Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Алгоритмы и структуры данных

Алгоритмы на графах

Преподаватели: Косяков Михаил Сергеевич, Тараканов Денис Сергеевич

Выполнил: Кульбако Артемий Юрьевич

P3212

Санкт-Петербург
2020

1080. Раскраска карты

$$T(n) = O(n)$$

```cpp
#include <vector>
#include <queue>
#include <iostream>
using namespace std;

struct Country {
    int color = -1; // -1 - не посещен, 0 - красный, 1 - синий
    vector<int> borders;
};
void BFSAndColoring(Country* countries, int st) {
    queue<int> q;
    q.push(st);
    countries[st].color = 0;
    while (!q.empty()) {
        int v = q.front();
        q.pop();
        for (int i = 0; i < countries[v].borders.size(); i++) {
            int to = countries[v].borders[i];
            if (countries[v].color == countries[to].color) {
                cout << "-1";
                exit(0);
            }
            if (countries[to].color == -1) {
                countries[to].color = (countries[v].color == 0 ? 1 : 0);
                q.push(to);
            }
        }
    }
}

int main() {
    int n;
    cin >> n;
    Country lands[n + 1];
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        int e = -1;
        while (e != 0) {
            cin >> e;
            if (e != 0) {
                lands[i].borders.push_back(e);
                lands[e].borders.push_back(i);
            }
        }
    }
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        if (lands[i].color == -1) BFSAndColoring(lands, i);
        cout << lands[i].color;
    }
    return 0;
}
```

Необходимо реализовать алгоритм раскраски графа в 2 цвета так, чтобы смежные вершины не могли быть раскрашены в один цвет. Создадим структуру данных `Country`, которая будет содержать данные о своём цвете и номера стран, с которыми имеет границы. На вход алгоритма подаём заполненный невзвешенный граф $G = (V, E)$ и номер стартовой вершины s. На каждом шаге красим одну вершину V в определённый цвет в зависимости от того, возможно ли это по условию. В классической реализации необходимо иметь также массив `used[]`, который содержит состояние прохода вершины, т.е. была ли она посещена или нет, чтоб исключить добавления её в очередь при наличии циклов в графе. В данной задаче от этого можно избавиться, условно покрасив множество $\{V\}$ в третий цвет до прохода в ширину (`-1` как-раз может имитировать этот цвет). Сделать это нужно в цикле, так-как граф может быть несвязанным, а значит одного прохода может оказаться недостаточно. Запустив алгоритм от каждой непокрашенной вершины, мы точно покроим всем граф.

Визуализация работы на входном примере:

1. Заполненная карта.

№	1	2	3
1		x	
2	x		x
3		x	

color:	0	-1	-1

queue:

2. Итерации:

№	1	2	3
1		x	
2	x		x
3		x	

color:	0	-1	-1

queue:	1

	1	2	3
1		x	
2	x		x
3		x	

color:	0	1	-1

queue:	2

	1	2	3
1		x	
2	x		x
3		x	

color:	0	1	0

queue:	3

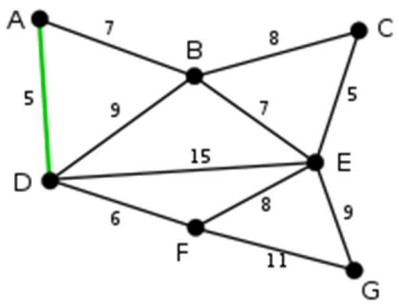
1160. Network

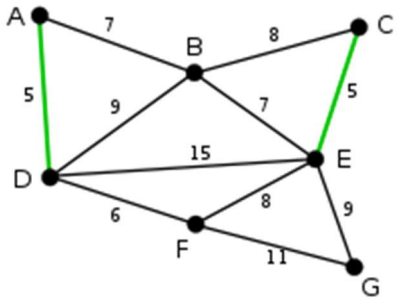
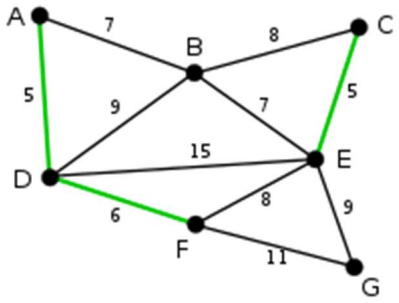
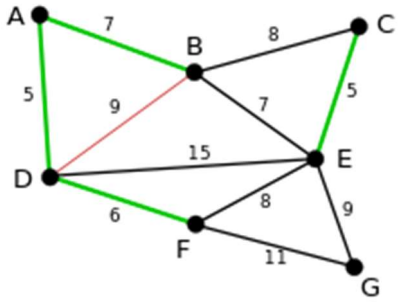
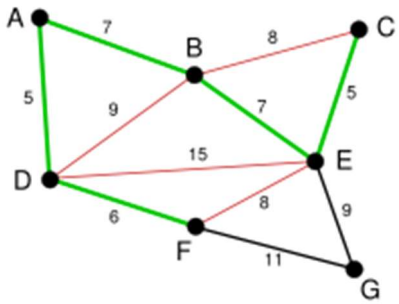
$$T(n) = O(\log n)$$

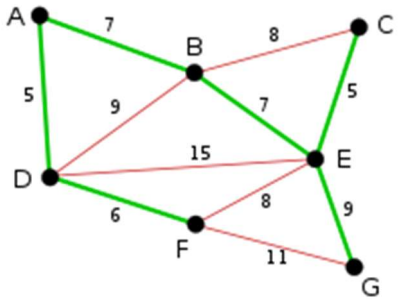
```
#include <iostream>
#include <algorithm>

using namespace std;

struct Cable {
    int from, to, length;

    bool operator< (const Cable& other) {
        return length < other.length;
    }
};

class DisjointSetUnion {

    private: pair<int, int>* nodes;

    public:
        DisjointSetUnion(int size) {
            nodes = new pair<int, int>[size + 1];
            for (int i = 1; i <= size; i++) nodes[i] = {0, i};
        }

        int findRoot(int a) {
            if (a != nodes[a].second) nodes[a].second = findRoot(nodes[a].sec
ond);
            return nodes[a].second;
        }

        void merge(int a, int b) {
            if (nodes[a].first > nodes[b].first) nodes[b].second = a;
            else {
                nodes[a].second = b;
                if (nodes[a].first == nodes[b].first) nodes[b].first++;
            }
        }
};

int main() {
```

```
    int n, m, maxLength = 0;
    cin >> n >> m;
    Cable cables[m];
    for (int i = 0; i < m; i++) {
        int a, b, l;
        cin >> a >> b >> l;
        cables[i] = {a, b, l};
    }
    sort(cables, cables + m); //передаём сортировке указатели на начало и кон
ец массива
    DisjointSetUnion* dsu = new DisjointSetUnion(n);
    for (int i = 0; i < m; i++) {
        int from = cables[i].from;
        int to = cables[i].to;
        if (dsu->findRoot(from) != dsu->findRoot(to)) {
            if (cables[i].length > maxLength) maxLength = cables[i].length;
            cables[i].length *= -1;
            dsu->merge(dsu->findRoot(from), dsu->findRoot(to));
        }
    }
    cout << maxLength << "\n" << n - 1 << "\n";
    for (Cable c: cables) if (c.length <= 0) cout << c.from << " " << c.to <<
 "\n";
    return 0;
}
```

Задача о нахождении минимального оставного дерева в графе, где вершинами будут выступать хабы, а провода - рёбрами графа. Необходимо пройти через все вершины так, чтобы сумма рёбер была минимальной. На выбор для реализации есть три известных алгоритма: Прима, Краскала и Буровки. Реализуем Краскала. Принцип работы таков: алгоритм изначального помещает все ребра графа $G = (V, E)$ в собственное дерево, затем объединяя на два некоторых дерева ребром $e = \{u, v\}$. Изначально все рёбра сортируются по весу в порядке неубывания - если у текущего ребра его концы принадлежат разным поддеревьям, то эти поддеревья объединяются. По окончании перебора все V окажутся принадлежащими одному поддереву, и ответ найден.

Изображение	Описание
	Ребра **AD** и **CE** имеют минимальный вес, равный 5. Произвольно выбирается ребро **AD** (выделено на рисунке). В результате получаем множество выбранных вершин (**A**, **D**).

	Теперь наименьший вес, равный 5, имеет ребро **CE**. Так как добавление **CE** не образует цикла, то выбираем его в качестве второго ребра. Так, как это ребро не имеет общих вершин с имеющимся множеством выбранных вершин (**A**, **D**), получаем второе множество выбранных вершин (**C**, **E**)
	Аналогично выбираем ребро **DF**, вес которого равен 6. При этом не возникает ни одного цикла, так как не существует (среди невыбранных) ребра, имеющего обе вершины из одного (**A**, **D**, **F**) или второго (**C**, **E**) множества выбранных вершин.
	Следующие ребра — **AB** и **BE** с весом 7. Произвольно выбирается ребро **AB**, выделенное на рисунке. Тем самым вершина **B** добавляется к первому множеству выбранных вершин (**A**, **B**, **D**, **F**). Невыбранное ранее ребро **BD** выделено красным, так как его вершины входят в множество выбранных вершин (**A**, **B**, **D**, **F**), а, следовательно, уже существует путь (зелёный) между **B** и **D** (если бы это ребро было выбрано, то образовался бы цикл **ABD**). Следующее ребро может быть выбрано только после нахождения всех циклов.
	Аналогичным образом выбирается ребро **BE**, вес которого равен 7. Так как это ребро имеет вершины в обоих множествах выбранных вершин (**A**, **B**, **D**, **F**) и (**C**, **E**), эти множества объединяются в одно (**A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**). На этом этапе красным выделено гораздо больше ребер, так как множества выбранных вершин, а, следовательно, и множества выбранных рёбер объединились. Теперь **BC** создаст цикл **BCE**, **DE** создаст цикл **DEBA**, и **FE** сформирует цикл **FEBAD**.

	Алгоритм завершается добавлением ребра **EG** с весом 9. Количество выбранных вершин (**A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, **G**) = 7 соответствует количеству вершин графа. Минимальное остовное дерево построено.

`Cable` отвечает за удобное хранение рёбер. Их сортировка потребует $O(\log n)$ операций, если использовать алгоритм из стандартной библиотеки `C++`. Затем нужно проверять соединяет ли ребро две различных компоненты связности графа. Эффективно реализовать это можно с помощью структуры данных `DisjointSetUnion (Система непересекающихся множеств)`, создадим отдельный класс для работы с ней. Объединять компоненты связности будем методом `merge(int a, int b)`, а проверять, находятся ли разные вершины графа в разных деревьях (т.е. компонентах связности) методом `findRoot(int a)`. Для описания множества используется номер вершины, являющейся корнем соответствующего дерева. Для определения, принадлежат ли два элемента к одному и тому же множеству, для каждого элемента нужно найти корень соответствующего дерева (поднимаясь вверх пока это возможно) и сравнить эти корни. Объединяются множества так: пусть нам нужно объединить множества с корнями a и b. Просто присвоим $p[a] = b$, (где p - массив, хранящий прямого предка для каждой вершины), тем самым подвесив всё дерево a к корню дерева b. Можно заметить, что при такой реализации при постепенном объединении деревьев глубина будет расти вплоть до N. Применим несколько оптимизаций к структуре:

1. Ранги вершин: будем хранить для всех деревьев текущую глубину, и при объединении подвешивать дерево с меньшей глубиной к корню дерева с большей глубиной (в действительности, ранг вершины описывают не точную глубину дерева, а её верхнюю границу, но это не играет роли).

2. Сжатие путей: при поиске корня заданной вершины будем переподвешивать её за найденный корень. К примеру, мы вызвали `findRoot` для вершины, которую отделяют от корня дерева пять других вершин. Рекурсивный вызов функции обойдёт каждую из них, и найдёт корень. На выходе из каждого рекурсивного вызова обновим текущую вершину только что найденным корнем. Таким образом, все пять вершин теперь будут подвешены напрямую к корню.

P.S. В моей реализации объединим массивы p и массив рангов в массив объектов `pair`.

В конце выведем ответ. Максимальную длину рёбра можно было получить во время прохода по массиву рёбер, количество рёбер, соединяющих все точки будет равняться $(n-1)$, для любого количества точек (это можно заметить эмпирическим путём), а также выведем все рёбра, у которых длина > 0, так как во время вышеописанного цикла, необходимо отмечать уже использованные в графе рёбра - для этого можно просто менять знак веса ребра на противоположный.

1450. Российские газопроводы

$$\boldsymbol{T(n) = O(n^2)}$$

```
#include <iostream>
#include <string>
#include <vector>

using namespace std;

struct GasPipeline {
    int from, to, price;
};

int main() {
    int n, m;
    cin >> n >> m;
    GasPipeline wires[m];
    int res[n * n];
    fill_n(res, n * n, -1);
    for (int i = 0; i < m; i++) cin >> wires[i].from >> wires[i].to >> wires[
i].price;
    int s, f;
    cin >> s >> f;
    res[s] = 0;
    for (int i = 0; i < n - 1; i++)
        for (int j = 0; j < m; j++)
            if (res[wires[j].from] != -
1 && res[wires[j].to] < res[wires[j].from] + wires[j].price)
                res[wires[j].to] = res[wires[j].from] + wires[j].price;
    if (res[f] != -1) cout << res[f];
    else cout << "No solution";
    return 0;
}
```

Задача на алгоритм Дейкстры, с той лишь разницей, что нужно вывести не минимальный путь от a до b, а максимальный. Выделим память под массив `res`, который будет содержать путь от выделенной вершины s до всех остальных вершин V взвешенного ориентированного графа $G = (V, E)$. Изначально `res[s] = 0` — это значит, что путь из s в f пока ещё $= 0$, но необходимо для старта алгоритма, а для остальных вершин это длина равна заведомо невозможному минимальному числу $m \in (-\infty\,; 0)$. Для облегчения понимания кода создадим структуру `GasPipeline`, содержащую ребро графа $e = \{u, v\}$ и его вес, чтобы в явном виде не хранить массив предков являющейся предпоследней в длиннейшем пути до вершины v. Найдём для узла s самое большое ребро из узлов $\{s+1\}$, и

пересчитаем стоимость соседей этого узла. Повторим так для каждого, и в конце получим элементов `res[f]`, который будет содержать сумму рёбер от s до f (если $res_f = m$, значит f оказалась непосещённой, следовательно до неё не добраться из s). Доказательство алгоритма таково: для вершины s имеем `res[s] = 0`, что и является длиной кратчайшего пути до неё. Пусть теперь это утверждение выполнено для всех предыдущих итераций, т.е. всех уже помеченных вершин; докажем, что оно не нарушается после выполнения текущей итерации. Пусть v — вершина, которую алгоритм собирается пометить на текущей итерации. $res_v = l_v$, где l_v - длине кратчайшего пути до res_v. Рассмотрим кратчайший путь P до вершины v. Этот путь можно разбить на два пути: p_1, состоящий только из помеченных вершин, и p_2 - остальная часть пути. $res_{p1} = l_{p1}$, ведь на одной из прошлых итераций мы перебирали вершины из p_2. Вследствие не отрицательности стоимостей рёбер длина кратчайшего пути l_{p2} не превосходит длины l_v кратчайшего пути до вершины v. Учитывая, что $l_v \leq res_v$ получаем: $d_{p2} = l_{p2} \leq l_v \leq d_v$. Поскольку p_2 и v — вершины непомеченные, то так как на текущей итерации была выбрана именно вершина v, а не вершина p, то получаем: $d_{p2} \geq d_v \rightarrow d_v = l_v$.