5 Preguntа 5

En un centro de llamadas telefónicas que atiende las quejas por ventas en línea, se ha detectado que en temporada baja durante los meses de septiembre y octubre se reciben un promedio de 20 llamadas al día. Mientras que, durante las vacaciones de verano, en los meses de junio y julio, se reciben 30 llamadas al día. Finalmente, durante el mes de diciembre se reciben 40 llamadas al día. Conteste las siguientes preguntas, y para todos los casos escriba las expresiones a calcular, los comandos ejecutados y sus resultados.

5.1

Grafique la distribución de probabilidad de que lleguen entre 5 y 50 llamadas en cada una de las diferentes temporadas. Explique la diferencia entre las gráficas.

Solución

Se sabe que:

Sept - Oct Jun - Jul Dic	$\lambda_b = 20$ $\lambda_v = 30$ $\lambda_d = 40$
Distribución	Poisson, $t = 1$ día

Entonces, con los datos y los comandos siguientes en la Figura 25, se grafican las probabilidades de obtener de 5 a 50 llamadas en cada temporada. Las gráficas resultantes de dichos comandos se muestran en la Figura 26.

```
# low season
lambda = 20
n2 = 50
n1 = 5

aux = rep(0, (n2 -n1 +1)*2)
aux[seq(2,(n2 -n1 +1)*2,2)] = dpois(c(n1:n2), lambda = lambda)
ymax = max(dpois(n1:n2, lambda=lambda))

plot(x=c(n1:n2), y=dpois(c(n1:n2), lambda = lambda), ylim=c(0,ymax), xlim=c(-1,n2-n1+1),
     xlab="x", ylab="probability", main="Probability Function, Low")
lines(x=rep(n1:n2, each=2), y=aux, pch=21, type="h", lty=2, col="blue")
# summer season
lambda = 30
n2 = 50
n1 = 5

aux = rep(0, (n2 -n1 +1)*2)
aux[seq(2,(n2 -n1 +1)*2,2)] = dpois(c(n1:n2), lambda = lambda)
ymax = max(dpois(n1:n2, lambda=lambda))

plot(x=c(n1:n2), y=dpois(c(n1:n2), lambda = lambda), ylim=c(0,ymax), xlim=c(-1,n2-n1+1),
     xlab="x", ylab="probability", main="Probability Function, Summer")
lines(x=rep(n1:n2, each=2), y=aux, pch=21, type="h", lty=2, col="blue")
# december season
lambda = 40
n2 = 50
n1 = 5

aux = rep(0, (n2 -n1 +1)*2)
aux[seq(2,(n2 -n1 +1)*2,2)] = dpois(c(n1:n2), lambda = lambda)
ymax = max(dpois(n1:n2, lambda=lambda))

plot(x=c(n1:n2), y=dpois(c(n1:n2), lambda = lambda), ylim=c(0,ymax), xlim=c(-1,n2-n1+1),
     xlab="x", ylab="probability", main="Probability Function, December")
lines(x=rep(n1:n2, each=2), y=aux, pch=21, type="h", lty=2, col="blue")
```

Figure 25: comandos para 5.1

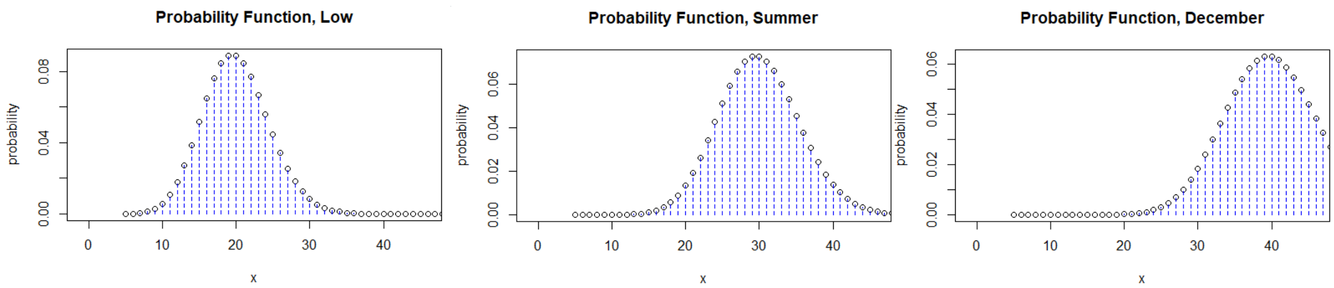

Figure 26: gráficas para 5.1, en el orden lambda = 20, lambda = 30, lambda = 40.

Al graficar la probabilidad de que lleguen de 5 a 50 llamadas en cada temporada, se puede observar que la principal diferencia entre las gráficas es la posición de la elevación o campana, pues ésta en cada una de las temporadas se encuentra exactamente en el valor de λ_b, λ_v y λ_d para temporada baja, verano y diciembre. Es decir, el punto más alto de la distribución se encuentra alrededor del valor respectivo de lambda, pues lambda resulta ser la media o valor esperado en la distribución de Poisson. Al tener un lambda = 40 para diciembre, y el límite graficado es 50, como esta lambda está más cerca de 50 que las otras dos lambdas, la probabilidad no alcanza a bajar del todo en el valor de 50 llamadas, y se ve una distribución cortada.

5.2

Encuentre en que temporada es más probable tener 35 llamadas al día. Justifique la respuesta.

Solución

Considerando la ecuación de probabilidad para la distribución de Poisson,

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \tag{33}$$

Se debe calcular la probabilidad de obtener 35 llamadas al día para cada temporada: baja (b), verano (v) y diciembre (d) como:

Sept - Oct	$\lambda_b = 20$
Jun - Jul	$\lambda_v = 30$
Dic	$\lambda_d = 40$
Distribución	Poisson, $t = 1$ día

$$P_b(X = 35) = \frac{20^{35} e^{-20}}{35!} = \boxed{0.0006853739} \tag{34}$$

$$P_v(X = 35) = \frac{30^{35} e^{-30}}{35!} = \boxed{0.0453082} \tag{35}$$

$$P_d(X = 35) = \frac{40^{35} e^{-40}}{35!} = \boxed{0.04853866} \tag{36}$$

Y ejecutando los comandos de la Figura 27, se llegó a los resultados en (34), (35) y (36). A partir de los resultados obtenidos, se puede decir que en **temporada de diciembre existe la mayor probabilidad de tener 35 llamadas al día, con una probabilidad de 0.04853866**, ya que en las demás temporadas se obtuvo menor probabilidad: en temporada baja se obtuvo una probabilidad de 0.00068 ya que la media es 20 y se aleja más de 35 que la media en diciembre (40), y en la temporada de verano se obtuvo una probabilidad de 0.0453, bastante cercana a la probabilidad de diciembre, pues sus medias (30) y (40) están a la misma distancia de 35 llamadas, pero en diciembre se logró ligeramente mayor probabilidad tal vez debido a que la curva exponencial de diciembre va subiendo al nivel de 35, y la curva exponencial de verano va bajando al nivel de 35 llamadas como se ve en la Figura 26, por lo que en diciembre tendería a ser más probable que se obtengan 35 llamadas.

```
# 5.2
dpois(35, lambda=20)
dpois(35, lambda=30)
dpois(35, lambda=40)
```

Figure 27: comandos para 5.2

5.3

Encuentre en qué temporada es más probable tener 25 llamadas al día. Justifique la respuesta.

Solución

Considerando la ecuación de probabilidad para la distribución de Poisson,

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \tag{37}$$

Se debe calcular la probabilidad de obtener 25 llamadas al día para cada temporada: baja (b), verano (v) y diciembre (d) como:

Sept - Oct	$\lambda_b = 20$
Jun - Jul	$\lambda_v = 30$
Dic	$\lambda_d = 40$
Distribución	Poisson, $t = 1$ día

$$P_b(X = 25) = \frac{20^{25} e^{-20}}{25!} = \boxed{0.04458765} \tag{38}$$

$$P_v(X = 25) = \frac{30^{25} e^{-30}}{25!} = \boxed{0.05111534} \tag{39}$$

$$P_d(X = 25) = \frac{40^{25} e^{-40}}{25!} = \boxed{0.003083719} \tag{40}$$

Los resultados en (38), (39) y (40) se obtuvieron con los comandos de la Figura 28. Dichos resultados muestran que **la temporada de verano presenta la mayor probabilidad de obtener 25 llamadas, con una probabilibidad de 0.05111534**, ya que las demás temporadas presentaron menor probabilidad: la temporada de diciembre tiene una media de 40, por lo que obtener 25 llamadas se alejaba bastante de la media a comparación de a temporada de verano con una media más cercana (30); la temporada baja y la de verano tienen medias de 20 y 30, por lo que ambas se encontraban a 5 llamadas de 25, pero en verano acabó teniendo ligeramente mayor probabilidad que la baja debido a que la curva exponencial de verano va subiendo al nivel de 25, y la curva exponencial de la temporada baja va bajando al nivel de 25 llamadas como se ve en la Figura 26.

```
# 5.3
dpois(25, lambda=20)
dpois(25, lambda=30)
dpois(25, lambda=40)
```

Figure 28: comandos para 5.3

5.4

¿En cuál temporada se tiene más variación en el número de llamadas recibidas al día? Justifique su respuesta.

Solución

La variación del número de llamadas al día se puede expresar con la desviación estándar, que es:

$$Std(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\lambda} \tag{41}$$

Y para cada temporada:

$$Std_b(X) = \sqrt{\lambda_b} = \sqrt{20} = \boxed{4.472136} \tag{42}$$

$$Std_v(X) = \sqrt{\lambda_v} = \sqrt{30} = \boxed{5.477226} \tag{43}$$

$$Std_d(X) = \sqrt{\lambda_d} = \sqrt{40} = \boxed{6.324555} \tag{44}$$

Para dar una idea específica de variación, se calcula el coeficiente de variación para cada temporada como:

$$CV_b = \frac{Std_b(X)}{E_b(X)} = \frac{4.472136}{20} = \boxed{0.2236068} \approx 22\% \tag{45}$$

$$CV_v = \frac{Std_v(X)}{E_v(X)} = \frac{5.477226}{30} = \boxed{0.1714286} \approx 17\% \tag{46}$$

$$CV_d = \frac{Std_d(X)}{E_d(X)} = \frac{6.324555}{40} = \boxed{0.1581139} \approx 16\% \tag{47}$$

Por lo anterior, se concluye que **la temporada con mayor variación en llamadas es la temporada baja, con un 22% de variación respecto a su media o valor esperado**. Si se analizara simplemente la desviación estándar, la temporada con mayor variación hubiera parecido ser la de diciembre por tener la mayor desviación estándar. Es cierto que la desviación estándar da una idea de variabilidad respecto a la media, pero para tener un parámetro comparable es más acertado usar el coefficiente de variabilidad, para que se tome en cuenta la media y se vea cuál temporada tiene más porcentaje de su media como variación en los datos, por lo que concluímos con base en los coefficientes de variabilidad: en tempoarada baja, las llamadas pueden variar hasta un 22% de la media.

5.5

En que temporada existe la mayor probabilidad de recibir entre 25 y 35 llamadas al día. Justifique su respuesta.

Solución

Para obtener la probabilidad de un intervalo de llamadas, se tiene que calcular la probabilidad acumulada hasta el número más grande, en este caso 35, y restarle la probabilidad acumulada hasta el número más pequeño, en este caso 25.

$$P_i(25 \leq X \leq 35) = \sum_{x=25}^{x=35} \frac{\lambda_i^x e^{-\lambda_i}}{x!} \text{ donde i = b,v,d.} \tag{48}$$

Por lo tanto, para cada temporada:

$$P_b(25 \leq X \leq 35) = \sum_{x=25}^{x=35} \frac{20^x e^{-20}}{x!} = \boxed{0.1113813} \tag{49}$$

$$P_v(25 \leq X \leq 35) = \sum_{x=25}^{x=35} \frac{30^x e^{-30}}{x!} = \boxed{0.6342592} \tag{50}$$

$$P_d(25 \leq X \leq 35) = \sum_{x=25}^{x=35} \frac{40^x e^{-40}}{x!} = \boxed{0.2348478} \tag{51}$$

Los resultados mostrados en (49), (50) y (51) se obtuvieron con los siguientes comandos en la Figura 29. Con los mismos se puede concluir que **la temporada con mayor probabilidad de recibir entre 25 y 35 llamadas es la temporada de verano**. Esto porque la media de la temporada de verano es 30, y si se retoma su gráfica de la Figura 26, básicamente se está sumando las probabilidades que están a 5 llamadas de la media (30) hacia la izquierda y derecha, por lo que esta suma es la suma de las probabilidades alrededor de la media, las cuales son las más elevadas por su cercanía a la media. En las otras dos temporadas el intervalo de 25 a 35 está después de la media (para la temporada baja) o antes de la media (para diciembre), por lo que su sumatoria es menor.

```r
# 5.5
ppois(35, lambda=20) - ppois(25, lambda=20)
ppois(35, lambda=30) - ppois(25, lambda=30)
ppois(35, lambda=40) - ppois(25, lambda=40)
```

Figure 29: comandos para 5.5

5.6

En que temporada existe la menor probabilidad de recibir 25 llamadas. Justifique su respuesta.

Solución

Si se retoma la pregunta 5.3, los cálculos son los mismos. Se debe calcular la probabilidad de obtener 25 llamadas al día para cada temporada: baja (b), verano (v) y diciembre (d) como:

$$P_b(X = 25) = \frac{20^{25} e^{-20}}{25!} = \boxed{0.04458765} \tag{52}$$

$$P_v(X = 25) = \frac{30^{25}e^{-30}}{25!} = \boxed{0.05111534} \tag{53}$$

$$P_d(X = 25) = \frac{40^{25}e^{-40}}{25!} = \boxed{0.003083719} \tag{54}$$

Por lo anterior, se concluye que **la temporada de diciembre tiene menor probabilidad de recibir 25 llamadas, con una probabilidad de 0.003083719**, que resulta ser la menor probabilidad de las tres calculadas. Esto a raíz de que la temporada cuya media está más alejada de 25 es la de diciembre (40), ya que en promedio se esperan más llamadas que 25, cuando en las otras temporadas se tiene una media más cercana a este número (20 y 30), por lo que su probabilidad es más grande.