)\}^2=E(x^2)-\mu^2 \tag{11}$$

どのような確率変数にも平均や分散が存在するとは限らない．たとえば第5章の演習問題5.2.1に出てくるコーシー分布は平均も分散ももたない．一般に r 次の積率が存在すれば $r-1$ 次の積率も存在する.[3] したがって分散が存在すれば平均も存在する．

3.4.2* チェビシェフ不等式

標準偏差は，確率分布の両裾における確率の大きさに関する1つの不等式を与える．それは，1890年にチェビシェフ(Chebychev)によって発見されたもので，チェビシェフの不等式と呼ばれる．すなわち

〔定理 3.2〕　x が平均 μ，分散 σ^2 の確率変数とするとき，λ を任意の正数として

$$P(|x-\mu|\geqq\lambda\sigma)\leqq\frac{1}{\lambda^2} \tag{12}$$

が成立する．

---

3)　いま $0<p\leqq q$ とすると，任意の x に対して

$$|x|^p\leqq 1+|x|^q$$

が成立する($|x|\leqq 1$ のときは $|x|^p\leqq 1$ であり，$|x|>1$ のときは $|x|^p\leqq|x|^q$ であるから)．それゆえ

$$E(|x|^p)\leqq E[1+|x|^q]=1+E(|x|^q) \tag{i}$$

$E(|x|^q)$ は x の原点回りの q 次の**絶対積率**(absolute moment)と呼ばれる．したがって $E(|x|^q)$ が存在すれば $E(|x|^p)$ が存在する．一方，$E(x^q)$ が存在するための必要十分条件は $E(|x|^q)$ が存在することである(H. Cramér, *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press, 1946, p. 43)から，$E(x^q)$ が存在すれば，$E(|x|^p)$ したがって $E(x^p)$ が存在することがいえる．

さらに，任意の a の回りの k 次の積率 $E\{(x-a)^k\}$ を α_k で表わすと

$$E\{(x-\mu)^k\}=E\{[x-a-E(x-a)]^k\}=E\{(x-a-\alpha_1)^k\}$$

$$=\sum_{j=0}^{k}{}_kC_j(-\alpha_1)^j\alpha_{k-j} \tag{ii}$$

と書ける．したがって $E(x^p)$ が存在すれば，$E\{(x-\mu)^p\}$ が存在し，その逆もいえる．

(証明)　ここでは x が連続確率変数の場合について証明するが，離散型でも同様な証明が成り立つ．実数軸の区間を3つの区間，すなわち $I_1=(-\infty, \mu-\lambda\sigma]$, $I_2=(\mu-\lambda\sigma, \mu+\lambda\sigma)$, $I_3=[\mu+\lambda\sigma, +\infty)$ に分ける．[4] そこで分散の定義より

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$$
$$=\int_{I_1}(x-\mu)^2 f(x)dx+\int_{I_2}(x-\mu)^2 f(x)dx+\int_{I_3}(x-\mu)^2 f(x)dx \quad (13)$$

となる．中央の積分は明らかに非負であるから

$$\sigma^2\geqq\int_{I_1}(x-\mu)^2 f(x)dx+\int_{I_3}(x-\mu)^2 f(x)dx \quad (14)$$

ところで区間の分け方より，I_1 または I_3 においては $(x-\mu)^2\geqq\lambda^2\sigma^2$ である．それゆえ

$$\sigma^2\geqq\int_{I_1}(x-\mu)^2 f(x)dx+\int_{I_3}(x-\mu)^2 f(x)dx$$
$$\geqq\int_{I_1}\lambda^2\sigma^2 f(x)dx+\int_{I_3}\lambda^2\sigma^2 f(x)dx$$
$$=\lambda^2\sigma^2\int_{I_1+I_3}f(x)dx=\lambda^2\sigma^2 P(|x-\mu|\geqq\lambda\sigma) \quad (15)$$

これより(12)を得る(証明終り)．

たとえば $\lambda=2$ ならば(12)より

$$P(|x-\mu|\geqq 2\sigma)\leqq\frac{1}{4}$$

となる．すなわち平均の回りに標準偏差の2倍をとれば，それより外側の区間の値を x がとる確率は0.25以下である．このことは標準偏差が存在する限り x の確率分布がどのような形の分布であってもいえる点が重要である．

演　習　問　題

1　前節演習問題1の確率変数の平均と分散を計算せよ．

2　サイコロを1個投げるときの目の数の平均，分散，標準偏差を求めよ．

4)　区間の端が閉じているときは[,]を用い，開いているときは(,)を用いる．

3.5　ポアソン分布

2項分布

$$f(x)={}_nC_x p^x(1-p)^{n-x} \qquad x=0, 1, \cdots, n \quad (1)$$

において，n が無限に大きくなり，しかも，λ を一定値として $np=\lambda$ を保つ(したがって p は限りなく0に近づく)とする．このとき(1)はどのような形になるかを考えてみよう．(1)の p に λ/n を代入し，次のように変形する．

$$f(x)={}_nC_x\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$
$$=\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\frac{\lambda^x}{x!}\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$
$$=\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\frac{\lambda^x}{x!}\prod_{i=0}^{x-1}\left\{\left(1-\frac{i}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-1}\right\} \quad (2)$$

ところで，自然対数の底 $e(=2.71828\cdots)$ の定義は

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=\left\{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-\lambda)}{n}\right)^{\frac{n}{(-\lambda)}}\right\}^{-\lambda}$$
$$=e^{-\lambda} \quad (3)$$

である．それゆえ，x を一定とするとき

$$\lim_{n\to\infty}f(x)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \quad (4)$$

が得られる．(4)の右辺を改めて $f(x)$ と書けば

$$f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad x=0, 1, 2, \cdots \quad (5)$$

となる．このような $f(x)$ を確率関数とする確率分布を**ポアソン分布**(**Poisson distribution**)と呼ぶ．

$$\sum_{x=0}^{\infty}f(x)=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1 \quad (6)$$

である[5]から確率関数の性質(3.2.2)式を満たすことが分かる．

また，ポアソン分布の平均と分散はともに λ に等しい(5.3演習問題2参照)．これはポアソン分布の著しい特徴である．

表3.2に λ=0.1, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0 の場合のポアソン分布の確率の値を示しておこう．

表 3.2　ポアソン分布

x \ λ	0.1	0.5	1.0	2.0	5.0
0	.9048	.6065	.3679	.1353	.0067
1	.0905	.3033	.3679	.2707	.0337
2	.0045	.0758	.1839	.2707	.0842
3	.0002	.0126	.0613	.1804	.1404
4	.0000	.0016	.0153	.0902	.1755
5		.0002	.0031	.0361	.1755
6		.0000	.0005	.0120	.1462
7			.0001	.0034	.1044
8			.0000	.0009	.0653
9				.0002	.0363
10				.0000	.0181
11					.0082
12					.0034
13					.0013
14					.0005
15					.0002

ポアソン分布は導かれた過程から分かるように，p が著しく小さくかつ n が非常に大きい場合の2項分布の近似式である．それゆえポアソン分布は，まれにしか生じないが，しかし生ずる可能性のある機会は非常に多いような事象の生起の確率をよく記述する．たとえば一定量の放射性物質から1秒間に放射される α（アルファ）粒子の個数はポアソン分布にしたがう確率変数である．なぜなら放射性物質の中に含まれる原子の数 n は非常に多いが，各原子がその1秒間に崩壊して α 粒子を放出する確率 p は著しく小さいからである．

ラザフォードとガイガーが放射性物質から7.5秒間隔に放射される α 粒子の数を測定する実験を2608回行なった．その結果表3.3のような放出個数の分布(第(2)欄)を得た．これに対しポアソン分布からの理論的な期待度数[6]は第(3)欄に示されている．この期待度数は次のように計算したものである．λ の値のかわりに標本平均

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{2,608}\sum_{i=0}^{14}x_i f_i \qquad (7)$$

を計算する．この $\hat{\lambda}$ を λ として用いて

$$f_i^*=2,608\times\frac{e^{-\hat{\lambda}}(\hat{\lambda})^{x_i}}{x_i!} \qquad (8)$$

により期待度数を計算するのである．このようにして計算した第(3)欄の期待度数に，第(2)欄の観測度数は驚くべきほどの一致を見せている．[7]

表 3.3　ラザフォード-ガイガーの実験結果

(1) 放出個数 x_i	(2) 観測度数 f_i	(3) 期待度数 f_i^*
0	57	54
1	203	211
2	383	407
3	525	526
4	532	508
5	408	394
6	273	254
7	139	140
8	45	68
9	27	29
10	10	11
11	4	4
12	0	1
13	1	1
14	1	0
計	2,608	2,608

演習問題

1　2個のサイコロを72回振るとき，両方とも1の目が出る回数を x とする．x=0, 1, …, 5のおのおのについて，その確率を2項分布とポアソン分布を用いて計算し，両者を比較せよ(2項分布の計算の際は確率関数を対数変換するとよい)．

2　ある工場で製造された電球の3%は不良品である．いま100個を抽出するとき(a)0個，(b)1個，(c)2個，(d)3個が不良品である確率を，ポアソン分布を利用して求めよ．

3　ある大学の食堂で，カレーライス1皿の中の牛肉の個数はポアソン分布にした

5)　e^λ をマクローリン展開すれば

$$e^\lambda=1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\cdots$$

となる．

6)　期待度数とは度数の数学的期待値のことである．いま x が x_i となる確率を $f(x_i)$ とする．x に関する n 個の観測値があるとき $x=x_i$ となる観測値の数を y とすると y は2項分布にしたがうから，y の期待値は $nf(x_i)$ である．

がっているという．1皿に少なくとも2個の牛肉がはいっている確率を 95% 以上にするには，1皿当りの牛肉の個数の平均をおおよそいくら以上にしなければならないか(ヒント：グラフを用いて解の近似値を求めよ)．

3.6　複数個の確率変数の分布

3.6.1　結合分布

2つ以上の離散型確率変数を考える．いまその数を p 個であるとして，それらを $x_1, x_2, \cdots, x_p$ で表わそう．$x_1, x_2, \cdots, x_p$ がそれぞれ特定の値をとるとき，それに対応して1個の確率が与えられるとしよう．その確率を

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_p)$$

で表わし，**結合確率関数**(joint probability function)と呼ぶ．

例題 3.6.1　x_1 をゆがみのないサイコロを1個振ったときの目の数を表わすものとする．サイコロを投げてもし $x_1=x_1'$ であれば，x_1' 枚の硬貨を投げるものとする．x_2 をそのときの硬貨の表の枚数とする．このとき，x_1, x_2 の結合確率関数は

$$f(x_1, x_2)=\frac{1}{6}{}_{x_1}C_{x_2}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} \quad x_1 \geqq x_2;\ x_1=1, \cdots, 6;\ x_2=0, 1, \cdots, x_1 \tag{1}$$

である．

この結合確率関数を x_1, x_2 のとりうるすべての値について表にすると表 3.4 のようになる．

この表の中央の数字が x_1, x_2 の結合確率 $f(x_1, x_2)$ である．なお表の周辺確率については次の小節で説明する．

3.3 の針の実験で，平面に引かれた1本の直線に対し，点 P で直角に交わる直線をもう1本引き，それぞれ y 軸，x 軸と名づければ，平面に P を原点とする直交座標が設定されたことになる．すると平面上のどの点の位置も座標 (x, y) により表わされることになる．さて前の点 P の真上 10 センチから針を落と

7)　実測度数が理論的な期待度数にどの程度適合しているかを判定する問題については 8.5 を参照せよ．

表 3.4　サイコロの目の数と硬貨の表の枚数の結合分布(例題 3.6.1)

サイコロの目 x_1 ＼ 硬貨の表の枚数 x_2	0	1	2	3	4	5	6	x_1 の周辺確率
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{48}$	$\frac{3}{48}$	$\frac{3}{48}$	$\frac{1}{48}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{96}$	$\frac{4}{96}$	$\frac{6}{96}$	$\frac{4}{96}$	$\frac{1}{96}$	0	0	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{192}$	$\frac{5}{192}$	$\frac{10}{192}$	$\frac{10}{192}$	$\frac{5}{192}$	$\frac{1}{192}$	0	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{384}$	$\frac{6}{384}$	$\frac{15}{384}$	$\frac{20}{384}$	$\frac{15}{384}$	$\frac{6}{384}$	$\frac{1}{384}$	$\frac{1}{6}$
x_2 の周辺確率	$\frac{63}{384}$	$\frac{120}{384}$	$\frac{99}{384}$	$\frac{64}{384}$	$\frac{29}{384}$	$\frac{8}{384}$	$\frac{1}{384}$	1

表 3.5　針の先端の位置の分布(度数)

j	k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	x の周辺度数
		$-10<y\leqq-8$	$-8<y\leqq-6$	$-6<y\leqq-4$	$-4<y\leqq-2$	$-2<y\leqq0$	$0<y\leqq2$	$2<y\leqq4$	$4<y\leqq6$	$6<y\leqq8$	$8<y\leqq10$	
1	$-10<x\leqq-8$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	2
2	$-8<x\leqq-6$	0	0	0	1	2	2	2	0	0	0	7
3	$-6<x\leqq-4$	0	0	1	3	4	3	2	0	0	1	14
4	$-4<x\leqq-2$	0	0	1	5	5	9	3	0	1	0	24
5	$-2<x\leqq0$	0	2	4	7	14	12	7	2	2	1	51
6	$0<x\leqq2$	1	0	5	8	11	17	6	2	1	0	51
7	$2<x\leqq4$	0	1	1	7	8	5	5	1	0	2	30
8	$4<x\leqq6$	0	0	0	4	3	3	2	0	1	0	13
9	$6<x\leqq8$	0	1	0	0	2	1	2	0	0	0	6
10	$8<x\leqq10$	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	2
y の周辺度数		1	4	12	35	50	54	30	5	5	4	200

す実験結果を今度は x 軸への距離すなわち y の大きさをも考慮して整理し直したところ，前ページの表 3.5 のようになったとしよう．このような表を x と y の**2重分類の度数表**という．

この表で各桝の中の度数を f_{jk} で表わす．たとえば x が第2階級で y が第5階級である桝の度数は f_{25} でこの表では $f_{25}=2$ である．この度数表を，各度数を全体の度数 $n(=200)$ で割って相対度数の表につくりかえてみよう．表 3.6 を見よ．

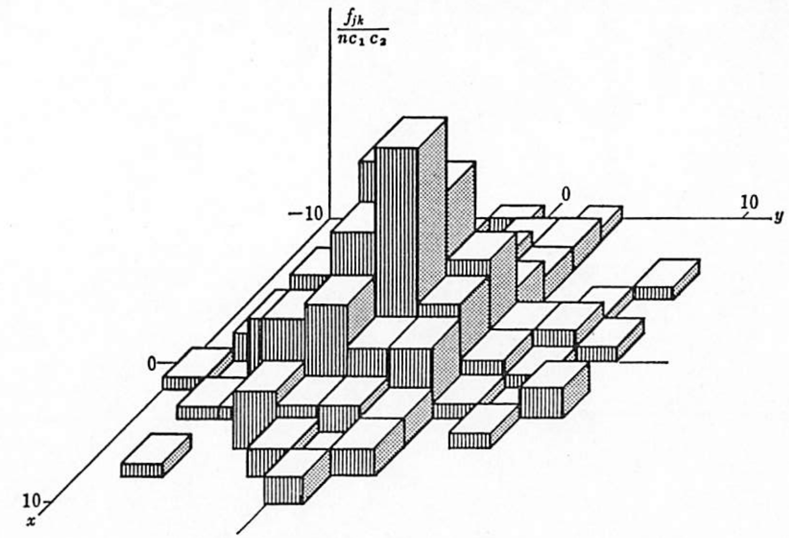
表 3.6　針の先端の位置の分布(相対度数)

j	k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	x の周辺相対度数
		$-10<y\leqq-8$	$-8<y\leqq-6$	$-6<y\leqq-4$	$-4<y\leqq-2$	$-2<y\leqq0$	$0<y\leqq2$	$2<y\leqq4$	$4<y\leqq6$	$6<y\leqq8$	$8<y\leqq10$	
1	$-10<x\leqq-8$	0	0	0	0	.005	0	.005	0	0	0	.010
2	$-8<x\leqq-6$	0	0	0	.005	.010	.010	.010	0	0	0	.035
3	$-6<x\leqq-4$	0	0	.005	.015	.020	.015	.010	0	0	.005	.070
4	$-4<x\leqq-2$	0	0	.005	.025	.025	.045	.015	0	.005	0	.120
5	$-2<x\leqq0$	0	.010	.020	.035	.070	.060	.035	.010	.010	.005	.255
6	$0<x\leqq2$	.005	0	.025	.040	.055	.085	.030	.010	.005	0	.255
7	$2<x\leqq4$	0	.005	.005	.035	.040	.025	.025	.005	0	.010	.150
8	$4<x\leqq6$	0	0	0	.020	.015	.015	.010	0	.005	0	.065
9	$6<x\leqq8$	0	.005	0	0	.010	.005	.010	0	0	0	.030
10	$8<x\leqq10$	0	0	0	0	0	.010	0	0	0	0	.010
y の周辺相対度数		.005	.020	.060	.175	.250	.270	.150	.025	.025	.020	1.000

この相対度数 f_{jk}/n 分布は1重分類のときのようには図に描くことができない．なぜなら2重分類の場合には，x, y 軸以外にもう1つ相対度数の軸を必要とし，全体で3次元の座標となり，2次元のグラフとしては描けないからである．

そこで3次元の立体模型を作成してみよう．図 3.7 はこの模型を (x, y) 座標の第1象限のほうから見た鳥瞰図である．いま x の階級幅を c_1, y の階級幅を c_2 とすると，この模型の高さは $f_{jk}/(nc_1c_2)$ である．その結果全体の柱の体積

図 3.7　立体ヒストグラム



$(\sum\sum c_1c_2\{f_{jk}/(nc_1c_2)\})$ は1に等しくなっている．

さてこのような立体的なヒストグラムは，実験回数 n を大にし，階級の幅 c_1 および c_2 を小にしてゆくと次第に表面の凹凸は消えて，1つのあたかもすり鉢を伏せたような形になってゆくであろう．この場合においてもヒストグラムの体積が1であるという性質は保たれている．このような極限のなめらかな曲面の，任意の点 x, y における高さを $f(x, y)$ で表わそう．その場合 x, y は連続確率変数であり，$f(x, y)$ は x, y の**結合確率密度関数**(joint probability density function)または結合密度関数と呼ばれるものに相当する．

一般に p 個の確率変数 $x_1, x_2, \cdots, x_p$ がある場合，任意の実数 a_i, b_i(ただし $a_i<b_i$), $i=1, \cdots, p$ に対して

$$P(a_1\leqq x_1\leqq b_1,\ a_2\leqq x_2\leqq b_2,\ \cdots,\ a_p\leqq x_p\leqq b_p)$$
$$=\int_{a_p}^{b_p}\cdots\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \cdots, x_p)\,dx_1dx_2\cdots dx_p \qquad (2)$$

が成り立つような関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ が存在するとき，$x_1, x_2, \cdots, x_p$ は連続確率変数であり，$f(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ を $x_1, x_2, \cdots, x_p$ の結合密度関数という．

結合密度関数はその定義から

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_p)\geqq 0, \qquad -\infty<x_i<\infty,\ i=1,\ \cdots,\ p \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_p)\,dx_1dx_2\cdots dx_p=1 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

である．

3.6.2 周辺分布

先の例題3.6.1において x_1, x_2 の結合確率関数が

$$f(x_1,\ x_2)=\frac{1}{6}\,{}_{x_1}C_{x_2}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} \qquad (4)$$

として与えられた．この実験でたんに x_1 だけの確率関数は明らかに

$$f_1(x_1)=\frac{1}{6}, \qquad x_1=1,\ 2,\ \cdots,\ 6 \qquad (5)$$

である．このように x_2 の生起のいかんを問わないで x_1 だけの確率分布を問題とする場合の x_1 の確率関数を x_1 の周辺確率関数という．

一般に1つの確率変数の周辺確率関数は，結合確率関数について，その変数以外の確率変数の変域全体の和をつくることによって得られる．たとえば上の例で x_1 の周辺確率関数は

$$\begin{aligned} f_1(x_1)&=\sum_{x_2=0}^{x_1}\frac{1}{6}\,{}_{x_1}C_{x_2}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} \\ &=\frac{1}{6}\sum_{x_2=0}^{x_1}{}_{x_1}C_{x_2}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}=\frac{1}{6}, \qquad x_1=1,\ 2,\ \cdots,\ 6 \end{aligned}$$

である．また x_2 の周辺確率関数は

$$f_2(x_2)=\sum_{x_1=x_2}^{6}\frac{1}{6}\,{}_{x_1}C_{x_2}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} \qquad (6)$$

である．(5)や(6)はそれぞれ表3.4の最右欄と最下欄にその値が示されている．

一般に p 個の離散型変数の結合確率関数 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_p)$ が与えられているとき，x_i の周辺確率関数は

$$f_i(x_i)=\sum_{x_1}\cdots\sum_{x_{i-1}}\sum_{x_{i+1}}\cdots\sum_{x_p}f(x_1,\ \cdots,\ x_p) \qquad (7)$$

で与えられる．ただし記号 $\sum_{x_j}$ は x_j のすべての値について加え合わせることを意味する．

x_1, x_2, $\cdots$, x_p が連続確率変数のときは，x_i の周辺密度関数は

$$f_i(x_i)=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{((p-1)\text{個})}f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_p)\,dx_1\cdots dx_{i-1}dx_{i+1}\cdots dx_p \qquad (8)$$

によって定義される．

平面に針を落下する実験では，表3.6の最右欄と最下欄とに示されている周辺相対度数の極限値($n\to\infty$, c_1, $c_2\to 0$ における)が周辺密度関数にほかならない．

3.6.3 条件付分布

離散型の場合から始めよう．例題3.6.1において x_1 が特定の値 $x_1=x_1'$ をとったとすれば，その条件の下での x_2 の確率関数は ${}_{x_1'}C_{x_2}(1/2)^{x_1'}$ であり2項分布にほかならない．一般に p 個の確率変数 x_1, x_2, $\cdots$, x_p があって，そのうち$(p-r)$個の変数，これをかりに x_{r+1}, $\cdots$, x_p とする，をそれぞれある値に固定したときの，他の r 個の変数の確率関数を，x_{r+1}, $\cdots$, x_p を与えたときの x_1, $\cdots$, x_r の条件付結合確率関数といい

$$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_r|x_{r+1},\ \cdots,\ x_p) \qquad (9)$$

と書く．上の例で x_1 を与えたときの x_2 の条件付確率は

$$f(x_2|x_1)={}_{x_1}C_{x_2}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}$$

である．

条件付確率関数については，2.2.2の議論から明らかな関係として

$$\begin{aligned} f(x_1,\ x_2)&=f_1(x_1)f(x_2|x_1) \\ &=f_2(x_2)f(x_1|x_2) \end{aligned} \qquad (10)$$

が成立する．

例題 3.6.2　1個のサイコロを投げ，出た目の数だけの枚数の銅貨を投げるという試行を行なう．この結果4枚の銅貨が表を向いた．このときのサイコロの目が5である確率を求めよ．

$$\begin{aligned} f(x_1|x_2)&=\frac{f(x_1,\ x_2)}{f_2(x_2)}=\frac{1}{6}\,{}_{x_1}C_{x_2}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}\Bigg/\left\{\sum_{x_1=x_2}^{6}\frac{1}{6}\,{}_{x_1}C_{x_2}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}\right\} \\ &=\frac{x_1!}{(x_1-x_2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}\Bigg/\left\{\sum_{x_1=x_2}^{6}\frac{x_1!}{(x_1-x_2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}\right\} \end{aligned}$$

$x_2=4$, $x_1=5$ とおけば $f(5|4)=10/29$ となる．これは表3.4から直接求めることもできる．

次に連続型の場合に移ろう．x_1, $\cdots$, x_p の p 個の連続型確率変数があってそ

の結合密度関数を $f(x_1, \cdots, x_p)$ で表わそう．$x_{r+1}, \cdots, x_p$ の条件の下での $x_1, \cdots, x_r$ の**条件付結合密度関数**を

$$f(x_1, \cdots, x_r|x_{r+1}, \cdots, x_p)$$

と書く．これは変数 $x_{r+1}, \cdots, x_p$ がそれぞれ一定の値 $x_{r+1}, \cdots, x_p$ に固定されたときの，$x_1, \cdots, x_r$ の結合密度関数にほかならない．連続型の場合にも(10)の関係が成立する．[8]

$x_1, \cdots, x_p$ が連続型であれ離散型であれ次の関係が成立する．

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_p) &= f_1(x_1)f(x_2, \cdots, x_p|x_1) \\ &= f_1(x_1)f(x_2|x_1)f(x_3, \cdots, x_p|x_1, x_2) \\ &\cdots\cdots \\ &= f_1(x_1)f(x_2|x_1)f(x_3|x_1, x_2)\cdots f(x_p|x_1, \cdots, x_{p-1}) \end{aligned} \tag{11}$$

あるいは任意の r について

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_p)=f(x_1, \cdots, x_r)f(x_{r+1}, \cdots, x_p|x_1, \cdots, x_r) \tag{12}$$

である．これらは(2.2.18)式などから明らかであろう．

3.6.4 統計的独立性

x_1, x_2 を離散型（あるいは連続型）の確率変数とする．その結合確率関数（あるいは結合密度関数）が，x_1, x_2 のすべての値についてそれぞれの周辺確率関数（あるいは周辺密度関数）の積に等しいとき，x_1 と x_2 とは**統計的に独立**(statistically independent)であるという（事象の独立性2.2.2参照）．すなわち

$$f(x_1, x_2)=f_1(x_1)f_2(x_2) \tag{13}$$

このことは

$$f(x_1|x_2)=f_1(x_1) \tag{14}$$

あるいは

$$f(x_2|x_1)=f_2(x_2) \tag{15}$$

8)　連続型の場合には，$f_1(x_1)>0$ となる x_1 の各値に対して

$$f(x_2|x_1)=f(x_1, x_2)/f_1(x_1)$$

によって定義される関数 $f(x_2|x_1)$ を，x_1 を与えたときの x_2 の条件付密度関数と呼ぶ．同様に $f(x_2)>0$ なる x_2 に対して，条件付密度関数

$$f(x_1|x_2)=f(x_1, x_2)/f_2(x_2)$$

が定義される．

が成立することと同値である．

たとえば，サイコロを2個投げ第1のサイコロの目を x_1，第2のサイコロの目を x_2 で表わせば x_1 と x_2 とは統計的に独立である．すなわち

$$f(x_1, x_2)=f_1(x_1)f_2(x_2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} \qquad x_1, x_2=1, \cdots, 6$$

が成立している．

p 個の確率変数 $x_1, \cdots, x_p$ があり，その結合分布を $f(x_1, \cdots, x_p)$，各変数の周辺分布を $f_1(x_1), \cdots, f_p(x_p)$ とする．このとき $x_1, \cdots, x_p$ のすべての値について

$$f(x_1, \cdots, x_p)=f_1(x_1)\cdots f_p(x_p) \tag{16}$$

が成立するとき，$x_1, \cdots, x_p$ は統計的に独立であるという．

3.6.5 共　分　散

確率変数 x_1 と x_2 の**共分散**(covariance)は $\mathrm{Cov}(x_1, x_2)$ と書かれ，次のように定義される．

$$\mathrm{Cov}(x_1, x_2)=E[\{x_1-E(x_1)\}\{x_2-E(x_2)\}] \tag{17}$$

(17)は，容易に確かめられるように

$$\mathrm{Cov}(x_1, x_2)=E(x_1x_2)-E(x_1)E(x_2) \tag{18}$$

とも書ける．

例題3.6.1のサイコロの目 x_1 と硬貨の表の枚数 x_2 の共分散を求めてみよう．

$$E(x_1)=\sum_{x_1=1}^{6} x_1 f_1(x_1)=\frac{1}{6}\cdot(1+2+\cdots+6)=3.5$$

$$\begin{aligned} E(x_2)&=\sum_{x_2=0}^{6} x_2 f_2(x_2) \\ &=0\cdot\frac{63}{384}+1\cdot\frac{120}{384}+2\cdot\frac{99}{384}+\cdots+6\cdot\frac{1}{384}=1.75 \end{aligned}$$

であるから，(18)より

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(x_1, x_2)&=\sum_{x_2=0}^{6}\sum_{x_1=1}^{6} x_1x_2 f(x_1, x_2)-E(x_1)E(x_2) \\ &=1\cdot 0\cdot\frac{1}{12}+2\cdot 0\cdot\frac{1}{24}+3\cdot 0\cdot\frac{1}{48}+\cdots+6\cdot 6\cdot\frac{1}{384}-(3.5)(1.75) \\ &=1.458 \end{aligned}$$

となる．

x_1 と x_2 が統計的に独立であれば共分散 $\mathrm{Cov}(x_1, x_2)$ はゼロとなる．なぜな

ら，x_1, x_2 を連続型とすると

$$E(x_1x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f(x_1,x_2)dx_1dx_2$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}x_1f_1(x_1)dx_1\int_{-\infty}^{\infty}x_2f_2(x_2)dx_2$$
$$=E(x_1)E(x_2)$$

となるから，(18)により $\mathrm{Cov}(x_1, x_2)=0$ である(離散型の場合も同様).

しかし共分散がゼロでも x_1 と x_2 が統計的に独立であるとは限らない(下記の演習問題3を見よ).

演習問題

1　同時に2枚の硬貨を投げ表の枚数を x_1 とする．次に x_1+1 枚の硬貨を投げ表の枚数を x_2 とする．x_1, x_2 の結合確率関数を求め，表3.4のような表を作成せよ．これにより，$x_2=1$ が分かったときの $x_1=2$ の条件付確率を求めよ．

2　袋の中に1から3までの番号が書いてある3枚のカードがはいっている．いま1枚を無作為に抽出し，カードの番号を x とする．次にそれをもとへ戻さないで2枚目を抽出し，その番号を y とする．x と y の結合確率関数，x を与えたときの y の条件付確率関数，y の周辺確率関数を求めよ．

3　下記の表によりその結合確率の値が与えられている離散確率変数 x_1, x_2 がある．この x_1 と x_2 の共分散がゼロになることを確かめよ．x_1 と x_2 は統計的に独立といえるか．

x_1 \ x_2	0	2	
0	0.25	0.1	0.35
1	0	0.3	0.3
2	0.25	0.1	0.35
	0.5	0.5	

第4章
標本抽出

4.1　無作為抽出と乱数

母集団から標本を抽出する際に，無作為に抽出することが重要であることを第1章で述べた．しかし「無作為に」という言葉にははっきりした定義を与えなかった．たとえば52枚のトランプのカードから無作為に5枚を抜き出す場合に，われわれはトランプをよくかき混ぜたり，切ったりするであろう．しかしそうやっても，抜いた5枚がたまたま全部ハートであるということもある．だがわれわれは全部ハートであるからといってその抜出し方が無作為でないとはいわない．抽出の仕方が無作為であれば，その標本は無作為標本なのである．

それでは，どのような抽出の仕方が無作為なのであろうか．

それは母集団を構成するどの要素も他の要素の選ばれ方に無関係にまったく相等しい確率で選ばれることが保証されるような抽出の仕方，ということができる．たとえばある講義を履習している300人の学生の成績を調査するために大きさ50の標本を抽出しようとするとき，ある日教室に出席している学生の中から抽出したのでは，普段から欠席がちの学生の選ばれる確率が低くなってしまうから，これは無作為な抽出法とはいえない．

無作為抽出をやる際によく使われるものに，乱数表(table of random numbers)がある．乱数表(正確には一様乱数表)は0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9の10種類の文字が「でたらめ」な順序に排列されている表である．

表4.1は1万個の数字から成る乱数表である．

表 4.1　乱　数　表 (1)

	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
1	35222	32250	12995	81235	67154	89226	07103	00237	53657	67594
2	61167	73830	83700	42407	35149	46244	82597	61164	20549	29374
3	46896	25295	67178	69400	52933	88227	18083	97549	30902	33359
4	96836	72563	06461	52920	17243	68697	16144	00456	51255	33170
5	37928	97737	59976	47584	93291	21625	27464	67603	29626	22298
6	60936	67885	74029	40933	63878	35798	57642	03230	15380	51309
7	94576	71035	85254	62031	17162	17143	12448	99320	50931	17111
8	15557	60458	31943	91484	20291	22302	12531	25850	10578	33364
9	36941	27219	64604	54112	46326	90860	57903	38868	18872	21533
10	48534	09615	86966	34996	56613	50024	42288	71795	97097	71723
11	37312	61006	22472	21692	08297	37608	80342	34427	05940	99764
12	89247	66445	12736	13327	47580	74271	53261	66271	56850	96208
13	86491	33527	61468	94931	76754	71336	57842	12575	75481	45230
14	97840	39562	86396	47587	93305	66671	68135	54585	80327	41768
15	08623	08919	07197	31282	67641	42867	67194	13694	10296	82730
16	83082	71144	04685	52935	20023	42758	34925	53131	68839	47102
17	83012	87672	91779	53016	14026	54109	55667	01648	46810	96189
18	80019	51115	73233	07571	68145	73801	73441	16308	63145	07890
19	26333	26043	30930	79757	06812	14744	79441	07019	25443	51376
20	37018	02142	60009	17963	62907	57665	12894	10120	15666	01722
21	57668	26921	46369	71483	66798	99670	56014	67163	33790	24445
22	35593	73249	62995	02502	15290	05510	34369	60844	77651	55665
23	52064	84862	06881	66738	24866	86558	16946	53970	22271	67655
24	52834	47484	25278	78333	23578	93690	48374	33903	40622	89701
25	42220	79836	02295	89871	91014	12055	44103	11793	30900	78430
26	87862	54069	98039	26758	56013	15775	75209	95055	68234	78095
27	71203	81878	71805	26115	89636	65064	50788	82700	98676	20158
28	54047	47271	97945	02113	92658	18000	25979	84603	81491	43138
29	22983	49288	07600	92848	71997	31141	91534	72749	15605	72643
30	01781	37892	62387	06318	92593	65632	90950	54034	24748	30366
31	11016	12080	07314	56463	36510	60797	48144	94300	82984	57673
32	41763	48090	58132	44888	94944	73015	40556	05730	27608	30380
33	98571	91063	94115	80359	20933	37868	27051	35319	07228	03150
34	85494	30086	26961	79814	09609	85609	78445	61278	56005	69745
35	72304	34443	87917	05116	92167	54956	99557	66156	25604	25053
36	86021	38506	92928	87140	66703	70327	94249	12659	31541	79711
37	73695	94417	79398	94713	56768	76305	52386	56464	12157	32884
38	44288	62662	47025	20066	46404	61655	61906	44421	09282	76044
39	68877	89580	19560	47052	55228	74817	26939	48902	12334	98500
40	03411	08521	07787	34897	49347	07709	90337	07194	50109	72212
41	31331	51049	00382	79400	62302	84011	60228	68514	55458	01023
42	23622	76652	33104	33032	36699	92544	04800	75605	10856	55150
43	28680	89899	71186	79858	99803	58003	95135	00759	34198	98611
44	00666	13222	13222	54096	66374	45375	74306	60354	22213	06658
45	12813	97527	68229	23974	91854	73524	29812	02259	77064	38455
46	03546	28211	99129	58816	73850	29447	05792	19798	81336	63039
47	11354	22546	88193	90157	40268	80146	54429	19684	40126	36921
48	89408	10175	26230	65167	15540	36534	37279	20616	30485	19483
49	58562	80815	78466	37345	81530	46716	89580	58255	32275	32602
50	48534	25304	46923	68177	10640	62074	75610	21798	33449	07578

表 4.1　乱　数　表 (2)

	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
1	55138	77752	04898	00044	32887	66422	90065	33687	04133	56042
2	53994	49946	51234	88848	34898	30915	42717	14700	23260	67483
3	64662	58591	99117	43905	68330	43663	60058	40335	26433	33860
4	20796	94422	06747	58698	56074	55782	92317	46134	76504	92670
5	69724	62440	34285	25591	07829	61391	91135	12039	70861	01231
6	18255	65426	64715	02110	16494	26542	89804	79627	76447	94083
7	98761	93244	55446	25974	78869	09518	04916	10958	67209	03411
8	40937	45923	51806	96448	82891	60507	82005	31604	94711	65122
9	51481	84484	25959	56505	37416	63869	54626	21858	25979	17536
10	65055	04708	10200	02673	06556	51757	22583	88310	24243	61224
11	64412	83982	72258	78504	81393	92567	13276	86139	36866	48963
12	66478	97246	25164	66051	33713	15726	41554	18389	18244	73289
13	79863	11830	29502	73931	57946	63667	17191	43945	08695	62824
14	74528	84439	90989	18962	87042	78863	30894	66057	50660	27542
15	72348	85850	64834	72017	14387	86840	04482	23856	85634	55168
16	51441	70034	65910	56050	85877	25020	29907	93636	32113	54403
17	06568	90433	11711	48990	77153	17263	89063	44404	35716	36218
18	08861	05242	21057	12796	10496	72855	83959	22692	18917	71687
19	28447	31091	29368	60502	65674	27605	87435	80461	41390	78329
20	40324	44229	01627	62223	79624	86373	81553	86407	81774	11574
21	39664	63103	81531	84080	76878	51723	60511	57758	92899	61016
22	55742	28357	50929	00132	06529	32550	88256	58947	56339	29219
23	67664	44492	26753	79645	09364	43595	20001	09456	42980	40924
24	30841	74980	70790	51836	09734	08709	43060	49782	85671	09481
25	06405	17527	90072	21945	10380	98967	05420	04486	69165	75885
26	24893	91910	79525	10325	72717	29197	61520	16099	74547	17513
27	42532	11711	90210	89271	81634	38219	84645	76318	19613	61526
28	03874	97782	32333	74211	72882	15417	94169	30859	56415	08476
29	49202	49731	12723	20588	37943	20686	56391	73353	80025	67458
30	97315	43586	53811	86774	85705	60045	05602	26505	78430	97892
31	75540	12989	76503	73387	20207	77746	73657	89281	07778	31238
32	33551	26036	78395	25937	48091	43073	07851	67339	41281	29040
33	63922	82744	16317	65905	47360	16034	24645	43612	60944	91745
34	02473	76843	51943	13168	17815	51058	45811	28996	13173	72954
35	53863	70517	44466	86242	20693	10328	11824	90496	45119	94137
36	39346	53931	10298	09889	70870	43401	29522	33954	37205	69081
37	49410	90045	24887	64653	35340	96433	94417	39443	01755	12213
38	77622	57090	07519	78550	73423	94067	47371	77250	21189	58455
39	48814	13050	87980	59408	66070	88557	77181	14211	14648	80599
40	32973	31433	80633	78971	75676	00529	79696	34661	28006	25232
41	26905	52388	50210	48253	68137	74593	58659	96502	84569	69295
42	25761	43159	94218	44131	81185	34131	03034	50432	26867	97637
43	81403	49241	32359	63666	96681	87929	12868	70382	68563	38235
44	14129	06963	77376	85712	42241	60785	60973	08633	39142	49906
45	50864	69675	31952	81683	77164	64069	49541	95652	46521	27700
46	02757	68853	12983	36290	24901	19725	17558	97976	15563	51771
47	01191	32181	18199	05993	44946	05670	62144	48648	46019	03934
48	35070	97921	40451	57777	56776	33442	47540	79441	48787	57599
49	49949	85914	89725	51920	85930	24184	63769	28872	17296	79507
50	22735	14533	02363	32914	42089	08919	01912	22191	91515	23984

表 4.1　乱 数 表 (3)

	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
51	93110	76037	14657	60517	38796	16319	30132	29997	44389	64528
52	28379	60943	68912	40356	50698	49377	90901	91589	35125	61696
53	88153	49476	27413	88462	31506	84709	57803	82669	32407	81846
54	55534	62929	98840	77825	43773	51081	07865	70579	69917	23861
55	97699	74713	17762	90619	06785	77942	26008	96572	54060	75769
56	92465	14398	74953	15919	87880	57221	94294	00062	05545	23582
57	13106	19147	88280	10665	10490	93583	93641	58354	47181	48291
58	21084	09769	45512	68108	36008	12743	97375	75093	71633	29883
59	93229	39683	49681	28532	73211	01322	61521	02478	95617	23587
60	65148	12460	90482	61935	68368	64171	75380	87173	27243	24444
61	80826	67697	75912	20766	22203	91085	88062	46555	49071	81649
62	25948	03191	69032	78279	84320	88471	44885	91447	51108	64590
63	21622	43493	54894	65869	66348	02260	26133	73465	41431	27325
64	08320	90486	20306	27745	78007	43431	43192	99007	94809	22308
65	30715	71868	33776	09577	13181	82283	82379	52023	91588	90925
66	13194	63547	56265	41731	90476	94532	58236	86287	13481	97414
67	94108	79395	60867	72601	24702	54633	11157	77496	25709	67205
68	06308	90197	13861	18949	80840	01771	80629	34388	01612	31984
69	49460	02961	50516	01297	85856	24044	90281	58990	01186	47047
70	49021	02728	54375	61159	00576	78791	75696	30035	04637	22934
71	11722	60569	54423	06334	39012	86284	43349	67681	46386	98306
72	77518	76472	07209	30483	43266	37811	13058	15717	87515	74950
73	05924	86476	38254	74279	32325	57999	19554	85474	78600	89273
74	32060	94821	96843	28698	52297	82969	31420	47678	66089	46036
75	40598	41682	11691	87381	77345	51325	90773	67520	85094	58192
76	20402	05387	28119	44208	77751	14664	81013	28379	75318	22259
77	80590	31955	31889	10224	11525	85417	07210	72121	75148	45155
78	85023	81969	88576	73260	33595	99344	59450	76264	12225	20832
79	26833	94586	87829	06462	07935	54822	24431	05846	06100	57186
80	62948	39252	43357	93696	71029	98698	87213	93311	80589	25023
81	90675	18421	87945	13946	73097	16584	20859	07974	59979	17474
82	74956	92554	97300	41542	56290	38262	22355	76243	38112	16523
83	64106	01260	81459	51645	52192	54540	50920	43471	48980	81265
84	49301	00889	50050	94221	98399	89246	87636	50130	70181	29719
85	52893	01051	96175	49695	21232	08223	73757	44939	37434	72237
86	48043	45593	86543	50289	54572	20465	08490	32196	15891	12793
87	85237	09993	25302	69174	16894	22770	06995	56593	12156	17605
88	01805	06811	85505	47837	04828	90218	49606	26617	27417	11102
89	48286	39221	44166	39695	63193	06823	67837	69164	15525	78658
90	49865	17710	80486	61111	75694	48721	27907	70897	86653	47347
91	32339	35117	66435	83548	68906	84820	53447	70467	02696	74719
92	52137	07593	52399	23513	29059	96582	86642	79693	47774	94184
93	23822	03523	17355	08646	49715	36971	64118	61303	76138	48157
94	53009	31326	06771	60398	31969	61115	13565	41459	69063	64214
95	71566	84831	72992	18461	71618	57624	56475	18816	74471	77996
96	90964	17013	63233	61557	44793	46590	13334	50301	57996	11863
97	23087	26975	47983	52302	32497	88399	10949	03176	60598	86602
98	58600	60829	27511	03505	15596	29240	53051	07272	52855	19841
99	21473	21725	15494	13951	68318	03903	53344	63517	60018	23310
100	39484	13645	98413	53332	39873	39146	35181	23994	58273	17513

表 4.1　乱 数 表 (4)

	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
51	05603	94198	34196	87935	57436	48716	47551	40458	35799	92819
52	78696	81492	11887	87415	58959	05459	91446	59940	83747	10604
53	99812	02075	48383	03944	83754	15898	27739	70130	25223	64468
54	22780	78589	24588	03439	77651	00783	97603	43526	77218	27463
55	20484	39419	38299	33219	35122	61091	67366	92758	22584	40863
56	43309	74484	64667	55048	95953	88759	94149	41377	69915	80795
57	17934	36334	93746	19132	84542	43796	30313	29898	88529	14589
58	87509	07843	06440	50988	98859	29297	33364	44101	72246	73588
59	83709	96707	68080	14658	57448	14138	42422	29775	14150	28908
60	14871	08845	43516	31526	51126	76657	00127	67455	72336	04347
61	46634	47031	13213	50289	05911	78485	48853	76056	34724	56097
62	41550	83237	24309	90376	93586	91038	05107	52498	62775	05581
63	89226	34482	32003	82350	25806	72482	11428	09343	38353	09336
64	98458	75497	00787	49816	79897	87198	83560	07885	80876	84081
65	72797	77554	77839	83572	49692	79508	68816	63813	92584	43180
66	43918	20550	09586	38268	97042	96027	47296	62297	07739	36328
67	98907	90724	12379	87660	23303	96076	44240	77170	75827	50221
68	45403	51206	65782	58482	93446	02993	81732	75568	32076	19622
69	76377	63282	78302	37534	70631	67164	57367	55679	32929	44204
70	92585	85868	65580	27888	36152	17286	79166	59576	17958	26754
71	81055	72585	81986	29200	38007	79798	28800	38423	06571	79119
72	27826	95416	34287	10525	21626	76242	05345	30557	32406	77223
73	02862	85035	32190	85076	68382	47433	99607	20177	20928	30881
74	95260	99573	10277	16425	99380	80870	93737	81678	00990	46199
75	63057	60688	48380	82078	70218	10304	80699	62134	88961	60809
76	09485	30527	96237	60834	45259	56508	29388	10275	89842	03173
77	55739	26925	00846	13975	26065	90378	06023	70340	04136	25008
78	97917	86293	92870	22665	60955	35434	96966	71814	53720	12713
79	62557	20202	64203	34111	84556	87847	48092	53395	20532	28368
80	31633	30338	92953	06753	10523	34394	21816	31321	31326	23939
81	45721	33218	62050	99665	68549	75080	99360	59345	64085	76822
82	30259	32874	76488	43221	75044	75767	06907	25162	07538	42488
83	60488	80690	83322	15950	36967	34607	01131	67281	36994	72850
84	46962	75671	68712	29114	62973	14798	30062	80561	42237	27453
85	36128	23547	06809	36465	63778	09067	48350	04657	14574	24685
86	47685	18250	58867	54113	43381	64856	60460	10375	09812	26998
87	00007	59795	71814	39104	07484	69350	32718	32445	90313	65876
88	47987	15869	21370	84483	14931	62675	71824	45918	39252	78625
89	74915	90523	60437	39145	83952	19043	27361	38689	02747	82065
90	05961	77920	38661	01807	97495	72935	80823	19555	56116	10669
91	42599	24176	81281	93110	29205	80627	87109	53678	32834	81002
92	04615	27289	54658	29828	59696	00459	31869	31990	91004	22812
93	87938	31222	77455	97767	52689	67950	56667	44538	89127	48929
94	74320	26463	99070	02737	92334	11415	38420	47490	39653	41818
95	86867	60107	26942	58519	31007	61521	75947	03947	94970	29484
96	89275	98591	00843	45169	45923	62827	80109	95055	92683	08667
97	79685	83899	41449	41423	70314	37886	53971	79241	57114	72209
98	28061	74681	77169	60513	88442	87173	62172	01543	14220	21195
99	15518	08001	92951	15401	10613	57516	10942	33401	81418	42342
100	38833	10365	79085	82157	79555	50231	75626	99479	84080	25475

乱数表の正確な定義は次のとおりである．いま確率変数の数列を $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ で表わすと，各 x_i は0から9までの10個の整数の値のいずれかをまったく等しい確率(1/10)でとり，しかもこれら n 個の確率変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ は相互に統計的に独立であるとき，このような数列の1つの実現値の組を(一様)乱数表という．

それゆえ乱数表をつくるにはこの定義に合うような実験を行なえばよいわけである．通常用いられる実験では，00, 01, 02, …, 99 という100種類の2桁の数字を同形同質なチップなどに記入し，これら100枚のチップを容器に入れてよくかき混ぜ無作為に1枚抽出して，その数字を記録する．抽出したチップはまた容器に戻し，よくかき混ぜてまた次の抽出を行なう．第2章でも述べたように，このような抽出を**復元抽出**という．なおこれに対し一度抽出したチップを容器へ戻さない抽出法を**非復元抽出** (sampling without replacement) と呼ぶ．さてこのように復元抽出によって5000回の抽出を行なえば1万桁の乱数表が得られる．これと似たような方法では，正20面体のサイコロが用いられる．これは乱数賽と呼ばれるもので0から9までの整数がおのおの2面ずつに記されている．

さて表4.1の乱数表はそのような実験により得たものではなくて，電子計算機によってあるやり方にしたがってつくられたいわゆる**擬似乱数** (pseudo-random number)である.[1] どのような擬似乱数も，長い系列の乱数をつくるとある周期をもって同一の数が現われる．しかし，実用の範囲では，上述の実験により得た乱数と同様に扱ってさしつかえない．

乱数表の使い方の例を述べよう．いまある会社で6500人の従業員が働いている．この中から200人を無作為に抽出してその通勤時間の調査をしたい．この場合には6500人の従業員が記載されている名簿の各氏名に1番から6500番までの番号を付す．次に乱数表の1つの位置を任意に選ぶ．たとえば1つの選び方として，その日が5月4日ならば第05行の第04列[2] の数字を選んでもよいであろう．表4.1の乱数表ではそれは2という数字である．その右側に897と並ぶ．そこでまず2897という数番号に対応する従業員を調査対象として抽出することにするわけである．以下この2897の真下にある4桁の数字を次々に選んでゆく．次は3667であるから問題はないが，次の数字は7671である．このように6500より大なる数字が出たら無視して次へ進むのである．以下5760, 4127, 3409, … と続け，合計200個の数字を得るまで続ける．途中で乱数表の最後の行に達したら右隣りの列へ移って上から拾ってゆけばよいであろう．

1) この乱数表は 0, 1, …, 9 の各出現回数がちょうど1000ずつになるように調整されている．

2) 以下この本では横の欄を行，縦の欄を列と呼ぶことに約束する．

もちろんこのようなやり方は1例であって，各自任意な方法で抽出すればよいが，ただここで注意すべき点は，あらかじめ乱数の拾い方を決めたら，拾っている途中で変えてはいけないということである．たとえばある数字から始めて右へ拾っていったら8ばかり多く出てきたから，途中で8の少なそうな下方へ進路を変えるというようなことをしてはならない．

なお，このような抽出法によれば，同じ従業員が2度以上選ばれることも出てくる．もちろんそれでもよいのであるが，もしこれを避ける必要があれば前と同一の番号が出てきたらそれをスキップして次の数字へ進めばよい．

演 習 問 題

1　ある電機メーカーが東京都内における電気冷蔵庫の保有率を調査するために，電話帳から無作為に100世帯を選び出して調査をした．これは適当な方法といえるか．

ひんわずるつ
電話帳に のっていない．

4.2　有限母集団からの標本抽出

4.2.1　抽 出 実 験

次のような問題があるとする．ある都市の医薬品製造業に属する中小企業(従業員数30人以下)が100企業あって，その売上高に占める製品製造原価の割合を調査したい．信憑性のあるデータを得るために調査員が直接各企業を訪問して調査することにした．しかし費用の関係で10企業しか調査できないとしよう．100企業から無作為に10企業選んだとして，それら10企業のデータから，全体の100社の製造原価対売上高比率に関するどの程度の情報を得ることができるであろうか．

このような問題を考察する手掛りとして以下1つの実験を試みてみよう．表4.2は，ある都市における従業員数30人以下の規模の医薬品製造企業の製造原価対売上高比率に関するデータで単位はパーセントであるとしよう．各企業に

表 4.2 有限母集団 A

要素の番号	数値	要素の番号	数値	要素の番号	数値	要素の番号	数値	要素の番号	数値
1	24	21	42	41	48	61	53	81	59
2	28	22	42	42	48	62	53	82	59
3	30	23	42	43	48	63	53	83	59
4	32	24	43	44	48	64	53	84	60
5	33	25	43	45	49	65	54	85	60
6	34	26	43	46	49	66	54	86	61
7	35	27	44	47	49	67	54	87	61
8	36	28	44	48	49	68	54	88	62
9	36	29	44	49	50	69	55	89	62
10	37	30	45	50	50	70	55	90	63
11	37	31	45	51	50	71	55	91	63
12	38	32	45	52	50	72	56	92	64
13	38	33	46	53	51	73	56	93	64
14	39	34	46	54	51	74	56	94	65
15	39	35	46	55	51	75	57	95	66
16	40	36	46	56	51	76	57	96	67
17	40	37	47	57	52	77	57	97	68
18	41	38	47	58	52	78	58	98	70
19	41	39	47	59	52	79	58	99	72
20	41	40	47	60	52	80	58	100	76

(注) $\mu=\frac{1}{100}\Sigma x_i=50$, $\sigma=\sqrt{\frac{1}{100}\Sigma(x_i-50)^2}=\sqrt{99.98}\fallingdotseq 10$.

は1から100までの番号が付してある．

このように有限個の個数の数値が1つの母集団を構成している場合，これを**有限母集団** (finite population) という．有限母集団における平均，標準偏差はそれぞれ μ, σ で表わされ，次のように定義される．有限母集団を構成している数値の個数を N，個々の数値を $x_1, x_2, \cdots, x_N$ で表わせば，平均は

$$\mu=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i \tag{1}$$

また分散は

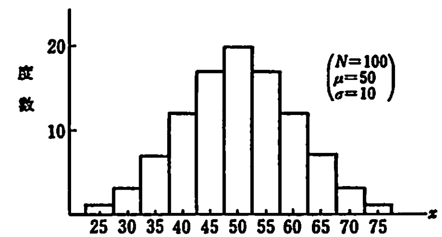
$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2=\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N}x_i^2\right)-\mu^2 \tag{2}$$

である．もちろん，標準偏差は分散のプラスの平方根の値である．

一般に，有限母集団の平均，分散は，有限母集団から無作為に1個の要素を抽出しその値を x で表わしたときの確率変数 x の平均，分散であると考えてよい．この場合，有限母集団の要素の相対度数分布が x の確率分布になる．

これらの定義によって，表4.2の有限母集団（これを有限母集団 A と呼ぶことにする）の数値について計算してみると，$\mu=50$, $\sigma=\sqrt{99.98}\fallingdotseq 10$ となっている．下の図4.1はこの有限母集団の分布をヒストグラムで表わしたものであるが，50を中心として左右対称に釣鐘状の分布[3]をしていることが分かる．

図 4.1 有限母集団 A のヒストグラム



この表4.2の有限母集団 A から標本を非復元抽出で抽出してみよう．

まず標本の大きさを5にした場合，表4.1の乱数表の第1行を第1列から右横に2桁ずつ拾ってゆくと 35, 22, 23, 22, 50 が得られる．しかし22は2度あるから2個目の22はスキップすることにしてもう2個数字を拾えば，結局 35, 22, 23, 50, 12 という5個の数値が得られる．それらの番号に対応する母集団の数値を，表4.2から拾うと35番が46，22番が42，23番が42，50番が50，12番が38である．つまり

(46, 42, 42, 50, 38)

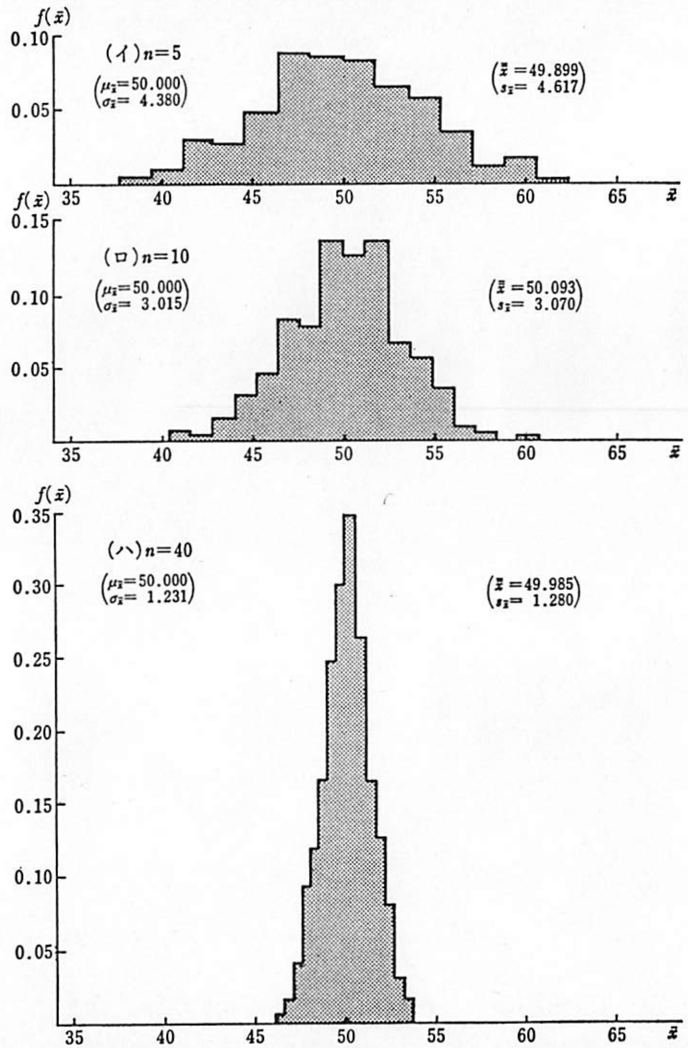
という標本を得たわけである．この標本の標本平均 $\bar{x}$ は

$$\bar{x}=\frac{1}{5}\times(46+42+42+50+38)=43.6$$

である．次にまた乱数表から 99, 58, 12, 35, 67 の乱数列を拾い，これに対応する母集団の数値を見いだすと

3) 実はこの分布は4.4に述べる正規分布に近似させるようにつくられている．

図 4.2 有限母集団Aよりの非復元抽出(標本平均$\bar{x}$の分布)



(注) いずれのケースにおいても標本の抽出個数は400である．

(72, 52, 38, 46, 54)

を得るから

$$\bar{x}=\frac{1}{5}\times(72+52+38+46+54)=52.4$$

となる．なお乱数表から00が出てきたら100番の要素を選ぶことにする．このようにして，全部で400個の(大きさ5の)標本を抽出してそれぞれの標本ごとに標本平均を計算してみた．この結果を分類してヒストグラムにしたのが図4.2の(イ)図である．図の縦軸には相対度数を階級の幅で除した値が目盛ってある．この図を図4.1の有限母集団のヒストグラムと比較してみよう．横軸の目盛りが異なることを考慮に入れると，図4.2の標本平均$\bar{x}$の分布のほうがばらつきの程度が小さいことが分かる．実際$\bar{x}$の分布の標準偏差$s_{\bar{x}}$(400個の$\bar{x}$を1つの標本としたときの標本標準偏差)を計算してみると，$s_{\bar{x}}=4.617$(図の右横に書いてある)である．母集団の標準偏差σは10であるから，その1/2以下になっていることが分かる．一方$\bar{x}$の平均は大体母集団の平均$\mu=50$に一致している．実際400個の$\bar{x}$の標本平均(これを$\bar{\bar{x}}$で表わす)は49.899となり50にきわめて近い．分布の仕方も図4.1の母集団に大体似ている．

では次に標本の大きさ(n)を変えたらどうだろうか．$n=10$, $n=40$ の2つのケースについて，$n=5$ のときと同様に400個の標本を有限母集団から非復元抽出し，$\bar{x}$の分布を描いたのが図4.2の(ロ)，(ハ)のヒストグラムである．

これらの図を見ると(ロ) $n=10$ では(イ)よりばらつきが小さく($s_{\bar{x}}=3.070$)，(ハ) $n=40$ ではさらにばらつきが小さく($s_{\bar{x}}=1.280$)となっていることが分かる．しかし平均の位置が大体50に近いことや左右対称性は(イ) $n=5$ の場合と変わらない．

これらのことから，有限母集団Aから非復元抽出により抽出した標本平均の分布は，母集団に似た富士山状の形を示し，平均の位置は母集団と変わらないが，分布の標準偏差は標本の大きさnを増すほど小さくなる，という一応の結論が下せそうである．

4.2.2 標本平均の平均，分散

大きさNの有限母集団から無作為非復元抽出により抽出した大きさnの標本の標本平均$\bar{x}$は，理論的にいってどのような分布になるのだろうか．ここで，$\bar{x}$の平均，分散を理論的に導出してみよう．

母集団のN個の要素を $x_1, x_2, \cdots, x_N$ とする．N個の相異なるものの中から重複を許さないでn個を選び出す組合せの数は，${}_NC_n$ である．それゆえ大きさNの母集団からの互いに相異なる大きさnの標本の数は ${}_NC_n$ 個ある．それらは $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_{n+1})$, $\cdots$, $(x_{N-n+1}, x_{N-n+2}, \cdots, x_N)$ である．さて $\bar{x}$ の平均を $\mu_{\bar{x}}$ で表わせば，$\mu_{\bar{x}}$ とはそれらの標本の標本平均の期待値であるから

$$\mu_{\bar{x}}=\frac{1}{{}_NC_n}\left\{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)+\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_{n+1})\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{1}{n}(x_{N-n+1}+x_{N-n+2}+\cdots+x_N)\right\} \qquad (3)$$

ところで任意の要素たとえば x_i は，全標本中の ${}_{N-1}C_{n-1}$ 個に現われている．なぜなら，x_i を特定化してしまえば，残りの $n-1$ 個は $N-1$ 個の中から選び出されなければならないからである．それゆえ(3)式は，$x_i(i=1, \cdots, N)$ ごとにまとめれば

$$\mu_{\bar{x}}=\frac{1}{{}_NC_n}\left\{\frac{1}{n}{}_{N-1}C_{n-1}x_1+\frac{1}{n}{}_{N-1}C_{n-1}x_2+\cdots+\frac{1}{n}{}_{N-1}C_{n-1}x_N\right\} \qquad (4)$$

となる．一方 ${}_{N-1}C_{n-1}/{}_NC_n=n/N$ であるから

$$\mu_{\bar{x}}=\frac{1}{N}(x_1+x_2+\cdots+x_N) \qquad (5)$$

ところで(5)の右辺は母集団の平均値μの定義にほかならない((1)式)から

$$\mu_{\bar{x}}=\mu \qquad (6)$$

次に標本平均 $\bar{x}$ の分散 $\sigma_{\bar{x}}^2$ を求めてみよう．

$$\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{1}{{}_NC_n}\left[\left\{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right\}^2+\left\{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_{n+1})\right\}^2\right.$$
$$\left.+\cdots+\left\{\frac{1}{n}(x_{N-n+1}+x_{N-n+2}+\cdots+x_N)\right\}^2\right]-\mu_{\bar{x}}^2 \qquad (7)$$

である．さて特定の x_i は ${}_{N-1}C_{n-1}$ 個の標本中に現われているから x_i^2 は(7)式の右辺中に ${}_{N-1}C_{n-1}$ 個現われているはずである．また任意の2つたとえば x_i と $x_j(i\neq j)$ を特定化すれば x_ix_j は ${}_{N-2}C_{n-2}$ 個の標本中に現われる．それゆえ x_ix_j は(7)式右辺中に ${}_{N-2}C_{n-2}$ 個存在するはずである．これらをまとめると

$$\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{1}{{}_NC_n}\frac{1}{n^2}[{}_{N-1}C_{n-1}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_N^2)$$
$$+2{}_{N-2}C_{n-2}(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{N-1}x_N)]-\mu_{\bar{x}}^2 \qquad (8)$$

$E(s^2)=E\left[\frac{1}{n-1}\Sigma(x_i-\bar{x})^2\right]=E\left[\frac{1}{n-1}\Sigma\left(x_i-\frac{1}{n}\Sigma x_i\right)\right]$

$=\frac{1}{n}E\left(\frac{1}{n}\Sigma_n x_i-\frac{1}{n}\Sigma x_i\right)=\frac{1}{n}E\left(\frac{1}{n}(n-1)\Sigma x_i\right)$?? → p.159

ところで

$$\mu_{\bar{x}}^2=\frac{1}{N^2}(x_1+x_2+\cdots+x_N)^2$$
$$=\frac{1}{N^2}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_N^2)+\frac{2}{N^2}(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{N-1}x_N) \qquad (9)$$

である．一方

$$\frac{1}{n^2}\frac{1}{{}_NC_n}{}_{N-1}C_{n-1}=\frac{1}{nN}$$
$$\frac{1}{n^2}\frac{1}{{}_NC_n}{}_{N-2}C_{n-2}=\frac{n-1}{nN(N-1)}$$

であるから，これらと(9)とを(8)に代入すれば

$$\sigma_{\bar{x}}^2=\left(\frac{1}{nN}-\frac{1}{N^2}\right)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_N^2)$$
$$+2\left(\frac{n-1}{nN(N-1)}-\frac{1}{N^2}\right)(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{N-1}x_N)$$
$$=\frac{(N-n)}{n(N-1)}\left\{\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N^2}\right)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_N^2)\right.$$
$$\left.-\frac{2}{N^2}(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{N-1}x_N)\right\}$$
$$=\frac{N-n}{n(N-1)}\left\{\frac{1}{N}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_N^2)-\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_N}{N}\right)^2\right\}$$

となる．最後の式の{　}の中は有限母集団における分散 σ^2((2) 式参照)にほかならない．それゆえ

$$\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n} \qquad (10)$$

が成立する．

以上をまとめれば

〔定理 4.1〕　大きさNの有限母集団があってその平均をμ，分散をσ^2とする．そこから非復元抽出によって得た大きさnの無作為標本の標本平均の平均および標準偏差は

$$\left.\begin{aligned}\mu_{\bar{x}}&=\mu\\ \sigma_{\bar{x}}&=\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

である．

なお，統計量の標準偏差のことを標準誤差(standard error)と呼ぶことがある．したがって $\sigma_{\bar{x}}$ は標本平均の標準誤差である．

以上の結論に対して前の小節で行なった抽出実験の結論は矛盾しないことが分かる．図4.2の各ヒストグラムの左側には(11)により計算した $\mu_{\bar{x}}$ と $\sigma_{\bar{x}}$ の値を示してある．右側の $\bar{x}$, $s_{\bar{x}}$ の値と比較してみよ．

例題 4.2.1 壺の中に次のような3枚のカードがはいっているとしよう．

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

これから無作為に2枚を同時に抜き出すとき，その2枚に記載されている数字の標本平均の期待値と標準偏差を求める．

まず母集団の平均 μ は

$$\mu=\frac{1}{3}(1+2+3)=2$$

であり，分散は

$$\sigma^2=\frac{1}{3}\{(1-2)^2+(2-2)^2+(3-2)^2\}=\frac{2}{3}$$

である．それゆえ定理4.1を使えば標本平均の平均および分散は

$$\mu_{\bar{x}}=\mu=2$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n}=\frac{3-2}{3-1}\cdot\frac{2/3}{2}=\frac{1}{6}$$

となるはずである．ここではこの定理を確かめる意味から，直接 $\bar{x}$ の平均と分散とを求めてみよう．

3枚のカードから2枚を抜き出すとき，その組合せは

($\boxed{1}$ $\boxed{2}$)，($\boxed{1}$ $\boxed{3}$)，($\boxed{2}$ $\boxed{3}$)

の3通りである．このような組合せの1つ1つについて標本平均が計算される．すなわち

第1の標本については $\bar{x}=\dfrac{1+2}{2}=1.5$

第2の標本については $\bar{x}=\dfrac{1+3}{2}=2$

第3の標本については $\bar{x}=\dfrac{2+3}{2}=2.5$

である．またこの3つの組合せは等しい確率1/3で生ずるから，$\bar{x}$ の期待値は

$$\mu_{\bar{x}}=\frac{1}{3}(1.5+2+2.5)=2$$

となり確かに μ に一致する．また $\bar{x}$ の分散は

$$\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{1}{3}\{(1.5-2)^2+(2-2)^2+(2.5-2)^2\}$$

$$=\frac{1}{3}(0.25+0.25)=\frac{1}{6}$$

となり，先に定理により求めた値に一致する．

例題 4.2.2 ある村に成年男子が200人いて，そのうち160人がたばこを吸う習慣がある．いまその中から無作為に50人の成年男子を選び，たばこを吸う人の割合(喫煙者率)を調べる．標本における喫煙者率を p' とすれば，p' の平均と分散はどのようになるであろうか．

母集団を構成している200人の成年男子に，喫煙者ならば1，非喫煙者ならば0のマークをつける．そうするとこの母集団は160個の1と40個の0から成る大きさ200の有限母集団となる．母集団における喫煙者率すなわち160/200=0.8 を p で表わす．$q=1-p$ とすると，一般に1と0なる要素をそれぞれ p と q の割合で含みその他の要素は含まない母集団を2項母集団という．

一般に2項母集団は次のような確率関数 $f(y)$ をもつ確率変数 y で表わされる．

$$f(y)=p^y q^{1-y} \qquad y=0,\ 1 \tag{12}$$

これは $n=1$ のときの2項分布(3.1.5)にほかならない．2項分布の平均は np，分散は npq だから2項母集団の平均は p，分散は pq である．これは次のように直接導かれる．

$$\mu=p\cdot 1+(1-p)\cdot 0=p \tag{13}$$

$$\sigma^2=p\cdot(1-p)^2+(1-p)(0-p)^2$$

$$=(1-p)\{p(1-p)+p^2\}$$

$$=p(1-p)=pq \tag{14}$$

となる．

さて，われわれの問題にかえって，このような大きさ200の有限母集団か

ら，大きさ50の標本を抜き出すのであるが，それを$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$で表わす．y_iは0か1のいずれかの値をとる．50人中30人が喫煙者であれば$y_1, y_2, \cdots, y_{50}$のうち，30個のy_iが1で，20個が0であるというわけである．それゆえその場合には$\sum_{i=1}^{50} y_i=30$である．そうして50人中の喫煙者の割合は

$$p'=\frac{1}{50}\cdot\sum_{i=1}^{50} y_i$$

である．これはy_iの標本平均$\bar{y}$にほかならないから定理4.1により

$$\mu_{p'}=p=0.8$$

$$\sigma_{p'}{}^2=\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n}$$

$$=\frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{p(1-p)}{n}=\frac{(200-50)\cdot(0.8)(0.2)}{(200-1)\cdot 50}\fallingdotseq 0.0024$$

上の例題から定理4.1の系として一般に次が成立することが容易に分かる．

〔系 4.1〕 ある性質をもつ要素の割合がpの，大きさNの有限母集団から非復元抽出した無作為標本における，その性質をもつ要素の割合p'の平均，標準偏差は

$$\left.\begin{aligned}\mu_{p'}&=p\\ \sigma_{p'}&=\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\cdot\sqrt{\frac{pq}{n}}\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

である．ただし $q=1-p$ とする．

演 習 問 題

1　1から10までの番号を記した小札10枚をつくる(トランプのカードを利用してもよい)．これより同時に2枚を無作為に抽いて標本平均をつくるという操作を50回行ない，標本平均の分布のヒストグラムを作成せよ(階級分けは不要)．この50個の標本平均からなる数値を1つの大きさ50の標本とみなしてその標本平均と標本標準偏差を計算せよ．これらを(11)式から導かれる$\mu_{\bar{x}}$, $\sigma_{\bar{x}}$の値と比較してみよ．

2　次のような1ヵ月当りの所得の分布をもつ50世帯を母集団として，大きさ4の標本20個を乱数表を用いて非復元抽出し，おのおのの標本平均をつくれ．

階　級	階級値	世帯数	相対度数
1	10万円	20	0.40
2	20万円	18	0.36
3	30万円	10	0.20
4	40万円	2	0.04
合	計	50	1.00

3　前問の母集団の平均，標準偏差を求め，(11)式により大きさ4の標本の標本平均の平均，標準偏差を求めよ．これと前問で求めた20個の標本平均について計算される，標本平均の標本平均ならびに標本標準偏差とを比較せよ．

4.3　無限母集団からの標本抽出

4.3.1　抽　出　実　験

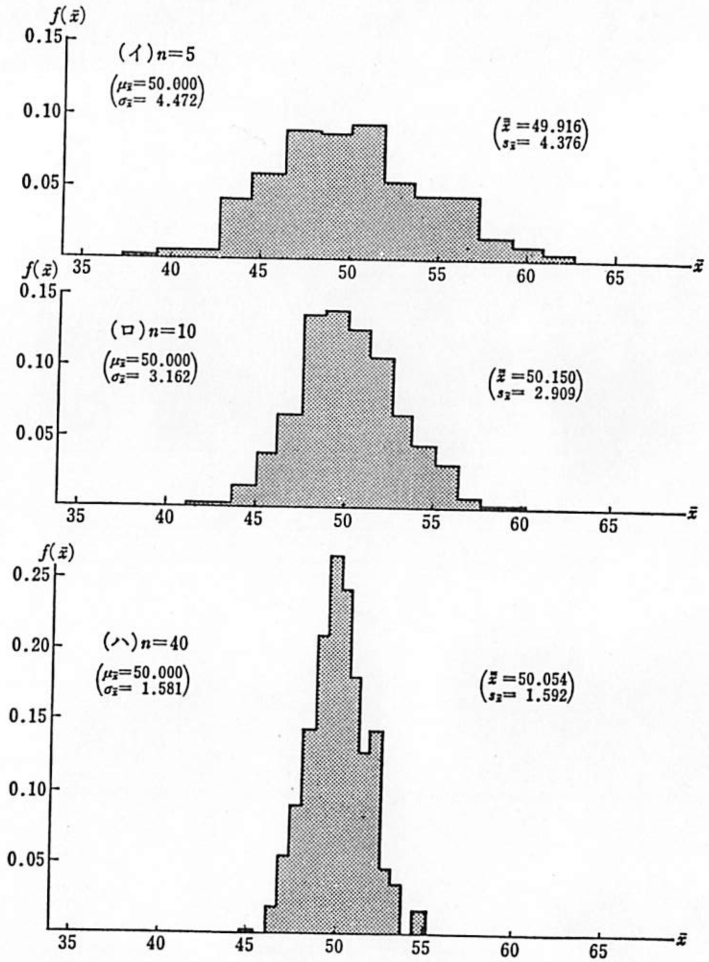
母集団を構成している要素の個数が無限であれば，その母集団は無限母集団(infinite population)と呼ばれる.[4] 無限母集団から標本を抽出する場合には，それが非復元抽出であっても，要素を1つ1つ抽出してゆくとき各段階において母集団の要素の構成割合は変わらないと考えられる．この点が有限母集団からの非復元抽出との大きな相違点である．

無限母集団から抽出した標本を$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$で表わせば，各$x_i(i=1, \cdots, n)$は同一の確率分布にしたがい，しかも$x_1, x_2, \cdots, x_n$は統計的に独立であるという特徴をもっている．

有限母集団であってもそこから復元抽出によって得た標本であれば，このような特徴を備えている．なぜなら1個の要素を抽出するごとに抽出された要素は母集団に戻されるので，母集団の構成は変わらないからである．それゆえ有限母集団からの復元抽出は無限母集団からの抽出と同じに扱ってよい．

4)　実在の母集団には要素が無限個のものはありえないから，無限母集団は本来仮設的なものである．たとえば，サイコロ投げを限りなく続ければ目の実現値の集まりは無限母集団を形成する．だが限りなく投げ続けることは実際にはありえない．しかし，標本の背後に潜在的に無限母集団が存在すると想定することによって実在認識のための基盤が与えられる．この点に関しては小尾恵一郎『計量経済学入門』日本評論社，1972年，81～85ページ参照．

図 4.3　有限母集団Aよりの復元抽出(標本の平均 $\bar{x}$ の分布)



(注)　いずれのケースにおいても標本の抽出個数は 400 である。

この節では，無限母集団からの標本抽出(復元非復元は問わない)，もしくは有限母集団からの復元抽出において見いだされる法則を検討する．

まず例によって，抽出実験から始めよう．

最初に 4.2 の表 4.2 の有限母集団Aから復元抽出によって標本を抽出する．こんどは乱数表から重複を許して，2桁の数字を5個ずつ拾ってゆけばよい．4.2 の例と同様に $n=5$, 10, 40 の3通りについて各 400 個の標本を抽出し標本平均 $\bar{x}$ を計算した結果をヒストグラムにまとめて図 4.3 に示した．

これらの結果は，図 4.2 の非復元抽出の場合の $\bar{x}$ の分布と大体似ている．すなわち，母集団の形状と同じような型で平均も大体等しいが，$\bar{x}$ の標本標準偏差 $(s_{\bar{x}})$ が標本の大きさ n が増すほど小さくなってくる．ただ，こんどの場合のほうが $\bar{x}$ のばらつきは理論的に図 4.2 のときより大きくなるはずなのであるが，図 4.2 と図 4.3 とを比較すると，$s_{\bar{x}}$ は $n=5$, 10 においてはむしろ図 4.2 のほうが大きくなっている．もちろん，このようなことも十分起こりうることである．

4.3.2　標本平均の平均，分散

平均 μ，分散 σ^2 の有限母集団からの非復元抽出の際にはその標本平均 $\bar{x}$ の期待値，標準偏差は次のとおりであった((4.2.11)式)．

$$\mu_{\bar{x}}=\mu \tag{1}$$

$$\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{2}$$

さて無限母集団においては N は無限大であるから

$$\lim_{N\to\infty}\frac{N-n}{N-1}=\lim_{N\to\infty}\frac{1-\dfrac{n}{N}}{1-\dfrac{1}{N}}=1$$

となる．それゆえ無限母集団からの抽出の場合，(2)は

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{3}$$

となる．結局，無限母集団からの抽出の場合には，その標本平均 $\bar{x}$ は平均 μ，分散 σ^2/n の分布にしたがうことが分かる．

このことは直接次のようにしても導ける．大きさ n の標本を $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ で表わす．各 x_i は共通の確率関数または密度関数 $f(x_i)$，$i=1, \cdots, n$ をもっ

ており，どの $i, j(i \neq j)$ についても x_i と x_j は統計的に独立である．

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n) \tag{4}$$

であるから

$$\mu_{\bar{x}}=E(\bar{x})=E\left\{\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\{E(x_1)+E(x_2)+\cdots+E(x_n)\}$$
$$=\frac{1}{n}\{\mu+\mu+\cdots+\mu\} \qquad (\{\ \}の中は n 個の \mu)$$
$$=\frac{n}{n}\mu=\mu$$

であり(1)式と同じ結果になる．一方 $\bar{x}$ の分散は

$$\sigma_{\bar{x}}^2=E\{(\bar{x}-\mu)^2\}$$
$$=E\left[\left\{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)-\mu\right\}^2\right]$$
$$=E\left[\left\{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)-\frac{1}{n}(\underbrace{\mu+\mu+\cdots+\mu}_{n\,個})\right\}^2\right]$$
$$=\frac{1}{n^2}E[\{(x_1-\mu)+(x_2-\mu)+\cdots+(x_n-\mu)\}^2]$$
$$=\frac{1}{n^2}E\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2+\sum_{i\neq j}(x_i-\mu)(x_j-\mu)\right]$$
$$=\frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}E\{(x_i-\mu)^2\}+\sum_{i\neq j}E\{(x_i-\mu)(x_j-\mu)\}\right] \tag{5}$$

ここで，x_i が連続型であれば

$$E\{(x_i-\mu)(x_j-\mu)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_i-\mu)(x_j-\mu)f(x_i)f(x_j)dx_idx_j$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}(x_i-\mu)f(x_i)dx_i\cdot\int_{-\infty}^{\infty}(x_j-\mu)f(x_j)dx_j$$
$$=E(x_i-\mu)\cdot E(x_j-\mu)=0$$

である．また

$$E\{(x_i-\mu)^2\}=\sigma^2$$

であるから(5)は

$$\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\frac{n}{n^2}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n} \tag{6}$$

となる．かくして，(3)式は証明された．x_i が離散型でも同様に証明できるが，これは読者に任せよう．以上の結果を次のような定理にまとめておく．

〔定理 4.2〕 平均 μ，分散 σ^2 の無限母集団からの無作為抽出による大きさ n の標本の標本平均 $\bar{x}$ の平均，標準偏差は

$$\left.\begin{aligned}\mu_{\bar{x}}&=\mu\\ \sigma_{\bar{x}}&=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

である．

例題 4.3.1 例題 4.2.1 では

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

の3枚のカードから同時に2枚抽出する場合を考察したが，こんどは，復元抽出により2枚を抽出することにする．$\mu=2$, $\sigma^2=2/3$ であったから

$$\mu_{\bar{x}}=\mu=2$$
$$\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{2}{3}\Big/2=\frac{1}{3}$$

となるわけであるが，これを例題 4.2.1 と同様に直接確かめてみよう．

標本を (x_1, x_2) で表わせば可能な場合とそれに対応する標本平均は

可能な場合	$\bar{x}$	可能な場合	$\bar{x}$
(1, 1)	1	(2, 3)	2.5
(1, 2)	1.5	(3, 1)	2
(1, 3)	2	(3, 2)	2.5
(2, 1)	1.5	(3, 3)	3
(2, 2)	2		

である．それぞれ確率 1/9 で起きるから，

$$\mu_{\bar{x}}=\frac{1}{9}(1+1.5+2+1.5+2+2.5+2+2.5+3)$$
$$=2$$
$$\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{1}{9}\{(1-2)^2+(1.5-2)^2+(2-2)^2+(1.5-2)^2+(2-2)^2$$
$$+(2.5-2)^2+(2-2)^2+(2.5-2)^2+(3-2)^2\}$$

$$=\frac{1}{9}(1+0.25+0.25+0.25+0.25+1)$$

$$=\frac{1}{3}$$

となる．それゆえ**定理 4.2** は確かめられた．

例題 4.3.2 ある性質を有する要素の割合が p の無限2項母集団から，大きさ n の標本を無作為抽出するとき，標本においてその性質を有する要素の割合 p' の平均，標準偏差は

$$\left.\begin{aligned}\mu_{p'}&=p\\ \sigma_{p'}&=\sqrt{\frac{pq}{n}}\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

である．この証明は例題 4.2.2 の説明を参照すれば，明らかであるから，ここでは述べない．

演 習 問 題

1 サイコロを2回投げるとき目の標本平均 $\bar{x}$ の平均と標準偏差を求めよ．

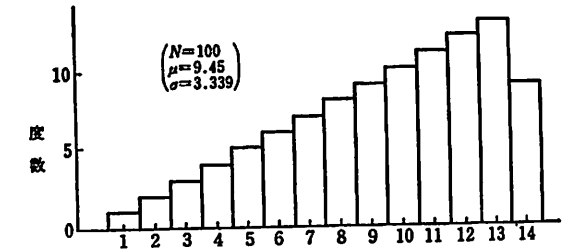
2 ある都市では2割の世帯が乗用車を所有しているとする．無作為に 100 世帯を抽出するとき，その中で乗用車を所有している世帯の割合を p' とするならば，p' の平均と標準偏差はいくらか．

4.4 正 規 分 布

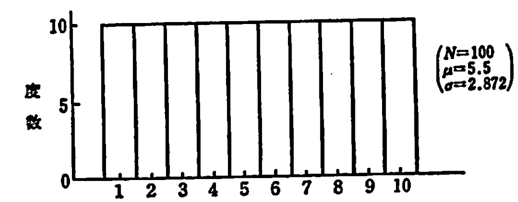
4.4.1 他の母集団からの抽出実験

前節の有限母集団 A（図 4.1）からの復元抽出による標本平均 $\bar{x}$ の経験的な分布は，図 4.3 に示したように，おおよそ母集団と同様な左右対称な富士山型の分布を示すことが分かった．それでは，母集団が図 4.4 に示したような型の分布であれば，どうであろうか．1つは左に歪んだ大体三角形の分布の母集団であり，他は1から 10 までの数から成る一様分布の母集団である．いずれも大きさ 100 の有限母集団である．これらを有限母集団 B，C と名づけよう．これらの母集団から大きさ (n) 5 および 40 の標本を乱数表を使って復元抽出し，標本平均を計算する．このようにしておのおの 400 個の標本平均をつくり，階級分けした後，ヒストグラムをつくったのが図 4.5 および図 4.6 である．これら

図 4.4 2種類の母集団のヒストグラム



有限母集団 B



有限母集団 C

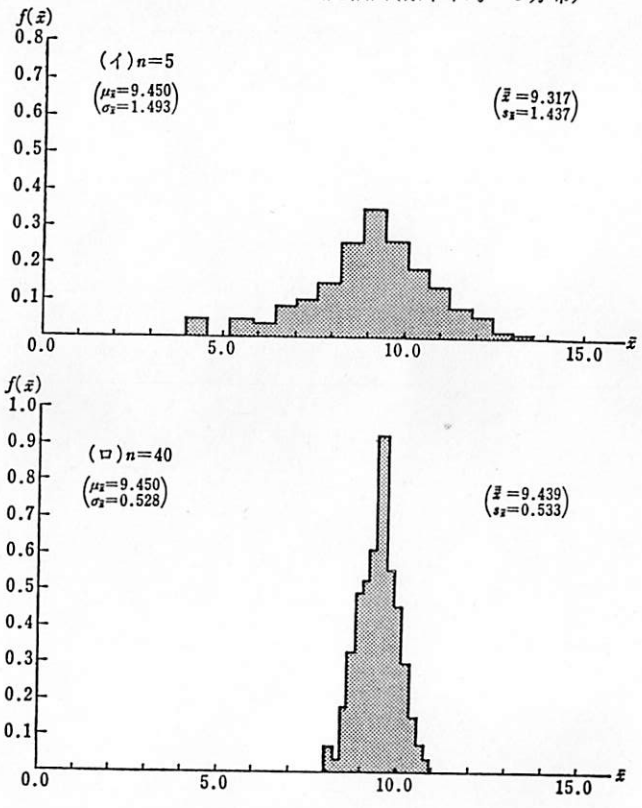
の図の左上には $\mu_{\bar{x}}$，$\sigma_{\bar{x}}$ の値が記されており，図の右上には 400 個の $\bar{x}$ を1個の大きさ 400 の標本と見なしたときの標本平均 $\bar{\bar{x}}$，標本標準偏差 $s_{\bar{x}}$ の値が示されている．

図 4.5 および図 4.6 は $\bar{x}$ の確率分布そのものではないのでかなり凹凸があるが，これらの図から次のことがいえそうである．母集団の分布が三角形 (B) や矩形 (C) でも，標本平均の分布は，図 4.3 のときと同様に平均 μ を中心として左右対称な富士山型の分布をする．もちろん，理論の示すように，標本の大きさ n が増せば，$\bar{x}$ のばらつきは小さくなっている．そして実は，母集団がどのような分布であってもそこから（復元）抽出した標本の標本平均は，n を十分大きくするとある安定した形の分布で近似できるようになることが理論的にいえる．この分布が次の項で述べる正規分布にほかならない．

4.4.2 正 規 分 布

正規分布 (normal distribution) または**正常分布**は，連続型確率分布の一種で

図 4.5　有限母集団Bよりの復元抽出(標本平均 $\bar{x}$ の分布)



(注)　いずれのケースにおいても標本の抽出個数は400である.

あって，その密度関数は次のごとくである.

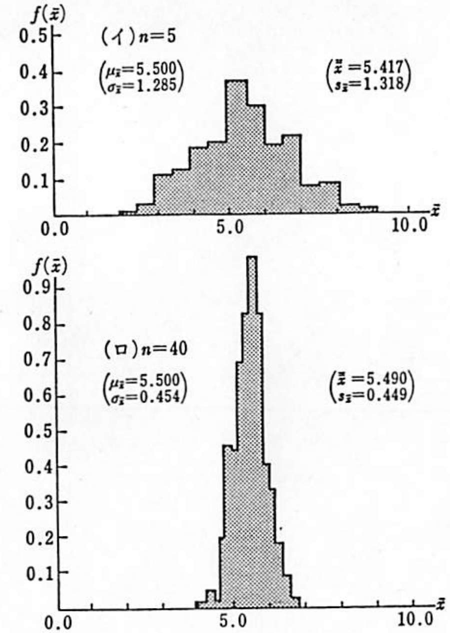
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty<x<\infty \qquad (1)$$

ただし e は自然対数の底，π は円周率である．また μ はこの確率分布の平均，σ は標準偏差に等しい.[5]

また密度関数の性質から

5)　このことの証明は例題5.3.3を参照せよ.

図 4.6　有限母集団Cよりの復元抽出(標本平均 $\bar{x}$ の分布)



(注)　いずれのケースにおいても標本の抽出個数は400である.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=1 \qquad (2)$$

を満足する.[6]

さて，(1)の密度関数はその形から，$x=\mu$ のとき最大値$(1/(\sqrt{2\pi}\sigma))$となり，x が μ から離れるほど $f(x)$ の値は小になることが分かる．図4.7はこの密度関数を図示したものである．すなわちこの分布は $x=\mu$ を中心とした左右対称の釣鐘状の形をしていることが分かる.

このグラフあるいは密度関数の形からこの分布の中心の位置は平均 μ の大きさに依存することが分かる．また，標準偏差 σ はこの分布のひろがりの程度を

6)　(2)の証明については拙著『計量経済学』有斐閣，1982年，19～20ページを参照せよ.

図 4.7　正規分布の密度関数

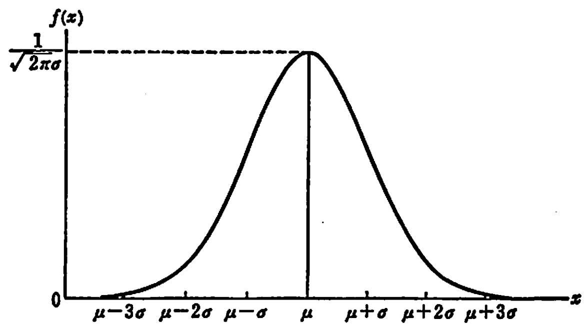
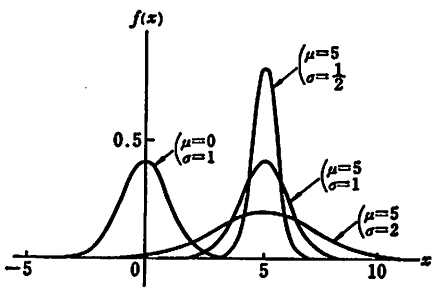


図 4.8



規定する．図 4.8 に $\mu=0, 5$，$\sigma=1, 2, 1/2$ としたときのいろいろな組合せの正規分布を示してある．

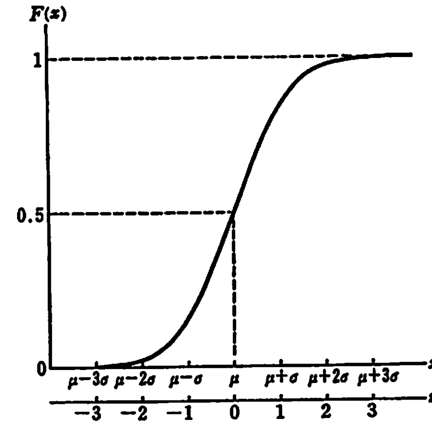
正規分布の累積分布関数は

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi-\mu}{\sigma}\right)^2}d\xi \qquad (3)$$

である．この形は図 4.9 に示されている．

平均 μ，標準偏差 σ（あるいは分散 σ^2）の正規分布を $N(\mu, \sigma^2)$ と略記することが慣わしである．N は normal distribution の頭文字をとったものである．たとえば $N(5, 4)$ と書けば，平均 5，分散 4（標準偏差 2）の正規分布を意味する．

図 4.9　正規分布の累積分布関数



いま正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがう確率変数（これをたんに**正規変数**(normal variable) または**正規変量** (normal variate) と呼ぶこともある）x があるとしよう．x を次のような形で変換して新しい確率変数を求めよう．

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma} \qquad (4)$$

この z はどのような分布にしたがうだろうか．

一般に，ある確率分布（正規分布とは限らない）にしたがう確率変数 x があり，その平均 $\mu=E(x)$ と分散 $\sigma^2=E(x-\mu)^2$ が存在するとしよう．このとき，(4) のように $z=(x-\mu)/\sigma$ と変換すると，z は平均 0，分散 1 の確率変数となる．なぜなら

$$E(z)=E\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}[E(x)-\mu]=\frac{1}{\sigma}(\mu-\mu)=0$$

$$E(z^2)=E\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2=\frac{1}{\sigma^2}E(x-\mu)^2=\frac{1}{\sigma^2}\sigma^2=1$$

であるから．(4) のような形の変換を確率変数の**標準化**(standardize) あるいは**基準化**といい，z を標準化した確率変数という．

x が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがう場合でも，標準化した確率変数 z は平均 0，分散 1 となる．しかも z は依然として正規分布にしたがっていることがい

える.[7] したがって z の分布は平均0，分散1の正規分布 $N(0, 1)$ である．$N(0, 1)$ を標準正規分布(standard normal distribution)といい，z を標準正規変数という．

標準正規分布の密度関数は，(1)の $\mu=0$，$\sigma=1$ の場合だから

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad -\infty<z<\infty \tag{5}$$

という簡単な形になる．

以上のことを逆にたどって，標準正規変数 z から出発し，(4)を x について解いた式すなわち

$$x=\mu+\sigma z \tag{6}$$

により z を変換すれば，x は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがう確率変数であることは明らかである．

このような関係から，x についての確率の計算も z についての計算に還元できる．z の累積分布関数を $F(z)$ で表わそう．すると $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがう x が b という値以下になる確率は

$$\begin{aligned} P(x\leqq b)&=P\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\leqq\frac{b-\mu}{\sigma}\right)\\ &=P\left(z\leqq\frac{b-\mu}{\sigma}\right)\\ &=F\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

となる．$P(x\leqq b)$ は $F((b-\mu)/\sigma)$ によって与えられることが分かる．また $a<x\leqq b$ となる確率も

$$\begin{aligned} P(a<x\leqq b)&=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\leqq z\leqq\frac{b-\mu}{\sigma}\right)\\ &=F\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-F\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

により求められる．連続型では $P(x=a)=P(x=b)=0$ だから，$P(a<x<b)$，$P(a\leqq x<b)$，$P(a\leqq x\leqq b)$ はすべて(8)により求められる．

正規分布は，平均 μ と標準偏差 σ の種々な値の組合せについてそれぞれ異なる．しかし上述のように標準正規分布 $N(0, 1)$ の累積分布関数さえ分かれば，

7) この証明については第5章例題5.1.1を見よ．

他のすべての正規分布の確率を求めることができる．それゆえ，通常，正規分布の数値表は $N(0, 1)$ の分布について与えられている．巻末の付表2は標準正規分布 $N(0, 1)$ を累積分布関数 $F(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$ の形で示したものである．表側(そく)には z の値が0.0から3.4まで0.1刻みで与えられ，また表頭(とう)には0.01刻みが与えられている．たとえば $F(0.63)$ の値が知りたければ表側が $z=0.60$ の行を右にたどり，表頭が0.03の列の数字0.7357を読めばよい．

表には，z が負の値に対応する累積分布の値は示していないが，正規分布の対称性を利用すれば，これらの値は，付表より容易に求められる．たとえば，$F(-1.98)$ の値は

$$\begin{aligned} F(-1.98)&=P(z\leqq-1.98)=P(z\geqq1.98)\\ &=1-P(z<1.98)=1-F(1.98) \end{aligned}$$

である．そこで付表2より $F(1.98)=0.9761$ であるから

$$F(-1.98)=1-F(1.98)=1-0.9761=0.0239$$

を得る．

また，たとえば z が -2.0 より1.0までの間の値をとる確率は

$$\begin{aligned} P(-2.0<z<1.0)&=F(1.0)-F(-2.0)\\ &=F(1.0)-\{1-F(2.0)\}\\ &=0.8413-(1-0.9772)\\ &=0.8185 \end{aligned}$$

のように求めればよい．

また~~この表を~~使って(8)により次のような確率が計算できる．

について

例題 4.4.1 平均10，標準偏差5の正規分布にしたがう確率変数 x がある．x が3以上12以下の値をとる確率を求めよ．

$$\begin{aligned} P(3\leqq x\leqq12)&=P\left(\frac{3-10}{5}\leqq z\leqq\frac{12-10}{5}\right)\\ &=P(-1.4\leqq z\leqq0.4)=F(0.4)-F(-1.4)\\ &=F(0.4)-[1-F(1.4)]=0.6554-(1-0.9192)\\ &=0.5746 \end{aligned}$$

さて z が標準正規変数のとき次が成立する．

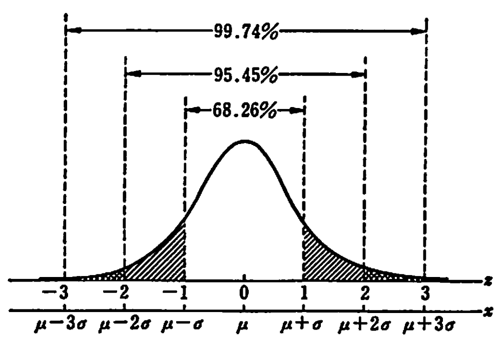
$$\left.\begin{aligned} P(-1<z<1)&=0.6826 \\ P(-2<z<2)&=0.9545 \\ P(-3<z<3)&=0.9974 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

たとえば最後の式を書き換えれば

$$P(-3<z<3)=P\left(-3<\frac{x-\mu}{\sigma}<3\right)$$
$$=P(\mu-3\sigma<x<\mu+3\sigma)=0.9974 \qquad (10)$$

となる．(9)の上の2つの式についても同様である．それゆえ，正規分布においては，平均μの回りに標準偏差σの範囲をとると，その範囲の中にxがはいる確率は0.6826である．またμの回りに2σとるとその領域内に0.9545の確率でxが落ちる．また3σをとるときの領域にxが落ちる確率は0.9974である．すなわち，ある確率変数が正規分布にしたがうことが分かっているならば，標準偏差の3倍の範囲を平均の両側にとれば，その確率変数の実現値は，ほとんど確実にその領域内の値をとる．例外は1000回に3回弱の割合でしか起こらない．以上の関係を図示すると図4.10のようになる．

図 4.10



今後，$P(|z|\geqq a)=\alpha$ となるような定数aをz(または標準正規変数)の$\alpha\times100\%$水準(level)と呼び，z_αで表わす．たとえばzの5%水準$z_{0.05}$は1.96であり，1%水準$z_{0.01}$は2.58である．

4.4.3 中心極限定理

一般に，平均と分散が存在する母集団においては母集団分布の形のいかんに

かかわらず，無限母集団から無作為抽出した(有限母集団からの復元抽出を含める)標本平均$\bar{x}$の分布はnが大きくなるにつれて正規分布に近づく．4.3では平均μ，分散σ^2の無限母集団からの標本平均の平均$\mu_{\bar{x}}$はμに等しく，分散$\sigma_{\bar{x}}^2$はσ^2/nに等しいことを示した((4.3.7)式)．これらは，**中心極限定理**(central limit theorem)と呼ばれる次の定理にまとめられる．

〔**定理 4.3**〕(中心極限定理) 平均μ，分散σ^2の無限母集団より無作為に抽出した大きさnの標本の標本平均を$\bar{x}_n$とする．いま $z_n=\dfrac{\bar{x}_n-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ とするとき，z_nの分布はnが大きくなるとともに標準正規分布$N(0,1)$に限りなく近づく．[8]

この定理の証明はもとの分布がある条件を満たす場合だけについて5.3.5の例題で与える．

中心極限定理により，標本の大きさnが十分大きければ$z_n=(\bar{x}_n-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})$の分布は標準正規分布$N(0,1)$で近似できることが分かる．このことは，$n$が十分大きいとき$\bar{x}_n=\mu+(\sigma/\sqrt{n})z_n$の分布が正規分布$N(\mu,\sigma^2/n)$で近似できることを意味する．このようなとき$\bar{x}_n$は**漸近的に**(asymptotically)正規分布$N(\mu,\sigma^2/n)$にしたがうといういい方をする．正規分布による標本平均の分布の近似は，母集団があまり歪んだ分布でない限り，標本の大きさが5程度でもかなり良好であることが知られている．

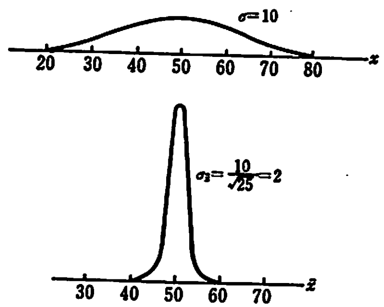
母集団が正規分布$N(\mu,\sigma^2)$であれば，標本平均$\bar{x}$の分布は厳密に正規分布$N(\mu,\sigma^2/n)$にしたがう．この証明は例題5.3.4で行なう．xが平均50，標準偏差10の正規分布にしたがうとき，大きさ25の標本の$\bar{x}$の分布をxの分布と比較すると図4.11のようになる．

標本平均について

例題 4.4.2 ある大学の入学試験における英語の成績は過去の経験によれば平均55点，標準偏差12点の分布を示す．今年ある高校から16人の生徒が受験した．その高校の卒業生は他の高校に比べ成績に差がないとして，16人

8) より厳密にいえば，z_nの累積分布関数を$F_n(\zeta)$，$N(0,1)$の累積分布関数を$F(\zeta)$と書くと，$n\to\infty$のときζのすべての値$(-\infty<\zeta<\infty)$に対して$F_n(\zeta)$が$F(\zeta)$に収束するということである．このとき$N(0,1)$をz_nの極限分布と呼ぶ(5.3.5参照)．

図 4.11　正規変数 x と $\bar{x}$ の分布



の生徒の英語の成績の平均が 60 点を越える確率を求めよう．

$\mu=55$，$\sigma=12$，$n=16$ である．$\bar{x}$ は中心極限定理により近似的に正規分布 $N(55,\ 12^2/16)$ すなわち $N(55,\ 3^2)$ にしたがうと考えてよいから，

$$P(\bar{x}>60)=P\left(\frac{\bar{x}-55}{3}>\frac{60-55}{3}\right)$$
$$=P\left(z>\frac{5}{3}\right)=1-F(1.67)$$
$$=1-0.9525=0.0475$$

以上の結果から当然つぎもいえる．割合 p の無限 2 項母集団からの大きさ n の無作為標本における割合 p' の分布は，n が十分大きいとき正規分布 $N(p,\ pq/n)$ で近似できる（ただし $q=1-p$）．

また，平均 μ，分散 σ^2 をもつ大きさ N の有限母集団よりの非復元抽出の場合においても，標本平均 $\bar{x}$ の分布は N と n が十分大ならば，近似的に平均 μ，分散 $\{(N-n)/(N-1)\}\sigma^2/n$ の正規分布にしたがう．[9]

例題 4.4.3　ある銀行で，貸付け先の企業 500 社の流動比率（流動資産対

9)　より厳密にいえば，有限母集団の r 次の積率を $E(x^r)$，標準偏差を σ とすると，$N\to\infty$，$n\to\infty$ のとき，$r=3, 4, \cdots$ に対して比 $E(x^r)/\sigma^r$ が有界でありかつ比 N/n が 1 より大きな有限の極限値をもつとき，$\bar{x}$ は N，n が大きくなるとともに漸近的に正規分布 $N(\mu,\ \{(N-n)/(N-1)\}\sigma^2/n)$ にしたがう．証明は S. S. Wilks, *Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, 1962, pp. 266-8 を参照せよ．

流動負債の比率）を調査したところ，平均 104.0%，標準偏差 4.5% であった．任意に 25 社を非復元抽出するとき，その 25 社の流動比率の平均が 106% を越える確率はいくらか．

$N=500$，$n=25$，$\mu=104.0$，$\sigma=4.5$ である．$\bar{x}$ は平均 $\mu_{\bar{x}}=104$，標準偏差 $\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{500-25}{500-1}}\cdot\frac{4.5}{\sqrt{25}}=0.976\times0.9=0.8784$ の正規分布に近似的にしたがう．それゆえ

$$P(\bar{x}>106)=P\left(z>\frac{106-104}{0.8784}\right)$$
$$\fallingdotseq P(z>2.28)=1-F(2.28)$$
$$=1-0.9887=0.0113$$

が得られる．すなわち標本平均が 106(%) を越える確率は約 1.13% である．

演　習　問　題

1　平均 100，標準偏差 20 の正規分布にしたがう確率変数 x が，次の条件を満たす確率を求めよ．

(a)　$x<110$，　(b)　$x\geqq95$，　(c)　$80<x<130$

2　前節演習問題 2 で 100 世帯中乗用車をもっている世帯の割合 p' が 0.25 を越える確率はいくらか．

例 4.3.2 p.74まで）よむこと

3　平均 μ，分散 25 の無限母集団からの大きさ n の無作為標本に基づく標本平均を $\bar{x}$ とする．$\bar{x}$ の分布を正規分布で近似するとき次を求めよ．

(a)　n が 16 のときの $P(\mu-1<\bar{x}<\mu+1)$ の値．

(b)　$P(\mu-1<\bar{x}<\mu+1)\geqq0.95$ となるような最小の n（整数値）．

できるで

第5章

確率変数の関数の分布

この章では，確率変数の関数の分布を扱う．ある確率変数 x が $f(x)$ という密度関数をもつとき，x の関数 $y=\varphi(x)$ が与えられると y の密度関数 $g(y)$ が決まる．$g(y)$ がどのような形になるかが分かれば非常に有用である．この章の前半はこの問題すなわち変数変換の問題を扱う．

この章の後半では，積率母関数を説明する．積率母関数は確率分布が既知である場合，その確率変数やその関数の平均や分散を計算するのに役だつし，そのほかにも重要な用途がある．

5.1　1変数間の変換

まず離散型の確率変数間の変換を考えてみよう．たとえば3枚の硬貨を同時に投げるという実験で，表の枚数を x 枚とすれば，x は2項分布する確率変数でその確率関数は

$$f(x)=\frac{3!}{x!(3-x)!}\cdot\frac{1}{8} \qquad x=0,\ 1,\ 2,\ 3 \tag{1}$$

で与えられる．ここで

$$y=x^2 \tag{2}$$

という新しい確率変数をつくるとすれば，x が0，1，2，3の値をとるとき，y はそれぞれ0，1，4，9の値をとる．それゆえたとえば $x=2$ となる確率も $y=4$ となる確率もまったく等しい．そこで，y の確率関数を $g(y)$ で表わせば，これ

は次のようにして求めることができるわけである．

(2)を x に関して解けば

$$x=\sqrt{y}$$

であるから，これを(1)に代入すれば

$$g(y)=f(\sqrt{y})=\frac{3!}{\sqrt{y}\,!(3-\sqrt{y})!}\cdot\frac{1}{8} \qquad y=0,\ 1,\ 4,\ 9 \tag{3}$$

このように，一般に離散型確率変数間の変数変換にともなう確率関数の変化の仕方は単純である．

ところが，連続変数間の変換はそのように単純ではない．以下この連続型の場合の1変数間の変換の関係を考えてみよう．

いま x という連続型の確率変数があり，その密度関数が $f(x)$ であるとしよう．さて x の関数 y が

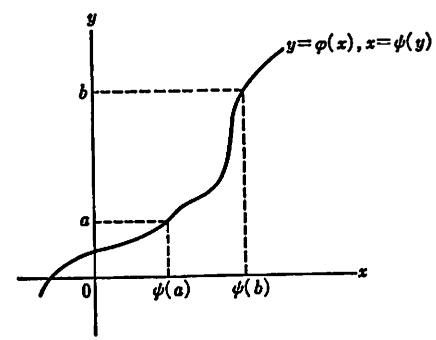
$$y=\varphi(x) \tag{4}$$

によって定義されるとする．ただし φ は x の連続な増加関数で，一価の逆関数

$$x=\psi(y) \tag{5}$$

は y について微分可能とする．たとえば図5.1のような関係である．y の $a\leqq y\leqq b$ の区間は x については $\psi(a)\leqq x\leqq\psi(b)$ が対応する．

図 5.1



それゆえ y が $a\leqq y\leqq b$ となる確率は，x が $\psi(a)\leqq x\leqq\psi(b)$ となる確率に等しい．すなわち

$$P(a \leqq y \leqq b) = P(\psi(a) \leqq x \leqq \psi(b)) \tag{6}$$

である．

y の密度関数を $g(y)$ で表わせば，(6)の関係は

$$\int_a^b g(y)\,dy = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(x)\,dx \tag{7}$$

とも書ける．いま区間 $[a, b]$ および $[\psi(a), \psi(b)]$ の長さをそれぞれ Δy, Δx で表わす．すると Δy が十分小さければ，$a \leqq y \leqq b$, $\psi(a) \leqq x \leqq \psi(b)$ なる x, y について近似的に

$$g(y)\Delta y = f(x)\Delta x \tag{8}$$

が成立する．ところで Δy が十分小であれば近似的に

$$\Delta x = \frac{d\psi(y)}{dy}\Delta y \tag{9}$$

が成立するから，これを(8)に代入して $g(y)$ を求めれば

$$g(y) = f(x)\cdot\frac{d\psi(y)}{dy}$$

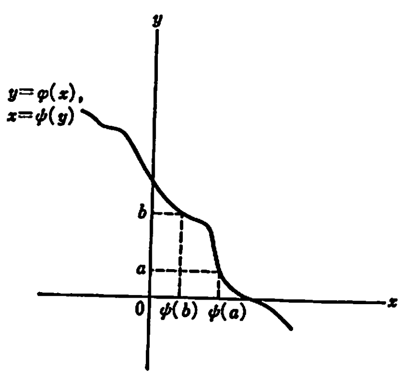
である．x を y で表わせば

$$g(y) = f[\psi(y)]\cdot\frac{d\psi(y)}{dy} \tag{10}$$

これで y の密度関数が求まったわけである．

以上は，y が x の増加関数の場合であるが，こんどは y が x の減少関数の場

図 5.2



合を考えてみよう．たとえば図 5.2 のような場合である．

すなわち $y=\varphi(x)$ は x の連続減少関数で，微分可能な一価の逆関数 $x=\psi(y)$ をもつとしよう．この場合には，区間 $[a, b]$ に y がはいる確率と区間 $[\psi(b), \psi(a)]$ に x がはいる確率とが等しいから

$$\int_a^b g(y)\,dy = \int_{\psi(b)}^{\psi(a)} f(x)\,dx \tag{11}$$

である．右辺の積分の両端を入れ換えれば符号は逆になるから

$$\int_a^b g(y)\,dy = -\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(x)\,dx \tag{12}$$

である．ここで $\Delta y = b-a$, $\Delta x = \psi(b)-\psi(a)$ とおき，Δy が十分小さいとすれば近似的に

$$g(y)\Delta y = -f(x)\Delta x \tag{13}$$

が $a \leqq y \leqq b$, $\psi(b) \leqq x \leqq \psi(a)$ において成立する．前と同様に

$$\Delta x = \frac{d\psi(y)}{dy}\Delta y$$

を(13)に代入すれば

$$g(y) = -f[\psi(y)]\frac{d\psi(y)}{dy} \tag{14}$$

を得る．ただしこんどは $d\psi(y)/dy$ が ψ が減少関数のため負値である．それゆえ(14)式の右辺は全体としては正値となっている．$d\psi(y)/dy$ が負であれば $-d\psi(y)/dy = |d\psi(y)/dy|$ であるから，$\varphi(x)$ が増加関数でも減少関数でも((10)と(14)をまとめて)次式により，1変数間の変換の場合の密度関数の変化の関係が示されることになる．

$$g(y) = f[\psi(y)]\left|\frac{d\psi(y)}{dy}\right| \tag{15}$$

例題 5.1.1　x の密度関数が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

であるとき，$y=(x-\mu)/\sigma$ の密度関数を求める．

$\psi(y) = \sigma y + \mu$ であるから $d\psi(y)/dy = \sigma$．これを(15)に代入すれば

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2}}|\sigma| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} \tag{16}$$

となる．(16)式は平均0，分散1の正規分布の密度関数にほかならない．

演 習 問 題

1　連続確率変数 x が

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=e^{-x} && x>0 \text{ のとき} \\ &=0 && x\leqq 0 \text{ のとき}\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

なる密度関数をもつとき

$$y=-2x+5$$

で定義される y の密度関数を求めよ．

2　x が正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ にしたがうとき

$$x=\log_e y \tag{18}$$

なる y すなわち

$$y=e^x \tag{19}$$

は次の密度関数をもつことを証明せよ．また y の平均は $\exp(\mu+\sigma^2/2)$，分散は $\exp(2\mu+\sigma^2)[\exp(\sigma^2)-1]$ となることを導け．

$$\left.\begin{aligned} f(y)&=\frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log y-\mu)^2} && y>0 \text{ のとき} \\ &=0 && \text{その他のとき}\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

これを対数正規分布(log-normal distribution)という．

5.2* 多変数間の変換

5.2.1* 2変数間の変換

2種類の連続確率変数 $x,\ y$ があってその結合密度関数が $f(x,\ y)$ であるとしよう．そのとき変換

$$\left.\begin{aligned} u&=u(x,\ y) \\ v&=v(x,\ y)\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

によって，新しい確率変数が定義されるとする．この場合，(1)の右辺の u v は関数記号である．$(x,\ y)$平面の点と$(u,\ v)$平面の点とが，(1)によって1対1対応するものとする．それゆえ，(1)を $x,\ y$ に関して一意的に解くことができて，

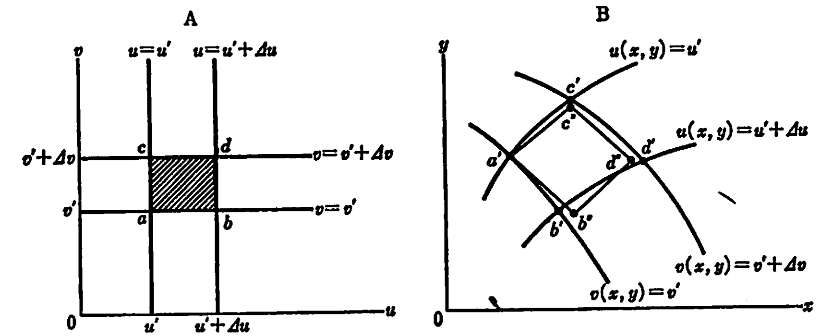
$$\left.\begin{aligned} x&=x(u,\ v) \\ y&=y(u,\ v)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

と表わされる．ただし(2)の右辺の $x,\ y$ もまた関数記号である．関数 $x,\ y$ は連続な偏導関数をもつとしよう．

さて問題はこのような変換によって得られる新しい変数 $u,\ v$ の結合密度関数 $g(u,\ v)$ を求めることである．

図5.3を見てほしい．図Aには$(u,\ v)$の座標系が描かれているが，この$(u,\ v)$平面における斜線を施した部分の面積(矩形 $abdc$)は，図Bの$(x,\ y)$座標系においてどのような面積に対応するであろうか．まずこの問題を考えてみよう．

図 5.3



さて矩形 $abdc$ は

$$u=u' \tag{3. a}$$

$$u=u'+\Delta u \tag{3. b}$$

$$v=v' \tag{3. c}$$

$$v=v'+\Delta v \tag{3. d}$$

という4本の方程式によって表わされる直線で囲まれている．これらの直線は$(x,\ y)$座標系のどのような曲線に対応しているだろうか．まず(3. a)という v 軸に平行な直線は(2)において $u=u'$ と固定して v を種々動かしたときの，$(x,\ y)$平面上の対応する点の軌跡である．この軌跡は

$$u(x,\ y)=u' \tag{4. a}$$

を満足する $x,\ y$ のすべての点といってもよい．これが図Bに描かれているような形をしているとしよう．

同様にして，(3.b)，(3.c)，(3.d)に対応する，(x, y)平面上の曲線としてそれぞれ

$$u(x, y)=u'+\Delta u \tag{4.b}$$

$$v(x, y)=v' \tag{4.c}$$

$$v(x, y)=v'+\Delta v \tag{4.d}$$

が図Bのごとく描ける．

このようにして，図Aにおける矩形 $abdc$ は図Bにおける図形 $a'b'd'c'$ に対応することが分かる．矩形 $abdc$ の面積は明らかに $\Delta u\Delta v$ である．図形 $a'b'd'c'$ の面積はいくらであろうか．いまこの面積を S で表わそう．

さて，点 (u, v) が矩形 $abdc$ 中にはいる確率と点 (x, y) が図形 $a'b'd'c'$ 中にはいる確率とは互いに等しい．それゆえ

$$\int_{v'}^{v'+\Delta v}\int_{u'}^{u'+\Delta u} g(u, v)\,du\,dv=\iint_S f(x, y)\,dx\,dy \tag{5}$$

が成立している．ただし右辺は領域 S の上での $f(x, y)$ の2重積分を意味する．このとき

$$g(\bar{u}, \bar{v})\Delta u\Delta v=f(\bar{x}, \bar{y})\cdot S \tag{6}$$

を成立せしめる次の条件を満たす $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{x}$, $\bar{y}$ が存在する．

$$\left.\begin{array}{l} u'\leqq\bar{u}\leqq u'+\Delta u,\quad v'\leqq\bar{v}\leqq v'+\Delta v \\ (\bar{x}, \bar{y})\in S \end{array}\right\} \tag{7}$$

(6)から

$$g(\bar{u}, \bar{v})=f(\bar{x}, \bar{y})\frac{S}{\Delta u\Delta v} \tag{8}$$

Δu, Δv をそれぞれ0に近づければ，$\bar{u}\to u'$, $\bar{v}\to v'$, $\bar{x}\to x'$, $\bar{y}\to y'$ であるから

$$g(u', v')=f(x', y')\left\{\lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}}\frac{S}{\Delta u\Delta v}\right\} \tag{9}$$

それゆえ{　}の中の値を求めれば，$g(u', v')$ の値が分かるわけである．

そこで面積 S を求めてみよう．図Aにおいて，a', b', c', d' の座標は

$$\left.\begin{array}{lll} a'\text{ の座標：} & x=x(u', v'), & y=y(u', v') \\ b'\text{ の座標：} & x=x(u'+\Delta u, v'), & y=y(u'+\Delta u, v') \\ c'\text{ の座標：} & x=x(u', v'+\Delta v), & y=y(u', v'+\Delta v) \\ d'\text{ の座標：} & x=x(u'+\Delta u, v'+\Delta v), & y=y(u'+\Delta u, v'+\Delta v) \end{array}\right\} \tag{10}$$

である．そこで次のようにテイラー展開する．ただし $\partial x/\partial u$ などの偏微係数は $u=u'$, $v=v'$ における値である．

$$\left.\begin{array}{l} x(u'+\Delta u, v')=x(u', v')+\dfrac{\partial x}{\partial u}\Delta u+\cdots \\ y(u'+\Delta u, v')=y(u', v')+\dfrac{\partial y}{\partial u}\Delta u+\cdots \\ x(u', v'+\Delta v)=x(u', v')+\dfrac{\partial x}{\partial v}\Delta v+\cdots \\ y(u', v'+\Delta v)=y(u', v')+\dfrac{\partial y}{\partial v}\Delta v+\cdots \\ x(u'+\Delta u, v'+\Delta v)=x(u', v')+\dfrac{\partial x}{\partial u}\Delta u+\dfrac{\partial x}{\partial v}\Delta v+\cdots \\ y(u'+\Delta u, v'+\Delta v)=y(u', v')+\dfrac{\partial y}{\partial u}\Delta u+\dfrac{\partial y}{\partial v}\Delta v+\cdots \end{array}\right\} \tag{11}$$

これらの…以下の部分は Δu および Δv が十分小さいとき無視しうる．そこで(10)の b', c', d' の座標のかわりに，新たな3点，b'', c'', d'' の座標を次のように定義する．

$$\left.\begin{array}{ll} b''\text{ の座標：} & x=x(u', v')+\dfrac{\partial x}{\partial u}\Delta u,\quad y=y(u', v')+\dfrac{\partial y}{\partial u}\Delta u \\ c''\text{ の座標：} & x=x(u', v')+\dfrac{\partial x}{\partial v}\Delta v,\quad y=y(u', v')+\dfrac{\partial y}{\partial v}\Delta v \\ d''\text{ の座標：} & x=x(u', v')+\dfrac{\partial x}{\partial u}\Delta u+\dfrac{\partial x}{\partial v}\Delta v, \\ & y=y(u', v')+\dfrac{\partial y}{\partial u}\Delta u+\dfrac{\partial y}{\partial v}\Delta v \end{array}\right\} \tag{12}$$

これらの座標で表わされる点 b'', c'', d'' は，Δu, Δv が微小であれば，それぞれ点 b', c', d' の近傍に位置するであろう．それらが図Bの b'', c'', d'' であるとする．さて図形 $a'b''d''c''$ は点 a' を新たに原点と考えた場合に

$$\overrightarrow{a'b''}=\left[\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u\quad \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\right]$$

$$\overrightarrow{a'c''}=\left[\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v\quad \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\right]$$

という2本のベクトルによって張られる平行四辺形となっている．もちろん

$$\overrightarrow{a'd''}=\overrightarrow{a'b''}+\overrightarrow{a'c''}$$

$$=\left[\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v\quad \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\right]$$

となっている．

この平行四辺形の面積を S' で表わせば，S' は行列式を使って次のように表わせる(12.2.6参照)．

$$S'=\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \dfrac{\partial x}{\partial v}\Delta v\\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u}\Delta u & \dfrac{\partial y}{\partial v}\Delta v\end{matrix}\right\|$$

ただし右辺両外側の2本の棒は絶対値記号である．12.2.3の行列式の性質〔4〕により Δu, Δv を外にくくり出して

$$S'=\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{matrix}\right\|\Delta u\cdot\Delta v \tag{13}$$

ところで Δu, Δv を0に限りなく近づけると，$b'\to b''$, $c'\to c''$, $d'\to d''$ であるから，$S\to S'$．それゆえ

$$\lim_{\Delta u,\,\Delta v\to 0}\frac{S}{\Delta u\Delta v}=\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{matrix}\right\| \tag{14}$$

である．

それゆえこれを(9)式に代入し，u', v', x', y' を u, v, x, y と書き換えれば

$$g(u,\ v)=f(x,\ y)\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{matrix}\right\| \tag{15}$$

となる．

偏微係数の行列式

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

をヤコビアン(Jacobian)といい $\partial(x,\ y)/\partial(u,\ v)$ で表わすこともある．またたんに J で表わしてもよい．すなわち

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\equiv\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\equiv J \tag{16}$$

この第2の記号を使い，かつ x, y も u, v の関数として表わせば(15)は

$$g(u,\ v)=f[x(u,\ v),\ y(u,\ v)]\left|\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\right| \tag{17}$$

これが，2変数間の変数変換の公式である．

例題 5.2.1　x, y を相互に独立に，それぞれ $N(0,\ 1)$ にしたがう確率変数とする．したがってその結合密度関数は

$$f(x,\ y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \tag{18}$$

このとき次のような変換 u, v を定義する．

$$\left.\begin{aligned}u&=x\cos\alpha-y\sin\alpha\\ v&=x\sin\alpha+y\cos\alpha\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

ただし α は一定値．これを x, y について解けば

$$\left.\begin{aligned}x&=u\cos\alpha+v\sin\alpha\\ y&=-u\sin\alpha+v\cos\alpha\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

それゆえヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}=1$$

(15)により

$$g(u,\ v)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\cdot 1$$

$$=\frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}\{(u\cos\alpha+v\sin\alpha)^2+(-u\sin\alpha+v\cos\alpha)^2\}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}\{u^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+v^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)\right.$$

$$+2uv(\cos\alpha\sin\alpha-\cos\alpha\sin\alpha)\}\Big]$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}$$

すなわち u, v の結合密度は

$$g(u,\ v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}} \tag{21}$$

となり，u, v は相互に独立に正規分布 $N(0,\ 1)$ にしたがうことが分かる.[1]

2変数間の変数変換の方法を利用して，1つの関数の周辺分布を求めることもできる．たとえば u の周辺密度関数 $h(u)$ は(15)式を v について積分すれば得られる．すなわち

$$h(u)=\int_{-\infty}^{\infty}g(u,\ v)\,dv \tag{22}$$

である．

例題 5.2.2 x, y が相互に独立に，$N(0,\ 1)$ にしたがう確率変数とする．このとき $u=x+y$ の分布を求める．

x, y の結合密度は(18)である．

いま

$$\left.\begin{aligned}u&=x+y\\ v&=y\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

とおく．したがって

$$\left.\begin{aligned}x&=u-v\\ y&=v\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

ヤコビアンは

$$J=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

(24)を(18)に代入して，(17)を利用すれば

$$g(u,\ v)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\{(u-v)^2+v^2\}}\cdot 1$$

1) (19)あるいは(20)のような変換は直交変換と呼ばれる．定理13.8参照.

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(u^2-2uv+2v^2)} \tag{25}$$

となる．そこで $h(u)$ は

$$h(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(u^2-2uv+2v^2)}dv \tag{26}$$

e のべき指数は

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}(u^2-2uv+2v^2)&=-\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}(2v^2-2uv)\\ &=-\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\left\{\left(v-\frac{1}{2}u\right)^2-\frac{1}{4}u^2\right\}\\ &=-\frac{1}{2}u^2\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\left(v-\frac{1}{2}u\right)^2\end{aligned}$$

それゆえ

$$\begin{aligned}h(u)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\left(v-\frac{1}{2}u\right)^2}dv\\ &=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

このようにして $u=x+y$ の分布は $N(0,\ 2)$ であることが分かる．

5.2.2* 多変数間の変換

n 個の連続型確率変数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ があって，その結合密度が $f(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ であるとする．そのとき，新しい n 個の変数 $y_1,\ \cdots,\ y_n$ が次のような変換によって定義されるとする．

$$y_i=\varphi_i(x_1,\ \cdots,\ x_n),\qquad i=1,\ \cdots,\ n \tag{27}$$

この連立方程式は $x_1,\ \cdots,\ x_n$ について一意的に解けて

$$x_i=\psi_i(y_1,\ \cdots,\ y_n),\qquad i=1,\ \cdots,\ n \tag{28}$$

のように表わされ，かつ関数 $\psi_i\ (i=1,\ \cdots,\ n)$ は連続な偏導関数をもつものとしよう．

このように変換(27)または(28)によって n 次元直交座標系 $(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ の点と n 次元直交座標系 $(y_1,\ \cdots,\ y_n)$ の点とが1対1対応しているとする．この場

合に $y_1, \cdots, y_n$ の結合密度関数は

$$g(y_1, \cdots, y_n)=f[\psi_1(y_1, \cdots, y_n), \cdots, \psi_n(y_1, \cdots, y_n)] \times\left|\frac{\partial(x_1, \cdots, x_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_n)}\right| \tag{29}$$

ただし $\partial(x_1, \cdots, x_n)/\partial(y_1, \cdots, y_n)$ は n 次のヤコビアンであって

$$\frac{\partial(x_1, \cdots, x_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_n)}\equiv\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n}\\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}\equiv J \tag{30}$$

である．この証明はここでは行なわない．ただ2変数の場合と同様に $|\partial(x_1, \cdots, x_n)/\partial(y_1, \cdots, y_n)|$ が，$(y_1, \cdots, y_n)$ 空間における微小「体積」に対する $(x_1, \cdots, x_n)$ 空間における，それに対応する微小「体積」の比率を表わすものであることを，比喩的に理解できれば十分としよう．[2]

演習問題

1　x, y を相互に独立に $N(0, 1)$ にしたがう確率変数とするとき，$u=x/y$ の密度関数が

$$f(u)=\frac{1}{\pi(1+u^2)} \qquad -\infty<u<\infty \tag{31}$$

となることを証明せよ．この分布はコーシー分布(Cauchy distribution)と呼ばれる．[3]

2　x, y が相互に独立で，いずれも同一の密度関数(5.1.17)式をもつ確率変数とすれば，$u=x+y,\ v=x/y$ とおくと u と v は相互に統計的に独立な確率変数であることを証明せよ．

---

2)　n 次元ユークリッド空間における「体積」と行列式との関係については 12.2.6 参照．

3)　(31)はより厳密には中央値ゼロのコーシー分布である．中央値 a のコーシー分布の密度関数は

$$f(u)=\frac{1}{\pi\{1+(u-a)^2\}} \qquad -\infty<u<\infty$$

である．コーシー分布の平均と分散は存在しない(6.2.3 参照)．

5.3　積率母関数

5.3.1　1変数の積率母関数

x を確率変数とし，t を実数とするとき，e^{tx} の期待値を x の積率母関数(moment generating function)といい，$M_x(t)$ で表わす．すなわち x が離散型であれば，$f(x)$ を確率関数として

$$M_x(t)=E(e^{tx})=\sum_x e^{tx}f(x) \tag{1}$$

ただし，$\sum_x$ は x の可能な値全部についての合計を表わす．また，x が連続型で $-\infty<x<\infty$ とすれば，$f(x)$ を密度関数として

$$M_x(t)=E(e^{tx})=\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f(x)\,dx \tag{2}$$

である．なお x を省略して $M_x(t)$ をたんに $M(t)$ と書くこともある．

$M_x(t)$ は一般にかならずしも存在するとは限らない．以下，ある正数 h に対して $-h<t<h$ の範囲において $M_x(t)$ が存在しかつ必要な階数まで微分可能と仮定する．

以下 x が連続型である場合についてだけ述べる(離散型の場合も同様)．

e^{tx} をマクローリン展開すれば

$$e^{tx}=1+\frac{tx}{1!}+\frac{(tx)^2}{2!}+\cdots \tag{3}$$

であるから，もし $-h<t<h$ において(2)の積分が存在すれば，(3)の右辺は項別に積分されて

$$E(e^{tx})=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx+\int_{-\infty}^{\infty}txf(x)\,dx+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(tx)^2f(x)\,dx+\cdots$$

(2)

$$=1+tE(x)+\frac{t^2}{2}E(x^2)+\cdots$$

$\int f(x)+g(x)\,dx$

$=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}E(x^k) \qquad -h<t<h \tag{4}$$

となる．すなわち各項は原点回りの k 次の積率 $E(x^k)$ を含んでいる．

(4)の t に関する k 階の偏導関数をつくり，$t=0$ とおくとその値は $E(x^k)$ すなわち原点回りの k 次の積率に等しくなる．すなわち

$$\left.\frac{\partial^k M_x(t)}{\partial t^k}\right|_{t=0}=E(x^k) \qquad k=1, 2, \cdots \tag{5}$$

これが $M_x(t)$ が積率母関数と呼ばれる理由である．以下 $\partial^k M_x(t)/\partial t^k|_{t=0}$ をたんに $M_x^{(k)}(0)$ と表わすことにする．たとえば $k=1$ であれば

$$M_x'(0)=E(x)$$

で平均が得られる．また $k=2$ ならば

$$M_x''(0)=E(x^2)$$

すなわち原点回りの2次の積率が得られるから

$$E(x^2)-\{E(x)\}^2=\sigma^2$$

によって分散が得られる．

例題 5.3.1　正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の積率母関数を求めてみよう．

$$M_x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\{(x-\mu)^2-2\sigma^2tx\}\right]dx$$

ところで{　}の中は

$$(x-\mu)^2-2\sigma^2tx=x^2-2\mu x+\mu^2-2\sigma^2tx$$

$$=x^2-2(\mu+\sigma^2t)x+\mu^2$$

$$=\{x-(\mu+\sigma^2t)\}^2-2\sigma^2\mu t-\sigma^4t^2$$

であるから

$$M_x(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\{x-(\mu+\sigma^2t)\}^2+\mu t+\frac{\sigma^2}{2}t^2\right]dx$$

$$=\exp\left(\mu t+\frac{\sigma^2}{2}t^2\right)\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\{x-(\mu+\sigma^2t)\}^2\right]dx}_{*}$$

ここで＊印の部分は平均 $\mu+\sigma^2t$ の正規分布密度関数の積分にほかならないから1に等しい．それゆえ

$$M_x(t)=\exp\left(\mu t+\frac{\sigma^2}{2}t^2\right) \tag{6}$$

である．

$$M_x'(t)=(\mu+\sigma^2t)\exp\left(\mu t+\frac{\sigma^2}{2}t^2\right)$$

であるから

$$M_x'(0)=\mu$$

また

$$M_x''(t)=\sigma^2\exp\left(\mu t+\frac{\sigma^2}{2}t^2\right)+(\mu+\sigma^2t)^2\exp\left(\mu t+\frac{\sigma^2}{2}t^2\right)$$

$$M''(0)=\sigma^2+\mu^2$$

$$M''(0)-\{M'(0)\}^2=\sigma^2$$

となるから，$(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1}\exp\{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)\}$ なる正規密度関数の平均は μ，分散は σ^2 であることが証明された．

例題 5.3.2　前に保留にしておいた2項分布

$$f(x)={}_nC_xp^xq^{n-x}\qquad x=0,1,\cdots,n \tag{7}$$

ただし $q=1-p$，の平均，分散を積率母関数により求めてみる．

$$M_x(t)=\sum_{x=0}^{n}e^{tx}{}_nC_xp^xq^{n-x}$$

$$=\sum_{x=0}^{n}{}_nC_x(e^tp)^xq^{n-x}$$

ここで $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_ka^kb^{n-k}$ であることに注意すれば

$$M_x(t)=(q+pe^t)^n \tag{8}$$

である．それゆえ

$$M'(t)=n(q+pe^t)^{n-1}pe^t$$

$$\mu=M'(0)=np$$

また

$$M''(t)=n(n-1)(q+pe^t)^{n-2}p^2e^{2t}+n(q+pe^t)^{n-1}pe^t$$

$$M''(0)=n(n-1)p^2+np$$

$$\sigma^2=M''(0)-\{M'(0)\}^2$$

$$=n(n-1)p^2+np-(np)^2=np(1-p)$$

$$=npq$$

すなわち，2項分布の平均は np，分散は npq に等しいことが証明された．

5.3.2　1変数の関数の積率母関数

積率母関数は確率変数の関数についても定義される．$\varphi(x)$ を x の連続な関数とすれば $\varphi(x)$ の積率母関数は

$$M_{\varphi(x)}(t)=E(e^{t\varphi(x)})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{t\varphi(x)}f(x)dx \tag{9}$$

で与えられる．$e^{t\varphi(x)}$ をマクローリン展開すれば

$$e^{t\varphi(x)}=1+\frac{t\varphi(x)}{1!}+\frac{\{t\varphi(x)\}^2}{2!}+\cdots$$

であり，積分(9)が存在するとすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{t\varphi(x)}f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx+\int_{-\infty}^{\infty}t\varphi(x)f(x)\,dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}t^2\{\varphi(x)\}^2f(x)\,dx+\cdots \tag{10}$$

となる．ところで一般に $x(-\infty<x<\infty)$ の関数 $g(x)$ があるとき $g(x)$ の期待値は

$$E\{g(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)\,dx \tag{11}$$

であるから，(10)は

$$E(e^{t\varphi(x)})=1+tE[\varphi(x)]+\frac{t^2}{2}E[\{\varphi(x)\}^2]+\cdots$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}E[\{\varphi(x)\}^k] \tag{12}$$

である．それゆえ

$$M^{(k)}(0)=E[\{\varphi(x)\}^k]\qquad k=1,\ 2,\ \cdots \tag{13}$$

により $\varphi(x)$ の原点回りの k 次の積率が計算できる．

例題 5.3.3　x は $N(\mu,\ \sigma^2)$ にしたがう確率変数とするとき $z=(x-\mu)/\sigma$ の平均，分散を積率母関数により求めよ．

$$M_{(x-\mu)/\sigma}(t)=E(e^{t(x-\mu)/\sigma})$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{t(x-\mu)/\sigma-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}dx$$
$$=e^{\frac{t^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\{x-(\mu+\sigma t)\}^2}dx$$
$$=e^{\frac{t^2}{2}}$$

$$M'(t)=te^{\frac{t^2}{2}}$$
$$M'(0)=0=E(z)$$
$$M''(t)=e^{\frac{t^2}{2}}+t^2e^{\frac{t^2}{2}}$$

$$M''(0)=1=E(z^2)$$
$$\sigma_z{}^2=E(z^2)-\{E(z)\}^2=1-0=1$$

このように $z=(x-\mu)/\sigma$ によって z は平均0，分散1となる（例題5.1.1参照）．

5.3.3* 多変数の関数の積率母関数

$\varphi(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ を n 個の確率変数の連続な関数とし，$f(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ を $x_1,\ \cdots,\ x_n$ の結合密度関数とする．そのとき $\varphi(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ の積率母関数は次のように表わされる．

$$M_{\varphi(x_1,\cdots,x_n)}(t)=E\{e^{t\varphi(x_1,\cdots,x_n)}\}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{t\varphi(x_1,\cdots,x_n)}f(x_1,\ \cdots,\ x_n)\,dx_1\cdots dx_n \tag{14}$$

例題 5.3.4　正規分布母集団 $N(\mu,\ \sigma^2)$ からの大きさ n の無作為標本の標本平均 $\bar{x}$ の平均，分散を積率母関数により求めよ．

$$M_{\bar{x}}(t)=E\{e^{t(x_1+\cdots+x_n)/n}\}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{t(x_1+\cdots+x_n)/n}f(x_1)\cdots f(x_n)\,dx_1\cdots dx_n$$

ただし $f(x_i)=(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1}\exp\{-(x_i-\mu)^2/(2\sigma^2)\}$．書き直せば

$$M_{\bar{x}}(t)=\prod_{i=1}^{n}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}+\frac{t}{n}x_i}dx_i\right]$$

e のべき指数は

$$-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}+\frac{t}{n}x_i=-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left\{x_i-\left(\sigma^2\frac{t}{n}+\mu\right)\right\}^2-\sigma^4\frac{t^2}{n^2}-2\sigma^2\frac{\mu}{n}t\right]$$

であるから

$$M_{\bar{x}}(t)=\prod_{i=1}^{n}e^{\frac{\sigma^2}{2n^2}t^2+\frac{\mu}{n}t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{x_i-\left(\sigma^2\frac{t}{n}+\mu\right)\right\}^2}dx_i$$
$$=e^{\frac{\sigma^2}{2n}t^2+\mu t} \tag{15}$$

となる．

$$M_{\bar{x}}'(t)=\left(\frac{\sigma^2}{n}t+\mu\right)e^{\frac{\sigma^2}{2n}t^2+\mu t}$$
$$M_{\bar{x}}'(0)=\mu=E(\bar{x})$$

$$M_{\bar{x}}''(t)=\frac{\sigma^2}{n}e^{\frac{\sigma^2}{2n}t^2+\mu t}+\left(\frac{\sigma^2}{n}t+\mu\right)^2 e^{\frac{\sigma^2}{2n}t^2+\mu t}$$

$$M_{\bar{x}}''(0)=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2=M_{\bar{x}}''(0)-\{M_{\bar{x}}'(0)\}^2=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2-\mu^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

すなわち，$\bar{x}$ の平均は μ，分散は σ^2/n である．

5.3.4* 多変数の積率母関数

$x_1, x_2, \cdots, x_p$ なる p 個の確率変数が結合密度関数 $f(x_1, \cdots, x_p)$ をもっているとする．このとき，$x_1, x_2, \cdots, x_p$ の積率母関数は次のごとく定義される．

$$\begin{aligned}M_{x_1,x_2,\cdots,x_p}(t_1, t_2, \cdots, t_p)&=E(e^{t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_px_p})\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_px_p}f(x_1, x_2, \cdots, x_p)dx_1dx_2\cdots dx_p\end{aligned}\tag{16}$$

いま次の量

$$\begin{aligned}\mu'_{r_1,r_2,\cdots,r_p}&=E(x_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_p^{r_p})\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}x_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_p^{r_p}f(x_1, \cdots, x_p)dx_1dx_2\cdots dx_p\end{aligned}\tag{17}$$

ただし $r_i(i=1, \cdots, p)$ は非負の整数，を定義し，これを原点回りの $r_1, r_2, \cdots, r_p$ 次の結合積率(joint moment)と呼ぶ．

このような結合積率 $\mu'_{r_1,r_2,\cdots,r_p}$ の値は積率母関数を用いて次のように計算される．

$$\mu'_{r_1,r_2,\cdots,r_p}=\frac{\partial^{(r_1+\cdots+r_p)}}{\partial t_1^{r_1}\partial t_2^{r_2}\cdots\partial t_p^{r_p}}M_{x_1,x_2,\cdots,x_p}(t_1, t_2, \cdots, t_p)\bigg|_{t_1=t_2=\cdots=t_p=0}\tag{18}$$

この応用例の1つを5.4.2で述べる．

5.3.5* 積率母関数と確率分布

2種類の確率分布があってそれらの積率母関数が同一であるとき，それらの確率分布は同一だろうか．この答は肯定的であり，次の定理に述べるように(積率母関数の存在する)確率分布と積率母関数とは1対1対応する．

〔定理 5.1〕　2つの密度関数(または確率関数) $f(x)$，$g(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ があってそれらの積率母関数が $-h<t<h$ $(h>0)$ なるすべての t に対して

存在しかつ同一であれば，$f(x)$，$g(x)$ は同一である(密度関数の場合，たかだかその不連続な点を除くすべての x について $f(x)=g(x)$ が成立する)．

この定理の証明は本書の程度を越えるので，次の仮定を追加した場合の証明を以下に与える．

〔仮定〕　x のすべての値 $(-\infty<x<\infty)$ に対して差 $f(x)-g(x)$ がべき級数展開できる．

（証明）　$f(x)$，$g(x)$ が密度関数の場合についてだけ証明する．仮定によって $f(x)-g(x)$ は次のようにべき級数展開できる．

$$f(x)-g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\tag{19}$$

ただし $a_0, a_1, \cdots$ は定数．

(19)の両辺に $\{f(x)-g(x)\}$ を乗ずる．

$$\{f(x)-g(x)\}^2=\{f(x)-g(x)\}(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)$$

上の両辺を x の全変域について積分する．

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\{f(x)-g(x)\}^2dx&=\int_{-\infty}^{\infty}\{f(x)-g(x)\}(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)dx\\&=a_0\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx-\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dx\right]+a_1\left[\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx-\int_{-\infty}^{\infty}xg(x)dx\right]\\&\quad+a_2\left[\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx-\int_{-\infty}^{\infty}x^2g(x)dx\right]+\cdots\end{aligned}\tag{20}$$

$f(x)$，$g(x)$ の積率母関数が $-h<t<h$ において常に同一であるという仮定から各次数の積率は両者同一であり，したがってこの最後の式における[ ]の中の差はそれぞれゼロである．それゆえ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{f(x)-g(x)\}^2dx=0\tag{21}$$

このことは，すべての x について恒等的に

$$f(x)=g(x)\tag{22}$$

が成立することを意味する．

この定理5.1により，たとえば積率母関数が $e^{-t^2/2}$ である(例題5.3.1参照)ような確率分布は正規分布 $N(0, 1)$ でありそれ以外にはないということがいえる．

また，積率母関数の情報から確率分布の系列の極限の形を知ろうとするとき次に述べる定理が有用である．このことの説明のために，若干の定義をまず与えておく．

確率変数の系列 $x_1, x_2, \cdots$ があり，その累積分布関数がそれぞれ $F_1(\xi)$, $F_2(\xi), \cdots$ であるとする．また x を累積分布関数 $F(\xi)$ をもつ確率変数とする．このとき

$$\lim_{t\to\infty} F_t(\xi)=F(\xi) \tag{23}$$

が $F(\xi)$ の不連続点を除くすべての $\xi(-\infty<\xi<\infty)$ で成立するとき，確率変数の系列 $x_1, x_2, \cdots$ は確率変数 x (またはその確率分布) に**分布収束** (convergence in distribution) するという．またこのとき $F(\xi)$ で表わされる確率分布を系列 $x_1, x_2, \cdots$ の**極限分布** (limiting distribution) と呼ぶ．

さて，積率母関数と極限分布との関連で次の有用な定理がある．[4]

〔**定理 5.2**〕 確率変数の系列 $x_1, x_2, \cdots$ があり，それに対応する積率母関数の系列 $M_1(t), M_2(t), \cdots$ が $-h<t<h$ なるすべての t に対して存在するものとする．このとき $|t|\leqq h_1<h$ において $M(t)=\lim_{t\to\infty} M_t(t)$ が成立するならば，$x_1, x_2, \cdots$ は $M(t)$ を積率母関数とする確率変数 x に分布収束する(換言すれば，$x_1, x_2, \cdots$ は $M(t)$ を積率母関数とする確率分布を極限分布としてもつ)．

この定理を応用して，第4章の定理 4.3 の中心極限定理を，もとの分布に積率母関数が存在する場合について証明しよう．

例題 5.3.5　$x_1, \cdots, x_n$ は密度関数 $f(x)$ からの大きさ n の無作為標本とし，x の平均は μ，分散は σ^2 とする．またこの標本の標本平均を $\bar{x}$，標本平均を標準化した変数を y_n とする．すなわち

$$y_n=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{24}$$

このとき，y_n の積率母関数は

4) R. V. Hogg and A. T. Craig, *Introduction to Mathematical Statistics*, 3rd edition, Macmillan, 1970, p. 179.

$$\begin{aligned}
M_{y_n}(t)&=M_{\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}(t)\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(t\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)f(\bar{x})\,d\bar{x}\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(t\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)f(x_1)\cdots f(x_n)\,dx_1\cdots dx_n\\
&=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(t\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)f(x)\,dx\right\}^n\\
&=\left\{M_{\frac{x-\mu}{\sigma}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right\}^n
\end{aligned} \tag{25}$$

ここで $(x-\mu)/\sigma=z$ とおけば

$$M_{y_n}(t)=\left\{M_z\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right\}^n=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{t}{\sqrt{n}}z\right)f(z)\,dz\right\}^n$$

を得る．ここで

$$\exp\left(\frac{t}{\sqrt{n}}z\right)=1+\frac{tz}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2}\left(\frac{tz}{\sqrt{n}}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{tz}{\sqrt{n}}\right)^3+\cdots$$

となるから

$$\begin{aligned}
\left\{M_z\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right\}^n&=\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left\{1+\frac{tz}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2}\left(\frac{tz}{\sqrt{n}}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{tz}{\sqrt{n}}\right)^3+\cdots\right\}f(z)\,dz\right]^n\\
&=\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(z)\,dz+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t}{\sqrt{n}}zf(z)\,dz+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2}{2n}z^2f(z)\,dz\right.\\
&\qquad\left.+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^3}{6n^{3/2}}z^3f(z)\,dz+\cdots\right]^n
\end{aligned}$$

となる．最後の式の右辺大括弧中の第1項は 1，第2項は z の平均 $(=0)$ の $t/\sqrt{n}$ 倍だから 0，第3項は z の分散 $(=1)$ の $t^2/(2n)$ 倍で，$t^2/(2n)$ となる．それゆえ

$$M_{y_n}(t)=\left[1+0+\frac{t^2}{2n}+(n^{-3/2}\text{ の項})+(n^{-2}\text{ の項})+\cdots\right]^n$$

かくして両辺の $n\to\infty$ における極限をとれば

$$\lim_{n\to\infty} M_{y_n}(t)=e^{\frac{t^2}{2}} \tag{26}$$

が得られる．これは正規分布 $N(0, 1)$ の積率母関数にほかならない．よって定理 5.2 により $n\to\infty$ における $y_n=(\bar{x}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ の極限分布は $N(0, 1)$ である．

演 習 問 題

1　$x_1, x_2, \cdots, x_n$ は密度関数 $f(x)$ からの無作為標本，$M_x(t)$ を x の積率母関数とするとき

(a)　$y=\sum_{i=1}^{n} x_i$ の積率母関数は $\{M_x(t)\}^n$

(b)　$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ の積率母関数は $\left\{M_x\left(\frac{t}{n}\right)\right\}^n$

となることを証明せよ．

2　ポアソン分布((3.5.5)式)の積率母関数が $e^{\lambda(e^t-1)}$ となることを示し，これより平均と分散を求めよ．

3　正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ において平均回りの3次と4次の積率がそれぞれ $E(x-\mu)^3=0$, $E(x-\mu)^4=3\sigma^4$ となることを，その積率母関数(6)を用いて示せ．

5.4* 積率母関数の応用

5.4.1* 2項分布と正規分布

事象 E が確率 p で起きる試行を n 回独立に行なったときの事象 E の生起の回数 x は2項分布

$$f(x)={}_nC_x p^x q^{n-x} \qquad x=0, 1, \cdots, n \tag{1}$$

ただし $q=1-p$ にしたがう離散型確率変数である．このことは3.1に詳しく述べた．さてこの2項分布の式を使ってたとえばサイコロを200回投げるとき1の目の出る回数が10以上20未満である確率を求めよというような問題を解く場合，たいへん計算がやっかいである．

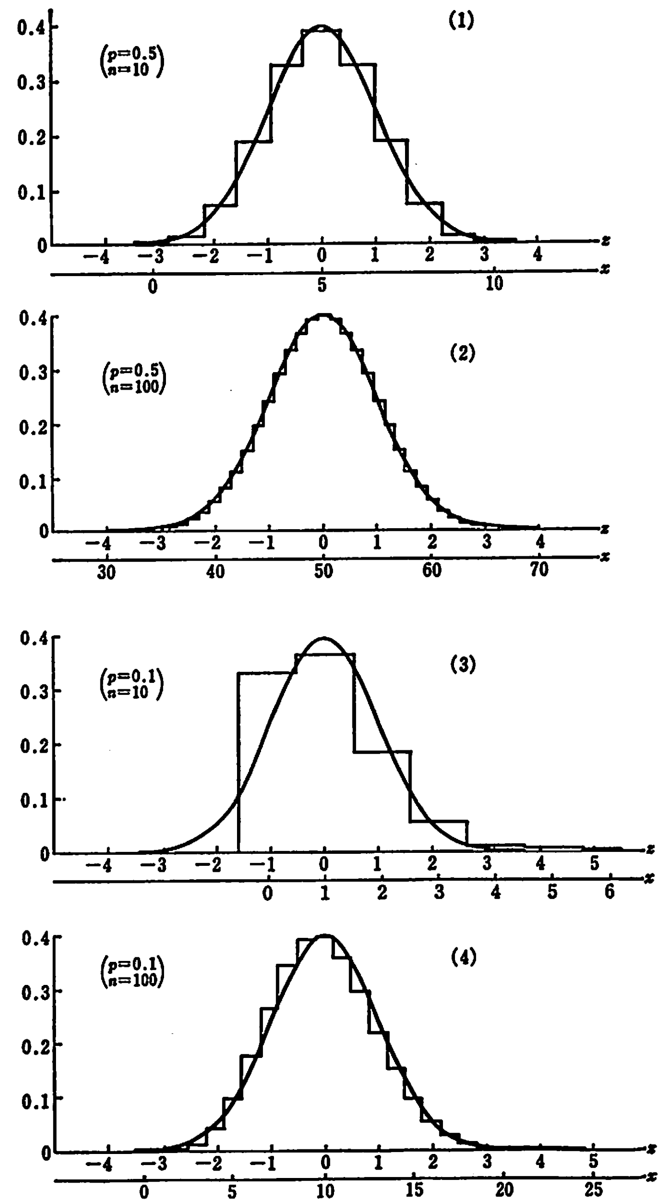
$$f(10)=\frac{200!}{10!190!}\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\left(\frac{5}{6}\right)^{190}$$

のような計算を $f(10)$ から $f(19)$ まで行なって合計しなければならない．

ところが，幸いなことに，確率 p が極端に0または1に近い数でないとき n がかなり大きい場合には，2項分布は正規分布で非常によく近似できることが知られている．

このことを実際に確かめてみると，図5.4のようになる．これは，$p=0.5$, $p=0.1$ の2つのケースについて，$n=10, 100$ としたときの2項分布の確率分

図 5.4　2項分布の正規分布による近似



布を描いたものである．ただし横軸には x そのものと，それを標準化した変数 z の目盛りをとってある．いうまでもなく z は

$$z=\frac{x-np}{\sqrt{npq}} \tag{2}$$

である．またそれぞれの図には，平均 np，標準偏差 $\sqrt{npq}$ の正規分布(あるいは z の目盛りでいえばたんに $N(0,1)$) が描いてある．これらの図をみると $p=0.5$ の場合は n が 10 程度に小さくても正規分布は非常によい近似を与えている．ところが $p=0.1$ では，$n=10$ では近似はあまりよくないが，$n=100$ になるとよくなっている．

以上のように，(1)の2項分布は正規分布 $N(np, npq)$ でかなりよく近似できる．この近似は n が大になるほどますますよくなる．このことは次の定理により保証される．

〔定理 5.3〕 a, b および p を一定とするとき確率

$$P(a\leqq x\leqq b)=\sum_{a\leqq x\leqq b} {}_nC_x p^x q^{n-x} \tag{3}$$

ただし $q=1-p$，は n が限りなく大きくなるとき

$$\int_{(a-np)/\sqrt{npq}}^{(b-np)/\sqrt{npq}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \tag{4}$$

に収束する．

(証明) 標準化された変数 $z=(x-np)/\sqrt{npq}$ の積率母関数は

$$M_z(t)=\sum_{x=0}^{n} {}_nC_x p^x q^{n-x} e^{t(x-np)/\sqrt{npq}}$$

$$=e^{-\frac{np}{\sqrt{npq}}t}\sum_{x=0}^{n} {}_nC_x \left(pe^{\frac{t}{\sqrt{npq}}}\right)^x q^{n-x}$$ 二項定理を使う

$$=e^{-\frac{np}{\sqrt{npq}}t}\left(q+pe^{\frac{t}{\sqrt{npq}}}\right)^n \tag{5}$$

したがって

$$\log M_z(t)=-\frac{np}{\sqrt{npq}}t+n\log\left(q+pe^{\frac{t}{\sqrt{npq}}}\right)$$

$$=-\frac{np}{\sqrt{npq}}t+n\log(1+u) \tag{6}$$

ただし $u=p(-1+e^{t/\sqrt{npq}})$ となる．$\log(1+u)$ を展開すれば

$$\log(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\cdots \tag{7}$$

となる．また u は $e^{t/\sqrt{npq}}$ の展開により

$$u=p\left(-1+e^{\frac{t}{\sqrt{npq}}}\right)$$

$$=p\left\{\left(\frac{t}{\sqrt{npq}}\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{t}{\sqrt{npq}}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{t}{\sqrt{npq}}\right)^3+\cdots\right\} \tag{8}$$

となる．(8)を(7)に代入し，これをさらに(6)に代入して整理すれば

$$\log M_z(t)=\frac{t^2}{2}+\sum_{k=3}^{\infty} c_k\left(\frac{t}{\sqrt{npq}}\right)^k \tag{9}$$

となる．ただし右辺の第2項は $(t/\sqrt{npq})$ の3次以上の項よりなる多項式で $c_3, c_4, \cdots$ は n を含まない係数である．そこで両辺の極限をとれば $\lim_{n\to\infty}\log M_z(t)=t^2/2$ すなわち

$$\lim_{n\to\infty} M_z(t)=e^{t^2/2} \tag{10}$$

P.106

となる．これは正規分布 $N(0,1)$ の積率母関数にほかならない (例題 5.3.1 参照)．よって定理 5.2 により，$z=(x-np)/\sqrt{npq}$ は $N(0,1)$ に分布収束する．このことは $P(a\leqq x\leqq b)=P((a-np)/\sqrt{npq}\leqq z\leqq(b-np)/\sqrt{npq})$ が(4)に収束することを意味する(証明終り)．[5)]

2項分布の正規分布による近似は n がそれほど大きくなくても，p が極端に1または0に近くない限り，良好である．このことを確かめるために，先に導いた $p=1/2, n=10$ のケース(図 5.4の(1))についての正規分布の当てはめを検討してみよう．

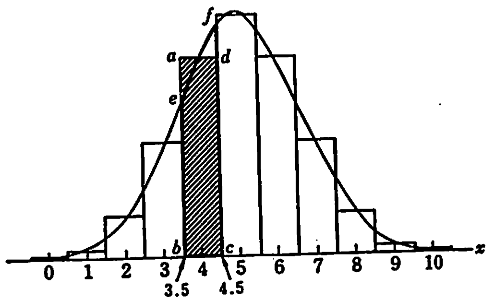
この場合 x の平均は $\mu=np=10\times(1/2)=5$，標準偏差は

5) 2項分布が漸近的に正規分布にしたがうことは次のことからもいえる．すなわち平均 p の無限2項母集団からの大きさ n の無作為標本を $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ で表わそう．各 y_i は確率関数(4.2.12)をもつ．また和 $\sum_{i=1}^{n} y_i$ を x で表わすと，x は2項分布(1)にしたがうことは明らかである．ところで中心極限定理により標本平均 $\bar{y}=\sum_{i=1}^{n} y_i/n$ は漸近的に正規分布 $N(p, pq/n)$ にしたがう(4.4.3参照)．したがって和 $x=\sum_{i=1}^{n} y_i=n\bar{y}$ は漸近的に正規分布 $N(np, npq)$ にしたがう．

$$\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\sqrt{2.5}\doteqdot 1.58$$

である．さて次の図5.5は図5.4(1)と同じものである．正規分布は連続型の分布であるから，離散型の2項分布とは性質を異にする．図5.5の斜線を施した

図 5.5　$p=\frac{1}{2}$, $n=10$ の2項分布の正規分布近似



長方形 $abcd$ の面積は，2項分布の確率変数が $x=4$ となる確率を表わしているが，この長方形 $abcd$ は，太線で囲んだ図形 $ebcf$ の面積によって近似されている．後者は平均5，標準偏差 $\sqrt{2.5}$ の正規分布にしたがう確率変数が3.5より大で4.5より小となる確率にほかならない．すなわち

$$ {}_{10}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{10-4}\doteqdot\int_{3.5}^{4.5}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2.5}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-5}{\sqrt{2.5}}\right)^2}dx \tag{11}$$

とおいているわけである．

ところでいまの場合標準化した正規変数 z は $z=(x-5)/\sqrt{2.5}$ であるから

$$P(3.5<x<4.5)=P\left(\frac{3.5-5}{\sqrt{2.5}}<z<\frac{4.5-5}{\sqrt{2.5}}\right)$$

が成立する．それゆえ上の右辺の確率を正規分布表から求めればよいわけである．この例では

$$P\left(\frac{3.5-5}{\sqrt{2.5}}<z<\frac{4.5-5}{\sqrt{2.5}}\right)$$
$$\doteqdot P(-0.949<z<-0.316)=F(0.949)-F(0.316)$$

付表2の正規分布表よりまず $F(0.949)$ の値を求める．$F(0.94)=0.8264$, $F(0.95)=0.8289$ であるから，直線補間により

$$F(0.949)=F(0.94)+\frac{0.949-0.940}{0.01}\{F(0.95)-F(0.94)\}$$
$$=0.8264+0.9\times(0.8289-0.8264)$$
$$\doteqdot 0.8286$$

同様にして $F(0.316)=0.6240$ を得る．したがって

$$P(-0.949<z<-0.316)=0.8286-0.6240=0.2046$$

となる．これに対し $x=4$ における2項分布の正確な値は

$$f(4)={}_{10}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=0.2051$$

であり，両者の差は0.0005にすぎない．

5.4.2* 多 項 分 布

いま m 個の事象 $E_1, E_2, \cdots, E_m$ があって，1回の試行においてそれぞれ確率 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ でいずれか1つの事象が生ずるとする．すなわち

$$P(E_i)=p_i \qquad i=1, 2, \cdots, m \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{m}p_i=1 \tag{13}$$

このような試行を独立に n 回行なって，E_1 が n_1 回，E_2 が n_2 回，…，E_m が n_m 回生ずる確率を考えてみよう．ここで当然

$$\sum_{i=1}^{m}n_i=n \tag{14}$$

が成立している．n 個の要素の中でその n_1 個，n_2 個，…，n_m 個がそれぞれ同じものであるとき，その順列の数は $P_n(n_1, \cdots, n_m)$ で表わされ，次式によって与えられる．

$$P_n(n_1, n_2, \cdots, n_m)=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!} \tag{15}$$

したがってこの公式を利用すれば，n 回の試行中 E_1 が n_1 回，…，E_m が n_m 回生ずるとき，その生じ方の数は(15)によって与えられる．たとえば $m=2$, $n=3$ で，$n_1=2$, $n_2=1$ ならば

$$P_3(2, 1)=\frac{3!}{2!1!}=3$$

である．実際，$E_1E_1E_2$, $E_1E_2E_1$, $E_2E_1E_1$ の3通りしかない．ところでこの例で1つの並び方 $E_1E_1E_2$ という事象が生ずる確率は

$$P(E_1E_1E_2)=p_1{}^2p_2$$

である．他の事象 $E_1E_2E_1$, $E_2E_1E_1$ の生ずる確率もそれぞれ $p_1^2p_2$ に等しいことは明らかである．よって E_1 が2回，E_2 が1回生ずる確率 $f(2, 1)$ は

$$f(2, 1)=P(E_1E_1E_2)+P(E_1E_2E_1)+P(E_2E_1E_1)$$
$$=\frac{3!}{2!1!}p_1^2p_2^1$$

である．n を3回に限定せず，一般の自然数とするとき，E_1 が n_1 回，E_2 が n_2 回生ずる確率は，上と同様な考え方で

$$f(n_1, n_2)=\frac{n!}{n_1!n_2!}p_1^{n_1}p_2^{n_2} \qquad n_1+n_2=n;\ n_1,\ n_2\geqq 0 \tag{16}$$

となる．これは $n_1=x$, $n_2=n-x$ とおいてみれば，(3.1.5)式の2項分布にほかならないことが分かる．

(16)において $m=2$ に限定しなければ，まったく同様な考え方で，E_1 が n_1 回，…，E_m が n_m 回生ずる確率が求められる．それは

$$f(n_1, n_2, \cdots, n_m)=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m}$$
$$\sum_{i=1}^{m} n_i=n;\ n_1, \cdots, n_m\geqq 0 \tag{17}$$

である．これを**多項分布**(multinomial distribution)の確率関数と呼ぶ．以上の説明から明らかなように，多項分布は2項分布の拡張である．

(17)の右辺は $(p_1+p_2+\cdots+p_m)^n$ を展開したときの一般項に等しい．それゆえ

$$(p_1+p_2+\cdots+p_m)^n=\sum\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m}=1 \tag{18}$$

が成立する．

多項分布の積率母関数は

$$\begin{aligned}
&M_{n_1, n_2, \cdots, n_m}(t_1, t_2, \cdots, t_m)\\
&=\sum e^{(t_1n_1+t_2n_2+\cdots+t_mn_m)}\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m}\\
&=\sum\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}(p_1e^{t_1})^{n_1}(p_2e^{t_2})^{n_2}\cdots(p_me^{t_m})^{n_m}\\
&=(p_1e^{t_1}+p_2e^{t_2}+\cdots+p_me^{t_m})^n
\end{aligned} \tag{19}$$

である．そこでまず n_i の平均を求めれば

$$\begin{aligned}
E(n_i)&=\frac{\partial}{\partial t_i}M_{n_1, \cdots, n_m}(t_1, \cdots, t_m)\Big|_{t_1=\cdots=t_m=0}\\
&=np_ie^{t_i}(p_1e^{t_1}+\cdots+p_me^{t_m})^{n-1}\Big|_{t_1=\cdots=t_m=0}\\
&=np_i(p_1+\cdots+p_m)^{n-1}\\
&=np_i
\end{aligned} \tag{20}$$

となる．次に n_i の分散を求めよう．まず n_i の原点回りの2次の積率 $E(n_i^2)$ は

$$\begin{aligned}
E(n_i^2)&=\frac{\partial^2}{\partial t_i^2}M_{n_1, \cdots, n_m}(t_1, \cdots, t_m)\Big|_{t_1=\cdots=t_m=0}\\
&=\{np_ie^{t_i}(p_1e^{t_1}+\cdots+p_me^{t_m})^{n-1}\\
&\quad+n(n-1)p_i^2e^{2t_i}(p_1e^{t_1}+\cdots+p_me^{t_m})^{n-2}\}\Big|_{t_1=\cdots=t_m=0}\\
&=np_i(p_1+\cdots+p_m)^{n-1}+n(n-1)p_i^2(p_1+\cdots+p_m)^{n-2}\\
&=np_i+n(n-1)p_i^2
\end{aligned}$$

これより n_i の分散は

$$\begin{aligned}
\sigma_{n_i}^2&=E(n_i^2)-\{E(n_i)\}^2\\
&=np_i+n(n-1)p_i^2-(np_i)^2\\
&=np_i-np_i^2=np_i(1-p_i)
\end{aligned} \tag{21}$$

また n_i と n_j との共分散を求めよう．

$$\begin{aligned}
E(n_in_j)&=\frac{\partial^2}{\partial t_i\partial t_j}M_{n_1, \cdots, n_m}(t_1, \cdots, t_m)\Big|_{t_1=\cdots=t_m=0}\\
&=n(n-1)p_ip_je^{t_i+t_j}(p_1e^{t_1}+\cdots+p_me^{t_m})^{n-2}\Big|_{t_1=\cdots=t_m=0}\\
&=n(n-1)p_ip_j
\end{aligned}$$

より，共分散は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(n_i, n_j)&=E(n_in_j)-E(n_i)E(n_j)\\
&=n(n-1)p_ip_j-n^2p_ip_j\\
&=-np_ip_j
\end{aligned} \tag{22}$$

となる．

演 習 問 題

1　6枚の銅貨を投げるとき，2項分布と正規分布による近似との2つの方法で次の確率を計算せよ．(a) 4枚表が出る．(b)少なくとも2枚表が出る．

2　ある県の全世帯のテレビ保有率は60% である．いま400世帯を無作為に抽出するとき，その中のテレビ保有世帯の数が250世帯を越える確率を求めよ．

3　1つの箱に赤球3個，白球5個，青球4個がはいっている．いま7個を復元抽出するとき，赤2個，白1個，青4個が得られる確率を多項分布により求めよ．

第 6 章

正規母集団からの統計量の分布

この章では正規母集団からの無作為標本に基づくいくつかの重要な統計量の確率分布について述べる．一般に，統計量の確率分布のことを**標本分布**(sampling distribution) と呼ぶ．この章で説明される標本分布の知識は次章以降で述べる推定論や検定論において活用される．

6.1 カイ自乗分布

6.1.1 抽 出 実 験

表 4.2 は正規分布に近い型のヒストグラムをもつ有限母集団であり，その平均は 50，標準偏差は 10 であった．第 4 章で述べたように，この母集団から，復元抽出により標本の無作為抽出を行なえば，平均 50，標準偏差 10 の正規母集団からの標本抽出とほぼ同様な結果が得られる．すなわち，その大きさ n の無作為標本を $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ で表わせば，各 x_i は相互に独立に，$N(50, 10^2)$ にしたがって分布する確率変数であると考えてよい．

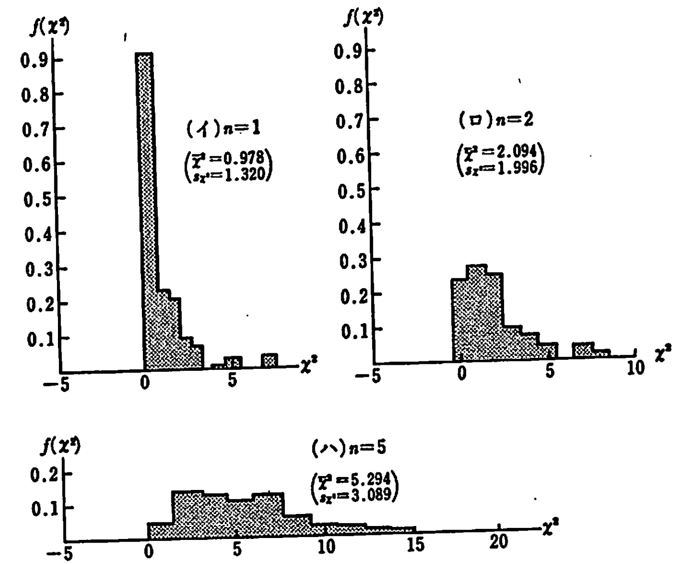
さて，正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがう確率変数 x を次のように標準化する．

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma} \tag{1}$$

このように標準化した確率変数 z は平均 0，分散 1 の正規分布すなわち $N(0, 1)$ にしたがうことは，4.4.2 で述べた．いま標本の各要素 x_i を

$$z_i=\frac{x_i-\mu}{\sigma} \qquad i=1, 2, \cdots, n \tag{2}$$

図 6.1 抽出実験による χ^2 の分布



と標準化したとする．もちろん各 z_i は共通に $N(0, 1)$ にしたがうわけであるが，これらの z_i の自乗の和をつくりこれを χ^2 で表わす．χ はギリシャ文字のカイ (chi) である．

すなわち

$$\chi^2=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2=\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_n-\mu}{\sigma}\right)^2 \tag{3}$$

であるが，この χ^2 はどのような標本分布にしたがうであろうか．

まず実験により確かめてみよう．表 4.2 から実際に特定の大きさの標本を復元抽出し，標本の要素の値を

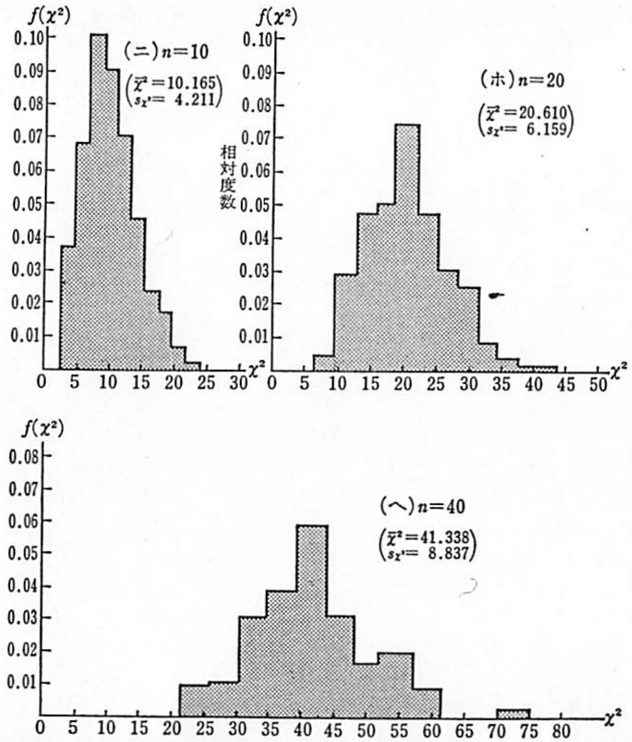
$$\frac{x_i-50}{10}$$

により標準化して，その自乗をつくり，合計する．

たとえば大きさ 5 の標本を抽出したとしよう．その結果

(46, 62, 42, 42, 50)

図 6.1 (つづき)



(注) 1. $\chi^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2$, nは自由度, $\bar{\chi}^2$はχ^2 の標本平均, s_{χ^2}はχ^2 の標本標準偏差を示す.

2. どのケースも標本の抽出個数は 200 である.

が得られたとする. $(46-50)/10=-0.4$ のごとくこれらの数値を標準化すれば

$$(-0.4,\ 1.2,\ -0.8,\ -0.8,\ 0)$$

となる. 各数値の平方をつくり合計すれば

$$\chi^2=(-0.4)^2+(1.2)^2+(-0.8)^2+(-0.8)^2+0^2=2.88$$

となる. このような操作によって, 大きさ5の標本を多数抽出し, それぞれについて χ^2 を計算する. その結果得られるそれらの χ^2 の値はどのようなヒストグラムを描くであろうか.

実際に実験した結果は図 6.1 にまとめられている. この図には標本の大きさ

(n) が 1, 2, 5, 10, 20, 40 の場合についてのヒストグラムが描かれている. それぞれの大きさの標本は 200 個ずつ抽出された.

実験結果から, χ^2 の度数分布は一般に右にすそが広がった形をしていることが分かる. また χ^2 の標本平均 $\bar{\chi}^2$ は大体標本の大きさ n に等しいことが分かる. また χ^2 の標本標準偏差は n が大きいほど大きいことが見いだされる.

6.1.2 カイ自乗分布

次の定理は χ^2 の理論的な分布を説明する.

〔**定理 6.1**〕 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ を相互に独立に正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがって分布する m 個の確率変数とするとき

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2$$

は, **自由度mのカイ自乗分布**(chi-square distribution with m degrees of freedom)にしたがって分布する. 自由度mのカイ自乗分布の密度関数は

$$f(\chi^2)=\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}(\chi^2)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \quad 0\leqq\chi^2<\infty \tag{4}$$

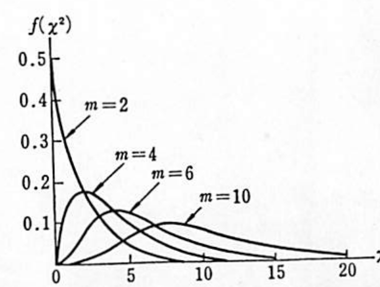
である.

ここで $\Gamma(m/2)$ は**ガンマ関数**(gamma function)を表わす. ガンマ関数 $\Gamma(x)$ は, $x>0$ について, 次のように定義される.

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}du \tag{5}$$

カイ自乗分布の詳しい説明や**定理 6.1** の証明は **6.1.3** で述べることにしよう. カイ自乗分布は自由度の大きさでその分布の形が異なる. 自由度 $m=2, 4, 6, 10$ にそれぞれ対応するカイ自乗分布の形を示すと図 6.2 のようになる.

図 6.2 カイ自乗分布



自由度mのカイ自乗分布を簡単に $C(m)$ と記す. カイ自乗分布の数表が巻

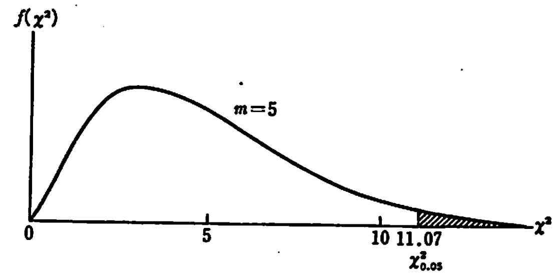
末の付表3に与えられている．この表は，種々な水準の自由度(m)に対し，χ^2の値が特定の確率(これをαで表わす)で特定の値以上になるその値を示したものである．自由度mのカイ自乗分布についてのその特定の値(これを自由度mのχ^2の $\alpha\times100$%点(point)と呼ぶ)を $\chi_\alpha^2(m)$ で表わせば

$$P(\chi_\alpha^2(m)\leqq\chi^2<\infty)=\int_{\chi_\alpha^2(m)}^{\infty}f(\chi^2)d\chi^2=\alpha \qquad (6)$$

である．ただし $f(\chi^2)$ は(4)で与えられている自由度mのカイ自乗分布の密度関数である．図6.3には自由度5のカイ自乗分布が描かれているが，右すそ(斜線部分)の面積がたとえば0.05になるχ^2の5%点 $\chi^2_{0.05}(5)$ は付表によれば11.0705であることが分かる．

なお自由度mが100より大なる場合はχ^2がmが大きくなるとともに漸近的に正規分布 $N(m,\ 2m)$ にしたがうことを利用して確率の計算をすればよい(この証明は次の6.1.3で与える)．

図 6.3　自由度5のカイ自乗分布



最後に，自由度mのカイ自乗分布の平均はm，分散は$2m$であることを付け加えておこう．この証明も6.1.3で行なう．先の抽出実験ではχ^2の標本平均$\bar{\chi}^2$，χ^2の標本分散 $s_{\chi^2}{}^2$ はそれぞれ n, $2n$ に近い値になっており，いちおう実験でも確かめられたわけである．

6.1.3* カイ自乗分布の導出

まず(5)で定義されたガンマ関数の性質について述べよう．$x>0$ なるとき(5)の右辺を部分積分すれば

$$\Gamma(x)=\left[\frac{1}{x}u^xe^{-u}\right]_0^\infty+\frac{1}{x}\int_0^\infty u^xe^{-u}du$$

$$=\frac{1}{x}\Gamma(x+1)$$

すなわち

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \qquad (7)$$

なる関係を得る．

また，$x=1$ において

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-u}du=\Big[-e^{-u}\Big]_0^\infty=1 \qquad (8)$$

である．(7)の関係を使用すれば，

$$\Gamma(2)=1\cdot\Gamma(1)=1$$
$$\Gamma(3)=2\cdot\Gamma(2)=2\cdot1=2!$$
$$\Gamma(4)=3\cdot\Gamma(3)=3\cdot2!=3!$$
$$\cdots\cdots$$

一般に

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n! \qquad n=1,\ 2,\ \cdots \qquad (9)$$

が成立する．

また $x=1/2$ の場合には

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty u^{-1/2}e^{-u}du$$

であるが，この値は$\sqrt{\pi}$に等しいことが証明できる.[1] すなわち

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \qquad (10)$$

それゆえ(9)から

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$
$$\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$
$$\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)=\left(2+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)=\left(2+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$
$$\cdots\cdots$$

よって一般に

1) たとえば福原満洲雄『ガンマー函数』弘文堂，1951年を参照．

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left\{\prod_{k=0}^{n-1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right\}\sqrt{\pi},\qquad n=1,\ 2,\ \cdots \tag{11}$$

が成立する．

密度関数の性質として(4)の積分は

$$\int_0^\infty f(\chi^2)\,d\chi^2=\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\int_0^\infty\left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}\chi^2}d\chi^2=1 \tag{12}$$

となっているはずである．２番目の式の積分において $\chi^2/2=u$ とおけば，$d\chi^2=2du$ である．それゆえ

$$\int_0^\infty\left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}\chi^2}d\chi^2=2\int_0^\infty u^{\frac{m}{2}-1}e^{-u}du=2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)$$

となるから，確かに(12)は成立する．

次に，定理6.1を証明しよう．それは自由度mのカイ自乗分布の積率母関数と $\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2$ の積率母関数が一致することを示すことによって行なう．

まず自由度mのカイ自乗分布の積率母関数は

$$\begin{aligned}M_{\chi^2}(t)&=E(e^{t\chi^2})\\&=\int_0^\infty e^{t\chi^2}\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{\chi^2}{2}}d\chi^2\\&=\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\int_0^\infty\left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}(1-2t)\chi^2}d\chi^2\end{aligned}$$

ここで $u=(1/2)(1-2t)\chi^2$（ただし $t<1/2$）と変換すれば

$$\begin{aligned}M_{\chi^2}(t)&=\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\int_0^\infty\left(\frac{u}{1-2t}\right)^{\frac{m}{2}-1}e^{-u}\frac{2}{1-2t}du\\&=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}(1-2t)^{-\frac{m}{2}}\int_0^\infty u^{\frac{m}{2}-1}e^{-u}du\\&=(1-2t)^{-\frac{m}{2}}\qquad t<1/2\end{aligned}$$

すなわち自由度mのカイ自乗分布の積率母関数は，$t<1/2$ において

$$M_{\chi^2}(t)=(1-2t)^{-\frac{m}{2}} \tag{13}$$

により与えられる．

一方，$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m$ を $N(\mu,\ \sigma^2)$ にしたがって相互に独立に分布する確率変数とすれば，$z_i=(x_i-\mu)/\sigma,\ i=1,\ \cdots,\ m$ は $N(0,\ 1)$ にしたがって相互に独立に分布する．それゆえ $\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2=\sum_{i=1}^{m}z_i^2$（以下たんに $\sum z_i^2$ と書く）の積率母関数は

$$\begin{aligned}M_{\Sigma z_i^2}(t)&=\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\cdots\int_{-\infty}^\infty e^{t\Sigma z_i^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z_1^2}\cdots\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z_m^2}dz_1\cdots dz_m\\&=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\cdots\int_{-\infty}^\infty\exp(t\textstyle\sum z_i^2)\exp\left(-\frac{1}{2}\sum z_i^2\right)dz_1dz_2\\&\quad\cdots dz_m\\&=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}\prod_{i=1}^{m}\int_{-\infty}^\infty\exp\left[-\frac{1}{2}(1-2t)z_i^2\right]dz_i\end{aligned}$$

ここで $\sqrt{1-2t}\,z_i=u_i$ とおけば $\sqrt{1-2t}\,dz_i=du_i$ であるから

$$\begin{aligned}M_{\Sigma z_i^2}(t)&=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}}\prod_{i=1}^{m}\left[(1-2t)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^\infty\exp\left(-\frac{1}{2}u_i^2\right)du_i\right]\\&=(1-2t)^{-\frac{m}{2}}\qquad t<1/2\end{aligned} \tag{14}$$

これは(13)で与えた自由度mのカイ自乗分布の積率母関数と等しい．よって5.3.5の積率母関数と確率分布との１対１対応の定理5.1により，$\sum_{i=1}^{m}z_i^2$ は自由度mのカイ自乗分布にしたがう（証明終り）．

カイ自乗分布の平均と分散は，積率母関数(13)より

$$M_{\chi^2}(t)=(1-2t)^{-\frac{m}{2}}$$

$$\mu_{\chi^2}=\left.\frac{dM_{\chi^2}(t)}{dt}\right|_{t=0}=m(1-2t)^{-\frac{m+2}{2}}\Big|_{t=0}=m \tag{15}$$

$$\left.\frac{d^2M_{\chi^2}(t)}{dt^2}\right|_{t=0}=m\left(-\frac{m+2}{2}\right)(-2)(1-2t)^{-\frac{m+4}{2}}\Big|_{t=0}$$

$$=m(m+2)$$

ゆえに

$$\sigma_{\chi^2}=m(m+2)-m^2=2m \tag{16}$$

すなわち自由度mのカイ自乗分布の平均はm，分散は$2m$に等しい．

カイ自乗分布には**カイ自乗分布の再生性**(reproductive property)と呼ばれる次の性質がある．

〔定理 6.2〕 $\chi_1^2, \chi_2^2, \cdots, \chi_k^2$ をそれぞれ自由度 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ のカイ自乗分布にしたがって相互に独立に分布する確率変数とすると，それらの和 $\sum_{i=1}^{k}\chi_i^2$ は自由度 $m_1+m_2+\cdots+m_k$ のカイ自乗分布にしたがう．

（証明） $\sum_{i=1}^{k}\chi_i^2$ の積率母関数は，$f_i(\chi_i^2)$ を自由度 m_i のカイ自乗分布の密度関数とすれば，

$$M_{\Sigma\chi_i^2}(t)=\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{t\Sigma\chi_i^2}f_1(\chi_1^2)f_2(\chi_2^2)\cdots f_k(\chi_k^2)d\chi_1^2d\chi_2^2\cdots d\chi_k^2$$

$$=\prod_{i=1}^{k}\left[\int_0^\infty e^{t\chi_i^2}f_i(\chi_i^2)d\chi_i^2\right]$$

$$=\prod_{i=1}^{k}\left[M_{\chi_i^2}(t)\right]=\prod_{i=1}^{k}(1-2t)^{-\frac{m_i}{2}}$$

$$=(1-2t)^{-\frac{1}{2}(m_1+m_2+\cdots+m_k)} \qquad t<1/2 \tag{17}$$

すなわちこれは自由度 $(m_1+m_2+\cdots+m_k)$ のカイ自乗分布の積率母関数にほかならない．よって定理 5.1 により，$\sum_{i=1}^{k}\chi_i^2$ は自由度 $(m_1+\cdots+m_k)$ のカイ自乗分布にしたがう（証明終り）．

最後に，χ^2 分布が自由度mが十分大なるとき正規分布 $N(m, 2m)$ により近似できることは次のように証明できる．

χ^2 が $C(m)$ にしたがうとき，これを標準化した変数

$$z_m=\frac{\chi^2-m}{\sqrt{2m}} \tag{18}$$

の積率母関数は

$$M_{z_m}(t)=E\left\{\exp\left[t\left(\frac{\chi^2-m}{\sqrt{2m}}\right)\right]\right\}$$

$$=\exp\left(-\frac{mt}{\sqrt{2m}}\right)E\left\{\exp\left(\frac{\chi^2 t}{\sqrt{2m}}\right)\right\}$$

$$=\exp\left[-\left(t\sqrt{\frac{2}{m}}\right)\left(\frac{m}{2}\right)\right]\left(1-2\frac{t}{\sqrt{2m}}\right)^{-\frac{m}{2}}$$

$$=\left(e^{t\sqrt{2/m}}-t\sqrt{\frac{2}{m}}e^{t\sqrt{2/m}}\right)^{-m/2} \qquad t<\sqrt{\frac{m}{2}} \tag{19}$$

である．$e^{t\sqrt{2/m}}$ をマクローリン展開すれば

$$e^{t\sqrt{2/m}}=1+t\sqrt{\frac{2}{m}}+\frac{1}{2}t^2\frac{2}{m}+(m^{-\frac{3}{2}}\text{ の項})+(m^{-2}\text{ の項})+\cdots$$

である．これを(19)の最右辺に代入すれば

$$M_{z_m}(t)=\left[1-\frac{t^2}{m}+(m^{-\frac{3}{2}}\text{ の項})+(m^{-2}\text{ の項})+\cdots\right]^{-\frac{m}{2}}$$

という形になる．したがって $m\to\infty$ における極限をとれば

$$\lim_{m\to\infty}M_{z_m}(t)=e^{t^2/2} \tag{20}$$

が得られる．$e^{t^2/2}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ の積率母関数だから，定理 5.2 によって z_m の極限分布は $N(0, 1)$ である．このことは $\chi^2=m+\sqrt{2m}z_m$ が漸近的に正規分布 $N(m, 2m)$ にしたがうことを意味する．

6.1.4 標本分散の分布

正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ から無作為抽出した大きさnの標本を$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$とする．この標本の標本分散は 1.3 において次のように定義された．

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \tag{21}$$

この標本分散s^2はどのような分布にしたがうだろうか．結論を先に述べると，分散σ^2をもつ正規母集団を前提にするとき $(n-1)s^2/\sigma^2$ は自由度$n-1$のカイ自乗分布 $C(n-1)$ にしたがう．

(21)より

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}=\left(\frac{x_1-\bar{x}}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{x_2-\bar{x}}{\sigma}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_n-\bar{x}}{\sigma}\right)^2 \tag{22}$$

と書けるが，この右辺のn個の2乗の項の和は統計的に独立な$(n-1)$個の標準正規変数の2乗の項の和に変形できる．このことを $n=2$ の場合について確か

めると次のようになる．

$$\left(\frac{x_1-\bar{x}}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{x_2-\bar{x}}{\sigma}\right)^2=\frac{1}{\sigma^2}\left[\left(x_1-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(x_2-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\right]$$

$$=\frac{2}{\sigma^2}\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2=\left(\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)^2 \tag{23}$$

となる．ところで x_1, x_2 が相互に独立に $N(\mu,\ \sigma^2)$ にしたがうとき差 x_1-x_2 は $N(0,\ 2\sigma^2)$ にしたがう(**定理 13.6** 参照)ので，$(x_1-x_2)/(\sqrt{2}\sigma)$ は標準正規変数である．

したがって少なくとも $n=2$ の場合，$(n-1)s^2/\sigma^2$ すなわち(23)は自由度1のカイ自乗分布 $C(1)$ にしたがうことが証明できた．一般の場合の証明は次の **6.1.5** で与えよう．

$(n-1)s^2/\sigma^2$ がカイ自乗分布 $C(n-1)$ にしたがうということは，それを一定値 $\sigma^2/(n-1)$ 倍した標本分散 s^2 の確率分布がカイ自乗分布 $C(n-1)$ と同様な形であることを意味する．それはたんに $C(n-1)$ の分布の目盛りを付け変えたものに過ぎない．

以上のことを実験的に確かめるために χ^2 のときと同様に，$N(50,\ 10^2)$ の有限母集団 A から大きさ $n=3,\ 5,\ 20$ の標本を復元抽出により200個抽出し，それぞれの標本分散 s^2 の分布のヒストグラムを描くと図6.4のようになる．これらはそれぞれ自由度 $3-1,\ 5-1,\ 20-1$ のカイ自乗分布に似た分布形を示していることが分かる．

6.1.5* 標本分散の分布についての証明

(21)の両辺を $(n-1)$ 倍して変形すれば

$$(n-1)s^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\{(x_i-\mu)+(\mu-\bar{x})\}^2$$

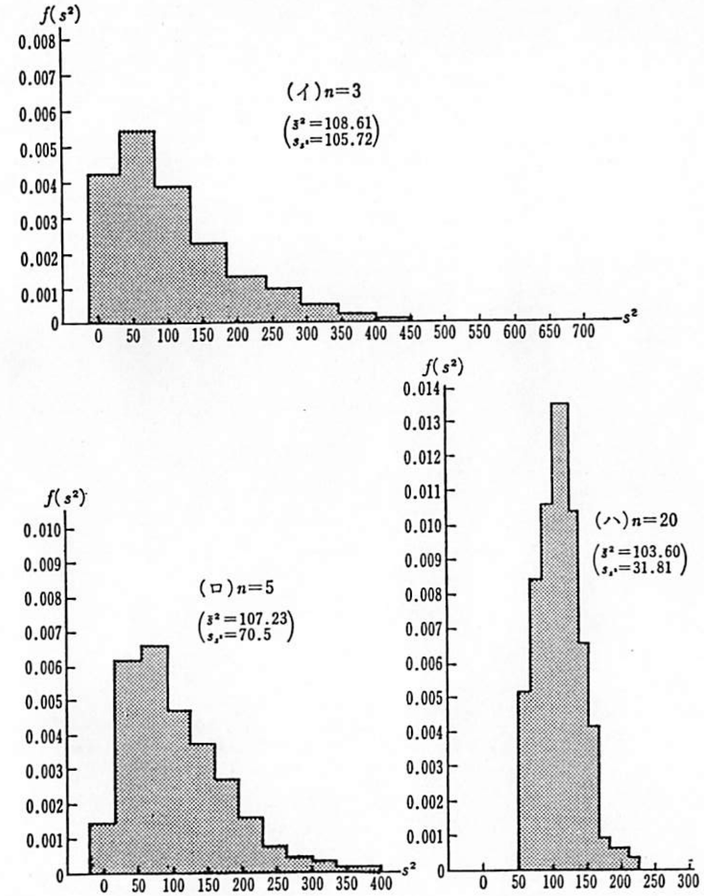
$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2-n(\bar{x}-\mu)^2$$

となる．ここで両辺を分散 σ^2 で除せば

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2-\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 \tag{24}$$

となる．

図 6.4 抽出実験による標本分散 s^2 の分布



(注) 1. $\bar{s}^2$ は s^2 の標本平均，s_{s^2} は s^2 の標本標準偏差．
2. 各ケースとも200個の標本に基づく s^2 のヒストグラムである．

あと(**13.4.2** の例題)で証明するように，正規母集団からの無作為標本の標本平均 $\bar{x}$ と標本分散 s^2 とは，相互に独立に分布する．したがって，$(n-1)s^2/\sigma^2$ と $\{(\bar{x}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})\}^2$ は相互に独立に分布する．

さて，いま統計的に独立な2つの確率変数 P, Q があるとしよう．その和 $P+Q$ を R で表わす．R の積率母関数は

$$M_R(t)=M_{P+Q}(t)=E(e^{t(P+Q)})$$
$$=E(e^{tP})\cdot E(e^{tQ})=M_P(t)\cdot M_Q(t) \tag{25}$$

である．それゆえ $Q=R-P$ の積率母関数は

$$M_Q(t)=\frac{M_R(t)}{M_P(t)} \tag{26}$$

である．

(24)式において，$Q=(n-1)s^2/\sigma^2$, $R=\sum_{i=1}^{n}\{(x_i-\mu)/\sigma\}^2$, $P=\{(\bar{x}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})\}^2$ とおいてみよう．先に述べたように $(n-1)s^2/\sigma^2$ と $\{(\bar{x}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})\}^2$ とは統計的に独立であるから，上の条件に当てはまる．ところで，$\sum_{i=1}^{n}\{(x_i-\mu)/\sigma\}^2$ は定理6.1により自由度 n のカイ自乗分布にしたがう．それゆえその積率母関数は $(1-2t)^{-n/2}$ である．また $(\bar{x}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ は平均0，分散1の正規分布にしたがうから，$\{(\bar{x}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})\}^2$ は自由度1のカイ自乗分布にしたがう．それゆえその積率母関数は $(1-2t)^{-1/2}$ である．

そこで(26)式によって，$Q=(n-1)s^2/\sigma^2$ の積率母関数は

$$M_{(n-1)s^2/\sigma^2}(t)=\frac{(1-2t)^{-\frac{n}{2}}}{(1-2t)^{-\frac{1}{2}}}=(1-2t)^{-\frac{n-1}{2}} \qquad t<\frac{1}{2} \tag{27}$$

である．これは自由度 $n-1$ のカイ自乗分布の積率母関数にほかならない．すなわち $(n-1)s^2/\sigma^2$ は自由度 $n-1$ のカイ自乗分布にしたがうことが分かる．

演　習　問　題

1　自由度100のカイ自乗分布において χ^2 の5%点を正規分布近似により求め，付表3による値と比較せよ．

2　平均10，分散5の正規母集団から抽出した大きさ4の無作為標本に基づく標本分散 s^2 が8より大きくなる確率は0.05より大きいか．

3　平均 μ，分散30の正規母集団からの大きさ16の無作為標本に基づく標本分散を s^2 とする．$P(a<s^2<b)=0.95$ となるような定数 a, b を求めよ．ただし $P(s^2\leq a)=0.025$ とする．

6.2　ステューデントの t 分布

6.2.1　抽　出　実　験

平均 μ，分散 σ^2 の正規分布母集団から抽出した大きさ n の標本の標本平均 $\bar{x}$ は，正確に，平均 μ，分散 σ^2/n の正規分布にしたがうことをわれわれは知っている．そして

$$z=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{1}$$

のごとく標準化すると，z は平均0，分散1の正規分布にしたがう．

ところで(1)において，σ のかわりに標本標準偏差 s を用いて

$$t=\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \tag{2}$$

のような変換を行なうと，t はどのような標本分布をもつであろうか．標本標準偏差 s は，標本から計算される統計量であるから，それ自身1つの確率変数である．それゆえに t は，2つの確率変数の比率として独特な分布をするわけである．

前節の χ^2 のときと同様に抽出実験を行なってみよう．表4.2の有限母集団から，乱数表を使って復元無作為抽出を行なう．大きさ5の標本の抽出結果が

(46, 62, 42, 42, 50)

となったとすれば

$$\bar{x}=\frac{1}{5}(46+62+42+42+50)=48.4$$

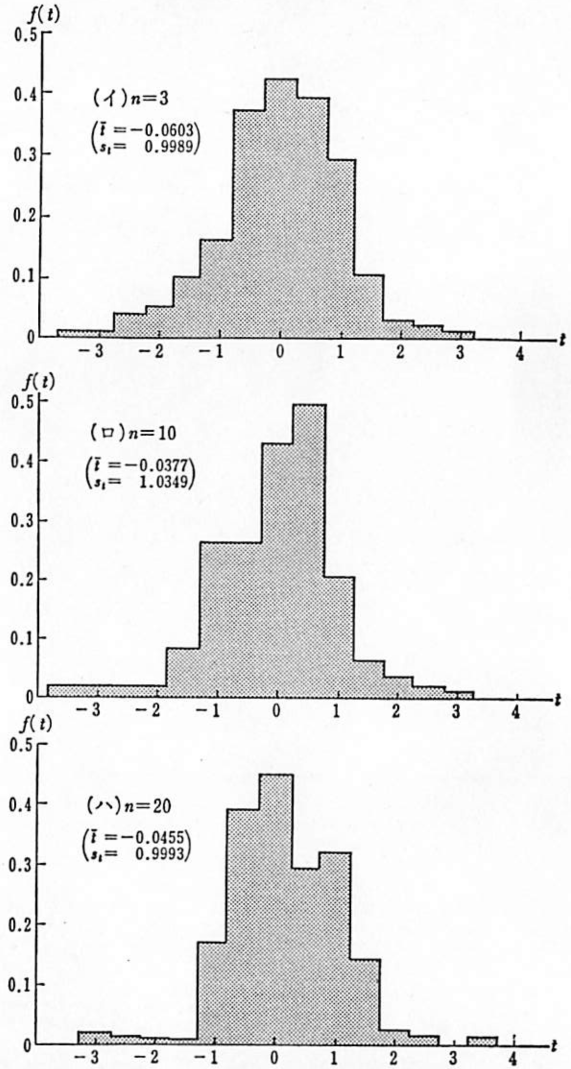
$$s^2=\frac{1}{5-1}(46^2+62^2+42^2+42^2+50^2-48.4^2\times 5)=68.8$$

$$s=\sqrt{68.8}\fallingdotseq 8.3$$

$$\therefore\quad t=\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}=\frac{48.4-50}{8.3/\sqrt{5}}=-0.431$$

となる．200個の標本を抽出し，このようにしてつくられる200個の t の値のヒストグラムをつくった結果，図6.5のようになった．図には標本の大きさ $n=3$, 10, 20の3つのケースについてのヒストグラムが描かれている．これらは χ^2 の分布と違って，むしろ正規分布に似た分布となっていることが分かる．

図 6.5　抽出実験による t の分布



(注) 1. $t=\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$, $\bar{t}$ は t の標本平均, s_t は t の標本標準偏差.

2. 各ケースとも200個の標本に基づく t のヒストグラムである.

6.2.2　t の確率分布

t は理論的には次の定理で述べる確率分布にしたがう.

〔定理 6.3〕　x を平均0, 分散1の正規分布にしたがう確率変数とし, y を自由度 m のカイ自乗分布にしたがう確率変数とする. もし両者が相互に統計的に独立ならば

$$t=\frac{x}{\sqrt{y/m}} \tag{3}$$

は**自由度 m のステューデントの t 分布** (Student's t distribution with m degrees of freedom)[2] にしたがって分布する. 自由度 m のステューデントの t 分布の密度関数は

$$f(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\sqrt{m\pi}}\left(1+\frac{t^2}{m}\right)^{-\frac{1}{2}(m+1)} \qquad -\infty<t<\infty \tag{4}$$

で与えられる.

この証明は6.2.3で行なう.

さて正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ から抽出された標本の標本平均を $\bar{x}$ とすれば, $(\bar{x}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ は正規分布 $N(0,\ 1)$ にしたがう. また $(n-1)s^2/\sigma^2$ は, 自由度 $n-1$ のカイ自乗分布にしたがい, かつ $(\bar{x}-\mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ と独立に分布することは**6.1.5**において述べた. それゆえ, 比

$$\frac{\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}}=\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$$

は自由度 $n-1$ のステューデントの t 分布にしたがうことが分かる. 図6.5の t はそれゆえこの分布にしたがうわけである.

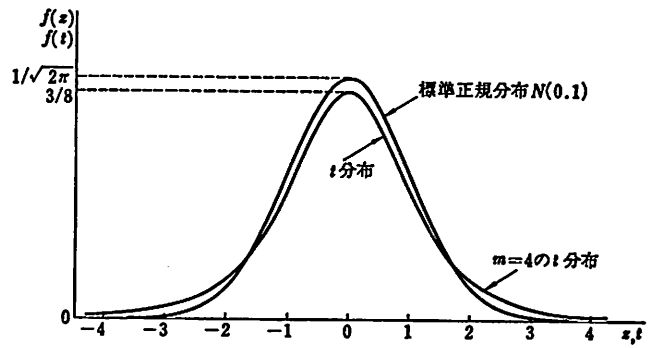
次に, (4)式で与えられている t 分布の密度関数の性質を調べてみよう. $t=0$ において最大値をとりその値は

2)　ステューデントの t 分布は, 最初1908年に W.S.Gosset の論文 "The Probable Error of a Mean," *Biometrika*, Vol. VI, pp.1-25, において発見された. Gosset はこの論文を Student というペンネームで発表したのでこの名称がついている. ステューデントを省略してたんに t 分布と呼ぶことも多い.

$$f(0)=\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\sqrt{m\pi}}$$

である．たとえば $m=1$ ならば $\Gamma[(1+1)/2]/\{\Gamma(1/2)\sqrt{\pi}\}=1/\pi\fallingdotseq 0.318$, $m=4$ ならば $\Gamma[(4+1)/2]/\{\Gamma(4/2)\sqrt{4\pi}\}=(3/4)\sqrt{\pi}/(2\sqrt{\pi})=3/8=0.375$ となる．一般に自由度mが大きいほど $f(0)$ の値は大きくなる．自由度 $m=4$ の t 分布の密度関数を標準正規分布 $N(0,1)$ の密度関数と一緒に描いたのが図 6.6 である．

図 6.6　標準正規分布と自由度4の
スチューデントの t 分布



図のように t 分布は正規分布と同様に左右対称で両すそがなだらかに広がっている．自由度が4より小さいとさらにこの広がり方は大きくなり，したがって高さは低くなる．また，逆に自由度が4より大きいと，t 分布はさらに標準正規分布に近づき，自由度が無限大の極限において，t 分布は標準正規分布 $N(0, 1)$ に一致する．

巻末の付表4は種々の自由度に対応する t 分布を次のような形で示したものである．t の絶対値が特定の値以上になる確率がαだとする．その特定の値を t_α で表わす．t_α のことを t の $\alpha\times100$%水準と呼ぶことがある．すなわち

$$P(|t|\geqq t_\alpha)=\alpha \tag{5}$$

表には種々な自由度m(表側)に応じて $\alpha=0.50, 0.40, 0.30, \cdots$(表頭)に対する t_α の値が掲げられている．

最後に，自由度mの t 分布の平均は $m>1$, 分散は $m>2$ のとき存在して

$$\left.\begin{aligned}\mu_t&=0\\ \sigma_t^2&=\frac{m}{m-2}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

である(6.2.3参照)．

6.2.3* t 分布の導出

この小節では，t 分布を理論的に導いてみよう．

yを自由度mのカイ自乗分布する確率変数，xを平均0，分散1の正規分布確率変数とし，xとyは統計的に独立とする．すなわちxとyの密度関数をそれぞれ $f_1(x)$, $f_2(y)$ とすれば

$$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\qquad -\infty<x<\infty \tag{7}$$

$$f_2(y)=\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}y}\qquad 0\leqq y<\infty \tag{8}$$

xとyは独立だから，xとyの結合密度 $f(x, y)$ は

$$f(x, y)=f_1(x)\cdot f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}y} \tag{9}$$

である．

さて問題は

$$t=\frac{x}{\sqrt{y/m}}\qquad -\infty<t<\infty \tag{10}$$

の密度を求めることである．いま

$$u=y \tag{11}$$

とおく．すると問題は(x, y)平面から(t, u)平面への変換となる．x, yをt, uによって表わせば

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{1}{\sqrt{m}}t\sqrt{u}\\ y&=u\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

となるから，変換のヤコビアンは

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial x}{\partial u}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sqrt{\dfrac{u}{m}} & \dfrac{t}{2\sqrt{mu}}\\[2mm] 0 & 1\end{vmatrix}=\sqrt{\dfrac{u}{m}} \tag{13}$$

となる．それゆえ t, u の結合密度関数 $f(t,\ u)$ は

$$g(t,\ u)=f[x(t,\ u),\ y(t,\ u)]|J|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2\frac{u}{m}}\cdot\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}u}\cdot\sqrt{\frac{u}{m}}$$

$$=\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\sqrt{m\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{t^2}{m}\right)u\right\}\left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{m-1}{2}} \tag{14}$$

となる．t の周辺密度関数を $h(t)$ で表わせば

$$h(t)=\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\sqrt{m\pi}}\int_0^\infty\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{t^2}{m}\right)u\right\}\left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{m-1}{2}}du \tag{15}$$

である．ここで $(1/2)(1+t^2/m)u=v$ とおけば，$du=2(1+t^2/m)^{-1}dv$ であるから

$$h(t)=\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\sqrt{m\pi}}2\left(1+\frac{t^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}}\int_0^\infty e^{-v}v^{\frac{m+1}{2}-1}dv$$

となる．右辺の積分は $\Gamma[(m+1)/2]$ であるから

$$h(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\sqrt{m\pi}}\left(1+\frac{t^2}{m}\right)^{-\frac{1}{2}(m+1)}$$

が導かれる．すなわち定理6.3が証明された．

最後に t 分布の平均と分散を求めてみよう．そのために，自由度 m の t 分布の原点回りの $2r$ 次の積率を見いだそう．ただし r は正の整数とする．(3)より

$$E(t^{2r})=E\left\{\left(\frac{x}{\sqrt{y/m}}\right)^{2r}\right\}=m^rE(x^{2r})E(y^{-r}) \tag{16}$$

である．定理6.3の仮定により x^2 と y は統計的に独立にそれぞれカイ自乗分布 $C(1)$, $C(m)$ にしたがう．

ところで，いま w がカイ自乗分布 $C(m)$ にしたがうとき，k を整数として

$$E(w^k)=\int_0^\infty w^k\frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}w^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}w}dw$$

$$=\frac{2^k}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\int_0^\infty u^{\frac{m}{2}+k-1}e^{-u}du$$

$$=2^k\Gamma\left(\frac{m}{2}+k\right)\Big/\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \tag{17}$$

が成立する．これを用いれば(16)は

$$E(t^{2r})=m^r\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+r\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}-r\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \tag{18}$$

となる．ガンマ関数 $\Gamma(a)$ は $a>0$ のときだけ存在するから，(18)は $m>2r$ のときだけ存在する．

これより $E(t^2)$，したがって分散は $m>2$ のときだけ存在する(3.4.1の注3)参照)．$m>2$ のときには(18)より

$$E(t^2)=m\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}=\frac{m}{m-2} \tag{19}$$

である．一方，t の平均 $E(t)$ は $m>1$ のときだけ存在することがいえるが，[3] 分布の対称性より

$$E(t)=\mu_t=0$$

である．したがって(19)より t の分散は

$$E(t^2)-\{E(t)\}^2=\sigma_t{}^2=\frac{m}{m-2}$$

である．

なお，$m=1$ の t 分布の密度関数は(4)より

$$f(t)=\frac{1}{\pi(1+t^2)}\qquad-\infty<t<\infty \tag{20}$$

であり，これは(5.2.31)のコーシー分布の密度関数にほかならない．したがっ

3) 鈴木雪夫『経済分析と確率・統計』東洋経済新報社，1975年，86～87ページを参照せよ．

てコーシー分布が平均と分散をもたないこともいえたわけである.

演 習 問 題

1　平均10の正規母集団より抽出した大きさ9の無作為標本に基づく標本平均を $\bar{x}$, 標本標準偏差を s として, $\bar{x}-10$ が s より大きくなる確率は0.05より大きいか.

2　正規母集団から抽出した無作為標本について(2)式の t をつくるとき, $|t|>2.1$ となる確率が0.05以下になるような標本の大きさはいくらか.

6.3　スネデカーのF分布

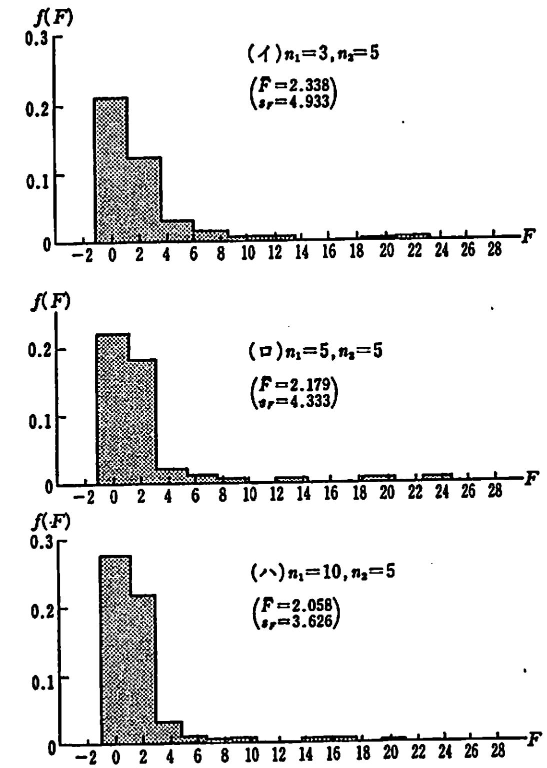
6.3.1　抽 出 実 験

次の表は, 平均30, 標準偏差10の正規分布に近いヒストグラムをもつ有限

表 6.1　有限母集団D (N (30, 10^2))

個体番号	数値	個体番号	数値	個体番号	数値	個体番号	数値	個体番号	数値
1	4	21	22	41	28	61	33	81	39
2	8	22	22	42	28	62	33	82	39
3	10	23	22	43	28	63	33	83	39
4	12	24	23	44	28	64	33	84	40
5	13	25	23	45	29	65	34	85	40
6	14	26	23	46	29	66	34	86	41
7	15	27	24	47	29	67	34	87	41
8	16	28	24	48	29	68	34	88	42
9	16	29	24	49	30	69	35	89	42
10	17	30	25	50	30	70	35	90	43
11	17	31	25	51	30	71	35	91	43
12	18	32	25	52	30	72	36	92	44
13	18	33	26	53	31	73	36	93	44
14	19	34	26	54	31	74	36	94	45
15	19	35	26	55	31	75	37	95	46
16	20	36	26	56	31	76	37	96	47
17	20	37	27	57	32	77	37	97	48
18	21	38	27	58	32	78	38	98	50
19	21	39	27	59	32	79	38	99	52
20	21	40	27	60	32	80	38	100	56

図 6.7　抽出実験による分散比Fの分布

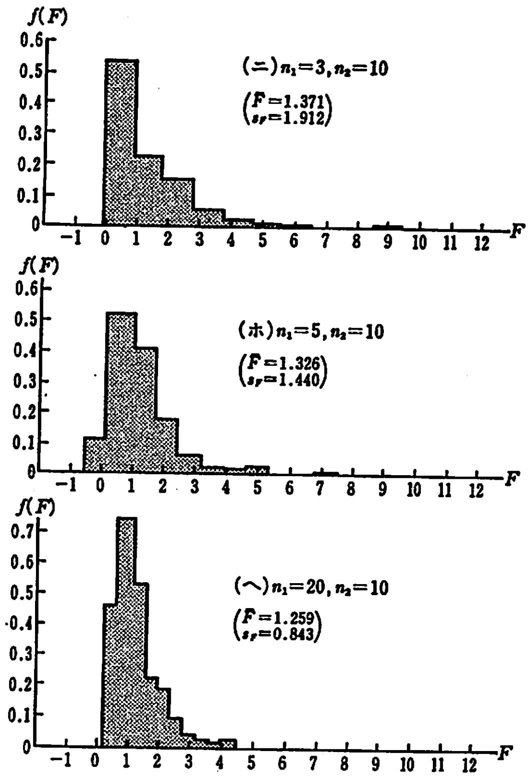


母集団である. これは表4.2の母集団を構成する各数値から, 一様に20を差し引いてつくったものである. それゆえ, 両者は平均は異なるが標準偏差は同一である.

表4.2の有限母集団をA, 表6.1をDと呼ぶことにしよう. いま次のような実験をする. 母集団Aから大きさ n_1 の標本を(復元)抽出し, その標本分散 s_1^2 をつくる. 次に母集団Dから大きさ n_2 の標本を(復元)抽出し, 標本分散 s_2^2 をつくる. そしてそれら2つの分散の比をつくりそれをFと呼ぶ. すなわち

$$F=\frac{s_1^2}{s_2^2} \tag{1}$$

図 6.7　(つづき)



(注)　1.　F は $s_1{}^2/s_2{}^2$，n_1 は $s_1{}^2$ の標本の大きさ，n_2 は $s_2{}^2$ の標本の大きさ，$\bar{F}$ は F の標本平均，s_F は F の標本標準偏差．
2.　各ヒストグラムは200個の標本に基づく．

F はどのような分布をするであろうか．

図6.7は n_1 と n_2 の組合せを，その順序で(3, 5)，(5, 5)，(10, 5)，(3, 10)，(5, 10)，(20, 10)としたときの，それぞれ200個の標本に基づく F の経験的な分布を描いたものである．これらの分布を見ると，いずれも0から1の間あたりの F の値を最頻値として，右にすそが長い形をしていることが分かる．また分母の分散 $s_2{}^2$ の標本の大きさ n_2 が大きいほうが，F のばらつきは小さくなっている．

6.3.2　F の確率分布

比 $s_1{}^2/s_2{}^2$ の標本分布は，次の定理に述べられている F 分布で説明される．

〔定理 6.4〕　$\chi_1{}^2$, $\chi_2{}^2$ をそれぞれ自由度 m_1, m_2 のカイ自乗分布にしたがい統計的に独立な確率変数とすると，比

$$F=\frac{\chi_1{}^2/m_1}{\chi_2{}^2/m_2} \tag{2}$$

は自由度 m_1, m_2 のスネデカーの F 分布(Snedecor's F distribution with m_1, m_2 degrees of freedom)[4] にしたがう．その密度関数は

$$f(F)=\frac{\Gamma\left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{m_1}{2}}\left(\frac{m_1}{m_2}F+1\right)^{-\frac{m_1+m_2}{2}}F^{\frac{m_1}{2}-1}$$

$$0\leqq F<\infty \tag{3}$$

である．

この定理の証明は6.3.3で行なう．

さて，6.3.1で実験した，等しい分散をもつ2つの母集団から抽出した2つの標本分散の比 $s_1{}^2/s_2{}^2$ は自由度 n_1-1, n_2-1 の F 分布にしたがう．その理由は次のごとくである．$s_1{}^2$ を正規分布 $N(\mu_1, \sigma^2)$ からの大きさ n_1 の標本の標本分散とすれば，6.1.4で述べたように $(n_1-1)s_1{}^2/\sigma^2$ は，自由度 $n-1$ のカイ自乗分布にしたがう．同様に $N(\mu_2, \sigma^2)$ からの大きさ n_2 の標本の標本分散を $s_2{}^2$ とすれば，$(n_2-1)s_2{}^2/\sigma^2$ は自由度 n_2-1 のカイ自乗分布にしたがう．標本のとり方から，$s_1{}^2$ と $s_2{}^2$ とは統計的に独立である．それゆえ定理6.4によって

$$\frac{\dfrac{(n_1-1)s_1{}^2}{\sigma^2(n_1-1)}}{\dfrac{(n_2-1)s_2{}^2}{\sigma^2(n_2-1)}}=\frac{s_1{}^2}{s_2{}^2} \tag{4}$$

は自由度 n_1-1, n_2-1 のスネデカーの F 分布にしたがう．

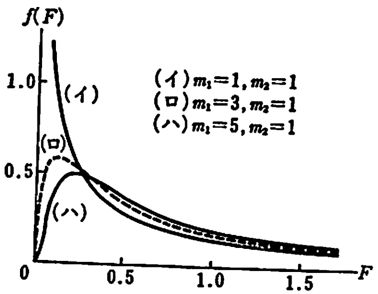
---

4)　F 分布は最初1924年に R. A. Fisher によって

$$z=\frac{1}{2}\log_e F$$

の分布という形で発表された．後に(1937年) G. W. Snedecor が F 分布そのものの数表を発表した．彼は Fisher の功績をたたえてこの分布を F 分布と名づけた．

図 6.8　F　分　布



F分布の密度関数の形を図 6.8 に示した．この図のようにF分布は一般に右すそが広がった形をしている．

F分布の数表は巻末の付表 5 に示されている．この表では，F分布の右すその面積が 1% および 5% となるFの臨界値(これらをFの 1% 点および 5% 点と呼ぶ)が，種々な自由度の組合せに対して示してある(5% 点は細字，1% 点は太字)．

たとえば自由度 $m_1=5$, $m_2=10$ のFの 5% 点(これを $F_{0.05}(5, 10)$ と書くことがある)は 3.33 であることが表から読みとれる．

最後にFの平均と分散について述べれば，それらは

$$\mu_F=\frac{m_2}{m_2-2} \qquad m_2>2 \tag{5}$$

$$\sigma_F{}^2=\frac{2m_2{}^2(m_1+m_2-2)}{m_1(m_2-2)^2(m_2-4)} \qquad m_2>4 \tag{6}$$

である(6.3.3 参照)．たとえば図 6.7 の $n_1=3$, $n_2=5$ のFは自由度 $m_1=n_1-1=2$, $m_2=n_2-1=4$ のF分布にしたがうから，その平均は $4/(4-2)=2$ であり，分散は $m_2=4$ だから存在しない．

6.3.3* F分布の導出

ここで定理 6.4 の証明を行なう．

x, y を相互に独立にそれぞれ自由度 m_1, m_2 のカイ自乗分布する確率変数とする．そのとき x, y の結合密度関数を $f(x, y)$ とすれば，x, y は統計的に独立であるから 2 つのカイ自乗分布密度の積になり，整理すれば

$$f(x, y)=\frac{1}{4\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m_1}{2}+\frac{m_2}{2}-2}x^{\frac{m_1}{2}-1}y^{\frac{m_2}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}(x+y)} \tag{7}$$

となる．問題は $F=(x/m_1)/(y/m_2)$ の密度を求めることである．次のように変数変換する．

$$\left.\begin{aligned} F&=\frac{x/m_1}{y/m_2} \\ u&=y \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

これを x, y について解けば

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{m_1}{m_2}Fu \\ y&=u \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

である．そこで変換のヤコビアンは

$$J=\begin{vmatrix} \frac{m_1}{m_2}u & \frac{m_1}{m_2}F \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{m_1}{m_2}u \tag{10}$$

それゆえ，F, u の結合密度を $g(F, u)$ で表わせば

$$g(F, u)=\frac{1}{4\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m_1+m_2}{2}-2}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{m_1}{2}}F^{\frac{m_1}{2}-1}u^{\frac{m_1+m_2}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}u\left(\frac{m_1}{m_2}F+1\right)} \tag{11}$$

となる．Fの周辺密度を $h(F)$ で表わせば

$$h(F)=\int_0^\infty g(F, u)du$$

$$=\frac{1}{4\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m_1+m_2}{2}-2}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{m_1}{2}}F^{\frac{m_1}{2}-1}\int_0^\infty u^{\frac{m_1+m_2}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}u\left(\frac{m_1}{m_2}F+1\right)}du$$

ここで $z=(1/2)\{(m_1/m_2)F+1\}u$ とおけば上の積分の値は

$$\int_0^\infty u^{\frac{m_1+m_2}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}u\left(\frac{m_1}{m_2}F+1\right)}du$$

$$=2^{\frac{m_1+m_2}{2}}\left(\frac{m_1}{m_2}F+1\right)^{-\frac{m_1+m_2}{2}}\int_0^\infty z^{\frac{m_1+m_2}{2}-1}e^{-z}dz$$

$$=2^{\frac{m_1+m_2}{2}}\left(\frac{m_1}{m_2}F+1\right)^{-\frac{m_1+m_2}{2}}\Gamma\left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)$$

それゆえ

$$h(F)=\frac{\Gamma\left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)}\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{m_1}{2}}\left(\frac{m_1}{m_2}F+1\right)^{-\frac{m_1+m_2}{2}}F^{\frac{m_1}{2}-1}$$

が得られる(証明終り).

自由度 m_1, m_2 の F 分布の原点回りの k 次の積率は, (8)より

$$E(F^k)=E\left\{\left(\frac{x/m_1}{y/m_2}\right)^k\right\}=\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^k E(x^k)E(y^{-k}) \tag{12}$$

となる. x と y は定理6.4の仮定により, 統計的に独立にそれぞれカイ自乗分布 $C(m_1)$, $C(m_2)$ にしたがうから, 前節の(6.2.17)の関係を用いると

$$E(F^k)=\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^k\frac{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}+k\right)\Gamma\left(\frac{m_2}{2}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)} \tag{13}$$

となる. したがって $E(F^k)$ は $m_2>2k$ のときだけ存在する. (13)から(5), (6)の平均と分散を導くことは読者に任せよう.

演 習 問 題

1　s_1^2, s_2^2 をそれぞれ, $N(8, 5^2)$, $N(0, 5^2)$ なる母集団から無作為抽出した大きさ10, 20の標本に基づく標本分散とする. このとき比 s_1^2/s_2^2 が2より大きくなる確率は0.05より大きいか.

2　x が自由度 m の t 分布にしたがうとき, x^2 は自由度1, m の F 分布にしたがうことを示せ.

第7章

母数の推定 I

7.1 母平均の推定

真空管を製造しているある工場で, 生産した真空管の寿命について調査することになったとしよう. 1種類の真空管だけが調査対象で, その工場では毎日何千個かのその種類の真空管が造られている. それらの真空管の1つ1つは特定の長さの寿命をもっていると考えられるから, それら個々の真空管の寿命の集まりは1つの無限母集団を構成していると考えてよいであろう.

造った真空管全部についてその寿命(こわれるまでの耐久時間)を測定すれば, 母集団の特性(平均や標準偏差)は正確に分かるのはもちろんであるが, それでは商売にならない. どうしても幾本かの真空管を抽出して, それらの寿命を測定することによって, 母集団の特性を推測せざるをえないであろう.

統計学では, 標本の特性を調べてそこから, 標本が生み出されてきた母集団の特性を推定するという問題が多く出てくる. このような問題を推定(estimation)の問題という.

さていま上の例で, 大きさ100の標本, すなわち100本の真空管を無作為に抽出してその寿命を調べたとしよう. その結果, 寿命の標本平均が2516時間となったとしよう. このとき, われわれはこの工場で生産される真空管の寿命は平均2516時間だといってよいであろうか. 全体の平均はおそらく2516時間に等しくはないであろう. しかしわれわれとしては母集団の平均の値を知らないのであるから, 母集団の平均値の1つの推定値として2516時間という値を採

用することは自然である．ただその場合われわれは，2516時間というのはあくまでも推定値なのであって，母集団の真の平均値はこの推定値とは異なるかもしれないことを十分承知のうえでこの推定値を採用しているわけである．

母集団(または確率分布)の性質を代表して表わす定数のことを**母数**(parameter)と呼ぶ．そこでこのように推定したい母数(いまの場合母平均)の値について，推定値としてただ1つの値を指定する推定の仕方を**点推定**(point estimation)という．これに対し，推定値の回りに一定の幅を設けて，その区間の中に母数がはいっているというい方をする場合を**区間推定**(interval estimation)という．たとえば，真空管の寿命の母平均は2486時間から2546時間の間にある，と推定するわけである．

まず点推定から考えてみよう．先の例で，真空管の寿命の母集団の平均μは2500時間，標準偏差σは150時間であるとしよう．このような母集団から無作為抽出した大きさ100の標本について，標本平均$\bar{x}$をつくれば，その平均$\mu_{\bar{x}}$は母平均μすなわち2500時間に等しく，その標準偏差$\sigma_{\bar{x}}$は$\sigma/\sqrt{n}$すなわち$150/\sqrt{100}=15$に等しい．また中心極限定理(定理4.3)により，標本平均はnが大なるとき漸近的に正規分布$N(\mu, \sigma^2/n)$にしたがう．すなわちこの場合標本平均$\bar{x}$は近似的に正規分布$N(2500, 15^2)$にしたがう．

いま，母標準偏差σの値は150時間であることが知られているが，母平均μの値が分からないという状態を考えてみよう．

μの推定値を$\hat{\mu}$で表わし，$\hat{\mu}-\mu$を推定の誤差と呼びuで表わそう．そこで特定の$\bar{x}$をμの推定値とした場合

$$u=\bar{x}-\mu$$

である．推定の誤差の絶対値$|u|$がある値hよりも確率95%で小さくなるとき，その値hを確率95%の**誤差の限界**と呼ぶ．この例でのhを求めてみよう．$\bar{x}$が近似的に正規分布$N(\mu, 15^2)$にしたがうことから

$$P\left(\frac{|\bar{x}-\mu|}{15}<1.96\right)=0.95 \qquad (1)$$

である．ここに1.96は標準正規変数の5%水準$z_{0.05}$である．それゆえ

$$P(|u|<1.96\times15)=0.95 \qquad (2)$$

であるから$h=(1.96)\cdot(15)=29.4$である．それゆえ，μの推定値として，大きさ100の標本の標本平均として得られた具体的な数値2516時間を採用する場合，その誤差が29.4時間以下になる確率は0.95であるといえる．このように推定値の誤差の範囲が特定の確率をもっていえるのである．もちろんこの場合，確率を0.99にとっても，同様に誤差の限界をつくることができる．

逆に，確率95%の誤差の限界を20時間とするにはどれだけの大きさの標本によってμを推定すべきかという問題も解くことができる．

$$P\left(|\bar{x}-\mu|<1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95 \qquad (3)$$

であるから$h=20=1.96\sigma/\sqrt{n}=1.96\cdot150/\sqrt{n}$でなければならない．それゆえ

$$n=\left(1.96\cdot\frac{150}{20}\right)^2=216.09$$

となる．したがって217以上の大きさの標本を必要とすることが分かる．

次に，区間推定の問題を考えてみよう．

(3)を書き直せば

$$P\left(\mu-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\bar{x}<\mu+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95 \qquad (4)$$

である．括弧の中の不等式は

$$\mu-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\bar{x}<\mu+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (5)$$

であるが，この各辺から$\bar{x}+\mu$を引き，符号を変えれば

$$\bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}>\mu>\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (6)$$

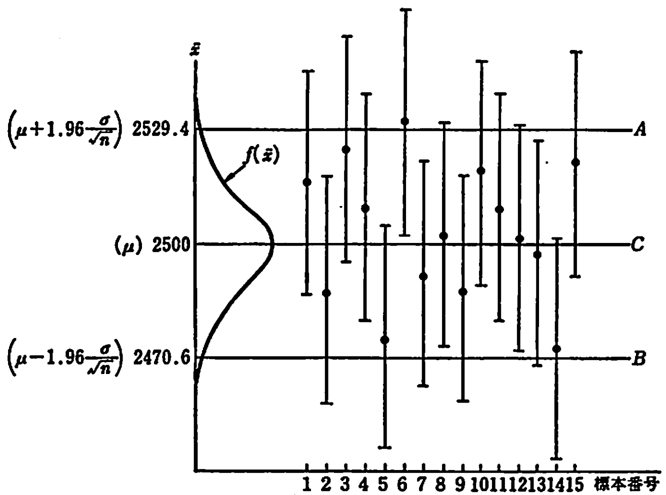
となるから，(4)は

$$P\left(\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95 \qquad (7)$$

のごとく書き直せる．これは区間$(\bar{x}-1.96\sigma/\sqrt{n},\ \bar{x}+1.96\sigma/\sqrt{n})$の中に母平均$\mu$が95%の確率で含まれるということを表わしている．(7)はたんに(4)式を書き換えたものにすぎない．したがって(7)における$\bar{x}$は具体的な特定の数値ではなくて，あくまでも確率変数である．したがって区間の両端$\bar{x}\pm1.96\sigma/\sqrt{n}$もまた確率変数である．このような確率的に変動する区間$(\bar{x}-1.96\sigma/\sqrt{n},\ \bar{x}+1.96\sigma/\sqrt{n})$が，一定値である$\mu$を含む確率が95%なのである．

そこで標本平均$\bar{x}$がある値に観測されたとき$(\bar{x}-1.96\sigma/\sqrt{n},\ \bar{x}+1.96\sigma/\sqrt{n})$なる区間を設定してやれば，そのように設定した区間は95%の確率で

図 7.1　信頼区間の分布



μを含むことになる．図 7.1 は標本平均$\bar{x}$を縦軸にとり，標本ごとに計算される標本平均(図の黒丸)とその回りに設定される$(\bar{x}-1.96\sigma/\sqrt{n},\ \bar{x}+1.96\sigma/\sqrt{n})$なる区間の分布の典型的な様子を描いたものである．そして，先の真空管の例が$\bar{x}$軸の目盛りとして書き込まれている．大部分の黒丸は直線AとBとの間にはいるので，それに付随する区間は直線Cと交差する(つまり区間がμを含んでいる)．しかし第 6 番目の標本だけは例外的に標本平均を示す黒丸の位置が直線Aより上方にある．したがって付随する区間はCと交差しないからその区間はμを含まない．この標本 6 のようにAとBの間に$\bar{x}$がはいらない確率は 5 %すなわち 20 回に 1 回の割合である．これに対し，全体の 95% の標本はその区間内にμを含むことが期待される．

そこである 1 つの標本に基づいて標本平均$\bar{x}$が得られたとき，その特定の$\bar{x}$について

$$\left(\bar{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

なる区間を設け，これをμに対する(またはμの) 95% **信頼区間**(confidence interval)と呼び，**信頼係数**(confidence coefficient) 95% でこの区間はμを含む

という．真空管の例では$\bar{x}=2516$が得られたのだから$(2516-1.96\cdot 150/\sqrt{100},\ 2516+1.96\cdot 150/\sqrt{100})$すなわち(2486.6, 2545.4)の区間(図 7.1 の標本 1 の区間)は，この場合のμの 95% 信頼区間である．すでに標本が得られてしまったあとでは，そこに設定された信頼区間はたとえば(2486.6, 2545.4)というような固定した区間であり，これが平均μ(これもやはりある固定した値)を含んでいる確率は 95% であるといういい方は妥当でない．しかし同一の条件で同じ大きさの標本を何回も抽出したとすれば，その標本の中の 95% において，そこに設定される 95% 信頼区間はμを含むであろう．信頼係数という言葉はこのような意味において使われているのである．信頼区間の下端上端の値を**下方および上方信頼限界**(confidence limits)と呼ぶ．

有限母集団からの(非復元抽出による)無作為標本に基づく，μの区間推定も同様な考え方によりできる．

たとえば表 4.2 の有限母集団Aから非復元抽出された大きさ 40 の無作為標本の標本平均が 46 であるとき，$\sigma=10$を既知として，μの 95% 信頼区間を求める．まず$\bar{x}$の平均，標準偏差はそれぞれμ，$\sqrt{(N-n)/(N-1)}\cdot\sigma/\sqrt{n}$である(4.2.2 参照)．$\bar{x}$の分布は正規分布で近似することができる(4.4.3 参照)から

$$P\left(\bar{x}-1.96\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+1.96\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95$$

が成立する．すなわち信頼係数 95% の両信頼限界は$\bar{x}\pm 1.96\sqrt{(N-n)/(N-1)}\ \sigma/\sqrt{n}$により与えられる．かくして上の例では

$$46-1.96\sqrt{\frac{60}{99}}\frac{10}{\sqrt{40}}=43.59$$

$$46+1.96\sqrt{\frac{60}{99}}\frac{10}{\sqrt{40}}=48.41$$

がμに関する 95% の両信頼限界である．

演 習 問 題

1　ある 1 本のレールの長さをある一定温度の下で測定すると，測定の度に測定誤差が原因して，測定値が一定でない．その標準偏差が 0.5cm だということが過去の経験から知られている．いま 10 回測定したところ次のような測定値(単位 cm)を得た．

1051.2	1050.3	1052.2	1052.8	1053.6
1050.6	1051.7	1051.4	1052.4	1052.8

これよりレールの真の長さに対する95%信頼限界を求めよ.

2　経験によれば男子大学生の身長の標準偏差は6cmであるという. いま25人の男子大学生を無作為に抽出するとき, その標本平均を男子大学生全体の身長平均値の推定値として用いるとすると, 確率95%の誤差の限界はどの程度か.

3　前問で, 確率95%の誤差の限界を0.3cmにするには標本の大きさをいくらにすればよいか.

4　ある会社の全女子職員500人の通勤時間の, 母標準偏差は10分である. いま(重複なしで)100人を無作為に抽出し調査したところ, 標本平均48分であった. 母平均の95%信頼区間を設定せよ.

7.2　2項母集団の p の推定

7.2.1　割合 p' の分布と p の推定

製造業に属する法人企業400社を無作為に抽出し, その中で年間売上高が5000万円以上の企業の数を調べたところ, 180社であったとする. このとき日本全国の製造業法人企業の中で, 売上高が5000万円以上の企業の割合 p を推定したい. 日本全国の企業の数は非常に多いから, 400社を抽出することは無限母集団からの抽出と見なしてよいであろう. 標本における売上げ5000万円以上の企業の割合を p' とすれば $p'=180/400=0.45$ である. 母集団の p の推定値 $\hat{p}$ として, この標本における割合 $p'=0.45$ を用いるとどの程度の誤差が生じるだろうか. また, p の信頼区間はどのように設定されるだろうか.

(4.3.8)式によれば割合 p' の平均, 分散は

$$\mu_{p'}=p \tag{1}$$

$$\sigma_{p'}^2=\frac{pq}{n} \tag{2}$$

であった. それゆえ日本全国の製造業法人企業で売上高が5000万円以上の企業の割合 p が実は0.4であるとすれば, そこから無作為に抽出した400企業の中で5000万円以上の売上げをもつ企業の割合 p' は, 平均 $\mu_{p'}$ が0.4, 標準偏差 $\sigma_{p'}=\sqrt{pq/n}=\sqrt{0.4\times0.6/400}\fallingdotseq0.0245$ の分布をするであろう.

しかも, 中心極限定理(定理4.3)により, この p' の分布は n がかなり大なる限り, 正規分布で近似できる. それゆえ, n が大ならば

$$P\left(p-1.96\sqrt{\frac{pq}{n}}<p'<p+1.96\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)=0.95 \tag{3}$$

が成立する. したがって

$$P\left(|p'-p|<1.96\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)=0.95 \tag{4}$$

であるから, $\hat{p}=p'$ としたときの確率95%の誤差の限界は $1.96\sqrt{pq/n}$ となり, 未知母数 p に依存する. それゆえこの場合には推定値 $\hat{p}$ の誤差の限界は求められない.

しかし, p の信頼区間は次のように設定できる.

(4)の括弧の中味を, 次のように変形する. ただし, $z_\alpha=1.96$ とおく.

$$(p'-p)^2<\frac{z_\alpha^2 p(1-p)}{n}$$

$$n(p'^2-2p'p+p^2)<z_\alpha^2 p-z_\alpha^2 p^2$$

それゆえ

$$(n+z_\alpha^2)p^2-(2np'+z_\alpha^2)p+np'^2<0 \tag{5}$$

この(5)の不等号を等号においたときの2次方程式の2根は

$$\left.\begin{aligned} p_1&=\frac{2np'+z_\alpha^2-z_\alpha\sqrt{4np'(1-p')+z_\alpha^2}}{2(n+z_\alpha^2)} \\ p_2&=\frac{2np'+z_\alpha^2+z_\alpha\sqrt{4np'(1-p')+z_\alpha^2}}{2(n+z_\alpha^2)} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

である. (5)の左辺は下方に凸の p に関する2次関数だから, (3)は

$$P(p_1<p<p_2)=0.95 \tag{7}$$

と書き直せる. 真の p は標本ごとに変動する区間 (p_1, p_2) の中に95%の確率で存在する. すなわち (p_1, p_2) は p に対する95%信頼区間である.

先の例で95%信頼区間を求めてみよう. $p'=0.45$, $n=400$ であるから

$$p_1, p_2=\frac{2\cdot400\cdot0.45+1.96^2\pm1.96\sqrt{4\cdot400\cdot0.45(1-0.45)+1.96^2}}{2\cdot(400+1.96^2)}$$

$$\fallingdotseq0.401, 0.500$$

すなわち, 全国製造業の企業の中でも売上げ5000万円以上の企業の占める割合 p は, 0.401と0.500の間にあることが95%の信頼係数をもっていえる.

7.2.2　簡便法による p の区間推定

上に述べた(6)式により p の両信頼限界を求める方法は計算がやっかいであ

る．n が大きいときには実用上下記のようにしてもそれほど誤差は生じない．これを簡便法と呼ぶことにしよう．

(3)を7.1で述べたやり方で書き直せば

$$P\left(p'-1.96\sqrt{\frac{pq}{n}}<p<p'+1.96\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)=0.95 \qquad (8)$$

となる．すなわち区間 $(p'-1.96\sqrt{pq/n},\ p'+1.96\sqrt{pq/n})$ は，母集団の割合 p に対する 95% 信頼区間である．

ところで p の値はこれから推定しようとしているのだから，$\sqrt{pq/n}$ の値は計算できないのであるが簡便法として，p の推定値として p' を用い

$$\left(p'-1.96\sqrt{\frac{p'q'}{n}},\ p'+1.96\sqrt{\frac{p'q'}{n}}\right)$$

を p に対する 95% 信頼区間とする．

上述の例で，売上高 5000 万円以上の企業の割合 p の区間推定を行なってみよう．$p'=0.45$, $n=400$ であるから

$$p'\pm1.96\sqrt{\frac{p'q'}{n}}=0.45\pm1.96\sqrt{\frac{0.45\times0.55}{400}}$$
$$=0.45\pm0.049$$
$$=0.401,\ 0.499$$

すなわち p に対する 95% 信頼区間は (0.401, 0.499) である．

(6)式を用いての計算結果は (0.401, 0.500) であったから，この例の場合簡便法でもほとんど差はないといえる．

演習問題

1　ある日あるテレビ番組の視聴率を無作為に選んだ 400 世帯について調査したところ，20% という結果を得た．真の視聴率に関する 95% 信頼限界を設定せよ．7.2.1 と 7.2.2 の 2 つの方法で計算せよ．

2　ある都市で 2000 人の有権者を無作為に抽出し，ある政策についての意見を尋ねたところ，1500 人が賛成であった．その都市での賛成者の比率の 95% 信頼区間を簡便法により求めよ．

7.3　母分散が未知のときの母平均の推定

7.3.1　大標本の場合

7.1では，母分散 σ^2 が既知であると仮定していた．しかし実際の問題では母集団の分散が分かっていることはあまりない．このような場合には母分散 σ^2 のかわりに，標本分散 s^2 を用いてよいだろうか．

標本の大きさ n が大きいときには，σ^2 のかわりに s^2 を用いてもそれほど誤差は生じない．[1] すなわち7.1の(7)式の σ に s をおき換えた式

$$P\left(\bar{x}-1.96\frac{s}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+1.96\frac{s}{\sqrt{n}}\right)=0.95 \qquad (1)$$

が大体成立する．(1)が成り立つものとして設定された信頼区間を**大標本法による信頼区間**と呼ぶことにする．

例題 7.3.1　東京株式市場上場会社の第1部，第2部合計約 1400 社の中から，50 社を復元抽出し，利回りの標本平均と標本標準偏差を計算したところ，標本平均は4分2厘，標本標準偏差は2分であった．上場会社全体の利回りの平均 μ を信頼係数 95% で区間推定してみる．

この場合標本の大きさ n は 50 とかなり大きいから，大標本法を適用してよいであろう．それゆえ，μ の 95% 信頼限界は

$$\bar{x}\pm1.96\frac{s}{\sqrt{n}}=4.2\pm1.96\frac{2.0}{\sqrt{50}}$$
$$=4.2\pm0.56=3.64\quad および\quad 4.76$$

したがって母平均は3分6厘と4分8厘の間にあると 95% の信頼係数で主張しうる．

7.3.2　小標本の場合

標本の大きさ n が小さくなる(普通は n が 25 未満程度)と，母分散 σ^2 のかわ

1)　s は σ に確率収束する(7.5参照)ので，$n\to\infty$ のとき

$$\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\cdot\frac{\sigma}{s}$$

は $N(0,1)$ に分布収束する．拙著『計量経済学』有斐閣，1982年，352ページの定理参照．

りに標本分散を用いることによる誤差は無視できない．この場合にはもはや

$$t=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \tag{2}$$

の分布は正規分布 $N(0, 1)$ で近似しえないのである．上式の t の理論的な分布は一般には分からない．

ところが，幸いなことに，6.2で述べたように，母集団の x が正規分布をしているときに限り，(2)式の t は自由度 $n-1$ のステューデントの t 分布にしたがう．すなわち自由度 $n-1$ の t の5%水準を $t_{0.05}$ と書くと

$$P(-t_{0.05}<t<t_{0.05})=0.95 \tag{3}$$

である．(2)を用いて t を書き換えれば

$$P\left(-t_{0.05}<\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}<t_{0.05}\right)=0.95 \tag{4}$$

(4)を書き直せば

$$P\left(\mu-t_{0.05}\frac{s}{\sqrt{n}}<\bar{x}<\mu+t_{0.05}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)=0.95 \tag{5}$$

さらに，これを μ をはさむ形に書き換えれば

$$P\left(\bar{x}-t_{0.05}\frac{s}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+t_{0.05}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)=0.95 \tag{6}$$

となる．

この関係を利用すれば，母平均 μ に対する95%信頼限界は $\bar{x}\pm t_{0.05}s/\sqrt{n}$ により与えられることになる．ただ，この場合母集団が正規分布であることが前提になっていることを忘れてはならない．

例題 7.3.2　資本金1億円以上の企業について各々の使用総資本利益率を計算し度数分布をつくるとほぼ正規分布に近い分布になることが知られているとしよう．いまそれらの企業から無作為に5社を選び使用総資本利益率を調べたところ2.1, 3.5, −1.8, 7.3, 4.0%であった．全体の使用総資本利益率の平均に対する95%の信頼区間を設定せよ．

$$\bar{x}=\frac{1}{5}\{2.1+3.5+(-1.8)+7.3+4.0\}=3.02$$

$$s^2=\frac{1}{5-1}\{2.1^2+3.5^2+(-1.8)^2+7.3^2+4.0^2-3.02^2\times 5\}=10.88$$

$$s=\sqrt{10.88}\fallingdotseq 3.3$$

一方，自由度 $5-1=4$ に対する $t_{0.05}$ の値は，付表4によれば2.78である．そこで μ に対する95%信頼限界は

$$\bar{x}\pm t_{0.05}\frac{s}{\sqrt{n}}=3.02\pm 2.78\frac{3.3}{\sqrt{5}}=3.02\pm 4.10$$
$$=-1.08 \quad および \quad 7.12$$

すなわち，母平均は−1.08%と7.12%の間にあることが95%の信頼係数で主張できる．

なお，当然のことながら μ の点推定において推定値を $\hat{\mu}=\bar{x}$ とするときには，$\hat{\mu}$ の確率95%の誤差の限界は，大標本法では $1.96s/\sqrt{n}$，小標本法では $t_{0.05}s/\sqrt{n}$ により与えられる．

演習問題

1　本章第1節演習問題1で母標準偏差が未知であると仮定して，母平均に関する95%信頼区間を求めよ．

2　1学年1000人の学生の中から無作為に25人の学生を復元抽出し，統計学のテストをしたところ，平均40(点)，標本分散100(点)を得た．次の方法にしたがって母平均 μ の99%信頼区間を求めよ．

(a)　ステューデントの t 分布による方法．

(b)　大標本法．

7.4　母分散の推定

次に母集団の分散 σ^2 の推定の問題を考えてみよう．

有限な分散 σ^2 をもつ母集団からの大きさ n の無作為標本に基づく標本分散を s^2 としよう．統計量 s^2 の平均はどのようになるだろうか．

$$\mu_{s^2}=E(s^2)=E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]$$
$$=\frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right)=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E(x_i^2)-nE(\bar{x}^2)\right]$$

であるが，(3.4.11)の関係から　p.45

$$E(x_i^2)=\sigma^2+\mu^2,\quad E(\bar{x}^2)=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2$$

であるから

$$\mu_{s^2}=\frac{1}{n-1}\left[n(\sigma^2+\mu^2)-n\left(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2\right)\right]=\sigma^2 \qquad (1)$$

が成立する．すなわち標本分散 s^2 の平均は母分散 σ^2 に等しい．

このことを根拠の1つにして,[2] 通常 σ^2 の推定値 $\hat{\sigma}^2$ として s^2 を用いる．

その場合，推定の誤差はどのようになるだろうか．それを知るためには標本分散 s^2 の標本分布が問題となる．

6.1.4 で述べたように，平均 μ，分散 σ^2 の正規分布母集団から抽出した無作為標本の場合には，

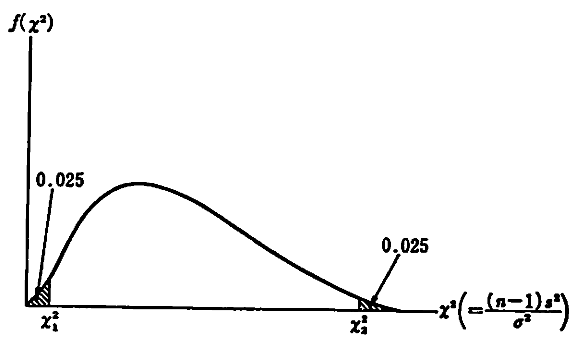
$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \qquad (2)$$

は自由度 $n-1$ のカイ自乗分布にしたがう．いま χ_1^2，χ_2^2 をそれぞれカイ自乗の 97.5% 点，2.5% 点とすると，次が成立する．

$$\left.\begin{array}{l} P(\chi^2\leqq\chi_1^2)=0.025 \\ P(\chi_2^2\leqq\chi^2)=0.025 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

図 7.2 を見られたい．

図 7.2　カイ自乗の 97.5% 点 χ_1^2 と 2.5% 点 χ_2^2



すなわち

2) 次節 7.5 で述べるように，(1)によって s^2 は σ^2 の不偏推定量である．また s^2 は σ^2 の一致推定量(7.5.2 参照)でもある．

$$P(\chi_1^2<\chi^2<\chi_2^2)=0.95 \qquad (4)$$

である．χ^2 に(2)を代入すれば

$$P\left(\chi_1^2<\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}<\chi_2^2\right)=0.95 \qquad (5)$$

となる．したがって

$$P\left(\frac{\chi_1^2\sigma^2}{n-1}<s^2<\frac{\chi_2^2\sigma^2}{n-1}\right)=0.95 \qquad (6)$$

である．このように s^2 の誤差の限界は未知母数 σ^2 を含むことになるので求められない．

これに対し，σ^2 の信頼区間は次のようにして設定できる．(5)の不等式を σ^2 をはさむ形に書き換えれば

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi_2^2}<\sigma^2<\frac{(n-1)s^2}{\chi_1^2}\right)=0.95 \qquad (7)$$

となる．すなわち

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi_2^2},\ \frac{(n-1)s^2}{\chi_1^2}\right)$$

は母分散 σ^2 に対する 95% 信頼区間である．

例題 7.4.1　例題 7.3.2 において，母集団の分散に対する 95% の信頼区間を求める．

標本分散 $s^2=10.88$，$n=5$ である．自由度4のカイ自乗分布で左側および右側の面積がそれぞれ 0.025 となる χ^2 の値すなわち χ_1^2 と χ_2^2 は，付表3より

$$\chi_1^2=0.484,\quad \chi_2^2=11.143$$

である．それゆえ

$$\text{下方信頼限界}=\frac{(n-1)s^2}{\chi_2^2}=\frac{4\cdot10.88}{11.143}=3.9$$

$$\text{上方信頼限界}=\frac{(n-1)s^2}{\chi_1^2}=\frac{4\cdot10.88}{0.484}=89.9$$

すなわち母分散 σ^2 は 3.9% と 89.9% との間に含まれることが 95% の信頼係数をもっていえる．この程度に小さな n であると s^2 は σ^2 の推定値としてはほとんど信頼がおけないことが分かる．

演習問題

1　下記の数字は，1961年における靴下製造業に属する中小企業(資本金1000万円以下もしくは従業員500人以下の法人)12社の流動比率(%)である(中小企業庁編「中小企業の経営指標」より).

99　115　63　105　88　98　106　110　76　64　214　108

これより靴下製造業中小企業の流動比率の母分散の95% 信頼区間を求めよ.

2　xが正規分布にしたがうとき，その母集団からの大きさ15の無作為標本の標本標準偏差が4であった．母標準偏差の99% 信頼区間を求めよ.

7.5 推定量の性質

7.5.1 不偏性と有効性

7.1においてわれわれは母平均μの点推定値として標本平均$\bar{x}$を採用した．標本平均は

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n) \tag{1}$$

であるから，$\bar{x}$は標本を構成するn個の要素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の1つの関数である.

これらの要素$x_1, \cdots, x_n$を確率変数の一組の実現値とは考えずに，n個の確率変数とみなすと，$\bar{x}$はn個の確率変数の関数であるから，やはり1つの確率変数であり，特定の確率分布をもつ．このように標本の要素の関数として一般に統計量は確率変数である．ただ，この場合母平均μを推定しようとしているのであるから，この確率変数$\bar{x}$は大体μを中心として確率的に変動することが期待されている.

以下母数θの推定量を$\hat{\theta}$で表わすことにする．$\hat{\theta}$は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の関数であるから一般に

$$\hat{\theta}=g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{2}$$

と書ける.

このように，特定の母数を推定するためにつくられた統計量をその母数の推定量(estimator)と呼ぶ．推定値(estimate)とは推定量の1つの実現値である.

点推定を行なう場合には，与えられた1個の標本 $(x_1, \cdots, x_n)$ に基づいて，

ただ1個の推定値を採用するのであるが，その推定値は推定しようとしている母数の値になるべく近いことが望ましいのは当然である．換言すれば，推定の誤差の絶対値$|u|=|\hat{\theta}-\theta|$がなるべく小さくなっていることが望ましい.

しかし，本来推定の誤差uも推定量$\hat{\theta}$に依存する確率変数だから，$|u|$を小さくするといっても，その評価の基準が問題となる．たとえば母数θに対して2つの推定量$\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$があり，$\hat{\theta}_1$は99%の確率でθに等しい値をとるが1%の確率でθから極端に離れた値をとる．一方$\hat{\theta}_2$はθに等しくなる確率はゼロだが，いつもθのすぐ近くの値をとるものとしよう．このとき$\hat{\theta}_1$と$\hat{\theta}_2$はどちらが望ましいだろうか．このような場合の評価の基準の問題は第14章で扱うことにして，ここではよく用いられる基準として，誤差uの2乗の期待値，すなわち

$$E(u^2)=E\{(\hat{\theta}-\theta)^2\} \tag{3}$$

を小さくするという基準に基づいて考えてみよう．(3)を$\hat{\theta}$の平均自乗誤差(mean squared error) または MSE と呼ぶ.

(3)は

$$\begin{aligned} E\{(\hat{\theta}-\theta)^2\}&=E\{[(\hat{\theta}-E(\hat{\theta}))+(E(\hat{\theta})-\theta)]^2\} \\ &=E\{[\hat{\theta}-E(\hat{\theta})]^2\}+[E(\hat{\theta})-\theta]^2 \\ &=\sigma_{\hat{\theta}}^2+[E(\hat{\theta})-\theta]^2 \end{aligned} \tag{4}$$

と書ける．(4)の最後の辺の第1項$\sigma_{\hat{\theta}}^2$は$\hat{\theta}$の分散であり，第2項$[E(\hat{\theta})-\theta]^2$は$\hat{\theta}$の平均と母数$\theta$との差の平方を示している.

いま平均μ，分散σ^2の無限母集団からの大きさnの無作為標本に基づいて，μを推定する問題を考えてみよう．μの推定量$\hat{\mu}$として標本平均$\bar{x}$を用い，これを$\hat{\mu}_1$と呼ぼう．このときには，$E(\bar{x})=\mu$という性質から(4)の第2項はゼロである．また$\sigma_{\bar{x}}^2=\sigma^2/n$だから，結局$\hat{\mu}_1$の場合

$$\mathrm{MSE}=\frac{\sigma^2}{n} \tag{5}$$

である.

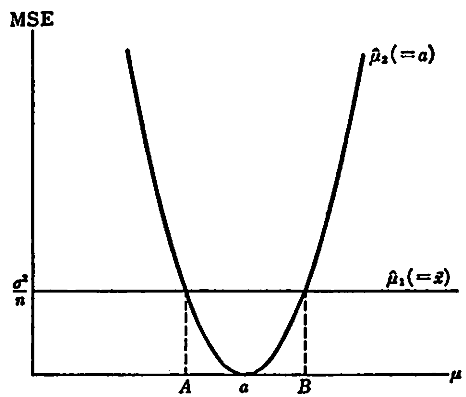
これに対し，aをなんらかの一定値とするときμの推定量としてaを用いることとし，これを$\hat{\mu}_2$と名づけよう．つまり標本の情報を全然利用しないで，いつでもaをμの推定値とするのである．aは一定値だから当然$\hat{\mu}_2$の分散はゼロである．またその平均はaに等しい．したがって$\hat{\mu}_2$の場合には

$$\mathrm{MSE}=(a-\mu)^2 \tag{6}$$

である．したがってこの場合にはたまたま μ が a に等しければ，MSE はゼロとなる．

(5)と(6)の MSE が μ とどのような関係にあるかを示したのが図7.3である．この図から明らかなように $\hat{\mu}_2$ は μ が図の A と B の間にあれば $\hat{\mu}_1=\bar{x}$ より MSE が小さいが，その区間の外側ではその区間から離れるほど $\hat{\mu}_2$ はいくらでも大きくなってしまう．

図 7.3　MSE と母数との関係



母数 μ の値がまったく未知な場合には，μ が A と B の間にある保証は何もないのだから，$\hat{\mu}_2(=a)$ という推定量はたいへん危険なものであることが分かる．

これに対し $\hat{\mu}_1=\bar{x}$ は μ がどのような値であるにしてもいつでもその MSE は σ^2/n である．もちろん，$\hat{\mu}_2$ のように MSE がゼロになってしまうようなこともないかわりに，MSE が σ^2/n よりも大きくなるということもない．その意味で安全性の大きな推定量であるといえる．

$\hat{\mu}_1(=\bar{x})$ のこのような性質は $[E(\bar{x})-\mu]^2$ の項がゼロであること，つまり $E(\bar{x})=\mu$ であることからきている．このように一般に

$$E(\hat{\theta})=\theta \tag{7}$$

となっているとき推定量 $\hat{\theta}$ を θ の不偏推定量 (unbiased estimator) と呼ぶ．そして $E(\hat{\theta})-\theta$ をバイアスと呼ぶ．不偏推定量のバイアスは0である．前節で述べたように，標本分散 s^2 は母分散の不偏推定量である．

上の例の $\hat{\mu}_1$ すなわち標本平均 $\bar{x}$ も母平均 μ の不偏推定量である．しかし μ の不偏推定量は $\bar{x}$ だけではない．$a_1, a_2, \cdots, a_n$ を

$$\sum_{i=1}^{n} a_i=1 \tag{8}$$

である任意の定数とするとき

$$\hat{\mu}_*=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \tag{9}$$

はやはり μ の不偏推定量である．なぜなら

$$E(\hat{\mu}_*)=\sum_{i=1}^{n} a_i E(x_i)=\sum_{i=1}^{n} a_i \mu=\mu \tag{10}$$

であるから．ところで $\hat{\mu}_*$ の分散は

$$E(\hat{\mu}_*-\mu)^2=E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i-\mu\right)^2=E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i-\mu)\right]^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j E\{(x_i-\mu)(x_j-\mu)\}$$

となるが，$i\neq j$ のとき x_i と x_j とは統計的に独立だから共分散 $E\{(x_i-\mu)(x_j-\mu)\}$ はゼロである．したがって

$$E(\hat{\mu}_*-\mu)^2=\sigma^2\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \tag{11}$$

となる．

(8)の制約のもとで $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ が最小になるのは

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n} \tag{12}$$

のときであるから，[3] 推定量

3) $\sum a_i^2$ が(8)の制約の下で(12)のとき最小となっていることは

$$\sum a_i^2=\sum\left[\left(a_i-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2$$
$$=\sum\left(a_i-\frac{1}{n}\right)^2+2\frac{1}{n}\sum\left(a_i-\frac{1}{n}\right)+n\frac{1}{n^2}$$
$$=\sum\left(a_i-\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\geqq\frac{1}{n}$$

より明らかである．

$$\hat{\mu}_1=\bar{x}=\frac{1}{n}x_1+\cdots+\frac{1}{n}x_n$$

が最小の分散 $\sigma^2\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\sigma^2n(1/n^2)=\sigma^2/n$ をもたらすことが分かる．

一般に，標本の要素の1次式として

$$\hat{\theta}=a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_n \tag{13}$$

と表わされる推定量を θ の**線形推定量**(linear estimator)と呼ぶ．θ が母平均 μ のとき(13)が不偏推定量であるためには $a_0=0$, $\sum a_i=1$ でなければならない．なぜなら

$$E(\hat{\mu})=a_0+a_1\mu+\cdots+a_n\mu=\mu$$

より

$$(1-\sum a_i)\mu=a_0 \tag{14}$$

となるが，(14)が任意の μ について成立するためには $1-\sum a_i=0$, $a_0=0$ でなければならないからである．

したがって(8)を条件とするとき推定量 $\hat{\mu}_*$ は μ のすべての線形不偏推定量を含む形をとっている．標本平均 $\bar{x}$ はその中での最小の分散をもつ．このように，あらゆる線形不偏推定量の中で最小の分散をもつものを**最良線形不偏推定量**(best linear unbiased estimator，または略して **BLUE**)と呼ぶ．

標本平均 $\bar{x}$ は μ の最良線形不偏推定量であるが，線形でない不偏推定量の中で $\bar{x}$ よりも分散が小さなものがあるかもしれない．一般に，θ の2つの不偏推定量 $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ があって $\hat{\theta}_1$ の分散が $\hat{\theta}_2$ の分散より小さいとき，$\hat{\theta}_1$ は $\hat{\theta}_2$ に対してより有効(more efficient)であるという．そして θ のあらゆる不偏推定量の中で最小の分散をもつ不偏推定量を θ の**有効推定量**(efficient estimator)と呼ぶ．あるいはこれを**最小分散不偏推定量**または**最良**(best)**不偏推定量**と呼ぶこともある．

標本平均 $\bar{x}$ が一般に μ の有効推定量であるという保証はない．しかし母集団が正規分布であれば標本平均は有効推定量である(14.2.1参照)．

7.5.2 一　致　性

大きさ n の標本に基づく推定量(3)を $\hat{\theta}_n$ で表わそう．$n=1, 2, \cdots$ に対応して推定量の系列 $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, $\cdots$ が定義される．いま ε を任意に選んだ小さな正数として，母数 θ の回りに区間 $(\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon)$ をつくる．もし推定量 $\hat{\theta}_n$ がこの区間の中にはいる確率が，n を大きくしていくとともに1に近づいていくとすれば，

そのような推定量は望ましい性質をもっているといえよう．なぜなら標本の大きさ n を増やしさえすれば，推定の誤差の絶対値 $|u|=|\hat{\theta}-\theta|$ を ε 以内にする確率をいくらでも高められるという保証が得られるからである．このような性質をもつ推定量 $\hat{\theta}_n$ を θ の**一致推定量**(consistent estimator)と呼ぶ．すなわち，ε を任意の正数とするとき

$$\lim_{n\to\infty}P(|\hat{\theta}_n-\theta|<\varepsilon)=1 \tag{15}$$

であるとき，$\hat{\theta}_n$ は θ の一致推定量である．

(15)のような関係が成立するとき $\hat{\theta}_n$ は θ に**確率収束する**(converge in probability)という．また θ は $\hat{\theta}_n$ の**確率極限**(probability limit)であるといい，次のように記す．

$$\mathrm{plim}\ \hat{\theta}_n=\theta \tag{16}$$

平均 μ，分散 σ^2 の母集団からの無作為標本に基づく標本平均 $\bar{x}_n$ は μ の一致推定量である．なぜなら，$\bar{x}_n$ の平均は μ，分散は σ^2/n であるから，チェビシェフ不等式(3.4.12)より

$$P\left(|\bar{x}-\mu|<\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\geqq 1-\frac{1}{\lambda^2} \tag{17}$$

が成立する．ここに λ は任意の正数だから，任意に小さな正数 ε に対して $\varepsilon=\lambda\sigma/\sqrt{n}$ であるような λ についても(17)は成立する．したがって

$$P(|\bar{x}-\mu|<\varepsilon)\geqq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n} \tag{18}$$

が成立する．ここで n を大きくしていけば右辺はいくらでも1に近い値をとれる．したがって，

$$\lim_{n\to\infty}P(|\bar{x}-\mu|<\varepsilon)=1 \tag{19}$$

が成立する．(19)すなわち標本平均が母平均に確率収束することを**大数の法則**(law of large numbers)と呼んでいる．[4]

したがって2項母集団からの無作為標本に基づく標本平均である割合 p' も母平均 p の一致推定量である．割合 p' は，事象 E が確率 p で生ずるベルヌーイ試行を n 回独立に行なったときの事象 E の相対度数 r/n と同じものである．それゆえ，任意の小さな正の ε に対して

4) 厳密には大数の弱法則(weak law)と呼ばれる．

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{r}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1 \tag{20}$$

が成立するといってもよい．すなわち相対度数は $P(E)$ に確率収束する．2.1 の冒頭で述べた大量観察における統計的規則性(相対度数の安定性)はこのようにして説明できたわけである．

また，分散 σ^2 の母集団からの無作為標本に基づく標本分散 s^2 は，その母集団に4次の積率が存在するとき，σ^2 の一致推定量である(例題14.3.1参照)．

演習問題

1　平均 μ，分散 σ^2 をもつ無限母集団からの大きさ3の無作為標本 (x_1, x_2, x_3) において，μ の推定量として

$$\hat{\mu}_1=x_1$$

$$\hat{\mu}_2=\frac{1}{6}(x_1+2x_2+3x_3)$$

$$\hat{\mu}_3=\frac{1}{6}(x_1+x_2+x_3)$$

を定義する．この中で

(a)　不偏推定量はどれか．

(b)　分散が最も小さいものはどれか．

(c)　平均自乗誤差の観点からするとどの推定量が最も好ましいといえるか．

2　既知の平均 μ と未知の分散 σ^2 をもつ無限母集団からの大きさ n の無作為標本 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ において，分散 σ^2 の推定量として $\hat{\sigma}^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2/n$ を定義する．この $\hat{\sigma}^2$ は σ^2 の不偏推定量か．母集団が正規分布であるとき，$\hat{\sigma}^2$ は σ^2 の一致推定量となることを証明せよ(ヒント：$\hat{\sigma}^2$ の分散が $2\sigma^4/n$ となることを見いだし，チェビシェフ不等式を使う)．

第8章

仮説の検定 I

8.1　仮説検定の考え方

8.1.1　仮説と棄却域

乾電池を製造している工場がある．過去の実績によればこの工場の乾電池の寿命の平均は120時間，その標準偏差は40時間である．最近乾電池の製法に新しい改良案が提出された．改良案の提出者は，この方法が成功すれば寿命はちょうど10時間延長されるが不成功ならば従来どおりであるという．そこで，試みに100個の乾電池を新しい製法により造って寿命を測定したところ，平均126時間となった．新しい製法によって寿命が平均10時間延びたといってよいであろうか．

この問題は，新製法によっても乾電池の寿命の母平均は120時間のままであるという**仮説**(hypothesis)を，標本平均 $\bar{x}=126$ 時間という結果によって検定する問題として扱える．もしその仮説が受け入れられないということは，新製法は成功しており寿命の母平均は130時間に延びた，ということを意味する．母平均が130時間に変わったという主張を，検定すべき仮説すなわち新製法でも寿命は120時間であるという仮説に対する**対立仮説**(alternative hypothesis)という．

検定すべき仮説を H_0，対立仮説を H_1 で表わす．母集団の平均を μ で表わせば，問題は次のように定式化できる．

$$H_0 : \mu=120$$

$H_1 : \mu=130$

その工場では新製法を採用するかしないかを決定しなければならないが，新製法を採用するには設備その他にかなりの費用を要する．しかし乾電池の寿命が延びれば，売上げが増大し，投じた費用を上回る収益があることが予想される．それゆえはたして新製法が成功しているのかどうかを判定することは，その工場にとり重要な問題である．

この場合2種類の誤りを犯す可能性がある．第1の誤りは，新製品が不成功である(仮説 H_0 が真実である)にもかかわらず，成功であるとしてしまう誤りである．すなわち H_0 が真であるにもかかわらず H_0 を棄却(したがって対立仮説 H_1 を採択)する誤りである．これを**第1種の過誤**(error of first type)という．

もう1つの誤りは，新製法は成功している(対立仮説 H_1 が真である)にもかかわらず，不成功であると決定する誤りである．すなわち H_1 が真であるにもかかわらず，H_0 を採択(したがって H_1 を棄却)する誤りである．これを**第2種の過誤**(error of second type)という．

正しい判定にも2種類ある．第1は不成功の場合に不成功と判定する(H_0 が真であるとき H_0 を採択する)こと，第2は成功の場合に成功と判定する(H_1 が真であるとき H_0 を棄却)することである．

以上の4つの可能性を表にすれば表8.1のようになる．

表 8.1　2種類の過誤

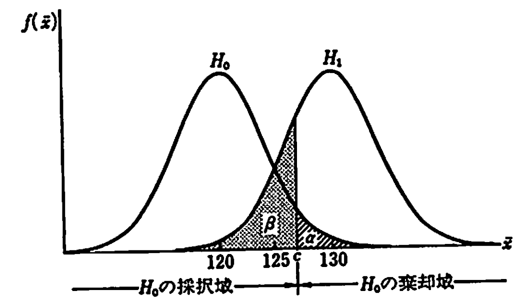
判定 ＼ 事実	H_0 が真 (不成功)	H_1 が真 (成　功)
H_0 を採択	正しい判定	第2種の過誤
H_0 を棄却	第1種の過誤	正しい判定

第1種の過誤を犯し，改良は成功と考えれば，その工場は役にたたない新製法のために費用を新たにかけることになるので大きな損失をこうむるであろう．一方第2種の過誤を犯せば，実は有利な新製法を採用せず，利益をふやすことのできる機会をみすみす逃すことになる．それゆえ，この2種類の誤りのどちらも犯したくない．

新製品による100個の試作乾電池の寿命の標本標準偏差 s を計算したところ大体40時間であった．そこで新製法によっても標準偏差 σ は変わらないと考えてよいとしよう．

大きさ n の標本の標本平均は，母集団が平均 μ，分散 σ^2 であれば，平均 μ，分散 σ^2/n の正規分布に近似的にしたがうことは4.4で述べた．それゆえ，いまの場合，仮説 H_0 が真であれば，標本平均 $\bar{x}$ の分布は，平均 $\mu_{\bar{x}}=120$，標準偏差 $\sigma_{\bar{x}}=40/\sqrt{100}=4$ の正規分布で近似できる．また仮説 H_0 が偽りで対立仮説 H_1 が真であれば，$\bar{x}$ の分布は $\mu_{\bar{x}}=130$, $\sigma_{\bar{x}}=40/\sqrt{100}=4$ の正規分布で近似できる．この2つの分布を図8.1に図示してみよう．

図 8.1　2つの可能性の下での標本平均の分布



この図から明らかなように，$\bar{x}=126$ はどちらの仮説が真であっても十分起こりうる値である．そこで，$\bar{x}$ がある値 c より小さければ仮説 H_0 を採択し，c 以上ならば仮説 H_0 を棄却するという方式をとる．すなわち

$\bar{x}<c$ ならば H_0 を採択

$\bar{x}\geqq c$ ならば H_0 を棄却

この場合標本平均 $\bar{x}$ を**検定統計量**(test statistic)と呼ぶ．区間 $c\leqq\bar{x}<\infty$ を**仮説 H_0 の棄却域**(critical region)と呼ぶ．また c のことを**臨界値**(critical value)と呼ぶ．

棄却域をどのように設定するか(この場合はこれは c をどのような値に決めるかに等しい)によって第1種，第2種の過誤を犯す確率(以下これらをそれぞれ α, β で表わす)が定まる．図の斜線部分の面積は α，黒い影の部分は β を表わす．この2つの部分の面積は臨界値の位置により変化する．

たとえば $c=125$ とすれば，図から明らかなように，第1種の過誤を犯す確

率αと第2種の過誤を犯す確率βとは相等しい．その値は$\bar{x}$を

$$z=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

により標準化すると，$c=125$ に対応するzの値は

$$\frac{c-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{125-120}{40/\sqrt{100}}=1.25$$

であるから，正規分布表より

$$\alpha=P(z\geqq 1.25)=\int_{1.25}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz=0.1056$$

となる．βについても同様に，$c=125$ に対応するzの値は $(125-130)/(40/\sqrt{100})=-1.25$ となるから $P(z<-1.25)=0.1056$ となる．

このような棄却域を設ければ，α, βは相等しいのであるが，等しくないほうがよい場合もある．先の例でいえば，乾電池の新製法がもし効果がないものなら，新製法のための改良工事その他がまったく無駄になるのだから，第1種の過誤の確率αをなるべく小さくしたい．そのためには第2種の過誤(せっかく新製法が成功しているのにそれを捨ててしまうこと)の確率βが多少大きくなってもかまわない．このような場合にはcを125よりもっと大にすることになるであろう．

いま $\alpha=0.05$ を採用すれば

$$P(z\geqq 1.645)=0.05$$

であるから，$c=\mu+1.645\cdot\sigma/\sqrt{n}=120+(1.645)\cdot(4)\fallingdotseq 126.6$ となる．このとき第2種の過誤の確率βは，$(126.6-130)/4=-0.85$ であるから

$$\beta=P(z<-0.85)=0.1977$$

となる．この例では実際の標本平均は $\bar{x}=126$ であるから，棄却域 $[126.6, \infty)$ の中にははいらない．よってこの仮説H_0は採択されることになる．第1種の過誤の確率αは**棄却域の大きさ**(size of critical region)またはたんに**サイズ**と呼ばれる．この場合，仮説H_0はサイズ5%の検定により採択されたわけである．

8.1.2 検定力関数

以上の乾電池の寿命の例では，もし新製法が成功すれば平均寿命が130時間になるとされていた．この想定を変えて，もし新製法が成功すれば乾電池の寿命は従来よりとにかく延びる，しかしどれくらい延びるかは確言できない，としたらどうだろうか．このようなケースのほうが実際には多いだろう．

この場合には，仮説 $H_0: \mu=120$ を棄却したとき自動的に採択される対立仮説 H_1 は，前のように $\mu=130$ ではなく，$\mu>120$ という形にすべきである．$\mu>120$ ということはμが$(120, \infty)$という区間に含まれるどの値であってもよいということである．一般に，ただ1個の母数を指定する仮説または対立仮説を**単純仮説**(simple hypothesis)または**単純対立仮説**という．これに対し複数個の母数を指定するものを**複合仮説**(composite hypothesis)または**複合対立仮説**と呼ぶ．

したがって，前の場合は単純仮説 対 単純対立仮説であったが，今度の場合すなわち

$$H_0: \mu=120$$
$$H_1: \mu>120$$

は，単純仮説 対 複合対立仮説ということである．

複合対立仮説 $H_1: \mu>120$ においては，H_1が真であるときの$\bar{x}$の分布は定まらない．$N(\mu, 4^2)$ という形の正規分布なら，$\mu>120$ である限りどれでもよい．したがって前のように棄却域を$[c, \infty)$にとるとしたとき図8.1のように第2種の過誤の確率βを一意的に定めるということはできない．

しかし，この場合に，複合対立仮説H_1が許容するμのいろいろな値に対応して，それぞれβの値を計算することはできる．たとえば$\alpha=0.05$の場合には前述のように臨界値は $c=126.6$ だから，$\beta=P(\bar{x}<126.6)$ は

$\mu=125$ のとき，$P(z<(126.6-125)/4)=F(0.4)=0.6554$

$\mu=130$ のとき，$P(z<(126.6-130)/4)=F(-0.85)=0.1977$

$\mu=135$ のとき，$P(z<(126.6-135)/4)=F(-2.1)=0.0179$

というようになる．

ところで，第2種の過誤を犯さない確率は$1-\beta$だが，これを**検定力**(power)と呼んでいる．すなわち，検定力は

$$1-\beta=1-P(\bar{x}<126.6)=P(\bar{x}\geqq 126.6)$$

である．この値はβと同様にμの値によって変わるから，これを $P(\bar{x}\geqq 126.6\,;\mu)$ と書くことにしよう．前述のμの値の検定力は

$$P(\bar{x}\geqq 126.6\,;125)=1-0.6554=0.3446$$

$$P(\bar{x} \geqq 126.6\,;\,130) = 1 - 0.1977 = 0.8023$$
$$P(\bar{x} \geqq 126.6\,;\,135) = 1 - 0.0179 = 0.9821$$

というようになる．ついでに μ が H_1 で指定した以外の値である場合についても検定力を求める．当然

$$P(\bar{x} \geqq 126.6\,;\,120) = \alpha = 0.05$$

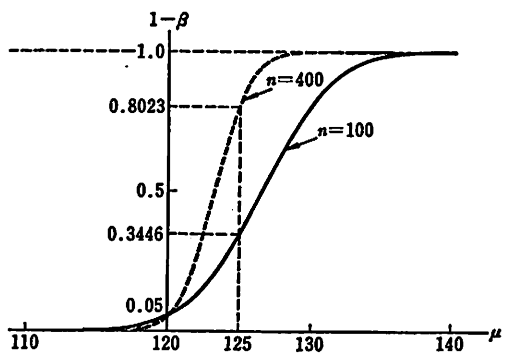
であるし，また

$$P(\bar{x} \geqq 126.6\,;\,115) = P(z \geqq (126.6 - 115)/4) = 0.0019$$

である．

このように検定力は μ に依存してその値が定まる．μ を横軸に検定力を縦軸にとってその関係を描くと図8.2の実線の曲線のようになる．このような曲線を**検定力曲線**と呼んでいる．また μ の関数としての $P(\bar{x} \geqq 126.6\,;\,\mu)$ を，棄却域 $[126.6,\ \infty)$ の**検定力関数**(power function)という．

図 8.2 検定力曲線



検定力とは仮説 H_0 が真でないとき H_0 を棄却する確率だから，μ が H_0 で指定している120でない限りそれは1に近いほどよい．しかし図8.2を見れば分かるように，検定力が1に近くなるのは μ がおおよそ140以上になってからである．たとえば μ が125のときは検定力は0.3446である．つまり，μ が125(すなわち，乾電池の新製法による5時間の寿命増加があった)であっても H_0(すなわち乾電池の新製法は不成功である)が首尾よく棄却される確率は約34%でしかなく，残りの66%の確率で H_0 が採択されてしまう．

もしその工場の経営者は，新製法によって実際に5時間の寿命増加がえられるなら新製法の採用に踏み切るほうが有利であると考えているのであれば，上記のような仮説検定の方法では彼にとり不満であろう．なぜなら，5時間の寿命増加が可能なとき2/3に近い確率で(H_0 を採択して)その機会を逃してしまうからである．

8.1.1で述べたように，α を大きくすれば β は小さくなるから，検定力 $1-\beta$ は大きくなるであろう．実際，たとえば $\alpha=0.5$ とすれば，臨界値 c は120であるから，$\mu=125$ のときの検定力は

$$P(\bar{x} \geqq 120\,;\,125) = P\left(z \geqq \frac{120-125}{4}\right)$$
$$= 1 - F(-1.25) = 0.8944$$

となり，満足できる程度に高まる．しかし一方において，H_0 が真(新製法は不成功)であっても $\alpha=0.5$ の確率で H_0 を棄ててしまうという不満が生ずる．

第1種の過誤の確率 α を小さく保ったまま $\mu=125$ のときの検定力を高めるにはどのようにしたらよいだろうか．その方法は1つだけ残されている．それは検定のための標本の大きさ n をふやすことである．上記の例では n は100であったが，これを400にしたらどうなるだろうか．このときには，標本平均 $\bar{x}$ の分布は正規分布 $N(\mu,\ 40^2/400)$ つまり $N(\mu,\ 2^2)$ で近似できる．したがって $\alpha=0.05$ を採用すると，臨界値 c は

$$0.05 = P(\bar{x} \geqq c\,;\,120) = P\left(z \geqq \frac{c-120}{2}\right)$$
$$= P(z \geqq 1.645)$$

であるから，$c = 120 + 1.645 \times 2 \fallingdotseq 123.3$ となる．したがって $\mu=125$ のときの検定力は

$$P(\bar{x} \geqq 123.3\,;\,125) = P\left(z \geqq \frac{123.3-125}{2}\right)$$
$$= 1 - F(-0.85) = 0.8023$$

となり，かなり満足のいく程度まで高まるのである．

$n=400$ にしたときの検定力曲線は図8.2の破線の曲線で示されている．この検定力曲線によれば μ がおおよそ130以上になるとほぼ1に近い確率で H_0 を棄却できることが分かる．

標本の大きさ n をさらにふやせば，検定力曲線はもっと急な勾配となっていくであろう．そして，n を十分大きくすれば μ が120よりもほんの少し大きい

値であっても，そのときの検定力をほぼ1に近くすることが可能となることも容易に推察がつく．

演　習　問　題

1　ある地方において2種類の人種AおよびBの頭蓋骨が発掘される．人種Aの頭蓋骨の長さは平均20cm，Bは16cmであり，頭蓋骨の長さの標準偏差は両人種とも3cmであることが知られている．いまある地区を発掘したところ同じ住居跡から頭蓋骨16個が出てきた．その長さの平均が18.5cmのとき，その頭蓋骨がA人種のものであるという仮説を$\alpha=0.1$で検定せよ．

2　ある小売店の1日の売上額は従来，平均30万円，標準偏差4.8万円であった．ところが近所にスーパーマーケットが開店して以来，36日間の毎日の売上げの実績は，標本平均28万円である．日々の売上げは相互に独立な確率変数であるとみなし，かつ標準偏差は以前と同じとして，スーパーの開店がその小売店の売上げに影響を及ぼさないという仮説を，スーパー開店が小売店の売上げを減少させているという対立仮説に対してサイズ5%で検定せよ．また，このときの検定力曲線を描け．

8.2 有 意 性 検 定

8.2.1 帰 無 仮 説

前節の乾電池の寿命の例において，単純仮説

$$H_0: \mu=120$$

を複合対立仮説

$$H_1: \mu>120$$

に対して検定するとき，検定力を高めるためには標本の大きさnを増加すればよいと結論された．だが，実際の問題では標本の大きさnをふやすことは費用や手間の点で容易でないことが多い．むしろすでに与えられている標本の下で判断を迫られることが通常である．このような場合には8.1.2で述べたように，H_0で指定されている$\mu=120$に近い値のμにおける検定力は相当低くなることは避けられないから，$H_0: \mu=120$が採択されたからといって，仮説H_0がデータにより実証されたなどとはとうていいえないであろう．

しかし，十分大きな標本が利用できない状況でも，検定の目的が新製法の寿命延長効果の確認にあるときには，検定力の問題はあまり気にしないでもよ

い．というのは，検定力が低いためにH_1が真なのにH_0を採択してしまう確率が高くても，それは新製法による寿命延長が十分でなくμは120よりたいして高くなかったためと考えればよいからである．一方，小さなαの下でH_0が棄却されれば，新製法は十分に有効であったと判定できる．

このような場合，仮説$H_0: \mu=120$のほうは寿命延長を判定するための1つの基準でしかない．H_0がかりに採択されたからといってそれが真実だとするわけではない．たんにH_0は棄却しえなかったというだけのことである．このような意図の下でH_0が設定される場合，これを帰無仮説(null hypothesis)と呼ぶ．

H_0が帰無仮説の場合には，棄却域の大きさαを特に有意水準(significance level)という呼び方をする．たとえば有意水準αを5%にとったときには，棄却域は$[126.6, \infty)$だから，もし標本平均$\bar{x}$が128ならば帰無仮説H_0は有意水準5%で棄却される．このとき有意水準5%で$\bar{x}=128$と仮説値$\mu=120$との差は統計的に有意(statistically significant)であるという．もし$\bar{x}$が126であればH_0は棄却されないが，このときは両者の差は統計的に有意でないという.[1)]

有意水準を1%にとれば棄却域は$[129.3, \infty)$となるから，もし$\bar{x}=128$だったなら，H_0は棄却されないことになる．したがって$\bar{x}=128$の$\mu=120$に対する差は有意水準5%では統計的に有意であるが，1%では有意ではないということになる．

より小さな有意水準の下で帰無仮説が棄却されるほど，新製法の効果が高かったということになる．

以上述べたような有意性検定の考え方は次の小節に述べる2つの標本の比較の問題においてその有効性を特に発揮する．

8.2.2 平均値の差の有意性検定

いまある都市に住む年収400万円から500万円までの，勤労者家計と自営業

1) このようないわゆる有意性検定の方法はR.A.フィッシャーにより最初に提唱された(R.A. Fisher, *Statistical Methods for Research Workers*, Oliver & Boyd, 1925．遠藤・鍋谷訳『研究者のための統計的方法』森北出版，1970年，参照)．これに対し，J. NeymanとE.S. Pearsonは前節で述べたような統計的検定法を1930年頃に完成させた．これらの歴史的経緯については蓑谷千凰彦『推定と検定のはなし』東京図書，1988年，に興味深く述べられている．

家計それぞれ100世帯を無作為に抽出し，その過去3カ月間の貯蓄額(負値もとりうる)を調査したところ勤労者家計の貯蓄額の標本平均は10万円，自営業家計のそれは12万円であったとしよう．また他の情報から，この収入階層に属する勤労者家計，自営業家計は，その貯蓄額の標準偏差が共通に $\sigma=5$ 万円であることが知られているとしよう．ただこれら2つの母集団の平均値が分からない．2つの母集団からそれぞれ大きさ n_1 と n_2 の標本を無作為抽出したとし，それらを

$$(x_{11},\ x_{12},\ \cdots,\ x_{1n_1}),\quad (x_{21},\ x_{22},\ \cdots,\ x_{2n_2})$$

のように書き表わそう．これらの標本から標本平均

$$\bar{x}_1=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}x_{1i},\qquad \bar{x}_2=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}x_{2i} \tag{1}$$

をつくれば，$\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ はそれぞれ近似的に

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x}_1\sim N\left(\mu_1,\ \dfrac{\sigma^2}{n_1}\right)\\[2ex] \bar{x}_2\sim N\left(\mu_2,\ \dfrac{\sigma^2}{n_2}\right)\end{array}\right\} \tag{2}$$

である．[2)]

いま2つの母集団の平均値は等しいという仮説をたててみよう．

$$H_0:\mu_1=\mu_2$$

この場合の対立仮説は

$$H_1:\mu_1\neq\mu_2$$

である．これらは次のようにも書き改められる．

$$\left.\begin{array}{l}H_0:\mu_1-\mu_2=0\\ H_1:\mu_1-\mu_2\neq 0\end{array}\right\}$$

すなわち2つの母集団の平均値の間に差はないかどうかというたて方である．実際には2つの母集団の平均値が正確に等しいということはまずありえないことであるが，かりにこのようにおいてみるわけである．すなわち $H_0:\mu_1-\mu_2=0$ は帰無仮説である．

そこで仮説検定の手順として次に，2つの母集団から抽出された標本平均の差 $\bar{x}_1-\bar{x}_2$ が0とどの程度異なれば，H_0 が棄却されるかという，棄却域を定めることが問題となる．

2) $x\sim A$ により，確率変数 x が確率分布 A をもつ，または x が A にしたがって分布することを表わす．

標本平均の差 $\bar{x}_1-\bar{x}_2$ はどのような分布をするだろうか．まず平均は

$$E(\bar{x}_1-\bar{x}_2)=E(\bar{x}_1)-E(\bar{x}_2)=\mu_1-\mu_2$$

である．また $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ は統計的に独立であるから

$$\begin{aligned}E\{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2\}&=E(\bar{x}_1^2-2\bar{x}_1\bar{x}_2+\bar{x}_2^2)\\&=E(\bar{x}_1^2)-2E(\bar{x}_1)E(\bar{x}_2)+E(\bar{x}_2^2)\\&=E(\bar{x}_1^2)+E(\bar{x}_2^2)-2\mu_1\mu_2\end{aligned}$$

それゆえ分散は

$$\begin{aligned}\sigma^2_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}&=E\{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)^2\}-(\mu_1-\mu_2)^2\\&=E(\bar{x}_1^2)+E(\bar{x}_2^2)-2\mu_1\mu_2-(\mu_1^2-2\mu_1\mu_2+\mu_2^2)\\&=E(\bar{x}_1^2)-\mu_1^2+E(\bar{x}_2^2)-\mu_2^2=\sigma_{\bar{x}_1}^2+\sigma_{\bar{x}_2}^2\end{aligned}$$

となる．まとめて書けば

$$\left.\begin{array}{l}\mu_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\mu_1-\mu_2\\[1ex] \sigma^2_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\sigma_{\bar{x}_1}^2+\sigma_{\bar{x}_2}^2=\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\end{array}\right\} \tag{3}$$

すなわち独立な2つの標本平均の差の平均は母平均の差に等しく，差の分散は分散 $\sigma_{\bar{x}_1}^2$, $\sigma_{\bar{x}_2}^2$ の和に等しいという命題が導けた．

$\bar{x}_1$ と $\bar{x}_2$ が独立でそれぞれ正規分布にしたがっていれば，差 $\bar{x}_1-\bar{x}_2$ も正規分布することが証明できる．[3)] すなわち $\bar{x}_1-\bar{x}_2\sim N(\mu_1-\mu_2,\ \sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2)$ である．

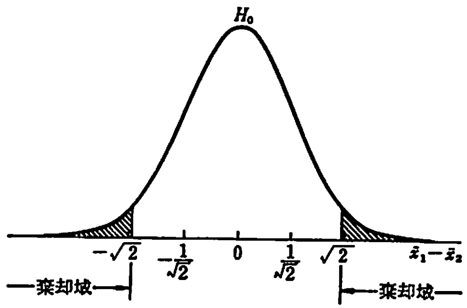
いまの例では $\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2=5^2/100+5^2/100=1/2$ であるから，勤労者家計と自営業家計のそれぞれの貯蓄額の平均値の差は，帰無仮説 H_0 が真であれば，平均0，標準偏差 $1/\sqrt{2}$ の正規分布にしたがうはずである．この分布は次の図8.3のようになる．

この問題では対立仮説が $H_1:\mu_1-\mu_2\neq 0$ であり，$\mu_1-\mu_2$ に特定の値を指定しているのではないから，対立仮説が真なるときの分布をこの図に描くことはできない．

棄却域を $\alpha=0.05$ となるように $\bar{x}_1-\bar{x}_2$ 軸上に設定する．$\mu_1-\mu_2$ は正でも負でもありうるから，分布の両側に棄却域を対称におく．すなわち $c_1<c_2$ と

3) 第5章を学んだ読者は積率母関数を用いて証明して~~みよ~~．

図 8.3　2つの標本平均の差の分布



して

$$c_1=-1.96\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\fallingdotseq-1.386$$

$$c_2=1.96\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\fallingdotseq1.386$$

のように2つの臨界値を定める．こうおけば正規分布の性質より

$$P(-1.386<\bar{x}_1-\bar{x}_2<1.386)=0.95 \tag{4}$$

となる．

さていま $\bar{x}_1=10$ 万円，$\bar{x}_2=12$ 万円 であるから $\bar{x}_1-\bar{x}_2=-2$ である．$-2<-1.386$ であるから棄却域にはいる．かくして帰無仮説 H_0 すなわち勤労者家計と自営業家計の貯蓄額に差はないとする仮説は有意水準5%で棄却される．この場合，2つの標本平均 $\bar{x}_1$ と $\bar{x}_2$ の間の差は5%で有意であるという表現をする．

いまの例では，$\bar{x}_1-\bar{x}_2$ の観測値が区間 (c_1, c_2) の外側に落ちれば，仮説は棄却されたのである．これは対立仮説 H_1 が $\mu_1-\mu_2\fallingdotseq0$ であったからである．このように分布の両側に棄却域を設ける場合を両側検定(two-sided test)と呼ぶ．これに対し前小節の例のように分布の片側にだけ棄却域を設定する検定を片側検定(one-sided test)と呼ぶ．片側検定の例をもう1つ考えてみよう．

上の例で，所得が同一ならば勤労者家計のほうが自営業家計よりも貯蓄額が少ないという主張が，ある理論的な根拠からなされているとしよう．この主張を対立仮説 H_1 として採れば

$$H_0:\mu_1-\mu_2=0$$

$$H_1:\mu_1-\mu_2<0$$

となる．この場合には棄却域は

$$P(\bar{x}_1-\bar{x}_2\leqq c)=\alpha$$

を満足する $(-\infty, c]$ の区間となる．有意水準 $\alpha=0.05$ とすれば $c=-1.645\cdot1/\sqrt{2}\fallingdotseq-1.163$ となる．すなわち

もし $\bar{x}_1-\bar{x}_2>-1.163$ ならば H_0 を採択

もし $\bar{x}_1-\bar{x}_2\leqq-1.163$ ならば H_0 を棄却

することになる．

このように片側検定にすべきか両側検定にすべきかは，対立仮説のいかんによる．

演習問題

1　1963年上期における日本の鉄鋼業の(任意に抽出した)10企業の総資本回転率の標本平均は0.532であるが，化学産業の(任意に抽出した)15企業の標本平均は0.586である．母集団の標準偏差は共通に0.060とするとき，有意水準を5%として両産業における総資本回転率の差の有意性検定を行なえ．

2　上の問題で化学産業の総資本回転率のほうが大であるという対立仮説の下で検定すればどうなるか．

8.3　小標本による平均値の検定

8.1の乾電池の寿命に関する検定の問題では母集団の標準偏差 σ が40時間であることが知られていた．しかしこれがもし未知であっても，σ のかわりに標本標準偏差 s を用いて

$$t=\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \tag{1}$$

のごとく標準化した t は，$n=100$ というようなかなり大きな標本では，近似的に標準正規分布 $N(0, 1)$ にしたがう．

しかし7.3で述べたように小標本ではこの近似の誤差は無視しえない．母集団が正規分布であれば(1)式によって定義される統計量 t は，自由度 $n-1$ のステューデントの t 分布にしたがう(6.2参照)．このことを検定の場合にも利

用する．

いま8.1の乾電池の例で

帰無仮説 $H_0: \mu=120$

対立仮説 $H_1: \mu>120$

を検定するものとする．新製法によって乾電池の試作品10個を造りその寿命を測定したところ，標本平均 $\bar{x}=133$，標本標準偏差 $s=35$ を得た．有意水準5%でこの仮説を検定してみよう．

まず棄却域を設定する．自由度 $m=n-1=9$ の t 分布の右すその面積が0.05になる t の値（t の10%水準）$t_{0.10}$ は，巻末の t 分布表より1.833に等しいことが分かる．すなわち

$$P(t \geqq 1.833)=0.05 \tag{2}$$

である．t の1.833の値は $\bar{x}$ でいえば $\mu+t_{0.10}\cdot s/\sqrt{n}=120+1.833\cdot 35/\sqrt{10}=140.3$ である．すなわち

$$P(\bar{x} \geqq 140.3)=0.05 \tag{3}$$

である．棄却域はそれゆえ140.3以上の実数の領域である．一方，標本平均は $\bar{x}=133$ であるから $133<140.3$ であり，仮説 H_0 は棄却されない．

以上は $\bar{x}$ を検定統計量としているが，t を検定統計量としてもよい．すなわち仮説 H_0 が真であるとき $\bar{x}=133$ は t の値としては

$$t=\frac{133-120}{35/\sqrt{10}}=1.174$$

である．$1.174<1.833$ であるので H_0 は棄却されない．

次に，8.2.2の平均値の差の有意性検定の例で，年収400～500万円の勤労者家計，自営業家計それぞれの貯蓄額の標準偏差は同一であるが，その値は知られていない場合には，

$$t=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}}\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}} \tag{4}$$

が自由度 n_1+n_2-2 のステューデントの t 分布にしたがうことを利用すればよい．

まず，このことを証明しよう．共通な分散 σ^2 をもつ2つの正規母集団 $N(\mu_1, \sigma^2)$，$N(\mu_2, \sigma^2)$ から独立に抽出された大きさがそれぞれ n_1, n_2 の標本 $(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n_1})$，$(x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n_2})$ の標本平均を $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ とすれば，差 $\bar{x}_1-\bar{x}_2$ は正規

分布にしたがい，その平均，分散はそれぞれ

$$\left.\begin{aligned} &\mu_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\mu_1-\mu_2 \\ &\sigma^2_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\sigma^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

である（8.2.2参照）．したがって

$$u=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \tag{6}$$

は正規分布 $N(0, 1)$ にしたがう．

一方 $\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2/\sigma^2$，$\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i}-\bar{x}_2)^2/\sigma^2$ はそれぞれ自由度 n_1-1, n_2-1 のカイ自乗分布にしたがう（6.1参照）．2つの量は相互に独立だから，カイ自乗分布の再生性（定理6.2）より，和

$$\begin{aligned} v&=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2}{\sigma^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n_2}(x_{2i}-\bar{x}_2)^2}{\sigma^2} \\ &=\frac{1}{\sigma^2}\{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2\} \end{aligned} \tag{7}$$

は自由度 n_1+n_2-2 のカイ自乗分布にしたがう．u, v は統計的に独立であることが（あとで述べる定理13.14を使えば）証明できるから，定理6.3より

$$t=\frac{u}{\sqrt{\dfrac{v}{(n_1+n_2-2)}}} \tag{8}$$

は自由度 n_1+n_2-2 のステューデントの t 分布にしたがう．u, v に(6)，(7)を代入すれば

$$\begin{aligned} t&=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\cdot\frac{\sqrt{n_1+n_2-2}}{\dfrac{1}{\sigma}\sqrt{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}} \\ &=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}}\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}} \end{aligned}$$

となる（証明終り）．

そこで，いま

$H_0: \mu_1-\mu_2=0$

$H_1: \mu_1-\mu_2 \neq 0$

を検定したいとき，勤労者家計の母集団から大きさ $n_1=10$ の標本が抽出され

$\bar{x}_1=8.5$, $s_1^2=20$ が計算され，一方自営業家計から大きさ $n_2=15$ の標本が抽出され $\bar{x}_2=11$, $s_2^2=24$ が得られたとしよう．

帰無仮説 $H_0: \mu_1-\mu_2=0$ が真であれば(4)より

$$t=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}}\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}} \tag{9}$$

は自由度 n_1+n_2-2 の t 分布にしたがう．t 分布表より自由度 $n_1+n_2-2=10+15-2=23$ の t 分布で両すその面積の和が 0.05 になる t の値(t の 5% 水準) $t_{0.05}(23)$ は 2.069 であるから，t に変換した場合，$t\leqq-2.069$ および $t\geqq2.069$ なる領域が有意水準 5% の仮説 H_0 の棄却域となる．一方観測結果は $\bar{x}_1=8.5$, $\bar{x}_2=11$, $s_1^2=20$, $s_2^2=24$ であるから，これらを(9)式に代入すれば

$$t=\frac{8.5-11}{\sqrt{(10-1)\cdot20+(15-1)\cdot24}}\sqrt{\frac{10\cdot15\cdot(10+15-2)}{10+15}}$$
$$\fallingdotseq-1.293$$

となる．$-1.293>-2.069$ であるからこの帰無仮説は有意水準 5% で棄却されない．すなわち 2 つの標本平均には統計的に有意な差がない．

演　習　問　題

1　催眠剤 A, B 2 種類の催眠的効果の有無と相違とを検定するため，10 人の患者について催眠剤を用いたときの睡眠の増加時間を測定して次の結果を得た．有意水準 5% として次の問に答えよ．

(a)　催眠剤 A の効果の有無を検定せよ．

(b)　催眠剤 B の効果の有無を検定せよ．

(c)　A, B の効果に差があると考えてよいか．

催眠剤＼患者	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	標本平均 $\bar{x}$	標本標準偏差 s
A	1.9	0.8	1.1	0.1	−0.1	4.4	5.5	1.6	4.6	3.4	2.33	2.00
B	0.7	−1.6	−0.2	−1.2	−0.1	3.4	3.7	0.8	0.0	2.0	0.75	1.79

("Student" (1908) の論文より)

8.4　割合に関する検定

母集団において，ある特性をもっているものの割合 p を標本における割合 p'

に基づいて検定する問題も実用上重要である．たとえば，理論的な帰結としては，夫婦と未成年という家族構成で夫の収入が月 20 万円から 30 万円の勤労者世帯のグループにおいては，妻が就業する割合は 0.21 だという主張があるときに，実際にそのような世帯を 100 世帯抽出したところ 28 世帯において妻が就業していたとする．この場合妻の就業率が 0.21 だという仮説は支持できるだろうか．

このような問題は，標本における割合 p' の分布が，p が極端に 0 または 1 に近くない限り，大体正規分布 $N(p, pq/n)$ で近似できることを利用すれば，前節までに述べたのとまったく同様にして解くことができる．

いま仮説として主張されている p の値を p_0 としよう．すなわち，仮説は

$$H_0: p=p_0$$

これに対し，対立仮説は

$$H_1: p\neq p_0$$

である．そこで，仮説 H_0 が真なるときの p' の分布を考えてみると，それは $N(p_0, p_0q_0/n)$ により近似できる(ただし $q_0=1-p_0$)から，いまサイズ α を 0.05 として棄却域を分布の両側に設ける．すなわち

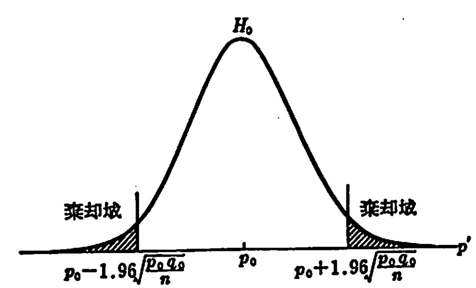
$$P(p'\leqq c_1 \text{ または } p'\geqq c_2)=0.05 \tag{1}$$

を満足する臨界値

$$c_1=p_0-1.96\sqrt{\frac{p_0q_0}{n}} \text{ および } c_2=p_0+1.96\sqrt{\frac{p_0q_0}{n}} \tag{2}$$

を定める．図 8.4 を参照せよ．$p_0=0.21$, $q_0=1-p_0=0.79$, $n=100$ であるから

図 8.4　割合 p' の標本分布と棄却域



$$c_1=0.21-1.96\sqrt{\frac{(0.21)(0.79)}{100}}=0.21-0.08=0.13$$

$$c_2=0.21+1.96\sqrt{\frac{(0.21)(0.79)}{100}}=0.21+0.08=0.29$$

となる．このようにして p' 軸における棄却域が定まる．標本の割合 p' は 0.28 であるから，わずかに領域 (0.13, 0.29) の中にはいる．それゆえ，仮説 H_0 はサイズ 5% で採択される．

次に，2つの母集団における割合 p_1, p_2 の間に差があるかどうかという検定の問題の例をあげよう．

ある銘柄のたばこを喫煙する人の割合は，事務労働者と肉体労働者の間で差があるかどうかを調べるために，事務労働に従事する人 100 人 (n_1) と，肉体労働に従事する人 200 人 (n_2) を無作為に選び，調査した．その結果前者では 62 人 (x_1) が，後者では 118 人 (x_2) がその銘柄のたばこを吸っていることが分かった．両母集団におけるその銘柄のたばこを喫煙する人の割合は有意水準 5% で差があるといえるか．

この問題は2つの標本における割合をそれぞれ p_1', p_2' とすると，$p_1'-p_2'$ が近似的に $N(p_1-p_2,\ p_1q_1/n_1+p_2q_2/n_2)$ にしたがうことを利用すれば容易に解決する．ただし $q_1=1-p_1$, $q_2=1-p_2$．まず

帰無仮説　$H_0: p_1-p_2=0$

対立仮説　$H_1: p_1-p_2\neq 0$

を設定する．次に棄却域は

$$c_1=-1.96\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}},\qquad c_2=1.96\sqrt{\frac{p_1q_1}{n_1}+\frac{p_2q_2}{n_2}} \qquad (3)$$

であるが，この場合に p_1, p_2 の値は仮説では与えられていないから，標本より推定することになる．仮説によれば $p_1=p_2$ なのだから，2つの標本を合わせて

$$\hat{p}=\frac{x_1+x_2}{n_1+n_2}=\frac{62+118}{100+200}$$

$$=\frac{180}{300}=0.6$$

を得る．これを p_1, p_2 のかわりに使えば

$$c_1,\ c_2=\pm 1.96\sqrt{\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{200}\right)(0.6)(0.4)}$$

$$=\pm 0.1176$$

となる．ところで観測結果は

$$p_1'-p_2'=\frac{62}{100}-\frac{118}{200}=0.62-0.59=0.03$$

であり，棄却域に落ちない．よって仮説 H_0 は有意水準 5% で棄却されない．あるいは有意水準 5% で2つの標本の喫煙率には有意な差はないといえる．

演習問題

1　ある地区の世帯のテレビ保有率は少なくとも 80% であるという主張を確かめるために，400 世帯を無作為に選んで調査したところ，300 世帯がテレビを保有していた．この主張を受け入れてよいかどうかをサイズ 5% で判定せよ．

2　サイコロを 160 回投げたとき，1の目が 40 回出たならば，そのサイコロは1の目が出やすいと判断してよいか．有意水準 1% で検定せよ．

3　100 匹ずつからなる A, B 2組のねずみがある．そのうち A グループのねずみにある栄養剤をえさに混ぜて与え，B グループには普通のえさを与えたところ，1週間後に A グループのねずみのうち 73 匹，B グループでは 65 匹が体重増を示した．この栄養剤の効果を有意水準 5% で判定せよ．

8.5　適合度検定I

理論的にはある確率分布にしたがう確率変数でも，その標本度数分布は確率分布そのものの形にはならない．たとえば，サイコロを 60 回投げるならば，それぞれの目の出る確率は 1/6 と考えられるから，特定の目の出る回数の期待値（これを期待度数と呼ぶ）は $60\times 1/6=10$ である．しかし 60 回の観測の結果各目の生ずる度数が等しく 10 ずつになることはまれである．いまその結果がたとえば次の表 8.2 のようになったとしよう．このような結果を見てすぐこのサイコロの各目の出る確率は等しくないという結論を導くことは正しくないであ

表 8.2　サイコロを 60 回投げたときの目の数の度数分布

サイコロの目の数	1	2	3	4	5	6	合　計
観　測　度　数	14	11	8	10	5	12	60
期　待　度　数	10	10	10	10	10	10	60

ろう．正確なサイコロでもこのような結果が生ずることはありうるからである．この節ではこのような問題すなわち観測度数に理論的に考えられる期待度数が適合するかどうかを判定する方法を考えよう．

確率変数 x があって，x のとる値の範囲が m 個の階級に分割されているものとする．そしてそれぞれの階級に x がはいる確率をそれぞれ $p_1, p_2, \cdots, p_m$ とする．いま x に関する大きさ n の標本があるとき，その標本を階級分けした結果，それぞれの階級の度数を $n_1, n_2, \cdots, n_m$ ただし $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$，になるとしよう．このとき，各階級における期待度数は $np_1, np_2, \cdots, np_m$ である．すなわち表 8.3 のようになっている．

表 8.3

階級の番号	1	2	…	m
観測度数	n_1	n_2	…	n_m
期待度数	np_1	np_2	…	np_m

このとき，各階級[4]に x が落ちる確率に関し次のような仮説をたてる．

$H_0: p_1=p_{01},\ p_2=p_{02},\ \cdots,\ p_m=p_{0m}$

H_1：少なくとも 2 個の p_i について $p_i \fallingdotseq p_{0i}$

ただし，$p_{0i}\ (i=1, \cdots, m)$ は第 i 階級に x が落ちる確率に関して仮説で指定する特定の値である．もちろん $\sum_{i=1}^{m} p_{0i}=1$ とする．

ところで，もし仮説 H_0 が真であれば，次の量

$$w=\sum_{i=1}^{m}\frac{(n_i-np_{0i})^2}{np_{0i}} \tag{1}$$

は n が大なるとき近似的に自由度 $m-1$ のカイ自乗分布にしたがうことが知られている（この証明は 15.4 で行なう）．カイ自乗分布の期待値はその自由度に等しいから

$$E(w)=m-1 \tag{2}$$

である．[5]

4) このような階級はかならずしも実数軸上のいくつかの区間である必要はなく，非数値的ないくつかのカテゴリーであってもよい．

5) カイ自乗分布は近似であるが，（4）式の直後に述べるように，（2）そのものは厳密に成立する．

さてもし H_0 が真でなく，$p_1, \cdots, p_m$ の真の値は $p_{11}, \cdots, p_{1m}$ であるとしよう．このとき（1）の w の期待値はどのようになるだろうか．（1）の分子は

$$(n_i-np_{0i})^2=\{(n_i-np_{1i})+n(p_{1i}-p_{0i})\}^2$$
$$=(n_i-np_{1i})^2+2(n_i-np_{1i})n(p_{1i}-p_{0i})+n^2(p_{1i}-p_{0i})^2 \tag{3}$$

となるが，両辺の期待値をとると最後の式の第 1 項は

$$E(n_i-np_{1i})^2=np_{1i}(1-p_{1i})$$

となり（5.4.2 参照），また第 2 項は

$$E\{2(n_i-np_{1i})n(p_{1i}-p_{0i})\}=2\{E(n_i)-np_{1i}\}n(p_{1i}-p_{0i})$$
$$=2(np_{1i}-np_{1i})n(p_{1i}-p_{0i})=0$$

となるから，（1）の w の期待値は

$$E(w)=\sum_{i=1}^{m}\frac{p_{1i}(1-p_{1i})}{p_{0i}}+\sum_{i=1}^{m}\frac{n(p_{1i}-p_{0i})^2}{p_{0i}} \tag{4}$$

となる．仮説で指定する確率 p_{0i} が真の確率 p_{1i} にすべて等しければ，（4）の右辺第 1 項は $m-1$ に等しく，かつ第 2 項は 0 となる．すなわち（2）に一致する．第 2 項は非負だから $p_{0i}=p_{1i}\ (i=1, \cdots, m)$ のとき最小値 0 に達する．一方第 1 項は $p_{0i}=p_{1i}$ のとき最小値になっている保証はない．$p_{0i} \fallingdotseq p_{1i}$ のときのほうが $p_{0i}=p_{1i}$ のときよりも第 1 項が小さくなる（つまり $m-1$ より小となる）可能性もある．しかし（4）を見れば，n が極端に小さくない限り一般に第 2 項のほうが絶対値として明らかに大きいことが分かるので，全体の $E(w)$ は，差額 $p_{1i}-p_{0i}\ (i=1, \cdots, m)$ が大になるほど大きくなるといえる．

かくして，n が極端に小さくない限り w の平均は H_0 が真のときに比べ，H_0 が真でないとき大きくなる．そこで w を用いて次のような検定を行なうことができる．α を棄却域の大きさとして

$$P(w \geqq c)=\alpha \tag{5}$$

を満たす臨界値 c，すなわち自由度 $m-1$ のカイ自乗の $\alpha\times100\%$ 点 $\chi_\alpha^2(m-1)$ を求め

$w<c$ ならば H_0 を採択

$w \geqq c$ ならば H_0 を棄却

とすればよい．

先のサイコロの例について検定を行なえば

$$H_0: p_1=\frac{1}{6},\ p_2=\frac{1}{6},\ \cdots,\ p_m=\frac{1}{6}$$

H_1：少なくとも２個の p_i が $\frac{1}{6}$ に等しくない

このとき表 8.2 より

$$\begin{aligned} w&=\sum_{i=1}^{n}\frac{(n_i-np_{0i})^2}{np_{0i}} \\ &=\frac{(14-10)^2}{10}+\frac{(11-10)^2}{10}+\frac{(8-10)^2}{10}+\frac{(10-10)^2}{10} \\ &\quad+\frac{(5-10)^2}{10}+\frac{(12-10)^2}{10} \\ &=5 \end{aligned}$$

となる．ところで $\alpha=0.05$ とすれば，自由度 $m-1=5$ のカイ自乗分布より $c=\chi^2_{0.05}(5)=11.1$ であるから，$5.0<11.1$ すなわち仮説 H_0 はサイズ 5% で採択される．

なお，以上の検定はカイ自乗分布による近似を用いているのであるが，このような近似が有効であるためには，各階級の期待度数が大体５以上である必要がある．それゆえもし，期待度数が５未満の階級があればその階級を他の階級と合併させる必要がある．

演　習　問　題

1　男子大学生の身長は平均 168cm，標準偏差 7cm の正規分布で近似できるという仮説を，次の男子大学生 100 人についての観測結果に基づいてサイズ 5% で検定せよ．

身　長(cm)	度　数
161 未満	10
161 以上 168 未満	32
168 以上 175 未満	39
175 以上	19
合　計	100

2　４人の子供をもつ世帯 64 世帯について男の子供の数を調べたところ次の結果を得た．この場合 $p=1/2$ とする２項分布が適合するか．サイズ 5% で検定せよ．

男の子の数	0	1	2	3	4	合　計
世　帯　数	6	18	16	17	7	64

3　前節で述べた割合 p に関する検定の問題は，階級の数 $m=2$ のときの適合度検定の問題に相当している．そこで $m=2$ のとき適合度検定の検定統計量である(1)の w が

$$w=\left[\left(\frac{n_1}{n}-p_{01}\right)\Big/\sqrt{\frac{p_{01}p_{02}}{n}}\right]^2$$

と変形できることを確かめ，このことを用いて２つの検定方式が同一の結論を与えることになることを説明せよ．

8.6　分類基準の独立性の検定

２つ以上の属性について分類したデータを**多重分類のデータ**と呼ぶ．この節では，２重分類のデータについて考える．

次の表 8.4 は，喫煙習慣のある男子 500 人について，１日の平均喫煙本数とその月収(可処分所得)という２つの属性で分類したときの度数を示したものである(括弧の中の数字はあとに説明する)．たとえば１日 1～10 本吸いかつ月収 10 万円未満の人は 500 人中 44 人いた．

表 8.4　喫煙本数と月収による分割表

月　収 ／ １日当り平均喫煙本数	10万円未満	10万円以上20万円未満	20万円以上30万円未満	30万円以上	合　計
1 ～ 10(本)	44 (42)	30 (36)	15 (13)	10 (8)	99
11 ～ 20	136(124)	108(104)	30 (38)	16 (24)	290
21　以　上	33 (47)	42 (40)	21 (15)	15 (9)	111
合　計	213	180	66	41	500

(注)　括弧の中の数字は期待度数．

このような表を**２元の分割表**(two-way contingency table)と呼ぶこともある．多重分類表においても，前節で述べた期待度数の観測度数に対する適合度検定が適用可能であるが，それとともに実用上，次に述べる**分類基準の独立性の検定**が重要である．

1日当り喫煙本数は月収の大きさと関係があるだろうか．もし無関係ならば各所得階層における喫煙本数の分布は同一の型になるであろう．いまx, yという2つの確率変数の結合確率関数を$f(x, y)$とし，xの周辺確率を$f_1(x)$，yの周辺確率を$f_2(y)$としよう．このとき，xとyが統計的に独立ならばx, yのすべての値について

$$f(x, y)=f_1(x)\cdot f_2(y) \tag{1}$$

となる．

いま一般的にxがm個，yがr個の階級に分類されているとしよう．そしてxが第i階級，yが第j階級に属する確率をp_{ij}と書き，xが第i階級に属する周辺確率を$p_{i\cdot}$，yが第j階級に属する周辺確率を$p_{\cdot j}$と書くことにする．上の理由によりもしxとyが独立ならば

$$p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j} \tag{2}$$

である．それゆえ総観測度数をnとすれば各桝の期待度数は$np_{ij}=np_{i\cdot}p_{\cdot j}$で与えられるであろう．

いま各桝の観測度数を$n_{ij}(i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, r)$，観測周辺度数を$n_{i\cdot}(i=1, \cdots, m)$，$n_{\cdot j}(j=1, \cdots, r)$で表わす．ただし

$$\left.\begin{aligned} n_{i\cdot}&=\sum_{j=1}^{r} n_{ij},\quad n_{\cdot j}=\sum_{i=1}^{m} n_{ij} \\ n&=\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{m} n_{ij}=\sum_{i=1}^{m} n_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{r} n_{\cdot j} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

これらの関係は表8.5のように表わせる．この表の括弧の中は期待度数np_{ij}を表わす．

表 8.5　2元の分割表

x \ y	1	2	…	r	合　計
1	n_{11}　(np_{11})	n_{12}　(np_{12})	…	n_{1r}　(np_{1r})	$n_{1\cdot}$
2	n_{21}　(np_{21})	n_{22}　(np_{22})	…	n_{2r}　(np_{2r})	$n_{2\cdot}$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
m	n_{m1}　(np_{m1})	n_{m2}　(np_{m2})	…	n_{mr}　(np_{mr})	$n_{m\cdot}$
合　計	$n_{\cdot 1}$	$n_{\cdot 2}$	…	$n_{\cdot r}$	n

このとき，次のような仮説をたてる．

$$H_0: p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}\qquad i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, r$$

対立仮説は，H_0が成立しないような$p_{ij}(i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, r)$のすべての値である．もし仮説$H_0$が真ならば，次の量

$$w=\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(n_{ij}-\dfrac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\dfrac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n}} \tag{4}$$

は，nが大なるとき近似的に自由度$(m-1)(r-1)$のカイ自乗分布にしたがう.[6]

このときもしH_0が真ならばwの期待値$E(w)$は$(m-1)(r-1)$に等しいが，もしH_0が真でなければ$E(w)$は$(m-1)(r-1)$より大きくなるであろう．この点は1重分類の検定と同様のことが成立する．よってwを用いてH_0の検定を行なうことができる．

たばこの喫煙本数と月収の独立性を検定してみよう．表8.4の括弧の中の数字は$n_{i\cdot}n_{\cdot j}/n$の値である．そこで(4)式によりwを計算すれば

$$w=\frac{(44-42)^2}{42}+\frac{(30-36)^2}{36}+\cdots+\frac{(15-9)^2}{9}$$
$$=18.2$$

である．一方自由度$(m-1)(r-1)=(3-1)(4-1)=6$のカイ自乗の5%点は$\chi^2_{0.05}(6)=12.6$であるから，この帰無仮説H_0は有意水準5%で棄却される．すなわち2つの分類基準は独立でないと判定される．

演　習　問　題

1　ある食品会社が，新しく売り出した食品について市場調査した．(イ)直接調査員を家庭に訪問させて面接のうえ調査する方法と，(ロ)アンケートを郵送して記入のうえ送り返してもらう方法，の2つの方法で次のような結果を得た．

調査方法 \ 評価	よくなった	悪くなった	分からない	合　計
(イ)　面　接	53	37	25	115
(ロ)　郵　送	77	62	30	169
合　計	130	99	55	284

面接法と郵送法とでは評価に差があるといえるかどうかについて，分類基準の独立性の検定により有意水準5%で判定せよ．

6)　証明は A.M.Mood & F.G.Graybill, *Introduction to the Theory of Statistics*, 2nd edition, McGraw-Hill, 1963, pp.311-318 を参照せよ．

第9章

回帰分析 I

9.1 最小自乗法と回帰式

1本の棒鋼の長さが温度によりどのように影響を受けるかその関係を確定したいとしよう．そのために，棒鋼の温度を種々な水準に保ったときに，各水準について1回ずつ長さを測定した．その結果表9.1のような測定値を得た．

表 9.1 棒鋼の温度と長さの測定結果

温　度	長さの測定値
10°C	1002mm
15	1006
20	1009
25	1007
30	1014

温度を横軸に，棒鋼の長さを縦軸にとって(両者の観測値を座標とする)観測点を5個図に記入してみると，図9.1のようになる．温度が上昇すれば，棒鋼の長さは増加することが，この結果から推測される．このような観測点の図を散布図(scatter diagram)という．

経験によれば，他の条件を一定に保ったとき鋼の長さの増加は，その温度の上昇に比例することが知られている．棒鋼の真の長さを y^*(mm)，温度を x(°C) で表わせば

$$y^*=\alpha+\beta x \qquad (1)$$

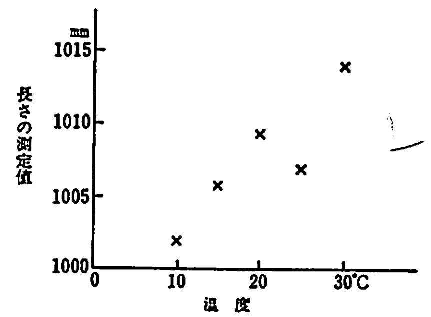
という1次式の関係がある．ただし α, β は定数である．

このような法則が，上の実験でも妥当するとすれば，図9.1の各観測点が一直線上に並んでいないことには2つの原因があると思われる．

第1に，測定そのものに種々な原因で測定誤差がはいってきているためである．このような測定誤差は測定器具や，実験者の個人的な癖，その他もろもろ

の原因で生ずる．そのような測定誤差はなるべく少なくすることが理想であるが，どのような観測においてもある程度の測定誤差はどうしても避けられないものである．このような誤差は観測される変数の中にはいっているので**変数誤差**(error-in-variable)と呼ばれる．

図 9.1 温度と長さの散布図



第2は，温度以外に棒鋼の長さに影響を与えるかもしれない要因(たとえば気圧とか，棒鋼の支え方など)が実験において一定に保たれなかったためである．もしそのように他の要因の影響が働いていたのであれば，その要因を x 以外の変数として(1)式の右辺に追加すべきだったのである．このような x 以外の要因に基づく誤差を**方程式誤差**(error-in-equation)または**ショック**(shock)という．

このような誤差が存在するとき(1)式のような関係の実在を確かめ，しかも α, β のような定数の具体的な値を知るにはどのようにすればよいだろうか．

x_i を i 番目の観測における棒鋼の温度(°C)，y_i を棒鋼の長さの i 番目の測定値(mm)，u_i を i 番目の観測における誤差とし，測定回数を n としよう．また棒鋼の温度 x_i には観測誤差は含まれないとしよう．もし(1)式が正しいとすれば，i 番目の観測における棒鋼の正確な長さ y_i^* は

$$y_i^*=\alpha+\beta x_i \qquad i=1, 2, \cdots, n \qquad (2)$$

のはずである．誤差の定義から，u_i は

$$u_i=y_i-y_i^*=y_i-\alpha-\beta x_i \qquad (3)$$

である．(3)を書き直せば

$$y_i=\alpha+\beta x_i+u_i \qquad i=1, 2, \cdots, n \qquad (4)$$

となる．すなわち実際の測定値 y_i は，$y_i^*=\alpha+\beta x_i$ に誤差 u_i がつけ加わったものである．

(4)において左辺の y_i を従属変数，x_i を独立変数と呼ぶ．また u_i を**確率的攪乱項**(random disturbance あるいはたんに**攪乱項**)または**誤差**(error)と呼ぶ．またデータから α, β の値を推定することを意図している場合には(4)を x 上

の y の母集団回帰式(population regression equation of y on x)と呼ぶ．また β を回帰係数(regression coefficient)，α を定数項(constant term)と呼んでいる．また場合によっては α も β とともに回帰係数と呼ばれることがある．

この場合われわれに知られているのは，観測における各水準の温度 x_i と測定結果 y_i の値，そして y_i^* と x_i が1次式の関係にあるという知識だけで α,β の値は分からない．

昔から科学における多くの実験で，上述の例と同様な状況と問題が生じてきた．そしてその場合に，α や β の値を推定するための手法として開発されてきたのが，以下に述べる**最小自乗法**(least squares method)である．

誤差 u_i は

$$u_i=y_i-\alpha-\beta x_i \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{5}$$

であるが，この式で α,β の値は未知の値である．一方，実験の終わった段階では，$x_i,\ y_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ の値は既知の確定した値である．それゆえ，見方を変えれば，誤差 u_i は，未知のパラメータ α,β の関数であると考えられる．たとえば温度 $x_1=10$ において，測定値 $y_1=1002$ を得ているのだから

$$u_1=y_1-\alpha-\beta x_1=1002-\alpha-10\beta \tag{6}$$

であり，u_1 の大きさは α,β の与え方で決まる．たとえば $\alpha=900,\ \beta=10$ ならば

$$u_1=1002-900-10\times10=2$$

であるし，$\alpha=1050,\ \beta=0.1$ であれば

$$u_1=1002-1050-10\times0.1=-49$$

である．

いま5組の観測値について，その誤差を，α,β の関数と考えれば

$$\left.\begin{aligned}u_1&=1002-\alpha-10\beta\\u_2&=1006-\alpha-15\beta\\u_3&=1009-\alpha-20\beta\\u_4&=1007-\alpha-25\beta\\u_5&=1014-\alpha-30\beta\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

である．α,β を推定する1つの考え方は，誤差は元来それほど大きなものではありえないから，$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_5$ の絶対値がなるべく小さくなるように，α,β の値を与えてやればよい，ということである．しかし，5個の $|u_1|,\ |u_2|,\ \cdots,$

$|u_5|$ を同時に小さくするためにはなんらかの基準が必要である．たとえば $u_1,\ u_2$ を0にする α,β は $\alpha=994,\ \beta=0.8$ であるが，これだと $u_3=9,\ u_4=-7,\ u_5=-4$，となり，これでは全体として小さくなっているとはいいきれない．そこで各誤差の絶対値の和

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+|u_4|+|u_5|=\sum_{i=1}^{5}|u_i| \tag{8}$$

を最小にするように α,β を決めるということが考えられる．このようなやり方を**最小絶対偏差法**という．これによれば確かに(8)を最小にするように，α,β を決めることができるのであるが，α,β の計算は非常にやっかいである．

そこで誤差の自乗の和

$$u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2=\sum_{i=1}^{5}u_i^2 \tag{9}$$

を最小にするように，α,β を決めるという基準が考えられる．このような α,β の決め方を最小自乗法と呼ぶのである．観測値の組の数を一般に n として誤差の自乗和を S で表わせば

$$S=\sum_{i=1}^{n}u_i^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\alpha-\beta x_i)^2 \tag{10}$$

すなわち

$$\begin{aligned}S=&(1002-\alpha-10\beta)^2+(1006-\alpha-15\beta)^2+(1009-\alpha-20\beta)^2\\&+(1007-\alpha-25\beta)^2+(1014-\alpha-30\beta)^2\end{aligned} \tag{11}$$

である．(11)を見れば S は，α,β の2次式になっていることが分かる．またすべて自乗の項の和であるから，S は非負の値であることが分かる．

S を最小ならしめる α,β の値は，次の条件を満たしていることが必要である．

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial\alpha}&=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\alpha-\beta x_i)=0\\\frac{\partial S}{\partial\beta}&=-2\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-\alpha-\beta x_i)=0\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

これを書き直せば

$$\left.\begin{aligned}n\alpha+\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\beta&=\sum_{i=1}^{n}y_i\\\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\alpha+\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot\beta&=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

すなわち，α, β に関する連立1次方程式が得られた．このような式を**正規方程式** (normal equations) と呼ぶ．(13)の上の式に $(1/n)\sum_{i=1}^{n} x_i$ を乗じ，下の式から引けば

$$\left\{\sum x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2\right\}\beta=\sum x_iy_i-\frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)$$

となるから

$$\beta=\frac{\sum x_iy_i-\frac{1}{n}(\sum x_i)(\sum y_i)}{\sum x_i^2-\frac{1}{n}(\sum x_i)^2}=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2} \qquad (14)$$

により β は求められる．ただしこれらの式で $\sum$ はいずれも $i=1$ から n までの和を表わすものとする(以下同様)．また

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i, \qquad \bar{y}=\frac{1}{n}\sum y_i \qquad (15)$$

である．

一方 α の値は，(13)の第1式[1] を n で割れば

$$\alpha+\bar{x}\cdot\beta=\bar{y}$$

から

$$\alpha=\bar{y}-\bar{x}\cdot\beta \qquad (16)$$

により求められる．このようにして得られる α, β は，S を最小ならしめることが証明できる.[2]

1) このように，1つの式番号にいくつかの数式が対応しているときは，上方の式から順番に，たとえば(13)の第1式，(13)の第2式というふうに呼ぶことにする．

2) (10)の S の α, β に関する2次導関数を求めれば次のようになる．

$$\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha^2}=2n$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial\beta^2}=2\sum x_i^2$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial\alpha\partial\beta}=2\sum x_i$$

したがって，(14)，(16)を満たす α, β の値における2次微係数の行列は

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 S}{\partial\alpha^2} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial\alpha\partial\beta}\\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial\alpha\partial\beta} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial\beta^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2n & 2\sum x_i\\ 2\sum x_i & 2\sum x_i^2\end{bmatrix}$$

となるが，これは一般に正値定符号である．よって(14)，(16)を満たす α, β の値において S は最小となっている．詳しくは12.6.2を見よ．

(14)，(16)により得られる α, β の値は，一般にはもちろん真の値そのものではなく，誤差の自乗和最小という1つの基準により求めた推定値にすぎない．そこでそれらを $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ という記号で表わそう．改めて書き直せば

$$\left.\begin{aligned}\hat{\beta}&=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\\ \hat{\alpha}&=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

(17)式を利用して，上の問題の $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ を求めてみよう．そのためには次の表9.2のような形で計算をすると便利である．この表で $(y_i-\bar{y})^2$ の欄は，$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ を計算するのには不要であるが,[3] あとで使うので計算しておく．

表 9.2　$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ の計算のための表

i	y_i	x_i	$y_i-\bar{y}$	$x_i-\bar{x}$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})$
1	1002	10	−5.6	−10	31.36	100	56
2	1006	15	−1.6	−5	2.56	25	8
3	1009	20	1.4	0	1.96	0	0
4	1007	25	−0.6	5	0.36	25	−3
5	1014	30	6.4	10	40.96	100	64
合計	5038	100	0	0	77.20	250	125
平均	1007.6	20					

この表の結果から

$$\bar{y}=1007.6, \qquad \bar{x}=20$$

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=250, \quad \sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=125$$

となったので，(17)式に代入すれば

$$\hat{\beta}=\frac{125}{250}=0.5$$

$$\hat{\alpha}=1007.6-0.5\cdot 20=997.6$$

3) 平均からの偏差 $y_i-\bar{y}$, $x_i-\bar{x}$ の値が y_i, x_i よりかえって桁数が多くなるような場合などには，直接 y_i, x_i の平方和 $\sum y_i^2$, $\sum x_i^2$ と積和 $\sum x_iy_i$ を計算してから

$$\sum(y_i-\bar{y})^2=\sum y_i^2-n\bar{y}^2$$

$$\sum(x_i-\bar{x})^2=\sum x_i^2-n\bar{x}^2$$

$$\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\sum x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}$$

によって平均からの偏差の平方和と積和を求めてもよい．

が得られる．

このようにして得られた $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ を(3)の α, β にそれぞれ代入し u_i 部分を無視した y_i の値を y の推定値(estimated value)，理論値または計算値といい，$\hat{y}_i$ で表わす．すなわち

$$\hat{y}_i=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_i \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{18}$$

(18)式のことを x 上の y の推定回帰式(estimated regression equation of y on x)と呼ぶ．

また y_i の測定値(実際値(actual value)ともいう)と推定値との差を，(回帰の)残差(residuals of regression)と呼ぶ．残差を $\hat{u}_i$ で表わせば

$$\hat{u}_i=y_i-\hat{y}_i=y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{19}$$

である．(12)の第1式によれば

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\alpha-\beta x_i)=0$$

であるが，$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ はこの式を満足している値だから

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)=\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i=0 \tag{20}$$

でなければならない．すなわち残差は合計が0になるという性質をもっている．また同様に(12)の第2式から

$$\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i\hat{u}_i=0 \tag{21}$$

である．すなわち x_i と $\hat{u}_i$ の積和は0になっている．(20)と(21)は回帰の残差がもっている2つの著しい特徴である．

いまの例でこれらを確かめてみよう．表9.3に掲げた計算により分かるように確かに $\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i$, $\sum_{i=1}^{n}x_i\hat{u}_i$ は0になる．

表 9.3　y の推定値と残差

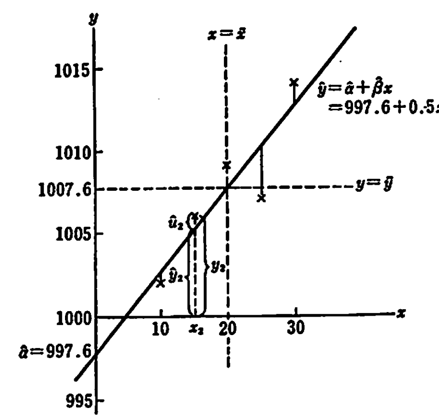
i	x_i	y_i	$\hat{y}_i$	$\hat{u}_i$	$x_i\hat{u}_i$
1	10	1002	1002.6	−0.6	− 6.0
2	15	1006	1005.1	0.9	13.5
3	20	1009	1007.6	1.4	28.0
4	25	1007	1010.1	−3.1	−77.5
5	30	1014	1012.6	1.4	42.0
合　計	100	5038	5038	0	0

さて推定回帰式(18)を x と y の散布図上に書き加えてみよう．図9.2を参照してほしい．推定回帰式を表わす直線(これを推定回帰直線またはたんに回帰直線と呼ぶことが多い)は，5個の観測点(×印)の間を縫うように通っている．(17)の第2式から

$$\bar{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}\bar{x} \tag{22}$$

なので回帰直線はかならず座標$(\bar{x},\ \bar{y})$を通る．いうまでもなく，$x=x_i$ における回帰直線の高さは y の理論値 $\hat{y}_i$ を表わしているから，回帰の残差 $\hat{u}_i$ は，各観測点から回帰直線までの垂直距離を表わしている．観測点が回帰直線より下にあれば，値はマイナスと考える．図9.2には $i=2$ についての y_2, $\hat{y}_2$, $\hat{u}_2$ の関係を図示してある．

図 9.2



各観測点が回帰直線に近ければ近いほど，回帰直線の当てはめは成功したといえよう．

そこで，回帰直線の当てはまりの程度を示す指標を求めるために次のような展開を行なってみよう．従属変数 y_i の平均からの偏差平方和は

$$\sum(y_i-\bar{y})^2=\sum\{(y_i-\hat{y}_i)+(\hat{y}_i-\bar{y})\}^2$$

$$=\sum\{\hat{u}_i+(\hat{y}_i-\bar{y})\}^2$$
$$=\sum\hat{u}_i^2+2\sum\hat{u}_i(\hat{y}_i-\bar{y})+\sum(\hat{y}_i-\bar{y})^2$$

となる．最後の式の第2項は

$$\sum\hat{u}_i(\hat{y}_i-\bar{y})=\sum\hat{u}_i(\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}\bar{x})$$
$$=\hat{\beta}\sum\hat{u}_ix_i-\hat{\beta}\bar{x}\sum\hat{u}_i$$

であるから，(20)，(21)より0に等しい．したがって

$$\sum(y_i-\bar{y})^2=\sum(\hat{y}_i-\bar{y})^2+\sum\hat{u}_i^2 \tag{23}$$

のように2つの平方和に分割できる．明らかに $0\leqq\sum(\hat{y}_i-\bar{y})^2\leqq\sum(y_i-\bar{y})^2$ である．そこで

$$r^2=\frac{\sum(\hat{y}_i-\bar{y})^2}{\sum(y_i-\bar{y})^2}=1-\frac{\sum\hat{u}_i^2}{\sum(y_i-\bar{y})^2} \tag{24}$$

のように定義される r^2 を当てはまりの程度を示す指標として用いる．r^2 を**決定係数** (coefficient of determination) または(回帰の)**寄与率**と呼ぶ．(24)より明らかに

$$0\leqq r^2\leqq 1 \tag{25}$$

が成立する．残差平方和 $\sum\hat{u}_i^2$ が0であれば $r^2=1$ であるし，残差平方和が従属変数の平方和 $\sum(y_i-\bar{y})^2$ に等しければ，r^2 は0になる．前者のような場合には各観測点は完全に回帰直線上にのってしまう．後者の場合は回帰係数 $\hat{\beta}$ が0のとき生ずる．この場合には回帰直線は

$$y=\bar{y} \tag{26}$$

に等しくなる．すなわち x は y の変動には無関係なのである．

$$\hat{y}_i-\bar{y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}\bar{x}=\hat{\beta}(x_i-\bar{x})$$

であるから，(24)は

$$r^2=\frac{\hat{\beta}^2\sum(x_i-\bar{x})^2}{\sum(y_i-\bar{y})^2} \tag{27}$$

となるが，$\hat{\beta}=\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})/\sum(x_i-\bar{x})^2$ ((17)の第1式)を代入すれば

$$r^2=\frac{\{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2\cdot\sum(y_i-\bar{y})^2} \tag{28}$$

となる．また $\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$ の符号をとる r^2 の平方根を r で表わすと

$$r=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2\cdot\sum(y_i-\bar{y})^2}} \tag{29}$$

という関係が得られる．この(29)式の r を**標本相関係数** (sample correlation coefficient) と呼ぶ．この標本相関係数については次章で詳しく述べる．

決定係数 r^2 を計算する場合には，通常(28)式を用い，そのあとで残差平方和を

$$\sum\hat{u}_i^2=(1-r^2)\sum(y_i-\bar{y})^2 \tag{30}$$

((24)から導ける)を使って計算する．

表9.2の数値で計算すれば，決定係数は

$$r^2=\frac{(125)^2}{(250)\cdot(77.2)}\fallingdotseq 0.8096$$

標本相関係数は($\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=125$ が正の値だから)

$$r=\sqrt{0.8096}\fallingdotseq 0.8998$$

となる．また(30)を使用しての残差平方和は

$$\sum_{i=1}^{5}\hat{u}_i^2=(1-0.8096)\cdot(77.2)=14.69888$$

となる．試みに表9.3で計算した $\hat{u}_i$ から直接に平方和を求めれば

$$\sum\hat{u}_i^2=(-0.6)^2+(0.9)^2+(1.4)^2+(-3.1)^2+(1.4)^2=14.7 \tag{31}$$

となる．両者の相違(0.00112)は r^2 を計算する際の丸めの誤差によるものである．

演習問題

1　次のデータに関し以下の問に答えよ．

x	12	5	2	21
y	7	1	4	8

(a)　x と y の散布図を描け．

(b)　x 上の y の推定回帰式を最小自乗法により求め，(a)の散布図上に記入せよ．また決定係数を求めよ．

(c)　y 上の x の推定回帰式を求め，散布図上に記入せよ．

2　ある工場で，1月から6月までの各月の機械の故障発生件数と，各月の1日1機械当りの平均稼働時間とを調査したところ次のようになった．

月	1	2	3	4	5	6
故障発生件数	105	120	108	142	136	127
平均稼働時間	7.2	8.1	8.9	10.1	10.4	9.3

このデータで y を故障発生件数とし x を平均稼働時間とするとき，x 上の y の推定回

帰式と標本相関係数を計算せよ．

9.2 単純回帰模型

一般にある確率変数 y があって，y の期待値 $E(y)$ が，変数 x により影響を受けるものとし，この関係が関数 $\varphi(x)$ で表わされるものとしよう．ただし x は確率変数ではないとする．すなわち

$$E(y)=\varphi(x) \tag{1}$$

である．[4] この $\varphi(x)$ を x 上の y の回帰関数(regression function)と呼ぶ．このとき

$$u=y-\varphi(x) \tag{2}$$

で定義される u を攪乱項と呼ぶ．攪乱項 u の期待値は

$$E(u)=E(y)-\varphi(x)=\varphi(x)-\varphi(x)=0$$

である．(2)は次のようにも書ける．

$$y=\varphi(x)+u \tag{3}$$

回帰関数 $\varphi(x)$ に最も単純な形として

$$\varphi(x)=\alpha+\beta x \tag{4}$$

を想定するとき，(3)は

$$y=\alpha+\beta x+u \tag{5}$$

という形になる．前述のように $E(u)=0$ であるが，u の分散 $E(u^2)=E(y-\alpha-\beta x)^2$ は x の値に無関係に一定であるとし，これを σ^2 で表わす．

定数 α, β, σ^2 などの値を推定するためには，非確率変数 x に種々な値をとらせ，それに応じての y の値を観測する必要がある．このような n 個の観測値の組 (x_i, y_i) $i=1, 2, \cdots, n$ を，大きさ n の2次元の標本と呼ぶ．これらの各組についても上記の関係が成立するから

$$y_i=\alpha+\beta x_i+u_i \qquad i=1, 2, \cdots, n \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} E(u_i)&=0 \\ E(u_i^2)&=\sigma^2 \end{aligned}\right\} \qquad i=1, 2, \cdots, n \tag{7}$$

である．また攪乱項 u_1, u_2, $\cdots$, u_n は統計的に独立であるとする．

4) あるいは x も確率変数として x と y の結合分布を考えたとき，$\varphi(x)$ は x を与えたときの y の条件付期待値 $E(y|x)$ であるといってもよい．

以上のような (x_i, y_i) $i=1, 2, \cdots, n$ に関する模型を x 上の y の単純回帰模型(simple regression model)と呼ぶ．[5] この場合(6)を x 上の y の母集団回帰式と呼ぶことや，x_i, y_i, α, β の呼び方については前節に述べたとおりである．独立変数 x_i は非確率変数である．このように模型の外部でその値が指定される変数は，指定変数(fixed variable)と呼ばれる．

さて，このような回帰模型において，前節で述べた最小自乗法により，α, β の推定量 $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ が得られるのであるが，そのような推定量 $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ は，α, β とどのような関係になるであろうか．

そこで，理論的な考察を進める前に，次のような実験を行なってみよう．

それは，あらかじめ母集団回帰式のパラメータの値を与えておき，u_i に種々な値を入れると，推定量 $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ がどのような値になるかを見るのである．

棒鋼の長さの測定値 y_i の母集団回帰式は次のごとくであるとしよう．

$$y_i=1000+0.4x_i+u_i \tag{8}$$

このとき実験者は温度を $x_i=10, 15, 20, 25, 30$ の5つの水準に保って，各水準1回ずつ長さの測定を行なう．その際，誤差 u_i の実現の仕方いかんで観測値 y_i は影響を受けるのであるが，その実現の仕方として表9.4にあるような10

表 9.4　u_i の実現の仕方に関する10個のケース

i ＼ ケース	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	−2	3	−1	−1	−1	1	−4	4	0	−2
2	0	0	−4	3	0	−1	−2	2	0	−2
3	1	0	4	−1	−1	1	0	0	0	−2
4	−3	−3	2	−3	−2	−1	2	−2	0	−2
5	2	2	−4	0	0	1	4	−4	0	−2

個のケースを想定してみた．そうするとたとえばケース1では，y_i の観測値は

$$y_1=1000+0.4\times10-2=1002$$
$$y_2=1000+0.4\times15+0=1006$$
$$y_3=1000+0.4\times20+1=1009$$
$$y_4=1000+0.4\times25-3=1007$$
$$y_5=1000+0.4\times30+2=1014$$

5) または独立1変数の線形回帰模型と呼ばれる．この場合線形とは y_i が母数 α, β の1次式となっていることを意味する．

表 9.5　10個のケースに対する回帰の推定結果

ケ ー ス		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(1) y_i	1	1002	1007	1003	1003	1003	1005	1000	1008	1004	1002
	2	1006	1006	1002	1009	1006	1005	1004	1008	1006	1004
	3	1009	1008	1012	1007	1007	1009	1008	1008	1008	1006
	4	1007	1007	1012	1007	1008	1009	1012	1008	1010	1008
	5	1014	1014	1008	1012	1012	1013	1016	1008	1012	1010
(2) $\hat{\alpha}$		997.6	1002.4	999.4	1001.2	999.2	1000.2	992.0	1008.0	1000.0	998.0
(3) $\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}$		2.970	3.350	5.543	3.250	1.296	1.697	0	0	0	0
(4) $\hat{\beta}$		0.500	0.300	0.400	0.320	0.400	0.400	0.800	0	0.400	0.400
(5) $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}$		0.140	0.158	0.261	0.153	0.061	0.080	0	0	0	0
(6) $\hat{\sigma}^2$		4.90	6.23	17.07	5.87	0.93	1.60	0	0	0	0
(7) r^2		0.8095	0.5461	0.4386	0.5926	0.9345	0.8928	1.0000	—	1.0000	1.0000
(8) r		0.8997	0.7390	0.6623	0.7698	0.9667	0.9449	1.0000	—	1.0000	1.0000

となる．表 9.5 には各ケースの y_i の実現値が示されている．特にケース1は前節に掲げた例のデータにほかならない．

表 9.5 の下半分には，それぞれのケースについて最小自乗法で回帰式を推定した結果を掲げてある．

ケース1からケース5までは，u_i の値としてはいわば無作為な値を与えてあるが，ケース 6〜10 では u_i に作為的な値をとらせてある．後者のケースについてはあとで検討することにして，ケース1〜5の結果をみると，$\alpha=1000$ に対して，$\hat{\alpha}$ として((2)欄)

997.6, 1002.4, 999.4, 1001.2, 999.2

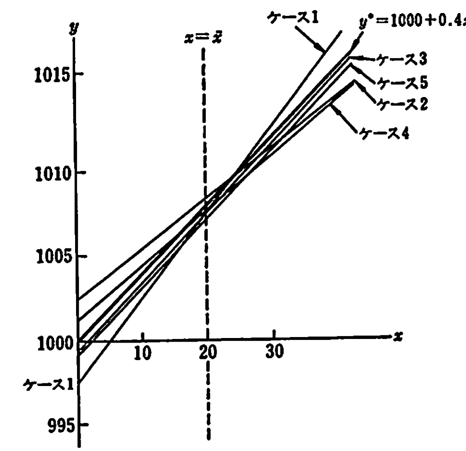
という推定値が得られている．また $\beta=0.40$ に対して，$\hat{\beta}$ として((4)欄)

0.50, 0.30, 0.40, 0.32, 0.40

の5つの推定値が得られた．このように u_i の実現値の違いによって，$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ は真のパラメータの回りにばらつく(運がよければ一致することもある)ことが分かる．これら5つのケースについて，推定回帰式と母集団回帰式との関係を描いてみると，図 9.3 のようになる．この図から，推定回帰直線の群が母集団回帰直線(太線)の回りを囲んでいることが分かる．

ケース6では u_i に +1, −1 を交互にとらせている．またケース 7〜10 では u_i を x_i の増加に比例させたり，一定値にしたりしている．その結果を同様に

図 9.3　推定回帰直線と母集団回帰直線
—その1—



図示すると，図 9.4 のようになる．ケース9では u_i をすべて0においた結果，当然推定回帰式と母集団回帰式は一致したので図には書いてない．

以上の実験から，$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ のばらつく様子が大体理解できたであろう．そこで次に，$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ の平均，分散などを理論的に求めてみよう．

まず $\hat{\beta}$ の期待値については，前節(17)の第1式より

$$\hat{\beta}=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sum(x_i-\bar{x})[\beta(x_i-\bar{x})+(u_i-\bar{u})]}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$$

$$=\beta+\frac{\sum(x_i-\bar{x})(u_i-\bar{u})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}=\beta+\frac{\sum(x_i-\bar{x})u_i}{\sum(x_i-\bar{x})^2} \tag{9}$$

となる.[6] ここで

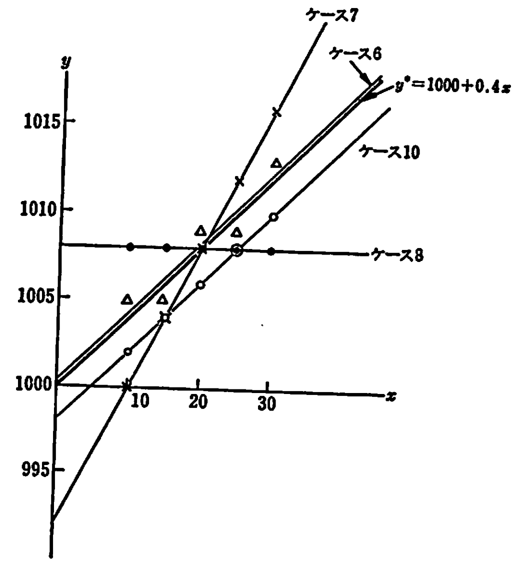
$$a_i=\frac{x_i-\bar{x}}{\sum(x_i-\bar{x})^2} \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{10}$$

とおくと(9)は

$$\hat{\beta}=\beta+\sum_{i=1}^{n}a_iu_i \tag{9'}$$

6)　$\sum(x_i-\bar{x})(u_i-\bar{u})=\sum(x_i-\bar{x})u_i-\bar{u}\sum(x_i-\bar{x})=\sum(x_i-\bar{x})u_i$ である．同様にして $\sum(x_i-\bar{x})(u_i-\bar{x})=\sum x_i(u_i-\bar{u})$ も成立する．

図 9.4　推定回帰直線と母集団回帰直線
—その2—



と表わせる．$a_1, \cdots, a_n$ は一定値だから，(9′)の期待値をとると

$$E(\hat{\beta})=\beta+\sum a_i E(u_i)=\beta \tag{11}$$

が成立する．

また $\hat{\alpha}$ の平均は前節(9.1.17)の第2式より

$$\begin{aligned} E(\hat{\alpha})&=E(\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x})=E(\bar{y})-E(\hat{\beta})\bar{x} \\ &=\alpha+\beta\bar{x}-\beta\bar{x}=\alpha \end{aligned} \tag{12}$$

となる．すなわち最小自乗法によって求められる $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ は α, β に対する不偏推定量である．

(9′)を用いると

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{\beta}}^2&=E(\hat{\beta}-\beta)^2=E(\sum a_i u_i)^2 \\ &=\sum_i\sum_j a_i a_j E(u_i u_j) \end{aligned}$$

である．ここで仮定により $E(u_i^2)=\sigma^2$ であり，また $i\neq j$ のとき u_i と u_j は統

計的に独立だから $E(u_i u_j)=\mathrm{Cov}(u_i, u_j)=0$ である．それゆえ

$$\sigma_{\hat{\beta}}^2=\sum a_i^2\sigma^2=\frac{\sigma^2}{[\sum(x_i-\bar{x})^2]^2}\sum(x_i-\bar{x})^2=\frac{\sigma^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2} \tag{13}$$

となる．

次に $\hat{\alpha}$ の分散は

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{\alpha}}^2&=E(\hat{\alpha}-\alpha)^2=E(\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}-\alpha)^2=E\{(\beta-\hat{\beta})\bar{x}+\bar{u}\}^2 \\ &=E\{(\hat{\beta}-\beta)^2\bar{x}^2-2(\hat{\beta}-\beta)\bar{x}\bar{u}+\bar{u}^2\} \\ &=E(\hat{\beta}-\beta)^2\cdot\bar{x}^2-2E\{(\hat{\beta}-\beta)\bar{x}\bar{u}\}+E(\bar{u}^2) \end{aligned}$$

ここで，最後の式の第1項は $\sigma_{\hat{\beta}}^2\bar{x}^2$，第3項は u_i の標本平均の分散であるから $(1/n)\sigma^2$ に等しい．また第2項は

$$\begin{aligned} E\{(\hat{\beta}-\beta)\bar{x}\bar{u}\}&=E\left\{(\sum a_i u_i)\bar{x}\left(\frac{1}{n}\sum u_i\right)\right\} \\ &=\frac{\bar{x}}{n}\sum_i\sum_j a_i E(u_i u_j) \\ &=\frac{\bar{x}}{n\sum(x_i-\bar{x})^2}\sigma^2\sum_i(x_i-\bar{x})=0 \end{aligned} \tag{14}$$

である．それゆえ

$$\sigma_{\hat{\alpha}}^2=\left\{\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right\}\sigma^2 \tag{15}$$

が得られる．

$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ の共分散 $\mathrm{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})=E\{(\hat{\alpha}-\alpha)(\hat{\beta}-\beta)\}$ は

$$\begin{aligned} E\{(\hat{\alpha}-\alpha)(\hat{\beta}-\beta)\}&=E\{((\beta-\hat{\beta})\bar{x}+\bar{u})(\hat{\beta}-\beta)\} \\ &=-E(\hat{\beta}-\beta)^2\cdot\bar{x}+E\{(\hat{\beta}-\beta)\bar{u}\} \end{aligned}$$

第2項は(14)により0であるから

$$\mathrm{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})=-\frac{\bar{x}}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\sigma^2 \tag{16}$$

が得られる．

次に，標本の大きさ n をふやしたときに推定量 $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ はどのようになるかを考えてみよう．(15)と(13)を書き直すと

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\hat{\alpha}}^2&=\frac{1}{n}\left[1+\frac{\bar{x}^2}{(\sum x_i^2/n)-\bar{x}^2}\right]\sigma^2 \\ \sigma_{\hat{\beta}}^2&=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{(\sum x_i^2/n)-\bar{x}^2}\right]\sigma^2 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

となる．この2つの式を見ると，nをどんどんふやしていくとき，$\bar{x}$と$\sum_{i=1}^{n} x_i^2/n$があまり変化しなければ，大括弧の中味もあまり変化しないので右辺はいくらでも小さくなっていくと考えられる．そこで，c_1, c_2を一定値として

$$\lim_{n\to\infty}\bar{x}=c_1,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=c_2,\qquad c_2\neq c_1^2 \tag{18}$$

を仮定する．この仮定が成立すれば，(17)より明らかに

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sigma_{\hat{\alpha}}^2=0\cdot[c_2/(c_2-c_1^2)]\,\sigma^2=0\\&\lim_{n\to\infty}\sigma_{\hat{\beta}}^2=0\cdot[1/(c_2-c_1^2)]\,\sigma^2=0\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

が成立する．ところで(12)，(11)より$E(\hat{\alpha})=\alpha$，$E(\hat{\beta})=\beta$であるから，$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$はともに不偏推定量でかつ分散は$n\to\infty$のとき0に収束する．それゆえ，7.5.2で標本平均が母平均に対する一致推定量であることを示したのと同じ論法で，これら$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$もα, βに対する一致推定量であることがいえる．

以上の結果を次のような形にまとめておこう．

〔定理 9.1〕 単純回帰模型において，パラメータα, βに対する最小自乗法による推定量$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$は，α, βに対する不偏推定量である．$\hat{\alpha}$の分散$\sigma_{\hat{\alpha}}^2$，$\hat{\beta}$の分散$\sigma_{\hat{\beta}}^2$，$\hat{\alpha}$と$\hat{\beta}$の共分散$\mathrm{Cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$はそれぞれ$\{1/n+\bar{x}^2/\sum(x_i-\bar{x})^2\}\sigma^2$，$\sigma^2/\sum(x_i-\bar{x})^2$，$-\{\bar{x}/\sum(x_i-\bar{x})^2\}\sigma^2$に等しい．また，仮定(18)が成立するならば$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$はα, βに対する一致推定量である．

撹乱項の分散σ^2の推定量には，残差平方和を$n-2$で割ったものを用いる．

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum\hat{u}_i^2}{n-2} \tag{20}$$

$\hat{\sigma}^2$は残差分散(residual variance)とも呼ばれる．$\hat{\sigma}^2$はσ^2の不偏推定量である．それは次のように証明される．

$$\begin{aligned}\sum\hat{u}_i^2&=\sum\hat{u}_i(y_i-\hat{y}_i)=\sum\hat{u}_i(\alpha+\beta x_i+u_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}x_i)\\&=\sum\hat{u}_i\{(\alpha-\hat{\alpha})+(\beta-\hat{\beta})x_i+u_i\}\\&=(\alpha-\hat{\alpha})\sum\hat{u}_i+(\beta-\hat{\beta})\sum x_i\hat{u}_i+\sum\hat{u}_iu_i\\&=\sum\hat{u}_iu_i\\&=\sum\{-(\hat{\alpha}-\alpha)-(\hat{\beta}-\beta)x_i+u_i\}u_i\\&=-(\hat{\alpha}-\alpha)\sum u_i-(\hat{\beta}-\beta)\sum x_iu_i+\sum u_i^2\end{aligned} \tag{21}$$

ここで

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}-\alpha&=\bar{y}-\hat{\beta}\bar{x}-\alpha=\alpha+\beta\bar{x}+\bar{u}-\hat{\beta}\bar{x}-\alpha\\&=-(\hat{\beta}-\beta)\bar{x}+\bar{u}\end{aligned}$$

より(21)の最後の式の第1項は

$$\begin{aligned}-(\hat{\alpha}-\alpha)\sum u_i&=(\hat{\beta}-\beta)\sum u_i\bar{x}-\frac{1}{n}\left(\sum u_i\right)^2\\&=\bar{x}\left(\sum a_iu_i\right)\left(\sum u_i\right)-\frac{1}{n}\left(\sum u_i\right)^2\\&=\bar{x}\sum_i\sum_j a_iu_iu_j-\frac{1}{n}\left(\sum u_i\right)^2\end{aligned}$$

となる(途中(9′)を用いている)．また第2項は

$$\begin{aligned}-\sum(\hat{\beta}-\beta)x_iu_i&=-\sum_j\left(\sum_i a_iu_i\right)x_ju_j\\&=-\sum_i\sum_j a_ix_ju_iu_j\end{aligned}$$

となる．それゆえ

$$\begin{aligned}E\left(\sum\hat{u}_i^2\right)&=\bar{x}\sum_i\sum_j a_iE(u_iu_j)-\frac{1}{n}\sum_i\sum_j E(u_iu_j)\\&\quad-\sum_i\sum_j a_ix_jE(u_iu_j)+\sum_i E(u_i^2)\\&=0-\frac{1}{n}n\sigma^2-\frac{1}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\sum_i(x_i-\bar{x})x_i\sigma^2+n\sigma^2\\&=-\sigma^2-\sigma^2+n\sigma^2\\&=(n-2)\sigma^2\end{aligned} \tag{22}$$

それゆえ

$$E\left(\frac{\sum\hat{u}_i^2}{n-2}\right)=E(\hat{\sigma}^2)=\sigma^2 \tag{23}$$

このことから，$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$の分散，共分散の不偏推定量として

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}^2=\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right)\hat{\sigma}^2\\&\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}^2=\frac{1}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\hat{\sigma}^2\\&\widehat{\mathrm{Cov}}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})=-\frac{\bar{x}}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\hat{\sigma}^2\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

を用いればよいことが分かる．$\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}$, $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}$をそれぞれ$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$の推定標準偏差またはたんに標準誤差と呼ぶ．

前述の棒鋼の例における $\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}$, $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}$, $\hat{\sigma}^2$ の値が表 9.5 の(3), (5), (6)欄に計算されている．

演習問題

1　前節演習問題1の(b)において推定された回帰式について，その残差分散，推定回帰係数 $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ の推定標準偏差を計算せよ．

2　前節演習問題2について，その残差分散と推定回帰係数 $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ の分散推定値，共分散推定値を計算せよ．

9.3　回帰における統計的推論

前節の単純回帰模型では，撹乱項 u_i はたんに平均0，分散 σ^2 の確率変数と仮定したのみで，その分布の型を特定化していなかった．以下の統計的推論では，u_i を正規分布する確率変数と仮定する．

〔仮定〕　単純回帰模型における撹乱項 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ は相互に独立に平均0，分散 σ^2 の正規分布 $N(0, \sigma^2)$ にしたがう．

このように仮定を追加した場合の単純回帰模型を**単純正規回帰模型**(simple normal regression model)と呼ぶ．この模型においては前節で述べた最小自乗法による推定量について次のような重要な命題が成立する．

1°　$\hat{\alpha}$ の周辺分布[7] は正規分布 $N(\alpha, \sigma_{\hat{\alpha}}^2)$ である．

2°　$\hat{\beta}$ の周辺分布は正規分布 $N(\beta, \sigma_{\hat{\beta}}^2)$ である．

3°　$\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2/\sigma^2$ は自由度 $n-2$ のカイ自乗分布にしたがう．

4°　$\hat{\alpha}$ と $\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2$, $\hat{\beta}$ と $\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2$ はそれぞれ相互に独立に分布する．

ここで $\sigma_{\hat{\alpha}}^2$, $\sigma_{\hat{\beta}}^2$ はそれぞれ(9.2.15), (9.2.13)式で与えられている推定回帰係数の分散である．これらの命題の証明は，より一般的な形の定理である**定理16.3**の証明において述べる．

7)　$\hat{\alpha}$ の周辺分布とは $\hat{\alpha}$ と $\hat{\beta}$ の結合分布を考えたときの $\hat{\alpha}$ の単独の分布の意味である．$\hat{\beta}$ の周辺分布も同様．$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ の結合分布は2変量正規分布(次章参照)である．

さて**定理6.3**によれば，v を正規分布 $N(0, 1)$，w を自由度 m のカイ自乗分布にそれぞれしたがう確率変数とし，かつ v, w が相互に独立に分布するとすれば

$$t=\frac{v}{\sqrt{w/m}} \tag{1}$$

は自由度 m のステューデントの t 分布にしたがう．そこで

$$v=\frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sigma_{\hat{\alpha}}} \tag{2}$$

$$w=\frac{\sum \hat{u}_i^2}{\sigma^2} \tag{3}$$

とおけば，v は命題1°より $N(0, 1)$，w は3°より自由度 $n-2$ のカイ自乗分布，また4°より両者は相互に統計的に独立であるから

$$t=\frac{v}{\sqrt{w/m}}=\frac{(\hat{\alpha}-\alpha)\sigma}{\sqrt{\sum \hat{u}_i^2/(n-2)}\cdot\sigma_{\hat{\alpha}}} \tag{4}$$

は自由度 $n-2$ のステューデントの t 分布にしたがう．(9.2.20), (9.2.15)式よりそれぞれ

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum \hat{u}_i^2}{n-2}$$

$$\sigma_{\hat{\alpha}}=\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}}\cdot\sigma$$

であるから(4)は

$$t=\frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}}\cdot\hat{\sigma}}=\frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}} \tag{5}$$

となる．ただし(9.2.24)の第1式に定義したように $\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}=\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}}\cdot\hat{\sigma}$ である．

上とまったく同様な手続きにより

$$t=\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{\frac{1}{\sum(x_i-\bar{x})^2}}\cdot\hat{\sigma}}=\frac{\hat{\beta}-\beta}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}} \tag{6}$$

は自由度 $n-2$ のステューデントの t 分布にしたがう．

このことを利用すれば，回帰係数 α, β についての区間推定が行なえる．

たとえば α については

$$P\left(-t_{0.05}<\frac{\hat{\alpha}-\alpha}{\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}}<t_{0.05}\right)=0.95$$

が成立することから

$$P(\hat{\alpha}-t_{0.05}\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}<\alpha<\hat{\alpha}+t_{0.05}\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}})=0.95 \tag{7}$$

となる．それゆえ α に対する 95% 信頼限界は

$$\hat{\alpha}\pm t_{0.05}\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}=\hat{\alpha}\pm t_{0.05}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}}\cdot\hat{\sigma} \tag{8}$$

によって与えられる．

まったく同様にして，β に対する 95% 信頼限界は

$$\hat{\beta}\pm t_{0.05}\hat{\sigma}_{\beta}=\hat{\beta}\pm t_{0.05}\frac{1}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}}\cdot\hat{\sigma} \tag{9}$$

によって与えられる．

棒鋼の長さの測定実験の例のケース1について，α, β それぞれに対する 95% 信頼区間を求めてみよう．

まず攪乱項 u の推定標準偏差 $\hat{\sigma}$ は $\sum\hat{u}_i^2=14.7$ ((9.1.31) 参照)，$n=5$ であるから

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\sum\hat{u}_i^2}{n-2}}=\sqrt{\frac{14.7}{5-2}}\fallingdotseq 2.21$$

である．また $\bar{x}=20$, $\sum(x_i-\bar{x})^2=250$ (表 9.2 参照) であるから，$\hat{\alpha}$ の推定標準偏差は

$$\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}=\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{20^2}{250}}\cdot(2.21)\fallingdotseq 2.97$$

となる．$\hat{\alpha}=997.6$, 自由度 $n-2=3$ において t の 5% 水準は $t_{0.05}\fallingdotseq 3.18$ であるから，α に対する 95% 信頼区間は

$$997.6\pm 3.18\times 2.97\fallingdotseq 997.6\pm 9.4=988.2,\ 1007.0$$

となる．すなわち α は 988.2 と 1007.0 の間にあることが 95% の信頼係数をもっていえる．

同様にして β に対する 95% 信頼限界は次のようになる．

$$\hat{\beta}\pm t_{0.05}\frac{1}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}}\hat{\sigma}=0.500\pm 3.18\frac{2.21}{\sqrt{250}}$$

$$\fallingdotseq 0.500\pm 0.445=0.005,\ 0.945$$

次に，仮説検定の問題を考えてみよう．最も良く行なわれるのは，回帰係数

β の有意性検定である．これは $\beta=0$ の帰無仮説が棄却しうるかどうかをテストすることによって，推定回帰係数 $\hat{\beta}$ の有意性を調べるものである．そこで

$H_0: \beta=0$　(帰無仮説)

$H_1: \beta\neq 0$　(対立仮説)

を有意水準 5% で検定しよう．

$\beta=0$ であるから，$t=(\hat{\beta}-\beta)/\hat{\sigma}_{\beta}=\hat{\beta}/\hat{\sigma}_{\beta}$ となり，

$$P\left(\left|\frac{\hat{\beta}}{\hat{\sigma}_{\beta}}\right|\geqq t_{0.05}\right)=0.05 \tag{10}$$

である．これから

$$P(\hat{\beta}\leqq -t_{0.05}\hat{\sigma}_{\beta}\ \text{あるいは}\ \hat{\beta}\geqq t_{0.05}\hat{\sigma}_{\beta})=0.05$$

である．したがって，帰無仮説 H_0 の棄却域は

$$\hat{\beta}\leqq -t_{0.05}\hat{\sigma}_{\beta}\ \text{および}\ \hat{\beta}\geqq t_{0.05}\hat{\sigma}_{\beta}$$

である．

先の例では $t_{0.05}\hat{\sigma}_{\beta}=3.18\times 0.14=0.445$ であるから

$$\hat{\beta}=0.500>0.445 \tag{11}$$

となり，$\hat{\beta}$ は棄却域に落ちる．すなわち，帰無仮説 $H_0: \beta=0$ は有意水準 5% で棄却される．別のいい方をすれば，推定回帰係数 $\hat{\beta}=0.500$ は有意水準 5% で有意であるということになる．

$t=\hat{\beta}/\hat{\sigma}_{\beta}$ を t 値 (t value) と称する．t 値を計算して，直接 $t_{0.05}$ 等と比較することがある．上の例では t 値は $t=0.5/0.14\fallingdotseq 3.57$ である．$t_{0.05}=3.18$, $t_{0.01}=5.84$ であるから t 値は $t_{0.05}$ より大であるが $t_{0.01}$ より小である．よって，この帰無仮説は有意水準 5% では棄却されるが 1% では棄却されない．

演　習　問　題

1　下記の表は全国勤労者世帯の1世帯当りの年平均1カ月当り実質可処分所得 Y と実質消費支出 C に関する12年間のデータである．このデータにより消費関数 $C=\alpha+\beta Y+u$ (u は攪乱項) を推定するのに Y 上の C の単純回帰模型を仮定しよう．回帰係数 α および β (限界消費性向) の推定値およびその推定標準偏差を計算し，α および β に対する 95% 信頼区間を求めよ．

（単位　千円）

暦年	1969	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
実質可処分所得	229	245	255	270	288	288	296	293	298	302	310	306
実質消費支出	185	195	203	212	223	218	228	227	230	233	240	238

（注）　可処分所得は実収入から税金などの非消費支出を引いた残額である．各実質額は1980年基準の総合消費者物価指数で除すことにより算出した．

（資料）　総理府統計局『家計調査年報』．

2　本章第1節演習問題2において定数項 $\alpha=0$ という帰無仮説を1% の有意水準で検定せよ．

9.4　予　　測

先の棒鋼の長さの測定のケース1で

$$\hat{y}_i=997.6+0.5x_i \tag{1}$$

なる推定回帰式が得られた．この式を使って，温度 x が 35°C のときの棒鋼の長さを推定するには $x_i=35$ とおいて

$$\hat{y}=997.6+(0.5)\cdot(35)=1015.1$$

すなわち 1015.1mm であるということになる．このように，独立変数が特定の値になったときの従属変数 y の値を推定することを y の値の**予測** (prediction) という．

いま $x=x_0$ のときの y の**予測値**を $\hat{y}_0$ と書けば

$$\hat{y}_0=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_0 \tag{2}$$

一方，そのときの y の実際値を y_0 と書けば

$$y_0=\alpha+\beta x_0+u_0 \tag{3}$$

ただし，u_0 はその際の攪乱項である．u_0 は $u_1, u_2, \cdots, u_n$ と同様に正規分布 $N(0, \sigma^2)$ にしたがう確率変数で，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ と独立に分布すると仮定する．

予測の誤差を q で表わせば

$$\begin{aligned} q&=\hat{y}_0-y_0=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_0-\alpha-\beta x_0-u_0 \\ &=(\hat{\alpha}-\alpha)+(\hat{\beta}-\beta)x_0-u_0 \end{aligned} \tag{4}$$

である．q の期待値は

$$E(q)=E(\hat{\alpha}-\alpha)+E(\hat{\beta}-\beta)x_0-E(u_0)=0 \tag{5}$$

である．またその分散は

$$\begin{aligned} \sigma_q{}^2&=E(q^2)=E\{(\hat{\alpha}-\alpha)+(\hat{\beta}-\beta)x_0-u_0\}^2 \\ &=E(\hat{\alpha}-\alpha)^2+E(\hat{\beta}-\beta)^2x_0{}^2+E(u_0{}^2)+2E\{(\hat{\alpha}-\alpha)(\hat{\beta}-\beta)\}x_0 \\ &\quad-2E\{(\hat{\alpha}-\alpha)u_0\}-2E\{(\hat{\beta}-\beta)u_0\}x_0 \\ &=\sigma_{\hat{\alpha}}{}^2+\sigma_{\hat{\beta}}{}^2x_0{}^2+\sigma^2+2\,\mathrm{Cov}(\hat{\alpha},\ \hat{\beta})\cdot x_0 \\ &\quad-2E\{(\hat{\alpha}-\alpha)u_0\}-2E\{(\hat{\beta}-\beta)u_0\}x_0 \end{aligned}$$

この最後の式で，終りの2項は，$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ がそれぞれ u_0 と独立だから，0となる．したがって(9.2.15)，(9.2.13)式および(9.2.16)式より

$$\sigma_q{}^2=\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right)\sigma^2+\frac{\sigma^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}x_0{}^2+\sigma^2-2\frac{\bar{x}\sigma^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}x_0$$

となる．これを整理すれば

$$\sigma_q{}^2=\left\{\frac{n+1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right\}\sigma^2 \tag{6}$$

が得られる．

(6)式で σ^2 のかわりに残差分散 $\hat{\sigma}^2$ を用いて

$$\hat{\sigma}_q{}^2=\left\{\frac{n+1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right\}\hat{\sigma}^2 \tag{7}$$

を定義する．これは，**予測誤差の分散 $\sigma_q{}^2$ の不偏推定量**であること(すなわち $E(\hat{\sigma}_q{}^2)=\sigma_q{}^2$) は明らかであろう．

ところで

$$v=\frac{q}{\sigma_q} \tag{8}$$

は正規分布 $N(0, 1)$ にしたがうことが証明できる．[8] 一方，前に述べたように，

$$w=\frac{\sum\hat{u}_i{}^2}{\sigma^2}$$

は自由度 $n-2$ のカイ自乗分布にしたがう．またこれら v, w は統計的に独立であることが証明できる．[9] それゆえ

$$t=\frac{q/\sigma_q}{\sqrt{\sum\hat{u}_i{}^2/\{\sigma^2(n-2)\}}}=\frac{q}{\hat{\sigma}_q}=\frac{\hat{y}_0-y_0}{\hat{\sigma}_q} \tag{9}$$

は自由度 $n-2$ のステューデントの t 分布にしたがう．

---

8)　**定理** 13.6による．

9)　w　$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ とが統計的に独立であることは9.3ですでに言及した．また w と u_0 とは u_0 の定義から当然統計的に独立である．よって(4)より w と q とは統計的に独立である．

この結果を利用すれば，

$$P\left(-t_{0.05}<\frac{\hat{y}_0-y_0}{\hat{\sigma}_q}<t_{0.05}\right)=0.95$$

より，$x=x_0$ における y の実際値 y_0 に対する 95% 信頼限界は

$$\hat{y}_0\pm t_{0.05}\hat{\sigma}_q=\hat{\alpha}+\hat{\beta}x_0\pm t_{0.05}\sqrt{\frac{n+1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}}\cdot\hat{\sigma} \tag{10}$$

である．

この(10)を見ると，信頼限界の値は x_0 の大きさによってその値が変わることが分かる．$x_0=\bar{x}$ において，信頼区間の幅は最小値

$$2t_{0.05}\sqrt{\frac{n+1}{n}}\hat{\sigma} \tag{11}$$

となる．

棒鋼のケース1の結果について y_0 の信頼区間がどのようになるかを見てみよう．信頼係数を 95% にとる．$n=5$，$\hat{\alpha}=997.6$，$\hat{\beta}=0.5$，$\bar{x}=20$，$\sum(x_i-\bar{x})^2=250$，$\hat{\sigma}=2.21$，$t_{0.05}(3)=3.18$ だから，(10)は

$$997.6+0.5x_0\pm 3.18\sqrt{\frac{5+1}{5}+\frac{(x_0-20)^2}{250}}\cdot(2.21) \tag{12}$$

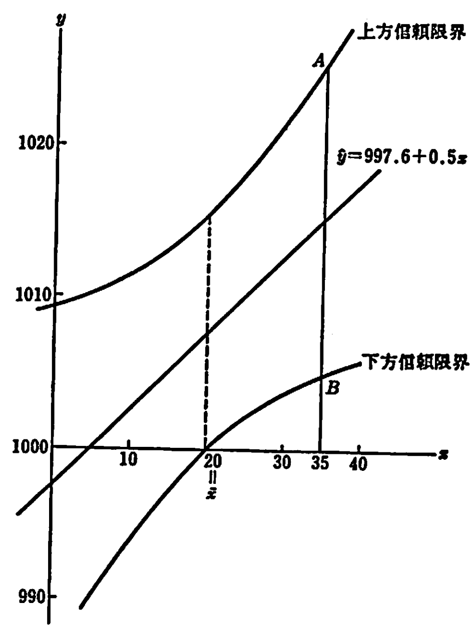
となる．この式において x_0 を変化させたときの上方および下方信頼限界の値を図に描くと図 9.5 のようになる．たとえば $x_0=35$ のときの予測値は $\hat{y}_0=1015.1$ だが，この信頼限界は(12)より

$$1015.1\pm 10.2=1004.9,\ 1025.3$$

と計算され，信頼区間は図の線分 AB で示される．

この図から明らかなように，信頼区間は x_0 が回帰式を推定したときのデータにおける標本平均 $\bar{x}=20$ に等しいとき最も狭くなり，それから離れるほど広がっている．

図 9.5　予測における y_0 の信頼区間



演習問題

1　前節演習問題1において実質可処分所得が35万円であるときの実質消費支出の予測値を求めよ．またその場合の 95% 信頼区間をつくれ．

2　本章第1節演習問題2において平均稼働時間を15時間にしたときの故障発生件数の予測値と 95% 信頼区間を求めよ．

9.5　重　回　帰

棒鋼の例では，長さに対し温度という要因が影響した．従属変数 y に影響する独立変数として1個だけを取り上げた．しかし，自然現象や社会現象には，1つの要因の動きに他の複数個の要因が同時に影響を与えていることが多い．たとえば作物の収量は，肥料投入量，日照時間，降雨量などの要因により影響を受ける．ある会社の売上げは，広告費支出額，その商品の価格などにより影響される．

このような場合には，次のような重回帰模型を使用して分析を行なうことが多い．いま従属変数 y に影響する観測可能な要因が p 個あるとする．それらを $x_1, x_2, \cdots, x_p$ で表わす．いま $y, x_1, x_2, \cdots, x_p$ に関する観測値の組が n 個あるとする．それらを $(y_i, x_{1i}, \cdots, x_{pi})$，$i=1, 2, \cdots, n$ で表わし，大きさ n の

$(p+1)$次元の標本と呼ぶ．

〔定義〕 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ を観測可能な n 個の確率変数，$x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n}, \cdots, x_{p1}, x_{p2}, \cdots, x_{pn}$ を観測可能な pn 個の指定変数，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ を直接には観測不可能な，相互に統計的に独立な n 個の確率変数とし

$$\left.\begin{aligned} E(u_i)&=0 \\ E(u_i^2)&=\sigma^2 \end{aligned}\right\} \quad i=1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

であるとする．このとき

$$y_i=\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\cdots+\beta_px_{pi}+u_i \qquad i=1, 2, \cdots, n \tag{2}$$

と仮定する．この模型を**重回帰模型**(multiple regression model)あるいはたんに**回帰模型**と呼ぶ．

この重回帰模型にも，単純回帰のときと同様に，最小自乗法の考え方を適用して，パラメータ $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_p$ の推定量を求めることができる．すなわち，攪乱項 u_i の平方和

$$S=\sum_{i=1}^{n}u_i^2=\sum(y_i-\beta_0-\beta_1x_{1i}-\cdots-\beta_px_{pi})^2 \tag{3}$$

を最小ならしめる $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_p$ の値を $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \cdots, \hat{\beta}_p$ で表わせば，$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \cdots, \hat{\beta}_p$ は最小自乗推定量である．

(3)の S を $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_p$ に関し偏微分して0とおけば

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial\beta_0}&=-2\sum(y_i-\beta_0-\beta_1x_{1i}-\cdots-\beta_px_{pi})=0 \\ \frac{\partial S}{\partial\beta_1}&=-2\sum x_{1i}(y_i-\beta_0-\beta_1x_{1i}-\cdots-\beta_px_{pi})=0 \\ &\cdots\cdots \\ \frac{\partial S}{\partial\beta_p}&=-2\sum x_{pi}(y_i-\beta_0-\beta_1x_{1i}-\cdots-\beta_px_{pi})=0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

となる．これを書き直せば

$$\left.\begin{aligned} &n\cdot\beta_0+\sum x_{1i}\cdot\beta_1+\cdots+\sum x_{pi}\cdot\beta_p=\sum y_i \\ &\sum x_{1i}\cdot\beta_0+\sum x_{1i}x_{1i}\cdot\beta_1+\cdots+\sum x_{1i}x_{pi}\cdot\beta_p=\sum x_{1i}y_i \\ &\cdots\cdots \\ &\sum x_{pi}\cdot\beta_0+\sum x_{pi}x_{1i}\cdot\beta_1+\cdots+\sum x_{pi}x_{pi}\cdot\beta_p=\sum x_{pi}y_i \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

あるいは(5)の第1式の両辺に $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ki}$ を乗じたものを第 $k+1$ 式から引くことを $k=1, 2, \cdots, p$ について行なえば

$$\left.\begin{aligned} &\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)^2\cdot\beta_1+\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)(x_{2i}-\bar{x}_2)\cdot\beta_2 \\ &\quad+\cdots+\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)(x_{pi}-\bar{x}_p)\cdot\beta_p=\sum(x_{1i}-\bar{x}_1)(y_i-\bar{y}) \\ &\sum(x_{2i}-\bar{x}_2)(x_{1i}-\bar{x}_1)\cdot\beta_1+\sum(x_{2i}-\bar{x}_2)^2\cdot\beta_2 \\ &\quad+\cdots+\sum(x_{2i}-\bar{x}_2)(x_{pi}-\bar{x}_p)\cdot\beta_p=\sum(x_{2i}-\bar{x}_2)(y_i-\bar{y}) \\ &\cdots\cdots \\ &\sum(x_{pi}-\bar{x}_p)(x_{1i}-\bar{x}_1)\cdot\beta_1+\sum(x_{pi}-\bar{x}_p)(x_{2i}-\bar{x}_2)\cdot\beta_2 \\ &\quad+\cdots+\sum(x_{pi}-\bar{x}_p)^2\cdot\beta_p=\sum(x_{pi}-\bar{x}_p)(y_i-\bar{y}) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

が得られる．また(5)の第1式から

$$\beta_0=\bar{y}-\beta_1\bar{x}_1-\beta_2\bar{x}_2-\cdots-\beta_p\bar{x}_p \tag{7}$$

である．単純回帰のときと同様に(5)あるいは(6)と(7)式を**正規方程式**と呼ぶ．

平均からの偏差の積和を

$$\left.\begin{aligned} m_{jk}&=\sum(x_{ji}-\bar{x}_j)(x_{ki}-\bar{x}_k) && j, k=1, 2, \cdots, p \\ m_{j0}&=\sum(x_{ji}-\bar{x}_j)(y_i-\bar{y}) && j=1, 2, \cdots, p \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

のごとく表わせば(6)は

$$\left.\begin{aligned} &m_{11}\beta_1+m_{12}\beta_2+\cdots+m_{1p}\beta_p=m_{10} \\ &m_{21}\beta_1+m_{22}\beta_2+\cdots+m_{2p}\beta_p=m_{20} \\ &\cdots\cdots \\ &m_{p1}\beta_1+m_{p2}\beta_2+\cdots+m_{pp}\beta_p=m_{p0} \end{aligned}\right\} \tag{6'}$$

とも書き表わせる．

このように重回帰では(5)あるいは(6′)の形の連立1次方程式を解かなければならない．[10]

さてこれらの解を $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \cdots, \hat{\beta}_p$ で表わす．y の推定値または理論値は

$$\hat{y}_i=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_{1i}+\hat{\beta}_2x_{2i}+\cdots+\hat{\beta}_px_{pi} \qquad i=1, 2, \cdots, n \tag{9}$$

で定義される．(9)式を**推定回帰式**と呼ぶ．

10)　第12章で述べる行列を用いれば(6′)の解は次の形に表わされる．

$$\begin{bmatrix}\hat{\beta}_1\\ \vdots\\ \hat{\beta}_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m_{11} & \cdots & m_{1p}\\ \vdots & & \vdots\\ m_{p1} & \cdots & m_{pp}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}m_{10}\\ \vdots\\ m_{p0}\end{bmatrix}$$

単純回帰のときと同様に回帰の残差 $\hat{u}_i$ は

$$\hat{u}_i=y_i-\hat{y}_i=y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_{1i}-\cdots-\hat{\beta}_px_{pi} \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ p$$

によって定義される．

残差 $\hat{u}_i$ については

$$\left.\begin{aligned}&\sum\hat{u}_i=0\\&\sum x_{ki}\hat{u}_i=0 \qquad k=1,\ 2,\ \cdots,\ p\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

が成立していることも前と同様である．また決定係数は(9.1.24)式と同じく定義されるが，慣習として重回帰の場合は大文字を使用して R^2 で表わす．

$$R^2=1-\frac{\sum\hat{u}_i^2}{\sum(y_i-\bar{y})^2} \tag{11}$$

なお R^2 は次のようにも表わせる．

$$R^2=\frac{\hat{\beta}_1m_{10}+\hat{\beta}_2m_{20}+\cdots+\hat{\beta}_pm_{p0}}{m_{00}} \tag{12}$$

ただし $m_{k0}(k=1,\ \cdots,\ p)$ は(8)で定義したもの，m_{00} は $\sum(y_i-\bar{y})^2$ とする．(11)から(12)が導けることは読者に任せよう．通常決定係数の計算には(12)式が用いられる．重回帰の決定係数の正の平方根 R を**重相関係数**(multiple correlation coefficient)と呼ぶ．

(12)より決定係数が求められると，逆に(11)を使って残差平方和を

$$\sum_{i=1}^n\hat{u}_i^2=\sum_{i=1}^n(y_i-\bar{y})^2(1-R^2) \tag{13}$$

により求めることができる．撹乱項の分散の不偏推定量は

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-p-1}\sum_{i=1}^n\hat{u}_i^2=\frac{1}{n-p-1}\sum_{i=1}^n(y_i-\bar{y})^2\cdot(1-R^2) \tag{14}$$

により与えられる．この証明は16.1で行なう．

重回帰モデルの仮定が満たされる限り，最小自乗推定量 $\hat{\beta}_0,\ \hat{\beta}_1,\ \cdots,\ \hat{\beta}_p$ はそれぞれ $\beta_0,\ \beta_1,\ \cdots,\ \beta_p$ に対する不偏推定量になっている．すなわち

$$E(\hat{\beta}_k)=\beta_k \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ p \tag{15}$$

この証明も含めて一般に重回帰の取扱いは，第12章で説明する行列を使用するほうが簡単に行なえる．第16章で行列を使用して詳しく重回帰の説明を行なうので，以下では $p=2$ の場合についての説明を若干するにとどめよう．

独立変数2個の場合には母集団回帰式は

$$y_i=\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+u_i \tag{16}$$

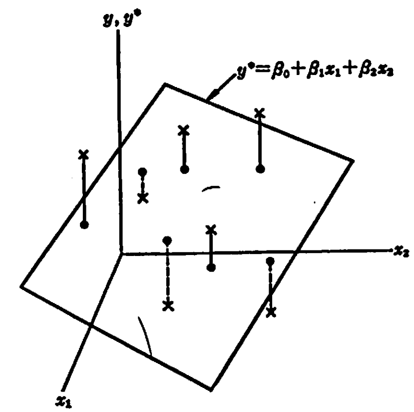
となっている．

y_i の期待値 $E(y_i)$ を y_i^* で表わせば

$$y_i^*=\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i} \tag{17}$$

となる．(17)は x_1, x_2 上の y の回帰関数であるが，これは x_1, x_2, y^* をそれぞれ座標軸にとった3次元の座標における平面を表わしている．これを**母集団回帰平面**(regression plane)という．図9.6を見てほしい．この図で×印の観測点は観測値の組 $(x_{1i},\ x_{2i},\ y_i)$ の位置を示している．点 $(x_{1i},\ x_{2i},\ y_i)$ を通る y 軸に平行な直線が回帰平面 $y^*=\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2$ を切る点(黒丸)が $(x_{1i},\ x_{2i},\ y_i^*)$ である．

図 9.6　回　帰　平　面



×印と黒丸との高さの差は u_i を示す．最小自乗法は×印点から平面までの高さの差の平方和が最小となるように平面を決める．そのようにして決定される平面の方程式が推定回帰式

$$\hat{y}_i=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_{1i}+\hat{\beta}_2x_{2i} \tag{18}$$

にほかならない．

$\hat{\beta}_0,\ \hat{\beta}_1,\ \hat{\beta}_2$ を決めるための正規方程式は(6′)より

$$\left.\begin{aligned}m_{11}\hat{\beta}_1+m_{12}\hat{\beta}_2=m_{10}\\m_{21}\hat{\beta}_1+m_{22}\hat{\beta}_2=m_{20}\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$\hat{\beta}_0=\bar{y}-\hat{\beta}_1\bar{x}_1-\hat{\beta}_2\bar{x}_2 \tag{20}$$

である．(19)を解けば

$$\left.\begin{aligned}\hat{\beta}_1&=\frac{m_{10}m_{22}-m_{12}m_{20}}{m_{11}m_{22}-m_{21}m_{12}}\\ \hat{\beta}_2&=\frac{m_{11}m_{20}-m_{21}m_{10}}{m_{11}m_{22}-m_{21}m_{12}}\end{aligned}\right\}\qquad(21)$$

が得られる.[11] これを(20)に代入すれば $\hat{\beta}_0$ が求まる．

次のような例で重回帰の計算を行なってみよう．

例題 9.5.1　夫婦と未成年もしくは夫婦のみという家族構成の6世帯について，1週間当りの食費と実収入および未成年者数に関するデータが次の表9.6のように与えられている．これより食費を y，実収入を x_1，未成年者数を x_2 とする重回帰模型を想定し，最小自乗法によりそのパラメータを推定してみよう．

まず次の計算を行なう．

$$m_{00}=\sum y_i^2-(\sum y_i)^2/6=19.333$$

$$m_{10}=\sum y_ix_{1i}-(\sum y_i)(\sum x_{1i})/6=85.667$$

表 9.6　6世帯の食費，実収入，未成年者数に関するデータ

世帯番号 i	食費 y (1000円)	実収入 x_1 (1000円)	未成年者数 x_2 (人)
1	15	45	2
2	18	79	2
3	17	62	1
4	13	56	0
5	17	46	3
6	14	38	4
平　均	15.667	54.333	2.000

11)　行列式の記号を用いれば，クラメルの公式(12.4.27)により

$$\hat{\beta}_1=\frac{\begin{vmatrix}m_{10}&m_{12}\\m_{20}&m_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}m_{11}&m_{12}\\m_{21}&m_{22}\end{vmatrix}},\qquad \hat{\beta}_2=\frac{\begin{vmatrix}m_{11}&m_{10}\\m_{21}&m_{20}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}m_{11}&m_{12}\\m_{21}&m_{22}\end{vmatrix}}$$

である．

$$m_{20}=\sum y_ix_{2i}-(\sum y_i)(\sum x_{2i})/6=2.000$$

$$m_{11}=\sum x_{1i}^2-(\sum x_{1i})^2/6=1093.3$$

$$m_{12}=\sum x_{1i}x_{2i}-(\sum x_{1i})(\sum x_{2i})/6=-52.000$$

$$m_{22}=\sum x_{2i}^2-(\sum x_{2i})^2/6=10.000$$

これより正規方程式(19)は

$$\left.\begin{aligned}1093.3\hat{\beta}_1-52.000\hat{\beta}_2&=85.667\\ -52.000\hat{\beta}_1+10.000\hat{\beta}_2&=2.000\end{aligned}\right\}$$

となる．これを解けば(21)より

$$\left.\begin{aligned}\hat{\beta}_1&=\frac{(85.667)(10)-(-52)(2)}{(1093.3)(10)-(-52)^2}=0.1167\\ \hat{\beta}_2&=\frac{(1093.3)(2)-(-52)(85.667)}{(1093.3)(10)-(-52)^2}=0.8070\end{aligned}\right\}$$

を得る．(20)より

$$\hat{\beta}_0=\bar{y}-\hat{\beta}_1\bar{x}_1-\hat{\beta}_2\bar{x}_2=15.667-(0.1167)(54.333)-(0.8070)(2.000)$$
$$=7.710$$

それゆえ推定回帰式として

$$\hat{y}_i=7.710+0.1167x_{1i}+0.8070x_{2i}$$

が得られたわけである．

決定係数は(12)より

$$R^2=\frac{\hat{\beta}_1m_{10}+\hat{\beta}_2m_{20}}{m_{00}}=\frac{(0.1167)(85.667)+(0.8070)(2)}{19.333}$$
$$=0.6006$$

それゆえ，重相関係数は

$$R=\sqrt{0.6006}=0.7750$$

となる．また攪乱項の推定標準偏差は

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n-p-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2(1-R^2)}=\sqrt{\frac{1}{6-2-1}m_{00}(1-R^2)}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{3}(19.333)(1-0.6006)}=1.604$$

となる．

演習問題

1　演習問題 9.3.1 のデータに，下記のような総合消費者物価指数の対前年増加率 $\Delta P/P$ のデータを追加する．消費関数 $C=\beta_0+\beta_1 Y+\beta_2(\Delta P/P)+u$ を推定せよ．また重相関係数を求めよ．

(%)

暦　年	1969	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
$\Delta P/P$	5.2	7.7	6.1	4.5	11.7	24.5	11.8	9.3	8.1	3.8	3.6	8.0

(注)　総合消費者物価指数 P は 1980 年基準．$\Delta P=P_t-P_{t-1}$ とする．

2　次の表 9.7 は米国マサチューセッツ州の製造業における労働(L)，資本(C)，生産量(P)の 1899 年=100 とする 10 年間の指数である．いま理論的に

$$P_t=\alpha L_t^{\beta_1}C_t^{\beta_2}v_t \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ 10 \tag{22}$$

なる関係(ダグラス型生産関数と呼ばれる)が想定されるとする．ただし v_t は撹乱項，α, β_1, β_2 は一定値とする．両辺の対数をとれば

$$\log P_t=\log\alpha+\beta_1\log L_t+\beta_2\log C_t+\log v_t \tag{23}$$

となる．ここで $y_t=\log P_t$, $x_{1t}=\log L_t$, $x_{2t}=\log C_t$, $u_t=\log v_t$, $\beta_0=\log\alpha$ とおくと(23)は(16)と同じ形になる．このように対数変換した変数の間に重回帰模型の仮定が満たされるとして，最小自乗法によりパラメータの推定を行なうことがしばしば行なわれる．この場合 u_t に正規分布 $N(0,\ \sigma^2)$ が仮定されるならば，v_t は対数正規分布にしたがうことになる(5.1 演習問題 2 をみよ)．以上の方法で(22)式のパラメータ α, β_1, β_2 の値を推定せよ．

表 9.7　マサチューセッツ州製造業の労働，資本，生産の各指数

年	生産 P	労働 L	資本 C
1899	100	100	100
1900	105	105	104
1901	118	108	106
1902	129	118	116
1903	130	122	122
1904	130	117	127
1905	142	130	137
1906	150	139	144
1907	152	147	153
1908	146	131	157

(注)　P：生産指数(総付加価値÷価格指数)，L：労働指数(労働者数)，C：資本指数(有形固定資産+流動資産の一部)

(出所)　P. H. Douglas, *Theory of Wages*, Kelley, 1934, p. 160.

第 10 章

相　　　関

10.1 相 関 係 数

回帰分析では，2つの変数 x と y の関係を問題にしたが，その場合，従属変数 y の変動を独立変数 x により説明するという考え方をした．単純回帰模型の仮定は，x が一方的に y に影響するとか，x が原因で y がその結果である（因果関係）ということがいえる現象についてうまく適合することが多い．このような例は，先に述べた温度を統御した実験における棒鋼の温度と長さの測定値，父親の身長と息子の身長，自動車の登録台数と交通事故の数，月の平均気温とその月の高血圧による死亡率，等々があげられよう．しかし2変量間の関係で，かならずしも一方が他方に一方的に影響を与えていると考えられない例が多い．たとえば，同じ親から生まれた兄の身長と弟の身長，物価上昇率と失業率，学生の数学の成績と統計学の成績，各都道府県の1人当り所得と第一次産業就業者比率，等々があげられる．

相関(correlation)または相関関係は，因果関係の存在や影響の方向などを問わないで，とにかく2変数の関係の強さを表わす概念である．それゆえ，相関という概念は上にあげた2つの場合のいずれにも適用する．

具体的には2変量間の相関関係の強さは，相関係数によって記述される．この節ではこの相関係数の定義や意味について述べよう．

いま家計の食費と被服費に関する10世帯のデータが次の表10.1のようにある．食費を x，被服費を y で表わし，世帯番号 i の x, y の値を x_i, y_i で表わそ

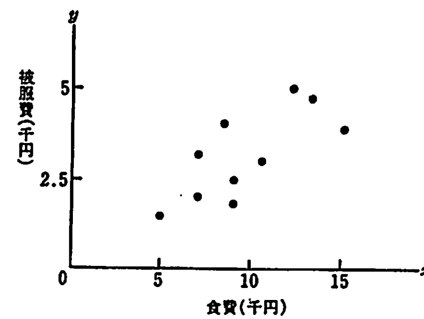
表 10.1　家計の1週間の食費と被服費

(単位 千円)

世帯番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
食費	9.0	15.2	7.2	12.4	10.7	4.9	7.0	8.5	9.1	13.4
被服費	2.5	3.9	2.0	5.0	3.0	1.5	3.2	4.1	1.8	4.8

う．x と y の散布図を描くと図10.1のようになる．

図 10.1　食費と被服費の散布図



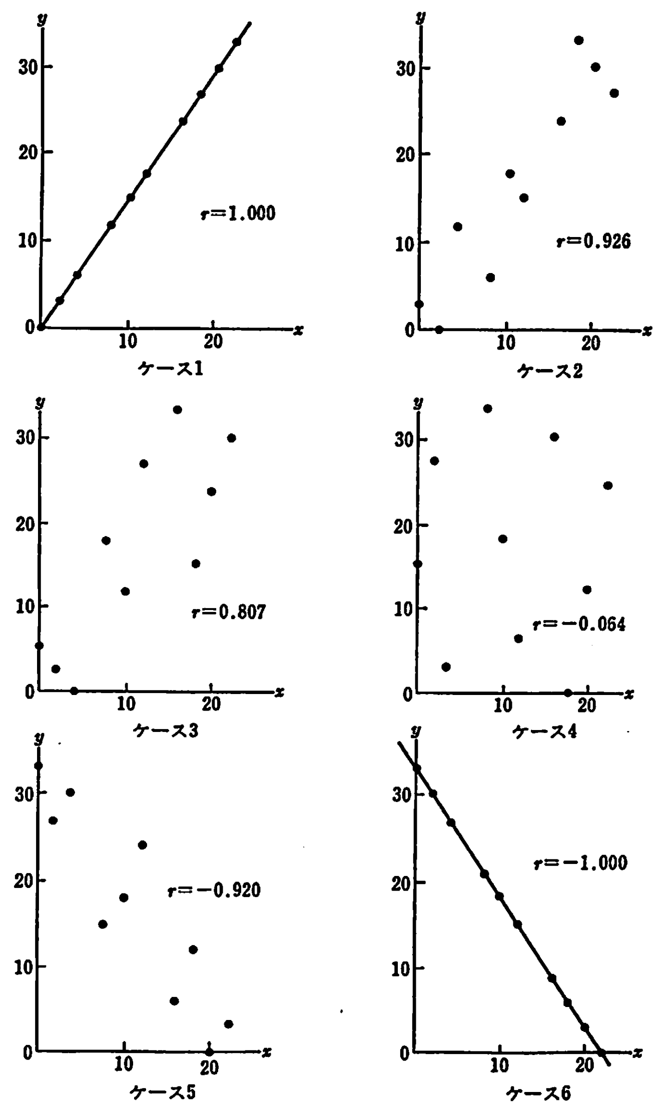
この図をみると観測点群は全体として右上がりになっており，食費が増せば被服費も増すという関係になっている．しかしこれを食費の増加が原因で，被服費が増すというふうにもまたその逆にも理解してはならない．このように x の増加と y の増加とが漠然と対応している関係を x と y は順相関または正相関があるという．これに対し，x の増加に y の減少が伴う場合は，逆相関または負の相関があるという．たとえば月別のキャベツの出荷量とその価格などはその例である．

2つの変量の相関の強さを量的にはかる1つの指標に，**標本相関係数**(sample correlation coefficient)がある．標本相関係数は9.1ですでに出てきたがもう一度その定義を述べる．

$$r=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2\cdot\sum(y_i-\bar{y})^2}} \tag{1}$$

これを x と y の標本相関係数という．これは(9.1.29)式では決定係数の平方根の1つとして導かれた．

図 10.2　いろいろな散布図とその標本相関係数

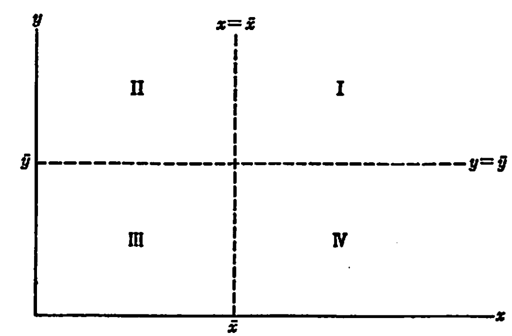


決定係数 r^2 は(9.1.25)より $0 \leqq r^2 \leqq 1$ であるから標本相関係数 r の値の範囲は $-1 \leqq r \leqq 1$ である．$r>0$ のとき**正相関**または順相関であるといい，また $r<0$ のとき**負相関**または逆相関であるという．また $r=0$ のときを**無相関**という．

図 10.1 の標本相関係数は $r=0.726$ である．図 10.2 の 6 個の散布図は r の種々な値と散布図との関係を理解するためにつくった．標本相関係数が 1 あるいは −1 のときには，図のケース 1 あるいはケース 6 のように観測点は一直線上に並ぶ．

(1)の r の定義において分母は正の値であるが，分子は正負いずれの値もとりうる．図 10.3 において，(x, y) 平面は $x=\bar{x}$, $y=\bar{y}$ の 2 本の直線により 4 つの領域 I〜IV に分けられている．I, III の領域では積 $(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$ が正の値，II, IV では負の値になることは容易に分かる．したがっておおざっぱにいえば I, III に多くの観測点がはいり，II, IV に比較的少なければ $\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$ は正，したがって r は正になるであろう．逆に II, IV に多く I, III に少なければ r は負になる．標本相関係数 r と散布図との関係はこのように理解できるであろう．

図 10.3　(x, y) 平面の 4 つの領域



いま，x 上の y の回帰模型

$$y_i=\alpha+\beta x_i+u_i \qquad (2)$$

を考えると推定回帰係数は(9.1.14)式より

$$\hat{\beta}=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2} \tag{3}$$

により求められる．

次に x, y を逆にして，y 上の x の回帰模型（この回帰模型に意味があるかどうかを別にして）

$$x_i=\alpha'+\beta' y_i+v_i \tag{4}$$

を考える．ただし α', β' は定数で v_i は撹乱項を表わす確率変数である．この場合の推定回帰係数は

$$\hat{\beta}'=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(y_i-\bar{y})^2} \tag{5}$$

である．(4)を書き換えれば

$$y_i=-\frac{\alpha'}{\beta'}+\frac{1}{\beta'}x_i-\frac{1}{\beta'}v_i \tag{4'}$$

である．これは(2)と対応する形である．これによると x_i の係数として β と $1/\beta'$ とが対応している．しかし推定された値 $\hat{\beta}$ と $1/\hat{\beta}'$ とは一般には一致しない．(3)と(5)より

$$\hat{\beta}\cdot\hat{\beta}'=\frac{\{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\}^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2\sum(y_i-\bar{y})^2}=r^2 \tag{6}$$

という関係がある．これより

$$\hat{\beta}=r^2\frac{1}{\hat{\beta}'} \tag{7}$$

であるので，$\hat{\beta}$ と $1/\hat{\beta}'$ が一致するのは $r^2=1$ のときに限ることが分かる．

図 10.4 は図 10.1 の食費(x)と被服費(y)の散布図の上に，x 上の y と y 上の x の2本の推定回帰直線を描いたものである．x が横軸とすると，$r^2=1$ でない限りいつでも，この図のように x 上の y の回帰直線のほうが勾配がゆるやかになる．

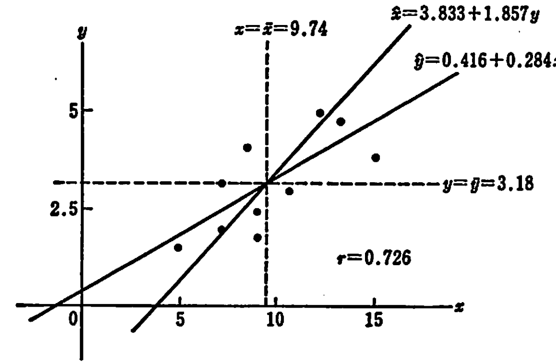
x と y の標本分散を s_x^2, s_y^2 で表わせば

$$s_x^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1},\qquad s_y^2=\frac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{n-1}$$

である．ここで次のように**標本共分散**(sample covariance)を定義し，cov(x, y) で表わす.[1]

1) これに対し母集団共分散は c に大文字を使用して Cov(x, y) で表わしてきた．3.6.5 参照．

図 10.4



$$\mathrm{cov}(x,\ y)=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n-1} \tag{8}$$

これらを用いれば(1)の標本相関係数は

$$r=\frac{\mathrm{cov}(x,\ y)}{s_x\cdot s_y} \tag{9}$$

と書ける．

2変量の母集団においても相関係数を定義できる．x, y の母分散，母共分散はそれぞれ次のように定義される．

$$\sigma_x^2=E(x-\mu_x)^2,\qquad \sigma_y^2=E(y-\mu_y)^2$$
$$\mathrm{Cov}(x,\ y)=E\{(x-\mu_x)(y-\mu_y)\}$$

ただし μ_x, μ_y はそれぞれ x, y の母平均である．このとき，**母集団相関係数**あるいは**母相関係数**は記号 ρ (ロー)で表わされ，次のように定義されている．

$$\rho=\frac{\mathrm{Cov}(x,\ y)}{\sigma_x\cdot\sigma_y} \tag{10}$$

標本相関係数 r と同様に，ρ についても

$$-1\leqq\rho\leqq1 \tag{11}$$

が成立する(証明は演習問題 12.6.4 参照)．

標本相関係数 r は母相関係数 ρ の1つの推定量である．それでは r はどのような分布にしたがうかを考えてみよう．この問題は，r が次節で述べる2変量

正規分布によって記述される母集団から抽出された標本に基づくものである場合について詳しく展開されている.

演 習 問 題

1　表4.2の有限母集団Aから無作為に6個の数値を復元抽出せよ. それらを w_1, w_2, …, w_6 とする. そうして

$$\left.\begin{array}{l} x=w_1+w_2+w_3+w_4+w_5 \\ y=w_1+w_2+w_3+w_6 \end{array}\right\} \qquad (12)$$

なる2つの和をつくる. このような操作を10回繰り返して, (x, y) の10個の組をつくり, 標本相関係数 r を計算せよ.

2　前問のようにしてつくられる x と y の母集団相関係数 ρ は

$$\rho=\frac{3}{\sqrt{(5)(4)}}=0.671$$

に等しい. 一般に x と y に共通な w_i の個数を n_{12}, x を構成する w_i の個数を n_1, y を構成する w_i の個数を n_2 とすると

$$\rho=\frac{n_{12}}{\sqrt{n_1n_2}} \qquad (13)$$

となる. これを証明せよ. なお $n_1=n_2=n$ であれば, $\rho=n_{12}/n$ となり, 母相関係数は2つの変量を構成する要素の中に占める共通要素の割合に等しい. これは相関係数に1つの意味づけをする.

10.2　2変量正規分布

10.2.1　正 規 曲 面

1変量の正規分布については4.4で説明した. その密度関数は

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty<x<\infty \qquad (1)$$

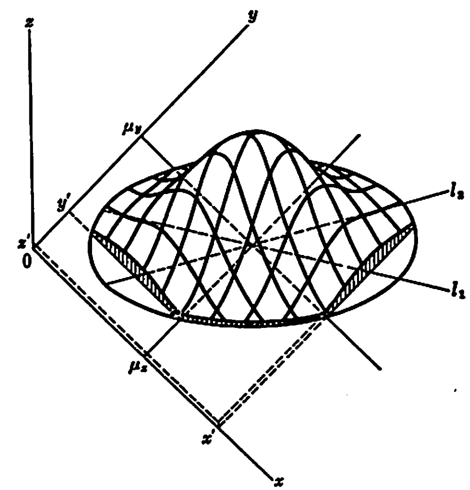
であった. この1変量の正規分布の2変数の結合分布への拡張として, **2変量正規分布**(bivariate normal distribution)がある. その結合密度関数は

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2-2\rho\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\cdot\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}+\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]}$$

$$-\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty \qquad (2)$$

で与えられる. ただし μ_x, μ_y, σ_x, σ_y, ρ は定数であり, σ_x, $\sigma_y>0$, $-1<\rho<1$

図 10.5　正　規　曲　面



とする.

密度を z で表わすと, (x, y, z) の3次元座標において(2)式 $z=f(x, y)$ は1つの曲面を表わす. これを**正規曲面**(normal surface)という. その大体の形状は図10.5のごとくである. この図では, 切り口の形状を示すために, x 軸に垂直な $x=x'$ という平面より右下(図の位置でいって), y 軸に垂直な $y=y'$ 平面より左下の, 曲面のすその部分を切り落としてある. 図に見られるように正規曲面は, 噴火口のない典型的な火山のような形をしている. ただし, z 軸に垂直な平面による切り口はかならずしも円形ではなく, 一般に楕円形をしている.[2] 山の最高点の(x, y)座標は(μ_x, μ_y)である. これを中心として曲面は無限

2)　z 軸に垂直な平面による正規曲面の切り口が楕円になることは次のように説明される. いま $z=z'$(一定値)という平面で切ったとしよう. (2)の両辺の対数をとり若干変形すれば

$$\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2-2\rho\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\cdot\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}+\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2=C \qquad (\mathrm{i})$$

ただし

$$C=-2(1-\rho^2)\{\log z'+\log(2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2})\}$$

である. Cは一定値であるから, 切り口の方程式は(i)のような x, y に関する2次式である. 一般に2次方程式

のかなたで(x, y)平面に接する(ただし図 10.5 では $z=z'$ の平面より下方になる部分は描かれてない).

x 軸に垂直な $x=x'$(一定値)の平面による切り口は，1変量の正規曲線の形になっている．これは次のように説明される．

(2)式で x に x' を代入し e のべき指数を変形すれば

$$f(x', y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x'-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}-\rho\frac{x'-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2} \tag{3}$$

となる．

(3)はさらに

$$f(x', y)=Ke^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_y^2}\left[y-\left\{\mu_y+\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x'-\mu_x)\right\}\right]^2} \tag{4}$$

ただし

$$K=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x'-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2} \tag{5}$$

と書き直せる．Kはいまの場合，定数である．それゆえ(4)式は平均が $\mu_y+\rho(\sigma_y/\sigma_x)(x'-\mu_x)$，分散が $(1-\rho^2)\sigma_y^2$ の正規曲線の高さを一定倍 ($\{1/(\sqrt{2\pi}\sigma_x)\}\cdot e^{-(1/2)\{(x'-\mu_x)/\sigma_x\}^2}$ 倍)した形になっていることが分かる．

このことは $y=y'$ の平面で切った切り口についても同様に成立する．

10.2.2* 2変量正規分布の性質

まず (x, y) 平面と正規曲面によって囲まれる体積が1になること，すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x, y)dxdy=1 \tag{6}$$

となることを示そう．これは密度関数が満たすべき性質である．積分を容易にするために

$$u=\frac{x-\mu_x}{\sigma_x},\qquad v=\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \tag{7}$$

とおく．すると(6)の左辺は

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2-2\rho uv+v^2)}dudv$$

となる．これはさらに

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\{(u-\rho v)^2+(1-\rho^2)v^2\}}dudv$$

と変形される．ここで

$$w=\frac{u-\rho v}{\sqrt{1-\rho^2}},\qquad dw=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}du$$

と変換すれば

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{w^2}{2}}dw\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv \tag{8}$$

と2つの単一変数の積分となる．それぞれの被積分関数は $N(0, 1)$ の密度関数であるから1に等しい．よって(6)が成立する．

次に2変量正規分布の積率母関数を求めてみよう．

x, y の結合積率母関数を $M(t_1, t_2)$ で表わせば

$$\begin{aligned}M(t_1, t_2)&=E(e^{t_1x+t_2y})\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{t_1x+t_2y}f(x, y)dxdy\end{aligned} \tag{9}$$

ここで x, y を(7)の u, v に変換すれば

$$\begin{aligned}M(t_1, t_2)=&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{t_1(\mu_x+\sigma_xu)+t_2(\mu_y+\sigma_yv)}\\&\cdot\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2-2\rho uv+v^2)}dudv\end{aligned} \tag{10}$$

となる．

e のべき指数は

$$\begin{aligned}&t_1\mu_x+t_2\mu_y-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\{[u-\rho v-(1-\rho^2)t_1\sigma_x]^2\\&\quad+(1-\rho^2)(v-\rho t_1\sigma_x-t_2\sigma_y)^2-(1-\rho^2)(t_1^2\sigma_x^2+2\rho t_1t_2\sigma_x\sigma_y+t_2^2\sigma_y^2)\}\end{aligned}$$

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \tag{ii}$$

において

$$h^2-ab<0 \tag{iii}$$

なるとき，この2次方程式は楕円を表わす．(i)の対応する2次項の係数をおき換えてみれば

$$\begin{aligned}h^2-ab&=\left(-\frac{\rho}{\sigma_x\sigma_y}\right)^2-\frac{1}{\sigma_x^2}\cdot\frac{1}{\sigma_y^2}\\&=\frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2}(\rho^2-1)<0\end{aligned} \tag{iv}$$

となる．したがって(i)は楕円の方程式である．

と書き直せる．ここで

$$\left.\begin{aligned} w&=\frac{u-\rho v-(1-\rho^2)t_1\sigma_x}{\sqrt{1-\rho^2}}\\ z&=v-\rho t_1\sigma_x-t_2\sigma_y\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

とおくと，上の式は

$$t_1\mu_x+t_2\mu_y-\frac{1}{2}w^2-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}(t_1^2\sigma_x^2+2\rho t_1t_2\sigma_x\sigma_y+t_2^2\sigma_y^2)$$

となる．また変換(11)のヤコビアンは

$$\frac{\partial(u,\ v)}{\partial(w,\ z)}=\left[\frac{\partial(w,\ z)}{\partial(u,\ v)}\right]^{-1}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} & \dfrac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\\ 0 & 1\end{vmatrix}^{-1}=\sqrt{1-\rho^2}$$

である．したがって(10)は

$$M(t_1,\ t_2)=e^{t_1\mu_x+t_2\mu_y+\frac{1}{2}(t_1^2\sigma_x^2+2\rho t_1t_2\sigma_x\sigma_y+t_2^2\sigma_y^2)}$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{w^2}{2}}dw\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

となるが，積分はそれぞれ1に等しいから

$$M(t_1,\ t_2)=e^{t_1\mu_x+t_2\mu_y+\frac{1}{2}(t_1^2\sigma_x^2+2\rho t_1t_2\sigma_x\sigma_y+t_2^2\sigma_y^2)} \tag{12}$$

そこで，この積率母関数を使って x, y の平均，分散，共分散を求めてみよう．

x の平均は

$$E(x)=\left.\frac{\partial M(t_1,\ t_2)}{\partial t_1}\right|_{t_1=t_2=0}=\mu_x \tag{13}$$

また x の分散は

$$\begin{aligned}E\{x-E(x)\}^2&=E(x^2)-\{E(x)\}^2\\ &=\left.\frac{\partial^2M(t_1,\ t_2)}{\partial t_1^2}\right|_{t_1=t_2=0}-\mu_x^2=\sigma_x^2\end{aligned} \tag{14}$$

となり，(2)式におけるパラメータ μ_x, σ_x^2 がそれぞれ x の平均，分散を表わすことが明らかになった．y の平均，分散が μ_y, σ_y^2 になることも同様に確かめられる．

また x と y の共分散は

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(x,\ y)&=E[(x-\mu_x)(y-\mu_y)]=E(xy)-\mu_x\mu_y\\ &=\left.\frac{\partial^2M(t_1,\ t_2)}{\partial t_1\partial t_2}\right|_{t_1=t_2=0}-\mu_x\mu_y\\ &=\rho\sigma_x\sigma_y\end{aligned} \tag{15}$$

となる．これより

$$\rho=\frac{\mathrm{Cov}(x,\ y)}{\sigma_x\sigma_y}$$

となるが，これは(10.1.10)式の母相関係数の定義に合致する．すなわち(2)の中のパラメータ ρ は x と y の母相関係数であることが確かめられた．

相関係数 ρ が0のときは明らかに(2)は

$$f(x,\ y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2} \tag{16}$$

となり，2つの単一変量の正規密度の積となる．したがって，x と y とは統計的に独立である．すなわち正規分布においては，相関係数 ρ が0である(あるいは共分散が0である)ことは，2変数が独立であるための必要十分条件である．一般の分布では，統計的に独立であればもちろん $\rho=0$ であるが，$\rho=0$ であっても統計的に独立であるとは限らない(3.6演習問題3参照)．

次に x の周辺密度を求めてみよう．x の周辺密度は定義により

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,\ y)dy$$

ここで

$$v=\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}$$

とおいて e のべき指数を変形すれば

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(v-\rho\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2}dv$$

そして

$$w=\frac{v-\rho\dfrac{x-\mu_x}{\sigma_x}}{\sqrt{1-\rho^2}},\qquad dw=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}dv$$

を置換すれば

$$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{w^2}{2}}dw$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2} \tag{17}$$

となる．すなわち x の周辺分布は単一変量の正規分布にほかならない．y の周辺密度 $f_2(y)$ についても同様である．

次に条件付密度を求めてみよう．x が与えられたときの y の条件付密度は

$$g_2(y|x)=\frac{f(x,\ y)}{f_1(x)}$$

である．これに(4)の x' を x に書き換えたものと(17)とを代入すれば

$$g_2(y|x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma_y^2(1-\rho^2)}\left\{y-\mu_y-\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)\right\}^2} \tag{18}$$

が得られる．これは平均 $\mu_y+\rho(\sigma_y/\sigma_x)(x-\mu_x)$，分散 $\sigma_y^2(1-\rho^2)$ の単一変量の正規分布の密度関数である．

それゆえ，x が一定のある値のときの y の値は

$$y=\mu_y-\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\mu_x+\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x+u \tag{19}$$

ただし u は平均 0，分散 $\sigma_y^2(1-\rho^2)$ の正規分布する確率変数，と書き表わすことができる．(19)において，x が一定のときの y の平均

$$E(y|x)=\mu_y-\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\mu_x+\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x \tag{20}$$

は x 上の y の回帰関数を表わしている．このように y の回帰関数が x の 1 次式となることは 2 変量正規分布の 1 つの特徴をなす．(19)式において攪乱項に当たる u が，x の水準にかかわらず等しい分散 $\sigma_y^2(1-\rho^2)$ をもつことは重要である．

以上のことは y が与えられたときの x の条件付密度についてもいえる．すなわち y が与えられたときの x の条件付密度は

$$g_1(x|y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)}\left\{x-\mu_x-\rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\mu_y)\right\}^2} \tag{21}$$

である．

さきの図 10.5 の l_1, l_2 はそれぞれ x 上の y の回帰直線，y 上の x の回帰直線を表わしている．

演　習　問　題

1　$\mu_x=0$, $\mu_y=0$, $\sigma_x=1$, $\sigma_y=2$, $\rho=0.6$ の 2 変量正規分布にしたがう変数 x, y があるとき，その密度がちょうど 0.01, 0.05 になる x と y の 2 本の等量線を $(x,\ y)$ 平面上に描け．

10.3　標本相関係数の分布

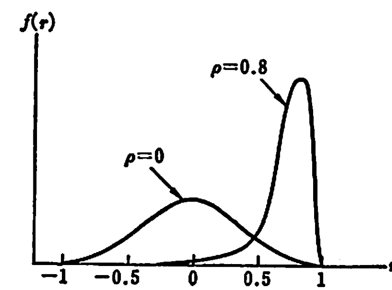
標本相関係数 r は母集団相関係数 ρ の推定値として用いられる．それでは統計量としての標本相関係数 r はどのような分布にしたがうであろうか．証明は省略して次の定理を与える．[3]

〔定理 10.1〕　母相関係数 ρ をもつ 2 変量正規母集団から抽出した無作為標本を $(x_i,\ y_i)$ $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ とする．そのときこの標本から計算される標本相関係数 r の密度関数は

$$f(r)=\frac{2^{n-3}(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{\pi(n-3)!}(1-r^2)^{\frac{1}{2}(n-4)}\sum_{j=0}^{\infty}\left\{\Gamma\left(\frac{n+j-1}{2}\right)\right\}^2\frac{(2\rho r)^j}{j!}$$
$$-1\leqq r\leqq 1 \tag{1}$$

図 10.6 は $n=9$ の場合の，(1)の密度関数によって表わされる標本相関係数 r の分布を，$\rho=0$, $\rho=0.8$ の 2 通りの場合について，図示したものである．この図から，$\rho=0$ のときは r の分布は左右対称であるが，$\rho=0.8$ のときは左右対称でないことが分かる．

図 10.6　標本相関係数の分布



帰無仮説 $\rho=0$ の検定には次の定理が応用できる．

〔定理 10.2〕　2 変量正規母集団

3) C. R. Rao, *Linear Statistical Inference and Its Applications*, 2nd edition, John Wiley & Sons, 1973, pp. 206-208 参照．

からの大きさ n の無作為標本に基づく標本相関係数を r とする．もし母相関係数 $\rho=0$ ならば，次の量

$$t=\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \tag{2}$$

は自由度 $n-2$ のステューデントの t 分布にしたがう．

（証明）（2）を書き変えると

$$t=\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\Bigg/\sqrt{\frac{1}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\frac{\sum(y_i-\bar{y})^2(1-r^2)}{n-2}} \tag{3}$$

となるが，(9.1.17)の $\hat{\beta}$ の定義と，(9.1.30)，(9.2.20)，(9.2.24)の $\hat{\sigma}_{\beta}$ の定義により，

$$t=\frac{\hat{\beta}}{\hat{\sigma}_{\beta}} \tag{4}$$

と表わせる．ところが9.3で述べたように，単純正規回帰模型の仮定の下で $\beta=0$ のとき（4）の右辺（t 値）は自由度 $n-2$ の t 分布にしたがう．単純正規回帰模型における従属変数の分布は，$(x_i, y_i)\ i=1, \cdots, n$ が相互に独立に（2）の密度関数をもつ2変量正規分布にしたがう場合の，$x_1, \cdots, x_n$ を与えたときの $y_1, \cdots, y_n$ の条件付分布にほかならない（(10.2.19)参照）．このとき β は $\rho\sigma_y/\sigma_x$ に対応するから，$\beta=0$ のとき $\rho=0$ である．

したがって $\rho=0$ の場合の $x_1, \cdots, x_n$ を与えたときの t の条件付密度 $g(t|x_1, \cdots, x_n)$ は自由度 $n-2$ の t 分布の密度関数である．しかし t 分布の密度関数は $x_1, \cdots, x_n$ を含まないので，条件付密度は t の周辺密度でもある（証明終り）．

この定理を，さきの10.1の例に応用してみよう．

例題 10.3.1　家計における食費 x と被服費 y の間には相関がないという帰無仮説を検定しよう．

$$H_0: \rho=0$$
$$H_1: \rho\neq 0$$

有意水準を5％としよう．$n=10$ であるから自由度 $n-2=8$ の t 分布に

よって，両側棄却域は $|t|\geqq t_{0.05}=2.306$．一方，標本相関係数 $r=0.726$ が得られているから

$$t=\frac{0.726\sqrt{10-2}}{\sqrt{1-(0.726)^2}}=3.01$$

となる．$3.01>2.306$ であるから，帰無仮説 H_0 は棄却される．すなわちこの標本相関係数は有意水準5％で有意である．ただし，食費 x と被服費 y とは2変量正規分布にしたがっていることを仮定していることを忘れてはならない．

この定理10.2は $\rho=0$ を前提にしているから，ゼロでないときの ρ に関する検定や母相関係数の信頼区間の設定には使えない．この種の問題には，R. A. フィッシャーによって与えられた次の定理が用いられる．[4]

〔定理 10.3〕　母相関係数 ρ の2変量正規母集団からの大きさ n の無作為標本に基づく標本相関係数を r とする．このとき

$$z=\frac{1}{2}\log_e\frac{1+r}{1-r} \tag{5}$$

は n が大きくなるとともに漸近的に平均 $(1/2)\log_e\{(1+\rho)/(1-\rho)\}$，分散 $1/(n-3)$ の正規分布にしたがう．

例題 10.3.2　先の食費 x と被服費 y の例において，x と y の母相関係数 ρ が0.5であるという仮説をサイズ5％で検定してみよう．すなわち

$$H_0: \rho=0.5$$
$$H_1: \rho\neq 0.5$$

である．仮説 H_0 が真のとき，上記の定理により（5）の z は漸近的に平均 $(1/2)\log_e\{(1+0.5)/(1-0.5)\}=0.549$，分散 $1/(10-3)=0.143=(0.378)^2$ の正規分布にしたがう．$n=10$ はそれほど大きくないけれども，この正規分布 $N(0.549, (0.378)^2)$ により z の分布を近似しよう．H_0 が真であれば

$$0.95=P(0.549-1.96\cdot 0.378<z<0.549+1.96\cdot 0.378)$$
$$=P(-0.192<z<1.289)$$

4）証明は S. S. Wilks, *Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, 1962, pp. 593-594 を参照せよ．

であるから，z を検定統計量にとれば H_0 のサイズ5%の棄却域は $(-\infty, -0.192]$ と $[1.289, \infty)$ である．一方，標本相関係数 $r=0.726$ であるから，対応する z の値は

$$z=\frac{1}{2}\log_e\frac{1+0.726}{1-0.726}=0.920 \tag{6}$$

である．z は棄却域に落ちないから，H_0 はサイズ5%で採択される．

例題 10.3.3　上記の食費と被服費の例で，母集団相関係数の95%信頼区間を求めてみよう．(5)の z は近似的に正規分布 $N[(1/2)\log_e\{(1+\rho)/(1-\rho)\}, 1/(n-3)]$ にしたがうから，

$$P\left(\frac{1}{2}\log_e\frac{1+\rho}{1-\rho}-1.96\frac{1}{\sqrt{n-3}}<z<\frac{1}{2}\log_e\frac{1+\rho}{1-\rho}+1.96\frac{1}{\sqrt{n-3}}\right)$$
$$=0.95 \tag{7}$$

が成立する．したがって

$$P\left(z-1.96\frac{1}{\sqrt{n-3}}<\frac{1}{2}\log_e\frac{1+\rho}{1-\rho}<z+1.96\frac{1}{\sqrt{n-3}}\right)=0.95 \tag{8}$$

も成立する．$\mu=(1/2)\log_e\{(1+\rho)/(1-\rho)\}$ を ρ について解けば

$$\rho=\frac{e^{2\mu}-1}{e^{2\mu}+1} \tag{9}$$

であるから，(8)より

$$P\left(\frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}<\rho<\frac{e^{2b}-1}{e^{2b}+1}\right)=0.95 \tag{10}$$

が成立する．ただし $a=z-1.96/\sqrt{n-3}$，$b=z+1.96/\sqrt{n-3}$ である．

例題 10.3.2 より $r=0.726$ に対応する z は 0.920 だから，$a=0.920-(1.96)(0.378)=0.179$，$b=0.920+(1.96)(0.378)=1.661$ である．これから(10)により

$$\frac{e^{2(0.179)}-1}{e^{2(0.179)}+1}=0.177$$

$$\frac{e^{2(1.661)}-1}{e^{2(1.661)}+1}=0.930$$

となる．すなわち母相関係数の95%信頼区間は (0.177, 0.930) である．

演　習　問　題

1　次のデータを2変量正規分布からの無作為標本とするとき，x と y の標本相関係数を計算し，母相関係数 $\rho=0$ という帰無仮説を有意水準1%で検定せよ．

x	3	8	5	4	1	3	6	2
y	−12	−4	2	−11	−15	−8	10	0

2　上の標本相関係数に基づいて母相関係数に対し95%信頼限界を設定せよ．

3　2変量正規母集団からの大きさ100の無作為標本があり，その標本相関係数は0.5と計算された．母相関係数の95%信頼区間を求めよ．

10.4　偏　相　関

3個の確率変数 y_1, y_2, y_3 に関する観測値の組が次のごとく与えられているとしよう．

$$\begin{array}{cccc} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ y_{31} & y_{32} & \cdots & y_{3n} \end{array}$$

いま，y_3 上への y_1 の回帰，y_3 上への y_2 の回帰をそれぞれ最小自乗法により求め

$$y_{1t}=a_{10}+a_{13}y_{3t}+z_{1t} \tag{1}$$

$$y_{2t}=a_{20}+a_{23}y_{3t}+z_{2t} \tag{2}$$

なる推定回帰模型が得られたとしよう．ただし a_{10}, a_{13}, a_{20}, a_{23} は推定回帰係数，z_{1t}, z_{2t} はそれぞれの回帰の残差である．このとき，残差 z_1 と z_2 の標本相関係数を，y_3 を固定したときの y_1, y_2 の標本偏相関係数(sample partial correlation coefficient)と呼び，$r_{12\cdot3}$ と記す．すなわち

$$r_{12\cdot3}=r_{z_1z_2}=\frac{\sum z_{1t}z_{2t}}{\sqrt{\sum z_{1t}^2\cdot\sum z_{2t}^2}} \tag{3}$$

である．これは y_3 の影響を除去したあとの y_1 と y_2 の標本相関係数の意味をもっている．

ところで，y_j と y_k との標本相関係数を r_{jk} と書けば，(9.1.30)式より

$$\sum z_{jt}^2=\sum(y_{jt}-\bar{y}_j)^2(1-r_{j3}^2) \qquad j=1,\ 2 \tag{4}$$

が成立する．ただし $\bar{y}_j=(1/n)\sum_{i=1}^{n}y_{ji}$．また

$$z_{ji}=(y_{ji}-\bar{y}_j)-a_{j3}(y_{3i}-\bar{y}_3)\qquad j=1,\ 2 \tag{5}$$

となるが，(9.1.27)式より

$$a_{j3}=r_{j3}\sqrt{\frac{\sum(y_{ji}-\bar{y}_j)^2}{\sum(y_{3i}-\bar{y}_3)^2}}\qquad j=1,\ 2 \tag{6}$$

であるから，$m_{jk}=\sum(y_{ji}-\bar{y}_j)(y_{ki}-\bar{y}_k)$ と略記すれば

$$\begin{aligned}\sum z_{1i}z_{2i}&=\sum\left\{(y_{1i}-\bar{y}_1)-r_{13}\sqrt{\frac{m_{11}}{m_{33}}}(y_{3i}-\bar{y}_3)\right\}\\&\quad\times\left\{(y_{2i}-\bar{y}_2)-r_{23}\sqrt{\frac{m_{22}}{m_{33}}}(y_{3i}-\bar{y}_3)\right\}\\&=\sum(y_{1i}-\bar{y}_1)(y_{2i}-\bar{y}_2)-r_{23}\sqrt{\frac{m_{22}}{m_{33}}}\sum(y_{1i}-\bar{y}_1)(y_{3i}-\bar{y}_3)\\&\quad-r_{13}\sqrt{\frac{m_{11}}{m_{33}}}\sum(y_{2i}-\bar{y}_2)(y_{3i}-\bar{y}_3)+r_{13}r_{23}\frac{\sqrt{m_{11}m_{22}}}{m_{33}}\sum(y_{3i}-\bar{y}_3)^2\\&=m_{12}-r_{23}\sqrt{\frac{m_{22}}{m_{33}}}m_{13}-r_{13}\sqrt{\frac{m_{11}}{m_{33}}}m_{23}+r_{13}r_{23}\sqrt{m_{11}m_{22}}\end{aligned}$$

ここで $r_{jk}=m_{jk}/\sqrt{m_{jj}m_{kk}}$ であるから上の式は

$$\sum z_{1i}z_{2i}=\sqrt{m_{11}m_{22}}(r_{12}-r_{13}r_{23}) \tag{7}$$

となる．(4)と(7)を(3)に代入すれば

$$r_{12\cdot3}=\frac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{\sqrt{1-r_{13}^2}\sqrt{1-r_{23}^2}} \tag{8}$$

が得られる．

例題 10.4.1　表9.6のデータで実収入を x_1，未成年者数を x_2，食費を x_3 とすると，相互の標本相関係数は

$$r_{12}=\frac{-52}{\sqrt{(1093.3)(10)}}=-0.497$$

$$r_{13}=\frac{85.667}{\sqrt{(19.333)(1093.3)}}=0.589$$

$$r_{23}=\frac{2}{\sqrt{(19.333)(10)}}=0.144$$

である．これより，実収入 x_1 を固定したときの未成年者数 x_2 と食費 x_3 の標本偏相関係数を計算すると

$$\begin{aligned}r_{23\cdot1}&=\frac{r_{23}-r_{12}r_{13}}{\sqrt{1-r_{12}^2}\sqrt{1-r_{13}^2}}\\&=\frac{0.144-(-0.497)(0.589)}{\sqrt{1-(-0.497)^2}\sqrt{1-(0.589)^2}}\\&=0.623\end{aligned}$$

となる．未成年者数と食費の見かけ上の相関は0.144だったが，実収入の影響を除去すると両者はより高い正の相関を示すことが分かる．

偏相関係数は固定する変数が2個以上の場合についても定義される．すなわち $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_p$ なる p 個の変数があるとき

$$\left.\begin{aligned}y_{1i}&=a_{10}+a_{13}y_{3i}+\cdots+a_{1p}y_{pi}+z_{1i}\\y_{2i}&=a_{20}+a_{23}y_{3i}+\cdots+a_{2p}y_{pi}+z_{2i}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

なる最小自乗法による推定重回帰式を求める．そしてその残差 z_{1i} と z_{2i} の標本相関係数を $y_3,\ y_4,\ \cdots,\ y_p$ を固定したときの $y_1,\ y_2$ の**標本偏相関係数**と呼び，これを $r_{12\cdot34\cdots p}$ で表わす．[5)]

演習問題

1　例題10.4.1において，未成年者数 x_2 を固定したときの実収入 x_1 と食費 x_3 との標本偏相関係数を計算し，x_1 と x_3 との標本相関係数と比較せよ．

---

5)　$m_{jk}=\sum(y_{ji}-\bar{y}_j)(y_{ki}-\bar{y}_k)$ として m_{jk} を要素とする p 次の行列の逆行列をつくる．すなわち

$$\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1p}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2p}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{p1}&c_{p2}&\cdots&c_{pp}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m_{11}&m_{12}&\cdots&m_{1p}\\m_{21}&m_{22}&\cdots&m_{2p}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\m_{p1}&m_{p2}&\cdots&m_{pp}\end{bmatrix}^{-1} \tag{i}$$

このとき，$y_j,\ y_k$ 以外の $p-2$ 個の変数を固定したときの $y_j,\ y_k$ の標本偏相関係数は

$$r_{jk\cdot12\cdots)j(\cdots)k(\cdots p}=\frac{-c_{jk}}{\sqrt{c_{jj}\cdot c_{kk}}} \tag{ii}$$

により計算される．ここで，たとえば $)j($ という記号は「j を除いて」という意味で用いられている．(ii)の証明については演習問題16.1.5を参照せよ．

第 11 章

分 散 分 析

11.1 分散分析の考え方

1つの変量に関するデータが与えられ，これからその変量の動きを説明しようとするとき，まず最初に試みて効果がある分析法はそれらのデータをある基準の下に層別ないし層化(stratify)することであろう．たとえば，化粧品を販売しているある会社で，セールスマン100人の1カ月の販売成績を分析しようとするとき，各セールスマンの1カ月の販売実績のデータを，住宅地区，工場地区，農村地区，という3つの層(strata)に層別し，それぞれの層における標本平均をつくってみれば，それら3つの標本平均の間に大きな差異が見いだされることがあるであろう．このようなときには，派遣地区によって販売成績に差が生ずるのだから，各セールスマンの成績の評価の際にこの点を考慮すべきだという結論やあるいは販売効率のよい地区により多くのセールスマンを派遣するという決定を導くことになるだろう．

しかしこのようなとき，地区間に本当に差異があるのかどうか，見かけ上差があるように見えるけれどもその差はたんに標本誤差に基づくものではないのか，このような疑問に答えておく必要がある．

この場合，もし層の数が2個ならば，8.2.2で述べた2つの母平均の差の有意性検定の方法を適用することができる．しかし層の数が3個以上になるとこの方法は使えない.[1] このような場合に有効な分析手段を提供するのが以下に述べる**分散分析**(analysis of variance)の方法である．本論にはいる前に1つの

数値例でその考え方の概要を示してみよう．

いま，ある機械の部品を旋盤で加工する工程を考えよう．そこには3台の旋盤があり，4人の工員が加工作業に従事しているとしよう．3台の旋盤は少しずつその製造年度が異なっているためか，使用する旋盤によって，1時間当りの加工個数が異なるようである．4人の工員が1時間ずつ各旋盤を使って加工作業をした結果表11.1のようなデータが得られたとしよう．

表 11.1 1時間当り加工個数のデータ

(単位 個数/時間)

旋盤 ＼ 工員	1	2	3	4	平均 $\bar{y}_i$	標本分散 s_i^2
1	13	12	14	9	12	$\frac{14}{3}$
2	13	12	16	15	14	$\frac{10}{3}$
3	19	15	14	16	16	$\frac{14}{3}$

各旋盤ごとの工員4人による加工個数の平均値は12, 14, 16個であり，それゆえ第1の旋盤が最も効率が悪く，第3の旋盤は最もよいように思われる．しかし，これだけのデータからはたしてそのように判断してしまってよいだろうか．旋盤による差異は本来なくて，加工個数のばらつきは他の要因によるものではないだろうか．

このような疑問に答えるのに，分散分析では次のような考え方をする．

まず，旋盤による加工個数の差異は本来存在しないと考える．そうして，表11.1の加工個数のデータは，同一の母集団から抽出された標本と考える．この母集団の平均をμ，分散をσ^2で表わそう．

表11.1のデータを旋盤ごとに層別すれば，それらの層はこの母集団から抽出された3個の大きさ4の標本とみなすこともできる．この場合，それぞれの標本ごとの標本平均，標本分散を$\bar{y}_i$, s_i^2 $(i=1, 2, 3)$で表わすことにすればそれらは表11.1の最後の2欄に示すような値になる．たとえば

1) もちろん，たとえば3つの層ならば2個ずつを組み合わせ，合計3回差の有意性検定を行なえばよいが，3つの判定結果を総合することは容易でない．また層の数がもっと多くなれば，このやり方では組合せの数が多くなりすぎて，ほとんど実行不可能になる．

$$\bar{y}_1=\frac{1}{4}(13+12+14+9)=12$$

$$s_1^2=\frac{1}{4-1}\{(13-12)^2+(12-12)^2+(14-12)^2+(9-12)^2\}$$

$$=\frac{14}{3}$$

である．

ここで，一般的な議論に結びつけるために表 11.1 を次の表 11.2 のような記号に書き表わしておこう．

表 11.2

標本＼個体	1	2	…	p	標本平均	標本分散
1	y_{11}	y_{12}	…	y_{1p}	$\bar{y}_1$	s_1^2
2	y_{21}	y_{22}	…	y_{2p}	$\bar{y}_2$	s_2^2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
m	y_{m1}	y_{m2}	…	y_{mp}	$\bar{y}_m$	s_m^2

1～mの平均が同一という前提

上の例では標本の個数mは3であり，各標本の大きさpは4である． 標本の数が無限

さて，4.3 で述べたように，標本の大きさをpとすれば標本平均の分散は母分散の $1/p$ である．すなわち

これを1つの標本とみなす　　これを1つの標本とみなす

$$\sigma_{\bar{y}}^2=\frac{\sigma^2}{p} \tag{1}$$

である．ただし $\sigma_{\bar{y}}^2$ は標本平均の分散である．各標本の標本平均の標本分散を

不偏推定量　　標本の数がm

$$s_{\bar{y}}^2=\frac{\sum_{i=1}^{m}(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}})^2}{m-1} \tag{2}$$

により定義しよう．ただしmは標本の個数である．また，$\bar{\bar{y}}$はm個の標本平均の平均である．これは全体のデータを1つの標本とみなしたときの標本平均と一致する．すなわち

$$\bar{\bar{y}}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\bar{y}_i=\frac{1}{pm}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}y_{ij} \tag{3}$$

ただし y_{ij} は第 i 標本の第 j 番目の値とする．

標本平均の標本分散 $s_{\bar{y}}^2$ は，標本平均の母分散 $\sigma_{\bar{y}}^2$ の不偏推定量である(7.5.1 参照)．すなわち

$$E(s_{\bar{y}}^2)=\sigma_{\bar{y}}^2 \tag{4}$$

このことは $\bar{y}_i$ 自身を平均 $\mu_{\bar{y}}$，分散 $\sigma_{\bar{y}}^2$ の確率変数と考えれば明らかなことである．すると(1)より

$$E(ps_{\bar{y}}^2)=p\sigma_{\bar{y}}^2=\sigma^2 \tag{5}$$

であるから，$ps_{\bar{y}}^2$ は，母分散 σ^2 の不偏推定量になっている．上の例で計算してみれば

$$\bar{\bar{y}}=\frac{1}{3}(12+14+16)=14$$

標本平均の標本分散を使った推定．

$$s_{\bar{y}}^2=\frac{1}{3-1}\{(12-14)^2+(14-14)^2+(16-14)^2\}$$

$$=4$$

$$ps_{\bar{y}}^2=(4)\cdot(4)=16 \tag{6}$$

となる．それゆえ，もしこれらのデータが同一の母集団から抽出されたものであれば，母集団の分散 σ^2 は大体 16 に近い値であることが推測される．

一方，母分散 σ^2 の値を直接推定するものとしては，各標本の標本分散 s_i^2 がある．各 s_i^2 はそれぞれ σ^2 の不偏推定量である．

$$E(s_i^2)=\sigma^2 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{7}$$

それゆえ，各標本分散の算術平均はやはり母分散 σ^2 の不偏推定量である．

標本分散(さらにその平均)を使った推定．

$$E\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}s_i^2\right)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}E(s_i^2)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sigma^2=\sigma^2 \tag{8}$$

上の例で $(1/m)\sum s_i^2$ は

◎標本平均さらには母集団の平均が関係…

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}s_i^2=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}s_i^2=\frac{1}{3}\left(\frac{14}{3}+\frac{10}{3}+\frac{14}{3}\right)=\frac{38}{9}\fallingdotseq 4.22 \tag{9}$$

さて(6)も(9)もともに母分散 σ^2 の推定値であるが，16 と 4.22 で両者にはかなりの違いがある．この違いは偶然生じたものといってよいだろうか．

ここで，旋盤による加工個数の差異がかならずしも存在しないとはいえないとしてみよう．あるいは換言すれば，これらm個の標本はそれぞれ $\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_m$ の平均をもつ相異なる母集団からの抽出標本であると考えよう．ただしこれらm個の母集団の分散は共通に σ^2 に等しいという仮定は変えない．

こうすると，母分散 σ^2 の推定に関する上の2つの方法の中の前者は成立しなくなる．すなわち，標本平均の標本分散 $s_{\bar{y}}^2$ が σ^2/p の不偏推定量であるのは，m個の標本が同一の母集団から抽出されたものであることを前提にしたう

えでのことであった．これに対し，それぞれの標本の母平均がかならずしも等しくないときには次のようになる．

$$\sum_{i=1}^{m}(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}})^2=\sum_{i=1}^{m}\left(\bar{y}_i-\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\bar{y}_k\right)^2$$

標本この母集団の平均

$$=\sum_i\left\{(\bar{y}_i-\mu_i)-\frac{1}{m}\sum_k(\bar{y}_k-\mu_k)+\left(\mu_i-\frac{1}{m}\sum_k\mu_k\right)\right\}^2$$

-①　②　①　-②

ここで

$$\mu=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\mu_k \tag{10}$$

とおき，最後の式を展開すれば

$E(\sum_i(\bar{y}_i-\mu_i)^2)=E((y_1-\mu_1)^2+(y_2-\mu_2)^2+\cdots+(y_i-\mu_i)^2)$
$=m\cdot\frac{\sigma^2}{p}$

$$\sum_i(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}})^2=\sum_i(\bar{y}_i-\mu_i)^2+\frac{m}{m^2}\left\{\sum_k(\bar{y}_k-\mu_k)\right\}^2+\sum_i(\mu_i-\mu)^2$$

$$-2\frac{1}{m}\sum_i(\bar{y}_i-\mu_i)\sum_k(\bar{y}_k-\mu_k)+2\sum_i(\bar{y}_i-\mu_i)(\mu_i-\mu)$$

$$-2\frac{1}{m}\sum_i\sum_k(\bar{y}_k-\mu_k)(\mu_i-\mu)$$

これより両辺の期待値を求めると，右辺の中で第5，第6項は

$$E\{2\sum(\bar{y}_i-\mu_i)(\mu_i-\mu)\}=2\sum_i\{E(\bar{y}_i)-\mu_i\}(\mu_i-\mu)$$

標本変数　定数

$$=2\sum_i(\mu_i-\mu_i)(\mu_i-\mu)=0$$

$$E\left\{2\frac{1}{m}\sum_i\sum_k(\bar{y}_k-\mu_k)(\mu_i-\mu)\right\}=2\frac{1}{m}\sum_i\sum_k\{E(\bar{y}_k)-\mu_k\}(\mu_i-\mu)=0$$

であり，また第2，第4項については

$$E(\bar{y}_i-\mu_i)(\bar{y}_k-\mu_k)=0,\qquad i\neq k\ \text{のとき}$$

→ 共分散 … 無相関なら0

$$=\frac{\sigma^2}{p},\qquad i=k\ \text{のとき}$$

→ $\bar{y}_i\sim N(\mu_i,\frac{\sigma^2}{p})$

であることに注意すれば

$$E\{\sum_i(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}})^2\}=m\frac{\sigma^2}{p}+\frac{m}{m^2}m\frac{\sigma^2}{p}+\sum(\mu_i-\mu)^2-2\frac{1}{m}m\frac{\sigma^2}{p}$$

$$=(m-1)\frac{\sigma^2}{p}+\sum(\mu_i-\mu)^2$$

となる．よって

$$E(ps_{\bar{y}}^2)=E\left\{\frac{p}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}})^2\right\}=\sigma^2+\frac{p}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(\mu_i-\mu)^2 \tag{11}$$

となる．

それゆえ，$(p\sum(\mu_i-\mu)^2/(m-1)>0$ だから)各標本の抽出されてきた母集団の平均に差がある場合には，差がない場合に比べ $E(ps_{\bar{y}}^2)$ は $p\sum(\mu_i-\mu)^2/(m-1)$ だけ大きくなる．もし $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_m=\mu$ であれば(11)は(5)に一致する．

これに対し $(1/m)\sum_{i=1}^{m}s_i^2$ の期待値は，標本間の母平均の差異にはなんら影響を受けない．というのは個々の標本の s_i^2 は母平均の水準に無関係にその期待値が σ^2 に一致するからである．

さて，先の例で，$ps_{\bar{y}}^2=16$，$(1/m)\sum s_i^2=4.22$ が計算されたが，$ps_{\bar{y}}^2$ は $(1/m)\sum s_i^2$ よりかなり大きい．これは(11)における $p\sum(\mu_i-\mu)^2/(m-1)$ の項の影響のためかもしれない．

そこでその判定の手段として

$$F=\frac{ps_{\bar{y}}^2}{\frac{1}{m}\sum s_i^2} \tag{12}$$

という比率をつくってみる．この比率は，もし母平均間に差がなくかつ y_{ij} の母集団が正規分布をしていると仮定すると，自由度 $m-1$，$(p-1)m$ のスネデカーの F 分布にしたがうことが証明される(次節参照)．それゆえ，最初母平均間に差がないという帰無仮説をたてているとして，もし(12)で計算された F の値が，自由度 $m-1$，$(p-1)m$ の F 分布から期待される値よりも極端に大であれば，その帰無仮説は疑うに足りるということになる．なぜなら，もし帰無仮説が真であれば分子の期待値は σ^2 であるが，もし帰無仮説が真でなければ分子の期待値は $\sigma^2+p\sum(\mu_i-\mu)^2/(m-1)>\sigma^2$ になるからである．

上に説明したのは，加工個数に影響すると考えられる要因(層別の基準)として，旋盤の種類だけをとりあげたのであるが，さらに他の要因，たとえば工員の個人差というような要因も，時間当り加工個数の変動に影響しているかもしれない．分散分析によれば，このように要因の数が2個，あるいは2個以上ある場合にも，その要因が被説明変数の変動に影響しているかどうかを判定できるのである．

演　習　問　題

1　下記の表は東京株式市場第２部上場会社の 1966 年９月末日の株式利回り (%) である．４つの業種から各６社ずつが選ばれている．

繊 維 産 業	7.7	7.7	5.2	4.4	7.2	6.2
化 学 産 業	5.4	8.9	6.6	5.4	4.2	8.1
鉄鋼・金属産業	8.9	4.6	4.8	5.0	8.4	9.1
精密機器産業	4.4	6.0	3.6	6.2	6.2	4.7

このデータに基づいて(12)式の F の値を計算せよ．

11.2　1元配置模型

前節の例は，実は１元配置模型(one-way classification model)と呼ばれるものの特殊な場合に相当しているのである．実質的なことは前節ですでに説明してしまったのであるが，ここでは，それの一般的な模型を説明しよう．

いま，ただ１種類の要因だけが観測変量 y に影響していると考え，その要因が m 個の相異なる状態(たとえば m 個の旋盤)にあるとしよう．実験の場合に実験対象に m 水準の処理を施すという意味で，これらの要因を処理(treatment)，状態を水準(levels)と呼ぶこともある．要因が第 i 番目の状態(たとえば第 i 番目の旋盤)にあるときの第 j 番目の y の観測値を y_{ij} で表わす．第 i 番目の状態における y_{ij} の個数は n_i であり，かならずしも各 n_i は等しくないとする．観測値の総数 $\sum_{i=1}^{m} n_i$ を n で表わす．かくしてわれわれは次のような層別された n 個の観測値をもっているわけである．

$$
\begin{array}{llll}
y_{11} & y_{12} \cdots y_{1n_1} & & \\
y_{21} & y_{22} & \cdots\cdots & y_{2n_2} \\
\cdots\cdots & & & \\
y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mn_m}
\end{array}
$$

前節では $n_1=n_2=\cdots=n_m=p$ の特殊ケースを扱ったわけである．

y_{ij} に関し次のような模型をおく．

$$y_{ij}=\beta_0+\beta_i+u_{ij} \qquad i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, n_i \tag{1}$$

ただし

$$\sum_{i=1}^{m} n_i\beta_i=0 \tag{2}$$

ここに β_0, $\beta_i(i=1, \cdots, m)$ は定数である．また $u_{ij}(i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, n_i)$ は相互に独立に平均 0，分散 σ^2 の正規分布にしたがう直接には観測不可能な確率変数とし誤差項と呼ぶ．

このような模型は１元配置模型と呼ばれる．

誤差項 u_{ij} の平方和 $\sum_i\sum_j u_{ij}^2$ を次のように分解する．

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}^2 &= \sum_i\sum_j (y_{ij}-\beta_0-\beta_i)^2 \\
&= \sum_i\sum_j \{(y_{ij}-\bar{y}_i)+(\bar{y}_i-\beta_i-\bar{\bar{y}})+(\bar{\bar{y}}-\beta_0)\}^2 \\
&= \sum_i\sum_j (y_{ij}-\bar{y}_i)^2+\sum_i\sum_j(\bar{y}_i-\beta_i-\bar{\bar{y}})^2+\sum_i\sum_j(\bar{\bar{y}}-\beta_0)^2 \\
&\quad +2\sum_i\sum_j(y_{ij}-\bar{y}_i)(\bar{y}_i-\beta_i-\bar{\bar{y}})+2\sum_i\sum_j(y_{ij}-\bar{y}_i)(\bar{\bar{y}}-\beta_0) \\
&\quad +2\sum_i\sum_j(\bar{y}_i-\beta_i-\bar{\bar{y}})(\bar{\bar{y}}-\beta_0)
\end{aligned} \tag{3}
$$

i水準の平均　サンプル全体の平均

ただし

$$
\left.
\begin{aligned}
\bar{y}_i &= \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \\
\bar{\bar{y}} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i\bar{y}_i=\frac{1}{n}\sum_i\sum_j y_{ij}
\end{aligned}
\right\} \tag{4}
$$

とする．すると(３)のあとの３つの項はそれぞれ０となる．なぜなら

$$
\begin{aligned}
&2\sum_i\sum_j(y_{ij}-\bar{y}_i)(\bar{y}_i-\beta_i-\bar{\bar{y}})=2\sum_i(\bar{y}_i-\beta_i-\bar{\bar{y}})\underbrace{\sum_j(y_{ij}-\bar{y}_i)}_{\to 0}=0 \\
&2\sum_i\sum_j(y_{ij}-\bar{y}_i)(\bar{\bar{y}}-\beta_0)=2(\bar{\bar{y}}-\beta_0)\sum_i\{\sum_j\underbrace{(y_{ij}-\bar{y}_i)}_{\to 0}\}=0 \\
&2\sum_i\sum_j(\bar{y}_i-\beta_i-\bar{\bar{y}})(\bar{\bar{y}}-\beta_0) \\
&\quad =2(\bar{\bar{y}}-\beta_0)\sum_i n_i(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}})-2(\bar{\bar{y}}-\beta_0)\sum_i n_i\beta_i=0
\end{aligned}
$$

となるからである．したがって(３)は　　1元配置模型の仮定より 0

$$\sum_i\sum_j u_{ij}^2=\underbrace{\sum_i\sum_j(y_{ij}-\bar{y}_i)^2}_{Q_1}+\underbrace{\sum_i n_i(\bar{y}_i-\beta_i-\bar{\bar{y}})^2}_{Q_2}+\underbrace{n(\bar{\bar{y}}-\beta_0)^2}_{Q_3} \tag{5}$$

となる．ここで

$$
\left.
\begin{aligned}
Q &= \sum_i\sum_j u_{ij}^2 \\
Q_1 &= \sum_i\sum_j(y_{ij}-\bar{y}_i)^2 \\
Q_2 &= \sum_i n_i(\bar{y}_i-\beta_i-\bar{\bar{y}})^2 \\
Q_3 &= n(\bar{\bar{y}}-\beta_0)^2
\end{aligned}
\right\} \tag{6}
$$

とおくと(5)は

$$Q=Q_1+Q_2+Q_3 \tag{7}$$

となり u_{ij} の平方和 Q は 3 つの平方和 Q_1, Q_2, Q_3 に分割されたわけである．

これら Q_1, Q_2, Q_3 の分布について次の定理がある．

〔定理 11.1〕　1 元配置模型において，Q_1/σ^2, Q_2/σ^2, Q_3/σ^2 はそれぞれ自由度 $n-m$, $m-1$, 1 のカイ自乗分布にしたがい，相互に独立に分布する．

この定理の証明は 13.5.1 で与える．なお，定理 6.2 のカイ自乗分布の再生性より，3 つの独立なカイ自乗変量の和は，それぞれの自由度の和を自由度とするカイ自乗変量となるから，$\sum_i\sum_j u_{ij}^2/\sigma^2$ は自由度 $(n-m)+(m-1)+1=n$ のカイ自乗分布にしたがう (u_{ij}/σ は相互に独立に $N(0,\ 1)$ にしたがい，それゆえ n 個の $(u_{ij}/\sigma)^2$ の和は自由度 n のカイ自乗分布にしたがうからこの点での矛盾はない)．

標準化

そこで定理 6.4 によれば比

$$F=\frac{Q_2/(m-1)}{Q_1/(n-m)} \tag{8}$$

は自由度 $m-1$, $n-m$ のスネデカーの F 分布にしたがうことが分かる．

(8)を書き換えれば

$$F=\frac{\sum_i n_i(\bar{y}_i-\beta_i-\bar{\bar{y}})^2/(m-1)}{\sum_i\sum_j(y_{ij}-\bar{y}_i)^2/(n-m)} \tag{9}$$

となる．

以上が 1 元配置模型から導かれる分散分析のための主要な結論である．そこで次に $\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_m=0$ という帰無仮説 H_0 を検定する問題を考えてみよう．すなわち

$H_0:\beta_i=0\qquad i=1,\ \cdots,\ m$

H_1：少なくとも 2 個の β_i について $\beta_i\neq 0$

である．もし帰無仮説 H_0 が真であれば $\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_m=0$ であるから(9)より

$$F=\frac{\sum_i n_i(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}})^2/(m-1)}{\sum_i\sum_j(y_{ij}-\bar{y}_i)^2/(n-m)}=\frac{S_2/(m-1)}{S_1/(n-m)} \tag{10}$$

は自由度 $m-1$, $n-m$ の F 分布にしたがうことになる．ただし

$$\left.\begin{aligned}S_1(=Q_1)&=\sum_i\sum_j(y_{ij}-\bar{y}_i)^2\\ S_2&=\sum_i n_i(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}})^2\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

(級内のサンプル − 級内の平均)^{2}の総和

(級の平均 − 全体の平均)^2×級のサンプル数の総和

である．

$S_1/(n-m)$, $S_2/(m-1)$ は前節の記号でいえば((11.1.12)式参照)，それぞれ $\sum s_i^2/m$, $ps_{\bar{y}}^2$ に対応している．$S_1/(n-m)$, $S_2/(m-1)$ をそれぞれ**級内分散** (within variance)，**級間分散** (between variance) と呼ぶことがある．

また y_{ij} 全体の標本平均の回りの平方和を S とおけば

$$\begin{aligned}S&=\sum_i\sum_j(y_{ij}-\bar{\bar{y}})^2=\sum_i\sum_j\{(y_{ij}-\bar{y}_i)+(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}})\}^2\\ &=\sum_i\sum_j(y_{ij}-\bar{y}_i)^2+\sum_i n_i(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}})^2\\ &=S_1+S_2\end{aligned} \tag{12}$$

となることに注意しておこう．S を**全変動** (total variation)，S_1 を**級内変動**，S_2 を**級間変動**と呼ぶことがある．

$\bar{y}_i=\frac{1}{n_i}\sum_j^{n_i}(\beta_0+\beta_i+u_{ij})=\beta_0+\beta_i+\bar{u}_i$

$\bar{\bar{y}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}n_i\bar{y}_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}n_i(\beta_0+\beta_i+\frac{1}{n_i}\sum_{j}^{n_i}u_{ij})$

$=\beta_0+\bar{\bar{u}}$

ところで

$$\begin{aligned}S_2&=\sum_i n_i(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}})^2=\sum_i n_i\{(\bar{y}_i-\beta_i-\bar{\bar{y}})+\beta_i\}^2\\ &=\sum_i n_i(\bar{y}_i-\beta_i-\bar{\bar{y}})^2+2\sum_i n_i(\bar{y}_i-\beta_i-\bar{\bar{y}})\beta_i+\sum_i n_i\beta_i^2\\ &=\sum_i n_i(\bar{y}_i-\beta_i-\bar{\bar{y}})^2-\sum_i n_i\beta_i^2+2\sum_i n_i\beta_i(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}})\end{aligned} \tag{13}$$

($\sum_{i=1}^{m}n_i\beta_i=0$ に注意)

となるが，

$$2\sum n_i\beta_i(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}})=2\sum n_i\beta_i^2+2\sum n_i\beta_i(\bar{u}_i-\bar{u})$$

である(ただし $\bar{u}_i=(1/n_i)\sum_{j=1}^{n_i}u_{ij}$, $\bar{u}=(1/n)\sum_{i=1}^{m}n_i\bar{u}_i$) から，(13)は

$$\sum n_i(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}})^2=\sum n_i(\bar{y}_i-\beta_i-\bar{\bar{y}})^2+\sum n_i\beta_i^2+2\sum n_i\beta_i(\bar{u}_i-\bar{u}) \tag{14}$$

となる．カイ自乗分布の平均は自由度に等しいから

$$E(Q_2)=E\{\sum n_i(\bar{y}_i-\beta_i-\bar{\bar{y}})^2\}=(m-1)\sigma^2 \tag{15}$$

また

$$E\{2\sum n_i\beta_i(\bar{u}_i-\bar{u})\}=2\sum n_i\beta_i\{E(\bar{u}_i)-E(\bar{u})\}=0$$

期待値計算にとっては定数．

であるから

$$E(S_2)=E\{\sum n_i(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}})^2\}=(m-1)\sigma^2+\sum n_i\beta_i^2 \tag{16}$$

それゆえ，平均的にみると $\sum n_i(\bar{y}_i-\bar{\bar{y}})^2$ は $\sum n_i(\bar{y}_i-\beta_i-\bar{\bar{y}})^2$ より $\sum n_i\beta_i^2$

だけ大きくなる．したがって(10)により計算されるFは帰無仮説が真でないとき大きくなりがちとなる．そこで次のような片側検定を行なえばよいことが分かる．

6.3.2で述べたように，F分布の右すその面積がαとなるFの臨界値をFの$\alpha\times100\%$点と呼びF_αで表わす．このときもし(10)式で計算されるFが

$F\geqq F_\alpha$ ならば，H_0は棄却され

$F<F_\alpha$ ならば，H_0は棄却されない

ことになる．[2)]

分散分析においては次のような**分散分析表**(analysis-of-variance table)をつくると便利である．

表 11.3 分散分析表

(1) 要　因	(2) 自由度	(3) 平　方　和	(4) 平均平方	(5) 平均平方の期待値
残　差	$n-m$	$S_1=\sum_i\sum_j(y_{ij}-\bar{y}_i)^2$	$S_1/(n-m)$	σ^2
処　理	$m-1$	$S_2=\sum_i n_i(\bar{y}_i-\bar{y})^2$	$S_2/(m-1)$	$\sigma^2+\sum_i n_i\beta_i^2/(m-1)$
全　体	$n-1$	$S=\sum_i\sum_j(y_{ij}-\bar{y})^2$	$S/(n-1)$	

この表に，数式の表わしている実際の数値を入れるわけである．(5)欄は省略してもかまわない．

前節の例では $m=3,\ n_1=n_2=n_3=4,\ n=\sum n_i=12$ であり

$$\sum_i\sum_j(y_{ij}-\bar{y}_i)^2=14+10+14=38$$

$$\sum n_i(\bar{y}_i-\bar{y})^2=4\cdot(12-14)^2+4\cdot(14-14)^2+4\cdot(16-14)^2=32$$

となるから

$$F=\frac{32/(3-1)}{38/(12-3)}=\frac{16}{4.22}=3.79$$

2) (10)で分母と分子を逆にして $F=\dfrac{S_1/(n-m)}{S_2/(m-1)}$ とおけば，このFはH_0が真のとき自由度$n-m,\ m-1$のF分布にしたがう．この場合はF分布の左すそを棄却域にとればよい．しかし(10)のような形，つまりH_0が真でないときカイ自乗分布しなくなる変量を分子におくことが慣行となっている．

となる．一方，自由度2，9のFの1%点は8.02，また5%点は4.26であるから帰無仮説H_0は有意水準5%で棄却されない．分散分析表の形にまとめれば表11.4のようになる．

表 11.4 時間当り加工個数の分散分析表

要　因	自由度	平方和	平均平方
残　差	9	38	4.22
旋　盤	2	32	16
全　体	11	70	

$F=\dfrac{16}{4.22}=3.79,\ F_{0.05}=4.26$

演 習 問 題

1 前節演習問題1の結果を分散分析表にまとめよ．有意水準1%で，業種間の利回りの差の有意性検定を行なえ．

2 次表はA，B，C 3つのクラスのおのおの数人の学生の統計学の成績(点)である．これらのクラスの成績の間に有意な差があるか．

A	52	49	71	65	70	32
B	28	44	63	52		
C	85	39	75	75	68	

11.3 2元配置模型

前節の模型では時間当り加工個数に影響するものとして旋盤という要因だけを考えたが，加工している工員の個人差によっても加工個数が影響を受けているかもしれない．そこでこの節では，旋盤と工員というように2つの要因を同時に考慮した場合の分散分析について考えよう．

この場合の模型は次のとおりである．表11.5のような矩形型に並んだ変量$y_{ij}(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,p)$を前提にする．

これらy_{ij}に関し次のような模型をおく．

$$y_{ij}=\beta_0+\beta_{i\cdot}+\beta_{\cdot j}+u_{ij}\qquad i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,p \tag{1}$$

ただし

表 11.5

i \ j		要因 2				平均
		1	2	$\cdots$	p	
要因1	1	y_{11}	y_{12}	$\cdots$	y_{1p}	$\bar{y}_{1\cdot}$
	2	y_{21}	y_{22}	$\cdots$	y_{2p}	$\bar{y}_{2\cdot}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	m	y_{m1}	y_{m2}	$\cdots$	y_{mp}	$\bar{y}_{m\cdot}$
平均		$\bar{y}_{\cdot 1}$	$\bar{y}_{\cdot 2}$	$\cdots$	$\bar{y}_{\cdot p}$	$\bar{\bar{y}}$

$$\sum_{i=1}^{m}\beta_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{p}\beta_{\cdot j}=0 \tag{2}$$

$\beta_{i\cdot}$ は第1要因の第 i 水準に特有な定数であり，$\beta_{\cdot j}$ は第2要因の第 j 水準に特有な定数である．また $u_{ij}(i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, p)$ は平均 0，分散 σ^2 の正規分布にしたがい相互に独立に分布する誤差項とする．

このような模型を **2元配置模型** (two-way cross classification model) と呼ぶ.[3] 観測値の総数は前と同様 n とする．$n=mp$．

誤差項 u_{ij} の平方和を Q とし次のように分解する．

$$\begin{aligned}
Q&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}u_{ij}^2=\sum_i\sum_j(y_{ij}-\beta_0-\beta_{i\cdot}-\beta_{\cdot j})^2\\
&=\sum_i\sum_j\{(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot j}+\bar{\bar{y}})+(\bar{y}_{i\cdot}-\beta_{i\cdot}-\bar{\bar{y}})\\
&\quad+(\bar{y}_{\cdot j}-\beta_{\cdot j}-\bar{\bar{y}})+(\bar{\bar{y}}-\beta_0)\}^2\\
&=\sum_i\sum_j(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot j}+\bar{\bar{y}})^2+p\sum_i(\bar{y}_{i\cdot}-\beta_{i\cdot}-\bar{\bar{y}})^2\\
&\quad+m\sum_j(\bar{y}_{\cdot j}-\beta_{\cdot j}-\bar{\bar{y}})^2+n(\bar{\bar{y}}-\beta_0)^2
\end{aligned} \tag{3}$$

となる（6個の積和の項はすべて0になることを確かめよ）．ただし

$$\left.\begin{aligned}
\bar{y}_{i\cdot}&=\frac{1}{p}\sum_j y_{ij}\\
\bar{y}_{\cdot j}&=\frac{1}{m}\sum_i y_{ij}\\
\bar{\bar{y}}&=\frac{1}{n}\sum_j\sum_i y_{ij}=\frac{1}{m}\sum_i\bar{y}_{i\cdot}=\frac{1}{p}\sum_j\bar{y}_{\cdot j}
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

となる．ここで

3)　この節の模型は正確には，繰返しがなく交絡項をもたない2元配置模型に属する．

$$\left.\begin{aligned}
Q_1&=\sum\sum(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot j}+\bar{\bar{y}})^2\\
Q_2&=p\sum_i(\bar{y}_{i\cdot}-\beta_{i\cdot}-\bar{\bar{y}})^2\\
Q_3&=m\sum_j(\bar{y}_{\cdot j}-\beta_{\cdot j}-\bar{\bar{y}})^2\\
Q_4&=n(\bar{\bar{y}}-\beta_0)^2
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

とおけば誤差項の平方和は

$$Q=Q_1+Q_2+Q_3+Q_4 \tag{6}$$

と4つの平方和に分解できたわけである．これら平方和の分布に関して次の定理がある．この定理の証明は 13.5.2 で与える．

〔**定理 11.2**〕　2元配置模型において，Q_1/σ^2, Q_2/σ^2, Q_3/σ^2, Q_4/σ^2 はそれぞれ自由度 $n-m-p+1$, $m-1$, $p-1$, 1 のカイ自乗分布にしたがい，相互に独立に分布する．

そこでこの定理を用いれば，**定理 6.4** によって

行特有の係数 βi. あり

$$F_1=\frac{Q_2/(m-1)}{Q_1/(n-m-p+1)} \tag{7}$$

は自由度 $m-1$, $n-m-p+1$ の F 分布にしたがい，また

列特有の係数 β.j あり

$$F_2=\frac{Q_3/(p-1)}{Q_1/(n-m-p+1)} \tag{8}$$

は自由度 $p-1$, $n-m-p+1$ の F 分布にしたがって分布することが分かる．

2元配置の場合は，これらの結論を分散分析に利用するのであるが，ここで以下の準備として，y_{ij} の標本平均 $\bar{\bar{y}}$ の回りの平方和 S を次のように分解しておく．

$$\begin{aligned}
S&=\sum_i\sum_j(y_{ij}-\bar{\bar{y}})^2\\
&=\sum_i\sum_j\{(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot j}+\bar{\bar{y}})+(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{\bar{y}})+(\bar{y}_{\cdot j}-\bar{\bar{y}})\}^2\\
&=\sum_i\sum_j(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot j}+\bar{\bar{y}})^2+p\sum_i(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{\bar{y}})^2+m\sum_j(\bar{y}_{\cdot j}-\bar{\bar{y}})^2\\
&=S_1+S_2+S_3
\end{aligned} \tag{9}$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} S_1(=Q_1)&=\sum_i\sum_j(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot j}+\bar{\bar{y}})^2\\ S_2&=p\sum_i(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{\bar{y}})^2\\ S_3&=m\sum_j(\bar{y}_{\cdot j}-\bar{\bar{y}})^2\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

とする．S_2 を行間変動(variation between rows)，S_3 を列間変動(variation between columns)と呼ぶことがある．

S_1, S_2, S_3 の期待値は次のようになる．$S_1/\sigma^2=Q_1/\sigma^2$ は自由度 $n-m-p+1$ のカイ自乗分布にしたがうから $E(S_1/\sigma^2)=n-m-p+1$ である．よって

$$E\left(\frac{S_1}{n-m-p+1}\right)=\sigma^2\tag{11}$$

である．

また $\bar{u}_{i\cdot}=(1/p)\sum_j u_{ij}$，$\bar{u}_{\cdot j}=(1/m)\sum_i u_{ij}$，$\bar{\bar{u}}=(1/n)\sum_i\sum_j u_{ij}=(1/m)\sum_i \bar{u}_{i\cdot}=(1/p)\sum_j \bar{u}_{\cdot j}$ として

$$\left.\begin{aligned} &\bar{y}_{i\cdot}=\beta_0+\beta_{i\cdot}+\bar{u}_{i\cdot} &&i=1,\cdots,m\\ &\bar{y}_{\cdot j}=\beta_0+\beta_{\cdot j}+\bar{u}_{\cdot j} &&j=1,\cdots,p\\ &\bar{\bar{y}}=\beta_0+\bar{\bar{u}}\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

であることに注意すれば

$$\begin{aligned} S_2&=p\sum_i(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{\bar{y}})^2\\ &=p\sum\{(\bar{y}_{i\cdot}-\beta_{i\cdot}-\bar{\bar{y}})+\beta_{i\cdot}\}^2\\ &=p\sum\{(\bar{u}_{i\cdot}-\bar{\bar{u}})+\beta_{i\cdot}\}^2\\ &=p\sum(\bar{u}_{i\cdot}-\bar{\bar{u}})^2+p\sum\beta_{i\cdot}^2+2p\sum\beta_{i\cdot}(\bar{u}_{i\cdot}-\bar{\bar{u}})\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} E(S_2)&=pE\{\sum(\bar{u}_{i\cdot}-\bar{\bar{u}})^2\}+p\sum\beta_{i\cdot}^2+2p\sum\beta_{i\cdot}\{E(\bar{u}_{i\cdot})-E(\bar{\bar{u}})\}\\ &=p\cdot(m-1)\frac{\sigma^2}{p}+p\sum_i\beta_{i\cdot}^2\\ &=(m-1)\sigma^2+p\sum_i\beta_{i\cdot}^2\end{aligned}$$

となる．書き換えれば

$$E\left(\frac{S_2}{m-1}\right)=\sigma^2+\frac{p}{m-1}\sum_{i=1}^m\beta_{i\cdot}^2\tag{13}$$

となる．

これとまったく同様にして

$$E\left(\frac{S_3}{p-1}\right)=\sigma^2+\frac{m}{p-1}\sum_{j=1}^p\beta_{\cdot j}^2\tag{14}$$

が得られる．

以上の結果は次の表 11.6 のような分散分析表にまとめられる．

表 11.6　2元配置の分散分析表

(1) 要因	(2) 自由度	(3) 平方和	(4) 平均平方	(5) 平均平方の期待値
残差	$n-m-p+1$	$S_1=\sum_i\sum_j(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot j}+\bar{\bar{y}})^2$	$\frac{S_1}{n-m-p+1}$	σ^2
行間	$m-1$	$S_2=p\sum_i(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{\bar{y}})^2$	$\frac{S_2}{m-1}$	$\sigma^2+\frac{p}{m-1}\sum_i\beta_{i\cdot}^2$
列間	$p-1$	$S_3=m\sum_j(\bar{y}_{\cdot j}-\bar{\bar{y}})^2$	$\frac{S_3}{p-1}$	$\sigma^2+\frac{m}{p-1}\sum_j\beta_{\cdot j}^2$
全体	$n-1$	$S=\sum_i\sum_j(y_{ij}-\bar{\bar{y}})^2$	$\frac{S}{n-1}$	

以上のことを利用すれば次のような仮説検定の問題を解くことができる．

(イ)　行間の差に関する検定

$H_0:\beta_{i\cdot}=0\quad i=1,\cdots,m$

$H_1:$ 少なくとも2個の $\beta_{i\cdot}$ について $\beta_{i\cdot}\neq 0$

この場合には，もし帰無仮説 H_0 が真であれば $\beta_{1\cdot}=\beta_{2\cdot}=\cdots=\beta_{m\cdot}=0$ なのだから $Q_2=p\sum_i(\bar{y}_{i\cdot}-\beta_{i\cdot}-\bar{\bar{y}})^2$ は $S_2=p\sum(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{\bar{y}})^2$ に一致する．よって(7)より($Q_1=S_1$ であるから)

$$F_1=\frac{S_2/(m-1)}{S_1/(n-m-p+1)}\tag{15}$$

は，H_0 が真であれば，自由度 $m-1$，$n-m-p+1$ の F 分布にしたがって分布する．仮説 H_0 が真でなければ，(13)によって $S_2/(m-1)$ は $Q_2/(m-1)$ より平均的に $p\sum_i\beta_{i\cdot}^2/(m-1)>0$ だけ大きくなるから，片側検定を用いればよい．

例題 11.3.1　表 11.1 の時間当り加工個数の例において2元配置模型によって，旋盤によって加工個数に差があるかどうかの検定を行なってみよう．表 11.7 のように各行，各列の平均をつくり分散分析表を表 11.8 のようにつくる．このとき，残差平方和 S_1 は，S, S_2, S_3 を計算したあとで

$$S_1=S-S_2-S_3$$

表 11.7

旋盤＼工員	1	2	3	4	平 均
1	13	12	14	9	12
2	13	12	16	15	14
3	19	15	14	16	16
平 均	15	13	14.667	13.333	14

表 11.8

要 因	自 由 度	平 方 和	平均平方
残 差	6	29.331	4.889
旋 盤	2	32	16
工 員	3	8.669	2.890
全 体	11	70	

$F_1=\frac{16}{4.889}=3.27,\ F_{0.05}=5.14$

$F_2=\frac{2.890}{4.889}=0.59,\ F_{0.05}=4.76$

によって求めるほうが簡単である．この結果，表の下にあるように $F_1=3.27$ となる．一方自由度 2, 6 の F の 5% 点 $F_{0.05}$ は 5.14 であるから，帰無仮説は有意水準 5% で棄却されない．

(ロ)　次に工員による差を検定する．

$H_0: \beta_{.j}=0 \quad j=1, \cdots, p$

H_1：少なくとも 2 個の $\beta_{.j}$ について $\beta_{.j} \neq 0$

これも(イ)とまったく同様にして，表 11.8 を使用すれば，$F_2=0.59$ となるが，自由度 3, 6 の F の 5% 点は 4.76 であり，この帰無仮説も棄却されない．

演 習 問 題

1　次のデータは 1962 年の産業別・規模別賃金(常用労働者 1 人当り月間給与総額)である．おのおのの賃金は分散の等しい正規分布にしたがうと仮定して，平均値間の差の検定をせよ．

(単位　千円/月)

規模＼産業	鉱 業	製造業	繊 維 工 業	化 学 工 業	鉄鋼業	機 械 製造業	電気機 械器具 製造業	運 輸 通信業
5～ 29人	19.7	18.6	15.3	24.7	25.1	23.9	19.5	29.3
30～ 99	23.6	21.7	16.8	29.5	30.3	25.8	20.6	33.1
100～499	27.0	25.3	18.6	33.2	31.9	28.0	21.1	34.8
500 以上	34.1	32.6	20.0	35.2	42.2	32.5	26.4	38.2

第 II 部

第 12 章

行　　列

12.1 行列の演算

12.1.1 行列の定義

行列(matrix)とは数を矩形状に並べたものをいう．mn 個の数を並べた行列

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

を $m\times n$ 行列という．また行列を構成している数 a_{11}, a_{12}, … を要素(elements)という．行列の要素の配列の横段を行(row)，縦欄を列(column)と呼ぶ．第 i 行(上から数えて)，第 j 列(左から数えて)に属する要素 a_{ij} を第 (i, j) 要素と呼ぶ．行列は要素が実数でも複素数でも定義されるが，この本では，要素が実数の行列(実数行列と呼ばれる)のみを扱う．

例　$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$ は 2×2 の行列．

$\begin{bmatrix} -1 & 0.1 & 5 \\ \sqrt{3} & -2 & 1.5 \end{bmatrix}$ は 2×3 の行列．

(1)をたんに

$$A=[a_{ij}] \tag{2}$$

と書くこともある．

$1\times n$ の行列，たとえば

$$\boldsymbol{a}=[a_1\quad a_2\quad \cdots\quad a_n] \tag{3}$$

を n 次行ベクトル(row vector)と呼ぶ．また $m\times 1$ の行列，たとえば

$$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{4}$$

を m 次列ベクトル(column vector)と呼ぶ．

以下この本では約束として，行列をゴシックの大文字，ベクトルをゴシックの小文字で表わすことにする．また原則としてベクトルは列ベクトルを示すものとする．

12.1.2　行列の演算規則

(イ)　行列の等式

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B} \tag{5}$$

とは

$$a_{ij}=b_{ij}\qquad i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n \tag{6}$$

が成立することと等値である．すなわち対応する位置の要素がすべて等しいことを意味する．

(ロ)　加　　法

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \tag{7}$$

とは

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\qquad i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n \tag{8}$$

と等値である．このとき $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の行数列数はそれぞれ同一でなければならない．

例　$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & -7\\ 2 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+5 & 2-7\\ 3+2 & 4+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -5\\ 5 & 13\end{bmatrix}$

(ハ)　スカラー乗法　c を任意の実数(行列に対して普通の数をスカラー(scalar)と呼ぶ)とするとき

$$\boldsymbol{B}=c\boldsymbol{A} \tag{9}$$

とは

$$b_{ij}=ca_{ij}\qquad i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n \tag{10}$$

を意味する．これをスカラー乗法(scalar multiplication)という．すなわちスカラー乗法によって行列のすべての要素が一定倍される．

例　$5\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\cdot1 & 5\cdot2\\ 5\cdot3 & 5\cdot4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 10\\ 15 & 20\end{bmatrix}$

(ニ)　以上の規則から次の関係が成立することは容易に確かめられる．

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \tag{11}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C} \tag{12}$$

$$c(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=c\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{B} \tag{13}$$

$$(c+d)\boldsymbol{A}=c\boldsymbol{A}+d\boldsymbol{A} \tag{14}$$

ただし c, d はスカラー．

(ホ)　行 列 乗 法　$\boldsymbol{A}$ を $m\times n$ 行列，$\boldsymbol{B}$ を $n\times p$ 行列，$\boldsymbol{C}$ を $m\times p$ 行列とするとき

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB} \tag{15}$$

とは

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\qquad i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,p \tag{16}$$

を意味する．これを行列乗法(matrix multiplication)という．

例1　$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}\\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}\end{bmatrix}$$

例2　$\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot1+3\cdot(-1) & 2\cdot2+3\cdot(-3)\\ 5\cdot1+6\cdot(-1) & 5\cdot2+6\cdot(-3)\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}-1 & -5\\ -1 & -8\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1 & 5\\ 1 & 8\end{bmatrix}$$

例3　$\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

例4　$[2\quad 3]\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=-1$

例5　$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}[2 \quad 3]=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

(ヘ)　以上の規則より，次が成立することが容易に確かめられる．

$$(AB)C=A(BC)=ABC \tag{17}$$

$$A(B+C)=AB+AC \tag{18}$$

$$cAB=AcB=ABc \tag{19}$$

しかし，一般に

$$AB \fallingdotseq BA \tag{20}$$

すなわち交換の法則は成立しない．それゆえ，AにBを右から掛けること(AB)と，左から掛けること(BA)とを区別しなければならない．

例　$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ とすると

$$AB=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

12.1.3　その他の用語

(イ)　行列の転置　Aを $m\times n$ 行列(1)とするとき

$$A'=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{21}$$

をAの**転置行列**(transposed matrix)と呼ぶ．以下，転置行列をもとの行列に $'$ を右肩につけて表わすことにする．かくしてBがAの転置行列 A' であるとは

$$b_{ji}=a_{ij} \qquad i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, n \tag{22}$$

であることを意味する．

例　$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}'=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}'=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

転置については次のような関係が成立する．

$$(A')'=A \tag{23}$$

$$(A+B)'=A'+B' \tag{24}$$

$$(AB)'=B'A' \tag{25}$$

(23)，(24)は転置行列の定義から明らかである．(25)を証明しよう．$B'A'$ の第(j, i)要素は B' の第 j 行と A' の第 i 列との積である．これはAの第 i 行とBの第 j 列の積に等しい．したがってそれは AB の第(i, j)要素に等しく $(AB)'$ の第(j, i)要素に等しい(証明終り)．

また次が成立する．

$$(ABC)'=C'B'A' \tag{26}$$

なぜなら

$$(ABC)'=[(AB)C]'=C'(AB)'=C'B'A'$$

であるから．

(ロ)　正方行列　行数と列数の等しい行列を**正方行列**(square matrix)という．$n\times n$ の正方行列をたんに n 次正方行列と呼ぶ．n 次正方行列

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

の要素 a_{ij} で $i=j$ なる a_{ij} をAの**対角要素**(diagonal element)，$i\fallingdotseq j$ なる a_{ij} を**非対角要素**(off-diagonal element)と呼ぶ．

(ハ)　トレース　n 次正方行列Aにおいて，対角要素の合計をAのトレース(trace)と呼び，これを $\mathrm{tr}(A)$ と書く．

$$\mathrm{tr}(A)=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{27}$$

トレースに関しては次の等式が成立する．

$$\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B) \tag{28}$$

$$\mathrm{tr}(A')=\mathrm{tr}(A) \tag{29}$$

$$\mathrm{tr}(cA)=c\,\mathrm{tr}(A) \tag{30}$$

$$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA) \tag{31}$$

(28)，(29)，(30)は明らかである．(31)はAを $m\times n$，Bを $n\times m$ 行列として

$$\mathrm{tr}(AB)=\sum_{i}^{m}\left(\sum_{j}^{n} a_{ij}b_{ji}\right)=\sum_{j}^{n}\left(\sum_{i}^{m} b_{ji}a_{ij}\right)=\mathrm{tr}(BA)$$

(ニ)　対称行列　Aを正方行列とするとき

$$A=A' \tag{32}$$

が成立するならば，Aを対称行列(symmetric matrix)と呼ぶ．A(次数をnとする)が対称行列であれば

$$a_{ij}=a_{ji} \qquad i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n \tag{33}$$

である．

例　$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \\ -5 & 2 & 9 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

(ホ) 単位行列　対角要素がすべて1，非対角要素がすべて0の正方行列を**単位行列**(unit matrix)と呼び，これをIで表わす．

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{34}$$

次数nの単位行列を特に次数を明らかにするため，I_nで表わすこともある．容易に確かめられるように，行列に単位行列を掛けても行列は変わらない．

$$IA=AI=A \tag{35}$$

このように単位行列は，スカラーの代数演算における1の役割を果たしている．

(ヘ) ゼロ行列　すべての要素が0の行列を**ゼロ行列**と呼びOで表わす．ゼロ行列は正方行列とは限らない．$n\times m$のゼロ行列を$O_{n,m}$と書くことがある．明らかに

$$OA=O,\ AO=O,\ A+O=O+A=A \tag{36}$$

このようにゼロ行列はスカラー代数演算における0の役割を果たす．またすべての要素が0のベクトルを**ゼロベクトル**といい，$\boldsymbol{o}$で表わす．

(ト) スカラー行列　対角要素がすべて等しく，非対角要素がすべて0の正方行列を**スカラー行列**という．これは単位行列のλ倍に等しい．

$$\lambda I=\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \tag{37}$$

(チ) 対角行列　非対角要素がすべて0の正方行列を**対角行列**(diagonal matrix)と呼ぶ．たとえば

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{38}$$

はn次の対角行列である．単位行列，スカラー行列は対角行列である．また対角行列は対称行列である．

(リ) 内　積　行ベクトルに右から列ベクトルを掛けた積を特に**内積**(inner product)と呼ぶ．内積はスカラーになる．$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$をn次列ベクトルとすれば$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$の内積は$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}$である．そして$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}=0$となるときベクトル$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$は**直交している**(orthogonal)という．

また，同じベクトルどうしの内積，たとえば$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}$を$\|\boldsymbol{x}\|^2$で表わす．$\sqrt{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}=\|\boldsymbol{x}\|$をベクトル$\boldsymbol{x}$の**ノルム**(norm)と呼ぶ．$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\sum x_i^2}$である．

12.1.4　行列の分割

行列の要素をいくつかの矩形部分に分割するとき，それら各部分を**小行列**(submatrix)と呼ぶ．

たとえば$m\times n$行列Aは$m\times n_1$行列A_1, $m\times n_2$行列A_2，ただし$n_1+n_2=n$の2つの小行列に分割される．

$$A=[A_1\quad A_2] \tag{39}$$

明らかに

$$A'=[A_1\quad A_2]'=\begin{bmatrix} A_1' \\ A_2' \end{bmatrix} \tag{40}$$

である．また$B=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$，ただし$B_1$は$n_1\times p$, B_2は$n_2\times p$とすれば

$$AB=[A_1\quad A_2]\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}=A_1B_1+A_2B_2 \tag{41}$$

となる．また

$$A=\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} & \begin{matrix})m_1 \\ )m_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \ \ n_1 & \ \ n_2 \end{matrix} & \end{array},\quad B=\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} & \begin{matrix})n_1 \\ )n_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \ \ p_1 & \ \ p_2 \end{matrix} & \end{array}$$

と分割すれば

$$AB=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\ \underbrace{A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}}_{p_1} & \underbrace{A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}}_{p_2}\end{bmatrix}\begin{matrix})m_1\\ )m_2\end{matrix} \tag{42}$$

となる．このように行列乗法において小行列はスカラーの要素のごとく扱える．

例　$A=[A_1\quad A_2]=\left[\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 3 & 1\\ 2 & 4 & 0 & 2\end{array}\right]$

$$B=\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc}2 & 3 & 0\\ -1 & 1 & 2\\ \hline 3 & 1 & 0\\ 4 & 2 & 5\end{array}\right]$$

$$AB=[A_1B_1+A_2B_2]$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ 0 & 10 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}13 & 5 & 5\\ 8 & 4 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & 7 & 3\\ 8 & 14 & 18\end{bmatrix}$$

演　習　問　題

1　次の計算をせよ．

(a)　$\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ -5 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -8\\ 4 & 5\end{bmatrix}$

(b)　$\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ -2 & 4 & -5\end{bmatrix}-6\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$

(c)　$\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 5 & -3 & 1\end{bmatrix}$

(d)　$[1\quad 2\quad 3]\begin{bmatrix}5\\ 3\\ 1\end{bmatrix}$

(e)　$\begin{bmatrix}5\\ 3\\ 1\end{bmatrix}[1\quad 2\quad 3]$

2　$\mathrm{tr}\{(A+B)^2\}=\mathrm{tr}(AA)+2\,\mathrm{tr}(AB)+\mathrm{tr}(BB)$ を証明せよ．

12.2　行　列　式

12.2.1　順列の互換

n 個の自然数 1, 2, …, n からなる順列は $n!$ 通りある．1つの順列において，数 p と q とを入れ換えることを互換といい，これを (p, q) で表わすことにする．たとえば順列 (1 2 3) に互換 (2, 3) を施せば (1 3 2) となる．また (3 1 2) は (1 2 3) から出発して次のように2回互換を施すことによって得られる．

$$(1\quad 2\quad 3)\xrightarrow[(2,3)]{}(1\quad 3\quad 2)\xrightarrow[(1,3)]{}(3\quad 1\quad 2)$$

順列 $(1\ 2\ \cdots\ n)$ を並べ変えて得られる任意の順列を $(s_1\ s_2\ \cdots\ s_n)$ で表わす．

〔定理 12.1〕　順列 $(1\ 2\ \cdots\ n)$ から順列 $(s_1\ s_2\ \cdots\ s_n)$ に移るのに必要な互換の数はつねに偶数かまたはつねに奇数である．

この定理の証明は省略する．[1] たとえば (1 2 3) から1回の互換 (2, 3) によって (1 3 2) が得られるが，(1 3 2) はまた

$$(1\quad 2\quad 3)\xrightarrow[(1,3)]{}(3\quad 2\quad 1)\xrightarrow[(1,2)]{}(3\quad 1\quad 2)\xrightarrow[(1,3)]{}(1\quad 3\quad 2)$$

というふうにして3回の互換によって得られる．しかしいずれの場合でも必要な互換の数は奇数である．これに対し (1 2 3) から (3 1 2) に移すのに必要な互換の数は，どのようにしても偶数である．

$(1\ 2\ \cdots\ n)$ から移すのに必要な互換数が奇数の順列を奇順列，偶数の順列を偶順列という．必要な互換数を l として次のような関数 ε を定義する．

$$\varepsilon(s_1\quad s_2\ \cdots\ s_n)=(-1)^l \tag{1}$$

こうすると

$$\left.\begin{array}{ll}\text{偶順列ならば} & \varepsilon(s_1\ \cdots\ s_n)=+1\\ \text{奇順列ならば} & \varepsilon(s_1\ \cdots\ s_n)=-1\end{array}\right\} \tag{2}$$

である．

例　$\varepsilon(4\quad 1\quad 3\quad 2)$ の値を求める．

1)　古屋茂『行列と行列式』(増補版)，培風館，1959年，30～31ページ．

$$(1\ 2\ 3\ 4)\xrightarrow[(2,4)]{}(1\ 4\ 3\ 2)\xrightarrow[(1,4)]{}(4\ 1\ 3\ 2)$$

であるから $l=2$. よって

$$\varepsilon(4\ 1\ 3\ 2)=(-1)^2=1$$

12.2.2 行列式の定義

A を n 次正方行列とするとき次のように定義されるスカラー $|A|$ を A の行列式(determinant)と呼ぶ.

$$|A|=\sum\varepsilon(s_1\ s_2\ \cdots\ s_n)a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots a_{ns_n} \tag{3}$$

ただし $\sum$ は $(1\ 2\ \cdots\ n)$ から得られるすべての順列(全部で $n!$ 個ある)についての合計を表わす. A の行列式は次のように表わされる.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} \tag{4}$$

(4)を n 次の行列式と呼ぶ.

例1 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\varepsilon(1\ 2)a_{11}a_{22}+\varepsilon(2\ 1)a_{12}a_{21}$

$=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

例2 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\varepsilon(1\ 2\ 3)a_{11}a_{22}a_{33}+\varepsilon(2\ 3\ 1)a_{12}a_{23}a_{31}$

$+\varepsilon(3\ 1\ 2)a_{13}a_{21}a_{32}+\varepsilon(2\ 1\ 3)a_{12}a_{21}a_{33}$

$+\varepsilon(1\ 3\ 2)a_{11}a_{23}a_{32}+\varepsilon(3\ 2\ 1)a_{13}a_{22}a_{31}$

$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$

$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$

例3 $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3\end{vmatrix}=5\cdot3-(-1)\cdot2=17$

12.2.3 行列式の性質

〔1〕 行と列とを入れ換えても行列式の値は変わらない. すなわち

$$|A'|=|A| \tag{5}$$

(証明) (3)の定義から

$$|A'|=\sum\varepsilon(s_1\ s_2\ \cdots\ s_n)a_{s_11}a_{s_22}\cdots a_{s_nn} \tag{6}$$

である. (6)において任意の項 $a_{s_11}a_{s_22}\cdots a_{s_nn}$ を選ぶ. $(s_1\ s_2\ \cdots\ s_n)$ から $(1\ 2\ \cdots\ n)$ へ移すに必要な互換の数を k としよう. 最初の添字に関するこの並べ換えによって2番目の添字の順列 $(1\ 2\ \cdots\ n)$ は $(t_1\ t_2\ \cdots\ t_n)$ へ移るとしよう. すなわち

$$a_{s_11}a_{s_22}\cdots a_{s_nn}\longrightarrow a_{1t_1}a_{2t_2}\cdots a_{nt_n}$$

この場合 $(1\ 2\ \cdots\ n)$ から $(t_1\ t_2\ \cdots\ t_n)$ へ移る互換の数は $(s_1\ s_2\ \cdots\ s_n)$ から $(1\ 2\ \cdots\ n)$ へ移る互換の数 k に当然等しくなっている. 一方 $(s_1\ s_2\ \cdots\ s_n)$ から $(1\ 2\ \cdots\ n)$ へ移る互換の数 k は, $(1\ 2\ \cdots\ n)$ から $(s_1\ s_2\ \cdots\ s_n)$ へ移る互換の数に等しいから, $(-1)^k=\varepsilon(s_1\ s_2\ \cdots\ s_n)=\varepsilon(t_1\ t_2\ \cdots\ t_n)$. よって

$$\varepsilon(s_1\ s_2\ \cdots\ s_n)a_{s_11}a_{s_22}\cdots a_{s_nn}$$
$$=\varepsilon(t_1\ t_2\ \cdots\ t_n)a_{1t_1}a_{2t_2}\cdots a_{nt_n}$$

ところで $a_{s_11}a_{s_22}\cdots a_{s_nn}$ は任意に選んだのだから, 上述のことは(6)のすべての項について成立する. したがって

$$|A'|=\sum\varepsilon(s_1\ s_2\ \cdots\ s_n)a_{s_11}a_{s_22}\cdots a_{s_nn}$$
$$=\sum\varepsilon(t_1\ t_2\ \cdots\ t_n)a_{1t_1}a_{2t_2}\cdots a_{nt_n}$$
$$=|A|$$

〔2〕 任意の2つの行(または列)を入れ換えれば行列式の符号が変わる.

(証明) (3)の行列式の定義において

$$|A|=\sum\varepsilon(s_1\ \cdots\ s_i\ \cdots\ s_k\ \cdots\ s_n)a_{1s_1}\cdots a_{is_i}\cdots a_{ks_k}\cdots a_{ns_n} \tag{7}$$

とする. 第 i 行と第 k 行を入れ換えるならば(7)の右辺は

$$-\sum\varepsilon(s_1\ \cdots\ s_k\ \cdots\ s_i\ \cdots\ s_n)a_{1s_1}\cdots a_{ks_k}\cdots a_{is_i}\cdots a_{ns_n}$$

となるがこれは $-|A|$ に等しい.

列についての入換えも A を転置すれば行についての入換えになるから同様である.

例 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 8 & 7 & 9\end{vmatrix}$

〔3〕 2つの行(または列)の等しい行列式の値は0である.

(証明) $|A|$ において第 j 列と第 k 列とが等しいとする. 第 j 列と第 k 列とを入れ換えれば性質〔2〕より

$$|A|=-|A|$$

これは

$$|A|=0$$

を意味する．行についても同様．

〔4〕 行列式の1つの行(または列)のすべての要素を c 倍すれば行列式もまた c 倍になる．

$$B=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=c\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{8}$$

(証明) 行列式の定義(3)より

$$\begin{aligned}|B|&=\sum \varepsilon(s_1 \quad s_2 \ \cdots \ s_n)a_{1s_1}\cdots(ca_{is_i})\cdots a_{ns_n}\\ &=c\sum \varepsilon(s_1 \quad s_2 \ \cdots \ s_n)a_{1s_1}\cdots a_{is_i}\cdots a_{ns_n}\\ &=c|A|\end{aligned}$$

〔5〕 行列式の1つの行(または列)の各要素が2つの項の和であれば，同じ行(または列)の各要素にそれぞれの項をおいた2つの行列式の和に等しい．

(証明) 第 i 行の要素が2つの項 a_{ij}' と a_{ij}'' の和になっているとすれば

$$\begin{aligned}&\sum \varepsilon(s_1 \ \cdots \ s_n)a_{1s_1}\cdots(a_{is_i}'+a_{is_i}'')\cdots a_{ns_n}\\ &=\sum \varepsilon(s_1 \ \cdots \ s_n)a_{1s_1}\cdots a_{is_i}'\cdots a_{ns_n}\\ &\quad+\sum \varepsilon(s_1 \ \cdots \ s_n)a_{1s_1}\cdots a_{is_i}''\cdots a_{ns_n}\\ &=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}' & \cdots & a_{in}' \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}'' & \cdots & a_{in}'' \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

例
$$\begin{vmatrix} 3 & 1+2 & 4 \\ 2 & 3+4 & 1 \\ 1 & 5+6 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

〔6〕 行列式の任意の行(または列)に一定数 c を掛けて他の行に加えてもその値は変わらない．

(証明) $i<j$ として第 j 行に c を掛け，第 i 行に加えれば

$$\begin{aligned}&\sum \varepsilon(s_1 \ \cdots \ s_n)a_{1s_1}\cdots(a_{is_i}+ca_{js_j})\cdots a_{ns_n}\\ &=\sum \varepsilon(s_1 \ \cdots \ s_n)a_{1s_1}\cdots a_{is_i}\cdots a_{ns_n}\\ &\quad+\sum \varepsilon(s_1 \ \cdots \ s_n)a_{1s_1}\cdots(ca_{js_j})\cdots a_{js_j}\cdots a_{ns_n}\end{aligned}$$

第2の和は2つ行が相等しい行列式の c 倍であるから〔3〕により0である．

例
$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

〔7〕

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{9}$$

(証明) $a_{12}=\cdots=a_{1n}=0$ であるから $s_1\neq1$ ならば $a_{1s_1}=0$．したがって

$$\begin{aligned}&\sum \varepsilon(s_1 \quad s_2 \ \cdots \ s_n)a_{1s_1}\cdots a_{ns_n}=\sum \varepsilon(1 \quad s_2 \ \cdots \ s_n)a_{11}a_{2s_2}\cdots a_{ns_n}\\ &=a_{11}\sum \varepsilon(1 \quad s_2 \ \cdots \ s_n)a_{2s_2}\cdots a_{ns_n}\\ &=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

12.2.4 余　因　子

$$|A|=\sum \varepsilon(s_1 \ \cdots \ s_n)a_{1s_1}\cdots a_{ns_n}$$

の1つの項の $a_{1s_1}\cdots a_{ns_n}$ は，$i\neq k$ のとき $s_i\neq s_k$ であるから，A の同一の列に属する2つの要素を同時に含むことはない．それゆえ $|A|$ を1つの列，たとえば第 j 列の要素 $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}$ の関数とみれば

$$|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \tag{10}$$

と書け，$A_{1j}, A_{2j}, \cdots, A_{nj}$ (これらはスカラーである)は第 j 列の要素を含まない．この A_{ij} は他の列の要素のどのような関数になっているかを調べてみよう．

まず A_{11} について考えると行列式の性質〔5〕より

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

最後の式の第1項に(9)を代入すれば

$$|A|=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{11}$$

(11)の右辺第2項は a_{11} を含まないから，(10)と(11)とを比較すれば

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{12}$$

であることが分かる．

$|A|$ を n 次の行列式とするとき，$|A|$ の第 i 行第 j 列を取り除いてできる $(n-1)$ 次の行列式を，$|A|$ の $(n-1)$ 次の**小行列式**(minor または subdeterminant)と呼び $|A_{ij}|$ で表わすことにしよう．すなわち

$$|A_{ij}|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{13}$$

である．一般に，Aのいくつかの行およびそれと同じ個数の列を取り除いてできる r 次の行列の行列式を，Aの r 次の小行列式という．

小行列式(13)を用いると(10)の A_{ij} は

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}|A_{ij}| \tag{14}$$

である．

(証明)　$|A|$ の第 $i, 1, 2, \cdots, i-1$ 行を第 $1, 2, \cdots, i$ 行にそれぞれ移し，第 $j, 1, 2, \cdots, j-1$ 列を第 $1, 2, \cdots, j$ 列にそれぞれ移した行列式を $|B|$ とすれば

$$|B|=(-1)^{i-1}(-1)^{j-1}|A|=(-1)^{i+j}|A| \tag{15}$$

このとき $b_{11}=a_{ij}$ になっている．$|B|$ を(11)と同じように分解すれば

$$|B|=a_{ij}|A_{ij}|+\begin{vmatrix} 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} \tag{16}$$

となり，右辺の2番目の行列式は要素 a_{ij} を含まない．一方(15)および(10)より

$$|B|=(-1)^{i+j}|A|$$
$$=(-1)^{i+j}(a_{1j}A_{1j}+\cdots+a_{ij}A_{ij}+\cdots+a_{nj}A_{nj})$$

となり，a_{ij} を含む項を(16)の第1項と比較すれば

$$|A_{ij}|=(-1)^{i+j}A_{ij}$$

ゆえに

$$A_{ij}=(-1)^{-(i+j)}|A_{ij}|=(-1)^{i+j}|A_{ij}|$$

となる(証明終り)．

$|A|$ において第 i 列に第 k 列をおき換えた行列式は，行列式の性質〔3〕により0である．この行列式を第 i 列について，(10)と同様に展開すれば

$$0=a_{1k}A_{1i}+a_{2k}A_{2i}+\cdots+a_{nk}A_{ni} \tag{17}$$

となる．

(10)，(17)は行列式の性質〔1〕より行についての展開においても成立する．そこで，いままで述べてきたことは次のような定理にまとめられる．

〔定理 12.2〕　n 次行列式 $|A|$ において，$|A_{ij}|$ を $|A|$ の第 i 行第 j 列を取り除いてできる小行列式とし，$A_{ij}=(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ と定義する．このとき

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=\delta_{ik}|A| \tag{18}$$

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=\delta_{jk}|A| \tag{18'}$$

ただし δ_{ik}, δ_{jk} は**クロネッカーのデルタ**(Kronecker's delta)で，

$$\left.\begin{aligned} \delta_{ij}&=1 \quad i=j \text{ のとき} \\ &=0 \quad i\neq j \text{ のとき} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

を意味する．

A_{ij} を A における a_{ij} の**余因子**(cofactor)と呼ぶ．また $i=k$ のとき(18)の左辺のように表わすことを $|A|$ を**第 i 行で展開する**という．同様に $j=k$ のとき(18′)の左辺のように表わすことを**第 j 列で展開する**という．

例　$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=(-1)^{2+1}a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{2+2}a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+(-1)^{2+3}a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

12.2.5 行列式のその他の性質

行列式の性質について以下証明なしに追加しておく.[2)]

〔8〕 A, B をともに n 次正方行列とすれば，積 AB の行列式はそれぞれの行列式の積に等しい.

$$|AB|=|A||B| \tag{20}$$

〔9〕

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,r+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1r} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{r1} \cdots a_{rr} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,r+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{21}$$

あるいは A_1 を $r\times r$, A_2 を $r\times(n-r)$, A_3 を $(n-r)\times(n-r)$ の小行列, O を $(n-r)\times r$ のゼロ行列とすれば

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ O & A_3 \end{vmatrix} = |A_1||A_3| \tag{22}$$

〔10〕 A を n 次正方行列として, $i>j$ のとき $a_{ij}=0$ であれば A を**上三角行列**, また $i<j$ のとき $a_{ij}=0$ であれば A を**下三角行列**と呼ぶ. すなわちそれぞれ次のような行列である.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{23}$$

両者を総称して**三角行列**(triangular matrix)と呼ぶ. さて A が n 次三角行列であれば

$$|A|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{24}$$

〔11〕 A が n 次対角行列であれば

$$|A|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{25}$$

(〔10〕,〔11〕は定理 12.2 を用いれば容易に導ける.)

2) 古屋，前掲書，51～54ページ参照.

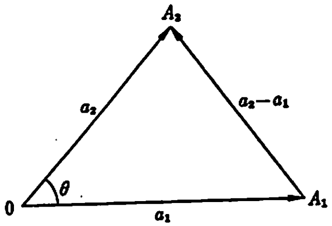
12.2.6 行列式の幾何学的意味

$\boldsymbol{a}_1$ を次のような p 次列ベクトルとする.

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{bmatrix}$$

p 次元直交座標系を考えるとき, $\boldsymbol{a}_1$ は原点を始点とし座標$(a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{p1})$を終点とする1本の方向をもった線分(有向線分)と考えることができる.

図 12.1 2本のベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ の差



ノルム $\|\boldsymbol{a}_1\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{p} a_{i1}^2}$ はこの有向線分の長さを示す.

いま $\boldsymbol{a}_1$ と異なる p 次列ベクトル $\boldsymbol{a}_2$ を考え, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ のなす角を θ とする(図 12.1 参照). このとき差 $\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1$ は

$$\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix} a_{12}-a_{11} \\ a_{22}-a_{21} \\ \vdots \\ a_{p2}-a_{p1} \end{bmatrix} \tag{26}$$

であり, これは図 12.1 の $\overrightarrow{A_1A_2}$ (A_1 を始点とし A_2 を終点とする有向線分)の始点を 0 に移すように平行移動した有向線分にほかならない. それゆえ, 三角形に関する余弦定理により

$$\|\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1\|^2=\|\boldsymbol{a}_1\|^2+\|\boldsymbol{a}_2\|^2-2\|\boldsymbol{a}_1\|\,\|\boldsymbol{a}_2\|\cos\theta \tag{27}$$

が成立する. したがって

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{a}_1\|\,\|\boldsymbol{a}_2\|\cos\theta &= \frac{1}{2}(\|\boldsymbol{a}_1\|^2+\|\boldsymbol{a}_2\|^2-\|\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_1\|^2) \\ &= \frac{1}{2}\{\sum a_{i1}^2+\sum a_{i2}^2-\sum(a_{i2}-a_{i1})^2\} \\ &= \sum a_{i1}a_{i2}=\boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{a}_2 \end{aligned}$$

すなわち

$$\boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{a}_2=\|\boldsymbol{a}_1\|\,\|\boldsymbol{a}_2\|\cos\theta \tag{28}$$

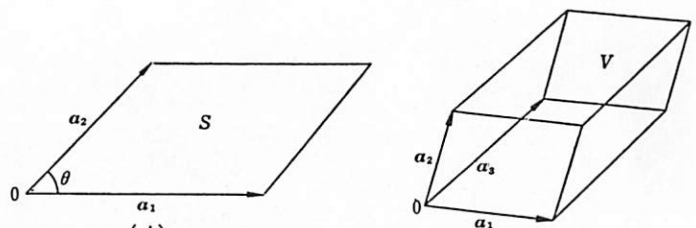
である.

θ が 90°, すなわち $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ が直交している (orthogonal) とき, $\cos 90°=0$ だ

から内積 $\boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{a}_2=0$ である．逆に $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ の内積がゼロであれば両者は直交している．

いま $p=2$ の場合すなわち2次元の直交座標系を想定しよう．$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ は2次の列ベクトル $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$ とする．この2本のベクトルにより定められる平行四辺形の面積を S とする(図 12.2(イ) 参照)．図より明らかに

図 12.2　平行四辺形の面積と平行六面体の体積



(イ)　　(ロ)

$$S=\|\boldsymbol{a}_1\|\,\|\boldsymbol{a}_2\|\sin\theta \tag{29}$$

である．それゆえ

$$\begin{aligned} S^2&=\|\boldsymbol{a}_1\|^2\|\boldsymbol{a}_2\|^2\sin^2\theta=\|\boldsymbol{a}_1\|^2\|\boldsymbol{a}_2\|^2(1-\cos^2\theta) \\ &=\|\boldsymbol{a}_1\|^2\|\boldsymbol{a}_2\|^2-(\boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{a}_2)^2 \qquad \text{〔(28)より〕} \\ &=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{30}$$

ところで行列式の性質〔8〕より

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= \left|\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right| \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{a}_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{31}$$

であるから

$$S^2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^2$$

あるいは

$$S=\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}\right\| \tag{32}$$

が成立する．ただし外側の｜｜は絶対値の記号である．

同じような考え方により，$p=3$ すなわち3次元直交座標系において，3本の3次列ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ によって定められる平行六面体の体積を V とすると

$$V=\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right\| \tag{33}$$

となることが証明できる.[3]

一般に p 次元直交座標系において r 個の p 次列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r (r\leqq p)$ を辺とする平行体の「体積」V^* は

$$V^*=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{a}_r \\ \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2'\boldsymbol{a}_r \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_r'\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_r'\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_r'\boldsymbol{a}_r \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \tag{34}$$

によって与えられる．特に $r=p$ の場合には

$$V^*=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_1'\boldsymbol{a}_p \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_p'\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_p'\boldsymbol{a}_p \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}=\left\|\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} \end{matrix}\right\| \tag{35}$$

となる.[4]

演 習 問 題

1　次の行列式の値を計算せよ．

(a) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$　　(b) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

3) 佐武一郎『行列と行列式』裳華房，1963年，205ページ参照．

4) 佐武，前掲書，208～212ページ参照．

(c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$　(d) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 6 & -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$　(e) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

2　次を証明せよ．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ x_1 & \cdots & x_n & 0 \end{vmatrix} = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_i x_j$$

ただし A_{ij} は $n\times n$ 行列 $A=[a_{ij}]$ における a_{ij} の余因子である．このような形の行列式を縁付行列式と呼ぶ．

3　3次元直交座標系において次の2本のベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ のなす角度を求めよ．

(a) $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$　(b) $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$

12.3 行列の位

12.3.1 1次従属，1次独立

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ を n 個の列(または行)ベクトルとし $(n\geqq 1)$，$c_1, c_2, \cdots, c_n$ を任意のスカラーとするとき，$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{a}_n$ を $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ の1次結合(linear combination)という．そして

$$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{o} \tag{1}$$

を満たすような，すべてが0ではない(つまり0でないものが少なくとも1つある)実数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ が存在するならば，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は1次従属(linearly dependent)であるという．1次従属でない場合を1次独立(linearly independent)という．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が1次独立であれば(1)を満足する $c_1, \cdots, c_n$ は $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$ だけである．なお，上の定義から明らかなように，ゼロベクトルは1次従属であり，ゼロベクトル以外のベクトルは1次独立である．

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ のうち少なくとも1つがゼロベクトルであれば，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は1次従属である．なぜなら，たとえば $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{o}$ とすれば $c_1\fallingdotseq 0$, $c_2=\cdots=c_n=0$ とおいて

$$c_1\boldsymbol{o}+0\boldsymbol{a}_2+\cdots+0\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{o}$$

となるからである．

次の定理を証明なしに与える．[5)]

〔定理 12.3〕 $n>m$ のとき n 個の m 次ベクトルは1次従属である．1次独立な m 次ベクトルの数は m を越えない．

以下にいくつかの例を掲げる．

例1　$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}-1\\4\\7\end{bmatrix}$

$$2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{o}$$

すなわち $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は1次従属である．しかし $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は1次独立である．なぜなら，ともには0でないどのような c_1, c_2 についても

$$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2\fallingdotseq\boldsymbol{o}$$

であるから．同様に $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3$; $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ はそれぞれ1次独立である．

例2　$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

$$0\boldsymbol{a}_1+1\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{o}$$

すなわち $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は1次従属である．

例3　$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+c_3\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$$

この右辺のベクトルは $c_1=c_2=c_3=0$ のときにのみ $\boldsymbol{o}$ である．すなわち $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は1次独立である．

12.3.2 位

n 個の m 次列ベクトルを各列において $m\times n$ 次行列 A をつくる．A を構成する1次独立なベクトルの最大個数を行列 A の位(rank)または階数といい，これを $\rho(A)$ で表わす．

---

5) 佐武，前掲書，90ページ参照．

例　$\rho\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 8\\ 3 & 12\end{bmatrix}=1,\ \rho\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix}=1,\ \rho\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix}=2,$

$$\rho\begin{bmatrix}1 & -3 & -1\\ 2 & 0 & 4\\ 3 & 1 & 7\end{bmatrix}=2 \quad \text{(前小節の例 1 参照)} \tag{2}$$

$m\times n$ 行列Aにおいて，もし $m<n$ ならば定理 12.3 より 1 次独立な列ベクトルの数はmを越えない．また$m\geqq n$ ならば 1 次独立な列ベクトルの最大数はたかだか n だから次が成立する．

〔定理 12.4〕 Aを $m\times n$ 行列とすると

$$\rho(A)\leqq\min\{m,\ n\} \tag{3}$$

次の定理は証明なしに与える.[6]

〔定理 12.5〕 行列Aの行列式または小行列式の中でその値が 0 でないものすべてを考える．行列Aの位はそれらの行列式または小行列式の次数のうち最大の次数に等しい．

例　$|A|=\begin{vmatrix}1 & -3 & -1\\ 2 & 0 & 4\\ 3 & 1 & 7\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 1 & 7\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=0$

$\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 0\end{vmatrix}=6\neq 0$

それゆえ $\rho(A)=2$ ((2)参照).

これから n 次の正方行列の行列式が 0 でなければその行列の位は n であることが分かる．またゼロ行列の位は 0 である．

$$\rho(O)=0 \tag{4}$$

〔定理 12.6〕 A が対角行列のときは，A の位は A の 0 でない対角要素の個数に等しい．

（証明） $|A|$ またはその小行列式を対角要素が 0 の行（または列）で次々に

6) 遠山啓『行列論』共立出版，1952 年，79～80 ページ参照.

展開してゆけば明らかである．

〔定理 12.7〕 行列を転置しても位は変わらない．すなわち

$$\rho(A')=\rho(A) \tag{5}$$

（証明） A の 0 でない最大次数の小行列式の 1 つを $|B|$ とする．$|B|=|B'|$ であるから $|B'|$ は A' の 0 でない最大次数の小行列式の 1 つである．

〔定理 12.8〕 2 つの行列の積の位はそれぞれの行列の位の小さいほうを越えない．すなわち

$$\rho(AB)\leqq\min\{\rho(A),\ \rho(B)\} \tag{6}$$

（証明省略）.[7]

演習問題

1　次のベクトルのうち 1 次独立なベクトルの組を示せ．それらのベクトルの 1 次結合式として残りのベクトルを表わせ．

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}4\\4\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_4=\begin{bmatrix}1\\0\\5\end{bmatrix}$$

2　次の行列の位を求めよ．

(a) $\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 7 & 6\\ 9 & 2 & 6\end{bmatrix}$　(b) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 4 & 1\\ 0 & 2 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 5\end{bmatrix}$　(c) $\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & -2 & -4\\ -3 & 3 & 6\end{bmatrix}$

3　次の行列 A, B, C, ただし $C=AB$, の位を求めよ．

(a) $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$,　$B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

(b) $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$,　$B=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

(c) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$,　$B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

7) 佐武，前掲書，106 ページ参照.

12.4 連立1次方程式と逆行列

この節では**連立1次方程式**(simultaneous linear equations)

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2\\ &\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n&=b_m \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

の解を求めることを考える．方程式数はm個，未知数の数はn個でかならずしもmとnは等しくない．Aを $m\times n$ の行列，$\boldsymbol{x}$をn次列ベクトル，$\boldsymbol{b}$をm次列ベクトルとすれば，(1)は

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \tag{2}$$

と書ける．

12.4.1 連立同次1次方程式

まず $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$ すなわち $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$ の場合から始める．この場合(1)は**連立同次1次方程式**(simultaneous homogeneous linear equations)と呼ばれる．このとき(2)は

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o} \tag{3}$$

である．方程式(3)はいつでも $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ すなわち $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ という解をもつ．この解を**トリヴィアル**(trivial)な解という．また解 $\boldsymbol{x}\fallingdotseq\boldsymbol{o}$ であれば(3)は**ノントリヴィアル**(non-trivial)な解をもつという．

いまAをn個のm次列ベクトルに分割する．すなわち $A=[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]$ ただし $\boldsymbol{a}_j'=[a_{1j}\ a_{2j}\ \cdots\ a_{mj}]$．そうすると(3)は

$$A\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{o} \tag{4}$$

と書き換えられる．

〔定理 12.9〕 n個の未知数をもつm個の連立同次1次方程式体系 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ がノントリヴィアルな解をもつための必要十分条件は

$$\rho(A)<n \tag{5}$$

である．

（証明） まず十分であることの証明をする．Aはn列であるから$\rho(A)\leqq n$．

もし $\rho(A)=n$ ならば $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ は1次独立であるから，(4)が成立するのは $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ のときだけである．したがって(3)の解は $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ だけである．しかし $\rho(A)<n$ ならば $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ は1次従属であるから，(4)を成立させるノントリヴィアルな解$\boldsymbol{x}$がある．すなわち，(3)は $\boldsymbol{x}\fallingdotseq\boldsymbol{o}$ なる解をもつ．

次に必要であることを証明しよう．(3)がノントリヴィアルな解をもてば(4)において $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ は1次従属である．それゆえ $\rho(A)<n$ である(証明終り)．

さて $\boldsymbol{x}\fallingdotseq\boldsymbol{o}$ が(3)の $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ の解であるとすると，cをスカラーとすれば

$$A(c\boldsymbol{x})=c(A\boldsymbol{x})=c\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o} \tag{6}$$

それゆえ，cをゼロでない任意のスカラーとして $c\boldsymbol{x}'=[cx_1\ cx_2\ \cdots\ cx_n]$ は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ のノントリヴィアルな解である．cはどのような値でもよいから，この意味では $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ の解は無数にある．しかし解の要素間の比率 $x_1:x_2:\cdots:x_n$ は一意的(unique)に定まることがある．この意味での解の一意性について次の定理を証明なしに述べる．[8)]

〔定理 12.10〕 n個の未知数をもつm個の連立同次1次方程式体系 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ の解が(その解を比例定数倍したものもまた解であることを含めた意味で)一意的であるための必要十分条件は

$$\rho(A)=n-1 \tag{7}$$

であることである．

12.4.2 逆　行　列

n次正方行列Aが与えられたとき，$|A|$における a_{ij} の余因子 A_{ij} を第(j,i)要素(第(i,j)要素でないことに注意)とする行列をAの**余因子行列**(adjugate matrix)といい，adj$A$ と記す．すなわち

$$\mathrm{adj}A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \tag{8}$$

---

8) 古屋，前掲書，77～78ページ参照．

(12.2.18)，(12.2.18′)式より

$$(\mathrm{adj}A)A=A(\mathrm{adj}A)=|A|I \qquad (9)$$

が成立することは容易に分かる．

例題 12.4.1

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\quad \mathrm{adj}A=\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$A(\mathrm{adj}A)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & -a_{21}a_{12}+a_{22}a_{11} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} |A| & 0 \\ 0 & |A| \end{bmatrix}=|A|\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（この例題で $(\mathrm{adj}A)A=|A|I$ となることは読者が確かめよ.）

Aをn次正方行列とするとき

$$AB=I \qquad (10)$$

を満足するn次正方行列Bが存在するならば，BをAの**逆行列**(inverse matrix)といい，A^{-1}と書く．

〔**定理 12.11**〕 正方行列Aの逆行列が存在するための必要十分条件は $|A|\neq 0$ である．

（証明） 必要：Aの逆行列Bが存在するとすれば行列式の性質〔8〕より

$$|A||B|=|AB|=|I|=1 \qquad (11)$$

であるから，$|A|\neq 0$ である．

十分：$|A|\neq 0$ であれば，(9)の両辺を $|A|$ で割って

$$A|A|^{-1}\mathrm{adj}A=I \qquad (12)$$

すなわち $|A|^{-1}\mathrm{adj}A$ は A の逆行列である(証明終り)．

上の十分条件の証明から

$$A^{-1}=|A|^{-1}\mathrm{adj}A \qquad (13)$$

であることが分かった．

さて

$$BA=I \qquad (14)$$

ならば，BはAの逆行列A^{-1}に等しい．なぜなら，$|B||A|=|I|$ より $|A|\neq 0$ であるから A^{-1} が存在する．そこで(14)の両辺に右から A^{-1} を乗ずれば $B=A^{-1}$ となるからである．

かくして

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I \qquad (15)$$

が成立する．

$|A|\neq 0$ ならばAの逆行列はただ1つしかないことは次のようにして分かる．Aの逆行列が2種類あるとしてそれらを B, C で表わそう．すなわち $BA=I$, $CA=I$ である．Aの右左からC, Bをそれぞれ掛けると

$$BAC=(BA)C=IC=C$$

$$BAC=B(AC)=BI=B$$

それゆえ，$B=C$，すなわちAの逆行列はただ1つである．

逆行列の存在する行列を**非特異行列**(non-singular matrix)または**正則行列**(regular matrix)と呼ぶ．非特異でない正方行列を**特異行列**(singular matrix)と呼ぶ．$|A|\neq 0$ のときAは非特異行列である．逆にAが非特異行列ならば $|A|\neq 0$ である．

さて逆行列は(13)によって計算できるのであるが，(13)を詳しく書けば

$$A^{-1}=|A|^{-1}\mathrm{adj}A=\begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix} \qquad (16)$$

である．

例題 12.4.2 次の行列の逆行列を計算する．

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$|A|=2\neq 0$ であるから A^{-1} が存在する．

$$\mathrm{adj}A=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-3&3\\1&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-3&3\\0&1\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}2&1\\3&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&3\\3&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}2&0\\3&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&-3\\3&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&-3\\2&0\end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&6&-3\\1&-8&5\\2&-10&6\end{bmatrix}$$

$$\therefore\quad A^{-1}=2^{-1}\begin{bmatrix}-1&6&-3\\1&-8&5\\2&-10&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&3&-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&-4&\frac{5}{2}\\1&-5&3\end{bmatrix}$$

(この結果が $A^{-1}A=AA^{-1}=I$ を満足することを読者は確かめてみよ.)

〔定理 12.12〕 Aが非特異であれば A^{-1} は非特異で

$$|A^{-1}|=|A|^{-1} \tag{17}$$

かつ

$$(A^{-1})^{-1}=A \tag{18}$$

(証明) $A^{-1}A=I$ より

$$|A^{-1}||A|=1 \tag{19}$$

これは $|A^{-1}|\fallingdotseq 0$ を意味するから A^{-1} は非特異である. また(19)の両辺を$|A|$で割れば $|A^{-1}|=|A|^{-1}$ が得られる. 最後に $A^{-1}A=I$ の両辺に左側より $(A^{-1})^{-1}$ を掛ければ $(A^{-1})^{-1}A^{-1}A=(A^{-1})^{-1}$. それゆえ $A=(A^{-1})^{-1}$ (証明終り).

〔定理 12.13〕 行列の転置行列の逆行列はもとの行列の逆行列の転置行列である.

$$(A')^{-1}=(A^{-1})' \tag{20}$$

(証明) $|A'|=|A|\fallingdotseq 0$ であるから $A'(A')^{-1}=I$ が成立する. この両辺を転置すれば((12.1.25)式参照), $[(A')^{-1}]'A=I$ となる. したがって $[(A')^{-1}]'=A^{-1}$. この両辺を転置すれば(20)が得られる(証明終り).

〔定理 12.14〕 AとBとが同じ次数の非特異行列であれば

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1} \tag{21}$$

(証明) $|AB|=|A||B|\fallingdotseq 0$ であるから $(AB)^{-1}$ は存在する.

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}IB=B^{-1}B=I$$

それゆえ $B^{-1}A^{-1}=(AB)^{-1}$ である(証明終り).

12.4.3 連立(非同次)1次方程式

(1)の体系で右辺の定数項が $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$ とは限らない場合を考える.

〔定理 12.15〕 連立1次方程式(1)または(2)が解をもつための必要十分条件は, $m\times n$ 次の行列Aの位と $m\times(n+1)$ 次の行列 $[A\ b]$ の位とが一致することである.

この定理の証明は省略する.[9]

解が存在する場合に方程式数mと未知数の個数nの大小関係によってどのような形で解が得られるかを考察してみよう. いま次が成立するとする.

$$\rho(A)=\rho([A\quad b])=r \tag{22}$$

このとき(イ) $m<n$ ならば $r\leqq m$ であるから, 適当に選ばれた$(n-r)$個の未知数に任意の値を与えると, 他のr個の未知数は適当なr個の方程式から求められる. すなわち解は無数にある.

また(ロ) $m=n$ ならば① $r=n$ か② $r<n$ のいずれかであり, もし後者②ならば(イ)と同様に$(n-r)$個の未知数の関数として解が表わされる. また①であれば一意的な解が存在する.

最後に(ハ) $m>n$ ならば $r\leqq n$ であり, $(m-r)$ 個の方程式は独立でない (他のr個の方程式から導ける). このとき① $r=n$ ならば一意的な解となり, ②$r<n$ ならば$(n-r)$個の未知数の関数としてr個の未知数に関する解が得られる.

結局, (22)が成立するとき一意的な解が存在するのは, (ロ)①の $r=n=m$ の場合と(ハ)①の $r=n<m$ の場合とである. 後者の場合, 独立でない$(m-n)$個

9) 古屋, 前掲書, 79ページ参照.

の方程式を無視すれば残りの方程式体系は前者に一致する．そこで以下 $r=n=m$ の場合の解を求めることを考えてみよう．

$m=n$ の場合（1）は

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2\\&\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n&=b_n\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

あるいはAをn次正方行列，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}$を$n$次列ベクトルとして

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\tag{24}$$

である．

このときもしAがn次正方行列で非特異であれば，ベクトル

$$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}\tag{25}$$

は未知数の個数n，方程式数nの連立1次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解である．なぜなら $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ に $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$ を代入すれば

$$A(A^{-1}\boldsymbol{b})=(AA^{-1})\boldsymbol{b}=I\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$$

となるから，明らかに $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$ は(24)の解である．またこの解は一意的である．なぜなら$\boldsymbol{y}$を(24)の他の解とすると $A(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{y}-A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$．$A$は非特異つまり $\rho(A)=n$ であるから同次方程式 $A(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{o}$ の解はトリヴィアルな解 $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ である（定理 12.9）．それゆえ $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$ であり，解$\boldsymbol{x}$は一意的である．

例 （Aが例題 12.4.2 の場合）

$$\left.\begin{aligned}x_1-3x_2+3x_3&=-2\\2x_1\qquad\;+x_3&=1\\3x_1+x_2+x_3&=4\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

$$\begin{bmatrix}1&-3&3\\2&0&1\\3&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\\4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-3&3\\2&0&1\\3&1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-2\\1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&3&-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&-4&\frac{5}{2}\\1&-5&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\5\\5\end{bmatrix}$$

なお，$|A|\neq0$ のとき連立方程式(23)の解は次のクラメル(Cramer)の公式により求めることもできる．すなわち(23)の解を $x_1, \cdots, x_n$ とすると

$$x_i=\frac{D_i}{|A|}\qquad i=1, \cdots, n\tag{27}$$

ただしD_iはAの第 i 列を $\boldsymbol{b}$ でおき換えた行列の行列式である（証明は演習問題4参照）．

例 (26)をクラメルの公式により解く．$|A|=2\neq0$ であり，また

$$D_1=\begin{vmatrix}-2&-3&3\\1&0&1\\4&1&1\end{vmatrix}=-4,\quad D_2=\begin{vmatrix}1&-2&3\\2&1&1\\3&4&1\end{vmatrix}=10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-3&-2\\2&0&1\\3&1&4\end{vmatrix}=10$$

ゆえに

$$x_1=\frac{-4}{2}=-2,\qquad x_2=\frac{10}{2}=5,\qquad x_3=\frac{10}{2}=5$$

演習問題

1 次の連立1次方程式を，係数行列の逆行列を求めて解け．

$$\left.\begin{aligned}5x+2y&=6\\-2x+y&=2\end{aligned}\right\}$$

2 次の行列の逆行列を計算せよ．

(a) $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&0\\0&1&5\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}$

3 次の連立1次方程式の解の存在を定理 12.15 により確かめ，解がある場合にはそれをすべて求めよ．

(a) $\left.\begin{aligned}x+3y+2z&=4\\2x+3y+z&=5\\5x+4y-z&=9\\-2x+y+3z&=-1\end{aligned}\right\}$

(b) $\left.\begin{aligned}x+2y+z&=1\\2x+4y+5z&=3\end{aligned}\right\}$

(c) $\left.\begin{aligned} 3x+7y+4z=0 \\ x+2y+z=0 \end{aligned}\right\}$

4　逆行列の定義(16)と行列式の展開の式(12.2.18′)を用いて(25)からクラメルの公式(27)を導け．

12.5 固　有　値

12.5.1 固有値，固有ベクトル

Aを次数nの正方行列として

$$Ax=\lambda x \tag{1}$$

を満足するスカラーλ，およびoではないn次列ベクトルxが存在するとき，λをAの固有値(eigenvalue)あるいは特性根(characteristic root)，xを固有値λに対応するAの固有列ベクトル(column eigenvector あるいは characteristic column vector)と呼ぶ.[10)]

(1)を書き換えれば

$$(A-\lambda I)x=o \tag{2}$$

となる．λを特定の値としxを未知数を要素とするベクトルとすれば，(2)は未知数の個数n，方程式数nの連立同次1次方程式である．それゆえ(2)は$\rho(A-\lambda I)<n$ のときそしてそのときにのみノントリヴィアルな解xをもつ(定理12.9)．$\rho(A-\lambda I)<n$ ならば$|A-\lambda I|=0$ でありまたその逆も成立するから，(2)が $x\neq o$ なる解をもつための必要十分条件は

$$|A-\lambda I|=0 \tag{3}$$

が成立していることである．それゆえ(3)を満たすλを見いだせばそれはAの固有値である．ところで(3)はλに関するn次方程式であるから複素根も含めてn個の根(すべてが相異なる根とは限らない)をもつ．それゆえ，n次正方行列の固有値は，重根も別々に数えてn個ある．それらを $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ で表わす．またそれぞれに対応する固有列ベクトルを

$$x_1=\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix},\quad x_2=\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix},\quad \cdots,\quad x_n=\begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix}$$

10)　$y'A=\lambda y'$，ただしy'はn次行ベクトル，を満足するλをAの固有値，y'をλに対応するAの固有行ベクトル(row eigenvector)という．

で表わすことにしよう．方程式(3)はAの特性方程式(characteristic equation)と呼ばれる．また$|A-\lambda I|$は特性多項式(characteristic polynomial)と呼ばれる．

例題 12.5.1　$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ の固有値，固有列ベクトルを求める．

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda-5$$

$$=(\lambda-5)(\lambda+1)$$

それゆえ$|A-\lambda I|=0$ の根すなわち固有値は $\lambda_1=5$, $\lambda_2=-1$ である．

次に固有列ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

あるいは

$$\left.\begin{aligned} (1-\lambda)x_1+2x_2=0 \\ 4x_1+(3-\lambda)x_2=0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

の解として求められる．まず $\lambda_1=5$ に対応する固有列ベクトルを求める．(4)に $\lambda=\lambda_1=5$ を代入すれば，(4)は

$$\left.\begin{aligned} -4x_1+2x_2=0 \\ 4x_1-2x_2=0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

となる．(5)の2つの方程式は独立でないから，どちらか一方を使えば

$$x_2=2x_1$$

となる．それゆえ，固有値 $\lambda_1=5$ に対応する固有列ベクトルx_1は

$$x_1=\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

である．もちろん，cをゼロでない任意の数として $c\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1c \\ 2c \end{bmatrix}$ はすべて$\lambda_1=5$ に対応する固有列ベクトルである．

同様にして $\lambda_2=-1$ に対応する固有列ベクトルは

$$\left.\begin{aligned}\{1-(-1)\}x_1+2x_2=0\\ 4x_1+\{3-(-1)\}x_2=0\end{aligned}\right\}$$

の解として

$$x_2=\begin{bmatrix}x_{12}\\x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

である．$Ax=\lambda x$ が満たされることは次のように確かめられる．

$$\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

固有値に重根が含まれるときには，次の例のように固有ベクトルが求められる．

例題 12.5.2

$$A=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&1&2\\0&4&3\end{bmatrix}$$

の固有値，固有列ベクトルを求めよう．

$$\begin{vmatrix}5-\lambda&0&0\\0&1-\lambda&2\\0&4&3-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-5)^2(\lambda+1)$$

だから固有値は $\lambda_1=\lambda_2=5$(重根)，$\lambda_3=-1$ となる．

まず $\lambda=\lambda_1=\lambda_2=5$ のとき

$$\left.\begin{aligned}(1-5)x_2+2x_3=0\\ 4x_2+(3-5)x_3=0\end{aligned}\right\}$$

より，任意の x_1 に対して

$$x_3=2x_2 \tag{6}$$

となる．そこで，たとえば $x_1=0$ とおくと $\lambda=5$ に対応する固有列ベクトルの1つは

$$x_1'=[0\quad 1\quad 2]$$

となる．この x_1 に直交しかつ(6)を満足する列ベクトル x_2 を求める．すなわち

$$x_1'x_2=1\cdot x_2+2\cdot x_3=0 \tag{7}$$

と(6)とを同時に満足する値は

$$x_2=x_3=0\qquad (x_1 \text{ は任意})$$

である．それゆえ，

$$x_2'=[1\quad 0\quad 0]$$

も $\lambda=5$ に対応する固有ベクトルである．$\lambda_3=-1$ に対応する固有ベクトル x_3 は

$$\left.\begin{aligned}(5-1)x_1=0\\ \{1-(-1)\}x_2+2x_3=0\\ 4x_2+\{3-(-1)\}x_3=0\end{aligned}\right\}$$

より $x_1=0$, $x_3=-x_2$ だから，

$$x_3'=[0\quad 1\quad -1]$$

である．

〔定理 12.16〕　A を n 次正方行列，その固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とするとき次が成立する．

$$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{8}$$

$$\mathrm{tr}(A)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n \tag{9}$$

(証明)　$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ は λ に関する n 次の代数方程式 $|A-\lambda I|=0$ の根であり，また行列式の展開の性質より λ^n の係数は $(-1)^n$ であるから，

$$|A-\lambda I|=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda) \tag{10}$$

と書けることは明らかである．ここで $\lambda=0$ とおけば(8)が成立する．また，(10)の左辺の $(-\lambda)^{n-1}$ の係数は $(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})$ であり，右辺の $(-\lambda)^{n-1}$ の係数は $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$ だから(9)が成立する(証明終り)．

〔定理 12.17〕　Dが対角行列ならば，その固有値は対角要素である．

(証明)　Dが対角行列ならば

$$D-\lambda I=\begin{bmatrix}d_{11}-\lambda&0&\cdots&0\\0&d_{22}-\lambda&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&d_{nn}-\lambda\end{bmatrix}$$

このとき，$D-\lambda I$ の行列式は

$$|D-\lambda I|=(d_{11}-\lambda)(d_{22}-\lambda)\cdots(d_{nn}-\lambda)$$

となる(行列式の性質〔11〕より)．このことは特性方程式 $|D-\lambda I|=0$ の根が $d_{11}, d_{22}, \cdots, d_{nn}$ であることを意味する(証明終り)．

〔定理 12.18〕 λ を A の固有値，p を正の整数とすると，λ^p は A^p の固有値である．ただし A^p は p 個の A の積を表わすものとする．また A を非特異とすれば，λ^{-p} は $(A^{-1})^p=A^{-p}$ の固有値である．

(証明) $Ax=\lambda x$ であるから

$$A^2x=A(Ax)=A\lambda x=\lambda Ax=\lambda^2x$$

$$A^3x=A(A^2x)=A\lambda^2x=\lambda^2(Ax)=\lambda^3x$$

同様にして

$$A^px=\lambda^px \tag{11}$$

が得られる．また A が非特異であれば $Ax=\lambda x$ の左から $\lambda^{-1}A^{-1}$ を掛ければ

$$\lambda^{-1}A^{-1}Ax=\lambda^{-1}A^{-1}\lambda x$$

$$\lambda^{-1}x=A^{-1}x$$

これにまた A^{-1} を左から掛ければ

$$A^{-1}\lambda^{-1}x=A^{-1}A^{-1}x$$

$$\lambda^{-2}x=A^{-2}x$$

同様にして続ければ

$$\lambda^{-p}x=A^{-p}x \tag{12}$$

が得られる(証明終り)．

〔定理 12.19〕 対称行列においては相異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交している．すなわち，もし $(A-\lambda_jI)x_j=o$ かつ $(A-\lambda_kI)x_k=o$，ただし A は対称行列，かつ $\lambda_j\neq\lambda_k$ ならば

$$x_j'x_k=0 \tag{13}$$

(証明) $(A-\lambda_jI)x_j=o$ に左側から x_k' を掛ければ

$$x_k'(A-\lambda_jI)x_j=x_k'Ax_j-\lambda_jx_k'x_j=0$$

それゆえ

$$\lambda_jx_k'x_j=x_k'Ax_j \tag{14}$$

また $(A-\lambda_kI)x_k=o$ に左側から x_j' を掛ければ同様にして

$$\lambda_kx_j'x_k=x_j'Ax_k \tag{15}$$

が得られる．$x_k'Ax_j=(x_k'Ax_j)'=x_j'A'x_k=x_j'Ax_k$ であるから(14)，(15)より

$$\lambda_jx_k'x_j=\lambda_kx_j'x_k$$

ここで $x_k'x_j=x_j'x_k$ かつ $\lambda_j\neq\lambda_k$ であるから

$$x_k'x_j=x_j'x_k=0$$

でなければならない(証明終り)．

次に進む前に，非特異行列の積の位に関する次の定理を述べておこう．

〔定理 12.20〕 A を $m\times n$ 行列，B を非特異な m 次正方行列，C を非特異な n 次正方行列とすると

$$\rho(BA)=\rho(AC)=\rho(A) \tag{16}$$

(証明) いま $\rho(A)=k(k\leqq m)$ とする．$\rho(BA)=r$ とすると，定理 12.8 によって $r\leqq\min\{\rho(B), \rho(A)\}=\min\{m, k\}$ であるから $r\leqq k$ である．ところで $A=B^{-1}(BA)$ であるから，$\rho(A)\leqq\min\{\rho(B^{-1}), \rho(BA)\}=\min\{m, r\}$，すなわち $k\leqq r$．それゆえ $r=k$ すなわち $\rho(BA)=\rho(A)$ でなければならない．$\rho(AC)=\rho(A)$ も同様にして証明される(証明終り)．

このように，非特異行列を右から掛けても左から掛けても行列の位は変わらない．

〔定理 12.21〕 A を n 次正方行列，P を非特異な n 次正方行列，かつ

$$B=PAP^{-1} \tag{17}$$

とする．このとき B の特性多項式，固有値，トレース，位は A のそれぞれに等しい．

(証明) $|B-\lambda I|=|PAP^{-1}-\lambda I|=|PAP^{-1}-\lambda PP^{-1}|=|P(A-\lambda I)P^{-1}|$ $=|P||A-\lambda I||P^{-1}|$．ここで $|P||P^{-1}|=1$ であるから

$$|B-\lambda I|=|A-\lambda I| \tag{18}$$

が任意の λ について成立する．それゆえ特性多項式は同一であり，したがって固有値も相等しい．さらに，(12.1.31)式により

$$\mathrm{tr}(B)=\mathrm{tr}\{(PA)P^{-1}\}=\mathrm{tr}\{P^{-1}(PA)\}=\mathrm{tr}(A) \tag{19}$$

最後に，P, P^{-1} は非特異だから定理12.20によって

$$\rho(B)=\rho\{P(AP^{-1})\}=\rho(AP^{-1})=\rho(A) \tag{20}$$

を得る(証明終り)．

12.5.2 直交行列

非特異行列 C があってその転置行列が逆行列に等しいとき，C を**直交行列**(orthogonal matrix)と呼ぶ．すなわち C が直交行列ならば

$$C'=C^{-1} \tag{21}$$

である．これから((21)の右から C を掛けて)

$$C'C=I \tag{22}$$

あるいは((21)の左から C を掛けて)

$$CC'=I \tag{23}$$

も成立する．逆にこれら(21)～(23)のいずれかが成り立つとき非特異行列 C は直交行列である．

直交行列 C を構成する各列を c_j で表わせば $C=[c_1\ c_2\ \cdots\ c_n]$，このとき(22)より次が成立する．

$$\left.\begin{array}{ll} k=j \text{ ならば} & c_k'c_j=1 \\ k\neq j \text{ ならば} & c_k'c_j=0 \end{array}\right\} \quad k,\ j=1,\ \cdots,\ n \tag{24}$$

C が直交行列と呼ばれるゆえんは(24)の第2式のように各列が直交しているからである．c_1, c_2, $\cdots$, c_n の順序を入れ換えてつくった行列においても(24)は成立する．すなわち C の列を任意に入れ換えた行列を B とすれば $B'B=I$ が成立するから，右側から B^{-1} を掛ければ[11] $B'=B^{-1}$．それゆえ B は直交行列である．同様に C の行を入れ換えた行列も直交行列である．

直交行列の行列式は1または -1 である．すなわち

$$|C|=\pm 1 \tag{25}$$

11) C は非特異行列であるから，列 c_1, $\cdots$, c_n は1次独立．ゆえに，c_1, $\cdots$, c_n の順序を入れ換えた B の列 b_1, $\cdots$, b_n も1次独立．それゆえ B は非特異行列であり B^{-1} が存在する．

なぜなら(22)より $|C'C|=|C'||C|=|I|=1$．また $|C'|=|C|$ であるから $|C|=\pm 1$ でなければならない．

例題 12.5.3

$C=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ は直交行列である．なぜなら $|C|=1\neq 0$ でかつ

$$C'C=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

次の定理を証明なしに述べる．

〔定理 12.22〕 A が n 次対称行列ならば，積 $C'AC$ が対角行列となるような n 次の直交行列 C が存在する．この n 次対角行列を Λ とすれば

$$\Lambda=C'AC \tag{26}$$

この場合 A は直交行列 C により**対角化**(diagonalize)されたという．

〔定理 12.23〕 A を対称行列，A を対角化する直交行列を C とする．そのとき A の固有値は $\Lambda=C'AC$ の対角要素であり，A の位は Λ の0でない対角要素の個数に等しい．

(証明)　C' は非特異だから，定理12.21により，$\Lambda=C'AC=C'A(C')^{-1}$ の固有値と位は A の固有値と位にそれぞれ等しい．一方定理12.17により対角行列 Λ の固有値はその対角要素である．また定理12.6により Λ の位は Λ の0でない対角要素の個数に等しい(証明終り)．

次の定理を証明なしに述べる[12](演習問題1を見よ)．

〔定理 12.24〕 実数対称行列の固有値はすべて実数である．

次に行列の対角化の例を1つあげよう．

例題 12.5.4

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

12) 古屋，前掲書，97ページ．

Aの固有値は $\lambda_1=6,\ \lambda_2=1$ である．

$$C'C=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$C'AC=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

なお上のCの列を入れ換えて新たに

$$C=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$$

としてもそれはAを対角化する直交行列である．この場合は

$$C'AC=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}$$

となって対角要素における固有値の順序が入れ換わる．

12.5.3 べき等行列

$AA=A$ となるような行列Aをべき等行列(idempotent matrix)と呼ぶ．この本では以下対称なべき等行列のみを扱うから，たんにべき等行列というときは対称べき等行列を意味することに約束する．すなわちAがべき等行列ならば

$$A'=A,\qquad AA=A \tag{27}$$

であり，逆に(27)が成立すればAはべき等行列である．

例題 12.5.5

$$A=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

$$AA=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

Aがべき等行列であればpを任意の正の整数とし $A^p=A$ であることは当然である．また

〔定理 12.25〕 Aがべき等行列ならば，Aの固有値はすべて1あるいは0である．

（証明） $Ax=\lambda x$ の左側からAを掛ければ $A^2x=\lambda Ax$ すなわち

$$A^2x=\lambda^2 x \tag{28}$$

一方 $A^2=A$ だから

$$A^2x=Ax=\lambda x \tag{29}$$

(28)，(29)より $\lambda^2x=\lambda x$ したがって $(\lambda^2-\lambda)x=o$ となる．$x\neq o$ であるから $\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1)=0$ でなければならない．このことは

$$\lambda=0 \text{ または } \lambda=1 \tag{30}$$

を意味する(証明終り)．

それゆえ，Aが位rのべき等行列であれば(定理 12.22，12.23より)

$$A=C'AC=\begin{bmatrix}I_r & O_{r,n-r}\\ O_{n-r,r} & O_{n-r,n-r}\end{bmatrix} \tag{31}$$

のように対角化する直交行列Cが存在する．

以上の結果から次の系がただちに導ける．

〔系 12.1〕 べき等行列の位はそのトレースに等しい．

（証明） Aが位rのべき等行列であれば，(31)が成立する．このとき明らかに $\mathrm{tr}(A)=r$ である．一方対角化によってトレースは不変である．かくして $\rho(A)=r=\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(A)$ である(証明終り)．

演習問題

1　2次の実数の対称行列の固有値はつねに実数であることを証明せよ．

2　次の行列の固有値，固有列ベクトルを求めよ．

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$,　(b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3　行列 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ を対角化する直交行列を求めよ．

12.6　2次形式と行列の定符号

12.6.1　2 次 形 式

$\boldsymbol{x}$をn個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を要素とする列ベクトル，Aをn次対称行列とするとき，スカラー $\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}$ を係数行列Aの**2次形式** (quadratic form) と呼ぶ．すなわちこれは

$$\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}=[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \tag{1}$$

であり，$x_1, \cdots, x_n$ に関する2次の同次多項式となっている．

Aを対称行列として

$$\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}>0 \tag{2}$$

が $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ でないすべての$\boldsymbol{x}$について成立するとき，Aを**正値定符号行列** (positive definite matrix) と呼ぶ．

同様に，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$ でないすべての$\boldsymbol{x}$について

$$\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}\geqq 0 \tag{3}$$

$$\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}<0 \tag{4}$$

$$\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}\leqq 0 \tag{5}$$

のときAはそれぞれ**非負定符号** (nonnegative definite)，**負値定符号** (negative definite) そして**非正定符号** (nonpositive definite) **行列**と呼ばれる．[13] 非負(非正)定符号行列は正(負)値定符号行列を含んでいる．

2次形式 $\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}$ においてAが正値定符号ならば $\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}$ は**正値定符号2次形式**と呼ばれる．負値，非負，非正の定符号についても同様である．

例題 12.6.1

$$Q=[x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=3x_1^2+5x_2^2$$

は正値定符号2次形式であり，$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ は正値定符号行列である(同時に非負定符号行列でもある)．

例題 12.6.2

$$Q=[x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=4x_1^2+x_2^2-4x_1x_2+2x_3^2$$

$$=(2x_1-x_2)^2+2x_3^2$$

は非負定符号2次形式である．なぜならQはけっして負にならず，$x_2=2x_1$ かつ $x_3=0$ のとき0になるから．

例題 12.6.3

$$Q=[x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=3x_1^2-5x_2^2$$

は定符号をもたない．なぜなら Q はたとえば $x_1=1,\ x_2=1$ で負，$x_1=1,\ x_2=0$ で正になるから．

12.6.2　行列の微分と関数の極大極小

ここで関数の導関数や微分係数を行列記号で表示する仕方を述べておこう．これらはあくまでも表示を簡単にするために約束する記号法であり，われわれの知っている微分法に新しく何もつけ加えてはいない．

m個の変数の関数

13)　$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{o}$ なるすべての$\boldsymbol{x}$について(3)でありかつ少なくともある $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{o}$ について $\boldsymbol{x}'A\boldsymbol{x}=0$ であるとき，Aは**正値半定符号** (positive semidefinite) **行列**という．同様に**負値半定符号** (negative semidefinite) **行列**も定義される．

$$y=f(x_1, x_2, \cdots, x_m) \tag{6}$$

を考える．このとき，$x'=[x_1\ x_2\ \cdots\ x_m]$ として

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial x_1}\\ \vdots \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_m}\end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial x'}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_m}\\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_m \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_m^2}\end{bmatrix} \tag{8}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x'}\right)=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)\ \cdots\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x_m}\right)\right] \tag{9}$$

と定義する．(8)の右辺はm次対称行列となっている．また

$$y_i=f_i(x_1, x_2, \cdots, x_m) \qquad i=1, 2, \cdots, n \tag{10}$$

のように $x_1, \cdots, x_m$ の関数がn個あるときは，$y'=[y_1\ y_2\ \cdots\ y_n]$ として

$$\frac{\partial y}{\partial x'}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_m}\\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_m}\end{bmatrix}=\left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\ \cdots\ \frac{\partial y}{\partial x_m}\right] \tag{11}$$

と定義する．

最後に mn 個の $y_{ij}(i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, n)$ が共通に単独の x の関数のとき，すなわち

$$y_{ij}=f_{ij}(x) \qquad i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, n \tag{12}$$

のとき $Y=[y_{ij}]$ を $m\times n$ 行列とすれば

$$\frac{dY}{dx}=\begin{bmatrix}\dfrac{dy_{11}}{dx} & \cdots & \dfrac{dy_{1n}}{dx}\\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{dy_{m1}}{dx} & \cdots & \dfrac{dy_{mn}}{dx}\end{bmatrix} \tag{13}$$

と定義する．

さて関数(6)が連続な2次偏導関数をもつとし，$x^{0\prime}=[x_1^0\ x_2^0\ \cdots\ x_m^0]$ の近傍でテイラー展開すれば

$$y-y^0=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial y}{\partial x_i}(x_i-x_i^0)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}(x_i-x_i^0)(x_j-x_j^0)+o(\rho^2) \tag{14}$$

となる．ただし $y_0=f(x_1^0, \cdots, x_m^0)$ とし，かつ $\partial y/\partial x_i$, $\partial^2 y/(\partial x_i \partial x_j)$ は $x_i=x_i^0$, $i=1, \cdots, m$ における値とする．また $\rho=\left\{\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2\right\}^{1/2}$ であり，$o(\rho^2)$ は剰余項である．$o(\rho^2)$ は

$$\lim_{\rho^2\to 0}\frac{o(\rho^2)}{\rho^2}=0 \tag{15}$$

という性質をもつ．(14)の右辺を行列記号を用いて表わせば

$$y-y^0=b'(x-x^0)+\frac{1}{2}(x-x^0)'A(x-x^0)+o(\rho^2) \tag{14'}$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} b&=\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x^0}\\ A&=\left.\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial x'}\right|_{x=x^0}\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

である．

これより y が x^0 において極大または極小であるためには次が必要条件となる．

$$b=\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x^0}=o \tag{17}$$

これを1階の条件という．また(17)が成立するとき x^0 を定常点(stationary point)という．

もし(17)が成立すれば(14′)は

$$y-y^0=\frac{1}{2}(x-x^0)'A(x-x^0)+o(\rho^2) \tag{18}$$

となる．ここで $h_i=(x_i-x_i^0)/\rho\ (i=1, \cdots, m)$ としかつ $h'=[h_1\ \cdots\ h_m]$ とする．明らかに $\|h\|=1$ である．このとき(18)は

$$y-y^0=\rho^2\left\{\frac{1}{2}h'Ah+\frac{o(\rho^2)}{\rho^2}\right\} \tag{18'}$$

と書ける．いま ρ を十分小さくとれば $o(\rho^2)/\rho^2$ は無視できるから，もしAが正(負)値定符号行列ならばhがどのような値(ただし $\|h\|=1$)であってもいつでも(18′)の右辺は正(負)値となる．すなわち定常点 x_0 を中心とする半径ρのm次元の球面における $y=f(x)$ の値はすべて $y^0=f(x^0)$ より大きく(小さく)

なる．したがって1階の条件が満たされるとき，y が x^0 において極小であるためには $A=\partial^2y/(\partial x\partial x')|_{x=x^0}$ が正値定符号であること，そして y が x^0 において極大であるためには $A=\partial^2y/(\partial x\partial x')|_{x=x^0}$ が負値定符号であること（2階の条件）が十分な条件となる．すなわち1階，2階の条件を合わせれば極大または極小のための十分条件となる．

12.6.3　正(負)値定符号行列

〔定理 12.26〕　対称行列 A が正(負)値定符号であるための必要十分条件は A の固有値がすべて正(負)であることである．

（証明）　正値定符号行列についてだけ証明を行なう．負値定符号の場合はまったく同様なやり方で証明できる．

十分：C を，A を対角化する直交行列としよう．すなわち $\Lambda=C'AC$ で Λ は対角要素に A の固有値が並ぶ対角行列である．いま x を n 次列ベクトルとして

$$y=C'x \tag{19}$$

なる n 次列ベクトル y を定義する．そうすると

$$x=(C')^{-1}y=Cy \tag{20}$$

A の2次形式は

$$\begin{aligned}x'Ax&=(Cy)'A(Cy)=y'C'ACy=y'\Lambda y\\&=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\end{aligned} \tag{21}$$

仮定によりすべての固有値は $\lambda_k>0$ だから，$y_1=y_2=\cdots=y_n=0$ すなわち $y=o$ のときを除くすべての y について

$$x'Ax=y'\Lambda y>0 \tag{22}$$

となる．ところで $x\neq o$ ならば $y\neq o$ である．なぜなら $y=o$ すなわち

$$C'x=o \tag{23}$$

とすると，$\rho(C')=n$ であるから定理 12.9 により $x=o$ でなければならない．これは $x\neq o$ という仮定に反するからである．ゆえに A は正値定符号である．

必要：A が正値定符号であるとする．いまかりに $\lambda_1\leq 0$ としよう．y_1 を第1要素が1で残りの要素がすべて0のベクトルとする．このとき，$\rho(C)=n$ であるから $x_1=Cy_1\neq o$ である．そうすると

$$\begin{aligned}x_1'Ax_1&=y_1'C'ACy_1=y_1'\Lambda y_1\\&=\sum_{k=1}^{n}\lambda_ky_k^2=\lambda_1\leq 0\end{aligned} \tag{24}$$

となる．これは $x'Ax$ が $x\neq o$ なるすべての x について正であるという仮定に反する．よって $\lambda_1>0$ でなければならない．同様にしてすべての λ_k は正でなければならない（証明終り）．

〔定理 12.27〕　もし A が n 次正値定符号行列であれば

$$|A|>0 \tag{25}$$

またもし A が n 次の負値定符号行列ならば

$$(-1)^n|A|>0 \tag{26}$$

また A が正値あるいは負値定符号のいずれであっても $\rho(A)=n$ である．

（証明）　定理 12.16 より $|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$．いま A が正値定符号ならば定理 12.26 より $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n$ はすべて正．よって $|A|>0$ である．また A が負値定符号ならば $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n$ はすべて負だから n が偶数ならば $|A|>0$，奇数ならば $|A|<0$，よって(26)となる．また A が正値，負値いずれの定符号であっても，A は0でない固有値を n 個もつから，定理 12.23 により $\rho(A)=n$（証明終り）．

〔定理 12.28〕　A を n 次の正(負)値定符号行列，P を位 m の $n\times m$ 行列とする．そのとき $P'AP$ は正(負)値定符号である．

（証明）　明らかに $P'AP$ は $m\times m$ の対称行列である．y を o でない任意の m 次列ベクトルとする．このとき $x=Py$ なる n 次列ベクトル x は $\rho(P)=m$ であるから（定理 12.26 の十分条件の証明におけると同様にして）o ではない．それゆえ $y'(P'AP)y=x'Ax$ は0より大(小)である．したがって $y'(P'AP)y$ は，o でないすべての y について正(負)値である（証明終り）．

P を n 次の非特異行列とすれば，上の定理から直接，次が出てくる．

〔定理 12.29〕　A を正(負)値定符号行列，P を非特異行列とすれば，$P'AP$ は正(負)値定符号である．

また $P=A^{-1}$ とおけば $P'AP=(A^{-1})'AA^{-1}=(A^{-1})'=A^{-1}$ であるから

〔定理 12.30〕 A が正(負)値定符号行列ならば A^{-1} は正(負)値定符号である．

単位行列は正値定符号である．なぜなら，$x'Ix=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ でありこれは $x_1=\cdots=x_n=0$ のとき以外は正値であるから．そこで定理 12.28 において $A=I$ とおけば $P'AP=P'IP=P'P$ は正値定符号である．すなわち

〔定理 12.31〕 P を $\rho(P)=m$ なる $n\times m$ 行列とすれば，$P'P$ は正値定符号である．

さて，対称行列の第 i 列と第 j 列を入れ換え，次に第 i 行と第 j 行とを入れ換えた行列を A^* とすると，A がたとえば正値定符号ならば A^* も正値定符号である．

例　$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\longrightarrow A^*=\begin{bmatrix}a_{22} & a_{21} & a_{23}\\ a_{12} & a_{11} & a_{13}\\ a_{32} & a_{31} & a_{33}\end{bmatrix}$$

(第1行と第2行，第1列と第2列を入れ換える.)

なぜなら，A^* はやはり対称であり，2次形式の性質から

$$(x^*)'A^*x^*=x'Ax \tag{27}$$

が成立する．ただし x^* は列ベクトルで x は x^* の第 i 要素と第 j 要素を入れ換えた列ベクトル．それゆえ，A がたとえば正値定符号ならば A^* も正値定符号である．

正方行列において同じ番号の行と列(数個でもよい)を取り除いた行列を**主小行列**(principal submatrix)と呼ぶ．

例題 12.6.4

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

の主小行列は

3行,列を削除

$$a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

である．2,3行,列を削除

〔定理 12.32〕 A が正(負)値定符号ならば，A のすべての主小行列は正(負)値定符号である．

(証明)　B を A の最後の $(n-p)$ 個の行と最後の $(n-p)$ 個の列を取り除いた小行列とすれば

$$B=[I_p\quad O_{p,n-p}]A\begin{bmatrix}I_p\\ O_{n-p,p}\end{bmatrix} \tag{28}$$

である．$\begin{bmatrix}I_p\\ O_{n-p,p}\end{bmatrix}$ の位は明らかに p に等しいから，定理 12.28 により B は正(負)値定符号である(証明終り)．

主小行列の行列式を**主小行列式**(principal minor または principal subdeterminant)と呼ぶ．このとき定理 12.27 と定理 12.32 より，明らかに次が成立する．

〔定理 12.33〕 もし A が正値定符号ならば，A のすべての主小行列式は正値である．またもし A が負値定符号ならば，A のすべての主小行列式は，その次数が偶数ならば正，奇数ならば負である．

もし $|A|$ 自身を A の主小行列式に含めれば定理 12.33 は定理 12.27 の前半を含むことになる．

例題 12.6.5

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

において

A が正値定符号ならば

$$a_{11}>0,\ a_{22}>0,\ a_{33}>0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}>0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}>0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}>0$$

Aが負値定符号ならば

$$a_{11}<0,\ a_{22}<0,\ a_{33}<0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}>0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}>0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}<0$$

〔定理 12.34〕 Aが正値定符号ならば

$$PAP'=I \tag{29}$$

$$P'P=A^{-1} \tag{30}$$

となるような非特異行列Pが存在する.

（証明） Aを対角化する直交行列をCとする．すなわち

$$C'AC=\Lambda$$

ただしΛは対角要素にAの固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ が並ぶ対角行列．そして，$\sqrt{\lambda_1}$, $\sqrt{\lambda_2}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}$ を対角要素におく対角行列を $\Lambda^{1/2}$ で表わす．すなわち

$$\Lambda^{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \tag{31}$$

また $(\Lambda^{1/2})^{-1}$ を $\Lambda^{-1/2}$ で表わす．このとき

$$\Lambda^{-\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \end{bmatrix} \tag{32}$$

となることは容易に確かめられる．すると

$$P=\Lambda^{-\frac{1}{2}}C' \tag{33}$$

が求める行列である．なぜなら，$(\Lambda^{-1/2})'=\Lambda^{-1/2}$ であるから

$$PAP'=\Lambda^{-\frac{1}{2}}C'AC\Lambda^{-\frac{1}{2}}=\Lambda^{-\frac{1}{2}}\Lambda\Lambda^{-\frac{1}{2}}=I$$

また $C'AC=\Lambda$ であるから $A=C\Lambda C'$．それゆえ $A^{-1}=(C\Lambda C')^{-1}=C\Lambda^{-1}C'$ $=C\Lambda^{-1/2}\Lambda^{-1/2}C'=P'P$．$P$が非特異であることは $|P|=|\Lambda^{-1/2}||C'|$ において $|\Lambda^{-1/2}|$ も $|C'|$ も 0 ではないことから明らかである（証明終り）．

〔定理 12.35〕 Aを正値定符号行列とするとき

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

でかつBがAの逆行列で

$$A^{-1}=B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

であるとする．ただし A_{11}, A_{22} は正方行列でかつ対応する小行列 B_{ij} と A_{ij} の行数列数は等しいとする．このとき

$$\left.\begin{aligned} A_{11}^{-1}&=B_{11}-B_{12}B_{22}^{-1}B_{21} \\ A_{22}^{-1}&=B_{22}-B_{21}B_{11}^{-1}B_{12} \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

そして

$$\left.\begin{aligned} B_{11}^{-1}&=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} \\ B_{22}^{-1}&=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

が成立する．

（証明） まず(34)の第1式を証明しよう．$A=B^{-1}$ であるから，$AB=I$．それゆえ

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}=I$$

これから

$$A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}=I \tag{36}$$

$$A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}=O \tag{37}$$

を得る．Aは正値定符号だから，$B=A^{-1}$ も正値定符号である（定理 12.30）．それゆえ，定理 12.32 により主小行列 B_{22} も正値定符号である．よって $|B_{22}|>0$ であるから B_{22}^{-1} が存在する．そこで(37)より

$$A_{12}=-A_{11}B_{12}B_{22}^{-1} \tag{38}$$

となる．これを(36)の A_{12} に代入すれば

$$A_{11}B_{11}-A_{11}B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}=I$$

この式の両辺に左から A_{11}^{-1} (これは B_{22}^{-1} と同じ理由により存在する)を掛けると(34)の第1式が得られる．(34)の第2式はこれとまったく同様に証明できる．(35)は $B^{-1}=(A^{-1})^{-1}=A$ であるから，上の証明で A と B をおき換えることにより証明される(証明終り)．

なおこの定理から次の関係も容易に導ける．証明は読者に任せよう(ヒント：(38)からまず(40)を導く)．

$$B_{11}=A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} \tag{39}$$

$$B_{12}=-A_{11}^{-1}A_{12}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1} \tag{40}$$

ついでに，一般の正方行列について成立する次の定理も掲げておこう．

〔定理 12.36〕 A を正方行列とし次のように分割する．

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

このとき A_{22} が非特異ならば

$$|A|=|A_{22}|\,|A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}| \tag{41}$$

である．

(証明) I を A_{11} と同じ次数として

$$B=\begin{bmatrix} I & O \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

とおくと(12.2.22)式より

$$|B|=|I|\,|A_{22}^{-1}|=|A_{22}^{-1}|$$

である．一方 $|A|=|A_{22}|\,|A_{22}|^{-1}|A|=|A_{22}|\,|A|\,|A_{22}^{-1}|$ であるから

$$\begin{aligned}
|A|&=|A_{22}|\,|A|\,|A_{22}^{-1}|=|A_{22}|\,|A|\,|B| \\
&=|A_{22}|\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} I & O \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & A_{22}^{-1} \end{vmatrix} \\
&=|A_{22}|\left|\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & O \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=|A_{22}|\begin{vmatrix} A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & I \end{vmatrix} \\
&=|A_{22}|\,|A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}| \qquad \text{〔(12.2.22)式より〕}
\end{aligned}$$

が得られる(証明終り)．

12.6.4 非負(非正)定符号行列

非負(非正)定符号行列については定理だけを掲げておく．証明は12.6.3と同様にすれば容易に行なえる．

〔定理 12.37〕 対称行列 A が非負(非正)定符号行列であるための必要十分条件は A の固有値がすべて非負(非正)であることである．

〔定理 12.38〕 A を非負(非正)定符号，P を任意の行列とすれば，$P'AP$ は非負(非正)定符号である．

〔定理 12.39〕 P を任意の行列とすれば，$P'P$ は非負定符号行列である．

〔定理 12.40〕 A を非負(非正)定符号とすれば，A のすべての主小行列は非負(非正)定符号である．

〔定理 12.41〕 A を非負定符号とすれば，A のすべての主小行列式は非負である．

P.317

〔定理 12.42〕 A が非負(非正)定符号でかつ正(負)値定符号でなければ，A の最小(最大)固有値は0で，A は特異行列である．[14)]

演 習 問 題

1 次の2次関数を行列記号で表わせ．

(a) $y=5x_1^2+6x_2^2-x_3^2$

(b) $y=-x_1+5x_2+4x_3+3x_1^2+x_2^2-6x_3^2+6x_1x_2+3x_2x_3$

2 前問の2次関数の定常点を求め，それが y の最大または最小を与えるかどうか

---

14) このとき A は正(負)値半定符号行列である(脚注13)参照)．

を判定せよ．

3　次の行列を $A=P'P$ の形に書け．ただし P は正方行列とする．

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 6\end{bmatrix}$$

4　2つの確率変数 x_1, x_2 の平均 μ_1, μ_2, 分散 σ_1^2, σ_2^2 および共分散 $\mathrm{Cov}(x_1, x_2)$ が存在するとき，

$$0\leqq E[\lambda_1(x_1-\mu_1)+\lambda_2(x_2-\mu_2)]^2=\lambda_1^2\sigma_1^2+\lambda_2^2\sigma_2^2+2\lambda_1\lambda_2\,\mathrm{Cov}(x_1, x_2)$$

は λ_1, λ_2 に関する非負の2次形式となっている．これより定理12.41を用いて，母相関係数 ρ について $\rho^2\leqq 1$ が成立することを証明せよ．

第13章

多変量正規分布

われわれはすでに単一変量の正規分布(4.4)，2変量正規分布(10.2)を学んだ．ここではこれらの拡張として，多変量正規分布を考察し，そのうえでこの分布から導かれる非心カイ自乗分布を扱う．

13.1　多変量正規分布の定義

〔定義 13.1〕 $y_1, y_2, \cdots, y_p$ を p 個の確率変数とするとき，それらが結合密度関数

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_p)=(2\pi)^{-\frac{p}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

$$-\infty<y_i<\infty,\quad i=1, \cdots, p \qquad (1)$$

をもつならば，$y_1, y_2, \cdots, y_p$ は**多変量正規分布** (multivariate normal distribution)にしたがうという．ただし

$$\boldsymbol{\mu}=\begin{bmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_p\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1p}\\ \vdots & & \vdots\\ \sigma_{p1} & \cdots & \sigma_{pp}\end{bmatrix}$$

でかつ $\boldsymbol{\Sigma}$ は正値定符号行列，また $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\Sigma}$ の要素は一定値とする．

密度関数の性質から

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_p)\geqq 0 \qquad -\infty<y_i<\infty,\ i=1, \cdots, p \qquad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(y_1, y_2, \cdots, y_p)dy_1dy_2\cdots dy_p=1 \qquad (3)$$

が成立しなければならない．(2)が成立することは関数の形から明らかであるから，以下(3)を証明しよう．

まず z を p 次列ベクトルとして

$$z=y-\mu \qquad (4)$$

と変換する．

変換のヤコビアン J は，$\partial y_i/\partial z_j=\delta_{ij}$ (δ_{ij} はクロネッカー・デルタ)であるから

$$J=\left|\frac{\partial y}{\partial z'}\right|=|I_p|=1 \qquad (5)$$

である.[1] それゆえ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}(y-\mu)'\Sigma^{-1}(y-\mu)\right\}dy_1dy_2\cdots dy_p$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}z'\Sigma^{-1}z\right\}dz_1dz_2\cdots dz_p \qquad (6)$$

ところで Σ は正値定符号であるから定理 12.30 によって Σ^{-1} も正値定符号である．それゆえ定理 12.22 によって

$$C'\Sigma^{-1}C=D \qquad (7)$$

ならしめるような直交行列 C が存在する．ただし D は対角要素に Σ^{-1} の固有値が並ぶ p 次対角行列とする．また定理 12.26 によってそれら Σ^{-1} の固有値はすべて正である．

この直交行列 C により z から p 次列ベクトル t に

$$z=Ct \qquad (8)$$

のごとく変換する．ヤコビアンは

$$J=\left|\frac{\partial z}{\partial t'}\right|=|C|=\pm 1$$

である((12.5.25)式参照)．よって $|J|=1$ である．各 t_i の積分の範囲は $-\infty$ から $+\infty$ までであるから

1) $\dfrac{\partial y}{\partial z'}$ の意味については(12.6.11)式参照．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}z'\Sigma^{-1}z\right\}dz_1dz_2\cdots dz_p$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}t'(C'\Sigma^{-1}C)t\right\}dt_1dt_2\cdots dt_p$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}t'Dt\right)dt_1dt_2\cdots dt_p$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}d_{ii}t_i^2\right)dt_1dt_2\cdots dt_p$$
$$=\prod_{i=1}^{p}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}d_{ii}t_i^2}dt_i$$
$$=\prod_{i=1}^{p}\sqrt{\frac{2\pi}{d_{ii}}}\qquad \text{〔単一変量の正規密度の積分より〕}$$
$$=(2\pi)^{\frac{p}{2}}\left(\prod_{i=1}^{p}d_{ii}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\Sigma^{-1}|^{-\frac{1}{2}}\qquad \text{〔定理 12.16 と定理 12.23 より〕}$$
$$=(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}\qquad \text{〔定理 12.12 より〕} \qquad (9)$$

となる．これは(1)の指数関数の係数の逆数にほかならない．よって(3)が証明された．

記号を簡略化するため，$y_1, \cdots, y_p$ が結合分布するとき，その結合密度関数 $f(y_1, \cdots, y_p)$ を $f(y)$ と表わすこともある．ただし y は p 次列ベクトル．

また，(1)において指数部分の 2 次形式 $(y-\mu)'\Sigma^{-1}(y-\mu)$ を多変量正規分布(1)の 2 次形式と呼ぶことにする．

演 習 問 題

1　$p=1$ および $p=2$ のときの多変量正規分布密度関数を行列記号を用いないで書いてみよ．結果を 4.4 の単一変量の正規分布および 10.2 の 2 変量正規分布と比較せよ．

13.2　多変量正規分布の性質

13.2.1　周 辺 分 布

2 変量正規分布において各変数の周辺分布は単一変量の正規分布に一致した

((10. 2. 17)式)．多変量正規分布についてもこのことは成立する．

〔定理 13. 1〕 多変量正規分布する p 個の変数の任意の1つの変数についての周辺分布は単一変量の正規分布である．

（証明） y_1 の周辺分布について示せば十分である．定義によって

$$g(y_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(2\pi)^{-\frac{p}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})\right\}dy_2dy_3\cdots dy_p \qquad (1)$$

$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ とおいて $\boldsymbol{A}$ を次のように分割する．

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}A_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix} \qquad (2)$$

ただし $A_{11}=a_{11}$, $\boldsymbol{A}_{12}=[a_{12}\ \cdots\ a_{1p}]$, $\boldsymbol{A}_{21}=\begin{bmatrix}a_{21}\\ \vdots\\ a_{p1}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}_{22}=\begin{bmatrix}a_{22} & \cdots & a_{2p}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{p2} & \cdots & a_{pp}\end{bmatrix}$ とする．すると(1)の2次形式は

$$(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})=(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})$$
$$=[y_1-\mu_1\quad(\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{\mu}_2)']\begin{bmatrix}A_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1-\mu_1\\ \boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{\mu}_2\end{bmatrix}$$
$$=(y_1-\mu_1)A_{11}(y_1-\mu_1)+(y_1-\mu_1)\boldsymbol{A}_{12}(\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{\mu}_2)$$
$$+(\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{A}_{21}(y_1-\mu_1)+(\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{A}_{22}(\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{\mu}_2) \qquad (3)$$

となる．ただし $\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{\mu}_2=\begin{bmatrix}y_2\\ \vdots\\ y_p\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mu_2\\ \vdots\\ \mu_p\end{bmatrix}$ とする．

ところで $\boldsymbol{A}(=\boldsymbol{\Sigma}^{-1})$ は正値定符号（よって対称）であるから，$\boldsymbol{A}_{21}'=\boldsymbol{A}_{12}$ であり，主小行列である $\boldsymbol{A}_{22}$ は，**定理 12. 32** により正値定符号である．よって $|\boldsymbol{A}_{22}|>0$ であるから逆行列 $\boldsymbol{A}_{22}^{-1}$ が存在する．また同様の理由で $A_{11}=a_{11}>0$ である．そこで(3)は

$$(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})$$
$$=(y_1-\mu_1)(A_{11}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21})(y_1-\mu_1)$$
$$+[(\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{\mu}_2)+\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}(y_1-\mu_1)]'\boldsymbol{A}_{22}[(\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{\mu}_2)$$
$$+\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}(y_1-\mu_1)] \qquad (4)$$

のように書き改められる．それゆえ(1)は

$$g(y_1)=(2\pi)^{-\frac{p}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(y_1-\mu_1)(A_{11}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21})(y_1-\mu_1)\right\}$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}[(\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{\mu}_2)+\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}(y_1-\mu_1)]'\boldsymbol{A}_{22}\right.$$
$$\left.\times[(\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{\mu}_2)+\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}(y_1-\mu_1)]\right\}dy_2dy_3\cdots dy_p \qquad (5)$$

となる．(5)の右辺被積分関数において $-\boldsymbol{\mu}_2+\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}(y_1-\mu_1)$ は積分変数 $y_2, \cdots, y_p$ に関係しない定数である．

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\mu}_2-\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}(y_1-\mu_1)$$

とおけば，(5)の重積分を w とすると

$$w=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{b})'\boldsymbol{A}_{22}(\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{b})\right\}dy_2dy_3\cdots dy_p \qquad (6)$$

となる．これより(13. 1. 9)式を導いたのと同様にして

$$w=(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}|\boldsymbol{A}_{22}|^{-\frac{1}{2}} \qquad (7)$$

が得られる．かくして(5)は

$$g(y_1)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}|\boldsymbol{A}_{22}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(y_1-\mu_1)\right.$$
$$\left.\times(A_{11}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21})(y_1-\mu_1)\right\} \qquad (8)$$

となる．ところで**定理 12. 36** により

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_{22}||A_{11}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}| \qquad (9)$$

であり，かつ $|\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2}=|\boldsymbol{A}|^{1/2}$ であるから(8)は

$$g(y_1)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}|A_{11}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}|^{\frac{1}{2}}$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}(y_1-\mu_1)(A_{11}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21})(y_1-\mu_1)\right\} \qquad (10)$$

となる．ところで $\boldsymbol{A}$ は正値定符号であるから**定理 12. 35** により

$$A_{11}-\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}=\Sigma_{11}^{-1} \qquad (11)$$

が成立する．ただし Σ_{11} は $\boldsymbol{A}$ の分割に合わせて $\boldsymbol{\Sigma}(=\boldsymbol{A}^{-1})$ を

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\Sigma_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22}\end{bmatrix}$$

と分割したときの小行列とする．Σ_{11} は**定理 12. 32** により正値定符号であ

る．$\boldsymbol{\Sigma}=[\sigma_{ij}]$ とすれば $\boldsymbol{\Sigma}_{11}=\sigma_{11}$ であるから $\sigma_{11}>0$．かくして(10)は

$$g(y_1)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\sigma_{11}^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(y_1-\mu_1)\sigma_{11}^{-1}(y_1-\mu_1)\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{11}}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\right)^2} \tag{12}$$

となる．これは単一変量の正規分布密度関数((4.4.1)式参照)にほかならない(証明終り)．　p.82

この定理は次のように拡張される．

〔定理 13.2〕 多変量正規分布する p 個の変数について，その中の任意の r 個の変数の結合周辺分布は，それら r 個の変数の多変量正規分布である．

この証明は定理 13.1 の証明とほとんど同一であるので読者に任せよう．$\boldsymbol{y}_1$ を r 次の列ベクトル，$\boldsymbol{y}_2$ を $p-r$ 次の列ベクトルとすると

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{bmatrix}$$

で，かつ $y_1, \cdots, y_r$ の結合周辺密度は

$$h(y_1, \cdots, y_r)=(2\pi)^{-\frac{r}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}_{11}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{\mu}_1)'\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}(\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{\mu}_1)\right\}$$

$$-\infty<y_i<\infty, \quad i=1, \cdots, r \tag{13}$$

となる．ただし $\boldsymbol{\Sigma}_{11}$ は $\boldsymbol{\Sigma}$ の最初の r 行 r 列の主小行列，$\boldsymbol{\mu}_1$ は $\boldsymbol{\mu}$ の最初の r 個の要素からなる列ベクトルである．

13.2.2　平均，分散，共分散

〔定理 13.3〕 $y_1, \cdots, y_p$ が(13.1.1)の結合密度をもつ多変量正規分布にしたがうとき

$$E(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\mu} \tag{14}$$

$$E[(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})']=\boldsymbol{\Sigma} \tag{15}$$

である．ここで $E[(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})']$ の第 (i, j) 要素は $i=j$ のとき y_i の分散 $\sigma_{y_i}^2$ に等しく，$i\neq j$ のとき y_i と y_j の共分散 $\mathrm{Cov}(y_i, y_j)$ に等しい．$E[(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})']$ を $\boldsymbol{y}$ の共分散行列と呼ぶ.[2] それゆえ(14)，(15)はいい換えれ

ば

$$E(y_i)=\mu_i \quad i=1, \cdots, p \tag{14'}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{y_i}^2=\sigma_{ii}\\ \mathrm{Cov}(y_i, y_j)=\sigma_{ij}\end{array}\right\} \quad i, j=1, \cdots, p \tag{15'}$$

を意味する．

（証明） まず $E(y_1)=\mu_1$ であることを証明しよう．$E(y_i)=\mu_i(i=2, \cdots, p)$ については同様に成立する．期待値の定義から

$$E(y_1)=(2\pi)^{-\frac{p}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}y_1$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})\right\}dy_1dy_2\cdots dy_p \tag{16}$$

であるが，書き直せば

$$E(y_1)=\int_{-\infty}^{\infty}y_1\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(2\pi)^{-\frac{p}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})\right\}dy_2dy_3\cdots dy_p\Big]dy_1$$

となる．大括弧の中は y_1 に関する周辺密度（1）にほかならない．したがって(12)より

$$E(y_1)=\int_{-\infty}^{\infty}y_1\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{11}}}e^{-\frac{1}{2\sigma_{11}}(y_1-\mu_1)^2}dy_1=\mu_1 \tag{17}$$

が得られる．

次に，$\sigma_{y_i}^2=E\{(y_i-\mu_i)^2\}=\sigma_{ii}$ を証明する．$i=1$ について証明すれば十分である．$f(y_1, \cdots, y_p)$ を(13.1.1)式の密度関数とすれば，分散の定義より

$$E\{(y_1-\mu_1)^2\}=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(y_1-\mu_1)^2f(y_1, \cdots, y_p)dy_1\cdots dy_p$$

---

2)

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}y_{11} & \cdots & y_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ y_{n1} & \cdots & y_{nm}\end{bmatrix}$$

とするとき $E(\boldsymbol{Y})$ は個々の要素の期待値の行列を意味する．すなわち

$$E(\boldsymbol{Y})=\begin{bmatrix}E(y_{11}) & \cdots & E(y_{1m})\\ \vdots & & \vdots\\ E(y_{n1}) & \cdots & E(y_{nm})\end{bmatrix}$$

である．

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(y_1-\mu_1)^2\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(y_1,\ \cdots,\ y_p)dy_2\cdots dy_p\right]dy_1$$

である．大括弧の中は y_1 の周辺密度であるから(12)より

$$\sigma_{y_1}{}^2=\int_{-\infty}^{\infty}(y_1-\mu_1)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{11}}}e^{-\frac{1}{2\sigma_{11}}(y_1-\mu_1)^2}dy_1=\sigma_{11} \tag{18}$$

となる．

次に共分散について証明する．$\mathrm{Cov}(y_1,\ y_2)=E\{(y_1-\mu_1)(y_2-\mu_2)\}=\sigma_{12}$ を示せば他の場合も同様である．共分散の定義より

$$E\{(y_1-\mu_1)(y_2-\mu_2)\}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}(y_1-\mu_1)(y_2-\mu_2)f(y_1,\ \cdots,\ y_p)dy_1\cdots dy_p$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y_1-\mu_1)(y_2-\mu_2)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(y_1,\cdots,\ y_p)dy_3\cdots dy_p\right]dy_1dy_2 \tag{19}$$

大括弧の中は y_1, y_2 に関する結合密度関数であるが，定理 13.2によってこれは $p=2$ の多変量正規分布の結合密度にほかならない．これが 10.2の(2)式で与えた2変量正規分布と同一であることは次のように示される．

(13)より

$$h(y_1,\ y_2)$$
$$=(2\pi)^{-\frac{2}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}_{11}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{\mu}_1)'\boldsymbol{\Sigma}_{11}{}^{-1}(\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{\mu}_1)\right\}$$
$$=(2\pi)^{-1}\begin{vmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}\\ \sigma_{21}&\sigma_{22}\end{vmatrix}^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}[y_1-\mu_1\ \ y_2-\mu_2]\begin{bmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}\\ \sigma_{21}&\sigma_{22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}y_1-\mu_1\\ y_2-\mu_2\end{bmatrix}\right\} \tag{20}$$

ここで

$$\sigma_{12}=\sigma_{21}=\rho\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}} \tag{21}$$

とおく．すると(20)は

$$h(y_1,\ y_2)=(2\pi)^{-1}\begin{vmatrix}\sigma_{11}&\rho\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}\\ \rho\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}&\sigma_{22}\end{vmatrix}^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}[y_1-\mu_1\ \ y_2-\mu_2]\begin{bmatrix}\sigma_{11}&\rho\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}\\ \rho\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}&\sigma_{22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}y_1-\mu_1\\ y_2-\mu_2\end{bmatrix}\right\}$$
$$=(2\pi)^{-1}\{\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho^2)\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho^2)}[y_1-\mu_1\ \ y_2-\mu_2]\begin{bmatrix}\sigma_{22}&-\rho\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}\\ -\rho\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}&\sigma_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1-\mu_1\\ y_2-\mu_2\end{bmatrix}\right\}$$
$$=(2\pi)^{-1}\{\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho^2)\}^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(y_1-\mu_1)^2}{\sigma_{11}}-2\rho\frac{y_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\cdot\frac{y_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}+\frac{(y_2-\mu_2)^2}{\sigma_{22}}\right]\right\} \tag{22}$$

これは(10.2.2)式の2変量正規結合密度と一致する（$y_1\to x$, $y_2\to y$, $\mu_1\to\mu_x$, $\mu_2\to\mu_y$, $\sqrt{\sigma_{11}}\to\sigma_x$, $\sqrt{\sigma_{22}}\to\sigma_y$ とおき換えてみよ）．

それゆえ，(19)は

$$E\{(y_1-\mu_1)(y_2-\mu_2)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y_1-\mu_1)(y_2-\mu_2)h(y_1,\ y_2)dy_1dy_2 \tag{23}$$

そしてこれは，(10.2.15)式によって

$$E\{(y_1-\mu_1)(y_2-\mu_2)\}=\rho\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}=\sigma_{12}=\sigma_{21} \tag{24}$$

となる(証明終り)．

以上のようにして $\boldsymbol{\mu}$ は平均ベクトル，$\boldsymbol{\Sigma}$ は共分散行列を表わすことが明らかになった．そこで以下，ベクトル $\boldsymbol{y}$ は平均 $\boldsymbol{\mu}$, 共分散 $\boldsymbol{\Sigma}$ で正規分布するといういい方をする．また平均 $\boldsymbol{\mu}$, 共分散 $\boldsymbol{\Sigma}$ の多変量正規分布を $N(\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\Sigma})$ で表わす．

13.2.3　条件付分布

〔定理 13.4〕　p 次列ベクトル $\boldsymbol{y}$ が平均 $\boldsymbol{\mu}$, 共分散 $\boldsymbol{\Sigma}$ で正規分布するとし，$\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ を

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\mu}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}_1\\ \boldsymbol{\mu}_2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{11}&\boldsymbol{\Sigma}_{12}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{21}&\boldsymbol{\Sigma}_{22}\end{bmatrix}$$

ただし，$\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{\mu}_1$ は r 次列ベクトル，$\boldsymbol{\Sigma}_{11}$ は $r\times r$ 行列，等々のように分割するとき，$\boldsymbol{y}_2$ を与えたときの $\boldsymbol{y}_1$ の条件付分布は，平均 $\boldsymbol{\mu}_1+\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}{}^{-1}(\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{\mu}_2)$ および共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_{11}-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}{}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}$ の多変量正規分布である．

（証明）　$\boldsymbol{y}_2$ を与えたときの $\boldsymbol{y}_1$ の条件付結合密度関数を $h(\boldsymbol{y}_1|\boldsymbol{y}_2)$ で表わ

すことにする．条件付密度の定義より

$$h(y_1|y_2)=\frac{f(y)}{g_2(y_2)}$$

$$=\frac{(2\pi)^{-p/2}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}(y-\mu)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(y-\mu)\right\}}{(2\pi)^{-(p-r)/2}|\boldsymbol{\Sigma}_{22}|^{-1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}(y_2-\mu_2)'\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(y_2-\mu_2)\right\}} \tag{25}$$

である．ただし $f(y)$ は y の結合密度関数，$g_2(y_2)$ は y_2 の結合周辺密度関数である．

さて $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=A$ とおいて（2）のごとく分割すると，条件付結合密度関数(25)の2次形式は

$$Q=\begin{bmatrix}y_1-\mu_1\\y_2-\mu_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\A_{21} & A_{22}-\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1-\mu_1\\y_2-\mu_2\end{bmatrix}$$

ここで定理12.35および(12.6.38)式より

$$\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

$$A_{12}=-A_{11}\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1},\quad A_{21}=-\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}A_{11}$$

であるから Q は

$$Q=\begin{bmatrix}y_1-\mu_1\\y_2-\mu_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\A_{21} & A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1-\mu_1\\y_2-\mu_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}y_1-\mu_1\\y_2-\mu_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}A_{11} & -A_{11}\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\\-\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}A_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}A_{11}\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1-\mu_1\\y_2-\mu_2\end{bmatrix}$$

$$=[y_1-\mu_1-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(y_2-\mu_2)]'A_{11}[y_1-\mu_1-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(y_2-\mu_2)] \tag{26}$$

ここで(12.6.34)の第1式より

$$A_{11}=[\boldsymbol{\Sigma}_{11}-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}]^{-1} \tag{27}$$

でありまた定理12.36より

$$|\boldsymbol{\Sigma}|=|\boldsymbol{\Sigma}_{22}||\boldsymbol{\Sigma}_{11}-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}| \tag{28}$$

であるから，(26)～(28)を(25)に代入すれば

$$h(y_1|y_2)=(2\pi)^{-\frac{r}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}_{11}-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}|^{-\frac{1}{2}}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}[y_1-\mu_1-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(y_2-\mu_2)]'[\boldsymbol{\Sigma}_{11}-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}]^{-1}\right.$$

$$\left.\times[y_1-\mu_1-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(y_2-\mu_2)]\right\} \tag{29}$$

が得られる（証明終り）．

13.2.4　正規変数の独立性

〔定理 13.5〕　p 次列ベクトル y が平均 μ，共分散 $\boldsymbol{\Sigma}$ で多変量正規分布にしたがうとき，$y_1, y_2, \cdots, y_p$ が相互に統計的に独立であるための必要十分条件は，すべての $i\neq j$ について y_i と y_j との共分散が0であること，すなわち $\boldsymbol{\Sigma}$ が対角行列であることである．

（証明）（i）十分：$\boldsymbol{\Sigma}$ が対角行列ならば

$$(y-\mu)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(y-\mu)=\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\sigma_{ii}}(y_i-\mu_i)^2$$

$$|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}=\left\{\prod_{i=1}^{p}\sigma_{ii}\right\}^{-\frac{1}{2}}=\prod_{i=1}^{p}\sigma_{ii}^{-\frac{1}{2}}$$

となるから，(13.1.1)式は

$$f(y_1,\cdots,y_p)=(2\pi)^{-\frac{p}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(y-\mu)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(y-\mu)\right\}$$

$$=(2\pi)^{-\frac{p}{2}}\prod_{i=1}^{p}\sigma_{ii}^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\sigma_{ii}}(y_i-\mu_i)^2\right\}$$

$$=\prod_{i=1}^{p}\left\{(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\sigma_{ii}^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(y_i-\mu_i)^2}{\sigma_{ii}}}\right\}$$

$$=\prod_{i=1}^{p}g_i(y_i)\qquad -\infty<y_i<\infty\quad(i=1,\cdots,p) \tag{30}$$

となり，$y_1,\cdots,y_p$ の結合密度は各 y_i の周辺密度 $g_i(y_i)$ の積になる．このことは $y_1,\cdots,y_p$ が統計的に独立であることを意味する．

（ii）必要：$y_1,\cdots,y_p$ が統計的に独立であれば当然すべての共分散は0である（3.6.5参照）．したがって $\boldsymbol{\Sigma}$ は対角行列である（証明終り）．

一般の確率分布では y_i と y_j との共分散が（したがって相関係数が）0であっても，y_i と y_j とが統計的に独立とは限らない．

演　習　問　題

1　y_1, y_2, y_3 が次のような2次式をその2次形式としてもつ多変量正規分布にしたがうとき，その $\boldsymbol{\Sigma}$, μ を求めよ．

$$Q=y_1^2+2y_2^2+3y_3^2+2y_1y_2+2y_1y_3+4y_2y_3-8y_1-4y_2-6y_3+21$$

2　3次列ベクトル $\boldsymbol{y}$ が

$$\boldsymbol{\mu}=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}4&-1&0\\-1&3&1\\0&1&2\end{bmatrix}$$

なる平均，共分散をもつ多変量正規分布にしたがうとき

(a)　$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ の値を計算せよ．

(b)　y_1 の周辺分布を求めよ．

(c)　y_1 と y_2 の結合周辺分布を求めよ．

(d)　y_2 と y_3 とが与えられたときの y_1 の条件付分布を求めよ．

(e)　母相関係数 ρ_{12}, ρ_{13}, ρ_{23} の値を計算せよ．

13.3　1次形式統計量の分布

$y_1, y_2, \cdots, y_p$ が多変量正規分布 $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ にしたがうとき，$y_1, y_2, \cdots, y_p$ の1次形式は単一変量の正規分布にしたがう．以下このことを示そう．

いま $\boldsymbol{y}$ を p 次列ベクトル，$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ を p 次の非特異行列として

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{1}$$

なる変換[3] を考える．$\boldsymbol{z}$ は p 次列ベクトル．このとき変換のヤコビアンは

$$J=\left|\frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{z}'}\right|=|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$$

である．そこで(13.1.1)式より，$\boldsymbol{z}$ の密度は

$$\begin{aligned}h(\boldsymbol{z})&=f(\boldsymbol{y})\|\boldsymbol{A}\|^{-1}\\&=(2\pi)^{-\frac{p}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})\right\}\|\boldsymbol{A}\|^{-1}\\&=(2\pi)^{-\frac{p}{2}}(|\boldsymbol{\Sigma}||\boldsymbol{A}|^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu})'(\boldsymbol{A}')^{-1}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu})\right\}\\&=(2\pi)^{-\frac{p}{2}}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}'|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu})'(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}')^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu})\right\}\end{aligned} \tag{2}$$

となる．すなわち，$\boldsymbol{z}$ はやはり多変量正規分布し，その平均は $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu}$，共分散は $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}'$ である．

以上の結果から，定理13.1あるいは定理13.2によって，$z_1, \cdots, z_p$ の任意の1個あるいは任意の r 個 $(r<p)$ の z_i に関する周辺分布が多変量正規分布することがすぐさまいえる．そこで上の結果も含めて次のような2つの定理にまとめておこう．まず定理13.1より

3)　非特異行列によるこのような1次変換を正則1次変換という．

〔定理 13.6〕　$y_1, \cdots, y_p$ が平均 $\boldsymbol{\mu}$，共分散 $\boldsymbol{\Sigma}$ の多変量正規分布にしたがうとき，$y_1, \cdots, y_p$ の任意の1次形式 $a_1y_1+\cdots+a_py_p$ は単一変量正規分布にしたがい，その平均は $a_1\mu_1+\cdots+a_p\mu_p$，分散は $\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}a_ia_j\sigma_{ij}$ である．

分散が $\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}a_ia_j\sigma_{ij}$ になることは(2)における $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}'$ の第 i 対角要素が $\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}a_{il}a_{ik}\sigma_{lk}$ になることからいえる．

また定理13.2より

〔定理 13.7〕　p 次列ベクトル $\boldsymbol{y}$ が平均 $\boldsymbol{\mu}$，共分散 $\boldsymbol{\Sigma}$ で正規分布するとき，もし $\boldsymbol{B}$ が位 $r(r\leq p)$ の $r\times p$ 行列ならば，r 次列ベクトル $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$ は平均 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\mu}$，共分散 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{B}'$ で正規分布する．

共分散が $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{B}'$ になることは $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\\\boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}$，ただし $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{B}$ として，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}'=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}_1' & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}_2'\\\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}_1' & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}_2'\end{bmatrix}$ となることから明らかである．

$y_1, y_2, \cdots, y_p$ が平均0，分散 σ^2 の正規分布からの大きさ p の無作為標本の場合，換言すれば，$y_1, y_2, \cdots, y_p$ が相互に独立にそれぞれ $N(0, \sigma^2)$ にしたがうとき，$y_1, \cdots, y_p$ は多変量正規分布 $N(\boldsymbol{o}, \sigma^2\boldsymbol{I})$ にしたがっているともいえる．この場合次の定理が重要である．

〔定理 13.8〕　$\boldsymbol{y}$ が $N(\boldsymbol{o}, \sigma^2\boldsymbol{I})$ にしたがうとき，$\boldsymbol{C}$ を直交行列として $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ なる1次変換(直交変換)を行なうならば，$\boldsymbol{z}$ はやはり $N(\boldsymbol{o}, \sigma^2\boldsymbol{I})$ にしたがう．

(証明)　定理13.7により $\boldsymbol{z}$ は平均 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}$，共分散 $\boldsymbol{C}\sigma^2\boldsymbol{I}\boldsymbol{C}'=\sigma^2\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'=\sigma^2\boldsymbol{I}$ の正規分布にしたがう(証明終り)．なお例題5.2.1はこの $p=2$ の場合である．

演習問題

1　$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ からの無作為標本とするとき，$z=\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ はどのような分布にしたがうか．ただし $a_1, \cdots, a_n$ は一定値とする．

2　y_1, y_2, y_3 が前節演習問題2の結合分布にしたがうとき

(a)　$z_1=y_1+y_2+y_3$ はどのような分布にしたがうか．

(b)　$z_2=y_1-y_2+y_3$ とするとき，z_2 と(a)の z_1 とはどのような結合分布にしたがうか．

13.4　非心カイ自乗分布

13.4.1　非心カイ自乗分布の導出

カイ自乗分布は平均0，分散1の正規分布にしたがって相互に独立に分布する変数の平方和の分布であった．これから説明する**非心カイ自乗分布**(non-central chi-square distribution)はカイ自乗分布の拡張である．[4]

p 次列ベクトル $\boldsymbol{y}$ が $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{I})$ にしたがって分布するものとしよう．$\boldsymbol{C}$ をその第1行の要素が

$$c_{1j}=\frac{\mu_j}{\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\mu}}} \qquad j=1, \cdots, p \tag{1}$$

である直交行列としよう．そうすると $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ は $N(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{I})$ にしたがって分布する．ただし $\delta=\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\mu}}$ として

$$\boldsymbol{\lambda}=\begin{bmatrix}\delta\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \tag{2}$$

である．なぜなら，定理13.7により $\boldsymbol{z}$ の平均は $\boldsymbol{C}\boldsymbol{\mu}$，共分散は $\boldsymbol{C}\boldsymbol{I}\boldsymbol{C}'=\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'=\boldsymbol{I}$ である．そして直交行列の定義(12.5.2)により，$\sum_{j=1}^{p} c_{ij}c_{kj}=0$ がすべての i, k $(i \neq k)$ について成立しなければならないが，c_{1j}, $j=1, \cdots, p$, は(1)に示されている値であるから $i\neq 1$ について $\sum_j c_{1j}c_{ij}=(1/\delta)\sum_j \mu_j c_{ij}=0$ でなければならない．それゆえ $i\neq 1$ については $\lambda_i=\sum_j c_{ij}\mu_j=0$ となる．

4)　非心カイ自乗分布と区別して，カイ自乗分布を**有心カイ自乗分布**(central chi-square distribution)と呼ぶことがある．

さてこのとき $w=z_2^2+\cdots+z_p^2$ は自由度 $p-1$ のカイ自乗分布にしたがう(定理6.1)．また z_1 と w とは統計的に独立である．よって z_1 と w の結合密度は((6.1.4)式参照)

$$f(z_1, w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z_1-\delta)^2}\cdot\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}\left(\frac{w}{2}\right)^{\frac{p-1}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}w}$$

$$=Ke^{-\frac{1}{2}(\delta^2+z_1^2+w)}w^{\frac{1}{2}(p-3)}e^{\delta z_1}$$

ただし $K=\{2^{p/2}\sqrt{\pi}\,\Gamma[(p-1)/2]\}^{-1}$．$e^{\delta z_1}$ はマクローリン展開すれば

$$e^{\delta z_1}=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\delta^\alpha z_1^\alpha}{\alpha!}$$

であるから

$$f(z_1, w)=Ke^{-\frac{1}{2}(\delta^2+z_1^2+w)}w^{\frac{1}{2}(p-3)}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\delta^\alpha z_1^\alpha}{\alpha!} \tag{3}$$

となる．次に $v=z_1^2+w=\sum_{i=1}^{p} z_i^2=\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}=\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}$ なる v を定義し，z_1 と v との結合密度関数 $g(z_1, v)$ を求めると，

$$z_1=z_1$$

$$w=v-z_1^2$$

より変換のヤコビアンは

$$J=\frac{\partial(z_1, w)}{\partial(z_1, v)}=\begin{vmatrix}1 & 0\\-2z_1 & 1\end{vmatrix}=1 \tag{4}$$

であるから

$$g(z_1, v)=Ke^{-\frac{1}{2}(\delta^2+v)}(v-z_1^2)^{\frac{1}{2}(p-3)}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\delta^\alpha z_1^\alpha}{\alpha!} \tag{5}$$

となる．さらに $u=z_1/\sqrt{v}$ とするとき，u と v の結合密度 $h(u, v)$ は

$$J=\frac{\partial(z_1, v)}{\partial(u, v)}=\begin{vmatrix}\sqrt{v} & \frac{1}{2}\frac{u}{\sqrt{v}}\\0 & 1\end{vmatrix}=\sqrt{v} \tag{6}$$

より

$$h(u, v)=Ke^{-\frac{1}{2}(\delta^2+v)}v^{\frac{1}{2}(p-2)}(1-u^2)^{\frac{1}{2}(p-3)}\sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{\delta^\alpha v^{\alpha/2}u^\alpha}{\alpha!} \tag{7}$$

となる．ここで u に関し積分して v の結合周辺密度をつくる．v を与えたとき

の z_1 の動く範囲は $-\sqrt{v}$ から $\sqrt{v}$ までであるから，$u(=z_1/\sqrt{v})$ の動く範囲は -1 から 1 までである．そこで(7)において α が奇数の場合

$$(1-u^2)^{\frac{1}{2}(p-3)}u^{\alpha} \tag{8}$$

は u に関する奇関数[5] であるから u に関するその積分は0となる．また α が偶数の場合は $\alpha=2\beta$ とおけば

$$\int_{-1}^{1}(1-u^2)^{\frac{1}{2}(p-3)}u^{2\beta}du=2\int_0^1(1-u^2)^{\frac{1}{2}(p-3)}u^{2\beta}du$$

$$=\int_0^1(1-x)^{\frac{1}{2}(p-3)}x^{\beta-\frac{1}{2}}dx \qquad [u=\sqrt{x}\ \text{とおく}] \tag{9}$$

が得られる．

ここで，議論を中断してベータ関数の説明をしよう．

2つのガンマ関数((6.1.5)式参照)の積は

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^{\infty}u^{x-1}e^{-u}du\int_0^{\infty}v^{y-1}e^{-v}dv$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}u^{x-1}v^{y-1}e^{-(u+v)}dudv \tag{10}$$

である．ここで

$$w=\frac{u}{u+v}$$

なる変換をする．すなわち $u=wv/(1-w)$，$du=vdw/(1-w)^2$．$0<u<\infty$，$0<v<\infty$ だから，w は0から1までを動く．したがって

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^{\infty}\int_0^1\left(\frac{wv}{1-w}\right)^{x-1}v^{y-1}e^{-\frac{v}{1-w}}\frac{v}{(1-w)^2}dwdv$$

となる．さらに v を

$$v=(1-w)s \tag{11}$$

によりおき換える．$dv=(1-w)ds$ より

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^{\infty}\int_0^1 w^{x-1}(1-w)^{y-1}s^{x+y-1}e^{-s}dwds$$

$$=\int_0^{\infty}s^{x+y-1}e^{-s}ds\cdot\int_0^1 w^{x-1}(1-w)^{y-1}dw$$

5)　x の関数 $f(x)$ で $f(-x)=f(x)$ であるものを偶関数，$f(-x)=-f(x)$ であるものを奇関数と呼ぶ．

$$=\Gamma(x+y)\int_0^1 w^{x-1}(1-w)^{y-1}dw \tag{12}$$

これより

$$\int_0^1 w^{x-1}(1-w)^{y-1}dw=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{13}$$

という関係を得る．$\int_0^1 w^{x-1}(1-w)^{y-1}dw$ は x と y の関数であり，これをベータ関数(beta function)と呼び，$B(x, y)$ で表わすことになっている．

さてもとに戻って(9)の最右辺はベータ関数であるから

$$\int_{-1}^{1}(1-u^2)^{\frac{1}{2}(p-3)}u^{2\beta}du=B\left(\beta+\frac{1}{2},\ \frac{p-1}{2}\right)$$

$$=\frac{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\beta+\frac{p}{2}\right)} \tag{14}$$

かくして v の密度関数を $f(v)$ と書けば，(7)より

$$f(v)=\frac{1}{2^{p/2}\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\delta^2+v)}v^{\frac{p}{2}-1}\sum_{\beta=0}^{\infty}\frac{\delta^{2\beta}v^{\beta}}{(2\beta)!}\frac{\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\beta+\frac{p}{2}\right)} \tag{15}$$

となる．この $f(v)$ を自由度 p，非心度パラメータ δ^2 の非心カイ自乗分布(noncentral chi-square distribution with p degrees of freedom and noncentrality parameter δ^2)の密度関数という．

〔定理 13.9〕　p 次列ベクトル $\boldsymbol{y}$ が平均 $\boldsymbol{\mu}$，共分散 $\boldsymbol{I}$ の正規分布にしたがうとき，平方和 $v=\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}$ は自由度 p で非心度パラメータ $\delta^2=\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\mu}$ の非心カイ自乗分布にしたがい，その密度は(15)で与えられる．

自由度 p，非心度パラメータ δ^2 の非心カイ自乗分布を $C'(p, \delta^2)$ という記号で表わすことにする．$\delta^2=0$ したがって $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_p=0$ の場合非心カイ自乗分布は，自由度 p のカイ自乗分布に当然一致する．

定理 13.9 の系として次がいえる．

〔定理 13.10〕　p 次列ベクトル $\boldsymbol{y}$ が $N(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2\boldsymbol{I})$ にしたがうとき，$\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}/\sigma^2$ は非心カイ自乗分布 $C'(p, \delta^2)$，ただし $\delta^2=\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\mu}/\sigma^2$，にしたがう．

これは$(1/\sigma)y$ が $N((1/\sigma)\mu,\ I)$ にしたがうことからただちに得られる.

13.4.2　2次形式統計量の分布

次の定理は定理13.9, 定理13.10をその特殊ケースとして含んでいる.

〔定理 13.11〕 列ベクトル y が $N(\mu,\ \sigma^2 I)$ にしたがって分布するとき, 2次形式 $y'Ay/\sigma^2$ が非心カイ自乗分布 $C'(m,\ \delta^2)$, ただし $\delta^2=\mu'A\mu/\sigma^2$, にしたがって分布するための必要十分条件は$A$が位$m$のべき等行列であることである.

(証明) 十分条件の証明だけ行ない, 必要条件のそれは省略する.[6] もしAが位mのp次べき等行列ならば,

$$C'AC=\begin{bmatrix} I_m & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

のごとく対角化する直交行列Cが存在する((12.5.31)式参照). このCによって $z=C'y$ なるp次列ベクトルを定義すると

$$y'Ay=z'C'ACz=z_1'z_1 \tag{16}$$

となる. ただし z_1 は z の最初の m 個の要素からなる列ベクトル. 定理13.7によって, z は平均$C'\mu$, 共分散 $C'\sigma^2 IC=\sigma^2 C'C=\sigma^2 I$ の正規分布にしたがう. そこで列ベクトル $C'\mu$ の最初のm個の要素からなるベクトルを μ_1^* とすれば, z_1 は $N(\mu_1^*,\ \sigma^2 I_m)$ にしたがって分布する. それゆえ定理13.10より $z_1'z_1/\sigma^2=\sum_{i=1}(z_i/\sigma)^2$ は自由度 m, 非心度パラメータ $\mu_1^{*\prime}\mu_1^*/\sigma^2$ の非心カイ自乗分布にしたがう. 一方 $\mu^*=C'\mu$ とすれば $\mu'A\mu=\mu^{*\prime}C'AC\mu^*=\mu_1^{*\prime}\mu_1^*$ である. よって $z_1'z_1/\sigma^2$ は非心カイ自乗分布 $C'(m,\ \delta^2)$, ただし $\delta^2=\mu'A\mu/\sigma^2$, にしたがって分布する(証明終り).

2次形式統計量間の統計的独立性に関して次の2つの定理を述べておく.

〔定理 13.12〕 (坂元-クレイグ (Craig) の定理) n次列ベクトル y が $N(\mu,\ \sigma^2 I)$ にしたがって分布するとき, 2つの2次形式統計量 $y'Ay$, $y'By$ が統計的に独立であるための必要十分条件は

6) F.A. Graybill, *An Introduction to Linear Statistical Models*, Vol. I, McGraw-Hill, 1961, p.82 参照.

$$AB=O \tag{17}$$

となることである.

〔定理 13.13〕 n次列ベクトルyは $N(\mu,\ \sigma^2 I)$ にしたがって分布し, $y'y=\sum_{i=1}^{m} y'A_iy$ のごとく分割できるとする. また A_i の位を n_i とする. このとき $y'A_iy/\sigma^2(i=1,\ \cdots,\ m)$ が相互に独立に各々非心カイ自乗分布 $C'(n_i,\ \delta_i^2)$, ただし $\delta_i^2=\mu'A_i\mu/\sigma^2$, にしたがって分布するための必要十分条件は, 次の3つの条件の中のいずれか1つが成立することである.

(i)　$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_m$ がすべてべき等行列であること.

(ii)　すべての $i,\ j$, ただし $i\neq j$, について $A_iA_j=O$ であること.

(iii)　$\sum_{i=1}^{m} n_i=n$ すなわち

$$\sum_{i=1}^{m}\rho(A_i)=\rho\left(\sum_{i=1}^{m}A_i\right) \tag{18}$$

これらの定理の証明はここでは述べない.[7] なお定理13.13は, $\mu=o$ かつ条件(iii)のみ採択のとき, コクラン-フィッシャー(Cochran-Fisher)の定理と呼ばれる.

最後に2次形式統計量と1次形式統計量の統計的独立性に関する重要な定理を述べる.

〔定理 13.14〕 n次列ベクトル y が $N(\mu,\ \sigma^2 I)$ にしたがって分布するとする. またBを $m\times n$ 行列, Aをn次対称行列とする. このとき, 1次形式 By が2次形式 $y'Ay$ と統計的に独立であるための十分条件は

$$BA=O \tag{19}$$

である.

(証明) Aの位をrとしてまず $r<n$ の場合を考えよう. Aは対称行列だからAを次のように対角化する直交行列Cが存在する.

$$C'AC=D=\begin{bmatrix} D_1 & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

ただし D_1 はどの対角要素も0ではないr次の対角行列. いま $z=C'y$ とお

7) Graybill, 前掲書, pp.83-86 参照.

けば，z は $N(C'\mu, \sigma^2 I)$ にしたがって分布する(定理 13.8 参照)．$H=BC$ とおくと

$$O=BA=BAC=BCC'AC=HD$$
$$=\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 & O \\ O & O \end{bmatrix} \tag{20}$$

となる．これは

$$H_{11}D_1=O \text{ かつ } H_{21}D_1=O$$

を意味する．それゆえ $H_{11}=O$, $H_{21}=O$ であるから，Hは

$$H=\begin{bmatrix} O & H_{12} \\ O & H_{22} \end{bmatrix}=[O \quad H_2]$$

ただし $H_2=\begin{bmatrix} H_{12} \\ H_{22} \end{bmatrix}$．ところで

$$By=BCC'y=Hz=[O \ H_2]\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}=H_2 z_2 \tag{21}$$

であり，また

$$y'Ay=y'CC'ACC'y=z'Dz$$
$$=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}'\begin{bmatrix} D_1 & O \\ O & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}=z_1'D_1 z_1 \tag{22}$$

となる．すなわち By は z_2 のみに依存し，$y'Ay$ は z_1 のみに依存する．z の n 個の要素は統計的に独立だから，z_1 と z_2 とは統計的に独立．したがって By と $y'Ay$ とは統計的に独立である．次に $r=n$ のときには，$H=O$ となるから(21)で $By=o$ となる．すなわち1次形式統計量 By は一定値 o であるから当然 $y'Ay$ と統計的に独立である(証明終り)．

この定理の重要な応用を次の例題で述べよう．

例題 13.4.1　$x_1, \cdots, x_n$ を正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ からの無作為標本とする．このとき標本平均 $\bar{x}=(1/n)\sum x_i$ と標本分散 $s^2=\sum(x_i-\bar{x})^2/(n-1)$ とは統計的に独立である．これを証明する．

標本平均 $\bar{x}$ は

$$\bar{x}=\begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{23}$$

と表わせる．また標本分散 s^2 は

$$s^2=[x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]\frac{1}{n-1}\begin{bmatrix} 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{24}$$

と書ける．明らかに(24)の行列は対称である．また

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}\frac{1}{n-1}\begin{bmatrix} 1-\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n} \end{bmatrix}=\frac{1}{n-1}[0 \ \cdots \ 0]=o'$$

となる．それゆえ，定理 13.14 により1次形式統計量 $\bar{x}$ と2次形式統計量 s^2 とは統計的に独立である．

以上は 6.1.5 で保留にしておいた命題の証明である．

演　習　問　題

1　y_1, y_2, y_3 が平均2，分散3の正規分布からの無作為標本とするとき，$(y_1^2+y_2^2+y_3^2)/3$ はどのような分布にしたがうか．

2　n 次列ベクトル y が $N(o, I)$ にしたがって分布するとき

(a)　$Q_1=y'X(X'X)^{-1}X'y$

(b)　$Q_2=y'[I-X(X'X)^{-1}X']y$

の分布を導け．ただし X は位 p の $n\times p$ の一定値の行列($n\geq p$)．

3　p 次列ベクトル y が多変量正規分布 $N(\mu, \Sigma)$ にしたがって分布するとき，次を証明せよ．ただし Σ は非特異行列とする．

(a)　この多変量正規分布の2次形式 $Q=(y-\mu)'\Sigma^{-1}(y-\mu)$ がカイ自乗分布 $C(p)$ にしたがって分布すること．

(b)　$Q=y'\Sigma^{-1}y$ が非心カイ自乗分布 $C'(p, \delta^2)$，ただし $\delta^2=\mu'\Sigma^{-1}\mu$，にしたがって分布すること．

(ヒント：$\boldsymbol{\Sigma}$ は $C'\boldsymbol{\Sigma}C=\Lambda$ のように対角化される(定理12.22)．このとき $z=\Lambda^{-\frac{1}{2}}C'(y-\mu)$ は $N(o, I)$，$u=\Lambda^{-\frac{1}{2}}C'y$ は $N(\mu, I)$ にしたがう．)

13.5　分散分析の定理の証明

ここで，第11章分散分析において与えた**定理11.1**，**定理11.2**の証明を行なう．

13.5.1　1元配置模型

定理11.1をもう一度述べれば，観測変量 y_{ij} について

$$y_{ij}=\beta_0+\beta_i+u_{ij} \qquad i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n_i;\ \sum_{i=1}^{m}n_i=n \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m}n_i\beta_i=0 \tag{2}$$

を仮定し，かつ $u_{ij}(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n_i)$ は相互に独立に $N(0,\sigma^2)$ にしたがうとする場合に(1元配置模型)，$Q=\sum_i\sum_j u_{ij}^2$，$Q_1=\sum_i\sum_j(y_{ij}-\bar{y}_i)^2$，$Q_2=\sum_i n_i(\bar{y}_i-\beta_i-\bar{y})^2$，$Q_3=n(\bar{y}-\beta_0)^2$ とおけば

$$Q=Q_1+Q_2+Q_3 \tag{3}$$

が成立し，Q_1/σ^2，Q_2/σ^2，Q_3/σ^2 は，相互に独立に，それぞれカイ自乗分布 $C(n-m)$，$C(m-1)$，$C(1)$ にしたがって分布するというものであった．

この定理を証明しよう．次のような行列を定義する．

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} y_{11}\\ \vdots\\ y_{1n_1}\\ y_{21}\\ \vdots\\ y_{2n_2}\\ \vdots\\ y_{m1}\\ \vdots\\ y_{mn_m}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} u_{11}\\ \vdots\\ u_{1n_1}\\ u_{21}\\ \vdots\\ u_{2n_2}\\ \vdots\\ u_{m1}\\ \vdots\\ u_{mn_m}\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_m\end{bmatrix} \tag{4}$$

ここで $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{u}$ は n 次列ベクトル，X は $n\times(m+1)$ 行列，$\boldsymbol{\beta}$ は $(m+1)$ 次列ベクトルである．

そうすると，(1)は

$$\boldsymbol{y}=X\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{u} \tag{5}$$

と書き直せる．$\boldsymbol{u}$ は $N(o, \sigma^2I)$ にしたがう．[8]

さて，次のような行列を考える．

$$H_1=\begin{bmatrix}
\frac{1}{n_1} & \cdots & \frac{1}{n_1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
\frac{1}{n_1} & \cdots & \frac{1}{n_1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\
0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n_2} & \cdots & \frac{1}{n_2} & \cdots & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n_2} & \cdots & \frac{1}{n_2} & \cdots & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \frac{1}{n_m} & \cdots & \frac{1}{n_m}\\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \frac{1}{n_m} & \cdots & \frac{1}{n_m}
\end{bmatrix} \tag{6}$$

あるいは $H_1^{(i)}(i=1,\cdots,m)$ をその要素がすべて $1/n_i$ の n_i 次の正方行列とすれば

$$H_1=\begin{bmatrix} H_1^{(1)} & O & \cdots & O\\ O & H_1^{(2)} & \cdots & O\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ O & O & \cdots & H_1^{(m)}\end{bmatrix} \tag{6$'$}$$

なる n 次正方行列である．$H_1^{(i)}(i=1,\cdots,m)$ はべき等行列であることは容易に確かめられる．したがって H_1 もべき等行列である．

ところで

$$\begin{bmatrix} y_{i1}-\bar{y}_i\\ y_{i2}-\bar{y}_i\\ \vdots\\ y_{in_i}-\bar{y}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-\frac{1}{n_i} & -\frac{1}{n_i} & \cdots & -\frac{1}{n_i}\\ -\frac{1}{n_i} & 1-\frac{1}{n_i} & \cdots & -\frac{1}{n_i}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\frac{1}{n_i} & -\frac{1}{n_i} & \cdots & 1-\frac{1}{n_i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{i1}\\ y_{i2}\\ \vdots\\ y_{in_i}\end{bmatrix}$$

$$=(I_{n_i}-H_1^{(i)})\boldsymbol{y}_i \qquad i=1,\cdots,m \tag{7}$$

ただし $\boldsymbol{y}_i'=\begin{bmatrix} y_{i1}\\ \vdots\\ y_{in_i}\end{bmatrix}$，であるから

8)　この模型はちょうど16.2の正規回帰模型と同様であるが，ただ1つ異なる点は(4)のXの位が $m+1(\leqq n)$ より小さいことである(Xの第2列から第$m+1$列まで加えれば第1列になる)．そのため逆行列 $(X'X)^{-1}$ が存在しない．

$$Q_1=\sum_i\sum_j(y_{ij}-\bar{y}_i)^2=\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_1)'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_1)\boldsymbol{y}$$

となることは容易に確かめられる．ここで$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_1)$もやはりべき等行列となっていることが確かめられるから，上の式は

$$Q_1=\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_1)\boldsymbol{y} \tag{8}$$

となる．ところで行列$\boldsymbol{X}$の構造から

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_1)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}_{n,\,m+1} \tag{9}$$

となることは明らかであるから，(8)より

$$\begin{aligned}Q_1&=(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_1)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})\\&=\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_1)\boldsymbol{u}\end{aligned} \tag{10}$$

と書ける．

また，$\boldsymbol{H}_2$をそのすべての要素が$1/n$であるn次正方行列とすると

$$\begin{bmatrix}\bar{y}_1-\beta_1-\bar{\bar{y}}\\ \vdots\\ \bar{y}_1-\beta_1-\bar{\bar{y}}\\ \vdots\\ \bar{y}_m-\beta_m-\bar{\bar{y}}\\ \vdots\\ \bar{y}_m-\beta_m-\bar{\bar{y}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{n_1}-\frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n_1}-\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \frac{1}{n_1}-\frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n_1}-\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n_m}-\frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n_m}-\frac{1}{n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n_m}-\frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n_m}-\frac{1}{n}\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}y_{11}-\sum\beta_jx_{1j}\\ \vdots\\ y_{1n_1}-\sum\beta_jx_{1j}\\ \vdots\\ y_{m1}-\sum\beta_jx_{mj}\\ \vdots\\ y_{mn_m}-\sum\beta_jx_{mj}\end{bmatrix}=(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}) \tag{11}$$

である．ただし$\sum$はjについての0からmまでの和を表わす．ここで$\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2$もやはりべき等行列であることが容易に確かめられるから

$$\begin{aligned}Q_2&=\sum_i n_i(\bar{y}_i-\beta_i-\bar{\bar{y}})^2\\&=(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)'(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})\\&=(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})\\&=\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)\boldsymbol{u}\end{aligned} \tag{12}$$

となる．

最後に

$$\begin{aligned}\bar{\bar{y}}-\beta_0&=\frac{1}{n}\sum_i\sum_j(y_{ij}-\beta_0-\beta_i)\\&=\frac{1}{n}\sum_i\sum_j u_{ij}=\sum_i\sum_j\frac{1}{n}u_{ij}\end{aligned}$$

であり，かつ$\boldsymbol{H}_2$はべき等行列であるから

$$Q_3=n(\bar{\bar{y}}-\beta_0)^2=\boldsymbol{u}'\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{u} \tag{13}$$

を得る．

以上の(10)，(12)，(13)の結果と，(3)より，$Q=\sum\sum u_{ij}^2$は

$$Q=\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_1)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}'\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{u} \tag{14}$$

のように$\boldsymbol{u}$に関する3つの2次形式の和に分割されたわけである．ここで$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_1$，$\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2$，$\boldsymbol{H}_2$はべき等行列であるから，その位はそれぞれのトレースに等しい．これより

$$\left.\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_1)&=n-m\\ \rho(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)&=m-1\\ \rho(\boldsymbol{H}_2)&=1\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

であることが分かる．かくして定理13.13の条件(i)あるいは(iii)が満たされるから，Q_1/σ^2，Q_2/σ^2，Q_3/σ^2は相互に独立にそれぞれカイ自乗分布$C(n-m)$，$C(m-1)$，$C(1)$にしたがって分布することが分かる．

13.5.2　2元配置模型

定理11.2は，観測変量y_{ij}について

$$y_{ij}=\beta_0+\beta_{i\cdot}+\beta_{\cdot j}+u_{ij}\qquad i=1,\,\cdots,\,m;\ j=1,\,\cdots,\,p;\ mp=n \tag{16}$$

$$\sum_i\beta_{i\cdot}=\sum_j\beta_{\cdot j}=0 \tag{17}$$

を仮定し，$u_{ij}(i=1,\,\cdots,\,m;\ j=1,\,\cdots,\,p)$は相互に独立に$N(0,\,\sigma^2)$にしたがうとき(2元配置模型)，$Q=\sum_i\sum_j u_{ij}^2$，$Q_1=\sum\sum(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot j}+\bar{\bar{y}})^2$，$Q_2=p\sum_i(\bar{y}_{i\cdot}-\beta_{i\cdot}-\bar{\bar{y}})^2$，$Q_3=m\sum_j(\bar{y}_{\cdot j}-\beta_{\cdot j}-\bar{\bar{y}})^2$，$Q_4=n(\bar{\bar{y}}-\beta_0)^2$とおけば

$$Q=Q_1+Q_2+Q_3+Q_4 \tag{18}$$

が成立し，Q_1/σ^2，Q_2/σ^2，Q_3/σ^2，Q_4/σ^2は，相互に独立に，それぞれカイ自乗分布$C(n-m-p+1)$，$C(m-1)$，$C(p-1)$，$C(1)$にしたがって分布するというものである．

この定理は定理 11.1 とほとんど同じ形で証明できる．

$$
\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1p} \\ \vdots \\ y_{m1} \\ \vdots \\ y_{mp} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u}=\begin{bmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{1p} \\ \vdots \\ u_{m1} \\ \vdots \\ u_{mp} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_{1\cdot} \\ \vdots \\ \beta_{m\cdot} \\ \beta_{\cdot 1} \\ \vdots \\ \beta_{\cdot p} \end{bmatrix}
$$

$$
X=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{19}
$$

とおけば(16)は

$$
\boldsymbol{y}=X\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{u} \tag{20}
$$

の形に書け，$\boldsymbol{u}$ は $N(o,\ \sigma^2 I)$ にしたがう．そこで H_1^* をすべての要素が $1/p$ からなる p 次正方行列，また H_2^* を $(1/m)I_m$，ただし I_m はm次単位行列として

$$
H_1=\begin{bmatrix} H_1^* & O & \cdots & O \\ O & H_1^* & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & H_1^* \end{bmatrix},\quad H_2=\begin{bmatrix} H_2^* & H_2^* & \cdots & H_2^* \\ H_2^* & H_2^* & \cdots & H_2^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_2^* & H_2^* & \cdots & H_2^* \end{bmatrix}
$$

なる2つの $n(=mp)$ 次正方行列を定義する．またすべての要素が $1/n$ である n 次正方行列を H_3 とする．このとき

$$
\left.\begin{aligned} Q_1&=\boldsymbol{u}'(I-H_1-H_2+H_3)\boldsymbol{u} \\ Q_2&=\boldsymbol{u}'(H_1-H_3)\boldsymbol{u} \\ Q_3&=\boldsymbol{u}'(H_2-H_3)\boldsymbol{u} \\ Q_4&=\boldsymbol{u}'H_3\boldsymbol{u} \end{aligned}\right\} \tag{21}
$$

となることを，前項と同様な議論により導くことができる(読者みずから確かめてみよ)．また $I-H_1-H_2+H_3$, H_1-H_3, H_2-H_3, H_3 はすべてべき等行列であり，その位はそれぞれ $n-m-p+1$, $m-1$, $p-1$, 1 に等しいことが確か

められる．そこで定理 13.13 によって，Q_1/σ^2, Q_2/σ^2, Q_3/σ^2, Q_4/σ^2 は，相互に独立に，それぞれカイ自乗分布 $C(n-m-p+1)$, $C(m-1)$, $C(p-1)$, $C(1)$ にしたがって分布する．

第 14 章

母数の推定 II

14.1 十分統計量

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を密度関数 $f(x;\theta)$ によって表わされる母集団からの無作為標本(以下たんに密度関数 $f(x;\theta)$ からの無作為標本と呼ぶ)としよう.[1] ただし θ は密度関数を記述する母数(パラメータ)である. 母数が 2 個以上ある場合には 1 個の母数(これを θ とする)以外は既知であるとする. 未知母数 θ が属している可能性のある集合を Ω で表わし母数空間(parameter space)と呼ぶ. たとえば正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ において μ が未知母数であれば $\Omega=\{\mu: -\infty<\mu<\infty\}$, σ^2 が未知母数であれば $\Omega=\{\sigma^2: 0<\sigma^2<\infty\}$ である.

さていま母数 θ の点推定を問題にしているとしよう. そこでどのような推定量を選ぶべきかが問題となるとき, 与えられている標本$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$から, 母数 θ に関する情報をなるべく多く引き出すことのできるような推定方法したがって推定量を選ぶのがよいと, 直観的に考えられる. 標本から θ に関する情報をあますところなく引き出している統計量を**十分統計量**(sufficient statistic)と呼ぶ. 統計量であるからかならずしも推定量の形になっているとは限らない. より正確に定義すれば次のようになる.

〔定義〕 $x_1, \cdots, x_n (n\geqq 2)$ を密度関数 $f(x;\theta)(\theta\in\Omega)$ からの無作為標本とする. $x_1, \cdots, x_n$ に基づく関数的に独立な n 個の統計量 $t, t_1, \cdots, t_{n-1}$ があって, $t_1, \cdots, t_{r-1} (r=2, \cdots, n)$ をどのように選んでも, t が与えられたときの $t_1, \cdots, t_{r-1}$ の条件付結合密度関数 $h(t_1, \cdots, t_{r-1}|t)$ が母数 θ に依存しないとき, t は θ に対する十分統計量であるといわれる.[2]

1) 煩雑さを避けるために $f(x;\theta)$ を密度関数とするが, この章における結論のすべては $f(x;\theta)$ が確率関数の場合にも成立することが容易に示せる.

この定義から, たとえば t_1 の条件付密度 $h_1(t_1|t)$ も θ に依存しないことがいえる. すなわち十分統計量が与えられれば他のどのような統計量も θ に関する知識になんら貢献しないのである. 任意の統計量 t が十分統計量であるかどうかの判定には次の定理が役に立つ.

〔定理 14.1〕 (フィッシャー-ネイマンの分解定理) $x_1, \cdots, x_n$ を密度関数 $f(x;\theta), \theta\in\Omega$ からの無作為標本とし, $f(x_1;\theta)\cdots f(x_n;\theta)$ を $f(x_1, \cdots, x_n;\theta)$ と略記する. このとき統計量 t が θ に対する十分統計量であるための必要十分条件は, 標本の結合密度関数が, すべての $x_1, \cdots, x_n$ に対して

$$f(x_1, \cdots, x_n;\theta)=k(t;\theta)h(x_1, \cdots, x_n) \tag{1}$$

のように分解されることである. ただし $k(t;\theta)$ は θ を含む t の関数で, $h(x_1, \cdots, x_n)$ は θ を含まない $x_1, \cdots, x_n$ の関数である.

(証明) (i) 十分: $t=t_1$ と書き, $x_1, \cdots, x_n$ の関数 $t_2, \cdots, t_n$ を追加し, 次のような $x_1, \cdots, x_n$ から $t_1, \cdots, t_n$ への 1 対 1 対応の変数変換を考える.

$$t_i=t_i(x_1, \cdots, x_n) \qquad i=1, \cdots, n \tag{2}$$

そしてその逆変換を

$$x_i=x_i(t_1, \cdots, t_n) \qquad i=1, \cdots, n \tag{3}$$

とする. この変換のヤコビアンを J で表わす. さて(1)の $x_1, \cdots, x_n$ を $t_1, \cdots, t_n$ の関数として表わし, 両辺に $|J|$ を乗ずれば

$$\begin{aligned} &f[x_1(t_1, \cdots, t_n), \cdots, x_n(t_1, \cdots, t_n)]|J| \\ &\quad =k(t_1;\theta)\cdot h[x_1(t_1, \cdots, t_n), \cdots, x_n(t_1, \cdots, t_n)]|J| \end{aligned} \tag{4}$$

となる. ところでこの左辺は $t_1, \cdots, t_n$ の密度関数にほかならない(5.2.2 参

2) この定義は M. G. Kendall & A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 2, 3rd edition, Griffin, 1973, pp. 22-23 による.

照)．これより $t_1(=t)$ の周辺密度 $g(t_1;\theta)$ を求めると

$$g(t_1;\theta)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f[x_1(t_1,\cdots,t_n),\cdots,x_n(t_1,\cdots,t_n)]|J|dt_2\cdots dt_n$$
$$=k(t_1;\theta)\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}h[x_1(t_1,\cdots,t_n),\cdots,x_n(t_1,\cdots,t_n)]|J|dt_2\cdots dt_n \tag{5}$$

となる．右辺の $(n-1)$ 重積分は明らかに θ を含まず t_1 のみの関数となる．これを $m(t_1)$ と書こう．したがって

$$g(t_1;\theta)=k(t_1;\theta)m(t_1) \tag{6}$$

と書ける．(4)と(6)より

$$h[x_1(t_1,\cdots,t_n),\cdots,x_n(t_1,\cdots,t_n)]|J|/m(t_1)$$
$$=\frac{f[x_1(t_1,\cdots,t_n),\cdots,x_n(t_1,\cdots,t_n)]|J|}{g(t_1;\theta)} \tag{7}$$

となるが，この右辺は t_1 が与えられたときの $t_2,\cdots,t_n$ の条件付結合密度関数にほかならない(3.6.3参照)．ところで左辺の $h[x_1(t_1,\cdots,t_n),\cdots,x_n(t_1,\cdots,t_n)]$ は仮定により θ を含まず，$|J|/m(t_1)$ もまた θ を含まないことは明らかだから，t_1 が与えられたときの任意の統計量 $t_2,\cdots,t_n$ の条件付結合密度は θ を含まないことになる．よって t_1 は定義によって θ に対する十分統計量である．

(ii)　必要：t の密度関数を $g(t;\theta)$ とする．いま $t_1=x_1,\cdots,t_{n-1}=x_{n-1}$ とおけば十分統計量の定義より，t を与えたときの $x_1,\cdots,x_{n-1}$ の条件付結合密度 $q(x_1,\cdots,x_{n-1}|t)$ は θ を含まない．$x_1,\cdots,x_{n-1}$，t の結合密度を $f(x_1,\cdots,x_{n-1},t;\theta)$ と書けば明らかに

$$q(x_1,\cdots,x_{n-1}|t)=\frac{f(x_1,\cdots,x_{n-1},t;\theta)}{g(t;\theta)}$$

である．これを書き換えれば

$$f(x_1,\cdots,x_{n-1},t;\theta)=g(t;\theta)\cdot q(x_1,\cdots,x_{n-1}|t) \tag{8}$$

ここで統計量 $t=t(x_1,\cdots,x_n)$ を x_n について解き，

$$\left.\begin{array}{l} x_n=x_n(t,x_1,\cdots,x_{n-1}) \\ x_i=x_i \qquad i=1,2,\cdots,n-1 \end{array}\right\} \tag{9}$$

のように変換し，(8)の両辺に変換のヤコビアンの絶対値 $|J|$ を掛けると

$$f(x_1,\cdots,x_{n-1},t(x_1,\cdots,x_n);\theta)|J|$$
$$=g(t;\theta)\cdot q(x_1,\cdots,x_{n-1}|t(x_1,\cdots,x_n))|J| \tag{10}$$

となる．(10)の左辺は $x_1,\cdots,x_n$ の結合密度であり，右辺の $q(x_1,\cdots,x_{n-1}|t(x_1,\cdots,x_n))|J|$ は θ を含まず $x_1,\cdots,x_n$ のみ関数である．それゆえ(10)は(1)の形になっている(証明終り)．

例題 14.1.1　$x_1,\cdots,x_n$ を $N(\mu,\sigma^2)$ からの無作為標本とする．ただし σ^2 は既知とする．このとき標本平均 $\bar{x}$ は母平均 μ に対する十分統計量である．

$x_1,\cdots,x_n$ の結合密度は

$$f(x_1,\cdots,x_n;\mu)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\{\sum(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\mu)^2\}\right]$$
$$=\left[\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\bar{x})^2\right\}\right]$$
$$\times\left[\exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-\mu)^2\right\}\right] \tag{11}$$

と変形できる．この最後の式の大括弧で囲まれた2つの式のうち最初のものは未知母数 μ を含まないから(1)の $h(x_1,\cdots,x_n)$ に対応し，2番目の式は $k(t;\mu)$ に対応する．よって**定理 14.1** により $\bar{x}$ は μ に対する十分統計量である．

例題 14.1.2　$x_1,\cdots,x_n$ を母数 p の2項母集団からの無作為標本とする．このとき標本の和 $\sum_{i=1}^{n}x_i$ は p に対する十分統計量である．なぜなら，2項母集団(例題 4.2.2参照)の確率関数は

$$f(x;p)=p^x(1-p)^{1-x} \qquad x=0,1 \tag{12}$$

だから，$x_1,\cdots,x_n$ の結合確率関数は

$$f(x_1,\cdots,x_n;p)=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i} \tag{13}$$

と書ける．$t=\sum_{i=1}^{n}x_i$ とおくと(13)は $k(t;p)=p^t(1-p)^{n-t}$ と $h(x_1,\cdots,x_n)=1$ という2つの関数に分解できた．よって**定理 14.1** により $\sum_{i=1}^{n}x_i$ は p に対する十分統計量である．

なお，θ に対する十分統計量 t の（θ を含まない）単調な関数を $z=\varphi(t)$ とすれば z もまた θ に対する十分統計量である．なぜなら z の密度関数は $r(z;\theta)=g(t;\theta)|dt/dz|$ であるから，これと $t_1=t$ と書き換えた（6）の関係から $k(t;\theta)=r(z;\theta)|d\varphi/dt|/m(t)$ となる．これより（1）は $f(x_1,\cdots,x_n;\theta)=r(z;\theta)\{|d\varphi/dt|h(x_1,\cdots,x_n)/m(t)\}$ となり，右辺｛　｝の中味は θ に依存しないからである．それゆえ，例題14.1.1で標本和 $\sum x_i$ は $n\bar{x}$ だから μ に対する十分統計量である．また例題14.1.2で標本における割合 $p'=\frac{1}{n}\sum x_i$ は p に対する十分統計量である．

演習問題

1　$x_1,\cdots,x_n$ はポアソン分布

$$f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\qquad x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{14}$$

からの無作為標本とするとき，$t=x_1+x_2+\cdots+x_n$ は λ の十分統計量であることを示せ．

14.2　有効推定量

14.2.1　クラメル-ラオの境界

7.5 で与えた定義によれば，$\hat{\theta}$ が θ の不偏推定量でかつ θ の他のどのような不偏推定量よりもその分散が小であれば，$\hat{\theta}$ は θ の有効推定量である．ところで，ある不偏推定量が有効推定量であるかどうかを判定するのは，この定義によれば他のあらゆる不偏推定量と比較しなければならないのだから容易ではない．そこで実用的な判定基準を与えるのが，次の定理によって与えられるクラメル-ラオの境界である．以下，対数は自然対数とする．

〔定理 14.2〕 $x_1,\cdots,x_n$ を密度関数 $f(x;\theta)$，$\theta\in\Omega$ からの無作為標本とし，$\hat{\theta}$ を θ の任意の不偏推定量とする．このとき，もし任意の $\theta\in\Omega$ に対して，積分

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\theta}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots\\&\qquad f(x_n;\theta)\,dx_1dx_2\cdots dx_n\\&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots f(x_n;\theta)\,dx_1dx_2\cdots dx_n\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

の θ に関する積分記号下の微分が可能であれば，[3] $\hat{\theta}$ の分散は

$$\sigma_{\hat{\theta}}^2\geqq\frac{1}{nE\left\{\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta)\right\}^2} \tag{2}$$

である．

（2）の右辺を**クラメル-ラオの境界** (Cramér-Rao bound) と呼び CRB で表わす．

それゆえ，その分散が CRB に一致すれば $\hat{\theta}$ は有効推定量である．しかしながらその逆は成立しない．

（証明）　いま $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$ を θ の不偏推定量とする．すると不偏推定量の定義から

$$\begin{aligned}\theta=&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\theta}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\cdots\\&f(x_n;\theta)\,dx_1dx_2\cdots dx_n\end{aligned} \tag{3}$$

定理の条件 θ に関する積分記号下の微分が可能であるから

$$\begin{aligned}1=&\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\theta}(x_1,\ \cdots,\ x_n)\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{f(x_i;\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}f(x_i;\theta)\right\}\\&f(x_1;\theta)\cdots f(x_n;\theta)\,dx_1\cdots dx_n\\=&\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\theta}(x_1,\ \cdots,\ x_n)\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i;\theta)\right\}f(x_1;\theta)\\&\cdots f(x_n;\theta)\,dx_1\cdots dx_n\end{aligned} \tag{4}$$

が成立する．最後の式は $\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)\sum\partial\log f(x;\theta)/\partial\theta$ の期待値を意味し

3)　たとえば（1）の第1式の積分記号下の微分が可能であるためには（i）確率ゼロの集合を除くすべての $x_1,\cdots,x_n$ および任意の θ に対して $\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i;\theta)$ が存在し，(ii) すべての $\theta\in\Omega_0$ に対して

$$\left|\hat{\theta}(x_1,\ \cdots,\ x_n)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i;\theta)\right|<G(x_1,\ \cdots,\ x_n)$$

が成立しかつ $E\{G(x_1,\cdots,x_n)|\theta\}$ が存在するような $G(x_1,\cdots,x_n)$ が存在すればよい．ただし Ω_0 は固定されている θ を含む開区間 (H. Cramér, *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press, 1946, p.68 および p.85 参照)．

ているから(4)は

$$1=E\left\{\hat{\theta}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i;\theta)\right\} \tag{4'}$$

とも書ける．

いま1の期待値を書き表わせば

$$E(1)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot f(x_1;\theta)\cdots f(x_n;\theta)\,dx_1\cdots dx_n=1 \tag{5}$$

である．定理の条件より θ に関する積分記号下の微分が可能であるから，θ に関して微分すると(5)の最後の2式は(4)と同じようにして

$$E\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i;\theta)\right\}=0 \tag{6}$$

となる．$v=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i;\theta)$ とおけば，(4′)，(6)より

$$\left.\begin{aligned}&E(\hat{\theta}v)=1\\&E(v)=0\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

を得たわけである．$\hat{\theta}$ と v との共分散は，

$$\mathrm{Cov}(\hat{\theta},v)=E[\{\hat{\theta}-E(\hat{\theta})\}\{v-E(v)\}]=E(\hat{\theta}v)=1 \tag{8}$$

となる（$E(v)=0$ だから）．そこで $\hat{\theta}$ と v の相関係数の自乗は

$$\rho_{\hat{\theta}v}^2=\frac{\{\mathrm{Cov}(\hat{\theta},v)\}^2}{\sigma_{\hat{\theta}}^2\sigma_v^2}=\frac{1}{\sigma_{\hat{\theta}}^2\sigma_v^2}$$

であるが，相関係数の性質より $\rho_{\hat{\theta}v}^2\leqq 1$ である((10.1.11)参照)から

$$\rho_{\hat{\theta}v}^2=\frac{1}{\sigma_{\hat{\theta}}^2\sigma_v^2}\leqq 1$$

したがって

$$\sigma_{\hat{\theta}}^2\geqq\frac{1}{\sigma_v^2} \tag{9}$$

が成立する．ところで(7)より $E(v)=0$ であるから

$$\sigma_v^2=E(v^2)=E\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i;\theta)\right\}^2 \tag{10}$$

であり，(9)は

$$\sigma_{\hat{\theta}}^2\geqq\frac{1}{E\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i;\theta)\right\}^2} \tag{11}$$

となる．ここで

$$q_i=\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i;\theta) \tag{12}$$

とおけば(11)は

$$\sigma_{\hat{\theta}}^2\geqq\frac{1}{E(\sum q_i)^2} \tag{13}$$

と書き直せる．ところで

$$\begin{aligned}E(\sum q_i)^2&=E\left(\sum_{i=1}^{n}q_i^2\right)+E\left(\sum_{i\neq j}q_iq_j\right)\\&=\sum_i E(q_i^2)+\sum_{i\neq j}E(q_iq_j)\end{aligned} \tag{14}$$

であるが，$i\neq j$ ならば q_i, q_j は統計的に独立だから $E(q_iq_j)=E(q_i)E(q_j)$ であり，また $E(q_i)$ は

$$\begin{aligned}E(q_i)&=E\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_i;\theta)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}f(x_i;\theta)\,dx_i\\&=\frac{d}{d\theta}\int_{-\infty}^{\infty}f(x_i;\theta)\,dx_i=\frac{d}{d\theta}(1)=0\end{aligned} \tag{15}$$

となる((6)を導き出したのとまったく同様)．また $E(q_1^2)=\cdots=E(q_n^2)=E\{\partial\log f(x;\theta)/\partial\theta\}^2$ であるから(14)より

$$E(\sum q_i)^2=nE\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta)\right\}^2 \tag{16}$$

となる．これを(13)に代入すれば(2)を得る(証明終り)．

(2)の境界は次のようにも書ける．(15)より

$$0=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}f(x_i;\theta)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{f(x;\theta)}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(x;\theta)\right\}\right]f(x;\theta)\,dx \tag{17}$$

を得るが，さらに積分記号下での微分が可能であれば($f(x;\theta)=f$ と略記する)

$$\begin{aligned}0&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left\{\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right\}\frac{\partial f}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f\right\}f\right]dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)^2+\frac{\partial^2\log f}{\partial\theta^2}\right\}f\,dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\log f}{\partial\theta}\right)^2 f\,dx+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2\log f}{\partial\theta^2}f\,dx\\&=E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f\right)^2+E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f\right)\end{aligned} \tag{18}$$

となる．よって(2)のクラメル-ラオの不等式は

$$\sigma_{\hat{\theta}}^2 \geqq \frac{1}{-nE\left\{\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x;\ \theta)\right\}} \tag{19}$$

のようにも書ける．

（2）または(19)の分母 $I(\theta)=nE\{\partial\log f(x;\ \theta)/\partial\theta\}=-nE\{\partial^2\log f(x;\ \theta)/\partial\theta^2\}$ は標本 $x_1, \cdots, x_n$ に含まれている θ に関するフィッシャーの情報量(amount of information)と呼ばれる．

例題 14.2.1　$x_1, \cdots, x_n$ を $N(\mu, \sigma^2)$ からの無作為標本とし，σ^2 は既知であり未知母数 μ は $-\infty<\mu<\infty$ とする．このとき μ に対する CRB は σ^2/n である．

x の密度は

$$f(x;\ \mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{20}$$

であり，対数をとれば

$$\log f(x;\ \mu)=-\log\sqrt{2\pi}-\log\sigma-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$$

となる．よって

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\log f(x;\ \mu)=\frac{x-\mu}{\sigma^2}$$

したがって

$$E\left\{\frac{\partial}{\partial\mu}\log f(x;\ \mu)\right\}^2=E\left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)^2=\frac{1}{\sigma^4}E(x-\mu)^2$$

$$=\frac{1}{\sigma^4}\sigma^2=\frac{1}{\sigma^2}$$

ゆえに

$$\mathrm{CRB}=\frac{1}{n\dfrac{1}{\sigma^2}}=\frac{\sigma^2}{n} \tag{21}$$

を得る．

ところで μ の不偏推定量である標本平均 $\bar{x}$ の分散は σ^2/n であるから，CRB に一致している．この場合定理 14.2 の条件は満たされているので，$\bar{x}$ は有効推定量であることが証明されたわけである．

14.2.2　有効推定量の見つけ方

このように，クラメル-ラオの境界によりその不偏推定量が最小分散に達しているかどうかを判定できる．これに対し次の定理は，最小分散の不偏推定量をつくり出すのに有用である．

〔定理 14.3〕（ラオ-ブラックウェル (Rao-Blackwell) の定理）$x_1, \cdots, x_n$ を密度 $f(x;\ \theta)$ からの無作為標本とする．また，t を θ に対する十分統計量，$\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1, \cdots, x_n)$ を θ の不偏推定量とする．ただし $\hat{\theta}$ は t のみの関数ではないとする．このとき，$E(\hat{\theta}|t)$ は θ の不偏推定量でかつ $\hat{\theta}$ よりも分散が小さい．

（証明）$\hat{\theta}, t$ の結合密度関数を $f(\hat{\theta}, t;\ \theta)$，$t$ の周辺密度を $h(t;\ \theta)\left(=\int_{-\infty}^{\infty}f(\hat{\theta}, t;\ \theta)d\hat{\theta}\right)$ とすれば t を与えたときの $\hat{\theta}$ の条件付密度は

$$g(\hat{\theta}|t)=\frac{f(\hat{\theta},\ t;\ \theta)}{h(t;\ \theta)} \tag{22}$$

であるが，この $g(\hat{\theta}|t)$ は十分統計量の定義より θ に依存しない．それゆえこのような条件の下で

$$v(t)=E(\hat{\theta}|t)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\theta}g(\hat{\theta}|t)d\hat{\theta} \tag{23}$$

をつくると，$v(t)$ が t のみの関数で θ には依存しないことは明らかである．以下（i）$v(t)$ は不偏であること，（ii）$\sigma_v^2<\sigma_{\hat{\theta}}^2$ であることを証明する．

（i）$v(t)$ は不偏である．なぜなら仮定により

$$E(\hat{\theta})=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\theta}f(\hat{\theta}, t;\ \theta)d\hat{\theta}dt=\theta \tag{24}$$

$$\begin{aligned}E\{v(t)\}&=\int_{-\infty}^{\infty}v(t)h(t;\ \theta)dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\theta}g(\hat{\theta}|t)h(t;\ \theta)d\hat{\theta}dt\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\theta}f(\hat{\theta}, t;\ \theta)d\hat{\theta}dt=\theta\end{aligned} \tag{25}$$

（ii）$\sigma_v^2<\sigma_{\hat{\theta}}^2$ である．なぜなら

$$\begin{aligned}\sigma_{\hat{\theta}}^2&=E(\hat{\theta}-\theta)^2=E[\{\hat{\theta}-v(t)\}+\{v(t)-\theta\}]^2\\&=E\{\hat{\theta}-v(t)\}^2+E\{v(t)-\theta\}^2+2E[\{\hat{\theta}-v(t)\}\{v(t)-\theta\}]\end{aligned} \tag{26}$$

となる．この第3項は

$$E[\{\hat{\theta}-v(t)\}\{v(t)-\theta\}]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{\hat{\theta}-v(t)\}\{v(t)-\theta\}f(\hat{\theta},t;\theta)d\hat{\theta}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\{\hat{\theta}-v(t)\}g(\hat{\theta}|t)d\hat{\theta}\right]\{v(t)-\theta\}h(t;\theta)dt$$

$$=0$$

となる．なぜなら第3式の大括弧の中は $v(t)=E(\hat{\theta}|t)$ であるので，0になるから．また(26)の第2項は $v(t)$ の分散 $\sigma_v{}^2$ に等しい．よって(26)は

$$\sigma_{\hat{\theta}}{}^2=E\{\hat{\theta}-v(t)\}^2+\sigma_v{}^2$$

となるが，$E\{\hat{\theta}-v(t)\}^2>0$ であるから

$$\sigma_v{}^2<\sigma_{\hat{\theta}}{}^2 \tag{27}$$

が成立する(証明終り)．

この定理により，任意の不偏推定量 $\hat{\theta}$ は $\hat{\theta}\equiv v(t)$ でない限り，$v(t)=E(\hat{\theta}|t)$ をつくることにより改善されることが分かる．もし $v(t)$ が t の単調関数ならば $v(t)$ もまた十分統計量である．それゆえ，もし θ の有効推定量があるとすれば それは少なくとも十分統計量でなければならないといえる．そしてどの $\hat{\theta}$ に対しても同一の $v(t)$ が一意的に定まれば，それ以上の改善はできないわけだから $v(t)$ は θ のあらゆる不偏推定量の中で最小な分散をもつことになる．

例題 14.2.2 例題14.1.2において2項母集団(14.1.12)からの大きさ n の無作為標本 $x_1, \cdots, x_n$ に基づく母数 p に対する十分統計量の1つは $t=\sum_{i=1}^{n}x_i$ であった．この例題では $n=2$ のケースについて上記の定理を応用してみよう．p の任意の不偏推定量として

$$\hat{p}=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2 \tag{28}$$

を採用してみよう．明らかに $E(\hat{p})=p$ であるし，また $\hat{p}$ の分散は

$$\sigma_{\hat{p}}{}^2=\frac{1}{9}p(1-p)+\frac{4}{9}p(1-p)=\frac{5}{9}p(1-p) \tag{29}$$

である．一方，p に対する十分統計量は

$$t=x_1+x_2 \tag{30}$$

である．

次に t を与えたときの $\hat{p}$ の条件付分布を求めよう．まず $\hat{p}$ と t の結合確率

関数は

$$f(\hat{p},\ t;\ p)=p^t(1-p)^{2-t},$$
$$(\hat{p},\ t)=(0,\ 0),\ \left(\frac{1}{3},\ 1\right),\ \left(\frac{2}{3},\ 1\right),\ (1,\ 2) \tag{31}$$

である．また t の周辺分布は $n=2$ のときの2項分布だから

$$h(t;\ p)=\frac{2!}{t!(2-t)!}p^t(1-p)^{2-t} \qquad t=0,\ 1,\ 2 \tag{32}$$

である．したがって t を与えたときの $\hat{p}$ の条件付確率関数は

$$g(\hat{p}|t)=\frac{f(\hat{p},t;p)}{h(t;p)}=\frac{t!(2-t)!}{2} \qquad \hat{p}=\begin{cases}0\ (t=0\ のとき)\\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}(t=1\ のとき)\\ 1\ (t=2\ のとき)\end{cases} \tag{33}$$

となる．これより t を与えたときの $\hat{p}$ の条件付期待値は

$$\left.\begin{aligned}E(\hat{p}|t)&=0\cdot\frac{0!(2-0)!}{2}=0=\frac{t}{2} && t=0\ のとき\\ &=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)\frac{1!(2-1)!}{2}=\frac{1}{2}=\frac{t}{2} && t=1\ のとき\\ &=1\cdot\frac{2!(2-0)!}{2}=1=\frac{t}{2} && t=2\ のとき\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

となる．したがって

$$E(\hat{p}|t)=\frac{t}{2} \qquad t=0,\ 1,\ 2$$

である．

$E(t/2)=(1/2)E(x_1+x_2)=p$ であるから $t/2$ は p の不偏推定量である．また $t/2$ の分散は $(1/4)p(1-p)$ であり，(29)の $\hat{p}$ の分散 $(5/9)p(1-p)$ より小さい．

このような $v(t)$ の一意性は十分統計量 t の密度関数の族 $\{h(t;\theta);\theta\in\Omega\}$ が完備(complete)であるときに保証される．完備性の定義は次のごとくである．

母数 θ に依存する密度関数の族 $\{f(x;\theta);\theta\in\Omega\}$ があるとしよう．θ に依存しない任意の統計量を $u(x)$ とするとき，もしすべての $\theta\in\Omega$ に対して

$$E\{u(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty}u(x)f(x;\theta)dx=0 \tag{35}$$

が成立することが，

$$u(x)=0 \tag{36}$$

がすべての x（ただし確率ゼロの集合に属する x は除外してもよい）に対して恒等的に成立することを意味するならば，族 $\{f(x;\theta);\theta\in\Omega\}$ は完備であるという．また統計量 t が完備な密度関数族をもつとき，t は完備統計量であるという．

完備な密度関数族の例としては次のような形のものがあげられる．[4]

$$f(x;\theta)=\exp\{\theta x+A(x)+B(\theta)\} \qquad -\infty<x<\infty \tag{37}$$

ただし $A(x)$, $B(\theta)$ はそれぞれ x, θ のみの関数である．たとえば，分散1の正規分布 $N(\mu,1)$ の密度関数は

$$f(x;\mu)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2\right\}$$

$$=\exp\left[\mu x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\left\{\mu^2+\log(2\pi)\right\}\right] \tag{38}$$

と書け，(37)の形となるから，$\{f(x;\mu);-\infty<\mu<\infty\}$ は完備族である．

t が完備な十分統計量であれば，t の関数となっている θ の不偏推定量はすべての $\theta\in\Omega$ に対してただ1個しかない．なぜなら，いまかりに t の関数である θ の不偏推定量が2個あってそれらを $v_1(t)$, $v_2(t)$ としよう．このとき，$E\{v_1(t)\}=\theta$ かつ $E\{v_2(t)\}=\theta$ であるから，$v(t)=v_1(t)-v_2(t)$ とおけば，すべての $\theta\in\Omega$ に対して

$$E\{v(t)\}=E\{v_1(t)\}-E\{v_2(t)\}=0 \tag{39}$$

である．ところで t は完備統計量であるから，(39)を満たすような $v(t)$ は，(確率ゼロの集合の t を除く)すべての t について $v(t)\equiv 0$ 以外にない．ゆえに $v_1(t)\equiv v_2(t)$，すなわち t の関数である θ の不偏推定量は一意的である．

かくして，完備十分統計量 t を与えたときの，θ に対する任意の不偏推定量 $\hat{\theta}$ の条件付期待値 $E(\hat{\theta}|t)$ は θ に対する有効推定量となることが分かった．

演習問題

1　$x_1,\cdots,x_n$ はポアソン分布((14.1.14)式)からの無作為標本とするとき，標本平均 $\bar{x}$ は λ の有効推定量であることを定理14.2により示せ．

2　2項母集団(14.1.12)からの大きさ n の無作為標本に基づく p に対する十分統計量 $\sum_{i=1}^{n}x_i/n$ は p に対する有効推定量であることを定理14.2により示せ．

4)　この証明は Kendall & Stuart, 前掲書(Vol. 2), p.200 参照．

14.3　推定量の漸近的性質

14.3.1　一　致　性

θ_n を密度 $f(x;\theta)$ からの大きさ n の標本 $x_1,\cdots,x_n$ に基づく θ の推定量とし，標本の大きさ n を $n=1,2,\cdots$ と変えたときに，対応する θ_n の系列を $\{\theta_n\}$ で表わす．

7.5.2の定義によれば，

$$\operatorname{plim}\theta_n=\theta \tag{1}$$

が成り立つとき θ_n を θ の一致推定量と呼ぶ．

ある推定量が一致推定量か否かを判定するのに，次の定理が有用である．

〔定理 14.4〕　推定量 θ_n があってその期待値の系列 $\{E(\theta_n);n=1,2,\cdots\}$ が θ に収束しかつその分散の列 $\{\sigma_{\theta_n}{}^2;n=1,2,\cdots\}$ が0に収束すれば，換言すれば

$$\lim_{n\to\infty}E(\theta_n)=\theta \text{ かつ } \lim_{n\to\infty}\sigma_{\theta_n}{}^2=0 \tag{2}$$

ならば，θ_n は θ の一致推定量である．

この定理の意味は直観的には明白であるが，次にチェビシェフ不等式を使って証明する．

（証明）　θ_n をたんに θ と表わす．(3.4.12)式のチェビシェフ不等式より，任意の $\lambda>0$ について

$$P\{|\theta-E(\theta)|\geqq\lambda\sigma_\theta\}\leqq\frac{1}{\lambda^2}$$

が成立するが，これより

$$P\{|\theta-E(\theta)|<\lambda\sigma_\theta\}\geqq1-\frac{1}{\lambda^2} \tag{3}$$

が得られる．ここで $\lambda\sigma_\theta=c$ とおけば

$$P\{|\theta-E(\theta)|<c\}\geqq1-\frac{1}{c^2}\sigma_\theta{}^2$$

となる．ところで $|\theta-E(\theta)|<c$ ならば

$$|\theta-E(\theta)|+|\theta-E(\theta)|<c+|\theta-E(\theta)|$$

であるが，左辺は

$$|\hat{\theta}-E(\hat{\theta})|+|\theta-E(\hat{\theta})|\geqq|\{\hat{\theta}-E(\hat{\theta})\}-\{\theta-E(\hat{\theta})\}|=|\hat{\theta}-\theta|$$

であるから

$$|\hat{\theta}-\theta|<c+|\theta-E(\hat{\theta})|$$

が成立する．それゆえ

$$P\{|\hat{\theta}-\theta|<c+|\theta-E(\hat{\theta})|\}\geqq 1-\frac{1}{c^2}\sigma_{\hat{\theta}}^2 \tag{4}$$

が得られる．ところで(2)より任意の正数 d, e について，$n>N$ ならば

$$|\theta-E(\hat{\theta})|<d \text{ かつ } \sigma_{\hat{\theta}}^2<e$$

となるような自然数Nがかならず存在する．それゆえ，$n>N$ に対し

$$\begin{aligned}P\{|\hat{\theta}-\theta|<c+d\}&\geqq P\{|\hat{\theta}-\theta|<c+|\theta-E(\hat{\theta})|\}\\&\geqq 1-\frac{1}{c^2}\sigma_{\hat{\theta}}^2\\&>1-\frac{e}{c^2}\end{aligned} \tag{5}$$

ここで c, d, e は任意だから，改めて $c+d=\varepsilon$, $e/c^2=\delta$ とおけば，ε, δ も任意にとれるので7.5.2の一致性の定義を満たしていることが分かる(証明終り)．

例題 14.3.1　平均 μ, 分散 σ^2, 平均回りの4次の積率 $\mu_4(=E(x-\mu)^4)$ をもつ母集団からの大きさ n の無作為標本に基づく標本分散 $s^2=\sum(x_i-\bar{x})^2/(n-1)$ は，σ^2 の一致推定量である．

$E(s^2)=\sigma^2$(7.4参照)であり，かつ s^2 の分散は

$$\sigma_{s^2}{}^2=\frac{1}{(n-1)^2}\left\{n(\mu_4-\sigma^4)-2(\mu_4-2\sigma^4)+\frac{1}{n}(\mu_4-3\sigma^4)\right\} \tag{6}$$

である.[5] この右辺は $n\to\infty$ のとき0に収束する．それゆえ定理14.4により s^2 は σ^2 の一致推定量である．

この場合，もし σ^2 の推定量を

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{n-1}{n}s^2 \tag{7}$$

と定義しても，この $\hat{\sigma}^2$ は σ^2 の一致推定量である．なぜなら，$E(\hat{\sigma}^2)=\{(n-1)/n\}E(s^2)=\{(n-1)/n\}\sigma^2$ だから

$$\lim_{n\to\infty}E(\hat{\sigma}^2)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\sigma^2\right)=\sigma^2 \tag{8}$$

であり，かつ $\mathrm{Var}(\hat{\sigma}^2)=\{(n-1)/n\}^2\sigma_{s^2}{}^2$ は $n\to\infty$ のとき0に収束するからである．

5)　拙著『計量経済学』有斐閣，1982年，82ページ参照．

14.3.2　漸近的有効性

母数 θ に対する2つの一致推定量(の系列) $\hat{\theta}_{1n}$, $\hat{\theta}_{2n}$ があるとし，$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{1n}-\theta)$, $\sqrt{n}(\hat{\theta}_{2n}-\theta)$ はそれぞれ平均ゼロで $\sigma_1{}^2$, $\sigma_2{}^2$ という分散をもつ極限分布に分布収束するとしよう．このとき

$$\frac{\sigma_1{}^2}{\sigma_2{}^2}<1 \tag{9}$$

であれば，$\hat{\theta}_{1n}$ は $\hat{\theta}_{2n}$ よりも漸近的により有効(asymptotically more efficient)であるという．

また，$\hat{\theta}_{2n}$ として θ に対する他のすべての一致推定量をとっても(9)が成立するとき，$\hat{\theta}_{1n}$ は**漸近的有効推定量**(asymptotically efficient estimator)であるという．この場合 $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ の漸近分布の分散をそれぞれ $AV(\hat{\theta}_1)$, $AV(\hat{\theta}_2)$で表わすことにすると，$AV(\hat{\theta}_1)=\sigma_1{}^2/n$, $AV(\hat{\theta}_2)=\sigma_2{}^2/n$ であるから，すべての他の一致推定量 $\hat{\theta}_2$ について，十分大きな同一の n に対していつでも

$$\frac{AV(\hat{\theta}_1)}{AV(\hat{\theta}_2)}<1 \tag{10}$$

が成立するとき，一致推定量 $\hat{\theta}_1$ は漸近的有効推定量であるといえる．

もし $\hat{\theta}_1$ の漸近分布の期待値が θ に等しくかつ $AV(\hat{\theta}_1)$ が θ に対するクラメル－ラオの境界に一致していれば，$\hat{\theta}$ は漸近的有効推定量であることが保証される．

14.4　最尤推定法

14.4.1　最尤推定量の定義

推定量を見つけだす1つの方法として**最尤推定法**(maximum likelihood method)がある．以下この方法を説明しよう．

x_1, x_2, $\cdots$, x_n を密度関数 $f(x;\theta_1,\cdots,\theta_m)$ からの無作為標本とする.[6] ただ

6)　$f(x;\theta_1,\cdots,\theta_m)$ が確率関数の場合でも以下の議論は成立する．

し $\theta_1, \cdots, \theta_m$ はこの密度関数の m 個の母数である．このとき $x_1, \cdots, x_n$ の結合密度(または確率)関数は

$$f(x_1;\theta_1,\cdots,\theta_m)f(x_2;\theta_1,\cdots,\theta_m)\cdots f(x_n;\theta_1,\cdots,\theta_m) \tag{1}$$

である．標本 $x_1, \cdots, x_n$ がすでに特定の値をとっている状態で，(1)を未知母数 $\theta_1, \cdots, \theta_m$ の関数と見なすとき，(1)を $\theta_1, \cdots, \theta_m$ に関する**尤度関数**(likelihood function)と呼ぶ．尤度関数の値を**尤度**と呼ぶ．尤度を L，尤度関数を $L(\theta_1, \cdots, \theta_m)$ で表わせば

$$L=L(\theta_1,\cdots,\theta_m)=f(x_1;\theta_1,\cdots,\theta_m)\cdots f(x_n;\theta_1,\cdots,\theta_m) \tag{2}$$

である．

$\theta_1, \cdots, \theta_m$ の**最尤推定値**とは尤度 L の最大を与える $\theta_1, \cdots, \theta_m$ の値である．これらの値を $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \cdots, \tilde{\theta}_m$ で表わすことにする．$\tilde{\theta}_1, \cdots, \tilde{\theta}_m$ が確率変数 $x_1, \cdots, x_n$ の関数の形で与えられるときそれらを**最尤推定量**(maximum likelihood estimator)と呼ぶ．たいていの密度関数(または確率関数)では，最尤推定量 $\tilde{\theta}_1, \cdots, \tilde{\theta}_m$ は連立方程式

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i}=0 \qquad i=1, 2, \cdots, m \tag{3}$$

を解くことによって得られる．[7] ところで，L と $\log L$ は $\theta_1, \cdots, \theta_m$ の同一な値でその最大値に達するから，(3)のかわりに

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta_i}=0 \qquad i=1, 2, \cdots, m \tag{4}$$

を用いてもよい．(4)のほうが通常は計算が容易である．

例題 14.4.1　x を2項分布にしたがう確率変数の大きさ1の標本とするとき，その母数 p の尤度関数は n?

$$L=L(p)=f(x;p)={}_nC_x p^x(1-p)^{n-x} \tag{5}$$

である．

$$\log L=\log({}_nC_x)+x\log p+(n-x)\log(1-p)$$

であるから

$$\frac{\partial \log L}{\partial p}=\frac{x}{p}-\frac{n-x}{1-p}=0$$

を解けば，p の最尤推定量

7)　この例外については例題 14.4.3 を見よ．

$$\tilde{p}=\frac{x}{n} \tag{6}$$

を得る．

例題 14.4.2　$x_1, \cdots, x_n$ を正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ からの無作為標本とする．μ, σ に関する尤度関数は

$$L=L(\mu, \sigma)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\} \tag{7}$$

である．対数をとれば

$$\log L=-\frac{n}{2}\log(2\pi)-n\log\sigma-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

となる．これより

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \log L}{\partial \mu}&=\frac{1}{\sigma^2}\sum(x_i-\mu)=0\\ \frac{\partial \log L}{\partial \sigma}&=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\sum(x_i-\mu)^2=0\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

を解く．まず(8)の第1式より $\sum(x_i-\mu)=0$ したがって

$$\tilde{\mu}=\frac{\sum x_i}{n}=\bar{x} \tag{9}$$

を得る．これを(8)の第2式に代入すれば

$$\tilde{\sigma}^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n} \tag{10}$$

を得る．

例題 14.4.3　$x_1, \cdots, x_n$ は一様分布

$$\left.\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{h} &&0\leqq x\leqq h \text{ のとき}\\ &=0 &&\text{それ以外のとき}\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

からの無作為標本とする．このとき h の最尤推定量を求める．

尤度関数は

$$L=\frac{1}{h^n} \tag{12}$$

であり $\log L=-n\log h$ となる．

$$\frac{\partial \log L}{\partial h}=-n\frac{1}{h}=0$$

を解くと $h=\infty$ となり，このやり方では最尤推定量は求まらない．しかし，いま $x_1, \cdots, x_n$ 中の最大の値を $x_{(n)}$ と記せば，われわれは

$$x_{(n)} \leqq h \tag{13}$$

であることを知っているのだから

$$\tilde{h}=x_{(n)} \tag{14}$$

が最尤推定量である ((12) は $h=x_{(n)}$ とおいたとき観測値と矛盾しない範囲で最大となる)．

14.4.2 最尤推定量の性質

以下の2つの定理は母数が1個($m=1$)の場合だけについて述べるが，複数個の場合にも同様なことがいえる．

〔定理 14.5〕 $\tilde{\theta}$ が θ の最尤推定量であれば $\varphi(\tilde{\theta})$ は $\varphi(\theta)$ の最尤推定量である．ただし $\varphi(\theta)$ は θ の単調関数とする．

（証明） $\omega=\varphi(\theta)$ の逆関数を $\theta=\varphi^{-1}(\omega)$ とする．また $\tilde{\omega}=\varphi(\tilde{\theta})$ と定義する．$\tilde{\theta}$ は θ の最尤推定量なのだから，尤度関数 $L(\theta)$ は $\theta=\tilde{\theta}$ で最大値に達する．それゆえ $L(\theta)=L[\varphi^{-1}(\omega)]$ は $\theta=\tilde{\theta}=\varphi^{-1}(\tilde{\omega})$ で最大となり，したがって $\omega=\tilde{\omega}=\varphi(\tilde{\theta})$ で最大となる(証明終り)．

例題 14.4.2 で見たように，μ, σ 未知の正規分布の標準偏差 σ の最尤推定量は $\tilde{\sigma}=\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2/n}$ であるが，上の定理により分散 σ^2 の最尤推定量は $\sum(x_i-\bar{x})^2/n=\tilde{\sigma}^2$ である．

〔定理 14.6〕 $x_1, \cdots, x_n$ を密度関数 $f(x;\theta)$ からの無作為標本とする．このときもし θ に対する十分統計量 t が存在するとすれば，最尤推定量 $\tilde{\theta}$ は十分統計量 t のみの関数になっている．

（証明） 十分統計量 t が存在するとすれば(14.1.1)式により

$$L=f(x_1;\theta)\cdots f(x_n;\theta)=k(t;\theta)h(x_1, \cdots, x_n) \tag{15}$$

と書ける．右辺の $h(x_1, \cdots, x_n)$ は θ と独立でいまの場合一定値である．したがって，もし $\theta=\tilde{\theta}$ のとき $k(t;\theta)$ が最大となれば，そのとき同時に L が最大となる．それゆえ最尤推定量 $\tilde{\theta}$ は t のみの関数として定まる(証明終り)．

上の定理 14.6 から最尤推定法により十分統計量が見いだされることが分かる．

最尤推定法は次の定理で述べるように，かなり一般的な条件の下で一致推定量を与え，またある条件の下で漸近的有効推定量を与える．母数が複数個ある場合についてそれらの定理を証明なしに与えよう．[8)]

〔定理 14.7〕 密度関数 $f(x;\theta)$ からの大きさ n の無作為標本に基づく未知母数ベクトル $\boldsymbol{\theta}$ に対する最尤推定量のベクトルを $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ とする．ただし $\boldsymbol{\theta}'=[\theta_1 \cdots \theta_m]$, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}'=[\tilde{\theta}_1 \cdots \tilde{\theta}_m]$ であり，$\boldsymbol{\theta}\in\Omega$ とする．真の母数を $\boldsymbol{\theta}_0'=[\theta_{01} \cdots \theta_{0m}]$ とする．もし $f(x;\boldsymbol{\theta})$ が $\boldsymbol{\theta}_0$ を含む領域で微分可能であれば，最大尤度の必要条件式(3)または(4)は $n\to\infty$ のとき確率1で $\boldsymbol{\theta}$ に対する一致推定量となる解をもつ．

〔定理 14.8〕 $f(x;\boldsymbol{\theta})$ はある一般的な条件を満たすものとする．この密度関数からの大きさ n の無作為標本に基づく $\boldsymbol{\theta}$ に対する最尤推定量を $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ とする．このとき，もし十分大きな n に対して $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ が一意的ならば，$n\to\infty$ のとき $\sqrt{n}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta})$ は多変量正規分布 $N(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{\Sigma})$ に分布収束する．ただし $\boldsymbol{\Sigma}=[\sigma_{ij}]$ は n 次の正値定符号行列で，その逆行列 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ の第(i, j)要素 v_{ij} は

$$v_{ij}=-E\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\log f(x;\boldsymbol{\theta})\right\} \tag{16}$$

である．

定理 14.8 より未知母数の数 m が1個のときには，$\sqrt{n}(\tilde{\theta}-\theta)$ は正規分布

$$N\left(0,\ \frac{1}{E\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta)\right\}^2}\right) \tag{17}$$

に分布収束することがいえる．これより n が十分大なるとき $\tilde{\theta}$ の漸近分布は

$$N\left(\theta,\ \frac{1}{nE\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x;\theta)\right\}^2}\right) \tag{18}$$

---

8) 定理 14.7 の証明は C. R. Rao, *Linear Statistical Inference and Its Applications*, 2nd edition, John Wiley & Sons, 1973, pp. 364–365 を参照せよ．また定理 14.8 の条件と証明については，S. S. Wilks, *Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, 1962, pp. 360–362 を参照せよ．

である．この正規分布の分散は θ に対するクラメル-ラオの境界 CRB に等しい．よって $\tilde{\theta}$ は漸近的有効推定量である（14.3.2 参照）．

未知母数が複数個のときにも同様なことがいえるので，[9] 最尤推定法は定理に述べた条件の下で漸近的有効推定量を与える．

演習問題

1　x は一様分布

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha} & \alpha\leqq x\leqq\beta \text{ のとき}\\[2mm] 0 & \text{それ以外のとき}\end{cases}$$

にしたがう確率変数とする．いまこれより大きさ n の無作為標本が得られたときの α, β の最尤推定量を求めよ．

*2　$x_1, \cdots, x_n$ はポアソン分布

$$f(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\qquad x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

からの無作為標本とするとき，λ の最尤推定量を求めよ．

14.5　推定量の選択と統計的決定理論

具体的な推定の問題においては，どのような性質をもった推定量を採用すべきだろうか．この問題を A. ワルト (A. Wald) によって創始された統計的決定理論[10] (statistical decision theory) の考え方で考察してみよう．

いま密度関数の未知パラメータがただ1個の場合の点推定の問題を考える．統計的決定理論で用いられる用語を最初に定義しておこう．

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を密度関数 $f(x;\theta)$ からの無作為標本とする．

1.　母数空間 (parameter space) Ω とは，その問題で考えうるすべての θ の値の集合である．$\{\theta\}$ によってそのような θ の値の集合を表わせば $\Omega=\{\theta\}$ である．

2.　行動空間 (action space) A とは，その問題で考えうるすべての行動 (action) の集合をいう．行動とは，たとえば点推定の問題では，θ の推定値として特定の値 $\hat{\theta}$ を指定することである．行動は標本の観測値 $x_1, \cdots, x_n$ に基づいて次に述べる決定関数を通じてなされる．行動を a で表わせば，$A=\{a\}$ である．

9)　このためには複数個の未知母数の場合の CRB が必要である．これについては畠中道雄・鈴木篤『統計学』東洋経済新報社，1970年，308～312ページを参照せよ．

10)　A. Wald, *Statistical Decision Functions*, John Wiley & Sons, 1950.

3.　決定関数 (decision function) とは，標本 $x_1, \cdots, x_n$ の値と行動 a とを対応させる規則または関数であり次のように表わされる．

推定値　標本

$$a=d(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\tag{1}$$

種々な決定関数の集合を D で表わす．点推定の問題では，標本 $x_1, \cdots, x_n$ の関数としての推定量 $\hat{\theta}(x_1, \cdots, x_n)$ が決定関数に相当する．

例題 14.5.1　$x_1, \cdots, x_n$ を正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ からの無作為標本で σ^2 は既知とするとき，母平均 μ を点推定したいとする．この場合，母数空間は $\Omega=\{\mu: -\infty<\mu<\infty\}$，行動空間は $A=\{\hat{\mu}: -\infty<\hat{\mu}<\infty\}$，決定関数としては

$$\hat{\mu}=d_1(x_1,\ \cdots,\ x_n)=\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\tag{2}$$

が考えられる．決定関数はこのほかにたとえば

$$\hat{\mu}=d_2(x_1,\ \cdots,\ x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\tag{3}$$

$$\hat{\mu}=d_3(x_1,\ \cdots,\ x_n)=(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}\tag{4}$$

というようにいくらでも考えられる．$D=\{d_1,\ d_2,\ d_3,\ \cdots\}$ である．

推定される母数

4.　損失関数 (loss function) $l(a;\theta)$ とは，次のような2つの条件を満たす実数の関数をいう．

母数

(a)　A に属するすべての a ならびに Ω に属するすべての θ に対し

$$l(a;\theta)\geqq 0\tag{5}$$

正しい推定値

(b)　Ω に属する各 θ に対し，$l(a;\theta)=0$ であるような a がかならず A の中に存在する．そして $l(a;\theta)=0$ のとき a を母数が θ のときの正しい行動と呼ぶ．損失関数の値を損失 (loss) と呼ぶ．　推定方法dで推定が外れる度合？

$$l(a;\theta)=l[d(x_1,\ \cdots,\ x_n);\theta]$$

であるから，損失は $x_1, \cdots, x_n$ の実現の仕方に依存して決まる．

5.　危険関数 (risk function) $R(d;\theta)$ は次のように定義される．

dによって決まる

$$\begin{aligned}R(d;\theta)&=E\{l(a;\theta)\}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}l[\underbrace{d(x_1,\ \cdots,\ x_n)}_{\text{推定}};\theta]f(x_1;\theta)\cdots f(x_n;\theta)dx_1\end{aligned}$$

θは不明…全ての θ に対して R(d;θ) が [illegible]

$$\cdots dx_n \tag{6}$$

危険関数の値を危険(risk)と呼ぶ．すなわち危険とは損失の期待値である．

統計的決定理論によれば，Ωに属するすべてのθについて危険を最小にする決定関数dを見つけることが，統計的決定問題(たとえば点推定，検定の問題)の目標となる.[11]

点推定の問題では，決定関数は

$$\hat{\theta}=d(x_1,\ \cdots,\ x_n) \tag{7}$$

であり，$\hat{\theta}$はθの推定値と呼ばれる．$\hat{\theta}=\theta$となれば正しい行動であるから，損失関数 $l(\hat{\theta};\theta)$ は $\hat{\theta}=\theta$ において0となるはずである．損失関数の具体的な形は，推定の具体的な問題が与えられなければ決まらない．しかし通常

$$l(\hat{\theta};\theta)=c(\theta)(\hat{\theta}-\theta)^2 \tag{8}$$

という形の損失関数を採用することが多い．ただし $c(\theta)$ はθの関数ですべてのθに対し $c(\theta)>0$ とする．

もし(8)のような損失関数が採用されれば危険関数 $R(d;\theta)$ は

$$R(d;\theta)=E\{c(\theta)\cdot(\hat{\theta}-\theta)^2\}=c(\theta)\cdot E(\hat{\theta}-\theta)^2 \tag{9}$$

となる．それゆえ，特定の値のθに対しては平均自乗誤差 $E(\hat{\theta}-\theta)^2$ を最小にするようなdを採用すればよいことになる．しかし推定の問題ではあらかじめはθの値が分からないのだから，Ωにおけるθのすべての値に対して一様に，平均自乗誤差が最小になるような決定関数dあるいは推定量を選ばなければならないことになる．

しかし**7.5.1**で述べたようにθのすべての値に対し一様に平均自乗誤差が最小になる推定量は一般に存在しない．そこでわれわれは，前節までに掲げたような種々な特性の1つあるいはいくつかを備えた種々な推定量の中から，望ましい推定量を選択することを強いられるのである．

演　習　問　題

1　$x_1,\ x_2$ を正規分布 $N(\mu,\ 1)$ からの無作為標本とし．μは $-\infty<\mu<\infty$ の範囲の値をとりうるものとする．いまμの推定量として

11)　このように危険すなわち損失の期待値を最小にするのがいつでも望ましいかという点については疑問の余地がある．

$$\hat{\mu}_1=d_1(x_1,\ x_2)=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2$$

$$\hat{\mu}_2=d_2(x_1,\ x_2)=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2$$

の2種類を考える．損失関数を

$$l(\hat{\mu};\mu)=\mu^2(\hat{\mu}-\mu)^2$$

とするとき，危険関数 $R(d_1;\mu)$, $R(d_2;\mu)$ を求め，2つの推定量を比較，評価せよ．

2　正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ からの大きさnの無作為標本 $x_1,\ \cdots,\ x_n$ に基づいて母分散σ^2の推定をするのに平均自乗誤差基準を用いよう．このとき標本分散 $s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ よりも $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ のほうが好ましい推定量であることを示せ．

14.6　ベイズ推定

前節の議論によれば，母数θを点推定するのに，θのすべての値に対し一様に危険を最小にするような推定量を選択するのが理想的であるということであった．しかしそのような推定量が得られることはまれであるという結論であった．

ところで，実際の推定の問題では，未知母数θについて情報がぜんぜんないということはあまりない．通常はθの値の範囲についてたとえ漠然とはしていてもなんらかの情報があるものである．ある場合にはその情報は推定を行なう人のまったく主観的な判断に基づくものであるかもしれない．しかしたとえ主観的な情報であっても母数θの推定の際に積極的にこれを利用しようとするのが，以下に述べるベイズ推定(Bayesian estimation)の考え方である．

母数θに関する情報は確率分布の形で表わされることが多い．そのような確率分布はθに関する**事前分布**(prior distribution)と呼ばれる．このように考えるときは母数θは一定値ではなく確率変数として扱われることになるのだから，xの密度関数 $f(x;\theta)$ はこの場合 $f(x|\theta)$ すなわち母数θを特定の値θにしたときのxの条件付密度関数と変えられなければならない．以下ベイズ推定の考え方を説明しよう．

$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ を条件付密度 $f(x|\theta)$ からの無作為標本とする．ただしこの標本の抽出に際してはθは特定の値に固定されているものとする．また，θの周辺密度関数を $g(\theta)$ とする．$g(\theta)$ はθの**事前密度**と呼ばれる．また損失関数

θの分布のみを考えている

を $l(\hat{\theta};\theta)$，決定関数(推定量)を $\hat{\theta}=d(x_1, \cdots, x_n)$ とする．このとき標本が取り出されたときの θ の値を点推定したいという問題を考えてみよう．

前節では θ のすべての値に対して危険 $R(d;\theta)=E[l(\hat{\theta};\theta)]$ を最小にする d を選択するのが方針であったが，いまや θ の事前密度 $g(\theta)$ が与えられているのだから，危険 $R(d;\theta)$ の θ に関しての期待値を最小にするのが自然であろう．すなわちこの危険の期待値を $B(d)$ で表わせば

$$B(d)=E\{R(d;\theta)\}=\int_{-\infty}^{\infty} R(d;\theta)g(\theta)d\theta$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} l[d(x_1, \cdots, x_n);\theta]f(x_1|\theta)\cdots f(x_n|\theta)dx_1\cdots dx_n\right\}g(\theta)d\theta \tag{1}$$

となる．この $B(d)$ を最小にする推定量 $\hat{\theta}=d(x_1, \cdots, x_n)$ を**ベイズ推定量**(Bayes estimator)と呼ぶ．

(1)の積分の順序を変えれば

$$B(d)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} l[d(x_1, \cdots, x_n);\theta]f(x_1|\theta)\cdots f(x_n|\theta)g(\theta)d\theta\right\}dx_1\cdots dx_n \tag{2}$$

となる．それゆえ，すべての $(x_1, \cdots, x_n)$ の組について中括弧{　}の中が最小になるような関数 d が見つかればその d において $B(d)$ は最小になる．そこでこの問題を考えてみよう．

$f(x_1|\theta)\cdots f(x_n|\theta)g(\theta)$ は $x_1, x_2, \cdots, x_n, \theta$ の結合密度であるから，$x_1, \cdots, x_n$ の結合周辺密度を $\psi(x_1, \cdots, x_n)$ で表わせば

θが与えられた条件下での $x_1 \cdots x_n$ の確率

$$\psi(x_1, \cdots, x_n)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1|\theta)\cdots f(x_n|\theta)g(\theta)d\theta$$

θの全ての値で積分→ $x_1 \cdots x_n$ の確率

である．また $x_1, \cdots, x_n$ が与えられたときの θ の条件付密度はこれを $\varphi(\theta|x_1, \cdots, x_n)$ で表わせば

$$\varphi(\theta|x_1, \cdots, x_n)=\frac{f(x_1|\theta)\cdots f(x_n|\theta)g(\theta)}{\psi(x_1, \cdots, x_n)}$$

右から順に 得るためには 全積分が必要

$$=\frac{f(x_1|\theta)\cdots f(x_n|\theta)g(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1|\theta)\cdots f(x_n|\theta)g(\theta)d\theta} \tag{3}$$

となる．[12] φ を θ の事後密度(posterior density)と呼ぶ．(3)の最右辺の式は

ベイズの定理(2.2.2)の密度への拡張となっている．

(3)を使えば(2)の{　}の中味は

$$\int_{-\infty}^{\infty} l[d(x_1, \cdots, x_n);\theta]f(x_1|\theta)\cdots f(x_n|\theta)g(\theta)d\theta$$

θの項がないので外に出せる

$x_1 \cdots x_n$ が与えられたときの θの条件付密度

$$=\psi(x_1, \cdots, x_n)\int_{-\infty}^{\infty} l[d(x_1, \cdots, x_n);\theta]\varphi(\theta|x_1, \cdots, x_n)d\theta \tag{4}$$

dの影響を受けない

となる．これより，$x_1, \cdots, x_n$ の可能な値の組の各々について

$$b(d;x_1, \cdots, x_n)=\int_{-\infty}^{\infty} l[d(x_1, \cdots, x_n);\theta]\varphi(\theta|x_1, \cdots, x_n)d\theta \tag{5}$$

を最小化する($x_1, \cdots, x_n$ の関数) d が定まれば，それは $B(d)$ を最小化する d すなわちベイズ推定量である．$b(d;x_1, \cdots, x_n)$ を θ を推定するための**事後的危険**(posterior risk)と呼ぶ．

例題 14.6.1　$x_1, \cdots, x_n$ は正規分布 $N(\mu, 1)$ からの無作為標本とする．すなわち

$$f(x|\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2} \tag{6}$$

また μ の周辺分布(事前分布)は正規分布 $N(\mu_0, 1)$ とみなしてよいとする．すなわち

$$g(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2}} \tag{7}$$

このとき標本が抽出されたときの μ の値に対するベイズ推定量を求める．

まず μ の事後密度は(3)を使って

$$\varphi(\mu|x_1, \cdots, x_n)=\frac{f(x_1|\mu)\cdots f(x_n|\mu)g(\mu)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1|\mu)\cdots f(x_n|\mu)g(\mu)d\mu}$$

$$=\frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}(n+1)}e^{-\frac{1}{2}\Sigma(x_i-\mu)^2}e^{-\frac{1}{2}(\mu-\mu_0)^2}}{\int_{-\infty}^{\infty}(2\pi)^{-\frac{1}{2}(n+1)}e^{-\frac{1}{2}\Sigma(x_i-\mu)^2}e^{-\frac{1}{2}(\mu-\mu_0)^2}d\mu}$$

12)　$x_1, \cdots, x_n, \theta$ の結合密度を $h(x_1, \cdots, x_n, \theta)$ で表わせば(3.6.12)式より $h(x_1, \cdots, x_n, \theta)=f(x_1|\theta)\cdots f(x_n|\theta)g(\theta)=\varphi(\theta|x_1, \cdots, x_n)\psi(x_1, \cdots, x_n)$ が成立する．あとの2つの式を利用すれば(3)が得られる．

$$=\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\{\sum x_i^2+(n+1)\mu^2-2(n\bar{x}+\mu_0)\mu+\mu_0^2\}\right]}{\exp\left\{-\frac{1}{2}(\sum x_i^2+\mu_0^2)\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\{(n+1)\mu^2-2(n\bar{x}+\mu_0)\mu\}\right]d\mu} \tag{8}$$

となるが，分母の積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\{(n+1)\mu^2-2(n\bar{x}+\mu_0)\mu\}\right]d\mu$$
$$=\exp\left\{\frac{1}{2}\frac{(n\bar{x}+\mu_0)^2}{n+1}\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}(n+1)\left(\mu-\frac{n\bar{x}+\mu_0}{n+1}\right)^2\right\}d\mu$$
$$=\exp\left\{\frac{1}{2}\frac{(n\bar{x}+\mu_0)^2}{n+1}\right\}(2\pi)^{\frac{1}{2}}(n+1)^{-\frac{1}{2}}$$

となる．したがって(8)は

$$\varphi(\mu|x_1,\cdots,x_n)$$
$$=\left(\frac{n+1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left\{(n+1)\mu^2-2(n\bar{x}+\mu_0)\mu+\frac{1}{n+1}(n\bar{x}+\mu_0)^2\right\}\right]$$
$$=\left(\frac{n+1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(n+1)\left(\mu-\frac{n\bar{x}+\mu_0}{n+1}\right)^2\right\} \tag{9}$$

となる．これは，正規分布 $N((n\bar{x}+\mu_0)/(n+1),\ 1/(n+1))$ の密度関数にほかならない．

ここで損失関数を

$$l(\hat{\mu};\mu)=c\cdot(\hat{\mu}-\mu)^2 \tag{10}$$

と仮定する．ただし c は正の定数とする．すると事後的危険は

$$b(\hat{\mu};x_1,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{\infty}c\cdot(\hat{\mu}-\mu)^2\cdot\varphi(\mu|x_1,\cdots,x_n)d\mu$$
$$=c\left(\frac{n+1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}(\hat{\mu}-\mu)^2\exp\left\{-\frac{1}{2}(n+1)\left(\mu-\frac{n\bar{x}+\mu_0}{n+1}\right)^2\right\}d\mu \tag{11}$$

となる．ここで

$$(\hat{\mu}-\mu)^2=(\mu-\hat{\mu})^2=\left\{\left(\mu-\frac{n\bar{x}+\mu_0}{n+1}\right)+\left(\frac{n\bar{x}+\mu_0}{n+1}-\hat{\mu}\right)\right\}^2$$
$$=\left(\mu-\frac{n\bar{x}+\mu_0}{n+1}\right)^2+2\left(\mu-\frac{n\bar{x}+\mu_0}{n+1}\right)\left(\frac{n\bar{x}+\mu_0}{n+1}-\hat{\mu}\right)+\left(\frac{n\bar{x}+\mu_0}{n+1}-\hat{\mu}\right)^2$$

であるから，これを(11)に代入し項別に積分すると容易に

$$b(\hat{\mu};x_1,\cdots,x_n)=c\left\{\frac{1}{n+1}+\left(\frac{n\bar{x}+\mu_0}{n+1}-\hat{\mu}\right)^2\right\} \tag{12}$$

が得られる．これより $b(\hat{\mu};x_1,\cdots,x_n)$ を最小ならしめる $\hat{\mu}$ を求めると

$$\frac{\partial b(\hat{\mu};x_1,\cdots,x_n)}{\partial\hat{\mu}}=-2c\left(\frac{n\bar{x}+\mu_0}{n+1}-\hat{\mu}\right)=0$$

より

$$\hat{\mu}=\frac{n\bar{x}+\mu_0}{n+1}=\frac{\sum x_i+\mu_0}{n+1} \tag{13}$$

が得られる．これが μ に対するベイズ推定量である．

演習問題

1　$x_1,\cdots,x_n$ をポアソン分布

$$f(x|\lambda)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\qquad x=0,1,2,\cdots \tag{14}$$

からの無作為標本とする．母数 λ の事前密度が

$$g(\lambda)=e^{-\lambda}\qquad 0<\lambda<\infty \tag{15}$$

であるとき，損失関数を

$$l(\hat{\lambda};\lambda)=(\hat{\lambda}-\lambda)^2 \tag{16}$$

として，λ のベイズ推定量を求めよ．

第 15 章

仮説の検定II

15.1 検定方式の評価

8.1で述べた仮説検定の考え方をもう一度まとめてみよう．

$f(x;\theta)$ を確率変数 x の密度関数とし，未知母数 θ は母数空間 Ω に属するとされ，f の形は知られているものとしよう．このとき，θ_0 を特定の値として

$$\left.\begin{array}{ll} H_0:\theta\in\omega & (\text{仮説}) \\ H_1:\theta\in\Omega-\omega & (\text{対立仮説}) \end{array}\right\} \tag{1}$$

を設定する．ω は Ω の部分集合である．ω が単一の要素からなるとき H_0 を単純仮説，そうでないとき複合仮説といい，また $\Omega-\omega$ が単一の要素からなるとき H_1 を単純対立仮説，そうでないときを複合対立仮説という．標本観測値 $x_1, \cdots, x_n$ を調べることにより，H_0 か H_1 のいずれかを採用する．この場合判断の基準は，標本 $x_1, \cdots, x_n$ の関数であるなんらかの統計量(検定統計量 test statistic)の値があらかじめ設定されている棄却域に落ちれば H_0 を棄却(H_1 を採択)，棄却域の外に落ちれば H_0 を採択(H_1 を棄却)するというものである．そして仮説 H_0 が真なるとき H_0 を棄却する確率は第1種の過誤の確率または棄却域の大きさ(またはサイズ)と呼ばれ，α で表わされる．また H_1 が真なるとき H_0 を採択する確率を第2種の過誤の確率といい，これを β で表わす．棄却域は第1種の過誤の確率が特定の値 α となるように設定される．$1-\beta$ を検定力と呼ぶ．

この節では，仮説の検定の方式の選択，すなわちどのような検定統計量を採

用し，どのような棄却域を設定すべきか，という問題を考えてみよう．

母数が複数個であるときそれらの母数の一部または全部に対する仮説検定について述べるのが一般的であるが，以下の数節では，単一の母数の場合についてだけ述べる．

いま単純仮説対単純対立仮説の場合すなわち

$$\left.\begin{array}{l} H_0:\theta=\theta_0 \\ H_1:\theta=\theta_1 \end{array}\right\} \tag{2}$$

の場合を想定しよう．θ_0, θ_1 はともに θ の特定の値で $\theta_0\neq\theta_1$ とする．

検定統計量を t としよう．t は標本 $x_1, \cdots, x_n$ の関数であるから

$$t=t(x_1, \cdots, x_n) \tag{3}$$

と書ける．t の密度関数を $g(t;\theta)$ とする．t に関する棄却域は，その大きさを α とすれば，$\theta=\theta_0$ のとき

$$\int_T g(t;\theta_0)dt=P(t\in T;\theta_0)=\alpha \tag{4}$$

を満足する集合 T により定められる．ただし $t\in T$ は t の値が T に属することを意味するものとする．ここで，標本の個々の要素 $x_1, \cdots, x_n$ を各軸とする n 次元の直交座標系を考え，これを**標本空間**(sample space)と呼ぶ．一組の観測値$(x_1, \cdots, x_n)$はこの標本空間の1点として表わされる．これを**標本点**(sample point)と呼び a で表わそう．当然，検定統計量 t の値は標本空間内の a の位置に依存して決まる．t が T に属するような標本点 a の集合を R で表わす．すなわち

$$R=\{a:t\in T\} \tag{5}$$

である．(4)より当然 $P(a\in R;\theta_0)=P(t\in T;\theta_0)=\alpha$ である．R は標本空間における仮説 H_0 の棄却域である．

8.1.2でも述べたように，対立仮説 $H_1:\theta=\theta_1$ が真であるとき標本点 a が棄却域 R にはいる確率すなわち $P(a\in R;\theta_1)$ を棄却域 R の検定力と呼ぶ．すなわち第2種の過誤の確率を β で表わせば

$$P(a\in R;\theta_1)=P(t\in T;\theta_1)=1-\beta$$

である．検定力は対立仮説が真なるとき第2種の過誤を犯さない確率であるから，検定力はなるべく大なるほうがよい．

$P(a\in R;\theta)$ を θ の関数とみなして棄却域 R の検定力関数と呼ぶ．

(4)を満たす棄却域Tの設定の仕方は無数にある．Tの設定の仕方いかんで$\theta=\theta_1$における検定力が異なる．これを次のような例で考えてみよう.[1]

例題 15.1.1　x_1, x_2を正規分布$N(\mu, 2)$よりの大きさ2の無作為標本とする．このとき

$$\left.\begin{array}{l} H_0 : \mu=\mu_0=0 \\ H_1 : \mu=\mu_1=1 \end{array}\right\} \qquad (6)$$

とする．このとき検定統計量を$t=\bar{x}=(x_1+x_2)/2$とし，$\alpha=0.05$として次のような3種類の棄却域を考える．

$$\left.\begin{array}{ll} (イ) & T_1 : \bar{x}\leqq -1.96 \text{ および } \bar{x}\geqq 1.96 \\ (ロ) & T_2 : \bar{x}\geqq 1.645 \\ (ハ) & T_3 : -0.063\leqq \bar{x}\leqq 0.063 \end{array}\right\} \qquad (7)$$

$\bar{x}$は$N(0, 1)$にしたがうから，

$$P(\bar{x}\in T_1;\ \mu_0)=P(\bar{x}\in T_2;\ \mu_0)=P(\bar{x}\in T_3;\ \mu_0)=0.05$$

であることは正規分布表から容易に確かめられる．$\bar{x}=(x_1+x_2)/2$であるから，(7)より，標本空間における棄却域が容易に定まる．

$$\left.\begin{array}{ll} (イ) & R_1 : x_1+x_2\leqq -3.92 \text{ および } x_1+x_2\geqq 3.92 \\ (ロ) & R_2 : x_1+x_2\geqq 3.29 \\ (ハ) & R_3 : -0.126\leqq x_1+x_2\leqq 0.126 \end{array}\right\} \qquad (8)$$

これらの棄却域の対応関係を図示すると図15.1のようになる．図の意味は明白であろう．

そこでこれら3つの棄却域についての検定力曲線をつくると次ページの図15.2のようになる．$\mu=\mu_1=1$における検定力の大きさを比較すると明らかに棄却域R_2のほうが，R_1, R_3よりも大である．

一般に，$\theta=\theta_1$において検定力$P(a\in R;\ \theta_1)$が最大となる棄却域Rを**最良棄却域**(best critical region)と呼び，そのときの検定を**最強力検定**(most powerful test, 略称 MPT)と呼ぶ．上の例では，実はR_2が最良棄却域であり，それゆえ(ロ)の検定が最強力検定なのである．この理由は次節に示す．

1) この例は H. Freeman, *Introduction to Statistical Inference*, Adison-Wesley, 1963, pp. 289-292 における例を若干修正したものである．

図 15.1　検定統計量における棄却域と標本空間における棄却域との対応関係

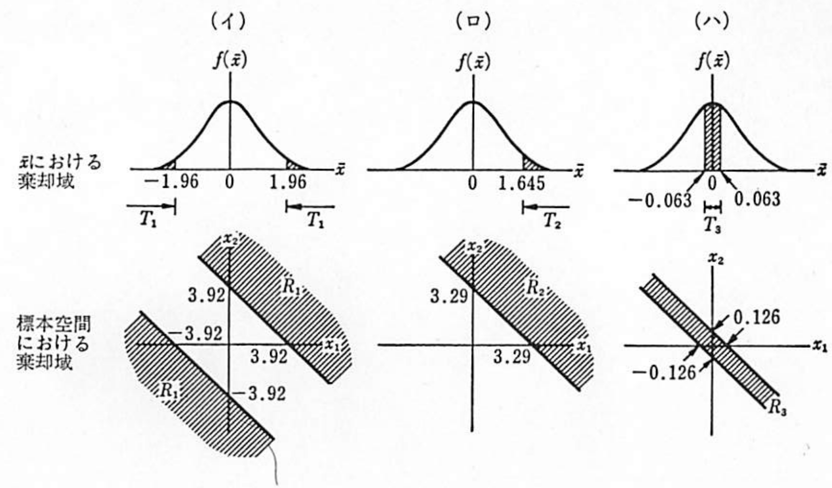
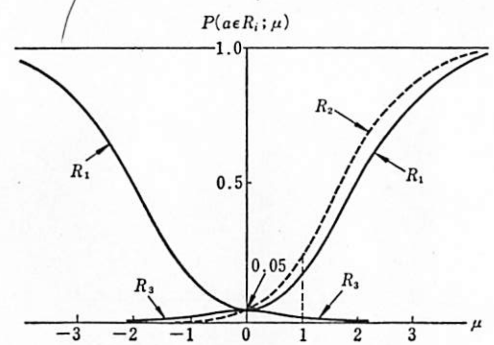


図 15.2　3つの検定力曲線



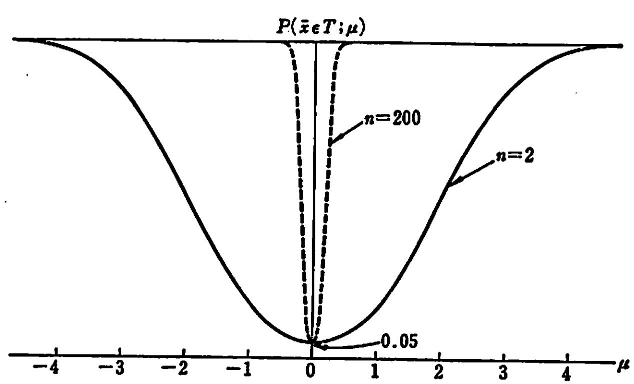
対立仮説が$\theta\fallingdotseq\theta_0$というように複合仮説の場合には，$H_0 : \theta=\theta_0$が真でないときに$\theta$が$\theta_0$以外のどのような値であるかは分からない．しかし検定力はθの値が定まらなければ大きさが決まらない．そこで，θのどのような値に対しても一様に検定力が最大となる検定が理想的な検定といえる．これを**一様最強力検定**(uniformly most powerful test, 略称 UMPT)と呼ぶ．

図 15.2 では3つの棄却域に対応する3つの検定力曲線が描かれているが，この中で R_3(太線)は，μ のどんな値についても R_1 より上方にはないことが分かる．このような棄却域は許容されない (inadmissible) **棄却域**と呼ばれる．これに対し，R_1 と R_2 とでは $\mu>0$ の範囲では R_2 の検定力は R_1 に優り，$\mu<0$ では R_1 が R_2 に優る．R_1 と R_2 との優劣は決まらない．それゆえ R_1 と R_2 のいずれに基づく検定も一様最強力検定とはいえない．

一様最強力検定は対立仮説が $H_1:\theta\fallingdotseq\theta_0$ という形の複合仮説のときにはほとんど存在しない．そこで，検定の性質に制約を設けその制約を満たす検定の中で一様に最強力な検定を考えることがある．その1つに**一様最強力不偏検定** (uniformly most powerful unbiased test) がある．**不偏検定** (unbiased test) とは $\theta=\theta_0$ において検定力が最小となる検定をいう．すべてのこのような不偏検定の中で，θ のどのような値に対しても一様に検定力が最大となっている検定を一様最強力不偏検定と呼ぶ．図 15.2 の R_1 に基づく検定は一様最強力不偏検定となっている．

$\theta\fallingdotseq\theta_0$ である限り仮説 $H_0:\theta=\theta_0$ は棄却されるべきなのであるが，棄却される確率すなわち検定力は θ が θ_0 の近くではあまり大きくない．しかし，標本の大きさ n をふやすことにより検定力を高めることが可能である．例題 15.1.1 においてもし n を 200 にしたら，標本平均 $\bar{x}$ は $H_0:\mu=0$ が真のとき正規分布 $N(0, (0.1)^2)$ にしたがうことになる．対立仮説を $H_0:\mu\fallingdotseq0$ という複合対

図 15.3　n の増加による検定力曲線の変化



立仮説とするとき，(イ)の型の棄却域をつくると

$$T_1:\bar{x}\leqq-0.196 \text{ および } \bar{x}\geqq0.196$$

となる．これより $n=200$ の場合の検定力曲線を描くと図 15.3 の破線のようになる．図には $n=2$ の場合の検定力曲線(図 15.2 の R_1)も実線により示されている．この図から，たとえば $\mu=1$ における検定力は $n=2$ のとき 0.15 程度だったのが，$n=200$ にふやすとほとんど1に等しくなることが分かる．

このように標本の大きさ n を増加することにより，$\theta\fallingdotseq\theta_0$ における検定力を限りなく1に近づけることができるとき，その検定を**一致検定** (consistent test) と呼ぶ．すなわち一致検定においては

$$\lim_{n\to\infty}P(a\in R;\theta)=1 \qquad \theta\fallingdotseq\theta_0 \tag{9}$$

が成立する．

15.2　最強力検定の求め方

単純仮説対単純対立仮説に関して最強力な棄却域 R を求めるという問題に解答を与えるのが，次に述べる定理である．

〔定理 15.1〕（ネイマン-ピアソン (Neyman-Pearson) の基本定理）　仮説 $H_0:\theta=\theta_0$，対立仮説 $H_1:\theta=\theta_1$ を，密度 $f(x;\theta)$ からの無作為標本 x_1, …, x_n に基づいて棄却域の大きさ α で検定する．そのとき任意の $0<\alpha<1$ について

$$\frac{f(x_1;\theta_0)f(x_2;\theta_0)\cdots f(x_n;\theta_0)}{f(x_1;\theta_1)f(x_2;\theta_1)\cdots f(x_n;\theta_1)}\leqq k \tag{1}$$

を満足するすべての標本点の集合を R として

$$P(a\in R;\theta_0)=\int\cdots\int_R f(x_1;\theta_0)\cdots f(x_n;\theta_0)\,dx_1\cdots dx_n=\alpha \tag{2}$$

となるような正の定数 k を選ぶ．このとき R を棄却域とする検定は最強力検定である．

（証明）　$f(x_1;\theta_0)\cdots f(x_n;\theta_0)$ を $h_0(a)$，$f(x_1;\theta_1)\cdots f(x_n;\theta_1)$ を $h_1(a)$ で表わすことにする．いま次の条件を満たす R 以外の任意の(標本空間における)集合 S を考える．

$$\int_S h_0(a)\,da=\alpha \tag{3}$$

ここで $\int_S h_0(a)\,da$ は $\int\cdots_S\int f(x_1;\theta_0)\cdots f(x_n;\theta_0)\,dx_1\cdots dx_n$ を意味するものとする．R と S の両方に属している標本点の集合を Q とし,[2] R に属していて Q には属さない標本点の集合を R_1, また S に属していて Q には属さない標本点の集合を S_1 とする．このとき

$$\begin{aligned}\int_{R_1} h_0(a)\,da&=\int_R h_0(a)\,da-\int_Q h_0(a)\,da\\&=\int_S h_0(a)\,da-\int_Q h_0(a)\,da\\&=\int_{S_1} h_0(a)\,da\end{aligned} \tag{4}$$

である．条件の(1)式より集合 R のどの標本点 a においても

$$h_0(a)\leqq k\cdot h_1(a)$$

が成立するが，R_1 は R に含まれているから

$$\frac{1}{k}\int_{R_1} h_0(a)\,da\leqq\int_{R_1} h_1(a)\,da \tag{5}$$

また，S_1 に属するどの点も R に属さないから

$$\frac{1}{k}\int_{S_1} h_0(a)\,da>\int_{S_1} h_1(a)\,da \tag{6}$$

かくして(4)，(5)，(6)より

$$\begin{aligned}\int_R h_1(a)\,da&=\int_{R_1} h_1(a)\,da+\int_Q h_1(a)\,da\\&\geqq\frac{1}{k}\int_{R_1} h_0(a)\,da+\int_Q h_1(a)\,da\\&>\int_{S_1} h_1(a)\,da+\int_Q h_1(a)\,da\\&=\int_S h_1(a)\,da\end{aligned} \tag{7}$$

が得られる．それゆえ H_1 に関して R は S よりも強力である．ところで S は大きさ α の任意の集合だから R に基づく検定は最強力である(証明終り)．

この定理を応用して例題 15.1.1 の検定問題において最強力な棄却域を見つ

2)　Q は標本点を1つも含まない空集合であることもありうる．

けてみよう．

例題 15.2.1　x_1, x_2 を分散2の正規分布からの無作為標本とする．このとき

$$H_0:\mu=0$$
$$H_1:\mu=1$$

を $\alpha=0.05$ で検定したい．

$$f(x_i;0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2\cdot2}x_i^2}\qquad i=1,\ 2$$

$$f(x_i;1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2\cdot2}(x_i-1)^2}\qquad i=1,\ 2$$

であるから，(1)の左辺を λ とすれば

$$\begin{aligned}\lambda=\frac{f(x_1;0)f(x_2;0)}{f(x_1;1)f(x_2;1)}&=e^{-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{2}\{x_i^2-(x_i-1)^2\}}\\&=e^{-\frac{1}{4}(2\cdot2\bar{x}-2)}\leqq k\end{aligned} \tag{8}$$

となる．最後の2式の対数をとり整理すれば

$$\bar{x}\geqq-\log k+\frac{1}{2} \tag{9}$$

となる．$-\log k+1/2=c$ とおけば，結局

$$\bar{x}\geqq c \tag{10}$$

を満足する標本空間における集合を棄却域 R として設定すればよい．ただし臨界値 c は

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_c^\infty e^{-\frac{1}{2}\bar{x}^2}\,d\bar{x}=0.05 \tag{11}$$

により決めればよい．明らかに $c=1.645$ である．したがって例題 15.1.1 における (ロ) の集合 R_2(あるいは T_2) が最強力な棄却域であることが証明された．

上の例でネイマン－ピアソンの基本定理から導かれてきた検定統計量は $\bar{x}$ という十分統計量(14.1)であった．一般に，もし十分統計量が存在すれば，最強力検定は十分統計量の関数に基づく．なぜなら，もし十分統計量 t が存在する

ならば，定理 14.1 により

$$f(x_1;\theta)\cdots f(x_n;\theta)=k(t;\theta)h(x_1,\cdots,x_n) \qquad (12)$$

となるから (1) は

$$\frac{f(x_1;\theta_0)\cdots f(x_n;\theta_0)}{f(x_1;\theta_1)\cdots f(x_n;\theta_1)}=\frac{k(t;\theta_0)}{k(t;\theta_1)}\leqq k \qquad (13)$$

となる．よって(13)から導かれる検定統計量は十分統計量の関数である．

演 習 問 題

1 $x_1,\cdots,x_n$ は既知の平均と未知の分散をもつ正規分布からの無作為標本とする．このとき $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$, $H_1:\sigma^2=\sigma_1^2$ の検定に対し，ネイマン-ピアソンの基本定理によってカイ自乗分布する検定統計量が導かれることを示せ．

2 $\bar{x}$ をポアソン分布

$$f(x)=\frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} \qquad x=0,1,2,\cdots$$

からの大きさ n の無作為標本に基づく標本平均とするとき，単純対立仮説 $H_1:\mu=\mu_1$ に対して単純仮説 $H_0:\mu=\mu_0$ を検定するための最良棄却域は次の形になることを示せ．

$\bar{x}\leqq a$ $\mu_0>\mu_1$ のとき

$\bar{x}\geqq b$ $\mu_0<\mu_1$ のとき

15.3 尤度比検定

$x_1,\cdots,x_n$ を m 個の未知母数をもつ密度関数 $f(x;\theta_1,\cdots,\theta_m)$ からの無作為標本とする．このとき $\theta_1,\cdots,\theta_m$ を各座標軸とする m 次元の直交座標系を考え，これを母数空間 Ω と呼ぶ．ω を Ω における特定の集合とし，$\bar{\omega}$ を Ω の ω 以外の集合とする (すなわち $\bar{\omega}=\Omega-\omega$)．ここで次のような複合仮説対複合対立仮説を考える (これは単純仮説，単純対立仮説の場合も含んでいる)．

$$\left.\begin{array}{l} H_0:(\theta_1,\cdots,\theta_m)\in\omega \\ H_1:(\theta_1,\cdots,\theta_m)\in\bar{\omega}\end{array}\right\} \qquad (1)$$

ただし $(\theta_1,\cdots,\theta_m)$ は母数空間内の点を表わす．

いま $\theta_1,\cdots,\theta_m$ に関する尤度関数を L で表わせば

$$L=L(\theta_1,\cdots,\theta_m)=f(x_1;\theta_1,\cdots,\theta_m)\cdots f(x_n;\theta_1,\cdots,\theta_m) \qquad (2)$$

$f(x;\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_n)$ なら…

標本 $x_1,x_2,\cdots x_n$ から最尤推定量 $\hat{\theta}_1,\cdots\hat{\theta}_n$ を求めて，
$\theta_1,\theta_2,\cdots\theta_n$ に近くなる

そして集合 ω における L の最大値を $L(\omega)$ で，また母数空間 Ω 全体における L の最大値を $L(\Omega)$ で表わす．このとき比

$L(\Omega)\geqq L(\omega)\geqq 0$

$$\lambda=\frac{L(\omega)}{L(\Omega)} \qquad (3)$$

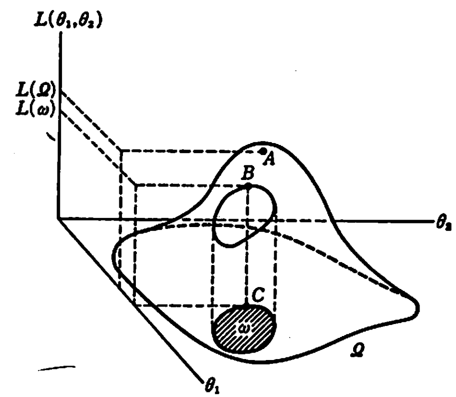
制約付最大値．

最尤推定量で

を尤度比(likelihood-ratio)と名づける．

$L(\omega)$, $L(\Omega)$ の意味を理解するために，母数が2個すなわち θ_1, θ_2 の場合について次の図 15.4 をみてみよう．この図は3次元グラフの鳥瞰図であり，横，縦軸に θ_1, θ_2 が，高さの軸に尤度 L がとられている．描かれている山状の曲面は尤度関数 $L=L(\theta_1,\theta_2)$ を示している．この曲面は $x_1,\cdots,x_n$ の実現値に依存して定まる．また ω と印した円盤は (θ_1,θ_2) 平面すなわち Ω の中の H_0 が指定する集合 ω を表わす．$L(\omega)$ は ω の上の曲面の最高点 B の高さを表わす．また $L(\Omega)$ は Ω の上の (したがって制約なしの) 曲面の最高点 A の高さを表わす．

図 15.4 尤度関数の最大点 A と制約付最大点 B



さて，もし ω の中に標本を生み出したときの θ_1, θ_2 の値の組がはいっている (つまり H_0 が真) ならば，制約なしの L の最大値 $L(\Omega)$ を与える (θ_1,θ_2) の値すなわち最尤推定値 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ は集合 ω の中にはいることが多いであろう．そのときには $L(\Omega)=L(\omega)$ となるから尤度比 $\lambda=L(\omega)/L(\Omega)=1$ になる．それ以外のときには尤度比 λ は0から1までの値をとる．λ が0に近いほど，ω の中に真の母数がはいっている可能性は小さい．

そこで，尤度比 λ を検定統計量として用いることが考えられる．尤度比を用いる検定を**尤度比検定**という．

いま，仮説 H_0 が真なるときの λ の密度関数を $g(\lambda; H_0)$ と書こう．もし $g(\lambda; H_0)$ が一意的に定まれば，棄却域の大きさを α として

$$\int_0^{\lambda_\alpha} g(\lambda; H_0)d\lambda=\alpha \tag{4}$$

となるような λ_α を定めると，λ に関する棄却域は $0<\lambda\leqq\lambda_\alpha$ となる．

尤度比 λ の密度関数が複雑な形になる場合でも，λ の単調関数がよく知られた分布にしたがうことが多い．そのときにはその単調関数を検定統計量として用いればよい．

任意の?

〔定理 15.2〕 λ を仮説 H_0 を検定するための尤度比とし，$y=\varphi(\lambda)$ を λ の単調増加(または減少)関数とする．このとき y に基づく検定は尤度比検定と同等である．尤度比検定の棄却域を $0<\lambda\leqq\lambda_\alpha$ とすれば y に基づく検定のための棄却域は $\varphi(0)<y\leqq\varphi(\lambda_\alpha)$ (または $\varphi(\lambda_\alpha)\leqq y<\varphi(0)$) である．

参考：p92～

(証明) もし $y=\varphi(\lambda)$ が λ の単調増加関数ならば

$$\alpha=\int_0^{\lambda_\alpha} g(\lambda; H_0)d\lambda=\int_{\varphi(0)}^{\varphi(\lambda_\alpha)} h(y; H_0)dy \tag{5}$$

である．ただし $h(y; H_0)$ は H_0 が真なるときの y の密度である．一方，標本空間の点を a とし $0<\lambda\leqq\lambda_\alpha$ を満足するすべての a の集合を R とすれば

$$R=\{a: 0<\lambda\leqq\lambda_\alpha\}=\{a: \varphi(0)<y\leqq\varphi(\lambda_\alpha)\} \tag{6}$$

である．それゆえ，y に基づく検定の棄却域を $\varphi(0)<y\leqq\varphi(\lambda_\alpha)$ とすれば，y に基づく検定は尤度比検定と同等である(証明終り)．

以下の例ではこの定理を応用する．

例題 15.3.1 $x_1, \cdots, x_n$ を正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ からの無作為標本とする．平均 μ，分散 σ^2 はともに未知とする．このとき

$$H_0: \mu=\mu_0$$
$$H_1: \mu\neq\mu_0$$

を検定する．H_0 は σ^2 を特定化していないから2次元の母数空間 $\Omega=\{\mu, \sigma^2: -\infty<\mu<\infty,\ 0<\sigma^2<\infty\}$ における半直線 $\omega=\{\mu, \sigma^2: \mu=\mu_0,\ 0<\sigma^2<\infty\}$ を指定している．それゆえ H_0 は複合仮説である．

まず尤度比の分母 $L(\Omega)$ を求めよう．例題 14.4.2 より，μ, σ^2 の最尤推定量は

$$\left.\begin{aligned}\hat{\mu}&=\bar{x}\\ \hat{\sigma}^2&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

p.367 14.4.2 (7) に代入

であるから

$$L(\Omega)=\left\{\frac{n}{2\pi\sum(x_i-\bar{x})^2}\right\}^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{n}{2}} \tag{8}$$

である．次に $L(\omega)$ は，$\mu=\mu_0$ の制約の下での σ^2 に関する L の最大値であるから(14.4.8)の第2式の μ に μ_0 を代入すれば

$$\frac{\partial\log L}{\partial\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\sum(x_i-\mu_0)^2=0$$

となる．これを σ^2 について解けば

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2 \tag{9}$$

を得る．よって $L(\omega)$ は

$$L(\omega)=\left\{\frac{n}{2\pi\sum(x_i-\mu_0)^2}\right\}^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{n}{2}} \tag{10}$$

となる．(8)，(10)より尤度比は

$$\lambda=\frac{L(\omega)}{L(\Omega)}=\left\{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\sum(x_i-\mu_0)^2}\right\}^{\frac{n}{2}} \tag{11}$$

となる．ところで中括弧の中の分母は

$$\sum(x_i-\mu_0)^2=\sum(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\mu_0)^2$$

となるから

$$\lambda=\left\{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\mu_0)^2}\right\}^{\frac{n}{2}}=\left[\frac{1}{1+n\dfrac{(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}}\right]^{\frac{n}{2}} \tag{12}$$

を得る．一方，$H_0: \mu=\mu_0$ が真なるとき，統計量

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2/\{n(n-1)\}}} \tag{13}$$

は自由度 $n-1$ のステューデントの t 分布にしたがうが，(12)よりただちに

$$\lambda=\left[\frac{1}{1+\frac{t^2}{n-1}}\right]^{\frac{n}{2}} \tag{14}$$

となり，λ は $|t|$ の単調減少関数となることが分かる．よって $|t|$ を用いれば尤度比検定と同等な検定となる．そこで

$$P(|t|\geqq t_\alpha)=1-\int_{-t_\alpha}^{t_\alpha}f(t)\,dt=\alpha \tag{15}$$

となる t_α を t 分布表より求め $-\infty<t\leqq -t_\alpha$ および $t_\alpha\leqq t<\infty$ を棄却域とすればよい．

H_0 が単純仮説のときには，λ の分布は一意的に確定するが，H_0 が複合仮説のときには，母数 $\theta_1, \cdots, \theta_m$ が確定していないので尤度比 λ の分布はかならずしも一意的に確定しない．もし一意的に確定しない場合には，ω の中のどの点についても $P(0<\lambda\leqq\lambda_\alpha)\leqq\alpha$ となるように λ_α を決めることが必要になる．

尤度比は次のような漸近的な性質をもっている．[3)]

〔定理 15.3〕 $x_1, \cdots, x_n$ を密度関数 $f(x;\theta_1, \cdots, \theta_m)$ からの無作為標本とする．$f(x;\theta_1, \cdots, \theta_m)$ はある一般的な条件を満たすものとする．このとき $r\leqq m$ として

$$H_0:\theta_1=\theta_1^0, \cdots, \theta_r=\theta_r^0$$

なる仮説を検定する．もし H_0 が真であれば $-2\log\lambda$ は $n\to\infty$ のとき自由度 r のカイ自乗分布 $C(r)$ に分布収束する．ただし λ は尤度比である．またこの尤度比検定は一致検定である．

演習問題

1　$x_1, \cdots, x_n$ が分散 $\sigma^2=1$ で未知の平均 μ をもつ正規分布からの無作為標本とするとき，対立仮説 $H_1:\mu\neq\mu_0$ に対して仮説 $H_0:\mu=\mu_0$ を検定するための尤度比検定統計量を導け．

15.4 適合度検定II

8.5では，一重分類の表における分布の適合性の検定の方法を説明した．この節ではこの方法の理論的な根拠を考えてみよう．

3) この定理の条件と証明については Wilks，前掲書，pp. 408-422 を参照せよ．

まず問題をもう一度整理して述べてみよう．

m 個の各階級に x の観測値が落ちる確率をそれぞれ $p_1, p_2, \cdots, p_m$ とすれば，大きさ n の標本で，第1階級に n_1，第2階級に $n_2, \cdots$，第 m 階級に n_m の観測度数が生ずる確率は，5.4.2の多項分布により表わされる．すなわち

$$\begin{aligned}f(n_1, n_2, \cdots, n_m)&=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m}\\&=n!\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{n_i!}p_i^{n_i}\end{aligned} \tag{1}$$

である．

いま仮説

$$H_0:p_1=p_{01},\ p_2=p_{02}, \cdots, p_m=p_{0m}$$

を検定しよう．このとき母数空間 Ω は

$\{p_1, \cdots, p_{m-1}:0<p_i<1,\ i=1, \cdots, m-1\}$ なる $m-1$ 次元の空間である（p_m は $p_m=1-\sum_{i=1}^{m-1}p_i$ により，$p_1, \cdots, p_{m-1}$ が決まれば決まる）．仮説 H_0 が指定する空間 ω は $\{p_1, \cdots, p_{m-1}:p_i=p_{0i},\ i=1, \cdots, m-1\}$ である．この場合対立仮説 H_1 は Ω の ω 以外の空間を指定している．

そこでこの検定の尤度比を求めてみよう．(1)を尤度関数 L と考え，対数をとれば

$$\log L=\log(n!)-\sum\log(n_i!)+\sum n_i\log p_i \tag{2}$$

ここで制約 $\sum_{i=1}^{m}p_i=1$ の下に(2)を最大化する $p_1, \cdots, p_m$ の値 $\hat{p}_1, \cdots, \hat{p}_m$ を求めよう．それには μ をラグランジュの未定乗数として

$$z=\log L-\mu\left(\sum_{i=1}^{m}p_i-1\right) \tag{3}$$

とおき

$$\frac{\partial z}{\partial p_i}=n_i\frac{1}{p_i}-\mu=0 \qquad i=1, 2, \cdots, m \tag{4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \mu}=\sum_{i=1}^{m}p_i-1=0 \tag{5}$$

を満足する解 $\hat{p}_1, \cdots, \hat{p}_m, \mu$ を求めればよい．(4)より

$$\mu\hat{p}_i=n_i \qquad i=1, \cdots, m \tag{6}$$

であるから，この両辺を i について合計すれば

$$\mu\sum_{i=1}^{m}\hat{p}_i=\sum_{i=1}^{m}n_i$$

となる．(5)より $\sum\hat{p}_i=1$ だから

$$\mu=\sum_{i=1}^{m}n_i=n \tag{7}$$

であることが分かる．これを(6)に代入すれば

$$\hat{p}_i=\frac{n_i}{n} \qquad i=1,\cdots,m \tag{8}$$

となり，これが $p_i(i=1,\cdots,m)$ の最尤推定値である．それゆえ $L(\Omega)$ は(1)の p_i に n_i/n を代入して

$$L(\Omega)=n!\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{n_i!}\left(\frac{n_i}{n}\right)^{n_i}$$
$$=\frac{n!}{n^n}\prod_{i=1}^{m}\frac{n_i^{n_i}}{n_i!} \tag{9}$$

となる．また一方 $L(\omega)$ は明らかに

$$L(\omega)=n!\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{n_i!}p_{0i}^{n_i} \tag{10}$$

である．

これより尤度比は

$$\lambda=\frac{L(\omega)}{L(\Omega)}=n^n\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{p_{0i}}{n_i}\right)^{n_i} \tag{11}$$

となる．定理15.3によれば，

$$-2\log\lambda=-2n\log n-2\sum_{i=1}^{m}n_i(\log p_{0i}-\log n_i) \tag{12}$$

は n が大なるとき自由度 $m-1$ のカイ自乗分布に近似的にしたがう．そこでこの(12)を用いて H_0 の検定を行なえばよい．

8.5では，カール・ピアソン(Karl Pearson)の提唱した検定統計量

$$w=\sum_{i=1}^{m}\frac{(n_i-np_{0i})^2}{np_{0i}} \tag{13}$$

を用いる検定法を説明した．その際，w は漸近的に自由度 $m-1$ のカイ自乗分布にしたがうことを証明なしに述べた．以下にその証明を与えよう．

(8)によって p_i の最尤推定量 $\hat{p}_i$ は n_i/n である $(i=1,\cdots,m)$．この場合，(5)より $\hat{p}_1,\cdots,\hat{p}_m$ の中の1個は他の $(m-1)$ 個に依存して定まる．これを $\hat{p}_m$ としよう．最尤推定量の漸近分布に関する定理14.8によれば，$\hat{p}_1,\hat{p}_2,\cdots,\hat{p}_{m-1}$

p.369

未知母数の数は m-1

は漸近的に多変量正規分布 $N(p,\Sigma)$ にしたがう．ここに p は p_i を要素とする $(m-1)$ 次ベクトル

$$p=\begin{bmatrix}p_1\\p_2\\\vdots\\p_{m-1}\end{bmatrix} \tag{14}$$

であり，Σ はその逆行列 $\Sigma^{-1}=V$ の第 (i,j) 要素 v_{ij} が

$$v_{ij}=-nE\left\{\frac{\partial^2}{\partial p_i\partial p_j}\log g(x_1,\cdots,x_m;p_1,\cdots,p_{m-1})\right\} \tag{15}$$

なる $(m-1)$ 次正方行列である．ただし $g(x_1,\cdots,x_m;p_1,\cdots,p_{m-1})$ は $n=1$ のときの多項分布確率関数で，x_i は0または1をとり $\sum_{i=1}^{m}x_i=1$ である．すなわち

$$g(x_1,\cdots,x_m;p_1,\cdots,p_{m-1})=p_1^{x_1}p_2^{x_2}\cdots p_m^{x_m}$$

それゆえ $i=j$ については

$$v_{ij}=-nE\left(-\frac{x_i}{p_i^2}-\frac{x_m}{p_m^2}\right)=n\left(\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_m}\right) \tag{16}$$

となる((5.4.20)式より $E(x_i)=np_i=p_i$ であるから)．また $i\neq j$ のときには

$$v_{ij}=-nE\left(-\frac{x_m}{p_m^2}\right)=n\frac{1}{p_m} \tag{17}$$

である．

さて，13.4の演習問題3(a)で述べたように，$(m-1)$ 次元の多変量正規分布

$$\frac{1}{(2\pi)^{(m-1)/2}|\Sigma|^{-1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\hat{p}-p)'\Sigma^{-1}(\hat{p}-p)\right\} \tag{18}$$

の2次形式

$$Q=(\hat{p}-p)'\Sigma^{-1}(\hat{p}-p) \tag{19}$$

は自由度 $m-1$ のカイ自乗分布にしたがう．ただし $\hat{p}$ は $\hat{p}_i$ を要素とする $(m-1)$ 次のベクトルとする．(19)は δ_{ij} をクロネッカー・デルタとすれば

$$Q=(\hat{p}-p)'V(\hat{p}-p)$$
$$=n\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{\delta_{ij}}{p_i}+\frac{1}{p_m}\right)(\hat{p}_i-p_i)(\hat{p}_j-p_j)$$
$$=n\frac{1}{p_m}\sum_{j=1}^{m-1}(\hat{p}_j-p_j)\sum_{i=1}^{m-1}(\hat{p}_i-p_i)+n\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{p_j}(\hat{p}_j-p_j)^2 \tag{20}$$

となる．ところで

$$\sum_{i=1}^{m-1}(\hat{p}_i-p_i)=\sum_{i=1}^{m-1}\hat{p}_i-\sum_{i=1}^{m-1}p_i=(1-\hat{p}_m)-(1-p_m)$$
$$=-(\hat{p}_m-p_m)$$

であるから，(20)より

$$Q=n\frac{1}{p_m}(\hat{p}_m-p_m)^2+n\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{p_j}(\hat{p}_j-p_j)^2$$
$$=n\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i}(\hat{p}_i-p_i)^2$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}$$

となり，これは(13)のピアソンの統計量wにほかならない．すなわちwは漸近的に自由度$m-1$のカイ自乗分布にしたがう．

かくして，2つの相異なる統計量(12)と(13)は漸近的に同一の分布$C(m-1)$にしたがう．そうして両者はしかも漸近的に同一の統計量であることを示すことができる．[4]

演習問題

1　第8章第5節の演習問題1を(12)式の尤度比検定統計量を用いて解け．

4)　M. G. Kendall and A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 2, 3rd edition, Griffin, 1973, p. 438 参照．

第16章

回帰分析II

この章の前半では，第9章の回帰分析の理論を，行列を使ってより一般的な形で再述し，第9章で保留した定理の証明を行なう．次いで回帰係数に関する線形制約の下での最小自乗法と線形制約の検定の問題を扱う．また最後の節では多重共線性の問題について述べる．

16.1　回帰模型

9.5で定義した回帰模型を行列記号で再述しよう．記号を次のように定める．

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_{10}&x_{11}&\cdots&x_{1p}\\x_{20}&x_{21}&\cdots&x_{2p}\\\vdots&&&\vdots\\x_{n0}&x_{n1}&\cdots&x_{np}\end{bmatrix},\quad \text{ただし}\ \underbrace{x_{i0}=1}_{\text{注意}},\ i=1,\cdots,n$$

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\beta_0\\\beta_1\\\vdots\\\beta_p\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{bmatrix}$$

uの従う分布はここでは不明(仮定?)

このような記号の下で9.5の回帰模型の定義は次のようになる．

いま$\boldsymbol{y}$を観測可能な確率変数のn次列ベクトル，$\boldsymbol{X}$を，その第1列の各要素が1で第2列から第$p+1$列にp個の独立変数(指定変数)に関する各n個の観測値を並べた$n\times(p+1)$の行列，$\boldsymbol{u}$を直接には観測不可能な確率変数のn次列ベクトル，$\boldsymbol{\beta}$を未知パラメータの$(p+1)$次列ベクトルとする．また$\boldsymbol{u}$は

誤差

互いに相関なし
$$\left.\begin{array}{l} E(u)=o \\ E(uu')=\sigma^2 I \end{array}\right\} \quad (1)$$

と仮定する.[1] また行列Xの位は $p+1$ とし, $p+1\leqq n$ とする. このとき

$$\underline{y=X\beta+u} \quad (2)$$

$\dfrac{\partial \sum_i u_i^2}{\partial \beta}$　$\begin{pmatrix} \partial \sum_i u_i^2/\partial\beta_0 \\ \vdots \\ \partial \sum_i u_i^2/\partial\beta_p \end{pmatrix}$

を回帰模型と呼ぶ.

最小自乗法は

$$\underline{S=\sum_{i=1}^{n} u_i^2=u'u=(y-X\beta)'(y-X\beta)} \quad (3)$$

を最小化するβすなわち$\hat{\beta}$を求めるものであるから

$$\frac{\partial S}{\partial \beta}=-2X'(\underbrace{y-X\hat{\beta}}_{\hat{u}})=o \quad (4)$$

ただしoは$(p+1)$次のゼロベクトル, を満たす解$\hat{\beta}$を求めることになる. そこで(9.5.5)式に対応する正規方程式は

$$X'X\hat{\beta}=X'y \quad (5)$$

正則

となる. $X'X$ は $(p+1)$ 次の非特異な正方行列である. なぜなら Xは $n\times(p+1)$行列で $\rho(X)=p+1$ であるから定理 12.31 により $X'X$ は $(p+1)$ 次の正値定符号行列である. また正値定符号ならば定理 12.27 によって行列式 $|X'X|>0$ である. よって $X'X$ は非特異行列である.

そこで逆行列 $(X'X)^{-1}$ が存在するから(5)より

$$\underline{\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'y} \quad (6)$$

すなわちβに対する最小自乗推定量$\hat{\beta}$が得られる.

yの推定値のベクトルを$\hat{y}$とすれば

$$\hat{y}=X\hat{\beta} \quad (7)$$

である((9.5.9)式参照). また残差のベクトル$\hat{u}$は

$$\hat{u}=y-\hat{y}=y-X\hat{\beta} \quad (8)$$

となる. すべての要素が1からなるn次列ベクトルをlで表わせば, $\hat{u}$の性質として(4)より

1) この(1)の第1式の仮定は $E(u_i^2)=\sigma^2$, $i=1, \cdots, n$ かつ $i\neq j$ として $E(u_iu_j)=\mathrm{Cov}(u_i, u_j)=0$, $i, j=1, \cdots, n$ と同じであるが, 9.5ではu_iとu_jとは統計的に独立と仮定した. 統計的に独立ならば当然 $E(u_iu_j)=0$ である. しかし $E(u_iu_j)=0$ でも統計的に独立とは限らない. それゆえ, 上の(1)のほうがより弱い仮定である.

(8)′ $X'\hat{y}-X'X\hat{\beta}=0$ (5)

$$X'\hat{u}=o \quad (9)$$

である. また(4)より　$\hat{y}=X\hat{\beta}$ の両辺を転置

$$\hat{y}'\hat{u}=\hat{\beta}'\underbrace{X'\hat{u}}_{(9)}=0 \quad (10)$$

であるから, 残差$\hat{u}$と推定値$\hat{y}$とは直交する.

残差平方和 $\sum \hat{u}_i^2$ は

$$\begin{aligned}\sum \hat{u}_i^2&=\hat{u}'\hat{u}=(y-X\hat{\beta})'(y-X\hat{\beta}) \quad \text{1×1行列(実数)}\\ &=y'y-y'X\hat{\beta}-\hat{\beta}'X'y+\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}\\ &=y'y-2\hat{\beta}'X'y+\hat{\beta}'X'X(X'X)^{-1}X'y \qquad [(6)\text{より}]\\ &=y'y-\hat{\beta}'X'y\end{aligned} \quad (11)$$

また(7)より

$$\hat{y}'\hat{y}=(X\hat{\beta})'(X\hat{\beta})=\hat{\beta}'\overset{(5)}{(X'X\hat{\beta})}=\hat{\beta}'X'y \quad (12)$$

である. (11), (12)より

$$y'y=\hat{y}'\hat{y}+\hat{u}'\hat{u} \quad (13)$$

(4)より $\sum_i u_i=0$ ∴ $\sum y_i$ $=\sum_i(\hat{y}_i-\hat{u}_i)$ $=\sum_i \hat{y}_i$

となる. (13)から $(1/n)(\sum y_i)^2$ を引けば ($\sum y_i=\sum \hat{y}_i$ であるから)

$$\sum(y_i-\bar{y})^2=\sum(\hat{y}_i-\bar{\hat{y}})^2+\sum \hat{u}_i^2 \quad (14)$$

が得られる. すなわちy_iの偏差平方和は推定値$\hat{y}_i$の偏差平方和と残差平方和に分割される((9.1.23)式参照). 決定係数は

$$R^2=\frac{\sum(\hat{y}_i-\bar{\hat{y}})^2}{\sum(y_i-\bar{y})^2}=1-\frac{\sum \hat{u}_i^2}{\sum(y_i-\bar{y})^2} \quad (15)$$

$\dfrac{V(\hat{y})}{V(y)}=\dfrac{E(\hat{y}^2)-E(\hat{y})^2}{E(y^2)-E(y)^2}$

として定義される. これは, 容易に確かめられるように, 次のようにも表わされる.[2]

$$R^2=\frac{\hat{y}'\hat{y}-\dfrac{1}{n}(l'\hat{y})^2}{y'y-\dfrac{1}{n}(l'y)^2}=1-\frac{\hat{u}'\hat{u}}{y'y-\dfrac{1}{n}(l'y)^2} \quad (15')$$

次にβに対する推定量としての$\hat{\beta}$の性質を述べよう.

〔定理 16.1〕(ガウス-マルコフ (Gauss-Markoff) の定理)　回帰模型において, (6)によって与えられる最小自乗推定量$\hat{\beta}$はβに対する最良線形不偏推定量である.

7.5.1 で述べたように, この場合最良とはあらゆる線形不偏推定量の中で分

2) また本節演習問題3の(iv)式のようにも表わされる.

散が最小という意味であり，線形とは推定量が確率変数 $y_i(i=1,\cdots,n)$ の線形関数になっているという意味である．

（証明） Aを任意の$(p+1)\times n$行列とし，$\beta^*=Ay$とする．β^*の要素β_i^*は$y_1,\cdots,y_n$の線形関数である．以下，β^*がβの最良線形不偏推定量となるようなAの要素を求めてみよう．

X … given 固定と考える

$y=X\beta+u$ ← 確率

$$A=(X'X)^{-1}X'+B \tag{16}$$

とおく．かくすればBを決めればAも決まる．まず不偏であるためには

$$\begin{aligned}E(\beta^*)&=E(Ay)=E[\{(X'X)^{-1}X'+B\}y]\\&=\{(X'X)^{-1}X'+B\}X\beta=\beta+BX\beta\end{aligned}$$

より

不偏

$$E(\beta^*)=\beta+BX\beta=\beta$$

でなければならない．それゆえ $BX\beta=o$ が任意のβについて成立しなければならない．このことは

$$BX=O \tag{17}$$

を意味する．

次に，「最良」であるためにはβ_i^*の分散$\sigma_{\beta_i^*}^2(i=0,1,\cdots,p)$を(17)の制約の下に最小ならしめるように$B$を定めなくてはならない．$\beta^*$の共分散行列を$\Sigma_{\beta^*\beta^*}$で表わせば

$\beta^*=Ay=\{(X'X)^{-1}X'+B\}y$

$((X'X)^{-1}X'+B)(X\beta+u)-\beta$

$$\begin{aligned}\Sigma_{\beta^*\beta^*}&=E[(\beta^*-\beta)(\beta^*-\beta)']\\&=E\{[((X'X)^{-1}X'+B)y-\beta][((X'X)^{-1}X'+B)y-\beta]'\}\end{aligned}$$

$\beta+((X'X)^{-1}X'+B)u-\beta$

ここでyに$X\beta+u$を代入し$BX=O$を使えば

$$\begin{aligned}\Sigma_{\beta^*\beta^*}&=E\{[(X'X)^{-1}X'+B]uu'[(X'X)^{-1}X'+B]'\}\\&=[(X'X)^{-1}X'+B]E(uu')[(X'X)^{-1}X'+B]'\\&=\sigma^2[(X'X)^{-1}X'+B][(X'X)^{-1}X'+B]'\\&=\sigma^2\{(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}+BX(X'X)^{-1}\\&\quad+(X'X)^{-1}X'B'+BB'\}=\sigma^2\{(X'X)^{-1}+BB'\}\end{aligned} \tag{18}$$

β^*が最良であるためには$\Sigma_{\beta^*\beta^*}$の対角要素$\sigma_{\beta_i^*}^2$が最小でなければならない．ところでBB'は定理12.39 (p. 321) により非負定符号であるから，定理12.41 (p. 310) によりBB'のすべての対角要素は非負である．すなわちBB'の対角要素をh_{ii}で表わせば$h_{ii}\geqq 0$である．それゆえ$\Sigma_{\beta^*\beta^*}$の対角要素は$h_{ii}=0$の

とき最小となる．$B=[b_{ij}]$とすれば$h_{ii}=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^2$であるから，すべての$i$について$h_{ii}=0$であることは，すべての$i$および$j$について$b_{ij}=0$すなわち

$$B=O \tag{19}$$

を意味する．これは「不偏性」の条件(17)も満たしている．したがって(16)，(19)より

$$A=(X'X)^{-1}X'$$

すなわち

$$\beta^*=(X'X)^{-1}X'y=\hat{\beta} \tag{20}$$

となる（証明終り）．

また(18)，(19)より，$\hat{\beta}$の共分散行列$\Sigma_{\hat{\beta}\hat{\beta}}$は

$$\Sigma_{\hat{\beta}\hat{\beta}}=E[(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)']=\sigma^2(X'X)^{-1} \tag{21}$$

であることが分かる．

次にu_iの分散σ^2の不偏推定量を求めよう．(8)より

$$\begin{aligned}\hat{u}&=y-X\hat{\beta}=y-X(X'X)^{-1}X'y\\&=[I-X(X'X)^{-1}X']y=[I-X(X'X)^{-1}X'](X\beta+u)\\&=[I-X(X'X)^{-1}X']u\end{aligned} \tag{22}$$

$X\beta-X\beta$

となる．ここで

$$G=I-X(X'X)^{-1}X' \tag{23}$$

とおくと，明らかに

$$G=G' \text{ かつ } G^2=G \tag{24}$$

を満足する．すなわちn次の正方行列Gはべき等行列である．

そこで，Gの要素をg_{ij}で表わせば，残差平方和は

$$\hat{u}'\hat{u}=u'G'Gu=u'G^2u=u'Gu=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}g_{ij}u_iu_j \tag{25}$$

となる．残差平方和の期待値をつくれば

$$\begin{aligned}E(\hat{u}'\hat{u})&=\sum_j\sum_i g_{ij}E(u_iu_j)\\&=\sum_i g_{ii}\sigma^2 \qquad [(1)\text{の第2式より}]\\&=\sigma^2\,\mathrm{tr}(G)\end{aligned} \tag{26}$$

$i=j$ のときのみ σ^2

となる．

$$\mathrm{tr}(G)=\mathrm{tr}[I_n-X(X'X)^{-1}X']$$
$$=\mathrm{tr}(I_n)-\mathrm{tr}\{(X'X)^{-1}X'X\} \qquad \text{〔(12.1.31)式より〕}$$
$$=\mathrm{tr}(I_n)-\mathrm{tr}(I_{p+1}) \quad \text{逆行列} \quad \text{p.273}$$
$$=n-(p+1)=n-p-1 \tag{27}$$

であるから

$$E(\hat{u}'\hat{u})=(n-p-1)\sigma^2 \tag{28}$$

したがって

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\hat{u}'\hat{u}}{n-p-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}{n-p-1} \tag{29}$$

は σ^2 の不偏推定量である．$\hat{\sigma}^2$ を残差分散と呼ぶ．

また

$$E\{\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}\}=\sigma^2(X'X)^{-1}=\Sigma_{\beta\beta} \quad \text{p.391 (21)} \tag{30}$$

であるから

$$\hat{\Sigma}_{\beta\beta}=\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1} \tag{31}$$

は標本回帰係数の共分散行列 $\Sigma_{\beta\beta}$ の不偏推定量となる．

最後に，標本の大きさ n を大きくしたときの $\hat{\beta}$ の漸近的性質について述べよう．

回帰模型の仮定に加えて，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}X'X=Q \tag{32}$$

を仮定する．ただし Q は一定値の正値定符号行列とする．このとき $\hat{\beta}$ は β の一致推定量である．その理由は次のごとくである．

(21)より

$$\lim_{n\to\infty}\Sigma_{\beta\beta}=\sigma^2\lim_{n\to\infty}(X'X)^{-1}=\sigma^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}X'X\right)^{-1}$$
$$=\sigma^2 0 Q^{-1}=O \tag{33}$$

となる．それゆえ個別の回帰係数推定量の分散についても $\lim_{n\to\infty}\sigma_{\hat{\beta}_j}{}^2=0\,(j=0,1,\cdots,p)$ が成立する．一方 $E(\hat{\beta})=\beta$ であるから，$\hat{\beta}_j$ は β_j の不偏推定量である．それゆえ定理14.4 (p.313) により各 $\hat{\beta}_j$ は β_j の一致推定量である．

ここでは証明を省略するが，以上の仮定に加えてさらに，攪乱項 $u_1,\cdots,u_n$ は統計的に独立に同一な分布にしたがうことが仮定されれば，(i) $n\to\infty$ のとき $\sqrt{n}(\hat{\beta}-\beta)$ は多変量正規分布 $N(o,\sigma^2Q^{-1})$ に分布収束し，かつ (ii) (29) の $\hat{\sigma}^2$ は σ^2 の一致推定量であることがいえる.[3]

次に，行列を用いた回帰分析の数値例をあげよう．最初の例題は 9.1 の棒鋼の長さの例である．

例題 16.1.1 $p=1,\ n=5$

$$y=\begin{bmatrix}1,002\\1,006\\1,009\\1,007\\1,014\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}1 & 10\\1 & 15\\1 & 20\\1 & 25\\1 & 30\end{bmatrix}$$

$$X'y=\begin{bmatrix}5,038\\100,885\end{bmatrix},\quad y'y=5,076,366$$

$$X'X=\begin{bmatrix}5 & 100\\100 & 2,250\end{bmatrix},\quad |X'X|=1,250$$

$$(X'X)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2,250}{1,250} & -\frac{100}{1,250}\\-\frac{100}{1,250} & \frac{5}{1,250}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{9}{5} & -\frac{2}{25}\\-\frac{2}{25} & \frac{1}{250}\end{bmatrix}$$

(6)より

$$\hat{\beta}=\begin{bmatrix}\hat{\beta}_0\\\hat{\beta}_1\end{bmatrix}=(X'X)^{-1}X'y=\begin{bmatrix}\frac{9}{5} & -\frac{2}{25}\\-\frac{2}{25} & \frac{1}{250}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5,038\\100,885\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}997.6\\0.5\end{bmatrix}$$

$$\hat{u}'\hat{u}=y'y-\hat{\beta}'X'y=5,076,366-[997.6\quad 0.5]\begin{bmatrix}5,038\\100,885\end{bmatrix}=14.7$$

$$\hat{\sigma}^2=\hat{u}'\hat{u}/(n-p-1)=14.7/(5-1-1)=4.9$$

$$R^2=1-\frac{\hat{u}'\hat{u}}{y'y-\frac{1}{n}(l'y)^2}=1-\frac{14.7}{5,076,366-\frac{1}{5}(5,038)^2}=0.8096$$

$$\hat{\Sigma}_{\beta\beta}=\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}=\begin{bmatrix}8.8200 & -0.3920\\-0.3920 & 0.0196\end{bmatrix}$$

3) 証明は拙著『計量経済学』有斐閣，1982年，96～98ページ参照．

例題 16.1.2　次に例題 9.5.1 を例に用いてみよう．そこでは夫婦と未成年者(もしいれば)の世帯における y：食費(1000円/週)，x_1：実収入(1000円/週)，x_2：未成年者数(人)に関するデータが次のように与えられていた．

$$X=\begin{array}{ccc} (x_0) & (x_1) & (x_2) \\ \end{array}$$
$$X=\begin{bmatrix}1 & 45 & 2\\ 1 & 79 & 2\\ 1 & 62 & 1\\ 1 & 56 & 0\\ 1 & 46 & 3\\ 1 & 38 & 4\end{bmatrix},\quad y=\begin{bmatrix}15\\18\\17\\13\\17\\14\end{bmatrix}$$

$$y_i=\beta_0+\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+u_i$$

あるいは

$$\boldsymbol{y}=X\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{u}$$

なる回帰模型を仮説したとき，$\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}^2$, R^2 を求める．

$$X'X=\begin{bmatrix}6 & 326 & 12\\ 326 & 18,806 & 600\\ 12 & 600 & 34\end{bmatrix},\quad |X'X|=49,376$$

$$(X'X)^{-1}=\frac{1}{49,376}\begin{bmatrix}279,404 & -3,884 & -30,072\\ -3,884 & 60 & 312\\ -30,072 & 312 & 6,560\end{bmatrix}$$

$$X'\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}94\\5,193\\190\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}=1,492$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=(X'X)^{-1}X'\boldsymbol{y}=\frac{1}{49,376}\begin{bmatrix}380,684\\5,764\\39,848\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7.70990\\0.11674\\0.80703\end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{\beta}}'X'\boldsymbol{y}$$

$$=1,492-[7.70990\quad 0.11674\quad 0.80703]\begin{bmatrix}94\\5,193\\190\end{bmatrix}=7.70$$

$$\hat{\sigma}^2=\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}/(n-p-1)=7.70/(6-2-1)=2.57$$

$$R^2=1-\frac{\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}}{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}-\frac{1}{n}(\boldsymbol{l}'\boldsymbol{y})^2}=1-\frac{7.70}{1,492-\frac{1}{6}(94)^2}=0.602$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\hat{\beta}\hat{\beta}}=\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}14.5429 & -0.2022 & -1.5652\\ -0.2022 & 0.0031 & 0.0162\\ -1.5652 & 0.0162 & 0.3414\end{bmatrix}$$

演 習 問 題

1　第9章第1節演習問題1のデータを用いて例題 16.1.1 のような計算を行なえ．

2　第9章第5節演習問題1のデータを用いて例題 16.1.2 のような計算を行なえ．

3　データが標本平均からの偏差で表わされているとき，すなわち

$$\left.\begin{array}{ll}\check{y}_i=y_i-\bar{y} & i=1,\cdots,n\\ \check{x}_{ij}=x_{ij}-\bar{x}_j & j=1,2,\cdots,p;\ i=1,\cdots,n\end{array}\right\}$$

となっているとき，正規方程式(5)は

$$\left.\begin{array}{l}\check{X}'\check{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_*=\check{X}'\check{\boldsymbol{y}}\\ \bar{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1\bar{x}_1+\cdots+\hat{\beta}_p\bar{x}_p\end{array}\right\}\qquad\text{(i)}$$

ただし

$$\check{\boldsymbol{y}}=\begin{bmatrix}\check{y}_1\\ \vdots\\ \check{y}_n\end{bmatrix},\quad \check{X}=\begin{bmatrix}\check{x}_{11} & \cdots & \check{x}_{1p}\\ \vdots & & \vdots\\ \check{x}_{n1} & \cdots & \check{x}_{np}\end{bmatrix},\quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_*=\begin{bmatrix}\hat{\beta}_1\\ \vdots\\ \hat{\beta}_p\end{bmatrix}$$

のように変形されることを示せ．またこれより，σ^2 および $\hat{\boldsymbol{\beta}}_*$ の共分散行列の不偏推定量は

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-p-1}\check{\boldsymbol{y}}'\check{\boldsymbol{y}}(1-R^2)\qquad\text{(ii)}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\hat{\beta}_*\hat{\beta}_*}=\hat{\sigma}^2(\check{X}'\check{X})^{-1}\qquad\text{(iii)}$$

ただし

$$R^2=\frac{\hat{\boldsymbol{\beta}}_*'\check{X}'\check{\boldsymbol{y}}}{\check{\boldsymbol{y}}'\check{\boldsymbol{y}}}\qquad\text{(iv)}$$

で与えられることを導け．

4　前問の結果を用いて 9.5 の演習問題1のデータについて回帰係数 β_1, β_2 の推定値およびその共分散行列を求めよ．

5　共通の独立変数 $x_{i1}, \cdots, x_{ip}$ 上への，2種類の従属変数 y_{i1}, y_{i2} の回帰式を最小自乗法により当てはめ，その残差を v_{i1}, v_{i2} とする $(i=1, \cdots, n)$．

$$Y=\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ \vdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} \end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix},\quad V=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ \vdots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y'Y & Y'X \\ X'Y & X'X \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}=B$$

とおく．ただし B_{11} は 2×2 行列．このとき

(a)　$B_{11}^{-1}=V'V$ となることを導け((12.6.35)を用いよ)．

(b)　(a)の結果から v_1 と v_2 の標本相関係数(すなわち $x_1,\cdots,x_p$ を固定したときの y_1 と y_2 の標本偏相関係数)が $-b_{12}/\sqrt{b_{11}b_{22}}$ で与えられることを示せ．ただし b_{ij} は B の第(i,j)要素である．

(c)　これと問3の結果から，10.4の注5の命題を証明せよ．

16.2　正規回帰模型

前節の回帰模型において，撹乱項 $u_i(i=1,\cdots,n)$ が相互に独立に正規分布 $N(0,\sigma^2)$ にしたがうという仮定を追加すれば，その模型は正規回帰模型(normal regression model)と呼ばれる．

回帰模型は正規回帰模型をその特殊ケースとして含むから，前節の結論はそのまま正規回帰模型にも当てはまる．しかも，正規分布という仮定の代償として，いろいろな重要な結果を得ることができる．とりあえず定数として考えた方が理解しやすい．

さて上記の仮定は換言すれば u が多変量正規分布 $N(o,\sigma^2I)$ にしたがうということである．したがって $y(=X\beta+u)$ は $N(X\beta,\sigma^2I)$ にしたがう．そこでこれから回帰係数 $\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_p$ および撹乱項の分散 σ^2 に対する最尤推定量が次のように求められる．尤度関数は[4]

p.323　$|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sigma}$

このケースでは　$\Sigma^{-1}=\frac{1}{\sigma^2}I$

$$\begin{aligned} L&=f(y;\beta,\sigma^2)\\ &=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-X\beta)'(y-X\beta)\right\} \end{aligned}\qquad(1)$$

である．両辺の対数をとれば

$$\begin{aligned} \log L&=\log f(y;\beta,\sigma^2)\\ &=-\frac{n}{2}\log(2\pi)-\frac{n}{2}\log\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\underbrace{(y-X\beta)'(y-X\beta)}_{\text{展開せよ．}} \end{aligned}\qquad(2)$$

となる．β および σ^2 の最尤推定量は

4)　結合密度関数 $f(y_1,y_2,\cdots,y_n;\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_p,\sigma^2)$ を $f(y;\beta,\sigma^2)$ で表わす．

これは全くスカラー　$y'y-\beta'X'y-y'X\beta+\beta'X'X\beta$

$=y'y-2y'X\beta+\beta'X'X\beta$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\log L}{\partial\beta}&=\frac{2}{2\sigma^2}(X'y-X'X\beta)=o\\ \frac{\partial\log L}{\partial\sigma^2}&=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}(y-X\beta)'(y-X\beta)=0 \end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

の解である．β と σ^2 の最尤推定量を $\tilde{\beta}$，$\tilde{\sigma}^2$ で表わそう．すると(3)より

$$\tilde{\beta}=(X'X)^{-1}X'y\qquad(4)$$

$$\tilde{\sigma}^2=\frac{1}{n}(y-X\tilde{\beta})'(y-X\tilde{\beta})\qquad(5)$$

が得られる．(4)の $\tilde{\beta}$ は最小自乗推定量 $\hat{\beta}$ と同一である．かくして次の定理が得られた．p.396

〔定理 16.2〕　正規回帰模型において，β の最尤推定量$\tilde{\beta}$は最小自乗推定量 $\hat{\beta}$ に等しい．また σ^2 の最尤推定量は $\hat{u}'\hat{u}/n$ である．

$\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\cdots,\hat{\beta}_p$ は多変量正規分布にしたがう．なぜなら，$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'y$ において $(X'X)^{-1}X'$ は一定値の行列であり，n 次ベクトル y は平均 $X\beta$，共分散 σ^2I の正規分布にしたがうから，定理 13.7 (p.335) により，$\hat{\beta}$ も正規分布にしたがい，その平均は $(X'X)^{-1}X'X\beta=\beta$，共分散は $(X'X)^{-1}X'\sigma^2IX(X'X)^{-1}=\sigma^2(X'X)^{-1}$ である．すなわち $\hat{\beta}$ は多変量正規分布 $N[\beta,\sigma^2(X'X)^{-1}]$ にしたがって分布する．

次に(16.1.22)式 (p.399) より $\hat{u}=[I-X(X'X)^{-1}X']u$ であり，$[I-X(X'X)^{-1}X']$ は位 $n-p-1$ のべき等行列 (p.308) である．[5] また残差平方和は(16.1.29)式により

$$\hat{u}'\hat{u}=u'[I-X(X'X)^{-1}X']u=(n-p-1)\hat{\sigma}^2\qquad(6)$$

である．そこで定理 13.11 (p.340) により $(n-p-1)\hat{\sigma}^2/\sigma^2$ は非心度パラメータ $\delta^2=0$，自由度 $n-p-1$ の非心カイ自乗分布，つまり自由度 $n-p-1$ のカイ自乗分布にしたがって分布することが分かる．

p.341

$\hat{\sigma}^2$ はベクトル $\hat{\beta}$ と独立に分布する．[6] なぜなら，定理 13.14 によれば，1次形式統計量のベクトル $\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'y$ が，2次形式統計量 $\hat{\sigma}^2=u'[I-X(X'X)^{-1}X']u/(n-p-1)=y'[I-X(X'X)^{-1}X']y/(n-p-1)$ と統計的に独立であ

5)　$G=I-X(X'X)^{-1}X'$ はべき等行列だから，系 12.1 により，$\rho(G)=\mathrm{tr}(G)=n-p-1$((16.1.27)式参照)．

6)　つまり $\hat{\sigma}^2$ と $\hat{\beta}_0$，$\hat{\sigma}^2$ と $\hat{\beta}_1$，…，$\hat{\sigma}^2$ と $\hat{\beta}_p$，がそれぞれ相互に独立に分布する．

るためには，1次形式の行列と2次形式の行列の積がゼロ行列であればよいが，明らかに

$$[(X'X)^{-1}X'][I-X(X'X)^{-1}X']=O$$

であるから，$\hat{\beta}$ と $\hat{\sigma}^2$ は統計的に独立である．以上をまとめれば次のようになる．

〔定理 16.3〕 正規回帰模型において，推定回帰係数の $(p+1)$ 次ベクトル $\hat{\beta}$ は平均 β，共分散 $\sigma^2(X'X)^{-1}$ の正規分布にしたがう．また残差分散を $\hat{\sigma}^2$ とすれば $(n-p-1)\hat{\sigma}^2/\sigma^2$ は自由度 $n-p-1$ のカイ自乗分布にしたがう．そして $\hat{\sigma}^2$ はベクトル $\hat{\beta}$ と独立に分布する．

9.3でその証明を保留した単純正規回帰模型における最小自乗推定量 $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ および残差分散 $\hat{\sigma}^2$ の分布に関する命題1°～4°は，上の定理の $p=1$ の場合に相当する．9.3では，それらの命題が成立すれば $(\hat{\alpha}-\alpha)/\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}}$, $(\hat{\beta}-\beta)/\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}$ がそれぞれ t 分布するということを利用して，α, β に関する区間推定や仮説検定が行なえることを示した．

一般の正規回帰模型における $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, …, $\hat{\beta}_p$ についてもそれとまったく同様な議論が成立する．すなわち，$\hat{\beta}_j$ の周辺分布は $N(\beta_j,\ \sigma_{\hat{\beta}_j}{}^2)$ である．ただし $\sigma_{\hat{\beta}_j}{}^2=c_{jj}\sigma^2$ で c_{jj} は $(X'X)^{-1}$ の第 j 対角要素(ただし $j=0, 1, 2, \cdots, p$) である．それゆえ，$(\hat{\beta}_j-\beta_j)/(\sigma\sqrt{c_{jj}})$ は $N(0, 1)$ にしたがい，かつカイ自乗分布 $C(n-p-1)$ にしたがう $(n-p-1)\hat{\sigma}^2/\sigma^2$ と統計的に独立であるから，定理6.3 により

p.326

の分布

p.137

$$t=\frac{\hat{\beta}_j-\beta_j}{\sigma\sqrt{c_{jj}}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{\hat{\sigma}^2}}=\frac{\hat{\beta}_j-\beta_j}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}} \tag{7}$$

は自由度 $n-p-1$ のステューデントの t 分布にしたがう．ただし

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}=\sqrt{c_{jj}}\hat{\sigma} \tag{8}$$

であり，これは $\hat{\beta}_j$ の推定標準偏差または(推定)標準誤差と呼ばれる．また $E(\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}{}^2)=c_{jj}E(\hat{\sigma}^2)=c_{jj}\sigma^2=\sigma_{\hat{\beta}_j}{}^2$ であるから $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}{}^2$ は $\sigma_{\hat{\beta}_j}{}^2$ の不偏推定量である．

t 分布を利用しての回帰係数の推定，検定は9.3とまったく同様であるからここでは省略する．ただ，その際注意しなければならないことは，たとえば $\hat{\beta}_0$ の95% 信頼限界が $\hat{\beta}_0\pm t_{0.05}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}$ であるという場合には，他の β_1, β_2, …, β_p の推定についてはなんら言及していない点である．たとえば $p=1$ のとき $\hat{\beta}_0=1.2$, $\hat{\beta}_1=3.5$ と推定され，β_0 の信頼限界が 1.2 ± 0.5 となったとしたとき，それは β_1 が3.5のとき β_0 の信頼限界が 1.2 ± 0.5 であるといっているのではない．β_1 の水準はなんら指定していないのである．これに対し β_0 と β_1 の値を同時に推定したい場合には，信頼域(confidence region)を (β_0, β_1) 平面の上に設定しなければならない．しかしこれらの問題についてはこの本では説明を省略する.[7]

また仮説検定の場合にも，たとえば $\beta_0=0$ という帰無仮説を t 検定する際には，β_1, …, β_p がどのような値かについてはなんら指定していない．しかし実際には，他の β_j の値がいくらであるかを指定したうえで β_0 の値を問題にしたい場合が多い．たとえば上の $p=1$ の例で β_0 が0か否かは β_1 が3.5であることを前提にしたうえで問題にしたいとする．このような仮説検定については16.4で述べよう．

演習問題

1　演習問題9.5.1の β_0, β_1, β_2 のそれぞれに対する95% 信頼区間を設定せよ．

2　例題16.1.2において，仮説 $H_0:\beta_2=1.0$ を対立仮説 $H_1:\beta_2\neq1.0$ に対してサイズ1% で検定せよ．

16.3　制約付最小自乗法

他の情報から，回帰係数 β_0, β_1, …, β_p が特定の関係を満足しなければならないことが知られていることがある．この節では β_0, β_1, …, β_p の間に1次式の形の先験的な制約を課したときの β の最小自乗推定を考えてみよう．

いま r 個(ただし $r\leq p+1$)の制約式があるものとしよう．A を $r\times(p+1)$ で位 $\rho(A)=r$ の行列，a を r 次列ベクトルでいずれの要素も既知とすれば，それらの制約は

$$A\beta=a \tag{1}$$

で表わされる．

この(1)は次のように種々な形の制約を含んでいる．

例1　制約 $\beta_j=\beta_j{}^*$ の場合：

7) 拙著，前掲書，100～102ページ参照．

$$A=[0 \cdots 0 \ \underset{(j+1\text{ 番目})}{1} \ 0 \cdots 0]$$

$$a=[\beta_j^*]$$

例2 制約 $\beta_0=\beta_0^*$, $\beta_1=\beta_1^*$, $\cdots$, $\beta_p=\beta_p^*$ の場合：

$$A=I_{p+1}$$

$$a'=[\beta_0^* \quad \beta_1^* \ \cdots \ \beta_p^*]$$

例3 制約 $\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_p=1$ の場合：

$$A=[0 \quad 1 \quad 1 \cdots 1]$$

$$a=[1]$$

(1)を満足するという制約の下で残差平方和を最小にする β の値 $\tilde{\beta}$ を求めるために，ラグランジュ乗数法を用いる．λ を r 個のラグランジュ未定乗数を要素とする列ベクトルとして

$$S=(y-X\beta)'(y-X\beta)-2(A\beta-a)'\lambda \tag{2}$$

を β に関して偏微分して o に等しいとおけば

$$\frac{\partial S}{\partial \beta}=-2X'(y-X\beta)-2A'\lambda=o \qquad X'y + A'\lambda = X'X\beta \tag{3}$$

となる．これより

$$\tilde{\beta}=(X'X)^{-1}X'y+(X'X)^{-1}A'\lambda$$
$$=\hat{\beta}+(X'X)^{-1}A'\lambda \tag{4}$$

を得る．ただし $\hat{\beta}$ は制約がないときの β の最小自乗推定量（(16.1.6)式）である．(4)の左側より A を掛ければ

$$A\tilde{\beta}=A\hat{\beta}+A(X'X)^{-1}A'\lambda$$

となるが，$\tilde{\beta}$ は(1)の制約を満足しなければならないから $A\tilde{\beta}=a$ となる．よって

$$a=A\hat{\beta}+A(X'X)^{-1}A'\lambda$$

より

$$\lambda=[\overbrace{A(X'X)^{-1}A'}^{B}]^{-1}(a-A\hat{\beta}) \tag{5}$$

を得る．これを(4)にふたたび代入すれば

$$\tilde{\beta}=\hat{\beta}+(X'X)^{-1}A'B^{-1}(a-A\hat{\beta}) \tag{6}$$

となる．ただし

$$B=A(X'X)^{-1}A' \tag{7}$$

$y = X\beta + u \rightarrow X'y = X'X\beta + X'u \rightarrow \underbrace{(X'X)^{-1}X'y}_{\hat{\beta}} = \beta + (X'X)^{-1}X'u$

とする．ここで(6)を整理しかつ $\hat{\beta}-\beta=(X'X)^{-1}X'u$ を代入すると

$$\tilde{\beta}=\beta-(X'X)^{-1}A'B^{-1}(A\beta-a)$$
$$+\{I-(X'X)^{-1}A'B^{-1}A\}(X'X)^{-1}X'u \tag{8}$$

となる．(1)により $A\beta-a=o$ だから

$$\tilde{\beta}=\beta+\underbrace{\{I-(X'X)^{-1}A'B^{-1}A\}(X'X)^{-1}X'}_{\text{定数(とする)}}\underbrace{u}_{\text{変数}} \tag{9}$$

を得る．これより明らかに　$E(u)=0$

$$E(\tilde{\beta})=\beta \tag{10}$$

が成立する．すなわち制約付最小自乗法による回帰係数推定量は不偏である．

次に $\tilde{\beta}$ の共分散行列を求める．

$$\Sigma_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}}=E(\tilde{\beta}-\beta)(\tilde{\beta}-\beta)'$$
$$=\{I-(X'X)^{-1}A'B^{-1}A\}(X'X)^{-1}X'E(uu')X(X'X)^{-1}$$
$$\times\{I-(X'X)^{-1}A'B^{-1}A\}'$$
$$=\sigma^2(X'X)^{-1}\{I-A'B^{-1}A(X'X)^{-1}\}$$

(7)式参照

ここで $\hat{\beta}$ の共分散行列 $\Sigma_{\hat{\beta}\hat{\beta}}=\sigma^2(X'X)^{-1}$ をたんに Σ で表わせば

$$\Sigma_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}}=\Sigma-\Sigma A'(A\Sigma A')^{-1}A\Sigma \tag{11}$$

となる．Σ は仮定により $(p+1)$ 次の正値定符号であり（p.310），A は位が r の $r\times(p+1)$ 行列である．よって定理 12.28（p.315）により $A\Sigma A'$ は $(r\times r$ の$)$ 正値定符号である．また定理 12.30（p.316）により $(A\Sigma A')^{-1}$ も正値定符号である．さらに $(A\Sigma)$ は $r\times(p+1)$ で位が r である（定理 12.20）から，定理 12.38 を適用して $(A\Sigma)'(A\Sigma A')^{-1}A\Sigma$ は非負定符号である．そして定理 12.41 により非負定符号行列の対角要素はすべて非負である．よって(11)式の対角要素に着目すれば，$\Sigma_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}}$ の対角要素は $\Sigma_{\hat{\beta}\hat{\beta}}$ の対角要素からなんらかの非負の値を引いた値になっている．それゆえ

$$\sigma_{\tilde{\beta}_j}^2 \leqq \sigma_{\hat{\beta}_j}^2 \qquad j=0,\ 1,\ \cdots,\ p \tag{12}$$

すなわち制約付最小自乗推定量 $\tilde{\beta}$ は，制約なしの最小自乗推定量 $\hat{\beta}$ よりもより有効でありうる．

演 習 問 題

1　第9章第5節演習問題2（ダグラス型生産関数の推定）において $\beta_1+\beta_2=1$ の制約の下に最小自乗推定を行ない，制約なしで得られた結果と比較せよ．

2　前問で $\beta_1=1-\beta_2$ を利用して回帰模型

$$y-x_1=\beta_0+\beta_2(x_2-x_1)+u$$

と変形する．$y-x_1$ を従属変数，x_2-x_1 を独立変数とする単純回帰模型として係数 β_0, β_1, β_2 を推定し，前問の制約付最小自乗法の結果と比較せよ．

3 第9章第1節演習問題1のデータに，$\beta/\alpha=0.2$ の制約の下で $y^*=\alpha+\beta x$ を最小自乗法により当てはめよ．

16.4 回帰係数に関する線形制約の検定

正規回帰模型において，回帰係数 β が前節のような線形制約を満たしているという仮説を検定する問題を考える．すなわち

$$H_0: A\beta=a \quad (\text{仮説})$$
$$H_1: A\beta\neq a \quad (\text{対立仮説})$$

とする．

尤度比検定を用いることにしよう．正規回帰模型を仮定すれば尤度関数は(16.2.1)式すなわち

p.404

$$L=f(y;\ \beta,\ \sigma^2)=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-X\beta)'(y-X\beta)\right\} \qquad (1)$$

である．そこでわれわれは尤度比

$$\lambda=\frac{L(\omega)}{L(\Omega)} \qquad (2)$$

を見いださなければならない．ただしこの場合 $L(\omega)$ は $A\beta=a$ の制約の下での σ^2 に関する尤度関数 L の最大値，$L(\Omega)$ は制約なしの L の最大値である(15.3参照)．

(1)の対数をとると

$$\log f(y;\ \beta,\ \sigma^2)=-\frac{n}{2}\log 2\pi-\frac{n}{2}\log\sigma^2 -\frac{1}{2\sigma^2}(y-X\beta)'(y-X\beta) \qquad (3)$$

この(3)を $A\beta-a=o$ という制約の下で最小化する．そのためには

$$z=-\frac{n}{2}\log\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}(y-X\beta)'(y-X\beta)-(A\beta-a)'\mu \qquad (4)$$

を β と σ^2 に関して偏微分してゼロとおいた式と制約式とを連立させて，β と σ^2 に関する解を求めればよい．ただし μ は r 個のラグランジュ未定乗数を要素

β と σ^2 が未知

とする列ベクトルである． ? $X'(y-X\beta)$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial\beta}&=\frac{1}{\sigma^2}(y-X\beta)'X-A'\mu=o\\ \frac{\partial z}{\partial\sigma^2}&=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}(y-X\beta)'(y-X\beta)=0\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

最尤推定量

p.408

となるが，(5)の第1式は前節(16.3.3)と同値(ただし $\lambda=\sigma^2\mu$) でありかつ第2式は μ を含まない．それゆえ(5)の β に関する解は前節の制約付最小自乗推定量 $\tilde\beta$ と同一である．したがって(5)の第2式より σ^2 に関する解は

$$\tilde\sigma^2=\frac{1}{n}(y-X\tilde\beta)'(y-X\tilde\beta) \qquad (6)$$

となる．これを(1)に代入すれば

$$L(\omega)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}n^{\frac{n}{2}}[(y-X\tilde\beta)'(y-X\tilde\beta)]^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{n}{2}} \qquad (7)$$

を得る．

一方 $\log f(y;\ \beta,\ \sigma^2)$ を β と σ^2 に関して偏微分してゼロとおくと，結果は16.2の最尤推定量を求めるための式(16.2.3)に等しい．そこでそれらの解(最尤推定量)を(1)に代入すれば p.405

$$L(\Omega)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}n^{\frac{n}{2}}[(y-X\hat\beta)'(y-X\hat\beta)]^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{n}{2}} \qquad (8)$$

が得られる．ただし $\hat\beta$ は16.2で述べたように

$$\hat\beta=(X'X)^{-1}X'y$$

すなわち最小自乗推定量である．それゆえ(7)，(8)より

$$\lambda=\frac{L(\omega)}{L(\Omega)}=\left[\frac{(y-X\hat\beta)'(y-X\hat\beta)}{(y-X\tilde\beta)'(y-X\tilde\beta)}\right]^{\frac{n}{2}} \qquad (9)$$

を得る．

さて λ の分布を直接求めることはむずかしいので，λ がその単調関数となるような変数を求めよう．

(16.3.8)より

p.409

$$\begin{aligned}y-X\tilde\beta&=X\beta+u-X[\beta-(X'X)^{-1}A'B^{-1}(A\beta-a)\\&\quad+\{I-(X'X)^{-1}A'B^{-1}A\}(X'X)^{-1}X'u]\\&=q+Qu\end{aligned} \qquad (10)$$

となる．ただし

$$q=X(X'X)^{-1}A'B^{-1}(A\beta-a) \tag{11}$$

$$Q=I-X(X'X)^{-1}X'+X(X'X)^{-1}A'B^{-1}A(X'X)^{-1}X' \tag{12}$$

である．容易に確かめられるように $Q=Q'$ かつ $Q^2=Q$ が成立するから Q はべき等行列である．またその位は p.309 系12.1, p.273 (28), (31)

408 $B=A(X'X)^{-1}A'$

$$\begin{aligned}\rho(Q)&=\mathrm{tr}(I)-\mathrm{tr}\{X(X'X)^{-1}X'\}\overset{+q}{-}\mathrm{tr}\{X(X'X)^{-1}A'B^{-1}A\underbrace{(X'X)^{-1}X'\}}_{I}\\&=\mathrm{tr}(I_n)-\mathrm{tr}\{X'X(X'X)^{-1}\}+\mathrm{tr}(B^{-1}B)\\&=\mathrm{tr}(I_n)-\mathrm{tr}(I_{p+1})+\mathrm{tr}(I_r)=n-p-1+r\end{aligned} \tag{13}$$

である．また $Qq=q$ であることも確かめられる．それゆえ(10)は

$$y-X\tilde{\beta}=Q(u+q) \tag{14}$$

と書ける．したがって

$$(y-X\tilde{\beta})'(y-X\tilde{\beta})=(u+q)'Q(u+q) \tag{15}$$

である．また $\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'y$ p.396 (6)　$y=X\beta+u$ は大前提

$$y-X\hat{\beta}=[I-X(X'X)^{-1}X']u=G(u+q) \tag{16}$$

$Gq=0$

である ($GX=O$ だから)．ただし

$$G=I-X(X'X)^{-1}X' \tag{17}$$

p.399 (23)と同じ

である．G は位 $n-p-1$ のべき等行列である．(16)から

$$(y-X\hat{\beta})'(y-X\hat{\beta})=(u+q)'G(u+q) \tag{18}$$

となる．

このようにして尤度比(9)の大括弧の中の分母と分子がともに $u+q$ に関する2つの2次形式((15)と(18))の形に書き換えられた．そこで

$$t=u+q \tag{19}$$

とおけば，(9)は

$$\lambda=\frac{L(\omega)}{L(\Omega)}=\left[\frac{t'Gt}{t'Qt}\right]^{\frac{n}{2}} \tag{20}$$

と書き直せる．これをさらに変形すると

$$\lambda=\left[\frac{t'Gt}{t'Qt}\right]^{\frac{n}{2}}=\left[\frac{1}{1+\dfrac{t'(Q-G)t}{t'Gt}}\right]^{\frac{n}{2}} \tag{21}$$

となる．

ところで u は正規分布 $N(o, \sigma^2 I)$ にしたがうから，$t=u+q$ は $N(q, \sigma^2 I)$ にしたがう．そして

$$(Q-G)G=QG-GG=G-G=O \tag{22}$$

であるから，定理13.12 (p.340) により，2つの2次形式 $t'(Q-G)t$ と $t'Gt$ は統計的に独立である．また，$Q-G$, G はそれぞれ位 r, $n-p-1$ のべき等行列であるから，定理13.11 (p.340) により $t'(Q-G)t/\sigma^2$, $t'Gt/\sigma^2$ はそれぞれ非心カイ自乗分布 $C'(r, \delta_1^2)$, $C'(n-p-1, \delta_2^2)$ にしたがって分布する．ただし p.339

$$\delta_1^2=q'(Q-G)q/\sigma^2=q'Qq/\sigma^2=q'q/\sigma^2\geqq 0 \tag{23}$$

$$\delta_2^2=q'Gq/\sigma^2=0 \qquad Gq=0 \tag{24}$$

である．したがって(24)より $t'Gt/\sigma^2$ はカイ自乗分布 $C(n-p-1)$ にしたがって分布する．

もし仮説 $H_0: A\beta=a$ が真であれば(11)より $q=o$ であるから，$\delta_1^2=0$ となり，$t'(Q-G)t/\sigma^2$ もカイ自乗分布 $C(r)$ にしたがうことになる．それゆえ，H_0 が真なるとき

$$v=\frac{t'(Q-G)t/r}{t'Gt/(n-p-1)} \tag{25}$$

は自由度 r, $n-p-1$ の F 分布にしたがう．

$$\tilde{u}=y-X\tilde{\beta}$$

$$\hat{u}=y-X\hat{\beta}$$

$\tilde{u}'\tilde{u}=t'Qt$
$\hat{u}'\hat{u}=t'Gt$

と表わせば，(15)，(18)，(19)より(25)は

$$v=\frac{n-p-1}{r}\left(\frac{\tilde{u}'\tilde{u}}{\hat{u}'\hat{u}}-1\right) \tag{26}$$

と書ける．また，(21)より　(25)もよく見よ．

$$\lambda=\left[\frac{1}{1+\dfrac{r}{n-p-1}v}\right]^{\frac{n}{2}} \tag{27}$$

であり λ は v の単調減少関数だから，定理15.2により，λ のかわりに v を尤度比検定統計量として用い，棄却域は v の正の方向にとればよいことが分かる．

以上をまとめると，正規回帰模型において仮説 $H_0: A\beta=a$ を対立仮説 $H_1: A\beta\neq a$ に対して検定する場合には，検定統計量として(26)の v を用いればよい．v は H_0 が真のとき自由度 r, $n-p-1$ の F 分布にしたがう．棄却域は正の方向にとられるから，たとえば $v\geqq F_{0.05}(r, n-p-1)$ となれば H_0 はサイズ5%で棄却される．

以上の線形制約の検定の重要な応用例として次のような3つのケースを述べ

ておこう.

(イ) 回帰係数全体に関する仮説検定

これは回帰係数 β が特定の β^* に等しいという仮説を検定する場合である.

$$H_0: \beta=\beta^*$$
$$H_1: \beta\neq\beta^*$$

したがってこれは $A=I_{p+1}$, $a=\beta^*$ の線形制約に相当する(前節例2参照). この場合には明らかに $\tilde{\beta}=\beta^*$ だから

$$\tilde{u}'\tilde{u}=(y-X\beta^*)'(y-X\beta^*) \tag{28}$$

とすればよい.

例題 16.4.1 例題16.1.1において, 正規回帰模型を仮定して

$$\text{仮　説}\quad H_0: \begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1000\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\text{対立仮説}\quad H_1: \begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}1000\\ 0\end{bmatrix}$$

を検定する.

$$\tilde{u}=y-X\tilde{\beta}=\begin{bmatrix}1002\\1006\\1009\\1007\\1014\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&10\\1&15\\1&20\\1&25\\1&30\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1000\\0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1002\\1006\\1009\\1007\\1014\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1000\\1000\\1000\\1000\\1000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\6\\9\\7\\14\end{bmatrix}$$

$$\tilde{u}'\tilde{u}=[2\quad 6\quad 9\quad 7\quad 14]\begin{bmatrix}2\\6\\9\\7\\14\end{bmatrix}=366$$

$$\hat{u}'\hat{u}=14.7$$

$$v=\frac{n-p-1}{2}\left(\frac{\tilde{u}'\tilde{u}}{\hat{u}'\hat{u}}-1\right)$$
$$=\frac{5-1-1}{2}\left(\frac{366}{14.7}-1\right)=35.85$$

自由度2, 3の F の5%点は9.55, 1%点は30.82であるから $v=35.85>9.55$ となり v は棄却域にはいる. よってサイズ5%で仮説 $H_0: \beta_0=1000$ かつ $\beta_1=0$ は棄却される. またサイズ1%でも棄却される.

(ロ) 一部の回帰係数に関する仮説検定

回帰係数 $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_p$ の一部分がそれぞれ特定の値に等しいという仮説の検定を考える. たとえば $\beta_0=\beta_0^*$, $\beta_1=\beta_1^*$, $\cdots$, $\beta_{r-1}=\beta_{r-1}^*(r\leqq p)$ とする. 残りの $\beta_r, \cdots, \beta_p$ については特定の値を指定しない. この種の検定は実用上著しく重要である.

$$X=[X_1\quad X_2],\quad \beta=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}$$

のごとく分割する. ただし X_1 は $n\times r$ 行列, β_1 は r 次列ベクトルとする. この場合, 特定の値を指定する回帰係数を最初に並べて β_1 とし, 残りを β_2 とする. X の列もそれに対応して並べ換えを行なってあるものとする.

このとき回帰模型は

$$y=X_1\beta_1+X_2\beta_2+u \tag{29}$$

と書ける. そこで次のような仮説を検定する.

$$\text{仮　説}\quad H_0: \beta_1=\beta_1^*$$
$$\text{対立仮説}\quad H_1: \beta_1\neq\beta_1^*$$

これは $A=[I_r\ O_{r,p+1-r}]$, $a=\beta_1^*$ の線形制約に相当する.

この場合には $\tilde{\beta}_1=\beta_1^*$ だから, 残りの $\tilde{\beta}_2$ は

$$(y-X_1\beta_1^*-X_2\beta_2)'(y-X_1\beta_1^*-X_2\beta_2)$$

が最小となるように決めればよい. それには $y-X_1\beta_1^*$ の X_2 上の回帰の最小自乗推定を行なえばよい. すなわちその残差平方和は

$$\tilde{u}'\tilde{u}=(y-X_1\beta_1^*)'[I-X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'](y-X_1\beta_1^*) \tag{30}$$

により求められる. この $\tilde{u}'\tilde{u}$ を用いて(26)の v により検定を行なう.

例題 16.4.2 例題16.1.2において夫婦の最低必要食費は5000円, 未成年1人に必要な食費は2000円という仮説をこのデータから検定する問題を

考えてみよう．これは $\beta_0=5.0$, $\beta_2=2.0$ という仮説の検定と考えられる．

検定すべき仮説は

$$H_0:\beta_1=\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5.0\\ 2.0\end{bmatrix}$$

$$H_1:\beta_1\neq\begin{bmatrix}5.0\\ 2.0\end{bmatrix}$$

この場合，$\beta_2=[\beta_1]$ はなんら特定化しない．

$$X_2'X_2=x_1'x_1=\|45\quad 79\quad 62\quad 56\quad 46\quad 38\|^2=18,806$$

$$(X_2'X_2)^{-1}=1/18,806$$

$$y-X_1\beta_1^*=\begin{bmatrix}15\\18\\17\\13\\17\\14\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&2\\1&2\\1&1\\1&0\\1&3\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\9\\10\\8\\6\\1\end{bmatrix}$$

ここで $t=y-X_1\beta_1^*$ とおけば

$$(y-X_1\beta_1^*)'(I-X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2')(y-X_1\beta_1^*)$$

$$=t'\left(I-\frac{1}{18,806}X_2X_2'\right)t$$

$$=t't-\frac{1}{18,806}(t'X_2)^2$$

$$=318-\frac{1}{18,806}(2,363)^2=318-296.91=21.09$$

$\hat{u}'\hat{u}=7.70$　〔例題 16.1.2 より〕

$$v=\frac{n-p-1}{r}\left\{\frac{(y-X_1\beta_1^*)'[I-X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'](y-X_1\beta_1^*)}{\hat{u}'\hat{u}}-1\right\}$$

$$=\frac{6-2-1}{2}\left(\frac{21.09}{7.70}-1\right)=2.608$$

自由度 2, 3 の F の 5% 点は 9.55 である．それゆえ仮説 H_0 はサイズ 5% で採択される．

(ハ) 重相関係数 R の有意性検定

ここで，特に重要な仮説検定として，β_0 以外のすべての回帰係数 $\beta_j(j=1,\cdots,p)$ が 0 という帰無仮説を考えてみよう．すなわち

$$\text{帰無仮説}\quad H_0:\beta_1=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\text{対立仮説}\quad H_1:\beta_1\neq o$$

このときには X_2 はその要素がすべて 1 の n 次列ベクトルとなるから

$$I-X_2(X_2'X_2)^{-1}X_2'=\begin{bmatrix}1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n}\\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n}\end{bmatrix}\tag{31}$$

となる．この右辺の行列を H で表わすことにする．これと $\beta_1^*=o$ および $r=p$ より，(26)は

$$v=\frac{n-p-1}{p}\left(\frac{y'Hy}{\hat{u}'\hat{u}}-1\right)\tag{32}$$

となる．H は n 次のべき等行列であることが容易に確かめられる．それゆえ $y'Hy=y'H^2y=(Hy)'(Hy)$．また $\bar{y}=\sum y_i/n$ として

$$Hy=\begin{bmatrix}y_1-\bar{y}\\ \vdots\\ y_n-\bar{y}\end{bmatrix}$$

となることも容易に確かめられるから，(32)は

$$v=\frac{n-p-1}{p}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}\hat{u}_i^2}-1\right)\tag{33}$$

となる．ところで(16.1.15)式によれば，R^2 を決定係数として

$$\frac{\sum\hat{u}_i^2}{\sum(y_i-\bar{y})^2}=1-R^2$$

であるから，(33)は

$$v=\frac{n-p-1}{p}\left(\frac{1}{1-R^2}-1\right)=\frac{n-p-1}{p}\cdot\frac{R^2}{1-R^2}\tag{34}$$

という簡単な形になる．すなわち β_0 以外の回帰係数がすべて 0 という帰無仮説の検定には，(34)を用いればよい．帰無仮説が真であれば v は自由度 p, $n-p-1$ の F 分布にしたがう．この検定を**重相関係数 R の有意性検定**ともいう．

例題 16.4.3　例題 16.1.2 において，実収入 x_1 と未成年者数 x_2 は食費 y になんら影響を与えていないという帰無仮説を検定する．すなわち

$$H_0 : \beta_1=\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$H_1 : \beta_1=\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

である．$n=6$, $p=2$ で決定係数は $R^2=0.602$ と計算されているから，(34) より

$$v=\frac{n-p-1}{p}\cdot\frac{R^2}{1-R^2}=\frac{6-2-1}{2}\cdot\frac{0.602}{1-0.602}=2.269$$

となる．一方自由度 p, $n-p-1$, すなわち 2, 3 の F 分布の 5% 点は 9.55 であるから，この帰無仮説は有意水準 5% で棄却されない．すなわちこの重相関係数 R は有意でない．

演 習 問 題

1　第9章第5節演習問題1において，仮説 $H_0 : \beta_0=10.0$, $\beta_1=0.75$, $\beta_2=-0.3$ を検定せよ．

2　例題 16.1.1 において仮説 $H_0 : \beta_0=900$, $\beta_1=5.0$ を検定せよ．

3　第9章第5節演習問題1において仮説 $H_0 : \beta_1=0.75$, $\beta_2=0$ を検定せよ．

4　例題 16.1.1 において仮説 $H_0 : \beta_1=0$ を検定せよ．これを t 検定の結果((9.3.11)式参照)と比較せよ．

5　独立変数の数(p)5個の回帰模型を大きさ(n)100 の無作為標本について測定した結果，重相関係数(R)0.3 を得た．この重相関係数は有意といえるか．この場合有意水準 1% で有意であるためには重相関係数は少なくともいくらでなければならないか．

16.5 多 重 共 線 性

16.1 の回帰模型においては，独立変数の観測値の行列 X の位が $p+1$ であることが仮定されていた．もしこの仮定が満たされないとどのようなことが生ずるかを次に考えてみよう．

もし

$$\rho(X)<p+1 \tag{1}$$

であると，定理 12.8 により

$$\rho(X'X)\leqq\min\{\rho(X'),\ \rho(X)\}$$

であるから，

$$\rho(X'X)<p+1 \tag{2}$$

である．それゆえ定理 12.5 により行列式 $|X'X|$ はゼロとなり，$X'X$ は特異行列で逆行列 $(X'X)^{-1}$ が存在しない．したがって β の最小自乗推定量 $\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'y$ も求められない．

それでは(1)はどのようなときに生ずるであろうか．X の各列を x_j $(j=0, 1, \cdots, p)$ で表わそう．すなわち

$$x_0=l=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix},\quad x_1=\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{21}\\\vdots\\x_{n1}\end{bmatrix},\quad\cdots,\quad x_p=\begin{bmatrix}x_{1p}\\x_{2p}\\\vdots\\x_{np}\end{bmatrix}$$

である．(1)が成立することは $x_0, x_1, \cdots, x_p$ が1次従属であること，したがって，少なくとも1個の c_j がゼロでないとき

$$c_0l+c_1x_1+\cdots+c_px_p=o \tag{3}$$

が成立することを意味する．このようなことになる具体的なケースをあげると，たとえば

(i)　x_j $(j=1, \cdots, p)$ の1つが各要素が同一の値，たとえば a，をもつベクトルである場合……このときには $x_j=al$ であるから

$$al-x_j=o$$

となり，(3)が成立する．

(ii)　2つの変数の標本相関係数が1または -1 に等しい(完全相関)の場合……たとえば x_1 と x_2 が完全相関であれば

$$r^2=\frac{\{\sum(x_{t1}-\bar{x}_1)(x_{t2}-\bar{x}_2)\}^2}{\sum(x_{t1}-\bar{x}_1)^2\sum(x_{t2}-\bar{x}_2)^2}=1 \tag{4}$$

であるが，これを書き換えれば

$$\frac{(\check{x}_1'\check{x}_2)^2}{\|\check{x}_1\|^2\|\check{x}_2\|^2}=1 \tag{4$'$}$$

である．ただし $\check{x}_j$ は

$$\check{x}_j=x_j-\bar{x}_jl \tag{5}$$

すなわち標本平均からの偏差のベクトルである．(4′)は $a\fallingdotseq 0$ を一定値として

$$\check{\boldsymbol{x}}_2=a\check{\boldsymbol{x}}_1 \tag{6}$$

であるときに成立する．なぜならこのとき(4′)の分子は

$$\begin{aligned}(\check{\boldsymbol{x}}_1'\check{\boldsymbol{x}}_2)^2&=(\check{\boldsymbol{x}}_1'(a\check{\boldsymbol{x}}_1))^2=a^2\|\check{\boldsymbol{x}}_1\|^4=\|\check{\boldsymbol{x}}_1\|^2\|a\check{\boldsymbol{x}}_1\|^2\\&=\|\check{\boldsymbol{x}}_1\|^2\|\check{\boldsymbol{x}}_2\|^2\end{aligned}$$

となり，分母に一致するからである．(6)より

$$\begin{aligned}a\check{\boldsymbol{x}}_1-\check{\boldsymbol{x}}_2&=a(\boldsymbol{x}_1-\bar{x}_1\boldsymbol{l})-(\boldsymbol{x}_2-\bar{x}_2\boldsymbol{l})\\&=(\bar{x}_2-a\bar{x}_1)\boldsymbol{l}+a\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{o}\end{aligned}$$

であり，(3)が成立する．

(iii)　m個の変数のある1次結合が他のq個の変数のある1次結合と完全相関である場合……たとえば $m=q=2$ のとき

$$b_3\check{\boldsymbol{x}}_3+b_4\check{\boldsymbol{x}}_4=a(b_1\check{\boldsymbol{x}}_1+b_2\check{\boldsymbol{x}}_2)$$

のようになるので

$$(b_3\bar{x}_3+b_4\bar{x}_4-ab_1\bar{x}_1-ab_2\bar{x}_2)\boldsymbol{l}+ab_1\boldsymbol{x}_1+ab_2\boldsymbol{x}_2-b_3\boldsymbol{x}_3-b_4\boldsymbol{x}_4=\boldsymbol{o}$$

となり，(3)が成立する．なお(ii)はこの(iii)の特殊ケース($m=q=1$ の場合)に当たる．

このように(1)または(3)が成立するとき独立変数間に**厳密な意味での多重共線性**(multicollinearity)が存在するという．

厳密な意味で多重共線性が存在すると回帰分析は実行できなくなるが，経済分析で通常問題となるのは，次に述べるような実質的な意味での多重共線性が存在する場合である．

いま $\boldsymbol{x}_j$ を従属変数とし他の p 個の $\boldsymbol{x}_k(k\fallingdotseq j)$ を独立変数として，最小自乗法により次のような推定回帰式をえたとしよう．

$$\boldsymbol{x}_j=a_0\boldsymbol{x}_0+a_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+a_{j-1}\boldsymbol{x}_{j-1}+a_{j+1}\boldsymbol{x}_{j+1}+\cdots+a_p\boldsymbol{x}_p+\boldsymbol{z} \tag{7}$$

ただし，$\boldsymbol{z}$ はこの回帰の残差ベクトルで，残差の性質から(7)の右辺の各独立変数ベクトルと直交している．

$$\boldsymbol{x}_k'\boldsymbol{z}=0 \qquad k=0,\ 1,\ \cdots,\ j-1,\ j+1,\ \cdots,\ p \tag{8}$$

である．この残差ベクトル $\boldsymbol{z}$ のノルム $\|\boldsymbol{z}\|$ が $\boldsymbol{x}_j$ のノルム $\|\boldsymbol{x}_j\|$ に比べ著しく小さい場合，換言すれば(7)の回帰の重相関係数がほとんど1に近い場合に，$\boldsymbol{x}_j$ は他の独立変数と(実質的な意味で)**共線関係**(collinear)にあるという．また，このように他の変数と共線関係にある変数が1個以上あるとき $\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{x}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_p$

の間に(実質的な意味で)**多重共線性**が存在するという．

多重共線性が存在する場合，共線関係にある変数 $\boldsymbol{x}_j$ の回帰係数の推定値はほとんど信頼がおけないものになる．以下にその理由を説明しよう．

以下，内積 $\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{x}_k$, $\boldsymbol{x}_j'\boldsymbol{z}$ をそれぞれ m_{jk}, m_{jz} で表わそう．(7)の左側から $\boldsymbol{x}_k'$ を掛けると

$$\begin{aligned}m_{kj}=\boldsymbol{x}_k'\boldsymbol{x}_j&=\boldsymbol{x}_k'(a_0\boldsymbol{x}_0+\cdots+a_{j-1}\boldsymbol{x}_{j-1}+a_{j+1}\boldsymbol{x}_{j+1}+\cdots+a_p\boldsymbol{x}_p+\boldsymbol{z})\\&=\sum_{i\neq j}a_i m_{ki}+m_{kz}\end{aligned} \tag{9}$$

となる．ここで $k\fallingdotseq j$ ならば(8)より $m_{kz}=0$ である．また $k=j$ ならば

$$m_{kz}=\boldsymbol{x}_k'\boldsymbol{z}=(\sum_{i\neq j}a_i\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{z})'\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}=\|\boldsymbol{z}\|^2$$

である．それゆえ δ_{kj} をクロネッカー・デルタとすると

$$m_{kj}=\sum_{i\neq j}a_i m_{ki}+\delta_{kj}\|\boldsymbol{z}\|^2 \qquad k=0,\ 1,\ \cdots,\ p \tag{10}$$

と書くことができる．これを使うと

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}|=|\boldsymbol{M}|&=\begin{vmatrix}m_{00} & \cdots & \sum_{i\neq j}a_i m_{0i} & \cdots & m_{0p}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ m_{j0} & \cdots & \sum_{i\neq j}a_i m_{ji}+\|\boldsymbol{z}\|^2 & \cdots & m_{jp}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ m_{p0} & \cdots & \sum_{i\neq j}a_i m_{pi} & \cdots & m_{pp}\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}m_{00} & \cdots & 0 & \cdots & m_{0p}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ m_{j0} & \cdots & \|\boldsymbol{z}\|^2 & \cdots & m_{jp}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ m_{p0} & \cdots & 0 & \cdots & m_{pp}\end{vmatrix}\\&=\|\boldsymbol{z}\|^2 M_{jj}\end{aligned} \tag{11}$$

ただし M_{jj} は $\boldsymbol{M}$ の第$(j,\ j)$余因子である．一方逆行列の定義により $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}=\boldsymbol{M}^{-1}=\boldsymbol{C}$ の第$(j,\ j)$要素(ただし $j=0,\ 1,\ \cdots,\ p$) は

$$c_{jj}=M_{jj}/|\boldsymbol{M}| \tag{12}$$

であるから，(11)をこれに代入すると

$$c_{jj}=\frac{M_{jj}}{\|\boldsymbol{z}\|^2 M_{jj}}=\frac{1}{\|\boldsymbol{z}\|^2} \tag{13}$$

である．これより回帰係数の最小自乗推定量 $\hat{\beta}_j$ の分散は，(16.1.21)より

$$\sigma_{\hat{\beta}_j}{}^2=c_{jj}\sigma^2=\frac{1}{\|\boldsymbol{z}\|^2}\sigma^2 \tag{14}$$

となる．この(14)から，分母の $\|z\|$ が著しく小さいとき(すなわち x_j が他の独立変数と共線関係にあるとき) $\sigma_{\hat{\beta}_j}{}^2$ は著しく大になることが分かる．

多重共線性が存在する場合には共線関係にある変数の回帰係数の推定をしてもその値はほとんど信頼がおけない．もちろんそのような場合でも，16.1，16.2で述べた回帰係数の最小自乗推定量の性質はなんら損われないけれども,[8] 推定量の現実の分散が大となることは致命的といえる．

このような場合，なんらかの他の情報から β_j に関する推定値，たとえば $\beta_j{}^*$ を得ることができれば，それを用いて

$$\begin{aligned} y-\beta_j{}^*x_j=&\beta_0x_0+\beta_1x_1+\cdots+\beta_{j-1}x_{j-1}+\beta_{j+1}x_{j+1}+\cdots \\ &+\beta_px_p+u \end{aligned} \tag{15}$$

なる形，すなわち $y-\beta_j{}^*x_j$ を従属変数とする回帰を推定することが考えられる．このやり方を**条件付回帰** (conditional regression) と呼ぶ.[9] この方法は16.3の制約付最小自乗法の1種といえる．

資料統御 (data-control) も多重共線性を回避する1つの方法である．たとえば x_j に共線関係が生じていれば，x_j の値が同一な水準，たとえば $x_j{}'$ となっている個体のみを取り出し，これらをデータとして

$$y=\beta_0{}'x_0+\beta_1x_1+\cdots+\beta_{j-1}x_{j-1}+\beta_{j+1}x_{j+1}+\cdots+\beta_px_p+u \tag{16}$$

なる回帰を測定する．このようにすると定数項 $\beta_0{}'$ は $\beta_0+\beta_jx_j{}'$ に等しいが，他の係数は理論上不変である．ただこの場合 β_j の推定値は得られない．資料統御は，他の要因を一定に保つという意味において統御された実験と同様な効果をもっており，大量の個票(個体に関する原データ)が利用できるときには特に有効な方法である．

---

8) この本では多重共線性の問題を，独立変数に誤差を含まないケースについてだけ扱っている．しかし，経済分析における多重共線性の問題を最初に指摘したフリッシュは，独立変数中に観測誤差がはいり込む場合を想定している．フリッシュは独立変数の真の値の間に厳密な意味での多重共線性が存在して本来回帰分析が適用不可能になっているときでも，変数の観測誤差のために観測値行列 X の位が $p+1$ となって，無意味な最小自乗推定値 $\hat{\beta}$ を求めてしまう危険性を指摘した(R. Frisch, *Statistical Confluence Analysis by Means of Complete Regression Systems*, Oslo, 1934)．

9) H. Wold and L. Juréen, *Demand Analysis*, John Wiley & Sons, 1953, pp. 233–234 参照．

演習問題

1　経済分析において多重共線性の現われそうな例をあげよ．

2　独立変数の数 $p=2$ の回帰模型において，x_1 と x_2 の標本相関係数を r_{12} とするとき

$$\sigma_{\hat{\beta}_j}{}^2=\sigma^2/\{\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_j)^2(1-r_{12}{}^2)\}\qquad j=1,\ 2$$

となることを証明せよ．

第 17 章

回帰分析 III

前章で述べた回帰模型の仮定は現実にそのまま当てはまらないことがしばしばある．この章の前半では，撹乱項が等しい分散をもって相互に無相関に分布するという仮定を取り去った場合の回帰分析について論ずる．また後半では，独立変数が指定変数でなく，確率変数である場合の回帰分析について論ずる．

17.1 分散不均一かつ相関関係のある撹乱項をもつ回帰

17.1.1 一般化された回帰模型

前章の回帰模型においては，撹乱項 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ は平均 0，分散 σ^2 で，相互に無相関であることが仮定されていた．すなわち $\boldsymbol{u}$ を n 次列ベクトルとすれば

$$E(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{o} \tag{1}$$

$$E(\boldsymbol{uu}')=\sigma^2\boldsymbol{I} \tag{2}$$

が仮定されていた．ここでは(2)の仮定を問題にしよう．この仮定が当てはまらない場合を次の2つに分けて考えよう．

第1は，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ が共通に等しい分散 σ^2 をもつという仮定が妥当しない場合である．このような場合**分散不均一性**(heteroscedasticity)が存在するという.[1]

第2は，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ が相互に無相関，すなわち

$$E(u_iu_j)=0 \qquad i\neq j;\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

1) これに対し，分散が等しい場合を**分散均一性**(homoscedasticity)という．

が満たされない場合，換言すれば撹乱項の間に相関関係がある場合である．

第1の場合については第2節で，第2の場合については第3節で個別に詳しく論ずるが，ここでは両者のケースを一括して，次のような**一般化された回帰模型**(generalized regression model)を考える．

(2)のかわりに次のような共分散行列を仮定する．

$$E(\boldsymbol{uu}')=\sigma^2\boldsymbol{\Omega} \tag{3}$$

ただし $\boldsymbol{\Omega}$ は n 次の正値定符号行列である．回帰模型に関する他の仮定(16.1)はなんら変更ないものとしよう．なお $\boldsymbol{\Omega}$ の特殊ケース $\boldsymbol{I}_n$ に合わせて以下

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Omega})=n \tag{4}$$

のように $\boldsymbol{\Omega}$ が基準化されているものとしておく．

このような一般化された回帰模型において，$\boldsymbol{\beta}$ に関する最良線形不偏推定量は次のようにして得られる．

$\boldsymbol{\Omega}$ は正値定符号であるから定理 12.34 により

$$\boldsymbol{P\Omega P}'=\boldsymbol{I} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Omega}^{-1} \tag{6}$$

となるような非特異行列 $\boldsymbol{P}$ が存在する．そこで回帰模型の式

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{u} \tag{7}$$

の左側より $\boldsymbol{P}$ を掛ければ

$$\boldsymbol{Py}=\boldsymbol{PX\beta}+\boldsymbol{Pu}$$

となる．ここで

$$\boldsymbol{y}^*=\boldsymbol{Py}$$

$$\boldsymbol{X}^*=\boldsymbol{PX}, \qquad \boldsymbol{u}^*=\boldsymbol{Pu} \tag{8}$$

とおけば(7)は

$$\boldsymbol{y}^*=\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{u}^* \tag{9}$$

と書き改められる．すると

$$E(\boldsymbol{u}^*)=E(\boldsymbol{Pu})=\boldsymbol{P}E(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{Po}=\boldsymbol{o} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}E(\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u}^{*\prime})&=E(\boldsymbol{Puu}'\boldsymbol{P}')=\boldsymbol{P}E(\boldsymbol{uu}')\boldsymbol{P}'\\&=\boldsymbol{P}\sigma^2\boldsymbol{\Omega P}'=\sigma^2\boldsymbol{P\Omega P}'=\sigma^2\boldsymbol{I}\end{aligned} \tag{11}$$

となる．また，$\boldsymbol{P}$ は非特異であるから，定理 12.20 により $\boldsymbol{X}$ に $\boldsymbol{P}$ を(左から)掛けても位は変わらない．すなわち

$$\rho(\boldsymbol{X}^*)=\rho(\boldsymbol{PX})=\rho(\boldsymbol{X})=p+1 \tag{12}$$

である．それゆえ(9)，(10)，(11)，(12)よりなる模型は，16.1の回帰模型の仮定を満たしている．[2] そこで(9)式に最小自乗法を適用すれば，y^*，X^*というデータを前提とした回帰分析として，16.1で得られた結果はそのまま当てはまるのである．このような方法は**一般化最小自乗法**(generalized least squares method)または略して GLS 法と呼ばれる．

ところでPの値はΩから決められる．定理12.34の証明でも述べたところであるが，Ωは正値定符号であるから，Ωを対角化する次のような直交行列Cが存在する．

$$C'\Omega C=\Lambda$$

ただしΛは対角行列で，その対角要素λ_iはすべて正である．このとき，対角要素が$\sqrt{\lambda_1}$, $\sqrt{\lambda_2}$, $\cdots$, $\sqrt{\lambda_n}$からなる対角行列を$\Lambda^{1/2}$で表わせば

$$\Lambda^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & 0\\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots \ \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & 0\\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots \ \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n\end{bmatrix}=\Lambda \quad (13)$$

である．[3] $\Lambda^{1/2}$の逆行列を$\Lambda^{-1/2}$で表わせば，求めるPは

$$P=\Lambda^{-\frac{1}{2}}C' \quad (14)$$

で表わされる．なぜなら

$$P\Omega P'=\Lambda^{-\frac{1}{2}}C'\Omega C\Lambda^{-\frac{1}{2}}=\Lambda^{-\frac{1}{2}}\Lambda\Lambda^{-\frac{1}{2}}=I$$

$$\begin{aligned}P'P&=C\Lambda^{-\frac{1}{2}}\Lambda^{-\frac{1}{2}}C'=C\Lambda^{-1}C'=(C')^{-1}\Lambda^{-1}C^{-1}\\&=(C\Lambda C')^{-1}=\Omega^{-1}\end{aligned}$$

となり，確かに(5)，(6)を満たしているから．

このようにして得られるPにより変換されたデータy^*，X^*による一般化最小自乗推定量$\tilde{\beta}$は

2)　ただ例外としてX^*の第1列の各要素は，Xと異なり1ではない．だがこれは最小自乗推定量の性質にはなんら影響を与えない．しかしいわゆる定数項のない当てはめになるので重相関係数は意味を失う．

3)　$\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n\end{bmatrix}$は非対角要素がすべて0であることを示す．

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}&=(X^{*\prime}X^*)^{-1}X^{*\prime}y^*=(X'P'PX)^{-1}X'P'Py\\&=(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y \qquad (15)\end{aligned}$$

であり，これは定理16.1（ガウス－マルコフの定理）の応用により，βに対する最良線形不偏推定量となっている．また，残差を$\hat{u}^*$で表わせば

$$\begin{aligned}\hat{u}^*&=y^*-X^*\tilde{\beta}\\&=y^*-X^*(X^{*\prime}X^*)^{-1}X^{*\prime}y^*\\&=Py-PX(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}y\\&=P\{I-X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}\}y\\&=PMy \qquad (16)\end{aligned}$$

ただし

$$M=I-X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1} \quad (17)$$

である．

$$\begin{aligned}M'\Omega^{-1}M&=\{I-\Omega^{-1}X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\}\Omega^{-1}\{I-X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}\}\\&=\Omega^{-1}\{I-X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}\}=\Omega^{-1}M \qquad (18)\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}\hat{u}^{*\prime}\hat{u}^*&=y'M'P'PMy=y'M'\Omega^{-1}My\\&=y'\Omega^{-1}My \qquad (19)\end{aligned}$$

を得る．そこで((16.1.29)式に対応するものとして)

$$\tilde{\sigma}^2=\frac{\hat{u}^{*\prime}\hat{u}^*}{n-p-1}=\frac{y'\Omega^{-1}My}{n-p-1} \quad (20)$$

はσ^2の不偏推定量となる．

一般化最小自乗推定量$\tilde{\beta}$の共分散行列は(16.1.21)式より

$$\Sigma_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}}=\sigma^2(X^{*\prime}X^*)^{-1}=\sigma^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1} \quad (21)$$

である．これから$\Sigma_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}}$の不偏推定量は(20)を使って

$$\hat{\Sigma}_{\tilde{\beta}\tilde{\beta}}=\tilde{\sigma}^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1}=\frac{y'\Omega^{-1}My}{n-p-1}(X'\Omega^{-1}X)^{-1} \quad (22)$$

により与えられる．

以上の議論はuが多変量正規分布$N(o,\ \sigma^2\Omega)$にしたがうときにも，同様に進められる．このときには$u^*=Pu$は多変量正規分布$N(o,\ \sigma^2 I)$にしたがうことになるから，これと(9)および(12)からなる模型は16.2の正規回帰模型に一致する．それゆえ，16.2以降に得られた結論はこの場合にも当てはまる．

17.1.2　変換しないデータによる最小自乗推定量

前項の議論では，あくまでも Ω が既知であることを前提にしていた．しかし，実際の分析では，Ω の各要素の値が知られていることはほとんどない．Ω を推定することこそ実は問題なのである．

それゆえ多くの場合攪乱項 u_i の共分散行列が $\sigma^2 I$ に等しいと一応仮定して，通常の最小自乗法による回帰模型の推定を行なう．しかしその場合，もしその仮定が満たされないとき，前章の回帰分析の結論がどのように変更を受けるであろうか．この問題を以下考えてみよう．

まず回帰係数の最小自乗推定量 $\hat{\beta}$ は依然として不偏推定量である．なぜなら

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}) &= E\{(X'X)^{-1}X'(X\beta+u)\} \\ &= \beta+(X'X)^{-1}X'E(u)=\beta \end{aligned} \tag{23}$$

であり，$E(uu')=\sigma^2\Omega$ という関係は(23)には関係がないからである．

しかしこの $\hat{\beta}$ は最小分散ではない．線形不偏推定量で最小分散のものは(15)により与えられる推定量である．$\hat{\beta}$ の共分散行列は

$$\begin{aligned} \Sigma_{\hat{\beta}\hat{\beta}} &= E\{(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'\} \\ &= E\{(X'X)^{-1}X'uu'X(X'X)^{-1}\} \\ &= \sigma^2(X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1} \end{aligned} \tag{24}$$

で与えられる．

また残差 $\hat{u}=y-X\hat{\beta}$ のノルムの自乗は(16.1.22)式より

$$\hat{u}'\hat{u}=u'[I-X(X'X)^{-1}X']u=u'Gu=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}g_{ij}u_iu_j$$

である．ただし $G=I-X(X'X)^{-1}X'$ で G はべき等行列，また g_{ij} は G の第 $(i,\ j)$ 要素とする．そこで $\hat{u}'\hat{u}$ の期待値は

$$E(\hat{u}'\hat{u})=\sum\sum g_{ij}E(u_iu_j)=\sigma^2\sum\sum g_{ij}\omega_{ij}$$

となる．ただし ω_{ij} は Ω の第 $(i,\ j)$ 要素である．Ω は対称であるから $\omega_{ij}=\omega_{ji}$．よって

$$\begin{aligned} E(\hat{u}'\hat{u}) &= \sigma^2\sum\sum g_{ij}\omega_{ij}=\sigma^2\sum_i\Bigl(\sum_j g_{ij}\omega_{ji}\Bigr) \\ &= \sigma^2\,\mathrm{tr}(G\Omega) \\ &= \sigma^2[\mathrm{tr}\,\Omega-\mathrm{tr}\{X(X'X)^{-1}X'\Omega\}] \\ &= \sigma^2[n-\mathrm{tr}\{(X'X)^{-1}X'\Omega X\}] \end{aligned} \tag{25}$$

が得られる．それゆえ(16.1.29)式の残差分散 $\hat{\sigma}^2$ の期待値は

$$E(\hat{\sigma}^2)=E\left(\frac{\hat{u}'\hat{u}}{n-p-1}\right)=\sigma^2\cdot\frac{n-\mathrm{tr}\{(X'X)^{-1}X'\Omega X\}}{n-p-1} \tag{26}$$

となる．もし $\Omega=I$ であれば $\mathrm{tr}\{(X'X)^{-1}X'\Omega X\}=\mathrm{tr}\{(X'X)^{-1}X'X\}=p+1$ であるから(26)の最右辺は σ^2 に等しくなるが，一般の Ω では $\mathrm{tr}\{(X'X)^{-1}X'\Omega X\}$ は $p+1$ にかならずしも等しくない．それゆえ $\hat{\sigma}^2$ はもはや σ^2 の不偏推定量ではない．

また，回帰係数の最小自乗推定量 $\hat{\beta}$ の共分散行列の推定量 $\hat{\Sigma}_{\hat{\beta}\hat{\beta}}$((16.1.31)式)の期待値は

$$E\{\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}\}=\sigma^2\frac{n-\mathrm{tr}\{(X'X)^{-1}X'\Omega X\}}{n-p-1}(X'X)^{-1}$$

となるが，ここで

$$H=\Omega-I \tag{27}$$

なる H を定義すれば

$$E(\hat{\Sigma}_{\hat{\beta}\hat{\beta}})=E\{\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}\}=\sigma^2(X'X)^{-1}+\sigma^2\frac{\mathrm{tr}\{(X'X)^{-1}X'HX\}}{n-p-1}(X'X)^{-1}$$

となる．(24)より

$$\Sigma_{\hat{\beta}\hat{\beta}}=\sigma^2(X'X)^{-1}+\sigma^2(X'X)^{-1}X'HX(X'X)^{-1} \tag{28}$$

であるから

$$\begin{aligned} E(\hat{\Sigma}_{\hat{\beta}\hat{\beta}}) &= \Sigma_{\hat{\beta}\hat{\beta}}-\sigma^2(X'X)^{-1}X'HX(X'X)^{-1} \\ &\quad+\sigma^2\frac{\mathrm{tr}\{(X'X)^{-1}X'HX\}}{n-p-1}(X'X)^{-1} \end{aligned} \tag{29}$$

が得られる．最後の2つの項が O にならない限り $\hat{\Sigma}_{\hat{\beta}\hat{\beta}}$ は $\Sigma_{\hat{\beta}\hat{\beta}}$ の不偏推定量にならない．明らかに $\Omega=I$ つまり $H=O$ ならば2つの項は O になる．

演 習 問 題

1　第9章第1節演習問題1のデータを用い，最小自乗法により回帰模型 $y_i=\alpha+\beta x_i+u_i$，$i=1,\ 2,\ 3,\ 4$ を推定するとき，もし u の共分散行列が $E(uu')=\sigma^2\Omega$，ただし

$$\Omega=\begin{bmatrix}1 & \rho & \rho^2 & \rho^3\\ \rho & 1 & \rho & \rho^2\\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho\\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1\end{bmatrix},\quad \Omega^{-1}=(1-\rho^2)^{-1}\begin{bmatrix}1 & -\rho & 0 & 0\\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0\\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho\\ 0 & 0 & -\rho & 1\end{bmatrix} \tag{30}$$

かつ $\rho=0.8$ であるならば，通常の最小自乗推定量 $\hat{\beta}$ の共分散行列 $\Sigma_{\hat{\beta}\hat{\beta}}$ は，通常の回帰模型の仮定 $(E(uu')=\sigma^2I)$ が満たされる場合のそれとどのように異なるか．数値

計算により比較せよ．

2　前問においてΩの値が(30)であることが知られているとしたとき，一般化最小自乗法によりβの最良線形不偏推定値$\hat{\beta}$とその共分散行列 $\Sigma_{\hat{\beta}\hat{\beta}}$ の不偏推定値を計算せよ．結果を演習問題16.1.1の結果と比較せよ．

17.2 不均一分散

撹乱項u_iは相互に無相関であるが，分散が相等しくないと考えられることがしばしばある．すなわち $\omega_{ii}>0$, $i=1, \cdots, n$ として

$$\left.\begin{array}{ll} E(u_i^2)=\sigma^2\omega_{ii} & i=1, \cdots, n \\ E(u_iu_j)=0 & i\neq j;\ i, j=1, \cdots, n \end{array}\right\} \tag{1}$$

となっている．これを行列表示すれば

$$E(uu')=\sigma^2\Omega=\sigma^2\begin{bmatrix}\omega_{11} & & 0\\ & \omega_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \omega_{nn}\end{bmatrix} \tag{2}$$

である．Ωの逆行列は

$$\Omega^{-1}=\begin{bmatrix}1/\omega_{11} & & 0\\ & 1/\omega_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1/\omega_{nn}\end{bmatrix} \tag{3}$$

であるから，前節のPは

$$P=\begin{bmatrix}1/\sqrt{\omega_{11}} & & 0\\ & 1/\sqrt{\omega_{22}} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1/\sqrt{\omega_{nn}}\end{bmatrix} \tag{4}$$

となることは明らかである(この場合は(17.1.14)式において直交行列 $C=I$ であり，Pは$\Lambda^{-1/2}$そのものである)．それゆえ，もしω_{ii}の値が分かれば前節の結論のように，データを $y^*=Py$, $X^*=PX$ により変換したものに最小自乗法を適用すればよい．この場合変換は非常に簡単で

$$\left.\begin{array}{ll} y_i^*=y_i/\sqrt{\omega_{ii}} & i=1, \cdots, n \\ x_{ij}^*=x_{ij}/\sqrt{\omega_{ii}} & i=1, \cdots, n;\ j=0, 1, \cdots, p \end{array}\right\} \tag{5}$$

すなわち第i番目の観測値をすべて$\sqrt{\omega_{ii}}$で割ってやればよい．

ω_{ii}の大きさが最初から明らかな例としては，平均値データの分析の場合があげられる．たとえば家計調査資料では，所得階層別の消費支出額の平均値が

公表されている．このデータに基づいて線形の消費関数を最小自乗法により推定したいとしよう．いま標本世帯数をn，第i世帯の実収入をx_{i1}，消費支出額をy_iで表わし

$$y_i=\beta_0+\beta_1x_{i1}+u_i \qquad i=1, 2, \cdots, n \tag{6}$$

なる1次式の関係を想定する．ただしu_iは撹乱項で $E(u_i)=0$, $E(u_i^2)=\sigma^2$, $i=1, 2, \cdots, n$, $E(u_iu_j)=0$, $i\neq j$; $i, j=1, \cdots, n$ であるとする．ところで，公表されているデータは直接(x_{i1}, y_i)に関する観測値ではなくて，実収入x_1で層別したデータで次のように与えられている．

階層	実収入平均値	消費支出平均値	世帯数
1	$\bar{x}_{11}$	$\bar{y}_1$	n_1
2	$\bar{x}_{21}$	$\bar{y}_2$	n_2
⋮	⋮	⋮	⋮
m	$\bar{x}_{m1}$	$\bar{y}_m$	n_m

このとき，第j階層の$(\bar{x}_{j1}, \bar{y}_j)$と個々の$(x_{i1}, y_i)$との関係は，$(x_{i1}, y_i)$$i=1, 2, \cdots, n$ が，yの大きさの順序に並んでいる(iの番号がそのようにつけられている)とすれば

$$\bar{x}_{j1}=\frac{1}{n_j}\sum x_{i1},\quad \bar{y}_j=\frac{1}{n_j}\sum y_i \tag{7}$$

である．ただし$\sum$はiについて $n_1+\cdots+n_{j-1}+1$ から $n_1+\cdots+n_j$ まで合計することを意味するものとする．同様に $\bar{u}_j=(1/n_j)\sum u_i$ も定義しておけば，(6)式から

$$\bar{y}_j=\beta_0+\beta_1\bar{x}_{j1}+\bar{u}_j \qquad j=1, \cdots, m \tag{8}$$

がすぐ導ける．われわれはこの(8)式を上の平均値データを用いて推定するわけである．(8)は一見(6)と同様な関係であるが，重要な相違点は(8)における$\bar{u}_j$の分散は階層間において等しくないという点である．u_i相互間では無相関とおいているので，$\bar{u}_j$の分散は不均一で

$$\sigma_{\bar{u}_j}^2=E(\bar{u}_j^2)=\frac{\sigma^2}{n_j} \qquad j=1, \cdots, m \tag{9}$$

である．もちろん $E(\bar{u}_j\bar{u}_k)=0$, $j\neq k$; $j, k=1, \cdots, m$ は成立している．

それゆえ(8)式の回帰模型の回帰係数の最良線形不偏推定量を得るためには，(5)に示された変数の変換を施す必要がある．$\mathrm{tr}(\Omega)=m$ であるためには

$$\omega_{jj}=\frac{1}{n_j}\left(\frac{m}{\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{n_i}}\right) \qquad j=1,\ \cdots,\ m \tag{10}$$

であればよいから

$$\left.\begin{aligned} y_j^*&=\bar{y}_j\sqrt{\frac{n_j}{m}\sum\frac{1}{n_i}} && j=1,\ \cdots,\ m \\ x_{jk}^*&=\bar{x}_{jk}\sqrt{\frac{n_j}{m}\sum\frac{1}{n_i}} && j=1,\ \cdots,\ m;\ k=0,\ 1 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

と変えればよい．ただし $\bar{x}_{j0}(j=1,\ \cdots,\ m)$ はすべて1とする．結局われわれは

$$\left(\bar{y}_j\sqrt{\frac{n_j}{m}\sum\frac{1}{n_i}}\right)=\beta_0\sqrt{\frac{n_j}{m}\sum\frac{1}{n_i}}+\beta_1\left(\bar{x}_{j1}\sqrt{\frac{n_j}{m}\sum\frac{1}{n_i}}\right) + \left(\bar{u}_j\sqrt{\frac{n_j}{m}\sum\frac{1}{n_i}}\right) \tag{12}$$

なる形に変形した後最小自乗法を適用する．この場合，定数項のない当てはめになっていることに注意する必要がある（前節脚注2参照）．(12)の撹乱項の分散は

$$E\left(\bar{u}_j\sqrt{\frac{n_j}{m}\sum\frac{1}{n_i}}\right)^2=\left(\frac{n_j}{m}\sum\frac{1}{n_i}\right)E(\bar{u}_j^2)=\left(\frac{n_j}{m}\sum\frac{1}{n_i}\right)\frac{\sigma^2}{n_j}$$
$$=\frac{1}{m}\sum\frac{1}{n_i}\sigma^2 \tag{13}$$

となっている.[4] ただしここでは σ^2 は個別の世帯の段階での撹乱項 u_i（(6)式）の分散である．

演　習　問　題

1　次の表17.1は1960年の北陸農家の耕作反別に層別した農家所得と家計費の各平均値のデータである．

いま各農家の所得を x_i，家計費を y_i とするとき，$y_i=\alpha+\beta x_i+u_i$ と書け，通常の回帰模型の仮定が成立するものとする．このとき

(a)　表17.1のデータから α, β の一般化最小自乗推定値を求めよ．また u_i の分散 σ^2 の不偏推定値を求めよ．

4)　$\mathrm{tr}(\Omega)=m$ の条件にとらわれず，$y_j^*=\bar{y}_j\sqrt{n_j}$, $x_{j1}^*=\bar{x}_{j1}\sqrt{n_j}$ と基準化すれば，

$$\sqrt{n_j}\bar{y}_j=\beta_0\sqrt{n_j}+\beta_1\sqrt{n_j}\bar{x}_{j1}+\sqrt{n_j}\bar{u}_j \tag{i}$$

の形となる．この回帰式の撹乱項 $\sqrt{n_j}\bar{u}_j$ の分散は σ^2 である．実際には(12)よりもこの(i)を用いたほうが簡明である．

表 17.1　北陸農家の規模別の所得と家計費

規　　模	0.3町未満	0.3～0.5町	0.5～1町	1～1.5町	1.5～2町	2町以上
戸　　数	19	44	148	78	45	27
農家所得（万円/年）	34	39	38	74	58	75
家計費（万円/年）	30	35	35	42	44	54

（注）農林省『農家経済調査報告』1960年度，農区別階層別統計表，北陸編より．数字は丸めてある．

(b)　表17.1の最後の2行のデータに通常の最小自乗法を適用し，(a)の結果と比較せよ．

17.3　自　己　相　関

17.3.1　1階の自己回帰模型

この節では，均一分散ではあるが，撹乱項間に相関がある場合を取り扱う．すなわち Ω の形が

$$\Omega=\begin{bmatrix}1 & \omega_{12} & \cdots & \omega_{1n}\\ \omega_{21} & 1 & \cdots & \omega_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \omega_{n1} & \omega_{n2} & \cdots & 1\end{bmatrix} \tag{1}$$

となっている場合である．ただし，Ω は正値定符号であるからすべての i, j について $\omega_{ij}=\omega_{ji}$，かつ $-1<\omega_{ij}<1$ である.[5] このような場合（すべての ω_{ij} が0の場合を除き），系列 u_1, u_2, $\cdots$, u_n に**自己相関**(auto-correlation)あるいは**系列相関**(serial correlation)があるという．自己相関が問題となるのは多くの場合，時系列資料(time-series data)の分析においてである．

自己相関関係を記述する最も簡単な模型は次のようなものである．

$$u_i=\rho u_{i-1}+\varepsilon_i \qquad i=\cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{2}$$

ただし，$|\rho|<1$ であり，ε_i は $\varepsilon_j(j\neq i;\ j=\cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots)$ と無相関で，

$$E(\varepsilon_i)=0,\ E(\varepsilon_i^2)=\sigma_\varepsilon^2 \qquad i=\cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots \tag{3}$$

なる平均，分散をもつ確率変数とする．このようなスキームにしたがう系列 $u_i(i=\cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots)$ を**1階の自己回帰過程**(first-order autoregressive pro-

5)　定理12.33によりすべての i, j について，$\begin{vmatrix}1 & \omega_{ij}\\ \omega_{ij} & 1\end{vmatrix}=1-\omega_{ij}^2>0$，それゆえ $\omega_{ij}^2<1$ すなわち $-1<\omega_{ij}<1$ でなければならない．

cess)と呼ぶ．このとき u_t は逐次代入により

$$u_t=\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k\varepsilon_{t-k} \tag{4}$$

と表わされる．これから u_t の平均は

$$E(u_t)=E\left(\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k\varepsilon_{t-k}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\rho^kE(\varepsilon_{t-k})=0 \tag{5}$$

である．また u_t の分散，共分散は

$$\begin{aligned}\sigma^2=E(u_t^2)&=E\left(\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k\varepsilon_{t-k}\right)^2=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\rho^{k+j}E(\varepsilon_{t-k}\varepsilon_{t-j})\\&=\sigma_\varepsilon^2\sum_{k=0}^{\infty}\rho^{2k}=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2}\end{aligned} \tag{6}$$

また

$$u_{t+r}=\rho^r u_t+\sum_{j=1}^{r}\rho^{r-j}\varepsilon_{t+j} \tag{7}$$

であるから，u_t と u_{t+r} との共分散は

$$\begin{aligned}E(u_tu_{t+r})&=E\left\{u_t\left(\rho^r u_t+\sum_{j=1}^{r}\rho^{r-j}\varepsilon_{t+j}\right)\right\}\\&=\rho^rE(u_t^2)+\sum_{j=1}^{r}\rho^{r-j}E(u_t\varepsilon_{t+j})\\&=\rho^r\sigma^2\end{aligned} \tag{8}$$

である．(8)により，ρ は u_t と u_{t+1} との相関係数を意味していることが分かる．以上は任意の i について成立する．それゆえ，$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n$ からなる列ベクトル $\boldsymbol{u}$ については

$$E(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{o} \tag{9}$$

$$E(\boldsymbol{uu}')=\sigma^2\boldsymbol{\Omega}=\sigma^2\begin{bmatrix}1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-1}\\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-2}\\ \rho^2 & \rho & 1 & \cdots & \rho^{n-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \cdots & 1\end{bmatrix} \tag{10}$$

のように表わせる．(1)の ω_{ij} は，$\omega_{ij}=\rho^{|i-j|}$ となって $u_i,\ u_j$ 間の相関係数を表わしているわけである．$\boldsymbol{\Omega}$をこのような形に仮定することは，撹乱項間の相関が($u_1,\ \cdots,\ u_n$ を時系列と考えれば)期間が遠くなるほど等比数列的に減少するという一応自然な仮定と考えられよう．撹乱項の相互依存関係を示す$\boldsymbol{\Omega}$としては，以下このような形だけを前提とする．

さてもし ρ の値が既知であれば，前節に述べたように，回帰係数 $\boldsymbol{\beta}$ に対する最良線形不偏推定量は，(17.1.15)式の一般化最小自乗推定量 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{y}$ により求められる．この場合 $\boldsymbol{\Omega}^{-1}$ は(10)より次のようになる．

$$\boldsymbol{\Omega}^{-1}=(1-\rho^2)^{-1}\begin{bmatrix}1 & -\rho & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\rho^2 & -\rho\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\rho & 1\end{bmatrix} \tag{11}$$

しかし，通常は ρ の値は未知であり，回帰分析に使用される同じ標本から ρ に対するなんらかの推定値 $\hat{\rho}$ を得なければならない．そのときには $\hat{\rho}$ 自身が確率変数であるから，$\hat{\rho}$ を ρ のかわりに用いたときの上記の $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ は $\boldsymbol{\beta}$ に対する最良線形不偏推定量にはならない．しかしもし $\hat{\rho}$ が一致推定量であれば，かなり一般的な条件の下で $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ は $\boldsymbol{\beta}$ の一致推定量であることがいえる.[6] もし撹乱項 u_t に4次の積率が存在すれば，次の式で定義される統計量は ρ の一致推定量であることがいえる．

$$\hat{\rho}=\frac{\sum_{t=2}^{n}\hat{u}_t\hat{u}_{t-1}}{(n-1)\hat{\sigma}^2} \tag{12}$$

ただし $\hat{u}_t$ は変換前のデータによる通常の最小自乗回帰の残差であり，また $\hat{\sigma}^2$ はそれに基づく残差分散((16.1.29))である.[7]

17.3.2　ダービン-ワトソン比

撹乱項の自己相関検定に現在よく用いられるのはダービン-ワトソン検定(Durbin-Watson test)である．

いま(2)の u_t に関する1階の自己回帰方程式

$$u_t=\rho u_{t-1}+\varepsilon_t \qquad i=\cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots$$

の撹乱項 $\varepsilon_i(i=\cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots)$ が相互に独立に正規分布 $N(0,\ \sigma_\varepsilon^2)$ にしたがうと仮定し，このような自己回帰にしたがう撹乱項 $\boldsymbol{u}$ をもつ一般化された回帰模型

6)　拙著『計量経済学』有斐閣，1982年，124～125ページ参照．

7)　H. Theil, *Principles of Econometrics*, North-Holland, 1971, p. 407 参照．

$$y=X\beta+u \tag{13}$$

を前提とする.

このような y, X に, 通常の最小自乗法を適用した際の残差を $\hat{u}$ とする.

$$\begin{aligned}\hat{u}&=y-X\hat{\beta}=[I-X(X'X)^{-1}X']y\\&=[I-X(X'X)^{-1}X'](X\beta+u)=[I-X(X'X)^{-1}X']u\end{aligned} \tag{14}$$

また, この残差 $\hat{u}_t$ からなる次の量

$$d=\frac{\sum_{t=2}^{n}(\hat{u}_t-\hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}\hat{u}_t^2} \tag{15}$$

をダービン-ワトソン比(Durbin-Watson ratio)と名づける. これは n 次正方行列 A を

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&0\cdots&0&0\\-1&2&-1\cdots&0&0\\0&-1&2\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0\cdots&2&-1\\0&0&0\cdots&-1&1\end{bmatrix} \tag{16}$$

とすれば

$$d=\frac{\hat{u}'A\hat{u}}{\hat{u}'\hat{u}} \tag{17}$$

とも書ける.

もし指定変数の行列 X の列ベクトルのすべてが A の $(p+1)$ 個の固有列ベクトル(またはそれらの相互に1次独立な $(p+1)$ 個の1次結合)と一致すれば(これを条件 A と呼ぼう), 帰無仮説 $H_0: \rho=0$, 対立仮説 $H_1: \rho>0$ に対する一様最強力検定は, 棄却域 $-\infty<d\leqq d_0$ によって近似的に与えられる. ただし d_0 は棄却域の大きさを α とすれば

$$\int_{-\infty}^{d_0}f(d)d(d)=\alpha \tag{18}$$

によって決められる. ここに $f(d)$ は条件 A が満たされ, かつ $\rho=0$ を仮定したときの d の密度関数である.[8]

8) J. Durbin and G. S. Watson, "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression, I", *Biometrika*, Vol. 37, 1950, p. 423 参照.

ところで(17)の d は, $G=I-X(X'X)^{-1}X'$ とおけば $\hat{u}=Gu$ であり, かつ G はべき等行列であるから

$$d=\frac{u'G'AGu}{u'G'Gu}=\frac{u'GAGu}{u'Gu} \tag{19}$$

と書ける. このとき次のような定理が成立する.

〔定理 17.1〕 $\hat{u}$ および u が n 次列ベクトルで $\hat{u}=Gu$, ただし $G=I_n-X(X'X)^{-1}X'$, とし, かつもし $d=\hat{u}'A\hat{u}/(\hat{u}'\hat{u})=u'GAGu/(u'Gu)$, ただし A は対称行列,[9] とすれば

(a)
$$d=\frac{\sum_{i=1}^{n-p-1}\nu_i z_i^2}{\sum_{i=1}^{n-p-1}z_i^2} \tag{20}$$

が成立するような直交変換 $u=Hz$ が存在する. ただし $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{n-p-1}$ は, GA の $p+1$ 個の0の固有値以外の固有値である.

(b) もし X の s 個の列が, A の s 個の固有列ベクトルの相互に1次独立な1次結合と一致し, かつもし A の残りの $n-s$ 個の固有ベクトルに対応する A の固有値を

$$\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\cdots\leqq\lambda_{n-s}$$

が成立するように番号づけし, また

$$\nu_1\leqq\nu_2\leqq\cdots\leqq\nu_{n-p-1}$$

とすれば

$$\lambda_i\leqq\nu_i\leqq\lambda_{i+(p+1)-s}\qquad i=1,2,\cdots,n-p-1 \tag{21}$$

が成立する.

この定理の証明はここでは述べない.[10] 上の定理から次のような系がすぐ導ける.

〔系 17.1〕 定理 17.1(b)の条件の下で

9) すなわちこの定理は, A が(16)のような行列を含めた一般の実数対称行列の場合に成立する.

10) Durbin and Watson, 前掲論文, pp. 411–415 参照.

$$d_L=\frac{\sum_{i=1}^{n-p-1}\lambda_i z_i^2}{\sum_{i=1}^{n-p-1}z_i^2},\qquad d_U=\frac{\sum_{i=1}^{n-p-1}\lambda_{i+p+1-s}z_i^2}{\sum_{i=1}^{n-p-1}z_i^2} \tag{22}$$

とすれば次の不等式が成立する．

$$d_L \leqq d \leqq d_U \tag{23}$$

ところで(16)で定義されるAにはゼロの固有値が1個ある．なぜならAの各列をベクトルとして全部合計すればゼロベクトルとなるから $|A|=0$ であり，少なくとも1個の固有値はゼロである．一方，指定変数の行列Xの第1列は仮定によりその要素がすべて1である．それゆえXの第1列はAの固有値$\lambda=0$に対応する固有列ベクトルに等しいから，系17.1において $s=1$ とおいて

$$\left.\begin{aligned} d_L&=\frac{\sum_{i=1}^{n-p-1}\lambda_i z_i^2}{\sum_{i=1}^{n-p-1}z_i^2} \\ d_U&=\frac{\sum_{i=1}^{n-p-1}\lambda_{i+p}z_i^2}{\sum_{i=1}^{n-p-1}z_i^2}\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

とすると

$$d_L \leqq d \leqq d_U$$

が，Xがどのような値であっても(ただし第1列の要素はすべて1)，いつでも成立する．この結論は重要である．

ところで，$\rho=0$ を仮定したときのdの分布を考えると，それは一般にXの値に依存し，その密度関数 $f(d)$ を求めることはむずかしい．これに対し，(24)により与えられる d_L, d_U の分布はXの値にまったく依存せず，これらを確定することができる．

d_L, d_U の分布は，A の $p+1$ 個の固有列ベクトルを独立変数とする回帰より得られるd(明らかに条件Aを満たす)と同一の分布になることが証明できる．[11)]

d_L, d_U の密度関数をそれぞれ $f_L(d_L)$, $f_U(d_U)$ とし，αを有意水準として

11)　Durbin and Watson，前掲論文，p.414 参照．

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{d_{L0}}f_L(d_L)d(d_L)&=\alpha \\ \int_{-\infty}^{d_{U0}}f_U(d_U)d(d_U)&=\alpha\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

なる d_{L0}, d_{U0} を定義するともしdが d_L(または d_U) に一致すれば，$d\leqq d_{L0}$(または $d\leqq d_{U0}$) は $H_0:\rho=0$, $H_1:\rho>0$ に対して近似的に一様最強力検定を与える棄却域となる．

通常の回帰では独立変数のすべてがAの固有列ベクトルとなることはないから，

$$\int_{-\infty}^{d_0}f(d)d(d)=\alpha \tag{26}$$

を満たす d_0 によって，棄却域 $(-\infty, d_0]$ を定義しても，この棄却域は一様最強力検定を与えない．独立変数ベクトルと固有列ベクトルとの相違が大きくなるほど検定力は落ちるであろう．しかし(23)より

$$d_{L0}\leqq d_0\leqq d_{U0} \tag{27}$$

が成立するから，次のような形で検定が行なえる．

対立仮説 $\rho>0$ に対し，もし

$$d\leqq d_{L0} \tag{28}$$

であれば当然 $d\leqq d_0$ であるから，帰無仮説 $\rho=0$ は棄却され，また

$$d_{U0}<d \tag{29}$$

ならば当然 $d_0<d$ であるから，$\rho=0$ は棄却されないことになる．またもし

$$d_{L0}<d\leqq d_{U0} \tag{30}$$

ならば，d と d_0 の大小関係については何もいえないから，判定はできない．

ダービンとワトソンは対立仮説 $\rho>0$ に対する仮説 $\rho=0$ についてのこのような臨界値 d_0 をはさむ2つの境界 d_{L0}, d_{U0} の値の表を作成した．付表6の(1)～(3)には $\alpha=0.05$, 0.025, 0.01 の3つのケースについて，$n=15, 16, 17, \cdots, 39, 40, 45, 50, \cdots, 95, 100$; $p=1, 2, \cdots, 5$ の場合についての表を掲げてある．

ところで(24)におけるAの固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-1}$ は

$$\lambda_i=2\left(1-\cos\frac{\pi i}{n}\right)\qquad i=1, 2, \cdots, n-1 \tag{31}$$

により与えられる．したがって $\lambda_{n-i}=2[1-\cos\{\pi(n-i)/n\}]=2\{1+\cos(\pi i/n)\}$

$=4-2\{1-\cos(\pi i/n)\}=4-\lambda_i$ であるから，

$$\lambda_{n-i}-2=-(\lambda_i-2) \tag{32}$$

が成立する．これと(24)の形から，2つの密度関数 $f(d_L)$ と $f(d_U)$ の曲線は横座標2を通る直線を軸として左右対称の形をしていることが分かる．

それゆえ，対立仮説 $H_1: \rho<0$ のときには分布の右側に棄却域をとるが，その際の2つの臨界値を d_{L0}', d_{U0}' とすれば，$d_{L0}'-2=-(d_{U0}-2)$，$d_{U0}'-2=-(d_{L0}-2)$，すなわち

$$\left.\begin{aligned} d_{L0}'&=4-d_{U0} \\ d_{U0}'&=4-d_{L0} \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

となる．そして $d \geqq d_{U0}'$ であれば $H_0: \rho=0$ は棄却されて負の自己相関があると判定され，$d<d_{L0}'$ であれば H_0 は棄却されない．あるいは $4-d$ をあたかも対立仮説が $\rho>0$ の場合の統計量 d であるごとくに用いてもよい．それゆえ $4-d \leqq d_{L0}$ ならば負の自己相関があると判定され，もし $4-d>d_{U0}$ ならば有意ではない．その他の場合には検定の結論は得られない．

自己相関の係数の符号があらかじめ分からないときには両側検定を用いる．すなわち

$$\begin{cases} d \leqq d_{L0} \text{ もしくは } 4-d \leqq d_{L0} \text{ ならば有意,} \\ d_{U0}<d<4-d_{U0} \text{ ならば有意ではない,} \\ \text{その他の場合には結論が出ない.} \end{cases}$$

とする．ただし有意水準5%ならば2.5%点の d_{U0}, d_{L0} を用いる．

例題 17.3.1　例題16.1.2(時系列でないので適例ではないが)において

表 17.2

i	(1) 観測値 y_t	(2) 推定値 $\hat{y}_t$	(3) 残差 $\hat{u}_t$	(4) $\hat{u}_t-\hat{u}_{t-1}$
1	15	14.58	0.42	—
2	18	18.55	−0.55	−0.97
3	17	15.75	1.25	1.80
4	13	14.25	−1.25	−2.50
5	17	15.50	1.50	2.75
6	14	15.37	−1.37	−2.87

$$y_t=7.70990+0.11674x_{t1}+0.80703x_{t2}+\hat{u}_t$$

が得られた．これより残差 $\hat{u}_t$ を計算すると，表17.2の(3)欄のようになる．これに基づいてダービン-ワトソン比を計算すると

$$d=\frac{\sum_{t=2}^{6}(\hat{u}_t-\hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{6}\hat{u}_t^2}=\frac{26.2303}{7.7308}=3.39$$

となる．付表6では $n<15$ についての臨界値は利用できないが，$4-d=4-3.39=0.61$ はかなり小さいので，撹乱項に負の自己相関がある疑いが強いといえる．

演習問題

1　本章第1節演習問題1の回帰模型は実は，u_t が $\rho=0.8$ の1階の自己回帰過程にしたがう場合に相当していた．そこで $\rho=-0.8$ であるとして同様な比較を行なえ．

2　第9章第5節演習問題1および2においてそれぞれ残差 $\hat{u}_t$ を計算し，ダービン-ワトソン比を計算せよ．

3　$n=69$ の時系列データによる独立変数($p=$) 2個の回帰においてダービン-ワトソン比 $d=0.2488$ を得た．撹乱項に正の自己相関があるといえるか．

17.4　独立変数が確率変数の回帰(i)……モンテカルロ実験

以上の3つの節では，回帰模型における撹乱項 u に関する仮定を緩める場合の議論であった．この節以後では独立変数 X に関する仮定に焦点を当てる．

いままでの回帰模型では，独立変数は指定変数であると仮定してきた．指定変数という意味は，大きさ n の $(p+1)$ 次元の標本 $(y_i, x_{i1}, \cdots, x_{ip})$ $i=1, \cdots, n$ を繰り返し抽出したときに，$(x_{i1}, \cdots, x_{ip})$ $i=1, \cdots, n$ なる np 個の x_{ij} の値が標本が変わっても変わらないことを意味する．標本ごとに変動するのは各 y_i, $i=1, \cdots, n$ の値だけである．このような仮定が採用されているのは，第9章で説明したように，もともと回帰分析が，統御された実験により生み出されるデータの解析を意図してつくられたものであるからである．このような実験においては，各独立変数の値は実験者の指定どおりの水準に任意に固定することができるから，大きさ n の標本を生み出す実験を何回繰り返しても X を不変に保つことができるのである．その場合に生ずる(i を固定したときの) y_i の標本

間の変動は，$x_{t1}, x_{t2}, \cdots, x_{tp}$ が一定値であるからまったく撹乱項 u_t の確率的な変動に基づくものであると考えることができる．

経済分析においてはしかしながら，上述のような統御された実験の条件が整うことはまれである．観測される $(y_t, x_{t1}, \cdots, x_{tp})i=1, \cdots, n$ の組は，けっして独立変数を経済分析者の指定する水準に固定して得られたデータではない．実験が行なわれているとすれば，その実験の主体は分析者ではなく，「自然」であると考えられる．自然が，分析者の意図と無関係に行なった実験の結果を経済分析者は事後的に観察するだけである．

このような場合に，独立変数のいくつかは指定変数と仮定するよりも確率変数と仮定するほうが自然かもしれない．

独立変数が確率変数であると仮定される場合の回帰模型に，最小自乗法を適用するとき，その係数の最小自乗推定量 $\hat{\beta}$ がどのような性質をもつかなどについては次節で論じることにして，以下いわゆるモンテカルロ実験によって，数値的にどのような推定値の分布が得られるか確かめてみよう．

大ざっぱにいえば，モンテカルロ法(Monte Carlo Method)とは，確率変数を含む模型の確率的な性質を，具体的な形に想定した確率分布の頻度でいくつかの確率変数に数値を繰り返しとらせ，それに応じて模型に含まれている他の変数(またはその模型の母数の推定量)がどのような数値の度数分布を示すかを観察することによって調べる方法であるといえよう．以下，ここで行なうモンテカルロ実験の説明をしよう．

独立変数の数は $p=2$ とする．すなわち

$$y_t=\beta_0+\beta_1x_{t1}+\beta_2x_{t2}+u_t \tag{1}$$

なる回帰模型を仮定する．撹乱項 u_t は平均0，分散1で相互に独立に正規分布にしたがうとする．また独立変数は指定変数の場合，確率変数の場合の2つに分け，それぞれケースA，ケースBと呼ぶ．それぞれのケースについて次のようなモンテカルロ実験を行なう．

ケースA：独立変数が指定変数の場合　$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{n1}, x_{n2}$ の各値を一定水準に固定し，$u_1, u_2, \cdots, u_n$ を平均0，分散1の正規乱数[12]でおき換えて，(1)にしたがって $y_1, y_2, \cdots, y_n$ をつくり出す．

12) 一定の正規分布にしたがう確率変数の相互に独立な実現値の系列を正規乱数と呼ぶ．この正規乱数のつくり方については444ページの脚注13)を参照せよ．

ケースB：独立変数が確率変数の場合　$u_1, u_2, \cdots, u_n$ とともに $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{n1}, x_{n2}$ もまた乱数をおき換えて，(1)にしたがって $y_1, y_2, \cdots, y_n$ をつくる．この場合 x_{t1}, x_{t2} としておく乱数は，u_t のための乱数と相関をもたせることもある．

以上の2つのケースをさらに次のような5つに分け，これらを構造A1等々と呼ぶことにする．

ケースAについては指定変数である2つの独立変数 x_1, x_2 に見かけ上相関がない場合とある場合とに分け次のようにする．

$$\left.\begin{array}{ll}\text{構造 A1} & r_{x_1x_2}=0\\ \text{構造 A2} & r_{x_1x_2}=0.6\end{array}\right\} \tag{2}$$

ただし $r_{x_1x_2}$ は x_1 と x_2 の標本相関係数である．

またケースBについては次の3つの構造に分ける．

$$\left.\begin{array}{llll}\text{構造 B1} & \rho_{x_1u}=0, & \rho_{x_2u}=0, & \rho_{x_1x_2}=0\\ \text{構造 B2} & \rho_{x_1u}=0.7746, & \rho_{x_2u}=0, & \rho_{x_1x_2}=0\\ \text{構造 B3} & \rho_{x_1u}=0.7746, & \rho_{x_2u}=0.7746, & \rho_{x_1x_2}=0.6000\end{array}\right\} \tag{3}$$

ただし $\rho_{x_1x_2}$ は x_1 と x_2 の母相関係数である．ρ_{x_1u}, ρ_{x_2u} も同様．

モンテカルロ実験は全体として次のような条件の下で行なう．

1)　すべての構造について，撹乱項 u_t には平均0，分散1の正規乱数を用いる．

2)　すべての構造について，母集団回帰係数は次のように定める．

$$\beta_0=1,\ \beta_1=1,\ \beta_2=-1 \tag{4}$$

3)　すべての構造について，標本の大きさ n は15とする．

4)　ケースAにおいて独立変数の標本平均は0，標本分散は1とする．すなわち

$$\left.\begin{array}{ll}\bar{x}_j=\dfrac{1}{n}\sum_t x_{tj}=0 & j=1,\ 2\\ s_{x_j}{}^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_t(x_{tj}-\bar{x}_j)^2=1 & j=1,\ 2\end{array}\right\} \tag{5}$$

x_{t1}, x_{t2} の具体的な数値は表17.3に掲げる．

5)　ケースBにおいて，x_1, x_2 の周辺分布は正規分布 $N(0, 1)$ である．いいかえれば，x_1, x_2, u は3変量正規分布にしたがい，その平均，共分散は

表 17.3　2個の独立変数の値

i	構造 A1		構造 A2	
	x_1	x_2	x_1	x_2
1	−0.05021	−1.04624	(構造A1の x_1 と同じ)	0.74003
2	−0.00516	−0.93190		0.93740
3	0.17279	−0.83641		0.59129
4	0.36705	−0.84247		1.12403
5	−0.74268	−0.32448		−0.53218
6	0.01893	−0.25806		0.12419
7	1.43156	−0.58059		1.23864
8	0.35037	−0.47055		0.72106
9	−0.63575	−0.37203		0.30292
10	−0.62793	−0.17339		−0.17616
11	−0.47130	0.02926		−0.62314
12	−1.04587	0.49599		−1.47429
13	−1.78406	1.97017		−2.35339
14	0.71234	1.78066		−0.62022
15	2.30430	1.55870		−0.00004

$$\boldsymbol{\mu}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}1 & \rho_{x_1x_2} & \rho_{x_1u}\\ \rho_{x_1x_2} & 1 & \rho_{x_2u}\\ \rho_{x_1u} & \rho_{x_2u} & 1\end{bmatrix} \tag{6}$$

である．$\rho_{x_1x_2}$, ρ_{x_1u}, ρ_{x_2u} の値は（3）に与えられているとおりである．このような3変量正規分布からの乱数の組は，次のようにすればつくれる．すなわち，u_t, v_{t1}, v_{t2} を相互に独立に正規分布 $N(0,\ 1)$ にしたがう確率変数の実現値，すなわち正規乱数[13)]として

$$\begin{bmatrix}x_{t1}\\x_{t2}\\u_t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{1-\rho_{x_1u}^2} & 0 & \rho_{x_1u}\\ 0 & \sqrt{1-\rho_{x_2u}^2} & \rho_{x_2u}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{t1}\\v_{t2}\\u_t\end{bmatrix} \tag{7}$$

によって変換すればよい．x_1 と x_2 との母相関係数は，$E(v_{t1}v_{t2})=E(v_{t1}u_t)=E(v_{t2}u_t)=0$ であり，かつ $E(u_t^2)=1$ だから

$$\begin{aligned}\rho_{x_1x_2}&=E(x_{t1}x_{t2})=E\{(\sqrt{1-\rho_{x_1u}^2}v_{t1}+\rho_{x_1u}u_t)(\sqrt{1-\rho_{x_2u}^2}v_{t2}+\rho_{x_2u}u_t)\}\\&=\rho_{x_1u}\rho_{x_2u}\end{aligned}$$

となる．

6)　すべての構造について，それぞれ100個の(大きさ15の)標本をつくり，それぞれの標本ごとに最小自乗法により，回帰係数推定値その他を計算する．

このようにして求められた最小自乗法による，5つの構造の回帰係数推定値 $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ の分布(100個の標本による頻度分布)を図17.1のごとく棒グラフにより図示した．[14)] これら3×5個の分布の下方の括弧中には $\hat{\beta}_j$ の標本平均 $\bar{\hat{\beta}}_j$，標本標準偏差 $s_{\hat{\beta}_j}$ が示してある．[15)]

これらの分布を観察すると，構造 A1，A2 においては，各 $\hat{\beta}_j$ は母数 β_j の回りに偏りなく分布し，その平均もほぼ母数 β_j に一致していることが分かる(母数の位置は縦の破線で示されている)．16.1で述べた回帰模型における最小自乗推定量の不偏性が実験的に確かめられたわけである．

ところでケースBではどうであろうか．独立変数が確率変数である場合の回帰係数推定値の分布についてはわれわれはまだ理論的な考察をしていないのであるが，一見したところ B1 は A1，A2 と同様であるが，B2 と B3 で特別な変化が生じていることが分かる．B1 は x_1, x_2 と u とが無相関である場合であ

---

13)　正規乱数 u_t, v_{t1}, v_{t2} は，一様分布 $U(0,\ 1)$ からの乱数を12個合計して6を引くことにより作成した．すなわちそれらの連続型一様乱数を $w_1, w_2, \cdots, w_{12}$ とすれば，たとえば u_t については $u_t=\sum_{j=1}^{12}w_j-6$ である．w_j の平均は1/2，分散は1/12であるから，中心極限定理により u_t は平均0，分散1の正規分布に近似的にしたがう．v_{t1}, v_{t2} も別個につくる．

なお厳密に正規分布にしたがう正規乱数をつくるには，上記の連続型一様乱数 w_1, w_2 を次のように変換すればよい．

$$\left.\begin{aligned}z_1&=(-2\log_e w_1)^{\frac{1}{2}}\cos 2\pi w_2\\ z_2&=(-2\log_e w_1)^{\frac{1}{2}}\sin 2\pi w_2\end{aligned}\right\}$$

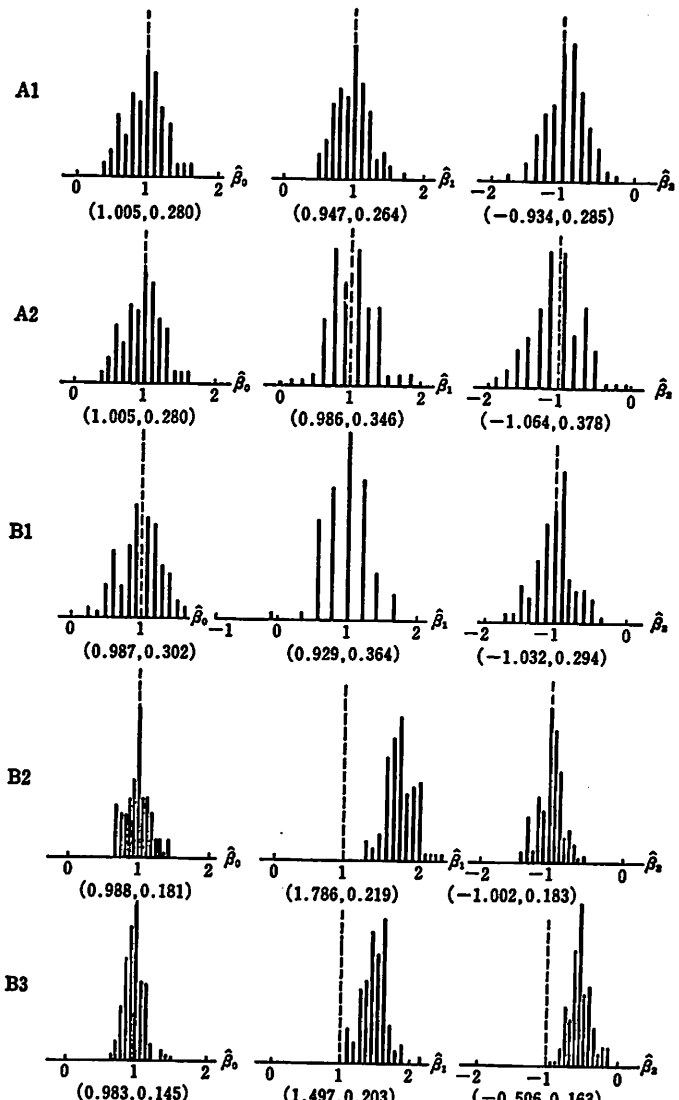
この z_1, z_2 は相互に独立に $N(0,\ 1)$ にしたがう(拙著『計量経済学』有斐閣，1982年，36ページ参照)．

14)　本来ならばこの図はヒストグラムにすべきであるが，そうすると面積1にする必要があるため，レインジが小なるとき高さが著しく高くなるなどで各図間のバランスが崩れるので，やむをえず棒グラフにした．

15)　$\hat{\beta}_j^{(k)}$ を k 番目の標本における β_j の推定値とすれば

$$\bar{\hat{\beta}}_j=\sum_{k=1}^{100}\hat{\beta}_j^{(k)}/100,\quad s_{\hat{\beta}_j}=\sqrt{\sum_{k=1}^{100}(\hat{\beta}_j^{(k)}-\bar{\hat{\beta}}_j)^2/(100-1)}$$

図 17.1　回帰係数推定値の分布



（注）各分布の下方の括弧の数字は標本平均および標本標準偏差の値である．

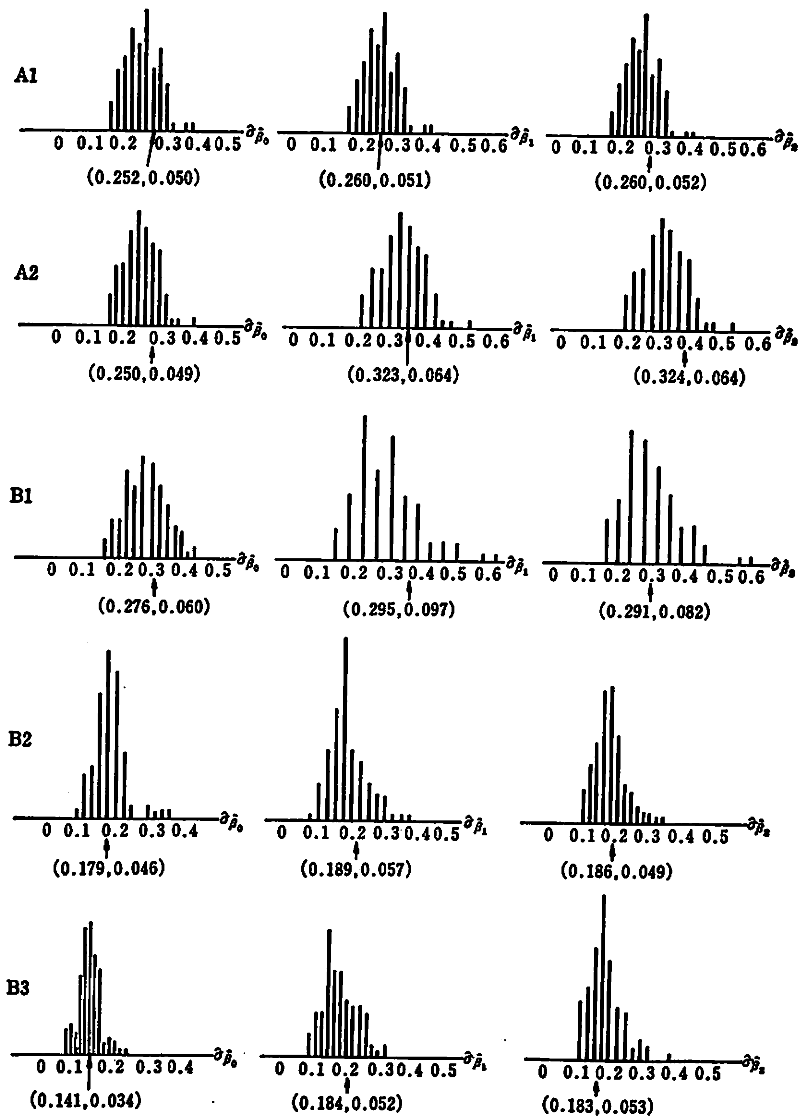
るが，$\hat{\beta}_j$ は各 β_j を中心として偏りなく分布し $\hat{\beta}_j$ の平均は β_j にほぼ等しい．ところが，B2 は x_1 と u とに相関がある場合であるが，x_1 の係数推定値 $\hat{\beta}_1$ だけは大きく右方（プラスの方向）に偏って分布し，その平均は 1.786 となっており，母数 $\beta_1=1$ よりは相当大きな推定値が平均して得られてしまっている．さらに，x_1 と x_2 とがそれぞれ u と正相関がある場合である構造 B3 においては，$\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ がともにプラスの方向に偏っていることが分かる．

一般にモンテカルロ実験の結果は，母数に特殊な数値（いまの場合 $\beta_0=1$, $\beta_1=1$, $\beta_2=-1$, $\sigma^2=1$）をとらせたときの，その意味で特殊な結果でしかないから，これより一般的な結論を導き出すことはできない．しかし，上のような結果から見て次のようなことが成立するのではないだろうか．すなわち独立変数が確率変数のときには，独立変数と撹乱項 u とが無相関であれば，その係数の最小自乗推定量は不偏推定量であるが，相関があるとその相関の符号の方向にその係数の最小自乗推定量は偏りをもつ．

次に，推定回帰係数の標準偏差推定値（(16. 2. 8) 式）$\hat{\sigma}_{\beta_j}$ はどのような分布を示すだろうか．図 17. 2 を見てほしい．通常の回帰模型の仮定（ケースAがそれを満たす）の下では，$\hat{\sigma}_{\beta_j}{}^2$ は $\sigma_{\beta_j}{}^2$ の不偏推定値である．ところで $\hat{\beta}_j$ の実際の分布は図 17. 1 に与えられているのだから，これより計算される $\hat{\beta}_j$ の標本標準偏差 s_{β_j} はほぼ σ_{β_j} に近い値である．図 17. 2 の各分布の下方には図 17. 1 と同様に $\hat{\sigma}_{\beta_j}$ の標本平均，標本標準偏差の値が示されている．この $\hat{\sigma}_{\beta_j}$ の標本平均と $\hat{\beta}_j$ の標本標準偏差 s_{β_j}（その位置を矢印で示す）とを比較してみると，A1, A2 いずれについても両者はほぼ一致している（もちろん，不偏なのは $\hat{\sigma}_{\beta_j}$ ではなくて分散の $\hat{\sigma}_{\beta_j}{}^2$ であるから，$\hat{\sigma}_{\beta_j}$ の平均は厳密には σ_{β_j} に等しくない）．そして両者のおおよその一致はケースBの各構造についても見られる．

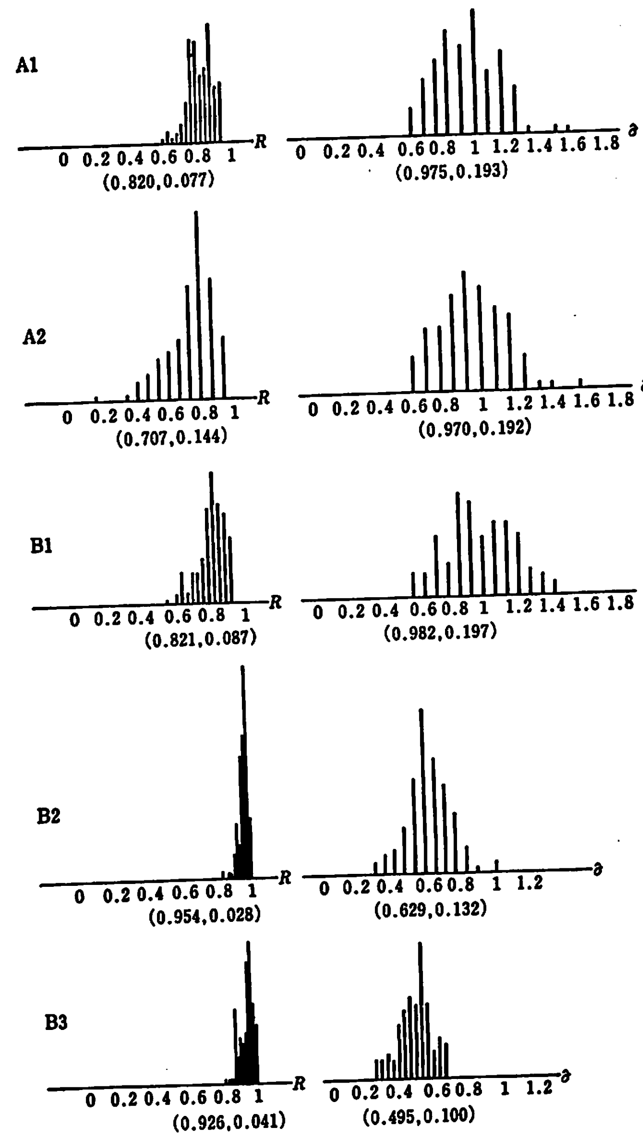
次に，図 17. 3 に各構造における重相関係数 R（(16. 1. 15) 式参照）と撹乱項の推定標準偏差 $\hat{\sigma}$（(16. 1. 29) 式参照）の分布を示す．まず $\hat{\sigma}$ は A1, A2, B1 では大体同じような分布であるが，独立変数 x_1 と撹乱項 u との相関がある B2 では全体として値が小さくなり，2 個の独立変数と相関のある B3 では最小になっている．すなわち独立変数と撹乱項の間に正相関があるときには，残差分散 $\hat{\sigma}^2$ は σ^2 の過小推定値になりやすいようである．重相関係数 R は，ケースAについては，独立変数が無相関の A1 のほうが相関のある A2 よりも R が大きくなっている．また独立変数と u とが無相関でかつ独立変数どうし無相関である

図 17.2　推定回帰係数標準偏差推定値の分布



(注)　1.　矢印は図 17.1 における $\hat{\beta}_j$ の標本標準偏差 $s_{\hat{\beta}_j}$ の位置を示す。
　　　2.　各分布の下の括弧の数字は(標本平均，標本標準偏差)を示す。

図 17.3　重相関係数および撹乱項の推定標準偏差の分布

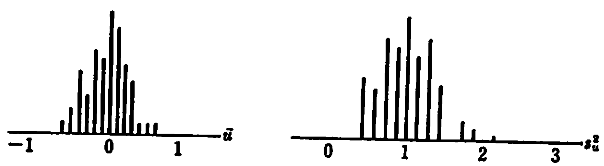


(注)　各分布の下の括弧の数字は(標本平均，標本標準偏差)を示す。

B1はA1と同じような分布を示す．B2, B3ではθが小なためRも著しく高くなっている．B3のほうがB2よりθが小だからRが高いことが期待されるところであるが，B3では独立変数間に相関がある（A2と同様）ためその分だけRが小さくなっているので，結果的にはB2のほうがいく分高くなっている．

最後に各構造に共通な撹乱項u_tの各標本における平均$\bar{u}$の分布と標本分散$s_u^2\left(=\frac{1}{14}\sum_{t=1}^{15}(u_t-\bar{u})^2\right)$の分布を図17.4に掲げておく．$\bar{u}$の分布は，ケースAの$\hat{\beta}_0$の分布と平均が1だけずれているだけで一致していることに注意しよう．

図 17.4　撹乱項の標本平均および標本分散の分布



(0.005,0.280)　(1.002,0.374)

17.5　独立変数が確率変数の回帰(ii)……理論的考察

この節では，独立変数が確率変数であるとしたときの回帰模型に最小自乗法を適用した場合に得られる最小自乗推定量の理論的な性質を考察する．結論を先にいえば，独立変数が撹乱項と統計的に独立であれば，16.1の回帰模型における最小自乗推定量の性質はほとんどそのまま保持される．しかし独立変数が撹乱項と統計的に独立でないときには，最小自乗法は適切な推定法ではなくなる．この場合どのような推定法をとるべきかについては，この本では触れる余裕がない．[16]

17.5.1　独立変数が撹乱項と統計的に独立な場合

16.1の回帰模型において，Xが指定変数であるという仮定のかわりにXが確率変数でuと統計的に独立であるという仮定をおく．すなわちyは観測可能確率変数を要素とするn次列ベクトル，Xは観測可能確率変数を要素とする$n\times(p+1)$（ただし$p+1\leq n$）の行列でその第1列の要素はすべて1とする．すなわち第1列の要素のみは平均1，分散0の（退化した）確率変数と考える．uは撹乱項を要素とするn次列ベクトル，βは回帰係数を要素とする$(p+1)$次列ベクトルとする．このとき

$$y=X\beta+u \tag{1}$$

を仮定する．また

$$X\text{と}u\text{とは統計的に独立} \tag{2}$$

と仮定し，またuは

$$\left.\begin{aligned}E(u)&=o\\E(uu')&=\sigma^2I\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

と仮定する．

Xを確率変数と仮定するため，Xの位がつねに$p+1$であるという仮定をおくことができなくなる．たとえば第2列のn個の要素が偶然すべて同一の値をとればXの位は1つ落ちる．そのような場合には$X'X$の逆行列$(X'X)^{-1}$が存在しないから，最小自乗法を適用することはできない．そこで，最小自乗推定量の性質を論ずる以下の議論ではXの位が$p+1$より小さくなる確率はゼロと仮定する．

以上の模型（前節の構造B1に相当する）に最小自乗法を適用する．その結果まず，回帰係数の最小自乗推定量$\hat{\beta}$は，もし$E\{(X'X)^{-1}X'\}$が存在すれば

$$\begin{aligned}E(\hat{\beta})&=E\{(X'X)^{-1}X'y\}=E\{(X'X)^{-1}X'(X\beta+u)\}\\&=\beta+E\{(X'X)^{-1}X'u\}\\&=\beta+E\{(X'X)^{-1}X'\}E(u)=\beta\end{aligned} \tag{4}$$

となるから，βの不偏推定量である．また$\hat{\beta}$の共分散行列は

$$\Sigma_{\hat{\beta}\hat{\beta}}=E(\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'=E\{(X'X)^{-1}X'uu'X(X'X)^{-1}\} \tag{5}$$

となる．ここで期待値は2段階にとる．すなわちまずXを固定したときのuの条件付期待値をとり，次にXに関する期待値をつくる．[17] すなわち，もし$E\{(X'X)^{-1}\}$が存在すれば（5）は

$$\begin{aligned}\Sigma_{\hat{\beta}\hat{\beta}}&=E[E\{(X'X)^{-1}X'uu'X(X'X)^{-1}|X\}]\\&=E\{(X'X)^{-1}X'E(uu'|X)X(X'X)^{-1}\}\end{aligned}$$

16) 計量経済学の分野においては，独立変数が撹乱項と統計的に独立でない場合の模型の推定法について種々な方法が開発されている．たとえば H. Theil, *Principles of Econometrics*, North-Holland, 1971; J. Johnston, *Econometric Methods*, McGraw-Hill, 2nd edition, 1972（竹内・関谷・栗山・美添・舟岡共訳『計量経済学の方法』全2巻，東洋経済新報社）; 拙著『計量経済学』有斐閣，1982年を参照せよ．

$$=E\{(X'X)^{-1}X'E(uu')X(X'X)^{-1}\}$$
$$=E\{(X'X)^{-1}X'\sigma^2 IX(X'X)^{-1}\}$$
$$=\sigma^2 E\{(X'X)^{-1}\} \qquad (6)$$

となる．(6)を要素別に書けば

$$E(\hat{\beta}_j-\beta_j)(\hat{\beta}_k-\beta_k)=\sigma^2 E(c_{jk}) \qquad j,\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ p \qquad (7)$$

を意味する．ただし c_{jk} は $(X'X)^{-1}$ の第 $(j,\ k)$ 要素(ただし $j,\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ p$)である．

また残差平方和の期待値は

$$E(\hat{u}'\hat{u})=E\{E(\hat{u}'\hat{u}\mid X)\}$$
$$=E\{(n-p-1)\sigma^2\}=(n-p-1)\sigma^2 \qquad (8)$$

である((16.1.28)式参照)．それゆえ残差分散 $\hat{\sigma}^2=\hat{u}'\hat{u}/(n-p-1)$ の期待値は

$$E(\hat{\sigma}^2)=E\{\hat{u}'\hat{u}/(n-p-1)\}=\sigma^2 \qquad (9)$$

となり $\hat{\sigma}^2$ は σ^2 の不偏推定量である．また，回帰係数の推定共分散 $\hat{\Sigma}_{\beta\beta}=\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$ の期待値は

$$E(\hat{\Sigma}_{\beta\beta})=E\{\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}\}=E[E\{\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}\mid X\}]$$
$$=E[E\{\hat{\sigma}^2\mid X\}(X'X)^{-1}]=E\{\sigma^2(X'X)^{-1}\}$$
$$=\sigma^2 E\{(X'X)^{-1}\}=\Sigma_{\beta\beta} \qquad (10)$$

となり，$\hat{\Sigma}_{\beta\beta}$ もまた $\Sigma_{\beta\beta}$ の不偏推定量であることが分かる．

なお，Xが確率変数であるから，$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'y$ は β の線形推定量ではないので，$\hat{\beta}$はβの最良線形不偏推定量ではありえない．

もし，uがXに独立に正規分布 $N(o,\ \sigma^2 I)$ にしたがうとすれば，$\hat{\beta}$, $\tilde{\sigma}^2=\hat{u}'\hat{u}/n$ はそれぞれ β, σ^2 に対する最尤推定量である．なぜなら，いまXの結合密度を $f(X;\theta)$，ただしθはこの密度関数の母数，と書くと，この場合の対数尤度関数は

$$\log L=-\frac{n}{2}\log(2\pi)-\frac{n}{2}\log\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}(y-X\beta)'(y-X\beta)+\log f(X;\theta) \qquad (11)$$

となる．右辺の最後の項は β, σ^2 に関しては定数なので，(11)を最大化する β, σ^2 の値はθと無関係に(16.2.4)，(16.2.5)の $\tilde{\beta}(=\hat{\beta})$ と $\tilde{\sigma}^2$ により与えられる．すなわち，Xが正規分布変数uと独立であれば，$\hat{\beta}$, $\tilde{\sigma}^2$ は β, σ^2 に対する最尤推定量である．

17) たとえば x, y という2変数の結合分布があり，結合密度を $f(x,\ y)$ とするとき，x, y の関数 $\varphi(x,\ y)$ の期待値は，もしそれが存在すれば

$$E\{\varphi(x,\ y)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\ y)f(x,\ y)\,dx\,dy$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\ y)g(y\mid x)\,dy\right\}h(x)\,dx$$

と表わせる．ただし $g(y\mid x)$ は x を与えたときの y の条件付密度，$h(x)$ は x の周辺密度とする．$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\ y)g(y\mid x)\,dy$ を $E\{\varphi(x,\ y)\mid x\}$ と記せば

$$E\{\varphi(x,\ y)\}=\int_{-\infty}^{\infty}E\{\varphi(x,\ y)\mid x\}h(x)\,dx$$
$$=E[E\{\varphi(x,\ y)\mid x\}]$$

と書ける．

17.5.2　独立変数が撹乱項と統計的に独立でない場合

前項のような最小自乗推定量の性質はまったく，独立変数の撹乱項に対する統計的独立性に依存するものである．この仮定が満たされない場合には $\hat{\beta}$, $\hat{\sigma}^2$, $\hat{\Sigma}_{\beta\beta}$ の不偏性や，$\hat{\beta}$ と $\tilde{\sigma}^2=\hat{u}'\hat{u}/n$ が最尤推定量であるという性質は一般に成立しない．

いまこの場合の $\hat{\beta}$ の性質について考察してみよう．

$$\hat{\beta}=\beta+(X'X)^{-1}X'u \qquad (12)$$

となるが，Xとuとは統計的に独立でないから第2項は $(X'X)^{-1}X'$ と独立に u についての期待値をとることはできない．この場合期待値 $E\{(X'X)^{-1}X'u\}$ は存在しないことが多い．x_{tj}, u_t に正規分布を仮定しても，行列 $(X'X)^{-1}X'u$ の要素の確率分布を理論的に導出することは困難なので，前節のようなモンテカルロ実験によりその分布を経験的に推測することになる．

しかし前節の実験(B2とB3)のような独立変数2個($p=2$)のケースについては，次のように説明できるであろう(もちろんこれらは厳密な証明ではない)．

この場合には(12)は

$$\begin{bmatrix}\hat{\beta}_0\\ \hat{\beta}_1\\ \hat{\beta}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n & \sum x_{t1} & \sum x_{t2}\\ \sum x_{t1} & \sum x_{t1}^2 & \sum x_{t1}x_{t2}\\ \sum x_{t2} & \sum x_{t1}x_{t2} & \sum x_{t2}^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\sum u_t\\ \sum x_{t1}u_t\\ \sum x_{t2}u_t\end{bmatrix} \qquad (13)$$

となるが，これを $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ だけの式として書き換えれば

$$\begin{bmatrix}\hat{\beta}_1\\\hat{\beta}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}m_{11} & m_{12}\\m_{21} & m_{22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}m_{1u}\\m_{2u}\end{bmatrix} \tag{14}$$

となる(16.1演習問題3参照). ただし

$$m_{jk}=\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_j)(x_{ik}-\bar{x}_k) \qquad j,\ k=1,\ 2$$

$$m_{ju}=\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_j)(u_i-\bar{u}) \qquad j=1,\ 2$$

とする. それゆえ(14)から次のようにも書ける.

$$\left.\begin{aligned}\hat{\beta}_1&=\beta_1+\frac{m_{22}m_{1u}-m_{12}m_{2u}}{m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}}\\\hat{\beta}_2&=\beta_2+\frac{m_{11}m_{2u}-m_{21}m_{1u}}{m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}}\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

この最初の式についてみよう. このモンテカルロ実験(ケースB)ではn個の3次ベクトル$[u_i\ x_{i1}\ x_{i2}]\ i=1,\ \cdots,\ n$は統計的に独立である. それゆえもし$x_1$と$u$との間の母相関係数$\rho_{x_1u}$が正であれば$m_{1u}$も正になることが多いであろう. 同様な理由からもしx_2がuとx_1に対し無相関であれば, m_{2u}は0に近いことが多いであろう. そのため第1式の第2項は正になりやすいであろう. その結果$\hat{\beta}_1$はβ_1より大となる傾向をもつ. すなわち$\hat{\beta}_1$はプラスの偏りをもつ. これに対し$\hat{\beta}_2$では, x_1とuとに正相関があっても, x_1とx_2とが無相関ならば(15)の第2式の分子の第2項$m_{21}m_{1u}$は0に近いであろう. かくして((15)の第2式の)第2項は0に近くなりやすく, $\hat{\beta}_2$にはあまり偏りを生じない. 前節のモンテカルロ実験の構造B2において$\hat{\beta}_1$に偏りが生じ$\hat{\beta}_2$が偏らなかった原因は以上のように説明される.

構造B3すなわちx_1とu, x_2とuの両者に正の相関がある(したがってx_1とx_2との間にも正相関がある)場合において, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$に偏りが生ずることは, (15)式から同様に説明される. まず$\hat{\beta}_1$についていえば, いつでも$m_{22}\geqq m_{12}$であるから(15)の第1式の分子は(17.4.3)式の仮定の下では正になることが多いであろう. それゆえ$\hat{\beta}_1$の分布は右方に偏る. $\hat{\beta}_2$についても同様である.

付　　表

〈付　記〉

以下の付表3のカイ自乗分布表は, C. M. Thompson, "Tables of percentage points of the χ^2 distribution," *Biometrika*, Vol. 32, 1941 を, また付表6のダービン-ワトソンの表は, J. Durbin and G. S. Watson, "Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression, II," *Biometrika*, Vol. 38, 1951 より, それぞれ編集者 E. S. Pearson 教授の許可を得て転載した. 付表4のt分布表は, 故 Ronald A. Fisher 卿(F. R. S.)の遺産管理者と Frank Yates 博士(F. R. S.)ならびに Longman Group 社(London)の許可を得て R. A. Fisher and F. Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, 6th ed., 1974 より転載した. また付表5のF分布表は, G. W. Snedecor, *Statistical Methods*, 5th ed., Iowa State University Press, Ames, Iowa, 1956 より出版社の許可を得て収録した.

付表 1　自乗と平方根

X	X^2	$\sqrt{X}$	$\sqrt{10X}$	X	X^2	$\sqrt{X}$	$\sqrt{10X}$
1.00	1.0000	1.0000	3.1623	1.50	2.2500	1.2247	3.8730
1.01	1.0201	1.0050	3.1781	1.51	2.2801	1.2288	3.8859
1.02	1.0404	1.0100	3.1937	1.52	2.3104	1.2329	3.8987
1.03	1.0609	1.0149	3.2094	1.53	2.3409	1.2369	3.9115
1.04	1.0816	1.0198	3.2249	1.54	2.3716	1.2410	3.9243
1.05	1.1025	1.0247	3.2404	1.55	2.4025	1.2450	3.9370
1.06	1.1236	1.0296	3.2558	1.56	2.4336	1.2490	3.9497
1.07	1.1449	1.0344	3.2711	1.57	2.4649	1.2530	3.9623
1.08	1.1664	1.0392	3.2863	1.58	2.4964	1.2570	3.9749
1.09	1.1881	1.0440	3.3015	1.59	2.5281	1.2610	3.9875
1.10	1.2100	1.0488	3.3166	1.60	2.5600	1.2649	4.0000
1.11	1.2321	1.0536	3.3317	1.61	2.5921	1.2689	4.0125
1.12	1.2544	1.0583	3.3466	1.62	2.6244	1.2728	4.0249
1.13	1.2769	1.0630	3.3616	1.63	2.6569	1.2767	4.0373
1.14	1.2996	1.0677	3.3764	1.64	2.6896	1.2806	4.0497
1.15	1.3225	1.0724	3.3912	1.65	2.7225	1.2845	4.0620
1.16	1.3456	1.0770	3.4059	1.66	2.7556	1.2884	4.0743
1.17	1.3689	1.0817	3.4205	1.67	2.7889	1.2923	4.0866
1.18	1.3924	1.0863	3.4351	1.68	2.8224	1.2962	4.0988
1.19	1.4161	1.0909	3.4496	1.69	2.8561	1.3000	4.1110
1.20	1.4400	1.0955	3.4641	1.70	2.8900	1.3038	4.1231
1.21	1.4641	1.1000	3.4785	1.71	2.9241	1.3077	4.1352
1.22	1.4884	1.1045	3.4929	1.72	2.9584	1.3115	4.1473
1.23	1.5129	1.1091	3.5071	1.73	2.9929	1.3153	4.1593
1.24	1.5376	1.1136	3.5214	1.74	3.0276	1.3191	4.1713
1.25	1.5625	1.1180	3.5355	1.75	3.0625	1.3229	4.1833
1.26	1.5876	1.1225	3.5497	1.76	3.0976	1.3267	4.1952
1.27	1.6129	1.1269	3.5637	1.77	3.1329	1.3304	4.2071
1.28	1.6384	1.1314	3.5777	1.78	3.1684	1.3342	4.2190
1.29	1.6641	1.1358	3.5917	1.79	3.2041	1.3379	4.2308
1.30	1.6900	1.1402	3.6056	1.80	3.2400	1.3416	4.2426
1.31	1.7161	1.1446	3.6194	1.81	3.2761	1.3454	4.2544
1.32	1.7424	1.1489	3.6332	1.82	3.3124	1.3491	4.2662
1.33	1.7689	1.1533	3.6469	1.83	3.3489	1.3528	4.2779
1.34	1.7956	1.1576	3.6606	1.84	3.3856	1.3565	4.2895
1.35	1.8225	1.1619	3.6742	1.85	3.4225	1.3602	4.3012
1.36	1.8496	1.1662	3.6878	1.86	3.4596	1.3638	4.3128
1.37	1.8769	1.1705	3.7014	1.87	3.4969	1.3675	4.3244
1.38	1.9044	1.1747	3.7148	1.88	3.5344	1.3711	4.3359
1.39	1.9321	1.1790	3.7283	1.89	3.5721	1.3748	4.3474
1.40	1.9600	1.1832	3.7417	1.90	3.6100	1.3784	4.3589
1.41	1.9881	1.1874	3.7550	1.91	3.6481	1.3820	4.3704
1.42	2.0164	1.1916	3.7683	1.92	3.6864	1.3856	4.3818
1.43	2.0449	1.1958	3.7815	1.93	3.7249	1.3892	4.3932
1.44	2.0736	1.2000	3.7947	1.94	3.7636	1.3928	4.4045
1.45	2.1025	1.2042	3.8079	1.95	3.8025	1.3964	4.4159
1.46	2.1316	1.2083	3.8210	1.96	3.8416	1.4000	4.4272
1.47	2.1609	1.2124	3.8341	1.97	3.8809	1.4036	4.4385
1.48	2.1904	1.2166	3.8471	1.98	3.9204	1.4071	4.4497
1.49	2.2201	1.2207	3.8601	1.99	3.9601	1.4107	4.4609

付表 1　自乗と平方根（つづき）

X	X^2	$\sqrt{X}$	$\sqrt{10X}$	X	X^2	$\sqrt{X}$	$\sqrt{10X}$
2.00	4.0000	1.4142	4.4721	2.50	6.2500	1.5811	5.0000
2.01	4.0401	1.4177	4.4833	2.51	6.3001	1.5843	5.0100
2.02	4.0804	1.4213	4.4944	2.52	6.3504	1.5875	5.0200
2.03	4.1209	1.4248	4.5056	2.53	6.4009	1.5906	5.0299
2.04	4.1616	1.4283	4.5166	2.54	6.4516	1.5937	5.0398
2.05	4.2025	1.4318	4.5277	2.55	6.5025	1.5969	5.0498
2.06	4.2436	1.4353	4.5388	2.56	6.5536	1.6000	5.0596
2.07	4.2849	1.4388	4.5497	2.57	6.6049	1.6031	5.0695
2.08	4.3264	1.4422	4.5607	2.58	6.6564	1.6062	5.0794
2.09	4.3681	1.4457	4.5717	2.59	6.7081	1.6094	5.0892
2.10	4.4100	1.4491	4.5826	2.60	6.7600	1.6125	5.0990
2.11	4.4521	1.4526	4.5935	2.61	6.8121	1.6156	5.1088
2.12	4.4944	1.4560	4.6044	2.62	6.8644	1.6186	5.1186
2.13	4.5369	1.4595	4.6152	2.63	6.9169	1.6217	5.1284
2.14	4.5796	1.4629	4.6260	2.64	6.9696	1.6248	5.1381
2.15	4.6225	1.4663	4.6368	2.65	7.0225	1.6279	5.1478
2.16	4.6656	1.4697	4.6476	2.66	7.0756	1.6310	5.1575
2.17	4.7089	1.4731	4.6583	2.67	7.1289	1.6340	5.1672
2.18	4.7524	1.4765	4.6691	2.68	7.1824	1.6371	5.1769
2.19	4.7961	1.4799	4.6797	2.69	7.2361	1.6401	5.1865
2.20	4.8400	1.4832	4.6904	2.70	7.2900	1.6432	5.1962
2.21	4.8841	1.4866	4.7011	2.71	7.3441	1.6462	5.2058
2.22	4.9284	1.4900	4.7117	2.72	7.3984	1.6492	5.2154
2.23	4.9729	1.4933	4.7223	2.73	7.4529	1.6523	5.2249
2.24	5.0176	1.4967	4.7329	2.74	7.5076	1.6553	5.2345
2.25	5.0625	1.5000	4.7434	2.75	7.5625	1.6583	5.2440
2.26	5.1076	1.5033	4.7540	2.76	7.6176	1.6613	5.2536
2.27	5.1529	1.5067	4.7645	2.77	7.6729	1.6643	5.2631
2.28	5.1984	1.5100	4.7749	2.78	7.7284	1.6673	5.2726
2.29	5.2441	1.5133	4.7854	2.79	7.7841	1.6703	5.2821
2.30	5.2900	1.5166	4.7958	2.80	7.8400	1.6733	5.2915
2.31	5.3361	1.5199	4.8063	2.81	7.8961	1.6763	5.3009
2.32	5.3824	1.5232	4.8166	2.82	7.9524	1.6793	5.3104
2.33	5.4289	1.5264	4.8270	2.83	8.0089	1.6823	5.3198
2.34	5.4756	1.5297	4.8374	2.84	8.0656	1.6852	5.3292
2.35	5.5225	1.5330	4.8477	2.85	8.1225	1.6882	5.3385
2.36	5.5696	1.5362	4.8580	2.86	8.1796	1.6912	5.3479
2.37	5.6169	1.5395	4.8683	2.87	8.2369	1.6941	5.3572
2.38	5.6644	1.5427	4.8785	2.88	8.2944	1.6971	5.3666
2.39	5.7121	1.5460	4.8888	2.89	8.3521	1.7000	5.3759
2.40	5.7600	1.5492	4.8990	2.90	8.4100	1.7029	5.3852
2.41	5.8081	1.5524	4.9092	2.91	8.4681	1.7059	5.3944
2.42	5.8564	1.5556	4.9194	2.92	8.5264	1.7088	5.4037
2.43	5.9049	1.5589	4.9295	2.93	8.5849	1.7117	5.4130
2.44	5.9536	1.5621	4.9396	2.94	8.6436	1.7146	5.4222
2.45	6.0025	1.5653	4.9498	2.95	8.7025	1.7176	5.4314
2.46	6.0516	1.5684	4.9598	2.96	8.7616	1.7205	5.4406
2.47	6.1009	1.5716	4.9699	2.97	8.8209	1.7234	5.4498
2.48	6.1504	1.5748	4.9800	2.98	8.8804	1.7263	5.4589
2.49	6.2001	1.5780	4.9900	2.99	8.9401	1.7292	5.4681

付表 1 自乗と平方根(つづき)

X	X^2	$\sqrt{X}$	$\sqrt{10X}$	X	X^2	$\sqrt{X}$	$\sqrt{10X}$
3.00	9.0000	1.7321	5.4772	3.50	12.2500	1.8708	5.9161
3.01	9.0601	1.7349	5.4864	3.51	12.3201	1.8735	5.9245
3.02	9.1204	1.7378	5.4955	3.52	12.3904	1.8762	5.9330
3.03	9.1809	1.7407	5.5045	3.53	12.4609	1.8788	5.9414
3.04	9.2416	1.7436	5.5136	3.54	12.5316	1.8815	5.9498
3.05	9.3025	1.7464	5.5227	3.55	12.6025	1.8841	5.9582
3.06	9.3636	1.7493	5.5317	3.56	12.6736	1.8868	5.9666
3.07	9.4249	1.7521	5.5408	3.57	12.7449	1.8894	5.9750
3.08	9.4864	1.7550	5.5498	3.58	12.8164	1.8921	5.9833
3.09	9.5481	1.7578	5.5588	3.59	12.8881	1.8947	5.9917
3.10	9.6100	1.7607	5.5678	3.60	12.9600	1.8974	6.0000
3.11	9.6721	1.7635	5.5767	3.61	13.0321	1.9000	6.0083
3.12	9.7344	1.7664	5.5857	3.62	13.1044	1.9026	6.0166
3.13	9.7969	1.7692	5.5946	3.63	13.1769	1.9053	6.0250
3.14	9.8596	1.7720	5.6036	3.64	13.2496	1.9079	6.0332
3.15	9.9225	1.7748	5.6125	3.65	13.3225	1.9105	6.0415
3.16	9.9856	1.7776	5.6214	3.66	13.3956	1.9131	6.0498
3.17	10.0489	1.7805	5.6303	3.67	13.4689	1.9157	6.0581
3.18	10.1124	1.7833	5.6392	3.68	13.5424	1.9183	6.0663
3.19	10.1761	1.7861	5.6480	3.69	13.6161	1.9209	6.0745
3.20	10.2400	1.7889	5.6569	3.70	13.6900	1.9235	6.0828
3.21	10.3041	1.7917	5.6657	3.71	13.7641	1.9261	6.0910
3.22	10.3684	1.7944	5.6745	3.72	13.8384	1.9287	6.0992
3.23	10.4329	1.7972	5.6833	3.73	13.9129	1.9313	6.1074
3.24	10.4976	1.8000	5.6921	3.74	13.9876	1.9339	6.1156
3.25	10.5625	1.8028	5.7009	3.75	14.0625	1.9365	6.1237
3.26	10.6276	1.8056	5.7096	3.76	14.1376	1.9391	6.1319
3.27	10.6929	1.8031	5.7184	3.77	14.2129	1.9417	6.1400
3.28	10.7584	1.8111	5.7271	3.78	14.2884	1.9442	6.1482
3.29	10.8241	1.8138	5.7359	3.79	14.3641	1.9468	6.1563
3.30	10.8900	1.8166	5.7446	3.80	14.4400	1.9494	6.1644
3.31	10.9561	1.8193	5.7533	3.81	14.5161	1.9519	6.1725
3.32	11.0224	1.8221	5.7619	3.82	14.5924	1.9545	6.1806
3.33	11.0889	1.8248	5.7706	3.83	14.6689	1.9570	6.1887
3.34	11.1556	1.8276	5.7793	3.84	14.7456	1.9596	6.1968
3.35	11.2225	1.8303	5.7879	3.85	14.8225	1.9621	6.2048
3.36	11.2896	1.8330	5.7966	3.86	14.8996	1.9647	6.2129
3.37	11.3569	1.8358	5.8052	3.87	14.9769	1.9672	6.2209
3.38	11.4244	1.8385	5.8138	3.88	15.0544	1.9698	6.2290
3.39	11.4921	1.8412	5.8224	3.89	15.1321	1.9723	6.2370
3.40	11.5600	1.8439	5.8310	3.90	15.2100	1.9748	6.2450
3.41	11.6281	1.8466	5.8395	3.91	15.2881	1.9774	6.2530
3.42	11.6964	1.8493	5.8481	3.92	15.3664	1.9799	6.2610
3.43	11.7649	1.8520	5.8566	3.93	15.4449	1.9824	6.2690
3.44	11.8336	1.8547	5.8652	3.94	15.5236	1.9849	6.2769
3.45	11.9025	1.8574	5.8737	3.95	15.6025	1.9875	6.2849
3.46	11.9716	1.8601	5.8822	3.96	15.6816	1.9900	6.2929
3.47	12.0409	1.8628	5.8907	3.97	15.7609	1.9925	6.3008
3.48	12.1104	1.8655	5.8992	3.98	15.8404	1.9950	6.3087
3.49	12.1801	1.8682	5.9076	3.99	15.9201	1.9975	6.3166

付表 1 自乗と平方根(つづき)

X	X^2	$\sqrt{X}$	$\sqrt{10X}$	X	X^2	$\sqrt{X}$	$\sqrt{10X}$
4.00	16.0000	2.0000	6.3246	4.50	20.2500	2.1213	6.7082
4.01	16.0801	2.0025	6.3325	4.51	20.3401	2.1237	6.7157
4.02	16.1604	2.0050	6.3404	4.52	20.4304	2.1260	6.7231
4.03	16.2409	2.0075	6.3482	4.53	20.5209	2.1284	6.7305
4.04	16.3216	2.0100	6.3561	4.54	20.6116	2.1307	6.7380
4.05	16.4025	2.0125	6.3640	4.55	20.7025	2.1331	6.7454
4.06	16.4836	2.0149	6.3718	4.56	20.7936	2.1354	6.7528
4.07	16.5649	2.0174	6.3797	4.57	20.8849	2.1378	6.7602
4.08	16.6464	2.0199	6.3875	4.58	20.9764	2.1401	6.7676
4.09	16.7281	2.0224	6.3953	4.59	21.0681	2.1424	6.7750
4.10	16.8100	2.0249	6.4031	4.60	21.1600	2.1448	6.7823
4.11	16.8921	2.0273	6.4109	4.61	21.2521	2.1471	6.7897
4.12	16.9744	2.0298	6.4187	4.62	21.3444	2.1494	6.7971
4.13	17.0569	2.0322	6.4265	4.63	21.4369	2.1517	6.8044
4.14	17.1396	2.0347	6.4343	4.64	21.5296	2.1541	6.8118
4.15	17.2225	2.0372	6.4421	4.65	21.6225	2.1564	6.8191
4.16	17.3056	2.0396	6.4498	4.66	21.7156	2.1587	6.8264
4.17	17.3889	2.0421	6.4576	4.67	21.8089	2.1610	6.8337
4.18	17.4724	2.0445	6.4653	4.68	21.9024	2.1633	6.8411
4.19	17.5561	2.0470	6.4730	4.69	21.9961	2.1656	6.8484
4.20	17.6400	2.0494	6.4807	4.70	22.0900	2.1680	6.8557
4.21	17.7241	2.0518	6.4885	4.71	22.1841	2.1703	6.8629
4.22	17.8084	2.0543	6.4962	4.72	22.2784	2.1726	6.8702
4.23	17.8929	2.0567	6.5038	4.73	22.3729	2.1749	6.8775
4.24	17.9776	2.0591	6.5115	4.74	22.4676	2.1772	6.8848
4.25	18.0625	2.0616	6.5192	4.75	22.5625	2.1795	6.8920
4.26	18.1476	2.0640	6.5269	4.76	22.6576	2.1817	6.8993
4.27	18.2329	2.0664	6.5345	4.77	22.7529	2.1840	6.9065
4.28	18.3184	2.0688	6.5422	4.78	22.8484	2.1863	6.9138
4.29	18.4041	2.0712	6.5498	4.79	22.9441	2.1886	6.9210
4.30	18.4900	2.0736	6.5574	4.80	23.0400	2.1909	6.9282
4.31	18.5761	2.0761	6.5651	4.81	23.1361	2.1932	6.9354
4.32	18.6624	2.0785	6.5727	4.82	23.2324	2.1955	6.9426
4.33	18.7489	2.0809	6.5803	4.83	23.3289	2.1977	6.9498
4.34	18.8356	2.0833	6.5879	4.84	23.4256	2.2000	6.9570
4.35	18.9225	2.0857	6.5955	4.85	23.5225	2.2023	6.9642
4.36	19.0096	2.0881	6.6030	4.86	23.6196	2.2045	6.9714
4.37	19.0969	2.0905	6.6106	4.87	23.7169	2.2068	6.9785
4.38	19.1844	2.0928	6.6182	4.88	23.8144	2.2091	6.9857
4.39	19.2721	2.0952	6.6257	4.89	23.9121	2.2113	6.9929
4.40	19.3600	2.0976	6.6333	4.90	24.0100	2.2136	7.0000
4.41	19.4481	2.1000	6.6408	4.91	24.1081	2.2159	7.0071
4.42	19.5364	2.1024	6.6483	4.92	24.2064	2.2181	7.0143
4.43	19.6249	2.1048	6.6558	4.93	24.3049	2.2204	7.0214
4.44	19.7136	2.1071	6.6633	4.94	24.4036	2.2226	7.0285
4.45	19.8025	2.1095	6.6708	4.95	24.5025	2.2249	7.0356
4.46	19.8916	2.1119	6.6783	4.96	24.6016	2.2271	7.0427
4.47	19.9809	2.1142	6.6858	4.97	24.7009	2.2294	7.0498
4.48	20.0704	2.1166	6.6933	4.98	24.8004	2.2316	7.0569
4.49	20.1601	2.1190	6.7008	4.99	24.9001	2.2338	7.0640

付表 1 自乗と平方根(つづき)

X	X^2	$\sqrt{X}$	$\sqrt{10X}$	X	X^2	$\sqrt{X}$	$\sqrt{10X}$
5.00	25.0000	2.2361	7.0711	5.50	30.2500	2.3452	7.4162
5.01	25.1001	2.2383	7.0781	5.51	30.3601	2.3473	7.4229
5.02	25.2004	2.2405	7.0852	5.52	30.4704	2.3495	7.4297
5.03	25.3009	2.2428	7.0923	5.53	30.5809	2.3516	7.4364
5.04	25.4016	2.2450	7.0993	5.54	30.6916	2.3537	7.4431
5.05	25.5025	2.2472	7.1063	5.55	30.8025	2.3558	7.4498
5.06	25.6036	2.2494	7.1134	5.56	30.9136	2.3580	7.4565
5.07	25.7049	2.2517	7.1204	5.57	31.0249	2.3601	7.4632
5.08	25.8064	2.2539	7.1274	5.58	31.1364	2.3622	7.4699
5.09	25.9081	2.2561	7.1344	5.59	31.2481	2.3643	7.4766
5.10	26.0100	2.2583	7.1414	5.60	31.3600	2.3664	7.4833
5.11	26.1121	2.2605	7.1484	5.61	31.4721	2.3685	7.4900
5.12	26.2144	2.2627	7.1554	5.62	31.5844	2.3707	7.4967
5.13	26.3169	2.2650	7.1624	5.63	31.6969	2.3728	7.5033
5.14	26.4196	2.2672	7.1694	5.64	31.8096	2.3749	7.5100
5.15	26.5225	2.2694	7.1764	5.65	31.9225	2.3770	7.5167
5.16	26.6256	2.2716	7.1833	5.66	32.0356	2.3791	7.5233
5.17	26.7289	2.2738	7.1903	5.67	32.1489	2.3812	7.5299
5.18	26.8324	2.2760	7.1972	5.68	32.2624	2.3833	7.5366
5.19	26.9361	2.2782	7.2042	5.69	32.3761	2.3854	7.5432
5.20	27.0400	2.2804	7.2111	5.70	32.4900	2.3875	7.5498
5.21	27.1441	2.2825	7.2180	5.71	32.6041	2.3896	7.5565
5.22	27.2484	2.2847	7.2250	5.72	32.7184	2.3917	7.5631
5.23	27.3529	2.2869	7.2319	5.73	32.8329	2.3937	7.5697
5.24	27.4576	2.2891	7.2388	5.74	32.9476	2.3958	7.5763
5.25	27.5625	2.2913	7.2457	5.75	33.0625	2.3979	7.5829
5.26	27.6676	2.2935	7.2526	5.76	33.1776	2.4000	7.5895
5.27	27.7729	2.2957	7.2595	5.77	33.2929	2.4021	7.5961
5.28	27.8784	2.2978	7.2664	5.78	33.4084	2.4042	7.6026
5.29	27.9841	2.3000	7.2732	5.79	33.5241	2.4062	7.6092
5.30	28.0900	2.3022	7.2801	5.80	33.6400	2.4083	7.6158
5.31	28.1961	2.3043	7.2870	5.81	33.7561	2.4104	7.6223
5.32	28.3024	2.3065	7.2938	5.82	33.8724	2.4125	7.6289
5.33	28.4089	2.3087	7.3007	5.83	33.9889	2.4145	7.6354
5.34	28.5156	2.3108	7.3075	5.84	34.1056	2.4166	7.6420
5.35	28.6225	2.3130	7.3144	5.85	34.2225	2.4187	7.6485
5.36	28.7296	2.3152	7.3212	5.86	34.3396	2.4207	7.6551
5.37	28.8369	2.3173	7.3280	5.87	34.4569	2.4228	7.6616
5.38	28.9444	2.3195	7.3349	5.88	34.5744	2.4249	7.6681
5.39	29.0521	2.3216	7.3417	5.89	34.6921	2.4269	7.6746
5.40	29.1600	2.3238	7.3485	5.90	34.8100	2.4290	7.6812
5.41	29.2681	2.3259	7.3553	5.91	34.9281	2.4311	7.6877
5.42	29.3764	2.3281	7.3621	5.92	35.0464	2.4331	7.6942
5.43	29.4849	2.3302	7.3689	5.93	35.1649	2.4352	7.7007
5.44	29.5936	2.3324	7.3756	5.94	35.2836	2.4372	7.7071
5.45	29.7025	2.3345	7.3824	5.95	35.4025	2.4393	7.7136
5.46	29.8116	2.3367	7.3892	5.96	35.5216	2.4413	7.7201
5.47	29.9209	2.3388	7.3959	5.97	35.6409	2.4434	7.7266
5.48	30.0304	2.3409	7.4027	5.98	35.7604	2.4454	7.7331
5.49	30.1401	2.3431	7.4095	5.99	35.8801	2.4475	7.7395

付表 1 自乗と平方根(つづき)

X	X^2	$\sqrt{X}$	$\sqrt{10X}$	X	X^2	$\sqrt{X}$	$\sqrt{10X}$
6.00	36.0000	2.4495	7.7460	6.50	42.2500	2.5495	8.0623
6.01	36.1201	2.4515	7.7524	6.51	42.3801	2.5515	8.0685
6.02	36.2404	2.4536	7.7589	6.52	42.5104	2.5534	8.0747
6.03	36.3609	2.4556	7.7653	6.53	42.6409	2.5554	8.0808
6.04	36.4816	2.4576	7.7717	6.54	42.7716	2.5573	8.0870
6.05	36.6025	2.4597	7.7782	6.55	42.9025	2.5593	8.0932
6.06	36.7236	2.4617	7.7846	6.56	43.0336	2.5613	8.0994
6.07	36.8449	2.4637	7.7910	6.57	43.1649	2.5632	8.1056
6.08	36.9664	2.4658	7.7974	6.58	43.2964	2.5652	8.1117
6.09	37.0881	2.4678	7.8039	6.59	43.4281	2.5671	8.1179
6.10	37.2100	2.4698	7.8103	6.60	43.5600	2.5691	8.1240
6.11	37.3321	2.4718	7.8167	6.61	43.6921	2.5710	8.1302
6.12	37.4544	2.4739	7.8230	6.62	43.8244	2.5729	8.1363
6.13	37.5769	2.4759	7.8294	6.63	43.9569	2.5749	8.1425
6.14	37.6996	2.4779	7.8358	6.64	44.0896	2.5768	8.1486
6.15	37.8225	2.4799	7.8422	6.65	44.2225	2.5788	8.1548
6.16	37.9456	2.4819	7.8486	6.66	44.3556	2.5807	8.1609
6.17	38.0689	2.4840	7.8549	6.67	44.4889	2.5826	8.1670
6.18	38.1924	2.4860	7.8613	6.68	44.6224	2.5846	8.1731
6.19	38.3161	2.4880	7.8677	6.69	44.7561	2.5865	8.1792
6.20	38.4400	2.4900	7.8740	6.70	44.8900	2.5884	8.1854
6.21	38.5641	2.4920	7.8804	6.71	45.0241	2.5904	8.1915
6.22	38.6884	2.4940	7.8867	6.72	45.1584	2.5923	8.1976
6.23	38.8129	2.4960	7.8930	6.73	45.2929	2.5942	8.2037
6.24	38.9376	2.4980	7.8994	6.74	45.4276	2.5962	8.2098
6.25	39.0625	2.5000	7.9057	6.75	45.5625	2.5981	8.2158
6.26	39.1876	2.5020	7.9120	6.76	45.6976	2.6000	8.2219
6.27	39.3129	2.5040	7.9183	6.77	45.8329	2.6019	8.2280
6.28	39.4384	2.5060	7.9247	6.78	45.9684	2.6038	8.2341
6.29	39.5641	2.5080	7.9310	6.79	46.1041	2.6058	8.2402
6.30	39.6900	2.5100	7.9373	6.80	46.2400	2.6077	8.2462
6.31	39.8161	2.5120	7.9436	6.81	46.3761	2.6096	8.2523
6.32	39.9424	2.5140	7.9498	6.82	46.5124	2.6115	8.2583
6.33	40.0689	2.5160	7.9561	6.83	46.6489	2.6134	8.2644
6.34	40.1956	2.5179	7.9624	6.84	46.7856	2.6153	8.2704
6.35	40.3225	2.5199	7.9687	6.85	46.9225	2.6173	8.2765
6.36	40.4496	2.5219	7.9750	6.86	47.0596	2.6192	8.2825
6.37	40.5769	2.5239	7.9812	6.87	47.1969	2.6211	8.2886
6.38	40.7044	2.5259	7.9875	6.88	47.3344	2.6230	8.2946
6.39	40.8321	2.5278	7.9938	6.89	47.4721	2.6249	8.3006
6.40	40.9600	2.5298	8.0000	6.90	47.6100	2.6268	8.3066
6.41	41.0881	2.5318	8.0063	6.91	47.7481	2.6287	8.3126
6.42	41.2164	2.5338	8.0125	6.92	47.8864	2.6306	8.3187
6.43	41.3449	2.5357	8.0187	6.93	48.0249	2.6325	8.3247
6.44	41.4736	2.5377	8.0250	6.94	48.1636	2.6344	8.3307
6.45	41.6025	2.5397	8.0312	6.95	48.3025	2.6363	8.3367
6.46	41.7316	2.5417	8.0374	6.96	48.4416	2.6382	8.3427
6.47	41.8609	2.5436	8.0436	6.97	48.5809	2.6401	8.3487
6.48	41.9904	2.5456	8.0498	6.98	48.7204	2.6420	8.3546
6.49	42.1201	2.5476	8.0561	6.99	48.8601	2.6439	8.3606

付表 1 自乗と平方根(つづき)

X	X^2	$\sqrt{X}$	$\sqrt{10X}$	X	X^2	$\sqrt{X}$	$\sqrt{10X}$
7.00	49.0000	2.6458	8.3666	7.50	56.2500	2.7386	8.6603
7.01	49.1401	2.6476	8.3726	7.51	56.4001	2.7404	8.6660
7.02	49.2804	2.6495	8.3785	7.52	56.5504	2.7423	8.6718
7.03	49.4209	2.6514	8.3845	7.53	56.7009	2.7441	8.6776
7.04	49.5616	2.6533	8.3905	7.54	56.8516	2.7459	8.6833
7.05	49.7025	2.6552	8.3964	7.55	57.0025	2.7477	8.6891
7.06	49.8436	2.6571	8.4024	7.56	57.1536	2.7496	8.6948
7.07	49.9849	2.6590	8.4083	7.57	57.3049	2.7514	8.7006
7.08	50.1264	2.6608	8.4143	7.58	57.4564	2.7532	8.7063
7.09	50.2681	2.6627	8.4202	7.59	57.6081	2.7550	8.7121
7.10	50.4100	2.6646	8.4262	7.60	57.7600	2.7568	8.7178
7.11	50.5521	2.6665	8.4321	7.61	57.9121	2.7586	8.7235
7.12	50.6944	2.6683	8.4380	7.62	58.0644	2.7604	8.7293
7.13	50.8369	2.6702	8.4439	7.63	58.2169	2.7623	8.7350
7.14	50.9796	2.6721	8.4499	7.64	58.3696	2.7641	8.7407
7.15	51.1225	2.6740	8.4558	7.65	58.5225	2.7659	8.7464
7.16	51.2656	2.6758	8.4617	7.66	58.6756	2.7677	8.7521
7.17	51.4089	2.6777	8.4676	7.67	58.8289	2.7695	8.7579
7.18	51.5524	2.6796	8.4735	7.68	58.9824	2.7713	8.7636
7.19	51.6961	2.6814	8.4794	7.69	59.1361	2.7731	8.7693
7.20	51.8400	2.6833	8.4853	7.70	59.2900	2.7749	8.7750
7.21	51.9841	2.6851	8.4912	7.71	59.4441	2.7767	8.7807
7.22	52.1284	2.6870	8.4971	7.72	59.5984	2.7785	8.7864
7.23	52.2729	2.6889	8.5029	7.73	59.7529	2.7803	8.7920
7.24	52.4176	2.6907	8.5088	7.74	59.9076	2.7821	8.7977
7.25	52.5625	2.6926	8.5147	7.75	60.0625	2.7839	8.8034
7.26	52.7076	2.6944	8.5206	7.76	60.2176	2.7857	8.8091
7.27	52.8529	2.6963	8.5264	7.77	60.3729	2.7875	8.8148
7.28	52.9984	2.6982	8.5323	7.78	60.5284	2.7893	8.8204
7.29	53.1441	2.7000	8.5382	7.79	60.6841	2.7911	8.8261
7.30	53.2900	2.7019	8.5440	7.80	60.8400	2.7929	8.8318
7.31	53.4361	2.7037	8.5499	7.81	60.9961	2.7946	8.8374
7.32	53.5824	2.7056	8.5557	7.82	61.1524	2.7964	8.8431
7.33	53.7289	2.7074	8.5615	7.83	61.3089	2.7982	8.8487
7.34	53.8756	2.7092	8.5674	7.84	61.4656	2.8000	8.8544
7.35	54.0225	2.7111	8.5732	7.85	61.6225	2.8018	8.8600
7.36	54.1696	2.7129	8.5790	7.86	61.7796	2.8036	8.8657
7.37	54.3169	2.7148	8.5849	7.87	61.9369	2.8054	8.8713
7.38	54.4644	2.7166	8.5907	7.88	62.0944	2.8071	8.8770
7.39	54.6121	2.7185	8.5965	7.89	62.2521	2.8089	8.8826
7.40	54.7600	2.7203	8.6023	7.90	62.4100	2.8107	8.8882
7.41	54.9081	2.7221	8.6081	7.91	62.5681	2.8125	8.8938
7.42	55.0564	2.7240	8.6139	7.92	62.7264	2.8143	8.8994
7.43	55.2049	2.7258	8.6197	7.93	62.8849	2.8160	8.9051
7.44	55.3536	2.7276	8.6255	7.94	63.0436	2.8178	8.9107
7.45	55.5025	2.7295	8.6313	7.95	63.2025	2.8196	8.9163
7.46	55.6516	2.7313	8.6371	7.96	63.3616	2.8214	8.9219
7.47	55.8009	2.7331	8.6429	7.97	63.5209	2.8231	8.9275
7.48	55.9504	2.7350	8.6487	7.98	63.6804	2.8249	8.9331
7.49	56.1001	2.7368	8.6545	7.99	63.8401	2.8267	8.9387

付表 1 自乗と平方根(つづき)

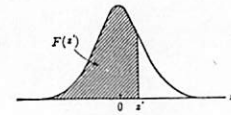
X	X^2	$\sqrt{X}$	$\sqrt{10X}$	X	X^2	$\sqrt{X}$	$\sqrt{10X}$
8.00	64.0000	2.8284	8.9443	8.50	72.2500	2.9155	9.2195
8.01	64.1601	2.8302	8.9499	8.51	72.4201	2.9172	9.2250
8.02	64.3204	2.8320	8.9555	8.52	72.5904	2.9189	9.2304
8.03	64.4809	2.8337	8.9610	8.53	72.7609	2.9206	9.2358
8.04	64.6416	2.8355	8.9666	8.54	72.9316	2.9223	9.2412
8.05	64.8025	2.8373	8.9722	8.55	73.1025	2.9240	9.2466
8.06	64.9636	2.8390	8.9778	8.56	73.2736	2.9258	9.2520
8.07	65.1249	2.8408	8.9833	8.57	73.4449	2.9275	9.2574
8.08	65.2864	2.8425	8.9889	8.58	73.6164	2.9292	9.2628
8.09	65.4481	2.8443	8.9944	8.59	73.7881	2.9309	9.2682
8.10	65.6100	2.8461	9.0000	8.60	73.9600	2.9326	9.2736
8.11	65.7721	2.8478	9.0056	8.61	74.1321	2.9343	9.2790
8.12	65.9344	2.8496	9.0111	8.62	74.3044	2.9360	9.2844
8.13	66.0969	2.8513	9.0167	8.63	74.4769	2.9377	9.2898
8.14	66.2596	2.8531	9.0222	8.64	74.6496	2.9394	9.2952
8.15	66.4225	2.8548	9.0277	8.65	74.8225	2.9411	9.3005
8.16	66.5856	2.8566	9.0333	8.66	74.9956	2.9428	9.3059
8.17	66.7489	2.8583	9.0388	8.67	75.1689	2.9445	9.3113
8.18	66.9124	2.8601	9.0443	8.68	75.3424	2.9462	9.3167
8.19	67.0761	2.8618	9.0499	8.69	75.5161	2.9479	9.3220
8.20	67.2400	2.8636	9.0554	8.70	75.6900	2.9496	9.3274
8.21	67.4041	2.8653	9.0609	8.71	75.8641	2.9513	9.3327
8.22	67.5684	2.8671	9.0664	8.72	76.0384	2.9530	9.3381
8.23	67.7329	2.8688	9.0719	8.73	76.2129	2.9547	9.3435
8.24	67.8976	2.8705	9.0774	8.74	76.3876	2.9564	9.3488
8.25	68.0625	2.8723	9.0830	8.75	76.5625	2.9580	9.3541
8.26	68.2276	2.8740	9.0885	8.76	76.7376	2.9597	9.3595
8.27	68.3929	2.8758	9.0940	8.77	76.9129	2.9614	9.3648
8.28	68.5584	2.8775	9.0995	8.78	77.0884	2.9631	9.3702
8.29	68.7241	2.8792	9.1049	8.79	77.2641	2.9648	9.3755
8.30	68.8900	2.8810	9.1104	8.80	77.4400	2.9665	9.3808
8.31	69.0561	2.8827	9.1159	8.81	77.6161	2.9682	9.3862
8.32	69.2224	2.8844	9.1214	8.82	77.7924	2.9699	9.3915
8.33	69.3889	2.8862	9.1269	8.83	77.9689	2.9715	9.3968
8.34	69.5556	2.8879	9.1324	8.84	78.1456	2.9732	9.4021
8.35	69.7225	2.8896	9.1378	8.85	78.3225	2.9749	9.4074
8.36	69.8896	2.8914	9.1433	8.86	78.4996	2.9766	9.4128
8.37	70.0569	2.8931	9.1488	8.87	78.6769	2.9783	9.4181
8.38	70.2244	2.8948	9.1542	8.88	78.8544	2.9799	9.4234
8.39	70.3921	2.8966	9.1597	8.89	79.0321	2.9816	9.4287
8.40	70.5600	2.8983	9.1652	8.90	79.2100	2.9833	9.4340
8.41	70.7281	2.9000	9.1706	8.91	79.3881	2.9850	9.4393
8.42	70.8964	2.9017	9.1761	8.92	79.5664	2.9866	9.4446
8.43	71.0649	2.9035	9.1815	8.93	79.7449	2.9883	9.4499
8.44	71.2336	2.9052	9.1870	8.94	79.9236	2.9900	9.4552
8.45	71.4025	2.9069	9.1924	8.95	80.1025	2.9917	9.4604
8.46	71.5716	2.9086	9.1978	8.96	80.2816	2.9933	9.4657
8.47	71.7409	2.9103	9.2033	8.97	80.4609	2.9950	9.4710
8.48	71.9104	2.9120	9.2087	8.98	80.6404	2.9967	9.4763
8.49	72.0801	2.9138	9.2141	8.99	80.8201	2.9983	9.4816

付表 1 自乗と平方根(つづき)

X	X^2	$\sqrt{X}$	$\sqrt{10X}$	X	X^2	$\sqrt{X}$	$\sqrt{10X}$
9.00	81.0000	3.0000	9.4868	9.50	90.2500	3.0822	9.7468
9.01	81.1801	3.0017	9.4921	9.51	90.4401	3.0838	9.7519
9.02	81.3604	3.0033	9.4974	9.52	90.6304	3.0855	9.7571
9.03	81.5409	3.0050	9.5026	9.53	90.8209	3.0871	9.7622
9.04	81.7216	3.0067	9.5079	9.54	91.0116	3.0887	9.7673
9.05	81.9025	3.0083	9.5132	9.55	91.2025	3.0903	9.7724
9.06	82.0836	3.0100	9.5184	9.56	91.3936	3.0919	9.7775
9.07	82.2649	3.0116	9.5237	9.57	91.5849	3.0935	9.7826
9.08	82.4464	3.0133	9.5289	9.58	91.7764	3.0952	9.7878
9.09	82.6281	3.0150	9.5342	9.59	91.9681	3.0968	9.7929
9.10	82.8100	3.0166	9.5394	9.60	92.1600	3.0984	9.7980
9.11	82.9921	3.0183	9.5446	9.61	92.3521	3.1000	9.8031
9.12	83.1744	3.0199	9.5499	9.62	92.5444	3.1016	9.8082
9.13	83.3569	3.0216	9.5551	9.63	92.7369	3.1032	9.8133
9.14	83.5396	3.0232	9.5603	9.64	92.9296	3.1048	9.8184
9.15	83.7225	3.0249	9.5656	9.65	93.1225	3.1064	9.8234
9.16	83.9056	3.0266	9.5708	9.66	93.3156	3.1081	9.8285
9.17	84.0889	3.0282	9.5760	9.67	93.5089	3.1097	9.8336
9.18	84.2724	3.0299	9.5812	9.68	93.7024	3.1113	9.8387
9.19	84.4561	3.0315	9.5865	9.69	93.8961	3.1129	9.8438
9.20	84.6400	3.0332	9.5917	9.70	94.0900	3.1145	9.8489
9.21	84.8241	3.0348	9.5969	9.71	94.2841	3.1161	9.8539
9.22	85.0084	3.0365	9.6021	9.72	94.4784	3.1177	9.8590
9.23	85.1929	3.0381	9.6073	9.73	94.6729	3.1193	9.8641
9.24	85.3776	3.0397	9.6125	9.74	94.8676	3.1209	9.8691
9.25	85.5625	3.0414	9.6177	9.75	95.0625	3.1225	9.8742
9.26	85.7476	3.0430	9.6229	9.76	95.2576	3.1241	9.8793
9.27	85.9329	3.0447	9.6281	9.77	95.4529	3.1257	9.8843
9.28	86.1184	3.0463	9.6333	9.78	95.6484	3.1273	9.8894
9.29	86.3041	3.0480	9.6385	9.79	95.8441	3.1289	9.8944
9.30	86.4900	3.0496	9.6437	9.80	96.0400	3.1305	9.8995
9.31	86.6761	3.0512	9.6488	9.81	96.2361	3.1321	9.9045
9.32	86.8624	3.0529	9.6540	9.82	96.4324	3.1337	9.9096
9.33	87.0489	3.0545	9.6592	9.83	96.6289	3.1353	9.9146
9.34	87.2356	3.0561	9.6644	9.84	96.8256	3.1369	9.9197
9.35	87.4225	3.0578	9.6695	9.85	97.0225	3.1385	9.9247
9.36	87.6096	3.0594	9.6747	9.86	97.2196	3.1401	9.9298
9.37	87.7969	3.0611	9.6799	9.87	97.4169	3.1417	9.9348
9.38	87.9844	3.0627	9.6850	9.88	97.6144	3.1433	9.9398
9.39	88.1721	3.0643	9.6902	9.89	97.8121	3.1448	9.9449
9.40	88.3600	3.0659	9.6954	9.90	98.0100	3.1464	9.9499
9.41	88.5481	3.0676	9.7005	9.91	98.2081	3.1480	9.9549
9.42	88.7364	3.0692	9.7057	9.92	98.4064	3.1496	9.9599
9.43	88.9249	3.0708	9.7108	9.93	98.6049	3.1512	9.9649
9.44	89.1136	3.0725	9.7160	9.94	98.8036	3.1528	9.9700
9.45	89.3025	3.0741	9.7211	9.95	99.0025	3.1544	9.9750
9.46	89.4916	3.0757	9.7263	9.96	99.2016	3.1560	9.9800
9.47	89.6809	3.0773	9.7314	9.97	99.4009	3.1575	9.9850
9.48	89.8704	3.0790	9.7365	9.98	99.6004	3.1591	9.9900
9.49	90.0601	3.0806	9.7417	9.99	99.8001	3.1607	9.9950

付表 2 正 規 分 布

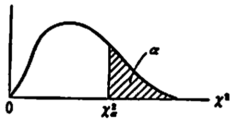
$$F(z')=\int_{-\infty}^{z'}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$



z'	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

付表 3　カイ自乗分布

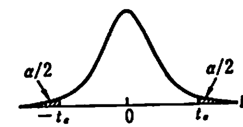
$$\alpha=P(\chi^2\geqq\chi_\alpha^2)=\int_{\chi_\alpha^2}^{\infty}f(\chi^2)\,d\chi^2$$



α / m (自由度)	0.995	0.990	0.975	0.950	0.050	0.025	0.010	0.005
1	0.0000393	0.0001571	0.0009821	0.0039321	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944
2	0.0100251	0.0201007	0.0506356	0.102587	5.99147	7.37776	9.21034	10.5966
3	0.0717212	0.114832	0.215795	0.351846	7.81473	9.34840	11.3449	12.8381
4	0.206990	0.297110	0.484419	0.710721	9.48773	11.1433	13.2767	14.8602
5	0.411740	0.554300	0.831211	1.145476	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	0.675727	0.872085	1.237347	1.63539	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476
7	0.989265	1.239043	1.68987	2.16735	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	1.344419	1.646482	2.17973	2.73264	15.5073	17.5346	20.0902	21.9550
9	1.734926	2.087912	2.70039	3.32511	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893
10	2.15585	2.55821	3.24697	3.94030	18.3070	20.4831	23.2093	25.1882
11	2.60321	3.05347	3.81575	4.57481	19.6751	21.9200	24.7250	26.7569
12	3.07382	3.57056	4.40379	5.22603	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995
13	3.56503	4.10691	5.00874	5.89186	22.3621	24.7356	27.6883	29.8194
14	4.07468	4.66043	5.62872	6.57063	23.6848	26.1190	29.1413	31.3193
15	4.60094	5.22935	6.26214	7.26094	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013
16	5.14224	5.81221	6.90766	7.96164	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672
17	5.69724	6.40776	7.56418	8.67176	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185
18	6.26481	7.01491	8.23075	9.39046	28.8693	31.5264	34.8053	37.1564
19	6.84398	7.63273	8.90655	10.1170	30.1435	32.8523	36.1908	38.5822
20	7.43386	8.26040	9.59083	10.8508	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968
21	8.03366	8.89720	10.28293	11.5913	32.6705	35.4789	38.9321	41.4010
22	8.64272	9.54249	10.9823	12.3380	33.9244	36.7807	40.2894	42.7956
23	9.26042	10.19567	11.6885	13.0905	35.1725	38.0757	41.6384	44.1813
24	9.88623	10.8564	12.4011	13.8484	36.4151	39.3641	42.9798	45.5585
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	37.6525	40.6465	44.3141	46.9278
26	11.1603	12.1981	13.8439	15.3791	38.8852	41.9232	45.6417	48.2899
27	11.8076	12.8786	14.5733	16.1513	40.1133	43.1944	46.9630	49.6449
28	12.4613	13.5648	15.3079	16.9279	41.3372	44.4607	48.2782	50.9933
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7083	42.5569	45.7222	49.5879	52.3356
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4926	43.7729	46.9792	50.8922	53.6720
40	20.7065	22.1643	24.4331	26.5093	55.7585	59.3417	63.6907	66.7659
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7642	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900
60	35.5346	37.4848	40.4817	43.1879	79.0819	83.2976	88.3794	91.9517
70	43.2752	45.4418	48.7576	51.7393	90.5312	95.0231	100.425	104.215
80	51.1720	53.5400	57.1532	60.3915	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.3276	70.0648	74.2219	77.9295	124.342	129.561	135.807	140.169

付表 4　ステューデントの t 分布

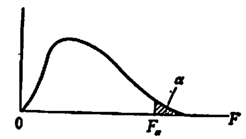
$$\alpha=P(|t|\geqq t_\alpha)=1-\int_{-t_\alpha}^{t_\alpha}f(t)\,dt$$



α / m (自由度)	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	0.679	0.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

付表 5 F 分布

$$\alpha = P(F \geqq F_\alpha) = \int_{F_\alpha}^{\infty} f(F)\,dF$$



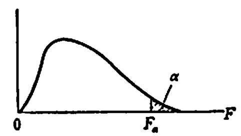
F分布の5％点(細字)および1％点(ゴシック)
m_1＝分子の自由度，m_2＝分母の自由度

m_2 \ m_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
	4,052	4,999	5,403	5,625	5,764	5,859	5,928	5,981	6,022	6,056	6,082	6,106
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.36	19.37	19.38	19.39	19.40	19.41
	98.49	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.34	99.36	99.38	99.40	99.41	99.42
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.88	8.84	8.81	8.78	8.76	8.74
	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.13	27.05
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.93	5.91
	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.54	14.45	14.37
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.78	4.74	4.70	4.68
	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.45	10.27	10.15	10.05	9.96	9.89
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00
	13.74	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.63	3.60	3.57
	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	7.00	6.84	6.71	6.62	6.54	6.47
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.34	3.31	3.28
	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.19	6.03	5.91	5.82	5.74	5.67
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13	3.10	3.07
	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.62	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.97	2.94	2.91
	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.21	5.06	4.95	4.85	4.78	4.71
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.86	2.82	2.79
	9.65	7.20	6.22	5.67	5.32	5.07	4.88	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40
12	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.92	2.85	2.80	2.76	2.72	2.69
	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.65	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16
13	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.84	2.77	2.72	2.67	2.63	2.60
	9.07	6.70	5.74	5.20	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.77	2.70	2.65	2.60	2.56	2.53
	8.86	6.51	5.56	5.03	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.70	2.64	2.59	2.55	2.51	2.48
	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.45	2.42
	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.61	3.55
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.62	2.55	2.50	2.45	2.41	2.38
	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.45

m_2 \ m_1	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
1	245	246	248	249	250	251	252	253	253	254	254	254
	6,142	6,169	6,208	6,234	6,258	6,286	6,302	6,323	6,334	6,352	6,361	6,366
2	19.42	19.43	19.44	19.45	19.46	19.47	19.47	19.48	19.49	19.49	19.50	19.50
	99.43	99.44	99.45	99.46	99.47	99.48	99.48	99.49	99.49	99.49	99.50	99.50
3	8.71	8.69	8.66	8.64	8.62	8.60	8.58	8.57	8.56	8.54	8.54	8.53
	26.92	26.83	26.69	26.60	26.50	26.41	26.35	26.27	26.23	26.18	26.14	26.12
4	5.87	5.84	5.80	5.77	5.74	5.71	5.70	5.68	5.66	5.65	5.64	5.63
	14.24	14.15	14.02	13.93	13.83	13.74	13.69	13.61	13.57	13.52	13.48	13.46
5	4.64	4.60	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.42	4.40	4.38	4.37	4.36
	9.77	9.68	9.55	9.47	9.38	9.29	9.24	9.17	9.13	9.07	9.04	9.02
6	3.96	3.92	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.72	3.71	3.69	3.68	3.67
	7.60	7.52	7.39	7.31	7.23	7.14	7.09	7.02	6.99	6.94	6.90	6.88
7	3.52	3.49	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.29	3.28	3.25	3.24	3.23
	6.35	6.27	6.15	6.07	5.98	5.90	5.85	5.78	5.75	5.70	5.67	5.65
8	3.23	3.20	3.15	3.12	3.08	3.05	3.03	3.00	2.98	2.96	2.94	2.93
	5.56	5.48	5.36	5.28	5.20	5.11	5.06	5.00	4.96	4.91	4.88	4.86
9	3.02	2.98	2.93	2.90	2.86	2.82	2.80	2.77	2.76	2.73	2.72	2.71
	5.00	4.92	4.80	4.73	4.64	4.56	4.51	4.45	4.41	4.36	4.33	4.31
10	2.86	2.82	2.77	2.74	2.70	2.67	2.64	2.61	2.59	2.56	2.55	2.54
	4.60	4.52	4.41	4.33	4.25	4.17	4.12	4.05	4.01	3.96	3.93	3.91
11	2.74	2.70	2.65	2.61	2.57	2.53	2.50	2.47	2.45	2.42	2.41	2.40
	4.29	4.21	4.10	4.02	3.94	3.86	3.80	3.74	3.70	3.66	3.62	3.60
12	2.64	2.60	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.36	2.35	2.32	2.31	2.30
	4.05	3.98	3.86	3.78	3.70	3.61	3.56	3.49	3.46	3.41	3.38	3.36
13	2.55	2.51	2.46	2.42	2.38	2.34	2.32	2.28	2.26	2.24	2.22	2.21
	3.85	3.78	3.67	3.59	3.51	3.42	3.37	3.30	3.27	3.21	3.18	3.16
14	2.48	2.44	2.39	2.35	2.31	2.27	2.24	2.21	2.19	2.16	2.14	2.13
	3.70	3.62	3.51	3.43	3.34	3.26	3.21	3.14	3.11	3.06	3.02	3.00
15	2.43	2.39	2.33	2.29	2.25	2.21	2.18	2.15	2.12	2.10	2.08	2.07
	3.56	3.48	3.36	3.29	3.20	3.12	3.07	3.00	2.97	2.92	2.89	2.87
16	2.37	2.33	2.28	2.24	2.20	2.16	2.13	2.09	2.07	2.04	2.02	2.01
	3.45	3.37	3.25	3.18	3.10	3.01	2.96	2.89	2.86	2.80	2.77	2.75
17	2.33	2.29	2.23	2.19	2.15	2.11	2.08	2.04	2.02	1.99	1.97	1.96
	3.35	3.27	3.16	3.08	3.00	2.92	2.86	2.79	2.76	2.70	2.67	2.65

付表 5 F 分布(つづき)

$$\alpha=P(F\geqq F_\alpha)=\int_{F_\alpha}^{\infty}f(F)\,dF$$



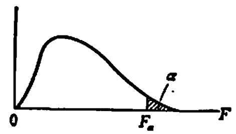
F分布の5％点(細字)および1％点(ゴシック)
m_1＝分子の自由度，m_2＝分母の自由度

m_2 \ m_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34
	8.28	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.85	3.71	3.60	3.51	3.44	3.37
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.55	2.48	2.43	2.38	2.34	2.31
	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.52	2.45	2.40	2.35	2.31	2.28
	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.71	3.56	3.45	3.37	3.30	3.23
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.28	2.25
	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.65	3.51	3.40	3.31	3.24	3.17
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.47	2.40	2.35	2.30	2.26	2.23
	7.94	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.45	2.38	2.32	2.28	2.24	2.20
	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.14	3.07
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.43	2.36	2.30	2.26	2.22	2.18
	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.25	3.17	3.09	3.03
25	4.24	3.38	2.99	2.76	2.60	2.49	2.41	2.34	2.28	2.24	2.20	2.16
	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.21	3.13	3.05	2.99
26	4.22	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15
	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.17	3.09	3.02	2.96
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.30	2.25	2.20	2.16	2.13
	7.68	5.49	4.60	4.11	3.79	3.56	3.39	3.26	3.14	3.06	2.98	2.93
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.44	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12
	7.64	5.45	4.57	4.07	3.76	3.53	3.36	3.23	3.11	3.03	2.95	2.90
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.54	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.14	2.10
	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.08	3.00	2.92	2.87
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.34	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09
	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.06	2.98	2.90	2.84
32	4.15	3.30	2.90	2.67	2.51	2.40	2.32	2.25	2.19	2.14	2.10	2.07
	7.50	5.34	4.46	3.97	3.66	3.42	3.25	3.12	3.01	2.94	2.86	2.80
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.30	2.23	2.17	2.12	2.08	2.05
	7.44	5.29	4.42	3.93	3.61	3.38	3.21	3.08	2.97	2.89	2.82	2.76
36	4.11	3.26	2.86	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15	2.10	2.06	2.03
	7.39	5.25	4.38	3.89	3.58	3.35	3.18	3.04	2.94	2.86	2.78	2.72
38	4.10	3.25	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	2.09	2.05	2.02
	7.35	5.21	4.34	3.86	3.54	3.32	3.15	3.02	2.91	2.82	2.75	2.69

m_2 \ m_1	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
18	2.29	2.25	2.19	2.15	2.11	2.07	2.04	2.00	1.98	1.95	1.93	1.92
	3.27	3.19	3.07	3.00	2.91	2.83	2.78	2.71	2.68	2.62	2.59	2.57
19	2.26	2.21	2.15	2.11	2.07	2.02	2.00	1.96	1.94	1.91	1.90	1.88
	3.19	3.12	3.00	2.92	2.84	2.76	2.70	2.63	2.60	2.54	2.51	2.49
20	2.23	2.18	2.12	2.08	2.04	1.99	1.96	1.92	1.90	1.87	1.85	1.84
	3.13	3.05	2.94	2.86	2.77	2.69	2.63	2.56	2.53	2.47	2.44	2.42
21	2.20	2.15	2.09	2.05	2.00	1.96	1.93	1.89	1.87	1.84	1.82	1.81
	3.07	2.99	2.88	2.80	2.72	2.63	2.58	2.51	2.47	2.42	2.38	2.36
22	2.18	2.13	2.07	2.03	1.98	1.93	1.91	1.87	1.84	1.81	1.80	1.78
	3.02	2.94	2.83	2.75	2.67	2.58	2.53	2.46	2.42	2.37	2.33	2.31
23	2.14	2.10	2.04	2.00	1.96	1.91	1.88	1.84	1.82	1.79	1.77	1.76
	2.97	2.89	2.78	2.70	2.62	2.53	2.48	2.41	2.37	2.32	2.28	2.26
24	2.13	2.09	2.02	1.98	1.94	1.89	1.86	1.82	1.80	1.76	1.74	1.73
	2.93	2.85	2.74	2.66	2.58	2.49	2.44	2.36	2.33	2.27	2.23	2.21
25	2.11	2.06	2.00	1.96	1.92	1.87	1.84	1.80	1.77	1.74	1.72	1.71
	2.89	2.81	2.70	2.62	2.54	2.45	2.40	2.32	2.29	2.23	2.19	2.17
26	2.10	2.05	1.99	1.95	1.90	1.85	1.82	1.78	1.76	1.72	1.70	1.69
	2.86	2.77	2.66	2.58	2.50	2.41	2.36	2.28	2.25	2.19	2.15	2.13
27	2.08	2.03	1.97	1.93	1.88	1.84	1.80	1.76	1.74	1.71	1.68	1.67
	2.83	2.74	2.63	2.55	2.47	2.38	2.33	2.25	2.21	2.16	2.12	2.10
28	2.06	2.02	1.96	1.91	1.87	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.67	1.65
	2.80	2.71	2.60	2.52	2.44	2.35	2.30	2.22	2.18	2.13	2.09	2.06
29	2.05	2.00	1.94	1.90	1.85	1.80	1.77	1.73	1.71	1.68	1.65	1.64
	2.77	2.68	2.57	2.49	2.41	2.32	2.27	2.19	2.15	2.10	2.06	2.03
30	2.04	1.99	1.93	1.89	1.84	1.79	1.76	1.72	1.69	1.66	1.64	1.62
	2.74	2.66	2.55	2.47	2.38	2.29	2.24	2.16	2.13	2.07	2.03	2.01
32	2.02	1.97	1.91	1.86	1.82	1.76	1.74	1.69	1.67	1.64	1.61	1.59
	2.70	2.62	2.51	2.42	2.34	2.25	2.20	2.12	2.08	2.02	1.98	1.96
34	2.00	1.95	1.89	1.84	1.80	1.74	1.71	1.67	1.64	1.61	1.59	1.57
	2.66	2.58	2.47	2.38	2.30	2.21	2.15	2.08	2.04	1.98	1.94	1.91
36	1.98	1.93	1.87	1.82	1.78	1.72	1.69	1.65	1.62	1.59	1.56	1.55
	2.62	2.54	2.43	2.35	2.26	2.17	2.12	2.04	2.00	1.94	1.90	1.87
38	1.96	1.92	1.85	1.80	1.76	1.71	1.67	1.63	1.60	1.57	1.54	1.53
	2.59	2.51	2.40	2.32	2.22	2.14	2.08	2.00	1.97	1.90	1.86	1.84

付表 5 F 分　布(つづき)

$$\alpha = P(F \geqq F_\alpha) = \int_{F_\alpha}^{\infty} f(F)\,dF$$



F分布の5％点(細字)および1％点(ゴシック)
m_1＝分子の自由度，m_2＝分母の自由度

m_2 \ m_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.07	2.04	2.00
	7.31	**5.18**	**4.31**	**3.83**	**3.51**	**3.29**	**3.12**	**2.99**	**2.88**	**2.80**	**2.73**	**2.66**
42	4.07	3.22	2.83	2.59	2.44	2.32	2.24	2.17	2.11	2.06	2.02	1.99
	7.27	**5.15**	**4.29**	**3.80**	**3.49**	**3.26**	**3.10**	**2.96**	**2.86**	**2.77**	**2.70**	**2.64**
44	4.06	3.21	2.82	2.58	2.43	2.31	2.23	2.16	2.10	2.05	2.01	1.98
	7.24	**5.12**	**4.26**	**3.78**	**3.46**	**3.24**	**3.07**	**2.94**	**2.84**	**2.75**	**2.68**	**2.62**
46	4.05	3.20	2.81	2.57	2.42	2.30	2.22	2.14	2.09	2.04	2.00	1.97
	7.21	**5.10**	**4.24**	**3.76**	**3.44**	**3.22**	**3.05**	**2.92**	**2.82**	**2.73**	**2.66**	**2.60**
48	4.04	3.19	2.80	2.56	2.41	2.30	2.21	2.14	2.08	2.03	1.99	1.96
	7.19	**5.08**	**4.22**	**3.74**	**3.42**	**3.20**	**3.04**	**2.90**	**2.80**	**2.71**	**2.64**	**2.58**
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.02	1.98	1.95
	7.17	**5.06**	**4.20**	**3.72**	**3.41**	**3.18**	**3.02**	**2.88**	**2.78**	**2.70**	**2.62**	**2.56**
55	4.02	3.17	2.78	2.54	2.38	2.27	2.18	2.11	2.05	2.00	1.97	1.93
	7.12	**5.01**	**4.16**	**3.68**	**3.37**	**3.15**	**2.98**	**2.85**	**2.75**	**2.66**	**2.59**	**2.53**
60	4.00	3.15	2.76	2.52	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92
	7.08	**4.98**	**4.13**	**3.65**	**3.34**	**3.12**	**2.95**	**2.82**	**2.72**	**2.63**	**2.56**	**2.50**
65	3.99	3.14	2.75	2.51	2.36	2.24	2.15	2.08	2.02	1.98	1.94	1.90
	7.04	**4.95**	**4.10**	**3.62**	**3.31**	**3.09**	**2.93**	**2.79**	**2.70**	**2.61**	**2.54**	**2.47**
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.01	1.97	1.93	1.89
	7.01	**4.92**	**4.08**	**3.60**	**3.29**	**3.07**	**2.91**	**2.77**	**2.67**	**2.59**	**2.51**	**2.45**
80	3.96	3.11	2.72	2.48	2.33	2.21	2.12	2.05	1.99	1.95	1.91	1.88
	6.96	**4.88**	**4.04**	**3.56**	**3.26**	**3.04**	**2.87**	**2.74**	**2.64**	**2.55**	**2.48**	**2.41**
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.30	2.19	2.10	2.03	1.97	1.92	1.88	1.85
	6.90	**4.82**	**3.98**	**3.51**	**3.20**	**2.99**	**2.82**	**2.69**	**2.59**	**2.51**	**2.43**	**2.36**
125	3.92	3.07	2.68	2.44	2.29	2.17	2.08	2.01	1.95	1.90	1.86	1.83
	6.84	**4.78**	**3.94**	**3.47**	**3.17**	**2.95**	**2.79**	**2.65**	**2.56**	**2.47**	**2.40**	**2.33**
150	3.91	3.06	2.67	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94	1.89	1.85	1.82
	6.81	**4.75**	**3.91**	**3.44**	**3.14**	**2.92**	**2.76**	**2.62**	**2.53**	**2.44**	**2.37**	**2.30**
200	3.89	3.04	2.65	2.41	2.26	2.14	2.05	1.98	1.92	1.87	1.83	1.80
	6.76	**4.71**	**3.88**	**3.41**	**3.11**	**2.90**	**2.73**	**2.60**	**2.50**	**2.41**	**2.34**	**2.28**
400	3.86	3.02	2.62	2.39	2.23	2.12	2.03	1.96	1.90	1.85	1.81	1.78
	6.70	**4.66**	**3.83**	**3.36**	**3.06**	**2.85**	**2.69**	**2.55**	**2.46**	**2.37**	**2.29**	**2.23**
1000	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.10	2.02	1.95	1.89	1.84	1.80	1.76
	6.66	**4.62**	**3.80**	**3.34**	**3.04**	**2.82**	**2.66**	**2.53**	**2.43**	**2.34**	**2.26**	**2.20**
∞	3.84	2.99	2.60	2.37	2.21	2.09	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75
	6.64	**4.60**	**3.78**	**3.32**	**3.02**	**2.80**	**2.64**	**2.51**	**2.41**	**2.32**	**2.24**	**2.18**

m_2 \ m_1	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
40	1.95	1.90	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.61	1.59	1.55	1.53	1.51
	2.56	**2.49**	**2.37**	**2.29**	**2.20**	**2.11**	**2.05**	**1.97**	**1.94**	**1.88**	**1.84**	**1.81**
42	1.94	1.89	1.82	1.78	1.73	1.68	1.64	1.60	1.57	1.54	1.51	1.49
	2.54	**2.46**	**2.35**	**2.26**	**2.17**	**2.08**	**2.02**	**1.94**	**1.91**	**1.85**	**1.80**	**1.78**
44	1.92	1.88	1.81	1.76	1.72	1.66	1.63	1.58	1.56	1.52	1.50	1.48
	2.52	**2.44**	**2.32**	**2.24**	**2.15**	**2.06**	**2.00**	**1.92**	**1.88**	**1.82**	**1.78**	**1.75**
46	1.91	1.87	1.80	1.75	1.71	1.65	1.62	1.57	1.54	1.51	1.48	1.46
	2.50	**2.42**	**2.30**	**2.22**	**2.13**	**2.04**	**1.98**	**1.90**	**1.86**	**1.80**	**1.76**	**1.72**
48	1.90	1.86	1.79	1.74	1.70	1.64	1.61	1.56	1.53	1.50	1.47	1.45
	2.48	**2.40**	**2.28**	**2.20**	**2.11**	**2.02**	**1.96**	**1.88**	**1.84**	**1.78**	**1.73**	**1.70**
50	1.90	1.85	1.78	1.74	1.69	1.63	1.60	1.55	1.52	1.48	1.46	1.44
	2.46	**2.39**	**2.26**	**2.18**	**2.10**	**2.00**	**1.94**	**1.86**	**1.82**	**1.76**	**1.71**	**1.68**
55	1.88	1.83	1.76	1.72	1.67	1.61	1.58	1.52	1.50	1.46	1.43	1.41
	2.43	**2.35**	**2.23**	**2.15**	**2.06**	**1.96**	**1.90**	**1.82**	**1.78**	**1.71**	**1.66**	**1.64**
60	1.86	1.81	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.50	1.48	1.44	1.41	1.39
	2.40	**2.32**	**2.20**	**2.12**	**2.03**	**1.93**	**1.87**	**1.79**	**1.74**	**1.68**	**1.63**	**1.60**
65	1.85	1.80	1.73	1.68	1.63	1.57	1.54	1.49	1.46	1.42	1.39	1.37
	2.37	**2.30**	**2.18**	**2.09**	**2.00**	**1.90**	**1.84**	**1.76**	**1.71**	**1.64**	**1.60**	**1.56**
70	1.84	1.79	1.72	1.67	1.62	1.56	1.53	1.47	1.45	1.40	1.37	1.35
	2.35	**2.28**	**2.15**	**2.07**	**1.98**	**1.88**	**1.82**	**1.74**	**1.69**	**1.62**	**1.56**	**1.53**
80	1.82	1.77	1.70	1.65	1.60	1.54	1.51	1.45	1.42	1.38	1.35	1.32
	2.32	**2.24**	**2.11**	**2.03**	**1.94**	**1.84**	**1.78**	**1.70**	**1.65**	**1.57**	**1.52**	**1.49**
100	1.79	1.75	1.68	1.63	1.57	1.51	1.48	1.42	1.39	1.34	1.30	1.28
	2.26	**2.19**	**2.06**	**1.98**	**1.89**	**1.79**	**1.73**	**1.64**	**1.59**	**1.51**	**1.46**	**1.43**
125	1.77	1.72	1.65	1.60	1.55	1.49	1.45	1.39	1.36	1.31	1.27	1.25
	2.23	**2.15**	**2.03**	**1.94**	**1.85**	**1.75**	**1.68**	**1.59**	**1.54**	**1.46**	**1.40**	**1.37**
150	1.76	1.71	1.64	1.59	1.54	1.47	1.44	1.37	1.34	1.29	1.25	1.22
	2.20	**2.12**	**2.00**	**1.91**	**1.83**	**1.72**	**1.66**	**1.56**	**1.51**	**1.43**	**1.37**	**1.33**
200	1.74	1.69	1.62	1.57	1.52	1.45	1.42	1.35	1.32	1.26	1.22	1.19
	2.17	**2.09**	**1.97**	**1.88**	**1.79**	**1.69**	**1.62**	**1.53**	**1.48**	**1.39**	**1.33**	**1.28**
400	1.72	1.67	1.60	1.54	1.49	1.42	1.38	1.32	1.28	1.22	1.16	1.13
	2.12	**2.04**	**1.92**	**1.84**	**1.74**	**1.64**	**1.57**	**1.47**	**1.42**	**1.32**	**1.24**	**1.19**
1000	1.70	1.65	1.58	1.53	1.47	1.41	1.36	1.30	1.26	1.19	1.13	1.08
	2.09	**2.01**	**1.89**	**1.81**	**1.71**	**1.61**	**1.54**	**1.44**	**1.38**	**1.28**	**1.19**	**1.11**
∞	1.69	1.64	1.57	1.52	1.46	1.40	1.35	1.28	1.24	1.17	1.11	1.00
	2.07	**1.99**	**1.87**	**1.79**	**1.69**	**1.59**	**1.52**	**1.41**	**1.36**	**1.25**	**1.15**	**1.00**

付表 6 ダービン－ワトソンの表

(1) d_L, d_U の 5 %点

n	$p=1$		$p=2$		$p=3$		$p=4$		$p=5$	
	d_{L0}	d_{U0}	d_{L0}	d_{U0}	d_{L0}	d_{U0}	d_{L0}	d_{U0}	d_{L0}	d_{U0}
15	1.08	1.36	0.95	1.54	0.82	1.75	0.69	1.97	0.56	2.21
16	1.10	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73	0.74	1.93	0.62	2.15
17	1.13	1.38	1.02	1.54	0.90	1.71	0.78	1.90	0.67	2.10
18	1.16	1.39	1.05	1.53	0.93	1.69	0.82	1.87	0.71	2.06
19	1.18	1.40	1.08	1.53	0.97	1.68	0.86	1.85	0.75	2.02
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	0.90	1.83	0.79	1.99
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.80	0.86	1.94
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	0.99	1.79	0.90	1.92
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	0.93	1.90
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	0.95	1.89
26	1.30	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.88
27	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83
31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83
32	1.37	1.50	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81
34	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79
39	1.43	1.54	1.38	1.60	1.33	1.66	1.27	1.72	1.22	1.79
40	1.44	1.54	1.39	1.60	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79
45	1.48	1.57	1.43	1.62	1.38	1.67	1.34	1.72	1.29	1.78
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
55	1.53	1.60	1.49	1.64	1.45	1.68	1.41	1.72	1.38	1.77
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77
65	1.57	1.63	1.54	1.66	1.50	1.70	1.47	1.73	1.44	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
75	1.60	1.65	1.57	1.68	1.54	1.71	1.51	1.74	1.49	1.77
80	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77
85	1.62	1.67	1.60	1.70	1.57	1.72	1.55	1.75	1.52	1.77
90	1.63	1.68	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78
95	1.64	1.69	1.62	1.71	1.60	1.73	1.58	1.75	1.56	1.78
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78

付表 6 ダービン－ワトソンの表(つづき)

(2) d_L, d_U の 2.5 %点

n	$p=1$		$p=2$		$p=3$		$p=4$		$p=5$	
	d_{L0}	d_{U0}	d_{L0}	d_{U0}	d_{L0}	d_{U0}	d_{L0}	d_{U0}	d_{L0}	d_{U0}
15	0.95	1.23	0.83	1.40	0.71	1.61	0.59	1.84	0.48	2.09
16	0.98	1.24	0.86	1.40	0.75	1.59	0.64	1.80	0.53	2.03
17	1.01	1.25	0.90	1.40	0.79	1.58	0.68	1.77	0.57	1.98
18	1.03	1.26	0.93	1.40	0.82	1.56	0.72	1.74	0.62	1.93
19	1.06	1.28	0.96	1.41	0.86	1.55	0.76	1.72	0.66	1.90
20	1.08	1.28	0.99	1.41	0.89	1.55	0.79	1.70	0.70	1.87
21	1.10	1.30	1.01	1.41	0.92	1.54	0.83	1.69	0.73	1.84
22	1.12	1.31	1.04	1.42	0.95	1.54	0.86	1.68	0.77	1.82
23	1.14	1.32	1.06	1.42	0.97	1.54	0.89	1.67	0.80	1.80
24	1.16	1.33	1.08	1.43	1.00	1.54	0.91	1.66	0.83	1.79
25	1.18	1.34	1.10	1.43	1.02	1.54	0.94	1.65	0.86	1.77
26	1.19	1.35	1.12	1.44	1.04	1.54	0.96	1.65	0.88	1.76
27	1.21	1.36	1.13	1.44	1.06	1.54	0.99	1.64	0.91	1.75
28	1.22	1.37	1.15	1.45	1.08	1.54	1.01	1.64	0.93	1.74
29	1.24	1.38	1.17	1.45	1.10	1.54	1.03	1.63	0.96	1.73
30	1.25	1.38	1.18	1.46	1.12	1.54	1.05	1.63	0.98	1.73
31	1.26	1.39	1.20	1.47	1.13	1.55	1.07	1.63	1.00	1.72
32	1.27	1.40	1.21	1.47	1.15	1.55	1.08	1.63	1.02	1.71
33	1.28	1.41	1.22	1.48	1.16	1.55	1.10	1.63	1.04	1.71
34	1.29	1.41	1.24	1.48	1.17	1.55	1.12	1.63	1.06	1.70
35	1.30	1.42	1.25	1.48	1.19	1.55	1.13	1.63	1.07	1.70
36	1.31	1.43	1.26	1.49	1.20	1.56	1.15	1.63	1.09	1.70
37	1.32	1.43	1.27	1.49	1.21	1.56	1.16	1.62	1.10	1.70
38	1.33	1.44	1.28	1.50	1.23	1.56	1.17	1.62	1.12	1.70
39	1.34	1.44	1.29	1.50	1.24	1.56	1.19	1.63	1.13	1.69
40	1.35	1.45	1.30	1.51	1.25	1.57	1.20	1.63	1.15	1.69
45	1.39	1.48	1.34	1.53	1.30	1.58	1.25	1.63	1.21	1.69
50	1.42	1.50	1.38	1.54	1.34	1.59	1.30	1.64	1.26	1.69
55	1.45	1.52	1.41	1.56	1.37	1.60	1.33	1.64	1.30	1.69
60	1.47	1.54	1.44	1.57	1.40	1.61	1.37	1.65	1.33	1.69
65	1.49	1.55	1.46	1.59	1.43	1.62	1.40	1.66	1.36	1.69
70	1.51	1.57	1.48	1.60	1.45	1.63	1.42	1.66	1.39	1.70
75	1.53	1.58	1.50	1.61	1.47	1.64	1.45	1.67	1.42	1.70
80	1.54	1.59	1.52	1.62	1.49	1.65	1.47	1.67	1.44	1.70
85	1.56	1.60	1.53	1.63	1.51	1.65	1.49	1.68	1.46	1.71
90	1.57	1.61	1.55	1.64	1.53	1.66	1.50	1.69	1.48	1.71
95	1.58	1.62	1.56	1.65	1.54	1.67	1.52	1.69	1.50	1.71
100	1.59	1.63	1.57	1.65	1.55	1.67	1.53	1.70	1.51	1.72

付表 6　ダービン－ワトソンの表(つづき)

(3)　d_L, d_U の1％点

n	$p=1$		$p=2$		$p=3$		$p=4$		$p=5$	
	d_{L0}	d_{U0}	d_{L0}	d_{U0}	d_{L0}	d_{U0}	d_{L0}	d_{U0}	d_{L0}	d_{U0}
15	0.81	1.07	0.70	1.25	0.59	1.46	0.49	1.70	0.39	1.96
16	0.84	1.09	0.74	1.25	0.63	1.44	0.53	1.66	0.44	1.90
17	0.87	1.10	0.77	1.25	0.67	1.43	0.57	1.63	0.48	1.85
18	0.90	1.12	0.80	1.26	0.71	1.42	0.61	1.60	0.52	1.80
19	0.93	1.13	0.83	1.26	0.74	1.41	0.65	1.58	0.56	1.77
20	0.95	1.15	0.86	1.27	0.77	1.41	0.68	1.57	0.60	1.74
21	0.97	1.16	0.89	1.27	0.80	1.41	0.72	1.55	0.63	1.71
22	1.00	1.17	0.91	1.28	0.83	1.40	0.75	1.54	0.66	1.69
23	1.02	1.19	0.94	1.29	0.86	1.40	0.77	1.53	0.70	1.67
24	1.04	1.20	0.96	1.30	0.88	1.41	0.80	1.53	0.72	1.66
25	1.05	1.21	0.98	1.30	0.90	1.41	0.83	1.52	0.75	1.65
26	1.07	1.22	1.00	1.31	0.93	1.41	0.85	1.52	0.78	1.64
27	1.09	1.23	1.02	1.32	0.95	1.41	0.88	1.51	0.81	1.63
28	1.10	1.24	1.04	1.32	0.97	1.41	0.90	1.51	0.83	1.62
29	1.12	1.25	1.05	1.33	0.99	1.42	0.92	1.51	0.85	1.61
30	1.13	1.26	1.07	1.34	1.01	1.42	0.94	1.51	0.88	1.61
31	1.15	1.27	1.08	1.34	1.02	1.42	0.96	1.51	0.90	1.60
32	1.16	1.28	1.10	1.35	1.04	1.43	0.98	1.51	0.92	1.60
33	1.17	1.29	1.11	1.36	1.05	1.43	1.00	1.51	0.94	1.59
34	1.18	1.30	1.13	1.36	1.07	1.43	1.01	1.51	0.95	1.59
35	1.19	1.31	1.14	1.37	1.08	1.44	1.03	1.51	0.97	1.59
36	1.21	1.32	1.15	1.38	1.10	1.44	1.04	1.51	0.99	1.59
37	1.22	1.32	1.16	1.38	1.11	1.45	1.06	1.51	1.00	1.59
38	1.23	1.33	1.18	1.39	1.12	1.45	1.07	1.52	1.02	1.58
39	1.24	1.34	1.19	1.39	1.14	1.45	1.09	1.52	1.03	1.58
40	1.25	1.34	1.20	1.40	1.15	1.46	1.10	1.52	1.06	1.58
45	1.29	1.38	1.24	1.42	1.20	1.48	1.16	1.53	1.11	1.58
50	1.32	1.40	1.28	1.45	1.24	1.49	1.20	1.54	1.16	1.59
55	1.36	1.43	1.32	1.47	1.28	1.51	1.25	1.55	1.21	1.59
60	1.38	1.45	1.35	1.48	1.32	1.52	1.28	1.56	1.25	1.60
65	1.41	1.47	1.38	1.50	1.35	1.53	1.31	1.57	1.28	1.61
70	1.43	1.49	1.40	1.52	1.37	1.55	1.34	1.58	1.31	1.61
75	1.45	1.50	1.42	1.53	1.39	1.56	1.37	1.59	1.34	1.62
80	1.47	1.52	1.44	1.54	1.42	1.57	1.39	1.60	1.36	1.62
85	1.48	1.53	1.46	1.55	1.43	1.58	1.41	1.60	1.39	1.63
90	1.50	1.54	1.47	1.56	1.45	1.59	1.43	1.61	1.41	1.64
95	1.51	1.55	1.49	1.57	1.47	1.60	1.45	1.62	1.42	1.64
100	1.52	1.56	1.50	1.58	1.48	1.60	1.46	1.63	1.44	1.65

索　　引

(nは脚注)

ア　行

カ　行

サ 行

タ 行

ナ 行

ハ 行

マ　行

ヤ　行

ラ　行

ワ　行

著者紹介

1933年　新潟県長岡市に生まれる。
1956年　慶応義塾大学経済学部卒業。
現　在　慶応義塾大学商学部教授(経済学博士)，計量経済学専攻。
著　者　『寡占価格への計量的接近』(1974年)。
『計量経済学』(1982年)。
『先物とオプションの理論』(1989年)。
現住所　三鷹市井の頭 2-30-6

経済分析のための統計的方法（第2版）

1983年4月7日　第1刷発行
1992年8月31日　第18刷発行

著　者　岩田暁一（いわた　ぎょういち）
発行者　中島資皓
発行所　〒103 東京都中央区日本橋本石町 1-2-1　東洋経済新報社
電話　編集03(3246)5661・販売03(3246)5467　振替 東京3-6518
印刷・製本　東洋経済印刷

Printed in Japan　ISBN 4-492-47006-9