

## 1. Programmieraufgabe Computerorientierte Mathematik I

Abgabe: 10.11.2022 über den Comajudge bis 17 Uhr

### 1 Problembeschreibung

#### 1.1 Polynommultiplikation und Polynomaddition

In der Schule haben Sie bereits Polynome kennengelernt. Ein Polynom vom Grad  $n$  ist eine Funktion  $f$ , die sich in der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

schreiben lässt. Man nennt  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  die *Koeffizienten* des Polynoms. Wir betrachten in dieser Aufgabe Polynome, deren Koeffizienten ganze Zahlen sind. Beachten Sie, dass das die 0 mit einschließt! Wir schreiben hierfür  $F \in \mathbb{Z}[x]$ .

Es seien nun zwei Polynome  $f, g \in \mathbb{Z}[x]$  vom Grad 2 gegeben, mit

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \text{und} \quad g(x) = b_2 x^2 + b_1 x + b_0.$$

Für das Produkt  $f \cdot g$  von  $f$  und  $g$  gilt

$$(f \cdot g)(x) = c_4 x^4 + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0,$$

mit

$$c_4 = a_2 b_2, \quad c_3 = a_2 b_1 + a_1 b_2, \quad c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2, \quad c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1, \quad c_0 = a_0 b_0.$$

Beachten Sie, dass für jeden Summanden eines Koeffizienten  $c_k$  die Summe der Indizes seiner Faktoren wieder  $k$  ergibt.

Es sei nun ein weiteres Polynom  $h \in \mathbb{Z}[x]$  vom Grad 5 mit  $h(x) = x^5$  gegeben. Dann gilt

$$(f \cdot g + h)(x) = x^5 + c_4 x^4 + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0.$$

Eine Teilaufgabe dieser Programmieraufgabe ist es, die Koeffizienten von  $f \cdot g + h$  zu berechnen.

## 1.2 Descartes' Vorzeichenregel

Ein Polynom kann sowohl reelle, als auch komplexe Nullstellen haben. Descartes' Vorzeichenregel ermöglicht zwei Aussagen. Erstens lässt sich durch sie eine obere Schranke  $C$  für die Anzahl positiver reeller Nullstellen eines Polynoms ermitteln. Zweitens gibt diese obere Schranke  $C$  die Anzahl positiver reeller Nullstellen des Polynoms bis auf ein Vielfaches von 2 genau an. Wenn die Schranke  $C$  also z.B. 5 ist, so ist die Anzahl der positiven reellen Nullstellen des zugrunde liegenden Polynoms 5, 3 oder 1.

Es sei wiederum ein Polynom  $f$  gegeben. (Die Koeffizienten von  $f$  können reell sein, auch wenn wir uns in der Programmieraufgabe auf ganzzahlige Koeffizienten einschränken). Dann ist  $C$  gegeben durch die Anzahl der Vorzeichenwechsel von Koeffizient zu Koeffizient. Hierbei gehen nur Koeffizienten ungleich 0 in die Berechnung ein. Wir machen dies an einem Beispiel klar. Es sei

$$f(x) = x^5 + 4x^4 - 3x^2 + x - 6.$$

Die Folge der Koeffizienten ungleich 0 ist dann

$$+1 \quad +4 \quad -3 \quad +1 \quad -6.$$

Das Vorzeichen wechselt dreimal. Damit ist die Anzahl positiver reeller Nullstellen von  $f$  entweder 3 oder 1. Insbesondere ist die Anzahl positiver reeller Nullstellen ungerade. Das Polynom

$$g(x) = x^5 + 4x^4 - 3x^2 + x$$

hat hingegen eine gerade Anzahl positiver reeller Nullstellen, da die Anzahl der Vorzeichenwechsel gerade ist.

## 2 Aufgabenstellung und Anforderungen

Schreiben Sie eine Funktion

`roots(a1,a2,a3,b1,b2,b3),`

welche mittels Descartes' Regel ermittelt, ob die Anzahl positiver reeller Nullstellen des Polynoms

$$f \cdot g + h$$

gerade oder ungerade ist. Hierbei seien

$$f(x) = a_1x^2 + a_2x + a_3, \quad g(x) = b_1x^2 + b_2x + b_3 \quad \text{und} \quad h(x) = x^5$$

mit den ganzzahligen Koeffizienten  $a_1 = \mathbf{a1}, a_2 = \mathbf{a2}, a_3 = \mathbf{a3}, b_1 = \mathbf{b1}, b_2 = \mathbf{b2}, b_3 = \mathbf{b3}$ .

Der Rückgabewert der Funktion soll, je nachdem, ob die Anzahl positiver reeller Nullstellen gerade oder ungerade ist, einer der beiden folgenden Strings sein:

Das Polynom hat eine gerade Anzahl von positiven reellen Nullstellen.

Das Polynom hat eine ungerade Anzahl von positiven reellen Nullstellen.

Beachten Sie hierbei, dass 0 als gerade Anzahl gilt.

### Hinweise:

- Sie dürfen alle `python3`-Befehle benutzen, die ohne das Importieren zusätzlicher Pakete in `python3` zur Verfügung stehen. Zusätzliche Module wie z. B. `numpy` können vom Comajudge in der Regel nicht importiert werden.
- Achten Sie darauf, dass die Ausgabestrings keine Rechtschreibfehler, zusätzliche Leerzeichen oder ähnliches enthalten. Sie können die Strings aus der Datei `outputs.txt` kopieren.

### 2.1 Beispielaufrufe

```
1 $ python3 -i PA01.py
2 >>> roots(1,-2,-1,2,1,2)
3 'Das Polynom hat eine ungerade Anzahl von positiven reellen
  Nullstellen.'
4 >>> roots(0,0,0,0,0,0)
5 'Das Polynom hat eine gerade Anzahl von positiven reellen
  Nullstellen.'
```