Technische Universität Berlin **WiSe 2023/24**
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 5–2, Dorothea Kiefer-Hoeft
Prof. Dr. Max Klimm
Dr. Frank Lutz, Svenja M. Griesbach, Martin Knaack

10. Programmieraufgabe Computerorientierte Mathematik I

Abgabe: 26.01.2024 über den Comajudge bis 17 Uhr

Bitte beachten Sie: Die Herausgabe oder der Austausch von Code (auch von Teilen) zu den Programmieraufgaben führt für *alle* Beteiligten zum *sofortigen Scheinverlust.* Die Programmieraufgaben müssen von allen Teilnehmenden alleine bearbeitet werden. Auch Programme aus dem Internet dürfen nicht einfach kopiert werden.

1 Problembeschreibung

In dieser Aufgabe soll mit Hilfe der LU-Zerlegung einer gegebenen (invertierbaren) Matrix $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ eine Menge von k linearen Gleichungssystemen $A \cdot x_i = b_i, i \in \{1,\ldots,k\}$ mit $b_i, x_i \in \mathbb{Z}^{n\times 1}$ gelöst werden.

Dafür soll zunächst eine Funktion `LU_decomposition(A)` implementiert werden, welche die LU-Zerlegung der Matrix A bestimmt, d.h. es sollen zwei Matrizen $L, U \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ berechnet werden, sodass für L und U und für alle $i, j \in \{1,\ldots n\}$ mit $j < i$ folgendes gilt:

1. $A = LU$,
2. $L_{ii} = 1$, $L_{ji} = 0$,
3. $U_{ii} \neq 0$, $U_{ij} = 0$.

Es darf hierbei vorausgesetzt werden, dass die LU-Zerlegung existiert und eindeutig ist sowie dass unter den Voraussetzungen automatisch $L, U \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ gilt.

Anschließend soll eine weitere Funktion `solve_LGS(A,B)` implementiert werden, die für $B \in \mathbb{Z}^{n\times k}$ die linearen Gleichungssysteme $A \cdot x_i = b_i, i \in \{1,\ldots,k\}$ löst, wobei b_i der i-ten Spalte der Matrix B entspricht.

2 Aufgabenstellung und Anforderungen

1. Schreiben Sie eine Funktion

   `LU_decomposition(A)`,

   die die LU-Zerlegung einer (invertierbaren) Matrix $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ bestimmt und die Zerlegung in der in Abschnitt 2.2 beschriebenen Form zurückgibt.

2. Schreiben Sie eine Funktion

   `solve_LGS(A,B)`,

   die die linearen Gleichungssysteme $A \cdot x_i = b_i, i \in \{1, \dots, k\}$ löst, wobei b_i der i-ten Spalte der Matrix B entspricht. Die Lösungen sollen als Matrix X in der in Abschnitt 2.2 beschriebenen Form zurückgegeben werden.

2.1 Eingabe

Wie in der Programmieraufgabe PA08 werden die Matrizen A und B als String übergeben. Dabei stehen die Zeilen der Matrizen hintereinander und sind jeweils durch ein Komma und ein Leerzeichen voneinander getrennt. Die ganzzahligen Einträge einer Zeile sind jeweils durch Leerzeichen getrennt.

2.2 Ausgabe

Die resultierenden Matrizen L und U sollen unter Vernachlässigung der Diagonalen von L in eine Matrix geschrieben werden. Zum Beispiel werden

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 17 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

zu

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -7 \\ -2 & 1 & -1 \\ 17 & 3 & -9 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix soll im Eingabeformat ausgegeben werden.

Die Lösungen der linearen Gleichungssysteme $x_i, i \in \{1, \dots, k\}$ sollen in einer Matrix $X \in \mathbb{Z}^{n \times k}$ zusammengefasst werden, sodass x_i der i-ten Spalte der Matrix X entspricht. Die Matrix X soll im Eingabeformat ausgegeben werden.

3 Beispielaufrufe

```
>>> LU_decomposition('2 4 -7, -4 -7 13, 34 71 -131')
'2 4 -7, -2 1 -1, 17 3 -9'
>>> solve_LGS('2 4 -7, -4 -7 13, 34 71 -131','-1 7, 2 -18, -26 116')
'1 10, 1 -5, 1 -1'

>>> LU_decomposition('5 -3, 35 -29')
'5 -3, 7 -8'
solve_LGS('5 -3, 35 -29','13 15 -8, 99 25 -64')
'2 9 -1, -1 10 1'

>>> LU_decomposition('17 4, -17 42')
'17 4, -1 46'
>>> solve_LGS('17 4, -17 42','81, -127')
'5, -1'
```

4 Hinweise

- Zu Ihrer Erinnerung: Sie müssen eine der Programmieraufgaben PA10, PA11 oder PA12 bei einem Tutor oder einer Tutorin in den Rechnerbetreuungen vorstellen. Die vorläufige Deadline ist der 16.02.23. Der Code den Sie vorstellen sollte kommentiert sein.