Una semplice prova della $(2k-1)$-competitività di ω-WFA

29 novembre 2011

Vogliamo mostrare come l'ottimizzazione dell'algoritmo Work con una finestra di ricerca sia $(2k-1)$-competitivo esattamente come l'algoritmo originale modulo alcune assunzioni. In primo luogo considereremo uno spazio metrico finito, la cui distanza massima è Δ inoltre consideriamo una discretizzazione di questo spazio tale che la distanza minima tra le richieste si δ. In generale queste assunzioni non sono limitanti dal momento che le implementazioni effettive sul calcolatore hanno intrinsecamente queste limitazioni.

La prima scelta che operiamo è la dimensione della finestra. D'ora in avanti chiameremo tale dimensione ω e l'algoritmo derivante ω-WFA. Scegliamo $\omega \geq \Delta/\delta$ e $\omega > k$. Dove k è il numero di server a disposizione.

Il nostro algoritmo andrà a calcolare la funzione lavoro esattamente nello stesso modo in cui viene calcolata nell'algoritmo Work con la differenza che alla richiesta t-esima:

$$work(t, A_t) = \begin{cases} w_t(A_t) & \text{se } t < \omega \\ w_\omega(A_t) & \text{se } t \geq \omega \end{cases}$$

Considerate le premesse andremo a dimostrare il fatto che ω-WFA è $(2k-1)$-competitivo basandoci sull'assunzione che Work lo sia perciò qualsiasi risultato migliore venga provato per Work si propaga all'ottimizzazione in analisi.

Andiamo ad effettuare una analisi al caso peggiore sfruttando un esempio fornito da [RM08]. Supponiamo la nostra configurazione sia la stessa. Abbiamo una "isola" composta dalle posizioni ammissibili x_1, x_2 in cui arrivano le richieste con un server nella posizione x_1 (intercambiabilmente in x_2) e un "entroterra" in cui vi sono tutti gli altri server a distanza Δ. e supponiamo di aver scelto $\omega = \Delta/\delta + 1$ allora alle prime $\omega - 1$ richieste ω-WFA paqherà un costo pari a $\delta\omega$ e poi alla w-esima sposta un server dall'entroterra pagando un costo totale $(\omega-1)\delta + \Delta$ mentre OPT off-line paga un costo Δ partendo dalla stessa configurazione. Perciò comparando i costi otteniamo che

$$\frac{(\omega-1)\delta + \Delta}{\Delta} \leq (2k-1) \Rightarrow 2 \leq (2k-1)$$

Dunque anche nel peggiore degli scenari l'algoritmo paga un costo inferiore a $(2k-1)C_{OPT}$. Andiamo a dimostrare il caso generale, posta questa condizione, per induzione.

Teorema 1. *ω-WFA è $(2k-1)$-competitivo.*

Dimostrazione. Andiamo ad effettuare la dimostrazione per induzione sulla lunghezza della richiesta riportandoci al fatto che WORK è $(2k-1)$-competitivo.

- *Caso base.* Per sequenze di richieste di lunghezza uno è banale dato che i due algoritmi (WORK e ω-WFA) hanno lo stesso comportamento.

- *Passo induttivo.* Abbiamo una sequenza di richieste di lunghezza $t > \omega$ (l'unico caso veramente interessate). Abbiamo dimostrato che l'algoritmo anche al caso peggiore è $(2k-1)$-competitivo dunque la funzione lavoro verrà calcolata rispettando questo limite di competitività. Al passo $t-1$ l'algoritmo calcola $w_\omega(A_{t-1})$ in modo competitivo allora, per ipotesi induttiva anche al passo t è competitivo perché calcola $w_\omega(A_t) = w_\omega(A_{t-1}) + d(r_t, x)$ rispettando il vincolo imposto dall'analisi al caso peggiore.

Questo conclude la dimostrazione. □

Riferimenti bibliografici

[RM08] T. Rudec and R. Manger. On the competitiveness of a modified work function algorithm for solving the on-line k-server problem. In *Information Technology Interfaces, 2008. ITI 2008. 30th International Conference on*, pages 779–784. IEEE, 2008.