

Долни граници

Тодор Дуков

Какво са долни граници?

Дойде времето за по-депресиращите резултати в курса. До сега единственото, което правихме, беше да показваме, че за задача \mathbf{X} може да се напише алгоритъм със времева сложност $O(f)$ или $\Theta(f)$ за някое $f \in \mathcal{F}$. Доста естествено изниква следния въпрос:

Възможно ли е да съществува по-бърз алгоритъм, който решава задачата \mathbf{X} ?

Ясно е, че е неприемлив отговор от сорта на

Не мога да измисля такъв алгоритъм, следователно такъв алгоритъм не съществува.

В тази тема ще се опитаме да отговорим в някакъв смисъл положително на въпроси от този тип. Преди това нека въведем няколко дефиниции.

Изчислителна задача ще наричаме всяко множество от наредени двойки \mathbf{X} , като:

- $\text{Dom}(\mathbf{X})$ ще наричаме **вход**;
- $\text{Rng}(\mathbf{X})$ ще наричаме **изход**.

За пример можем да вземем изчислителната задача за сортиране:

Вход: Целочислен масив $A[1 \dots n]$.

Изход: Пермутация $A'[1 \dots n]$ на $A[1 \dots n]$, за която $A'[1] \leq A'[2] \leq \dots \leq A'[n]$.

Ще казваме, че **алгоритъм AlgX решава задачата \mathbf{X}** , ако за всяко $x \in \text{Dom}(\mathbf{X})$ е изпълнено $\langle x, \text{AlgX}(x) \rangle \in \mathbf{X}$. Нека \mathbf{X} е изчислителна задача и нека $f \in \mathcal{F}$. Тогава:

- Казваме, че f е **долна граница** за \mathbf{X} , ако всеки алгоритъм, който решава \mathbf{X} , работи за време (или брой операции от конкретен вид) поне f^* .
- Казваме, че $\Omega(f)$ е **долна граница** за \mathbf{X} , ако всеки алгоритъм, който решава \mathbf{X} , работи за време (или брой операции от конкретен вид) $\Omega(f)$.

Техники за изследване на долни граници

Най-често се използват следните техники, които показват че задача \mathbf{X} има долна граница за време f (или $\Omega(f)$):

- директни разсъждения за конкретния пример – тази техника обикновено се използва в малки задачи, където човек за сравнително малко време може да направи пълен анализ. Разбира се, тази техника се използва и при по-обобщените примери, но не толкова често.
- дърво на взимане на решения – тази техника се използва в задачи, където за решаването им се изисква задаването на редица въпроси, чиите отговор ни дава все повече и повече информация. Можем да си мислим за запитванията заедно с информацията, която носят, като едно дърво. Всеки въпрос ще разклонява дървото, докато накрая имаме цялата ни нужна информация в листата, и не трябва да задаваме повече въпроси. Тогава долната граница ще бъде височината на дървото.
- аргументация чрез противник – тази техника е трудна да се обясни без да се даде пример. Идеята е, че играем срещу противник, като нашата цел е да разкрием някаква информация, която уж е била предварително фиксирана. Противника обаче си измисля информацията на момента, като целта му е да ни накара да зададем колкото се може повече въпроси и в отговорите му на въпросите да няма противоречия.
- чрез редукция[†] – ако знаем, че можем алгоритмично да сведем задача \mathbf{Y} до задача \mathbf{X} за време по-малко f и \mathbf{Y} има долна граница за време f (или $\Omega(f)$), то тогава второто е изпълнено и за задача \mathbf{X} . В някакъв смисъл тази редукция казва, че задачата \mathbf{X} е поне толкова трудна, колкото задачата \mathbf{Y} .

^{*}Тук се има предвид, че ако $T(n)$ е броят на стъпки (или операции от конкретен вид), за който алгоритъмът завършва при вход с големина n , то $f(n) \leq T(n)$.

[†]Това е може би най-приложимата техника от всички. Тя се използва не само в контекста на сложност. Оказва се, че е много удобно човек да може да говори за това дали една задача е “*по-трудна*” от друга в контекста на разрешимост.

Техниките в действие

Ще започнем със пример за аргументация с противник. Решаваме задачата за максимален елемент – даден ни е като вход целочислен масив $A[1 \dots n]$ и искаме да получим като изход $\max\{A[i] \mid 1 \leq i \leq n\}$. Твърдим, че всеки алгоритъм, който решава задачата, използва поне $n - 1$ сравнения. За целта ще покажем, че във всеки такъв алгоритъм всяко число $A[i]$ участва в някое сравнение. Да допуснем, че има алгоритъм **AlgMax**, за който $A[i]$ не участва в сравнения за някое $1 \leq i \leq n$.

- Ако **AlgMax** връща $A[i]$, то тогава ако сменим $A[i]$ със $A[i] - 1$, **AlgMax** няма да различи по никакъв начин двата входа и ще върне същия резултат, което е абсурд, защото вече трябва да върне нещо друго.
- Ако **AlgMax** връща $A[j]$ за някое $j \neq i$, то тогава ако сменим $A[i]$ със $A[j] + 1$, **AlgMax** няма да различи по никакъв начин двата входа и ще върне същия резултат, което е абсурд, защото вече трябва да върне $A[i]$.

Тогава първия елемент ще участва в поне едно сравнение с някой друг, откъдето сме отметнали 2 елемента с 1 сравнение. Останалите също участват в поне едно сравнение (може и с някой от предните два), откъдето за останалите $n - 2$ елемента използваме още поне $n - 2$ сравнения. Общо стават $n - 2 + 1 = n - 1$ сравнения. Човек лесно може да напише алгоритъм, който използва точно $n - 1$ сравнения.

Нека сега дадем пример за дърво на вземане на решения. Разглеждаме задачата за сортиране. Ще покажем, че всеки сортиращ алгоритъм, който работи на базата на директни сравнения, работи за време $\Omega(n \log(n))$. Нека фиксираме $n \in \mathbb{N}$ и някакъв символ a . Нека \mathcal{T}_n е множеството от всички дървета, за които е изпълнено, че:

- върховете са от вида $(a_i < a_j, P)$, където $1 \leq i, j \leq n$, $P \subseteq S_n^\ddagger$ и $|P| \geq 2$, или са от вида $\sigma \in S_n$;
- коренът е $(a_i < a_j, P)$ за някои $1 \leq i, j \leq n$;
- за всеки връх от вида $(a_i < a_j, P)$, има $1 \leq k_1, k_2, m_1, m_2 \leq n$, за които:
 - лявото му дете е $(a_{k_1} < a_{m_1}, \{\sigma \in P \mid \sigma(i) < \sigma(j)\})$, и
 - дясното му дете е $(a_{k_2} < a_{m_2}, \{\sigma \in P \mid \sigma(i) \not< \sigma(j)\})$;
- всеки връх от вида $\sigma \in S_n$ е листо.

Тогава ако вземем произволен алгоритъм за сортиране **AlgX**, който е базиран на сравнение, при пресмятането на **AlgX**($A[1 \dots n]$), можем да забележим, че траверсираме някое дърво $T \in \mathcal{T}_n$ от корен до листо. В корена се намира първото запитване $a_i < a_j$ (т.е. можем да си мислим, че питаме дали $A[i] < A[j]$), и спрямо отговора на дадено запитване ние се движим наляво или надясно в дървото. Накрая се намираме в листо $\sigma \in S_n$, която задава сортирана пермутация $A'[1 \dots n]$ на $A[1 \dots n]$ така – $A'[i] = A[\sigma(i)]$. Това означава, че за всяко сравнение по време на работа на **AlgX**($A[1 \dots n]$) можем да си мислим, че минаваме през едно ребро в T . В най-лошия случай входа $A[1 \dots n]$ би бил такъв, че да трябва да изминем максимален път от корен до листо т.е. път с дължина $h(T)$. Но T е двоично дърво с $n!$ листа и разклоненост 2, следователно $h(T) \geq \log_2(n!)$. Така в този случай извикването **AlgX**($A[1 \dots n]$) ще използва поне $\log(n!)$ сравнения. Тъй като $\log(n!) \asymp n \log(n)$, получаваме че всеки сортиращ алгоритъм, базиран на сравнения, прави $\Omega(n \log(n))$ сравнения.

Нека сега покажем един пример с редукция. Разглеждаме изчислителната задача **Матрьошки**:

Вход: Масив $T[1 \dots n]$ със елементи от вида (l, w, h) – дължините, широчините, височините на n играчки с форма на правоъгълен паралелепипед, които могат да се вложат една в друга.

Изход: Ред на влагане на играчките, като вътрешната играчка е първа.

Оказва се, че тази задача се решава (на базата на директни сравнения) за време $\Omega(n \log(n))$. Ще покажем това като сведем задачата за сортиране към **Матрьошки**. Нека **AlgM** е алгоритъм, който решава задачата **Матрьошки** със сложност по време $f(n)$. Тогава следният алгоритъм очевидно сортира масива $A[1 \dots n]$:

1. Декларираме нов масив $T[1 \dots n]$.
2. За всяко $1 \leq i \leq n$ инициализираме $T[i]$ със $(A[i], A[i], A[i])$.
3. Извикваме **AlgM**($T[1 \dots n]$) с резултат $T'[1 \dots n]$.
4. Декларираме нов масив $A'[1 \dots n]$.
5. За всяко $1 \leq i \leq n$ инициализираме $A'[i]$ със $\text{fst}(T'[i])$, където $\text{fst}((a, b, c)) = a$.
6. Връщаме $A'[1 \dots n]$.

Сложността на алгоритъма е $\Theta(n + f(n))$. Ако $f(n) = o(n \log(n))$, щяхме да получим сортиращ алгоритъм, който работи за време $o(n \log(n))$, което е абсурд.

[‡] S_n е симетричната група за $\{1, \dots, n\}$.

Задачи

Задача 1. Един целочислен масив $A[1 \dots 2n]$ ще наричаме симетричен, ако за всяко $1 \leq i \leq n$ е изпълнено, че $A[i] = A[2n - i + 1]$. Да се докаже, че сортирането на симетрични масиви чрез сравнения изисква време $\Omega(n \log(n))$.

Задача 2. Един целочислен масив $A[1 \dots 2n]$ ще наричаме специален, ако за всяко $1 \leq i \leq n$ е изпълнено, че $A[2i] < A[2i - 1]$. Да се докаже, че сортирането на специални масиви чрез сравнения изисква време $\Omega(n \log(n))$.

Задача 3. Разглеждаме задачата **SortPointsCounterClockwise**:

Вход: Точки $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Изход: Последователност P'_1, \dots, P'_n на точките P_1, \dots, P_n , за която за всяко $1 \leq i < n$ е изпълнено, че най-малкото завъртане от вектора $\overrightarrow{OP'_i}$ към вектора $\overrightarrow{OP'_{i+1}}$ става обратно на часовниковата стрелка, където O е началото на координатната система.

Да се докаже, че решението на задачата **SortPointsCounterClockwise** чрез сравнения изисква време $\Omega(n \log(n))$.

Задача 4. Разглеждаме задачата **SortPointsAngle**:

Вход: Точки $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Изход: Подреждане на точките P_1, \dots, P_n по големина на ъгъла, който сключва радиус-векторът с Ox .

Да се докаже, че решението на задачата **SortPointsAngle** чрез сравнения изисква време $\Omega(n \log(n))$.

Задача 5. Нека $A[1 \dots n]$ и $B[1 \dots n]$ са сортирани целочислени масиви. Да се докаже, че $2n - 1$ е долна граница за броя на сравнения при сливането на тези два масива в един сортиран масив $C[1 \dots 2n]$.

Задача 6. Даден е граф с $2n$ върха. Интересуват ни въпроси от вида:

“Има ли ребро от връх i до връх j ?”

Да се докаже, че n^2 е долна граница за броя въпроси, който е нужен, за да установим дали дадения граф е свързан.

Задача 7. Искаме да познаем число между 1 и n , което някой друг човек е намислил. За целта можем да му задаваме въпроси (на които той трябва да отговори честно) от вида:

“Вярно ли е, че k е по-малко от намисленото число?”

Да се докаже, че $\lceil \log_2(n) \rceil$ е долна граница за броя въпроси, който е нужен, да познаем намисленото число.

Задача 8. Да се докаже, че сортирането на двоична пирамида чрез сравнения изисква време $\Omega(n \log(n))$.

Задача 9. Дефинираме вълнист масив индуктивно:

- Всеки едноелементен масив е вълнист.
- Масив $A[1 \dots n]$ (където $n > 1$) е вълнист, ако
 1. масивът $A[1 \dots \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]$ е сортиран, а
 2. масивът $A[\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \dots n]$ е вълнист.

Да се докаже, че пермутирането на масив до вълнист изисква време $\Omega(n \log(n))$.

Задача 10. Да се докаже, че строенето на двоична пирамида от масив $A[1 \dots n]$ изисква $n - 1$ сравнения.

Задача 11. Разглеждаме задачата **ElementUniqueness**:

Вход: Целочислен масив $A[1 \dots n]$.

Въпрос: Вярно ли е, че масивът $A[1 \dots n]$ съдържа само уникални елементи?

Да се докаже, че решението на задачата **ElementUniqueness** чрез сравнения изисква време $\Omega(n \log(n))$.

Задача 12. Разглеждаме задачата **Mode**:

Вход: Целочислен масив $A[1 \dots n]$.

Изход: Най-често срещано число в $A[1 \dots n]$.

Да се докаже, че решението на задачата **Mode** чрез сравнения изисква време $\Omega(n \log(n))$.

Задача 13. Разглеждаме задачата **ClosestPair**:

Вход: Целочислен масив $A[1 \dots n]$.

Изход: $\min\{|A[i] - A[j]| \mid 1 \leq i < j \leq n\}$.

Да се докаже, че решението на задачата **ClosestPair** чрез сравнения изисква време $\Omega(n \log(n))$.