

# Una semplice prova della $(2k - 1)$ -competitività di $\omega$ -WFA

28 novembre 2011

Vogliamo mostrare come l'ottimizzazione dell'algoritmo WORK con una finestra di ricerca sia  $(2k - 1)$ -competitivo esattamente come l'algoritmo originale modulo alcune assunzioni. In primo luogo considereremo uno spazio metrico finito, la cui distanza massima è  $\Delta$  inoltre consideriamo una discretizzazione di questo spazio tale che la distanza minima tra le richieste si  $\delta$ . In generale queste assunzioni non sono limitanti dal momento che le implementazioni effettive sul calcolatore hanno intrinsecamente queste limitazioni.

La prima scelta che operiamo è la dimensione della finestra. D'ora in avanti chiameremo tale dimensione  $\omega$  e l'algoritmo derivante  $\omega$ -WFA. Scegliamo  $\omega \geq \Delta/\delta$  e  $\omega > k$ . Dove  $k$  è il numero di server a disposizione.

Il nostro algoritmo andrà a calcolare la funzione lavoro esattamente nello stesso modo in cui viene calcolata nell'algoritmo WORK con la differenza che alla richiesta  $t$ -esima:

$$work(t, A_t) = \begin{cases} w_t(A_t) & \text{se } t < \omega \\ w_\omega(A_t) & \text{se } t \geq \omega \end{cases}$$

Considerate le premesse andremo a dimostrare il fatto che  $\omega$ -WFA è  $(2k - 1)$ -competitivo basandoci sull'assunzione che WORK lo sia perciò qualsiasi risultato migliore venga provato per WORK si propaga all'ottimizzazione in analisi.

**Teorema 1.**  *$\omega$ -WFA è competitivo con lo stesso rapporto di competitività di WORK.*

*Dimostrazione.* Dividiamo la sequenza di richieste  $R = \phi_0\phi_1...\phi_n$  in fasi tali che ogni fase termina quando  $OPT^1$  muove un server per rispondere ad una richiesta cioè paga un costo  $\delta$ . Dividiamo l'analisi di una fase in due casi:

- Se  $|\phi_i| \leq \omega$  allora di sicuro  $\omega$ -WFA si comporta come WORK perché calcola tutta la funzione lavoro fino all'inizio della fase.

---

<sup>1</sup>L'algoritmo ottimo offline

- Se  $|\phi_i| > \omega$  allora ci sono al più  $k$  richieste distinte altrimenti avremmo che OPT muove un server. Essendo  $\omega > k$  e  $\omega\delta > \Delta$  allora non ci sono posizioni irraggiungibili da  $\omega$ -WFA che posizionerà i  $k$  server nella stessa configurazione di OPT con lo stesso rapporto di competitività di WORK.

□