Technische Universität Berlin **WiSe 2023/24**
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 5–2, Dorothea Kiefer-Hoeft
Prof. Dr. Max Klimm
Dr. Frank Lutz, Svenja M. Griesbach, Martin Knaack

9. Programmieraufgabe Computerorientierte Mathematik I

Abgabe: 19.01.2024 über den Comajudge bis 17 Uhr

Bitte beachten Sie: Die Herausgabe oder der Austausch von Code (auch von Teilen) zu den Programmieraufgaben führt für *alle* Beteiligten zum *sofortigen Scheinverlust*. Die Programmieraufgaben müssen von allen Teilnehmenden alleine bearbeitet werden. Auch Programme aus dem Internet dürfen nicht einfach kopiert werden.

1 Matrizen

Eine Matrix $A = (a_{i,j}) \in R^{m \times r}$ besteht aus m Zeilen und r Spalten rechteckig angeordneter Einträge $a_{i,j} \in R$ (*Koeffizienten*), die einer algebraischen Struktur $(R, \oplus, \odot)$ entstammen. Gewöhnlicherweise ist R ein Körper, zum Beispiel der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit herkömmlicher Addition und Multiplikation. Es können jedoch auch allgemeinere Strukturen (etwa Ringe) zugrunde liegen, insofern diese eine adäquate Form der Addition und Multiplikation gestatten.

Für zwei Matrizen $A \in R^{m \times r}$ und $B \in R^{r \times n}$ ist das Matrixprodukt $A \odot B = C = (c_{i,j}) \in R^{m \times n}$ definiert durch

$$c_{i,j} := a_{i,1} \odot b_{1,j} \oplus \ldots \oplus a_{i,r} \odot b_{r,j} \in R.$$

Auf den reellen Zahlen $R = (\mathbb{R}, +, \cdot)$ entspricht dies der herkömmlichen Matrixprodukt mit $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{r} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$.

2 Problembeschreibung

In dieser Aufgabe soll das Matrixprodukt $A \odot B$ bezüglich einer Min-Plus-Algebra berechnet werden. Dieses ist dem gewöhnlichen Matrixprodukt prinzipiell sehr ähnlich, es wird lediglich $+$ durch min und $\cdot$ durch $+$ ersetzt:

Für Matrizen $A \in \mathbb{Z}^{m \times r}$ und $B \in \mathbb{Z}^{r \times n}$ ergibt sich der Eintrag $c_{i,j}$ in Zeile i und Spalte j von $C = A \odot B$ mit *dieser* Addition und Multiplikation also durch

$$c_{i,j} \quad = \min_{k \in \{1,\ldots,r\}} \{a_{i,k} + b_{k,j}\}.$$

Durch diese Festlegung erhalten wir beispielsweise

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

und insbesondere liefert die Berechnung des Eintrags in Zeile 1 und Spalte 3 dann

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \min\{4+9, 3+1\} = \min\{13, 4\} = 4.$$

3 Aufgabenstellung und Anforderungen

Schreiben Sie die beiden Funktionen `multiply(A,B)` und `power(A,m)`, welche für korrekte Eingaben, d.h. ganzzahlige Matrizen A und B mit zueinander *passender* Größe, das oben beschriebene Matrixprodukt $A \odot B$ bzw. die m-te Potenz $A^m = \underbrace{A \odot \cdots \odot A}_{m \text{ Faktoren}}$ von A mit $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ berechnet.

3.1 Eingabe

Alle Matrizen der Eingabe werden jeweils als String übergeben. Dabei stehen die Zeilen der Matrizen hintereinander und sind jeweils durch ein Komma und ein Leerzeichen voneinander getrennt. Die ganzzahligen Einträge einer Zeile sind jeweils durch Leerzeichen getrennt, siehe Beispielaufrufe.

3.2 Ausgabe

Die Funktionen `multiply(A,B)` und `power(A,m)` sollen die jeweils berechnete Matrix in der in Abschnitt 3.1 beschriebenen Form als String zurückgeben.

3.3 Beispielaufrufe

```
>>> A = '4 3, 1 7'
>>> B = '2 5 9, 8 6 1'
>>> C = multiply(A, B)
>>> C
'6 9 4, 3 6 8'
>>> D = power(A, 3)
>>> D
'8 7, 5 8'
```

4 Tipps und Anmerkungen

- Achten Sie darauf, dass Ihre Ausgabe der in Abschnitt 3.1 beschriebenen Form entspricht.

- Zu Ihrer Erinnerung: Sie müssen eine der Programmieraufgaben PA07, PA08 oder PA09 bei einem Tutor oder einer Tutorin in den Rechnerbetreuungen vorstellen. Die vorläufige Deadline ist der 26.01.23. Der Code den Sie vorstellen sollte kommentiert sein.