Решения на задачите от първото малко контролно по ДАА на група 5, проведено на 10.04.2024 г.

Задача 1. (50 т.) *Дефинираме вълнист масив индуктивно:*

- *Всеки едноелементен масив е вълнист.*
- *Масив $A[1 \dots n]$ (където $n > 1$) е вълнист, ако*
    1. *масивът $A[1 \dots \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]$ е сортиран, а*
    2. *масивът $A[\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \dots n]$ е вълнист.*

Да се състави алгоритъм с линейна сложност по време, който приема вълнист масив и го сортира. Коректността на алгоритъма да се обоснове формално и да се изследва сложността по време.

Решение. Решението е проста модификация на алгоритъма за сортиране чрез сливане:

```
1 Sort(A[1..n] - вълнист масив):
2     if n = 1:
3         return
4
5     Sort(A[⌊n/2⌋ + 1..n])
6     Merge(A[1..⌊n/2⌋], A[⌊n/2⌋ + 1..n])
```

Тук `Merge` е алгоритъмът за сливане на сортирани масиви, който е изучаван на лекции. Ще покажем коректността на `Sort` с пълна индукция по `n`:

- ако $\mathtt{n} = 1$, то тогава $\mathtt{A}[1..\mathtt{n}]$ е сортиран и алгоритъмът коректно веднага ще приключи работа;
- ако $\mathtt{n} > 1$, то тогава на ред 5 по ИП ще сортираме вълнистия масив $\mathtt{A}[\lfloor \frac{\mathtt{n}}{2} \rfloor + 1..\mathtt{n}]$ и с извикването на ред 6 ще слеем масивите $\mathtt{A}[1..\lfloor \frac{\mathtt{n}}{2} \rfloor]$ и $\mathtt{A}[\lfloor \frac{\mathtt{n}}{2} \rfloor + 1..\mathtt{n}]$, което ще сортира $\mathtt{A}[1..\mathtt{n}]$.

Времевата сложност се описва със следното рекурентно уравнение:

$$T(n) = T(\tfrac{n}{2}) + \Theta(n) \text{ (заради извикванията } \mathtt{Sort} \text{ и } \mathtt{Merge}\text{).}$$

По мастър-теоремата излиза, че $T(n) \asymp n$.

Критерии за оценяване:

- за правилен алгоритъм – 20 точки;
- за доказателство на коректността на алгоритъма – 20 точки;
- за обосновка на сложността по време – 10 точки.

Задача 2. (70 т.) *Подредете по асимптотично нарастване следните функции:*

$$f_1(n) = n! \qquad f_2(n) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \qquad f_3(n) = \sum_{k=1}^{n^3} \frac{1}{k} \qquad f_4(n) = (\ln(n))^{\ln(n)}$$

$$f_5(n) = 3^{n\sqrt{n}} \qquad f_6(n) = \sum_{k=1}^{n!} \frac{1}{k^2} \qquad f_7(n) = \ln(\ln(n)) \qquad f_8(n) = 2^{n^2}.$$

При всяко сравнение на две функции се обосновете формално.

Решение. Окончателната наредба е следната:

$$f_6(n) \overset{(1)}{\prec} f_7(n) \overset{(2)}{\prec} f_3(n) \overset{(3)}{\prec} f_2(n) \overset{(4)}{\prec} f_4(n) \overset{(5)}{\prec} f_1(n) \overset{(6)}{\prec} f_5(n) \overset{(7)}{\prec} f_8(n).$$

Доказателство:

(1) $f_7(n) = \ln(\ln(n)) \succ 1 \asymp \sum\limits_{k=1}^{n!} \frac{1}{k^2} = f_6(n)$.

(2) $f_3(n) = \sum\limits_{k=1}^{n^3} \frac{1}{k} \asymp \ln\big(n^3\big) = 3\ln(n) \asymp \ln(n) \succ f_7(n)$.

(3) $f_2(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(k) = \ln(n!) \asymp n\ln(n) \succ \ln(n) \asymp f_3(n)$.

(4) $f_4(n) = (\ln(n))^{\ln(n)} = n^{\ln(\ln(n))} \succ n\ln(n) \asymp f_2(n)$.

(5) $\ln(f_1(n)) \asymp n\ln(n) \succ \ln(n)\ln(\ln(n)) \asymp \ln(f_4(n))$, откъдето $f_1(n) \succ f_4(n)$.

(6) $\ln(f_5(n)) \asymp n\sqrt{n} \succ n\ln(n) \asymp \ln(f_1(n))$, откъдето $f_5(n) \succ f_1(n)$.

(7) $\ln(f_8(n)) \asymp n^2 \succ n\sqrt{n} \asymp \ln(f_5(n))$, откъдето $f_8(n) \succ f_5(n)$.

Критерии за оценяване:

- за всяко правилно сравнение от (1) до (7) – по 5 точки;
- за обосновка на всяко сравнение от (1) до (7) – по 5 точки.