

Коректност на итеративни алгоритми

Тодор Дуков

Какво имаме предвид под коректност?

За целите на този курс един алгоритъм ще наричаме **коректен**, ако завършва при всякакви входни данни и връща правилния резултат при всякакви входни данни

Забележка. Въпреки че ние ще имаме това разбиране в курса, на практика тези изисквания невинаги са изпълнени:

- разглеждат се алгоритми, които могат и да не завършват за някои входни данни – от теоретична гледна точка са интересни за хората, които се занимават с теорията на изчислимостта
- разглеждат се алгоритми, които много често (но не винаги) връщат правилния резултат – обикновено това се прави с цел бързодействие

Едно “ново” понятие

Специално за итеративните алгоритми се въвежда ново понятие - **инвариант**. Това са специални твърдения, свързани с цикъла. В най-общият случай се формулират по следния начин:

“При k -тото достигане на ред l (ако има няколко инструкции казваме преди/след коя се намираме) в алгоритъма `alg` е изпълнено *някакво твърдение, зависещо от k и променливите, използвани в `alg`*”

Доказателството на такива твърдения протича с добре познатата индукция. Първо доказваме базата т.е. какво се случва при първото достигане на цикъла. Индуктивното предположение и индуктивната стъпка се обединяват в “нова” фаза, наречена **поддръжка**. Довършителните разсъждения, които по принцип се намират след доказването на твърдението чрез индукция, ще наричаме **терминация**. Накрая показваме, че винаги ще излезнем от цикъла. Обикновено това ще го смятаме за очевидно (най-вече за `for`-цикли).

Внимание. Това, за което се използват инвариантите, е да се докаже коректността на ЕДИН цикъл, не на цял алгоритъм. Когато в алгоритъма ни има няколко цикъла, на всеки от тях трябва да съответства по една инвариант.

Пример

Нека разгледаме следния алгоритъм за степенуване на 2:

```
1  int pow2(int n) // тук n ще бъде положително
2  {
3      int result = 1;
4
5      for (int i = 0; i < n; ++i)
6      {
7          result *= 2;
8      }
9
10     return result;
11 }
```

Инвариант. При всяко достигане на проверката за край на цикъла (на ред 5) имаме, че $\text{result} = 2^i$.

База. Наистина при първото достигане имаме, че $i = 0$ и от там $\text{result} = 1 = 2^i$.

Поддръжка. Нека при някое непоследно достигане твърдението е изпълнено. Тогава преди следващото достигане на проверката на `result` присвояваме $\text{result} * 2$, като знаем, че преди `result` е бил 2^i , и след това на `i` присвояваме $i + 1$. Така е ясно, че при новото достигане на проверката `result` ще стане $2^{i_{\text{old}}+1} = 2^i$.

Терминация. Ако е изпълнено условието за край на цикъла, то тогава $i = n$, откъдето ще върнем $\text{result} = 2^n$. Величината $n - i$ започва с n , и намалява с 1, докато не стигне 0, когато ще излезнем от цикъла.

С инвариантите трябва да се внимава

Един от често срещаните капани, в които попадат хората, е да не си формулират инвариантът добре. Много е важно инвариант да дава достатъчна информация за това което наистина се случва в алгоритъма. За целта ще разгледаме един пример:

```
1 int selection_sort(int *arr, int n)
2 {
3     for (int i = 0; i < n - 1; ++i)
4     {
5         int min_index = i;
6
7         for (int j = i + 1; j < n; ++j)
8         {
9             if (arr[j] < arr[min_index])
10                min_index = j;
11        }
12
13        int temp = arr[i];
14        arr[i] = arr[min_index];
15        arr[min_index] = temp;
16    }
17 }
```

На интуитивно ниво е ясно какво прави кода. Намира най-малкия елемент, и го слага на първо място. След това намира втория най-малък елемент, и го слага на второ място, и т.н.

Нещо, което някои биха се пробвали да направят за първия цикъл, е следното:

При всяко достигане на проверката за край на цикъла на ред 3 подмасивът `arr[0...i - 1]` е сортиран.

Проблемът с това твърдение, е че може много лесно да се измисли алгоритъм, за който това твърдение е изпълнено, и изобщо не сортира елементите в масива:

```
1 int trust_me_it_sorts(int *arr, int n)
2 {
3     for (int i = 0; i < n; ++i)
4     {
5         arr[i] = i;
6     }
7 }
```

Очевидно този за този алгоритъм горната инвариант е изпълнена, но той е безсмислен. Получаваме сортиран масив, но за сметка на това губим цялата информация, която сме имали за него.

Нещо друго, което е важно да се направи, е първо да се формулира инвариант за вътрешния цикъл, и после за външния, като тънкият момент тук е, че ще ни трябват допускания за първия инвариант. Идеята е, че външния цикъл разчита на вътрешния да си свърши работата, и обратно вътрешния разчита (не винаги) на външния преди това да си е свършил работата. Ще покажем как трябва да станат инвариантите, като доказателството оставяме за упражнение на читателя. Нека `arr*` е първоначалната стойност на входния масив.

Инвариант (вътрешен цикъл). *При всяко достигане на проверката за край на цикъла на ред 7 имаме, че `min_index` е индексът на най-малкия елемент в масива `arr[i...j - 1]`.*

Инвариант (външен цикъл). *При всяко достигане на проверката за край на цикъла на ред 3 имаме, че масивът `arr[0...i - 1]` съдържа сортирани първите `i` по големина елементи на `arr*`, като останалите са в `arr[i...n - 1]`.*

Обикновено в доказателството на коректност на алгоритми най-трудното е да се формулира инвариантът. Ако човек има добре формулирана инвариант, доказателството е на първо място възможно, а на второ – по-лесно.

Задачи

Задача 1. Да се:

1. напише алгоритъм, който сумира числата в един масив
2. докаже неговата коректност
3. изследва сложността му по време и памет

Задача 2. Даден е следният алгоритъм:

```
1 bool alg(int *arr, int n)
2 {
3     for (int i = 0; i < n - 1; ++i)
4     {
5         for (int j = i + 1; j < n; ++j)
6         {
7             if (arr[i] == arr[j])
8                 return true;
9         }
10    }
11
12    return false;
13 }
```

1. Какво връща той? Отговорът да се обоснове.
2. Каква е неговата сложност по време и памет?

Задача 3. Даден е следният алгоритъм:

```
1 int fib(int n) // n ще бъде поне 0
2 {
3     if (n < 2)
4         return n;
5
6     int a = 0, b = 1;
7
8     for (int i = 1; i < n; ++i)
9     {
10        int temp = a;
11        a = b;
12        b = temp + b;
13    }
14
15    return b;
16 }
```

Да се докаже, че $\text{fib}(n)$ връща n -тото число на Фибоначи.

Задача 4. Даден е следният алгоритъм:

```
1 void mult(int **A, int **B, int **C, int n)
2 {
3     for (int i = 0; i < n; ++i)
4     {
5         for (int j = 0; j < n; ++j)
6         {
7             int cell_sum = 0;
8
9             for (int k = 0; k < n; ++k)
10            {
11                cell_sum += A[i][k] * B[k][j];
12            }
13
14            C[i][j] = cell_sum;
15        }
16    }
17 }
```

Да се докаже че при вход $n \times n$ матрици A, B и C, функцията $\text{mult}(A, B, C, n)$ записва в C произведението на A и B.
Да се намери сложността му по време и памет.