4 Pregunta 4

En la compañía de servicio técnico La PC express, solucionan fallas técnicas de computadoras, laptops y celulares que no tomen mucho tiempo. Así que las órdenes de servicios se califican como completadas o no completadas, al final del día. Cada técnico tiene una eficacia diferente para lograr reparar los dispositivos electrónicos. El Técnico 1 logra completar exitosamente 45 de 50 reparaciones. El técnico 2 logra reparar exitosamente 29 de 35 reparaciones y el técnico 3 logra reparar exitosamente 31 de 40 reparaciones. Al día se le asignan 12 reparaciones a cada técnico. Conteste las siguientes preguntas, y para todos los casos escriba las expresiones a calcular, los comandos ejecutados y sus resultados.

4.1

Grafique, para cada técnico, la probabilidad de acabar exitosamente de 1 a 12 reparaciones al día. Explique la diferencia entre las gráficas.

Solución

Podemos decir que

Reparaciones	completadas / no completadas
Técnico 1	completadas = 45/50 = 0.9
Técnico 2	completadas = 29/35 = 0.8285714
Técnico 3	completadas = 31/40 = 0.775
N de experimentos	12
Distribución	Binomial

Por lo que para graficar, para cada técnico, la probabilidad de acabar exitosamente de 1 a 12 reparaciones al día, significaría calcular las siguientes expresiones:

Sabemos que la probabilidad de reparar x reparaciones existosamente es

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x q^{n-x} \tag{9}$$

si sustituimos los datos sabemos que para cada técnico habría que graficar lo siguiente:

$$P(X = x) = \binom{12}{x} p^x q^{12-x} = \frac{12!}{(12-x)!x!} p^x q^{12-x} \text{ donde } x = 1,2,3,...,12 \tag{10}$$

Para graficar los cálculos anteriores se utilizaron los siguientes comandos que se muestran en la Figura 19. Los resultados de dichos comandos se muestran en la Figura 20. La diferencia entre las gráficas de los 3 técnicos se observa en la posición de la elevación más grande de cada gráfico, ya que el punto más alto de cada imagen se encuentra alrededor del valor $n \times p$, donde p es la probabilidad de las reparaciones con éxito que se calculó como éxitos/total desde la primer tabla. Así, el pico de las gráficas se encuentra alrededor del valor $n \times p$, ya que ésta es su media o valor esperado, que es 10.8, 9.942857 y 9.3 para los técnicos 1, 2 y 3. Como la probabilidad de éxito más grande de todos los técnicos es la del técnico 1 (0.9), su 'campana' se encuentra en el punto más alejado de los tres ejes x (10.8), por lo que es la gráfica más sesgada hacia el lado derecho, pues su probabilidad es bastante alta y por lo mismo el número de éxitos es mayor que en los demás técnicos. La gráfica del técnico 3 es la más cercana al centro del eje x, con un valor de $n \times p = 9.3$, mientras que la elevación del técnico 2 y 1 está en 9.94 y 10.8, lo que también nos dice que el técnico 3 tiene la menor probabilidad de éxito en reparaciones, confirmado con $p = 0.775$. En pocas palabras, la diferencia de las gráficas es que su elevación se encuentra en diferentes puntos, los cuales son el resultado de la media $n \times p$, donde p es la probabilidad de éxito en reparaciones de cada uno de los técnicos.

```r
# 4.1
# TECHNICIAN 1
p_success = 45/50
aux = rep(0,24) # repeat
aux[seq(2,24,2)] = dbinom(c(1:12), size=12, prob=p_success)
plot(x=c(1:12), y=dbinom(c(1:12), size=12, prob=p_success),
     ylim=c(0,1), xlim=c(0,13), xlab="x", ylab="probability of x successes",
     main="Probability Function Binomial, n=12, technician 1")
lines(x=rep(1:12, each=2), y=aux, type="h", lty=2, col="blue")

# TECHNICIAN 2
p_success = 29/35
aux = rep(0,24) # repeat
aux[seq(2,24,2)] = dbinom(c(1:12), size=12, prob=p_success)
plot(x=c(1:12), y=dbinom(c(1:12), size=12, prob=p_success),
     ylim=c(0,1), xlim=c(0,13), xlab="x", ylab="probability of x successes",
     main="Probability Function Binomial, n=12, technician 2")
lines(x=rep(1:12, each=2), y=aux, type="h", lty=2, col="blue")

# TECHNICIAN 3
p_success = 31/40
aux = rep(0,24) # repeat
aux[seq(2,24,2)] = dbinom(c(1:12), size=12, prob=p_success)
plot(x=c(1:12), y=dbinom(c(1:12), size=12, prob=p_success),
     ylim=c(0,1), xlim=c(0,13), xlab="x", ylab="probability of x successes",
     main="Probability Function Binomial, n=12, technician 3")
lines(x=rep(1:12, each=2), y=aux, type="h", lty=2, col="blue")
```

Figure 19: comandos: gráfica de distribución de probabilidad binomial, x=[1,12]

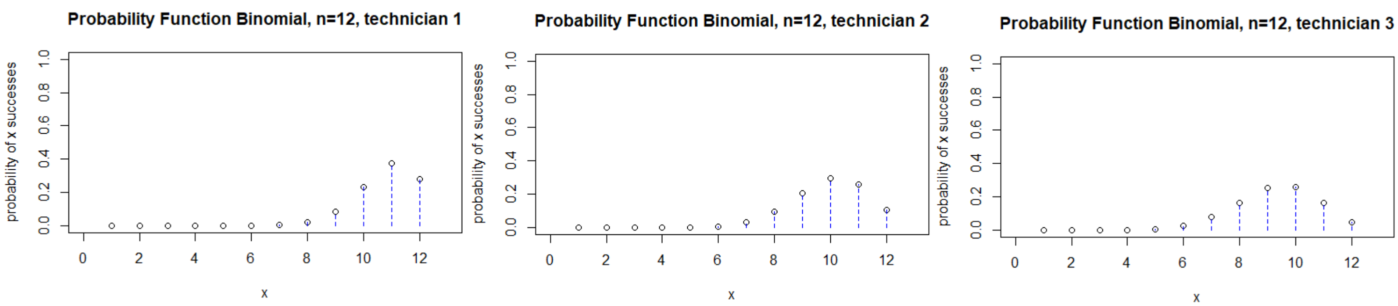

Figure 20: resultados: gráfica de distribución de probabilidad binomial, x=[1,12]

4.2

Diga cuántos servicios completados exitosamente se espera de cada técnico al final del día.

Solución

Se sabe que:

Técnico 1	$p_1 = 45/50 = 0.9$
Técnico 2	$p_2 = 29/35 = 0.8285714$
Técnico 3	$p_3 = 31/40 = 0.775$
n de experimentos	12

Entonces, podemos calcular el valor esperado o media de servicios completados exitosamente para cada técnico como:

$$E_i(X) = \sum_{x=0}^{n} x \cdot \binom{n}{x} \cdot p_i^x \cdot q_i^{n-x} = n \cdot p_i, \text{ donde i} = 1,\ 2,\ 3 \tag{11}$$

Así,

$$E_1(X) = \sum_{x=0}^{12} x \cdot \binom{12}{x} \cdot 0.9^x \cdot 0.1^{12-x} = 12 \cdot 0.9 = \boxed{10.8} \tag{12}$$

$$E_2(X) = \sum_{x=0}^{12} x \cdot \binom{12}{x} \cdot 0.8285714^x \cdot 0.1714286^{12-x} = 12 \cdot 0.8285714 = \boxed{9.942857} \tag{13}$$

$$E_3(X) = \sum_{x=0}^{12} x \cdot \binom{12}{x} \cdot 0.775^x \cdot 0.225^{12-x} = 12 \cdot 0.775 = \boxed{9.3} \tag{14}$$

Donde $E_1(X)$, $E_2(X)$ y $E_3(X)$ corresponden al valor esperado de servicios exitosos de cada técnico al final del día.

4.3

Diga de cual técnico se espera la mayor variación en el número de servicios completados exitosamente en un día. Justifique su respuesta.

Solución

Se sabe que la desviación estándar es la variación del número de servicios exitosos respecto a la media, se puede encontrar la variación de cada técnico utilizando:

$$Std(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \tag{15}$$

Entonces, se obtienen para cada técnico:

$$Std_1(X) = \sqrt{n \cdot p_1 \cdot (1-p_1)} = \sqrt{12 \cdot 0.9 \cdot 0.1} = \boxed{1.03923} \tag{16}$$

$$Std_2(X) = \sqrt{n \cdot p_2 \cdot (1-p_2)} = \sqrt{12 \cdot 0.8285714 \cdot 0.1714286} = \boxed{1.305561} \tag{17}$$

$$Std_3(X) = \sqrt{n \cdot p_3 \cdot (1-p_3)} = \sqrt{12 \cdot 0.775 \cdot 0.225} = \boxed{1.446548} \tag{18}$$

Para dar una idea específica de variación, se calcula el coefficiente de variación para cada técnico como:

$$CV_1 = \frac{Std_1(X)}{E_1(X)} = \frac{1.03923}{10.8} = \boxed{0.096225} \tag{19}$$

$$CV_2 = \frac{Std_2(X)}{E_2(X)} = \frac{1.305561}{9.942857} = \boxed{0.1313064} \tag{20}$$

$$CV_3 = \frac{Std_3(X)}{E_3(X)} = \frac{1.446548}{9.3} = \boxed{0.1555428} \tag{21}$$

Al comparar únicamente la desviación estándar de los técnicos1, 2 y 3, las cuales fueron 1.04, 1.3 y 1.45, respectivamente, se puede aniticipar que el técnico 3 posee la mayor variabilidad al tener la desviación estándar más grande de los 3 técnicos. La desviación estándar es un indicio de variabilidad ya que acumula las diferencias con la media que presentan los datos, por lo que se anticipa que la mayoría de las cantidades de reparaciones exitosas del técnico 3 pueden variar de la media por 1.45. Sin embargo, la desviación estándar pudo haber dado igual en los tres técnicos, pero como sus medias son diferentes, la devsiación estándar únicamente podría engañar la conclusión. Por ello, se calcula el coefficiente variación que no es más que la proporción que desvación estándar tiene de su correspondiente media. Así, analizando estos coefficientes para los técnicos 1, 2 y 3, obtenemos 9.6%, 13% y 15% de variación, respectivamente. Esto confirma que el **técnico 3 es el que presenta más variación en el número de servicios completados en un día**, pues su coefficiente de variación es el mayor de los tres, con 15%, lo que significa que el número de servicios completados puede variar de su media de 9.3 por un 15% (CV) de esta misma media, o por 1.4 servicios completados (stdev) sumados o restados a la media.

4.4

Encuentre qué técnico tiene la mayor probabilidad de terminar justamente 10 reparaciones exitosamente en un día. Justifique su respuesta.

Solución

Se sabe que la probabilidad de que una variable discreta X tome el valor de x es:

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=\frac{n!}{(n-x)!x!}p^x q^{n-x} \tag{22}$$

Con ello, se calcula la probabilidad de que la variable X (reparaciones exitosas) tome el valor de 10 para los tres técnicos:

$$P_1(X=10)=\binom{12}{10}0.9^{10}0.1^{12-10}=\frac{12!}{(12-10)!10!}0.9^{10}0.1^2=\boxed{0.2301278} \tag{23}$$

$$P_2(X=10)=\binom{12}{10}0.8285714^{10}0.1714286^{12-10}=\frac{12!}{(12-10)!10!}0.8285714^{10}0.1714286^2=\boxed{0.295808} \tag{24}$$

$$P_3(X=10)=\binom{12}{10}0.775^{10}0.225^{12-10}=\frac{12!}{(12-10)!10!}0.775^{10}0.225^2=\boxed{0.2611716} \tag{25}$$

Dichos cálculos se obtuvieron utilizando los siguientes comandos mostrados en la Figura 21.

```
# 4.4
p_success = 45/50
p1 = dbinom(10, size=12, prob=p_success)
p1
p_success = 29/35
p2 = dbinom(10, size=12, prob=p_success)
p2
p_success = 31/40
p3 = dbinom(10, size=12, prob=p_success)
p3
```

Figure 21: comandos para 4.4

Con los resultados obtenidos, se concluye que el **técnico 2 presenta la mayor probabilidad de que complete 10 reparaciones exitosas en un día**. Esto tiene fuerte relación con la media o cantidad de reparaciones esperadas de cada técnico, calculadad previamente: 10.8 (11), 9.94 (10) y 9.3 (9), respectivamente, donde el técnico 2 presenta una media de casi exactamente 10 reparaciones en un día, lo que hace que sea más probable que al final del día él sea el que hizo 10 reparaciones exactamente.

4.5

Encuentre que técnico tiene la mayor probabilidad de terminar menos de 7 reparaciones al día. Justifique su respuesta.

Solución

Se sabe que la probabilidad de que una variable discreta X tome el valor de x es:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x q^{n-x} \tag{26}$$

Así, para conocer la probabilidad de cada técnico de terminar menos de 7 reparaciones al día, se tendría que calcular:

$$P(X < 7) = \sum_{x=0}^{x=6} \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x q^{n-x} = P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6) \tag{27}$$

Entonces, para todos los técnicos:

$$P_1(X < 7) = \sum_{x=0}^{x=6} \frac{12!}{(12-x)!x!} 0.9^x 0.1^{12-x} = \boxed{0.0005412318} \tag{28}$$

$$P_2(X < 7) = \sum_{x=0}^{x=6} \frac{12!}{(12-x)!x!} 0.8285714^x 0.8285714^{12-x} = \boxed{0.00912519} \tag{29}$$

$$P_3(X < 7) = \sum_{x=0}^{x=6} \frac{12!}{(12-x)!x!} 0.775^x 0.225^{12-x} = \boxed{0.03377862} \tag{30}$$

Los resultados previos se obtuvieron a través de los siguientes comandos mostrados en la Figura 22.

```
# 4.5
x_value = 6
num_of_trials_in_event = 12
p_success = 45/50
p1 = pbinom(x_value, size=num_of_trials_in_event, prob=p_success) # F(X<=x)
p1
p_success = 29/35
p2 = pbinom(x_value, size=num_of_trials_in_event, prob=p_success) # F(X<=x)
p2
p_success = 31/40
p3 = pbinom(x_value, size=num_of_trials_in_event, prob=p_success) # F(X<=x)
p3
```

Figure 22: comandos para 4.5

A raíz de los resultados de las ecuaciones (28), (29) y (30), se concluye que **el técnico con la mayor probabilidad de terminar menos de 7 reparaciones al día es el técnico 3 con 0.03377862 de probabilidad**, lo cual tiene relación con lo visto desde sus gráficas de función de probabilidad, donde el técnico 3 tenía la gráfica con la elevación en el punto más pequeño del eje x de los tres gráficos, cerca de la media (9.3), la cual también fue la menor de los 3 técnicos. Esto quiere decir que el técnico 3 en promedio repara menos equipos que los demás técnicos y por ello la probabilidad de terminar menos de 7 reparaciones es mayor en el técnico 3 que en otros que tienden a reparar más equipos en un día.

4.6

Si entra a trabajar un nuevo técnico y se espera que en promedio logre terminar 7 reparaciones exitosamente al día, grafique la probabilidad del nuevo técnico de acabar exitosamente 1 a 12 reparaciones al día. Explique la gráfica.

Solución

Si se retoma la ecuación para definir la media esperada,

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \cdot \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} = n \cdot p, \tag{31}$$

Y se sabe el valor de E(X) para el nuevo técnico (7) y el valor de n, se puede despejar para encontrar su probabilidad de reparaciones exitosas p,

$$p = \frac{E(X)}{n} = \frac{7}{12} = 0.5833333, \tag{32}$$

Entonces se puede graficar la probabilidad de que el nuevo técnico repare exitosamente de 1 a 12 reparaciones al día, con los siguientes comandos mostrados en la Figura 23.

```
# 4.6
# NEW TECHNICIAN
p_success = 7/12
aux = rep(0,24) # repeat
aux[seq(2,24,2)] = dbinom(c(1:12), size=12, prob=p_success)
plot(x=c(1:12), y=dbinom(c(1:12), size=12, prob=p_success),
     ylim=c(0,1), xlim=c(0,13), xlab="x", ylab="probability of x successes",
     main="Probability Function Binomial, n=12, technician 4")
lines(x=rep(1:12, each=2), y=aux, type="h", lty=2, col="blue")
```

Figure 23: comandos para 4.6

Mismos comandos que generan la gráfica de la Figura 24. Dicha gráfica muestra que el técnico nuevo tiene una función de probabilidad más centrada en un eje x que va de 1 a 12, lo cual significa que su promedio de reparación es menor que el de los demás técnicos cuyas gráficas presentaban la elevación sobre valores de x más a la derecha, ya que su media o valor esperado es 7. Más específicamente, la elevación más pronunciada se encuentra alrededor del valor esperado, que en este caso es 7, y de ahí disminuye conforme se aleja del promedio, ya sea hacia la izquierda o derecha.

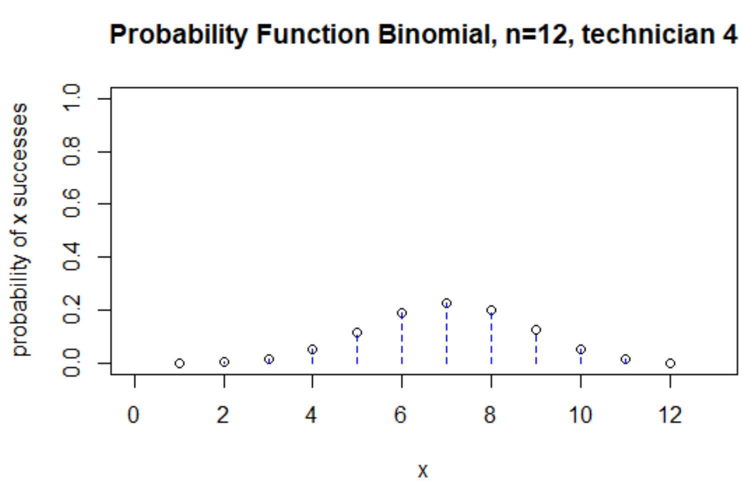

Figure 24: gráfica para 4.5