Записки за упражнения по ДАА

Тодор Дуков

11 юли 2024 г.

Съдържание

1 Въведение в алгоритмите и асимптотичния анализ 3
- 1.1 Що е то алгоритъм? . . . 3
- 1.2 Какво означава добро решение? . . . 4
- 1.3 Как мерим времето и паметта? . . . 4
- 1.4 Основни дефиниции . . . 5
- 1.5 Полезни свойства . . . 8
- 1.6 Задачи . . . 9

2 Анализ на сложността на алгоритми 10
- 2.1 Как анализираме един алгоритъм по сложност? . . . 10
- 2.2 Предимствата и недостатъците на този вид анализ . . . 11
- 2.3 Сложност по време на някои итеративни алгоритми . . . 12
- 2.4 Защо са ни рекурентни уравнения? . . . 14
- 2.5 Начини за намиране на асимптотиката на рекурентни уравнения . 15
- 2.6 Задачи . . . 17

3 Коректност на алгоритми 20
- 3.1 Какво имаме предвид под коректност? . . . 20
- 3.2 Едно *“ново”* понятие – инвариант . . . 20
- 3.3 Инвариантите в действие . . . 21
- 3.4 С инвариантите трябва да се внимава . . . 22
- 3.5 Подход при задачи с вече даден алгоритъм . . . 23
- 3.6 Примери за рекурсивни алгоритми . . . 26
- 3.7 Трик за бързо пресмятане на членове на някои рекурентни редици 27
- 3.8 Задачи . . . 29

4 Приложения на сортиращите алгоритми 33
- 4.1 Обща информация за някои алгоритми за сортиране . . . 33
- 4.2 Два алгоритъма . . . 34

4.3 Задачи 37

Глава 1

Въведение в алгоритмите и асимптотичния анализ

1.1 Що е то алгоритъм?

Алгоритмите се срещат навсякъде около нас:

- рецептите са алгоритми за готвене;
- сутрешното приготвяне;
- придвижването от точка A до точка B;
- търсенето на книга в библиотеката.

Въпреки това е трудно да се даде формална дефиниция на това какво точно е алгоритъм. На ниво интуиция, човек може да си мисли, че това просто е някакъв последователен списък от стъпки/инструкции, които човек/машина трябва да изпълни. Други начини човек да си мисли за алгоритмите, са:

- програми – обикновено така се реализират алгоритми;
- машини на Тюринг, крайни (стекови) автомати или формални граматики;
- частично рекурсивни функции.

Един програмист в ежедневието си постоянно пише алгоритми за да решава различни задачи/проблеми. Една задача може да се решава по много начини, някои по-добри от други. Добрият програмист, освен че ще намери решение на проблема, той ще намери най-доброто решение (или поне достатъчно добро за неговите цели).

1.2 Какво означава добро решение?

Хубаво е човек да се води по следните (неизчерпателни) критерии:

- решението трябва да е коректно – ако алгоритъмът работи само през 50% от времето, най-вероятно можем да се справим по-добре;
- решението трябва да е бързо – ако алгоритъмът ще завърши работа след като всички звезди са измрели, то той практически не ни върши работа;
- решението трябва да заема малко памет – ако алгоритъмът по време на своята работа се нуждае от повече памет, колкото компютърът може да предостави, за нас този алгоритъм е безполезен;
- решението трябва да е просто – това е може би най-маловажният критерии от тези, но въпреки това е хубаво когато човек може, да пише чист и разбираем код, който лесно се разширява.

За да можем да сравняваме алгоритми в зависимост от това колко големи ресурси (време и памет) използват, трябва първо да можем да "измерваме" тези ресурси.

1.3 Как мерим времето и паметта?

Когато пишем алгоритми, имаме няколко базови инструкции (за които предварително сме се уговорили), които ще наричаме **атомарни инструкции**. Тяхното извикване ще отнеме една единица време. **Време за изпълнение** ще наричаме броят на извикванията на атомарните инструкции по време на изпълнение на програмата. Също така числата и символите ще бъдат нашите **атомарни типове данни**, и ще заемат една единица памет. **Паметта**, която една програма заема, ще наричаме максималния брой на единици от атомарни типове данни по време на изпълнение, без да броим входните данни. Обикновено времето и паметта зависят от размера на подадените входни данни. Това означава, че можем да си мислим за времето и паметта като функции на размера на входа. Подходът, който ще изберем, е да сравняваме функциите за време/памет на различните алгоритми асимптотично. Интересуваме се не толкова от конкретните стойности, а от поведението им, когато размерът на входа клони към безкрайност.

1.4 Основни дефиниции

Множеството от функции, които ще анализираме, е

$$\mathcal{F} = \{f \mid f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R} \;\&\; (\exists n_0 > 0)(\forall n \geq n_0)(f(n) > 0)\}.$$

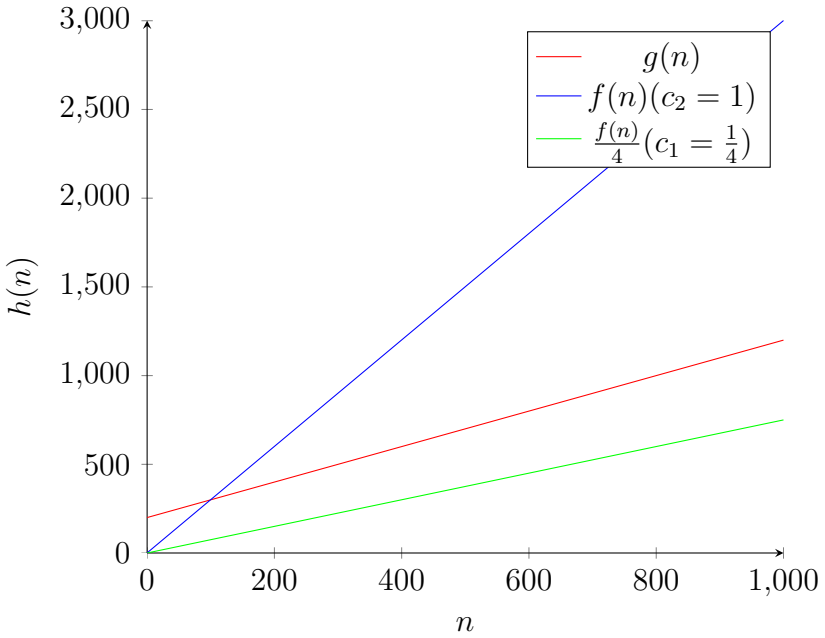
Дефиниция. За всяка функция $f \in \mathcal{F}$ дефинираме:

$$\Theta(f) = \{g \in \mathcal{F} \mid (\exists c_1 > 0)(\exists c_2 > 0) \\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(c_1 \cdot f(n) \leq g(n) \leq c_2 \cdot f(n))\}.$$

Може да тълкуваме $\Theta(f)$ като:

"множеството от функциите, които растат със скоростта на f".*

Нека вземем за пример $f(n) = 3n + 1$ и $g(n) = n + 200$:



На картинката се вижда как от един момент нататък, функцията f остава "заключена" между $c_1 \cdot g$ и $c_2 \cdot g$. Точно заради това $g \in \Theta(f)$.

Забележка. Вместо да пишем $g \in \Theta(f)$, ще пишем $g = \Theta(f)$ или $g \asymp f$.

*точност до константен множител и константно събираемо

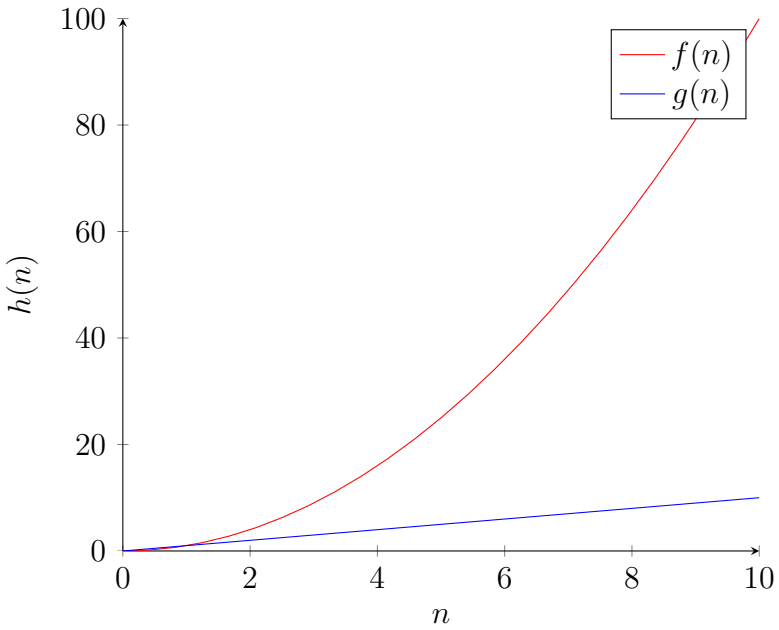
Дефиниция. За всяка функция $f \in \mathcal{F}$ дефинираме:

$$O(f) = \{g \in \mathcal{F} \mid (\exists c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(g(n) \leq c \cdot f(n))\}.$$

Може да тълкуваме $O(f)$ като:

"множеството от функциите, които не растат по-бързо от f".*

Тук заслабваме условията от $\Theta(f)$ като искаме само горната граница.
За пример човек може да вземе $f(n) = n^2$ и $g(n) = n$:



Забележка. Вместо да пишем $g \in O(f)$, ще пишем $g = O(f)$ или $g \preceq f$.

Дефиниция. За всяка функция $f \in \mathcal{F}$ дефинираме:

$$o(f) = \{g \in \mathcal{F} \mid (\forall c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(g(n) < c \cdot f(n))\}.$$

Може да тълкуваме $o(f)$ като:

"множеството от функциите, които растат по-бавно от f".*

Разликата между $O(f)$ и $o(f)$ е строгото неравенство и универсалният квантор в началото. Лесно се вижда, че $o(f) \subseteq O(f)$. Тук изключваме функциите от същия порядък.

Забележка. Вместо да пишем $g \in o(f)$, ще пишем $g = o(f)$ или $g \prec f$.

Дефиниция. За всяка функция $f \in \mathcal{F}$ дефинираме:

$$\Omega(f) = \{g \in \mathcal{F} \mid (\exists c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(c \cdot f(n) \leq g(n))\}.$$

Може да тълкуваме $\Omega(f)$ като:

"множеството от функциите, които не растат по-бавно от f".*

Това е дуалното множество на $O(f)$.

Забележка. Вместо да пишем $g \in \Omega(f)$, ще пишем $g = \Omega(f)$ или $g \succeq f$.

Дефиниция. За всяка функция $f \in \mathcal{F}$ дефинираме:

$$\omega(f) = \{g \in \mathcal{F} \mid (\forall c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(c \cdot f(n) < g(n))\}.$$

Може да тълкуваме $\omega(f)$ като:

"множеството от функциите, които растат по-бързо от f".*

Това е дуалното множество на $o(f)$.

Забележка. Вместо да пишем $g \in \omega(f)$, ще пишем $g = \omega(f)$ или $g \succ f$.

Внимание. Не всички функции от $\mathcal{F}$ са сравними по релациите $\prec, \preceq$ или $\asymp$. За пример човек може да вземе функциите $f(n) = n$ и $g(n) = n^{1+\sin(n)}$. Лесно се вижда, че функцията $g(n)$ "плава" между $n^0 = 1$ и n^2 т.е. няма нито как да расте по-бързо, нито как да расте по-бавно.

Въпреки това, тези релации са сравнително хубави.

Твърдение 1.4.1. *Следните свойства са в сила:*

- $\asymp$ *е релация на еквивалентност;*
- $\prec$ *и* $\succ$ *са транзитивни и антирефлексивни;*
- $\preceq$ *и* $\succeq$ *са транзитивни и рефлексивни.*

Доказателството на това твърдение оставяме за упражнение на читателя. То е една елементарна разходка из дефинициите.

1.5 Полезни свойства

Тук ще изброим няколко свойства, които много често се ползват в задачите:

- Нека $f, g \in \mathcal{F}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = l$ (тук искаме границата да съществува). Тогава:
  — ако $l = 0$, то $f \prec g$;
  — ако $l = \infty$, то $f \succ g$;
  — в останалите случаи $f \asymp g$.
- $f + g \asymp \max\{f, g\}$ за всяко $f, g \in \mathcal{F}$.
- $c \cdot f \asymp f$ за всяко $f \in F$ и $c > 0$.
- $f \asymp g \iff f^c \asymp g^c$ за всяко $f, g \in F$ и $c > 0$.
- $O(f) \cap \Omega(f) = \Theta(f)$ за всяко $f \in \mathcal{F}$.
- $o(f) \cap \omega(f) = O(f) \cap \omega(f) = o(f) \cap \Omega(f) = \varnothing$ за всяко $f \in \mathcal{F}$.
- $f \prec g \iff g \succ f$ и $f \preceq g \iff g \succeq f$ за всяко $f, g \in \mathcal{F}$.
- ако $f \prec g$, то $c^f \prec c^g$ за всяко $f, g \in \mathcal{F}$ и $c > 1$.
- ако $\log_c(f) \prec \log_c(g)$, то $f \prec g$ за всяко $f, g \in \mathcal{F}$ и $c > 1$.
- ако $c^f \asymp c^g$, то $f \asymp g$ за всяко $f, g \in \mathcal{F}$ и $c > 1$.
- ако $f \asymp g$, то $\log_c(f) \asymp \log_c(g)$ за всяко $f, g \in \mathcal{F}$ и $c > 1$.
- тъй като $\log_a(n) = \frac{\log_b(n)}{\log_b(a)}$, то $\log_a(n) \asymp \log_b(n)$ – вече ще пишем само $\log(n)$ като ще имаме предвид $\log_2(n)$.
- $n! \asymp \sqrt{n}\frac{n^n}{e^n}$ - апроксимация на Стирлинг.
- $\log(n!) \asymp n \log(n)$.
- $\log(n) \prec n^k \prec 2^n \prec n! \prec n^n \prec 2^{n^2}$ за всяко $k \geq 1$.

1.6 Задачи

Задача 1.1. Да се сравнят асимптотично следните двойки функции:

1. $f(n) = \log(\log(n))$ и $g(n) = \log(n)$;
2. $f(n) = 5n^3$ и $g(n) = n\sqrt{n^9 + n^5}$;
3. $f(n) = n5^n$ и $g(n) = n^2 3^n$;
4. $f(n) = n^n$ и $g(n) = 3^{n^2}$;
5. $f(n) = 3^{n^2}$ и $g(n) = 2^{n^3}$.

Задача 1.2. Да се докаже, че $\sum_{i=0}^{n} i^k \asymp n^{k+1}$.

Задача 1.3. Да се подредят по асимптотично нарастване следните функции:

$$f_1(n) = n^2 \qquad f_2(n) = \sqrt{n} \qquad f_3(n) = \log^2(n) \qquad f_4(n) = \sqrt{\log(n)!}$$

$$f_5(n) = \sum_{k=2}^{\log(n)} \frac{1}{k} \qquad f_6(n) = \log(\log(n)) \qquad f_7(n) = 2^{2^{\sqrt{n}}} \qquad f_8(n) = \binom{\binom{n}{3}}{2}$$

$$f_9(n) = 2^{n^2} \qquad f_{10}(n) = 3^{n\sqrt{n}} \qquad f_{11}(n) = 2^{\binom{n}{2}} \qquad f_{12}(n) = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{2^k}.$$

Глава 2

Анализ на сложността на алгоритми

2.1 Как анализираме един алгоритъм по сложност?

Нека започнем с един прост пример:

```
1  find(A[1...n] ∈ array(ℤ); v ∈ ℤ):
2      for i ← 1 to n:
3          if A[i] = v: return i
4
5      return −1
```

Да кажем, че искаме да проверим броя на инструкциите, която тази функция ще изпълни, преди да приключи работата си. Точен отговор не може да се даде. В зависимост от това къде се намира v във $A[1 \dots n]$, алгоритъмът може да приключи много бързо или много бавно. Можем да дадем горна и долна граница на бързодействието.
Ако v се намира в началото, то ще сме направили само следните 4 операции:

- да инициализираме променливата i със 0;
- да проверим верността на $i < n$;
- да проверим верността на $A[i] = v$;
- да върнем i т.е. 1.

Нека сега да помислим какво ще стане в най-лошия случай (обикновено от тези ще се интересуваме) – v не участва в $A[1 \dots n]$. Тогава n пъти ще изпълним следните 3 операции:

- проверяваме верността на $i \leq n$;
- проверяваме верността на $A[i] = v$;
- увеличаваме i с 1.

Освен тези $3n$ операции, преди всичко трябва да инициализираме променливата i със 1, да се направи последната проверка на верността на $i \leq n$ (която ще ни изкара от цикъла), и да върнем -1. Общо излизат $3n + 3$ операции.
Така виждаме, че в зависимост от входните данни, алгоритъмът приключва работа за поне 4 стъпки и най-много $3n + 3$ стъпки. Такъв алгоритъм ще казваме, че има сложност по време $O(n)$. Разбира се, няма да е грешно и да кажем, че алгоритъмът има сложност по време $\Omega(1)$, но това не ни дава никаква информация, защото всеки алгоритъм има такава сложност. Също така, понеже не използваме допълнителни променливи, алгоритъмът ни има константна сложност по памет или сложност по памет $\Theta(1)$.
По-общо казано, се интересуваме от асимптотиката на $T(n)$, където $T(n)$ е броят елементарни инструкции, които алгоритъмът извиква по време на своето изпълнение, при вход с размер n в най-лошият случай.
Тук вход с големина n може да означава различни неща. Ако входът е някакъв масив или множество, то под размер ще разбираме броят на елементи. Ако пък входът е число, то под размер можем да разбираме самата стойност на числото или дължината на двоичния запис.

2.2 Предимствата и недостатъците на този вид анализ

Най-голямото предимство на асимптотичния анализ, е неговата простота. Вместо да влачим някакви константни множители и събираеми, имаме колкото се може по-проста формула, която да описва сложността на нашия алгоритъм. Това дали един алгоритъм работи със две или три стъпки по-бързо/бавно не ни интересува особено много. При много голям вход те ще работят практически еднакво. В някакъв смисъл това ни помага да виждаме по-голямата картинка. Един алгоритъм може да бъде по-бърз от друг, но от по-бърз алгоритъм до по-бърз алгоритъм има голяма разлика.

Нека вземем за пример следната таблица:

n	$\lceil \log_2(n) \rceil$	n	n^2	2^n
1	0	1	1	2
10	4	10	100	1024
100	7	100	10000	число със 31 цифри
10000	13	10000	100000000	число със 3011 цифри
1000000	20	1000000	1000000000000	число със 301030 цифри

Алгоритъм със сложността n^2 ще е по-бавен от алгоритъм със сложност n, обаче скока в бързината е много по-малък от този между 2^n и n^2.
Този подход обаче си има своите недостатъци. Нека разгледаме два алгоритъма със сложности по време съответно n и $2^{2^{2^{1024}}}$. Ние ведната ще се втурнем да кажем, че първият алгоритъм е по-лош. Той е с линейна сложност, а вторият алгоритъм има константна сложност. Обаче преди вторият алгоритъм даде отговор, всички звезди ще умрат т.е. няма да доживем да чуем този отговор. Разбира се, от някъде нататък, за много голями входни данни, първият алгоритъм наистина ще работи по-бавно, но ние никога няма да работим с толкова големи данни. Тогава на практика, първият алгоритъм е по-добър, нищо че асимптотично се води по-лош. Нас това няма да ни интересува в курса по ДАА.

2.3 Сложност по време на някои итеративни алгоритми

Нека видим сложността на алгоритъма за сортиране по метода на мехурчето:

```
1  Sort(A[1...n] ∈ array(ℤ)):
2      for i ← 1 to n − 1:
3          for j ← 1 to n − i − 1:
4              if A[j] > A[j + 1]:
5                  temp ← A[j]
6                  A[j] ← A[j + 1]
7                  A[j + 1] ← temp
```

В най-лошия случай сложността $T(n)$ на функцията `Sort` е следната:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i-1} 1 = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i-1) = (n-2)+(n-3)+\cdots+0 = \frac{(n-2)(n-1)}{2} \asymp n^2.$$

По принцип $T(n)$ трябва да е сума от 4, а не от 1, но такъв константен брой операции, дори и приложени неконстантен брой пъти, не влияят на асимптотичното поведение.

Нека сега разгледаме следният алгоритъм за степенуване:

```
1  Exp(x, y ∈ ℕ):
2      res ← 1
3
4      while y > 0:
5          if y ≡ 1 (mod 2):
6              res ← res · x
7
8          y ← y/2
9          x ← x^2
10
11     return res
```

Той се възползва от простата идея, че за да сметнем да кажем 3^8, можем вместо 8 пъти да умножаваме числото 3, да представим 3^8 като $3^4 \cdot 3^4$. Тогава 3^4 можем да сметнем веднъж, и да го умножим със себе си. Пак можем да представим 3^4 като $3^2 \cdot 3^2$ и да пресметнем 3^2 само веднъж и да го умножим със себе си. Така при по-голяма стойност на y си спестяваме много работа.

С уговорката, че умножението е атомарна операция, сложността по време $T(n)$ (n е стойността на y) на функцията `Exp` е следната:

$$T(n) = \sum_{\substack{i=n \\ i \leftarrow \frac{i}{2}}}^{1} 1 = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\substack{\text{колкото пъти} \\ \text{можем да} \\ \text{делим целочислено} \\ n \text{ на 2 преди} \\ \text{да получим 0}}} = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\text{около } \log(n) \text{ пъти}} \asymp \log(n).$$

За да можем по-формално да изследваме този вид поведение, ще трябва да си поиграем малко с рекурентни уравнения.

2.4 Защо са ни рекурентни уравнения?

Те се появяват по естествен път, когато искаме да анализираме сложността на рекурсивни алгоритми.
Нека вземем за пример алгоритъма за двоично търсене:

```
1  BinarySearch(A[1...n] ∈ array(ℤ); l,r ∈ {1,...n}; v ∈ ℤ):
2      if l > r:
3          return −1
4
5      m ← ⌊(l+r)/2⌋
6
7      if A[m] = v: return m
8      if A[m] < v: return BinarySearch(A[1...n], m+1, r, v)
9      if A[m] > v: return BinarySearch(A[1...n], l, m−1, v)
```

При подаден сортиран целочислен масив $A[1 \dots n]$, негови индекси l, r и цяло число v, функцията $\texttt{BinarySearch}(A[1 \dots n], 1, n, v)$ ще върне индекс на $A[1 \dots n]$, в който се намира v, ако има такъв, иначе ще върне -1. Нека помислим каква е сложността на алгоритъма. Управляващите параметри на рекурсията са l и r. Всеки път разликата между двете намалява двойно (като накрая когато $l = r$ тя ще стане отрицателна).
Това означава, че в най-лошия случай сложността на алгоритъма може да се опише със следното рекурентно уравнение:

$T(0) = 2$ // заради ред 3 и 4

$T(n+1) = T(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor) + 5$ // заради проверките и рекурсивното извикване

В този случай лесно се вижда асимптотиката на $T(n)$:

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 5 \\ &= T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + 5 + 5 \\ &= T(\lfloor \frac{n}{8} \rfloor) + 5 + 5 + 5 = \cdots = T(0) + \underbrace{5 + \cdots + 5}_{\text{около } \log(n) \text{ пъти}} \asymp \log(n) \end{aligned}$$

Така получаваме, че алгоритъмът има сложност $O(\log(n))$. Обаче в общият случай далеч не е толкова лесно да се намери асимптотичното поведение на дадено рекурентно уравнение. Целта ни ще бъде да развием по-богат апарат за асимптотичен анализ на рекурентните уравнения.

2.5 Начини за намиране на асимптотиката на рекурентни уравнения

Начините се разделят на два типа:

- със решаване на уравнението;
- без решаване на уравнението.

И двата начина са ценни. Първият начин ни дава формула във явен вид, което може да ни е от полза. Понякога обаче формулата във явен вид не е *"красива"*, или изобщо не може да се намери такава. Тогава идва на помощ вторият начин. Той директно ни дава някаква *"хубава"* формула, без да трябва да намираме в явен вид решение на рекурентното уравнение. Проблема е обаче, че асимптотиката понякога е малко лъжлива – алгоритъм със сложност $2^{2^{2^{1000}}}$ е асимптотично по-бавен от алгоритъм със сложност n, но практически вторият е по-бърз.
Ще разгледаме следните методи (повечето от които са разглеждани по дискретна математика):

- налучкване и доказване
- развиване (което преди малко показахме)
- методът с характеристичното уравнение
- мастър-теоремата

Нека разгледаме един пример с налучкване:

$$T(0) = 3$$
$$T(n+1) = (n+1)T(n) - n$$

Започваме да разписваме:

n	$T(n)$	$n!$
0	3	1
1	3	1
2	5	2
3	13	6
4	49	24
5	241	120
6	1441	720

Вече лесно можем да покажем с индукция, че $T(n) = 2(n!) + 1$:

- В базата имаме, че $T(0) = 3 = 2 \cdot 1 + 1 = 2 \cdot 0! + 1$.
- За индуктивната стъпка:

$$\begin{aligned} T(n+1) &= (n+1)T(n) - n \overset{\text{(ИП)}}{=} (n+1)(2(n!)+1) - n \\ &= (n+1)(2(n!)) + n + 1 - n = 2(n+1)! + 1 \end{aligned}$$

Накрая получаваме, че $T(n) \asymp n!$
Нека сега да видим как можем да използваме метода на характеристичното уравнение:

$$T(n) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} T(i) \ // \text{ функцията е добре дефинирана и за 0.}$$

Рекурентното уравнение, зададено в този вид, не може да се реши с този метод. За това ще трябва да направим преобразувания:

$$\begin{aligned} T(0) &= 1 \\ T(n+1) &= 1 + \sum_{i=0}^{n} T(i) = 1 + T(n) + \sum_{i=0}^{n-1} T(i) \\ &= T(n) + \underbrace{\left(1 + \sum_{i=0}^{n-1} T(i)\right)}_{T(n)} = 2T(n) + 1 = \underbrace{2T(n)}_{\text{хомогенна част}} \end{aligned}$$

Имаме само хомогенна част, от която получаваме характеристичното уравнение $x - 2 = 0$ с единствен корен 2. Така:

$$T(n) = A \cdot 2^n \text{ за някоя константи } A.$$

Вече няма нужда и да се намира константата – ясно е че $T(n) \asymp 2^n$. Като използваме метода на характеристичното уравнение, не е нужно да намираме накрая константите за да разберем каква е асимптотиката. Достатъчно е да вземем събираемото, която расте най-много. В случая е ясно, че това е 2^n.

Нека сега разгледаме и последният начин:

Теорема 2.5.1 (Мастър-теорема)**.** *Нека $a \geq 1$, $b > 1$ и $f \in \mathbb{F}$. Нека $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$, където $\frac{n}{b}$ се интерпретира като $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$ или $\lceil \frac{n}{b} \rceil$. Тогава:*

1 сл. Ако $f(n) \preceq n^{\log_b(a)-\varepsilon}$ за някое $\varepsilon > 0$, то тогава $T(n) \asymp n^{log_b(a)}$.

2 сл. Ако $f(n) \asymp n^{log_b(a)}$, то тогава $T(n) \asymp n^{log_b(a)} \log(n)$.

3 сл. Ако са изпълнени следните условия:

1. *$f(n) \succeq n^{\log_b(a)+\varepsilon}$ за някое $\varepsilon > 0$; и*
2. *съществува $0 < c < 1$, за което от някъде нататък $a \cdot f(\frac{n}{b}) \leq c \cdot f(n)$,*

то тогава $T(n) \asymp f(n)$.

Нека разгледаме рекурентното уравнение:

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1.$$

Тук $a = b = 2$, и $f(n) = 1$. Също така $\log_b(a) = 1$, откъдето $f(n) = 1 \preceq n^{\log_b(a)-\varepsilon}$, за $\varepsilon \in (0, 1)$. Така по 1 сл. на мастър-теоремата получаваме, че $T(n) \asymp n$.

2.6 Задачи

Задача 2.1. Да се намери асимптотиката на средната сложност по време на алгоритъма за бързо сортиране т.е. на рекурентното уравнение:

$$T(n) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1} T(i) + T(n-i)\right) + n - 1.$$

Задача 2.2. Да се определи сложността по време за функцията:

```
1  F_1(n ∈ ℕ):
2      s ← 0
3
4      for i ← 1 to n:
5          for j ← 1; j ≤ i; j ← 2j:
6              s ← s + ij
7
8      return s
```

Задача 2.3. Да се определи сложността по време за функцията:

```
1  F_2(n ∈ ℕ):
2      s ← 0
3
4      for i ← 1; i² ≤ n; i ← i + 3:
5          s ← s + F_1(n)
6
7      return s
```

Задача 2.4. Да се определи сложността по време за функцията:

```
1  F_3(n ∈ ℕ):
2      s ← 0
3
4      for i ← 1; i ≤ n²; inc(i):
5          for j ← 1; j ≤ 2i; inc(j):
6              if j ≡ 0 (mod 2):
7                  s ← s + F_1(n)
8              else:
9                  s ← s + F_2(n)
10
11     return s
```

Задача 2.5. Да се намери асимптотиката на следните рекурентни уравнения:

$T_1(n) = 29T_1(\frac{n}{3}) + 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$

$T_2(n) = 29T_2(\frac{n}{3}) + 12n + \sqrt{n}$

$T_3(n) = T_3(n-1) + \frac{n}{(n+1)(n-1)}$

$T_4(n) = 29T_4(\frac{n}{3}) + (\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i})^4$

$T_5(n) = 29T_5(\frac{n}{3}) + 2\sum_{i=1}^{n} i^2$

$T_6(n) = 29T_6(\frac{n}{3}) + n^{\sqrt{n}} + (\sqrt{n})^n$

$T_7(n) = T_7(\sqrt{n}) + n$

$T_8(n) = 29T_8(\frac{n}{3}) + \binom{2n}{2}$

$T_9(n) = 8T_9(n-1) - T_9(n-2) + 2n2^{2n} + 3n2^{3n}.$

Задача 2.6. Да се намери сложността по време на следния алгоритъм:

```
1  𝔄₁(n ∈ ℕ):
2      if n < 2:
3          return n
4
5      a ← 0
6
7      for i ← 1 to n:
8          a ← a + i
9
10     return a + 𝔄₁(n − 1) + 𝔄₁(n − 1) + 𝔄₁(n − 2)
```

Ще се промени ли нещо ако връщаме $a + 2\mathfrak{A}_1(n-1) + \mathfrak{A}_1(n-2)$?

Задача 2.7. Да се намери сложността по време на следния алгоритъм:

```
1  𝔄₂(n ∈ ℕ):
2      if n < 2:
3          return 2
4
5      t ← 0
6      t ← t + 𝔄₂(n/3)
7
8      for i ← 2; i < n; i ← 2i:
9          t ← t + 1
10
11     t ← t · 𝔄₂(n/3)
12
13     return t
```

Задача 2.8. Да се намери асимптотиката на следните рекурентни уравнения:

$$T_1(n) = 2\sqrt{2}T_1\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right) + n^3 \qquad T_2(n) = T_2(n-1) + \frac{1+n}{n^2}$$

$$T_3(n) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(T_3(i) + 2^{\frac{n}{2}}\right) \qquad T_4(n) = 5T_4\left(\frac{n}{2}\right) + n^2\log(n).$$

Глава 3

Коректност на алгоритми

3.1 Какво имаме предвид под коректност?

За целите на този курс един алгоритъм ще наричаме **коректен**, ако завършва при всякакви входни данни и връща правилен резултат при всякакви входни данни

Забележка. Въпреки че ние ще имаме това разбиране в курса, на практика тези изисквания невинаги са изпълнени:

- разглеждат се алгоритми, които могат и да не завършват за някои входни данни – от теоретична гледна точка са интересни за хората, които се занимават с теорията на изчислимостта;
- разглеждат се алгоритми, които много често (но не винаги) връщат правилния резултат – обикновено това се прави с цел бързодействие.

3.2 Едно *"ново"* понятие – инвариант

Специално за итеративните алгоритми се въвежда ново понятие - **инвариант**. Това са специални твърдения, свързани с цикъла.
В най-общият случай (за алгоритми) се формулират по следния начин:

"При k-тото достигане на ред l (ако има няколко инструкции казваме преди/след коя се намираме) в алгоритъма $\mathfrak{A}$ е изпълнено *някакво твърдение, зависещо от k и променливите, използвани в $\mathfrak{A}$*".

Доказателството на такива твърдения протича с добре познатата индукция. Първо доказваме базата т.е. какво се случва при първото достигане на цикъла. Индуктивното предположение и индуктивната стъпка се обединяват в *"нова"* фаза, наречена **поддръжка**. Довършителните разсъждения, които по принцип се намират след доказването на твърдението чрез индукция, ще наричаме **терминация**. Накрая показваме, че винаги ще излезнем от цикъла (**финитност**). Обикновено това ще го смятаме за очевидно (най-вече за `for`-цикли).

Внимание. Това, за което се използват инвариантите, е да се докаже коректността на ЕДИН цикъл, не на цял алгоритъм. Когато в алгоритъма ни има няколко цикъла, на всеки от тях трябва да съответства по един инвариант.

3.3 Инвариантите в действие

Нека разгледаме следния алгоритъм за степенуване на 2:

```
1  Pow2(n ∈ ℕ):
2      r ← 1
3
4      for i ← 1 to n:
5          r ← 2r
6
7      return r
```

Инвариант 3.3.1. *При всяко достигане на проверката за край на цикъла (на ред 4) е изпълнено, че* $r = 2^{i-1}$.

Доказателство.
База. Наистина при първото достигане имаме, че $i = 1$ и от там $r = 1 = 2^{i-1}$.
Поддръжка. Нека при някое непоследно достигане твърдението е изпълнено. Тогава преди следващото достигане на проверката на r присвояваме $2r$, като знаем, че преди r е бил 2^{i-1}, и след това на i присвояваме $i + 1$. Така е ясно, че при новото достигане на проверката r ще стане $2 \cdot 2^{i_{old}-1} = 2^{i_{old}} = 2^{i-1}$.
Терминация. Ако е изпълнено условието за край на цикъла, то тогава $i = n+1$, откъдето ще върнем $r = 2^{(n+1)-1} = 2^n$.
Финитност. Величината $n - i$ започва с $n - 1$, и намалява с 1, докато не стигне -1, когато ще излезнем от цикъла. Следователно алгоритъмът винаги завършва.
□

3.4 С инвариантите трябва да се внимава

Един от често срещаните капани, в които попадат хората, е да не си формулират инвариантът добре. Много е важно инвариант да дава достатъчна информация за това което наистина се случва в алгоритъма. За целта ще разгледаме един пример:

```
1  SelectionSort(A[1...n] ∈ array(ℤ)):
2      for i ← 1 to n − 1:
3          m ← i
4
5          for j ← i + 1 to n:
6              if A[j] < A[m]:
7                  m ← j
8
9          swap(A[i], A[m])
```

На интуитивно ниво е ясно какво прави кода. Намира най-малкия елемент, и го слага на първо място. След това намира втория най-малък елемент, и го слага на второ място, и т.н.
Нещо, което някои биха се пробвали да направят за първия цикъл, е следното:

При всяко достигане на проверката за край на цикъла на ред 3 *подмасивът* $A[1 \dots i-1]$ *е сортиран.*

Проблемът с това твърдение, е че може много лесно да се измисли алгоритъм, за който това твърдение е изпълнено, и изобщо не сортира елементите в масива:

```
1  TrustMeItSorts(A[1...n] ∈ array(ℤ)):
2      for i ← 1 to n:
3          A[i] ← i
```

Очевидно този за този алгоритъм горната инвариант е изпълнена, но той е безсмислен. Получаваме сортиран масив, но за сметка на това губим цялата информация, която сме имали за него.
Нещо друго, което е важно да се направи, е първо да се формулира инвариант за вътрешния цикъл, и после за външния, като тънкият момент тук е, че ще ни трябват допускания за първият инвариант. Идеята е, че външния цикъл разчита на вътрешния да си свърши работата, и обратно вътрешния разчита (не винаги) на външния преди това да си е свършил работата.

Нека покажем как трябва да станат инвариантите, като доказателството оставяме за упражнение на читателя. Нека $A^*[1 \dots n]$ е първоначалната стойност на входния масив.

Инвариант 3.4.1 (вътрешен цикъл)**.** *При всяко достигане на проверката за край на цикъла на ред* 5 *имаме, че* m *е индексът на най-малкия елемент в масива* $A[i \dots j-1]$.

Инвариант 3.4.2 (външен цикъл)**.** *При всяко достигане на проверката за край на цикъла на ред* 2 *имаме, че масивът* $A[1 \dots i-1]$ *съдържа сортирани първите* $i-1$ *по големина елементи на* $A^*[1 \dots n]$*, като останалите са в* $A[i \dots n]$.

Обикновено в доказателството на коректност на алгоритми най-трудното е да се формулира инвариантът. Ако човек има добре формулирана инвариант, доказателството е на първо място възможно, а на второ – по-лесно.

3.5 Подход при задачи с вече даден алгоритъм

Нека разгледаме следния алгоритъм:

```
1  foo(a ∈ ℕ):
2      x ← 6
3      y ← 1
4      z ← 0
5
6      for i ← 0 to a − 1:
7          z ← z + y
8          y ← y + x
9          x ← x + 6
10
11     return z
```

Питаме се какво връща той?
Обикновено в такива задачи трябва да се изпробва алгоритъма върху няколко стойности. Можем да забележим, че:

- `foo`(0) връща 0;
- `foo`(1) връща 1;
- `foo`(2) връща 8 и така нататък.

Вече можем да видим какво прави алгоритъмът – `foo`(a) връща a^3. Нека сега докажем това:

Инвариант 3.5.1. *При всяко достигане на проверката за край на цикъла на ред* 5 *е изпълнено, че:*

- $x = 6(1 + i)$;
- $y = 3i^2 + 3i + 1$;
- $z = i^3$.

Доказателство.
База. При първото достигане имаме, че:

- $i = 0$;
- $x = 6 = 6 \cdot 1 = 6(1 + 0) = 6(1 + i)$;
- $y = 1 = 3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 1 = 3i^2 + 3i + 1$;
- $z = 0 = 0^3 = i^3$.

Поддръжка. Нека твърдението е изпълнено за някое непоследно достигане на проверката за край на цикъла. Тогава при влизане в тялото на цикъла:

- z ще стане $z + y \overset{\text{(ИП)}}{=} i^3 + 3i^2 + 3i + 1 = (\underbrace{i + 1}_{\text{ново } i})^3$;
- y ще стане $y + x \overset{\text{(ИП)}}{=} 3i^2 + 3i + 1 + 6 + 6i = 3(\underbrace{i + 1}_{\text{ново } i})^2 + 3(\underbrace{i + 1}_{\text{ново } i}) + 1$;
- x ще стане $x + 6 \overset{\text{(ИП)}}{=} 6(1 + i) + 6 = 6(1 + \underbrace{i + 1}_{\text{ново } i})$.

Терминация. В последното достигане на проверката за край на цикъла имаме, че $i = a$, и тогава на ред 12 алгоритъмът ще върне $z = a^3$.
Финитност. (от тук нататък повечето няма да ги пишем) Величината $a - i$ започва с a, и намалява с 1, докато не стигне 0, когато ще излезнем от цикъла. Следователно алгоритъмът винаги завършва. □

Нека разгледаме още един такъв пример:

```
1  bar(n ∈ ℤ): return √(n²)
2
3  foo(x, y ∈ Z): return (x+y+bar(x−y))/2
4
5  quux(A[1...n] ∈ array(ℤ)):
6      a ← A[1]
7
8      for i ← 2 to n:
9          a ← foo(a, A[i])
10
11     return a
```

Искаме да видим какво връща $\mathfrak{quux}(A[1 \dots n])$. Тук най-трудното, което трябва да се направи, е да се определи какво връщат $\mathfrak{bar}$ и $\mathfrak{foo}$:

- $\mathfrak{bar}(n) = \sqrt{n^2} = |n|$;
- $\mathfrak{foo}(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} = \max\{x, y\}$:
  - ако $x \geq y$, то $\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \max\{x, y\}$,
  - ако $x < y$, то $\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+y-x}{2} = \frac{2y}{2} = y = \max\{x, y\}$.

Като знаем какво правят $\mathfrak{bar}$ и $\mathfrak{foo}$, можем да забележим, че $\mathfrak{quux}(A[1 \dots n])$ дава най-големия елемент на $A[1 \dots n]$:

Инвариант 3.5.2. *При всяко достигане на проверката за край на цикъла на ред* 15 *е изпълнено, че* $a = \max A[1 \dots i-1]$.

Доказателство.
База. Наистина при първото достигане $a = A[1] = \max A[1 \dots i-1]$.
Поддръжка. Нека твърдението е изпълнено за някое непоследно достигане на проверката за край на цикъла. Тогава като влезем в тялото на цикъла, променливата a става:

$$\begin{aligned}\mathfrak{foo}(a, A[i]) \overset{(\text{ИП})}{=} \mathfrak{foo}(\max A[1 \dots i-1], A[i]) &= \max(\max A[1 \dots i-1], A[i]) \\ &= \max A[1 \dots i] = \max A[1 \dots \underbrace{i+1}_{\text{ново } i} - 1]\end{aligned}$$

Терминация. При последното достигане на проверката за край на цикъла на ред 15 променливата i ще бъде $n+1$, откъдето функцията ще върне точно $a = \max A[1 \dots (n+1)-1] = \max A[1 \dots n]$, с което сме готови. □

3.6 Примери за рекурсивни алгоритми

Нека разгледаме следният алгоритъм:

```
1  𝔐(A[1...n] ∈ array(ℤ)):
2      if n = 0:
3          return −∞
4      else:
5          return max(A[n], 𝔐(A[1...n − 1]))
```

Очевидно при параметър целочислен масив $A[1 \dots n]$, функцията $\mathfrak{M}(A[1 \dots n])$ връща $\max A[1 \dots n]$. Ще докажем това с индукция по n:

- В базата имаме, че $\mathfrak{M}(A[1 \dots n]) = -\infty = \max[] = \max A[1 \dots 0]$ където със [] означаваме празният масив.
- За индуктивната стъпка имаме, че:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}(A[1 \dots n+1]) &= \max(A[n+1], \mathfrak{M}(A[1 \dots n])) \overset{(\text{ИП})}{=} \max(A[n+1], \max A[1 \dots n]) \\ &= \max A[1 \dots n+1].\end{aligned}$$

Тук управляващият параметър на рекурсията n винаги намалява с 1, докато не стигне 0, където ще приключи алгоритъмът. В по нататъчните разсъждения ще смятаме завършването на алгоритъма за очевидно.
Сложността на алгоритъма се описва със рекурентното уравнение:

$$T(n) = T(n-1) + 1 \ // \text{ базата няма да я пишем.}$$

Директно се вижда, че $T(n) = \sum_{i=0}^{n} 1 = n + 1 \asymp n$.
Да видим един малко по-сложен пример – за бързо степенуване:

```
1  𝒫(x, y ∈ ℕ):
2      if y = 0:
3          return 1
4
5      s ← 𝒫(x, y/2)
6
7      if y ≡ 1 (mod 2):
8          return s²x
9      else:
10         return s²
```

С пълна индукция относно y ще покажем, че $\mathcal{P}(x, y) = x^y$:

- $\mathcal{P}(x, 0) = 1 = x^0 = 1$ // тук се уговаряме, че $0^0 = 1$.
- $\mathcal{P}(x, 2y+1) = x \cdot \mathcal{P}(x, y) \cdot \mathcal{P}(x, y) \overset{\text{(ИП)}}{=} x \cdot x^y \cdot x^y = x^{2y+1}$.
- $\mathcal{P}(x, 2y+2) = \mathcal{P}(x, y+1) \cdot \mathcal{P}(x, y+1) \overset{\text{(ИП)}}{=} x^{y+1} \cdot x^{y+1} = x^{2y+2}$.

Сложността на този алгоритъм може да се опише със следното рекурентно уравнение:

$$T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1.$$

От мастър-теоремата следва, че:

$$T(n) \asymp \log(n).$$

3.7 Трик за бързо пресмятане на членове на някои рекурентни редици

Нека вземем за пример редицата на Фибоначи:

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F(1) &= 1 \\ F(n+2) &= F(n+1) + F(n) \end{aligned}$$

Човек може да забележи, че:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathfrak{F}^*} \cdot \begin{pmatrix} F(n+1) \\ F(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(n+2) \\ F(n+1) \end{pmatrix}.$$

След това с индукция лесно се показва, че:

$$(\mathfrak{F}^*)^n \cdot \begin{pmatrix} F(1) \\ F(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(n+1) \\ F(n) \end{pmatrix}.$$

За да сметнем $F(n)$, можем да направим бързо степенуване на матрицата, аналогична на тази с числата:

```
1  FibMatrixExp(R ∈ (ℕ)_{2×2}; n ∈ ℕ):
2      if n = 0:
3          R ← E_{2×2}
4
5      FibMatrixExp(R, n/2)
6      R ← R^2
7
8      if n ≡ 1 (mod 2):
9          R ← R · 𝔉*
10
11 F(n ∈ ℕ):
12     if n ≤ 1:
13         return n
14
15     init(R ∈ (ℕ)_{2×2})
16     FibMatrixExp(R, n − 1);
17
18     return R[1][1];
```

Коректността и сложността на алгоритъма оставяме на читателя (напълно аналогично е на предния алгоритъм).
В общия случай ще имаме рекурентно уравнение от вида:

$T(n+k+1) = a_k T(n+k) + \cdots + a_1 T(n+1) + a_0 T(n)$, където $a_0, \ldots, a_k, k$ са константи.

Тогава отново с индукция човек лесно може да покаже, че:

$$\begin{pmatrix} a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \ldots & a_2 & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} T(k) \\ T(k-1) \\ T(k-2) \\ \vdots \\ T(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(n+k) \\ T(n+k-1) \\ T(n+k-2) \\ \vdots \\ T(n) \end{pmatrix}.$$

3.8 Задачи

Задача 3.1. Да се:

- напише алгоритъм, който сумира числата в един масив;
- докаже неговата коректност;
- изследва сложността му по време и памет.

Задача 3.2. Даден е следният алгоритъм:

```
1  𝔄(A[1...n] ∈ array(ℤ)):
2      for i ← 1 to n − 1:
3          for j ← i + 1 to n:
4              if A[i] = A[j]:
5                  return 𝕋
6
7      return 𝔽
```

1. Какво връща той? Отговорът да се обоснове.
2. Каква е неговата сложност по време и памет?

Задача 3.3. Даден е следният алгоритъм:

```
1  𝔉(n ∈ ℕ):
2      if n < 2:
3          return n
4
5      a ← 0
6      b ← 1
7
8      for i ← 1 to n − 1:
9          t ← a
10         a ← b
11         b ← t + b
12
13     return b
```

Да се докаже, че $\mathfrak{F}(n)$ връща n-тото число на Фибоначи.

Задача 3.4. Даден е следният: алгоритъм:

```
1  Mult(A, B, C ∈ (ℤ)_{n×n})
2      for i ← 1 to n:
3          for j ← 1 to n:
4              s ← 0
5
6              for k ← 1 to n:
7                  s ← s + A[i][k] · B[k][j]
8
9              C[i][j] ← s
```

Да се докаже, че при вход $n \times n$ целочислени матрици A, B и C, функцията $\texttt{Mult}(A, B, C)$ записва в C произведението на A и B. Да се намери сложността му по време и памет.

Задача 3.5. Даден е следният алгоритъм:

```
1  NumSlopes(A[1...n] ∈ array(ℤ)):
2      s ← 1
3
4      for i ← 2 to n:
5          if A[i − 1] > A[i]:
6              s ← s + 1
7
8      return s
```

Какво връща $\texttt{NumSlopes}(A[1 \ldots n])$? Отговорът да се обоснове.

Задача 3.6. Даден е следният алгоритъм:

```
1  Kadane(A[1...n] ∈ array(ℤ)):
2      max_so_far ← A[1]
3      max_ending_here ← A[1]
4
5      for i ← 2 to n:
6          max_ending_here = max(max_ending_here + A[i], A[i])
7          max_so_far = max(max_ending_here, max_so_far)
8
9      return max_so_far
```

Какво връща $\texttt{Kadane}(A[1 \ldots n])$? Отговорът да се обоснове.

Задача 3.7. Даден е следният алгоритъм:

```
1  FindMajority(A[1...n] ∈ array(ℤ)):
2      m ← A[1]
3      c ← 1
4
5      for i ← 2 to n:
6          if c = 0:
7              m ← A[i]
8              c ← 1
9          else if A[i] = m:
10             c ← c + 1
11         else:
12             c ← c − 1
13
14     return m
```

Да се докаже, че при подаден целочислен масив $A[1 \dots n]$, в който има елемент с повече от $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ срещания, функцията `FindMajority`$(A[1 \dots n])$ ще върне точно този елемент.

Задача 3.8. Да се напише алгоритъм `Calculate`$(F[0 \dots k], S[0 \dots k], n)$, който приема два целочислени масива $F[0 \dots k]$ и $S[0 \dots k]$, естествено число n, и връща числото $T(n)$, където:

$$
\begin{aligned}
T(0) &= F[0] \\
T(1) &= F[1] \\
&\vdots \\
T(k) &= F[k] \\
T(n+k+1) &= S[k] \cdot T(n+k) + \dots + S[1] \cdot T(n+1) + S[0] \cdot T(n).
\end{aligned}
$$

След това да се докаже неговата коректност, и да се изследва сложността му по време.

Задача 3.9. Да се напише алгоритъм `IsDerivationTree`$(G = \langle \Sigma, V, S, R \rangle, T)$, който приема безконтекстна граматика G, дърво T, и проверява дали T е дърво на извод за G. След това да се докаже неговата коректност и да се изследва сложността му по време и памет.

Задача 3.10. Даден е следният алгоритъм:

```
1  SS(A[1...n]; l, h ∈ {1,...,n}):
2      if l ≥ h:
3          return
4
5      if A[l] > A[h]:
6          swap(A[l], A[h])
7
8      t ← (h−l+1)/3
9
10     if t ≥ 1:
11         SS(A[1...n], l, h − t)
12         SS(A[1...n], l + t, h)
13         SS(A[1...n], l, h − t)
```

Какво прави $\texttt{SS}(A[1 \ldots n], 1, n)$ и каква е сложността на този алгоритъм по време и памет? Обосновете отговорите си.

Глава 4

Приложения на сортиращите алгоритми

4.1 Обща информация за някои алгоритми за сортиране

Понякога се оказва много удобно да сортираме входните данни, защото това ни носи полезна информация. Затова е хубаво да се знаят различните алгоритми за сортиране и в какво те са добри. Нека ги сравним по тяхната сложност, като:

- $T_{avg}(n)$ е сложността по време в средния случай;
- $M_{avg}(n)$ е сложността по памет в средния случай;
- $T_{worst}(n)$ е сложността по време в най-лошия случай;
- $M_{worst}(n)$ е сложността по памет в най-лошия случай.

име	$T_{avg}(n)$	$M_{avg}(n)$	$T_{worst}(n)$	$M_{worst}(n)$
пирамидално сортиране	$\Theta(n\log(n))$	$\Theta(1)$	$\Theta(n\log(n))$	$\Theta(1)$
сортиране чрез сливане	$\Theta(n\log(n))$	$\Theta(n)$	$\Theta(n\log(n))$	$\Theta(n)$
бързо сортиране	$\Theta(n\log(n))$	$\Theta(\log(n))$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n)$

Въпреки че алгоритъмът за бързо сортиране е по-бавен в най-лошия случай от пирамидалното сортиране и сортирането чрез сливане, практически се оказва, че се справя по-добре. Разбира се, другите сортировки също имат предимства. Пирамидалното сортиране заема малко памет, което е много полезно във

вградени системи. Сортирането чрез сливане се оказва по-бързо, когато данните са много големи и се съхраняват във външни устройства (да кажем, на твърд диск). Освен тези алгоритми има и други хубави алгоритми като сортиране чрез броене, но за съжаление ние няма да ги разглеждаме тук.

4.2 Два алгоритъма

Ще започнем с два често срещани алгоритъма, които се възползват от това, че данните идват сортирани:

- двоично търсене;
- алгоритъма за задачата **2SUM**.

Нека започнем с алгоритъма за двоично търсене:

```
1  BinarySearch(A[1...n] ∈ array(ℤ); v ∈ ℤ)
2  {
3      l ← 1
4      r ← n
5
6      while l ≤ r:
7          m ← (l+r)/2
8
9          if A[m] = v:
10             return m
11         else if A[m] < v:
12             l ← m + 1
13         else:
14             r ← m − 1
15
16     return −1
```

При подаден сортиран целочислен масив $A[1 \dots n]$ и цяло число v, функцията `BinarySearch`$(A[1 \dots n], v)$ ще върне индекс на $A[1 \dots n]$, в който се намира v, ако има такъв, иначе ще върне -1.

Инвариант 4.2.1. *При всяко достигане на проверката за край на цикъла на ред* 6 *имаме, че стойността* v *не се намира измежду двата масива* $A[1 \dots l-1]$ *и* $A[r+1 \dots n]$.

Доказателство.
База. При първото достигане имаме, че $l = 1$ и $r = n$. Наистина v не се намира измежду двата масива $A[1 \dots 1-1]$ и $A[n+1 \dots n]$.
Поддръжка. Нека твърдението е изпълнено за някое непоследно достигане на проверката за край на цикъла. Тогава v не се намира измежду $A[1 \dots l-1]$ и $A[r+1 \dots n]$, и понеже достигането е непоследно, $l \leq r$. Тогава $m = \left\lfloor \frac{l+r}{2} \right\rfloor$, откъдето $l \leq m \leq r$. Трябва да разгледаме следните три случая:

1 сл. $A[m] = v$ – това няма как да е изпълнено понеже достигането е нефинално;

2 сл. $A[m] < v$ – понеже $A[1 \dots n]$ е сортиран, няма как v да се намира измежду $A[1 \dots m]$, откъдето v не се намира измежду $A[1 \dots \underbrace{\texttt{m}+\texttt{1}}_{l_{new}} -1]$ и $A[r+1 \dots n]$;

3 сл. $A[m] > v$ – напълно дуален на 2 сл.

Терминация. От цикъла винаги ще излезем, защото или ще открием v, или величината $r - l$ ще намалява, докато не стане отрицателна. Излизането става по два начина:

- Ако не е изпълнено условието на ред 6 т.е. $l > r$, то тогава $l - 1 \geq r$ и понеже v не се намира измежду $A[1 \dots l-1]$ и $A[r+1 \dots n]$, v не се намира във $A[1 \dots n]$. Накрая алгоритъмът ще върне -1, което наистина е желания резултат.

- Ако е изпълнено е условието на ред 9 т.е. $A[m] = v$, то тогава алгоритъмът коректно връща m.

□

Сега ще разгледаме алгоритъм за задачата **2SUM**.
Ще искаме алгоритъм, който при подаден сортиран целочислен масив $A[1 \dots n]$ и цяло число t разпознава дали има $1 \leq i < j \leq n$, за които:

$$A[i] + A[j] = t.$$

Такива двойки $(A[i], A[j])$ ще наричаме *диади*.

Алгоритъмът е следния:

```
1  Solve2SUM(A[1...n] ∈ array(ℤ); t ∈ ℤ):
2      (l, r) ← (1, n)
3
4      while l < r:
5          if A[l] + A[r] = t: return 𝕋
6          if A[l] + A[r] < t: l ← l + 1
7          if A[l] + A[r] > t: r ← r − 1
8
9      return 𝔽
```

Инвариант 4.2.2. *При всяко достигане на проверката за край на цикъла на ред* 5*, всички диади са в* $A[l \dots r]$.

Доказателство.
База. При първото достигане имаме, че $l = 1$ и $r = n$. Тогава твърдението е тривиално изпълнено.
Поддръжка. Нека твърдението е изпълнено за някое непоследно достигане на проверката за край на цикъла. Тогава всички диади са в $A[l \dots r]$ и $l < r$. Разглеждаме три случая:

1 сл. $A[l] + A[r] = t$ – това няма как да е изпълнено понеже достигането е нефинално;

2 сл. $A[l]+A[r] < t$ – тогава понеже $A[1 \dots n]$ е сортиран, за всяко $l \leq i \leq r$ имаме, че $A[l]+A[i] \leq A[l]+A[r] < t$, което означава, че l не участва в никоя диада във $A[l \dots r]$, следователно всички диади се намират в $A[\underbrace{l+1}_{l_{new}} \dots r]$;

3 сл. $A[l] + A[r] > t$ – напълно дуален на 2 сл.

Терминация. От цикъла винаги ще излезем, защото или ще открием v, или величината $r-l$ ще намалява, докато не стане 0. Излизането става по два начина:

- Ако не е изпълнено условието на ред 4 т.е. $l \geq r$, то тогава няма диади в $A[1 \dots n]$, и алгоритъмът коректно ще върне $\mathbb{F}$.
- Ако е изпълнено условието на ред 5 т.е. $A[l] + A[r] = t$, то тогава алгоритъмът връща $\mathbb{T}$ т.е. точно това, което искаме.

□

Двата алгоритъма са доста подобни, използват една често срещана техника за търсене в дадено множество от елементи. Търсенето започва с цялото множество и то постепенно се смалява. Разбира се, тук разгледаните алгоритми имат разлика в сложността, поради разликата в стесняването:

- първият алгоритъм има сложност $O(\log(n))$, понеже разликата между r и l винаги намалява двойно;
- вторият алгоритъм има сложност $O(n)$, понеже разликата между r и l винаги намалява с единица.

4.3 Задачи

Задача 4.1. Да се напише колкото се може по-бърз алгоритъм, който приема масив от различни цели числа $A[1 \dots n]$ с $n \geq 3$, за който има $1 < i < n$ такова, че $A[1 \dots i]$ е сортиран възходящо и $A[i \dots n]$ е сортиран низходящо, и връща това i. След това да се докаже неговата коректност, и да се изследва сложността му по време.

Задача 4.2. Да се напише колкото се може по-бърз алгоритъм, който при подаден сортиран целочислен масив $A[1 \dots n]$ и число t, което се намира в масива, връща най-малкият и най-големият индекс, на които t се намира в $A[1 \dots n]$. След това да се докаже неговата коректност, и да се изследва сложността му по време.

Задача 4.3. Да се напише колкото се може по-бърз алгоритъм, който при подаден сортиран целочислен масив $A[1 \dots n]$ и числа $k \geq 2$ и t, връща дали има $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n - 1$, за които:

$$A[i_1] + A[i_2] + \dots + A[i_k] = t.$$

След това да се докаже неговата коректност, и да се изследва сложността му по време.

Задача 4.4. За $a, b, x \in \mathbb{Z}$ казваме, че a е по-близо от b до x, ако:

$$|a - x| < |b - x| \vee (|a - x| = |b - x| \,\&\, a < b).$$

Да се напише колкото се може по-бърз алгоритъм, който приема целочислен масив $A[1 \dots n]$, и връща най-близките k на брой числа до t в $A[1 \dots n]$. След това да се докаже неговата коректност, и да се изследва сложността му по време. Може ли да се напише по-бърз алгоритъм при предположение че $A[1 \dots n]$ е сортиран?

Задача 4.5. Да се напише колкото се може по-бърз алгоритъм, който приема масив $A[1 \dots n]$, съставен от числата $0, 1$ и 2, и го сортира. След това да се докаже неговата коректност, и да се изследва сложността му по време.

Задача 4.6. Да се напише колкото се може по-бърз алгоритъм, който приема масив $I[1 \dots n]$, съставен от двойки числа, които представят някакъв затворен интервал от цели числа ($[a, b]$ за някои $a, b \in \mathbb{Z}$), и връща нов масив, в който са слети всички интервали с непразно сечение. След това да се докаже неговата коректност, и да се изследва сложността му по време.

Задача 4.7. Да се напише колкото се може по-бърз алгоритъм, който приема целочислен масив $A[1 \dots n]$, и връща нов масив от квадратите на $A[1 \dots n]$, който е сортиран. След това да се докаже неговата коректност, и да се изследва сложността му по време.

Задача 4.8. Да се напише колкото се може по-бърз алгоритъм, който приема целочислен масив $A[1 \dots 2n]$, и връща:

$$\min\{\max\{A'[2i] + A'[2i-1] \mid 1 \leq i \leq n\} \mid A'[1 \dots n] \text{ е пермутация на } A[1 \dots n]\}.$$

След това да се докаже неговата коректност, и да се изследва сложността му по време.

Задача 4.9. Да се напише колкото се може по-бърз алгоритъм, който приема два целочислени масива $A[1 \dots n]$ и $B[1 \dots n]$, и връща:

$$\min\{\sum_{i=1}^{n} |A'[i] - B'[i]| \mid A'[1 \dots n] \text{ е пермутация на } A[1 \dots n] \text{ и } B'[1 \dots n] \text{ е пермутация на } B[1 \dots n]\}.$$

След това да се докаже неговата коректност, и да се изследва сложността му по време.