

# Въведение в алгоритмите и асимптотичния анализ

Тодор Дуков

## Що е то алгоритъм?

Алгоритмите се срещат навсякъде около нас:

- рецептите са алгоритми за готвене
- сутрешното приготвяне
- придвижването от точка А до точка В
- търсенето на книга в библиотеката

Въпреки това е трудно да се даде формална дефиниция на това какво точно е алгоритъм. На ниво интуиция, човек може да си мисли, че това просто е някакъв последователен списък от стъпки/инструкции, които човек/машина трябва да изпълни. Други начини човек да си мисли за алгоритмите, са:

- програми – обикновено така се реализират алгоритми
- машини на Тюринг, крайни (стекови) автомати или формални граматики
- частично рекурсивни функции

Един програмист в ежедневието си постоянно пише алгоритми за да решава различни задачи/проблеми. Една задача може да се решава по много начини, някои по-добри от други. Добрият програмист, освен че ще намери решение на проблема, той ще намери най-доброто решение (или поне достатъчно добро за неговите цели).

## Какво означава добро решение?

Хубаво е човек да се води по следните (неизчерпателни) критерии:

- решението трябва да е коректно – ако алгоритъма работи само през 50% от времето, най-вероятно можем да се справим по-добре
- решението трябва да е бързо – ако алгоритъма ще завърши работа след като всички звезди са измрели, то той практически не ни върши работа
- решението трябва да заема малко памет – ако алгоритъма по време на своята работа се нуждае от повече памет, колкото компютъра може да предостави, за нас този алгоритъм е безполезен
- решението трябва да е просто – това е може би най-маловажният критерий от тези, но въпреки това е хубаво когато човек може, да пише чист и разбираем код, който лесно се разширява

За да можем да сравняваме алгоритми в зависимост от това колко големи ресурси (време и памет) използват, трябва първо да можем да “измерваме” тези ресурси.

## Как мерим времето и паметта?

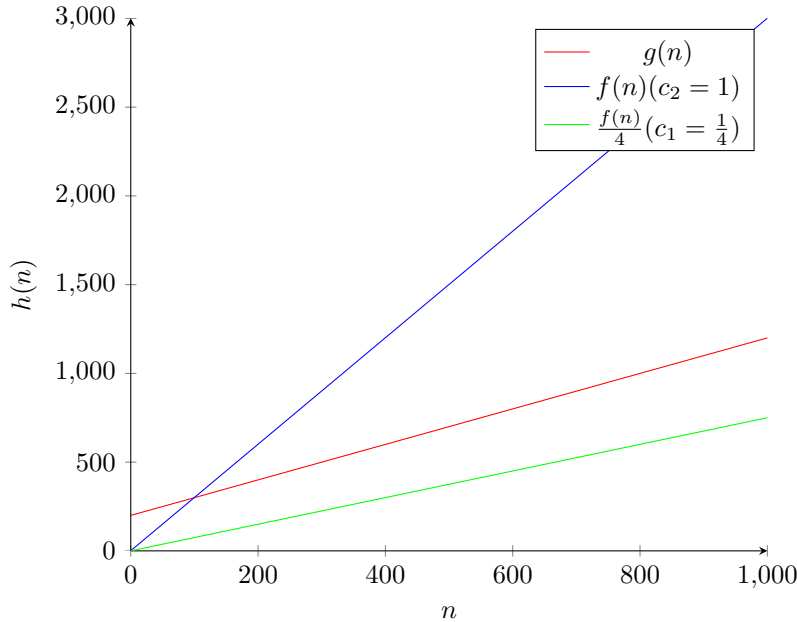
Когато пишем алгоритми, имаме няколко базови инструкции (за които предварително сме се уговорили), които ще наричаме **атомарни инструкции**. Тяхното извикване ще отнеме една единица време. **Време за изпълнение** ще наричаме броят на извикванията на атомарните инструкции по време на изпълнение на програмата. Също така числата и символите ще бъдат нашите **атомарни типове данни**, и ще заемат една единица памет. **Паметта**, която една програма заема, ще наричаме максималния брой на единици от атомарни типове данни по време на изпълнение, без да броим входните данни. Обикновено времето и паметта зависят от размера на подадените входни данни. Това означава, че можем да си мислим за времето и паметта като функции на размера на входа. Подхода, който ще изберем, е да сравняваме функциите за време/памет на различните алгоритми асимптотично. Интересуваме се не толкова от конкретните стойности, а от поведението им, когато размерът на входа клони към безкрайност.

## Няколко дефиниции

Множеството от функции, които ще анализираме, е  $\mathcal{F} = \{f \mid f: \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} \text{ \& } (\exists n_0 > 0)(\forall n \geq n_0)(f(n) > 0)\}$ .  
За всяка функция  $f \in \mathcal{F}$  ще дефинираме следните пет множества:

- $\Theta(f) = \{g \in \mathcal{F} \mid (\exists c_1 > 0)(\exists c_2 > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(c_1 \cdot f(n) \leq g(n) \leq c_2 \cdot f(n))\}$

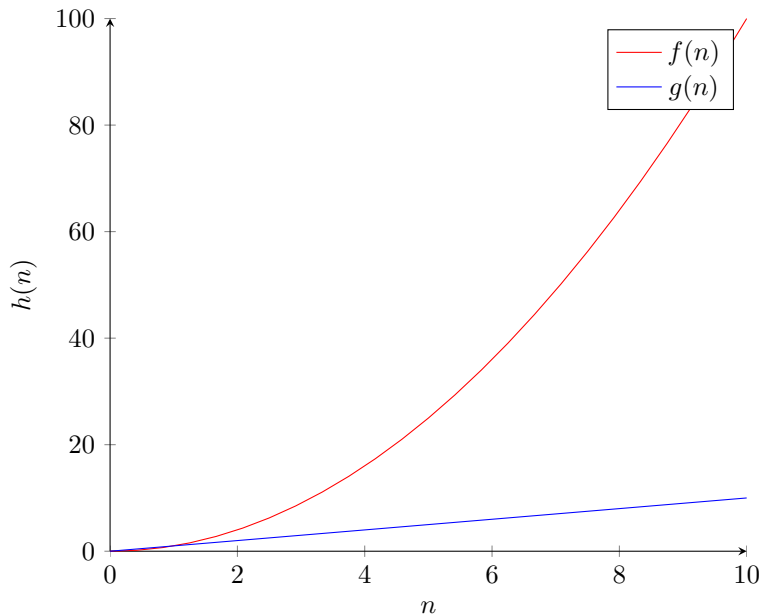
Може да тълкуваме  $\Theta(f)$  като множеството от функциите, които растат\* толкова бързо, колкото  $f$ . Можем да вземем за пример  $f(n) = 3n + 1$  и  $g(n) = n + 200$ :



На картинката се вижда как от един момент нататък, функцията  $f$  остава “заклучена” между  $c_1 \cdot g$  и  $c_2 \cdot g$ . Вместо да пишем  $g \in \Theta(f)$ , ще пишем  $g = \Theta(f)$  или  $g \asymp f$ .

- $O(f) = \{g \in \mathcal{F} \mid (\exists c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(g(n) \leq c \cdot f(n))\}$

Може да тълкуваме  $O(f)$  като множеството от функциите, които не растат\* по-бързо от  $f$ . Тук заслабваме условията от  $\Theta(f)$  като искаме само горната граница. Нека вземем за пример  $f(n) = n^2$  и  $g(n) = n$ :



Вместо да пишем  $g \in O(f)$ , ще пишем  $g = O(f)$  или  $g \preceq f$ .

- $o(f) = \{g \in \mathcal{F} \mid (\forall c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(g(n) < c \cdot f(n))\}$

Може да тълкуваме  $o(f)$  като множеството от функциите, които растат\* по-бавно от  $f$ . Разликата между  $O(f)$  и  $o(f)$  е строгото неравенство и универсалният квантор в началото. Лесно се вижда, че  $o(f) \subseteq O(f)$ . Тук изключваме функциите от същия порядък. Вместо да пишем  $g \in o(f)$ , ще пишем  $g = o(f)$  или  $g \prec f$ .

\*точност до константен множител и константно събираемо

- $\Omega(f) = \{g \in \mathcal{F} \mid (\exists c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(c \cdot f(n) \leq g(n))\}$

Може да тълкуваме  $\Omega(f)$  като множеството от функции, които не растат\* по-бавно от  $f$ . Това е дуалното множество на  $O(f)$ . Вместо да пишем  $g \in \Omega(f)$ , ще пишем  $g = \Omega(f)$  или  $g \succeq f$ .

- $\omega(f) = \{g \in \mathcal{F} \mid (\forall c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(c \cdot f(n) < g(n))\}$

Може да тълкуваме  $\omega(f)$  като множеството от функции, които растат\* по-бързо от  $f$ . Това е дуалното множество на  $o(f)$ . Вместо да пишем  $g \in \omega(f)$ , ще пишем  $g = \omega(f)$  или  $g \succ f$ .

## Няколко полезни свойства

Тук ще изберем няколко свойства, които много често се ползват в задачите:

- Нека  $f, g \in \mathcal{F}$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = l$  (тук искаме границата да съществува). Тогава:
  - ако  $l = 0$ , то  $f \prec g$
  - ако  $l = \infty$ , то  $f \succ g$
  - в останалите случаи  $f \asymp g$
- $f + g \asymp \max\{f, g\}$  за всяко  $f, g \in \mathcal{F}$
- $c \cdot f \asymp f$  за всяко  $f \in \mathcal{F}$  и  $c > 0$
- $f \asymp g \iff f^c \asymp g^c$  за всяко  $f, g \in \mathcal{F}$  и  $c > 0$
- $O(f) \cap \Omega(f) = \Theta(f)$  за всяко  $f \in \mathcal{F}$
- $o(f) \cap \omega(f) = O(f) \cap \omega(f) = o(f) \cap \Omega(f) = \emptyset$  за всяко  $f \in \mathcal{F}$
- $f \prec g \iff g \succ f$  и  $f \preceq g \iff g \succeq f$  за всяко  $f, g \in \mathcal{F}$
- ако  $f \prec g$ , то  $c^f \prec c^g$  за всяко  $f, g \in \mathcal{F}$  и  $c > 1$
- ако  $\log_c(f) \prec \log_c(g)$ , то  $f \prec g$  за всяко  $f, g \in \mathcal{F}$  и  $c > 1$
- ако  $c^f \asymp c^g$ , то  $f \asymp g$  за всяко  $f, g \in \mathcal{F}$  и  $c > 1$
- ако  $f \asymp g$ , то  $\log_c(f) \asymp \log_c(g)$  за всяко  $f, g \in \mathcal{F}$  и  $c > 1$
- тъй като  $\log_a(n) = \frac{\log_b(n)}{\log_b(a)}$ , то  $\log_a(n) \asymp \log_b(n)$  – вече ще пишем само  $\log(n)$  като ще имаме предвид  $\log_2(n)$
- $n! \asymp \sqrt{n} \frac{n^n}{e^n}$  – апроксимация на Стирлинг
- $\log(n!) \asymp n \log(n)$
- $\log(n) \prec n^k \prec 2^n \prec n! \prec n^n \prec 2^{n^2}$  за всяко  $k \geq 1$

## Задачи

Задача 1. Да се сравнят асимптотично следните двойки функции:

1.  $f(n) = \log(\log(n))$  и  $g(n) = \log(n)$
2.  $f(n) = 5n^3$  и  $g(n) = n\sqrt{n^9 + n^5}$
3.  $f(n) = n5^n$  и  $g(n) = n^2 3^n$
4.  $f(n) = n^n$  и  $g(n) = 3^{n^2}$
5.  $f(n) = 3^{n^2}$  и  $g(n) = 2^{n^3}$

Задача 2. Да се докаже, че  $\sum_{i=0}^n i^k \asymp n^{k+1}$

Задача 3. Да се подредят по асимптотично нарастване следните функции:

$$\begin{array}{llll}
 f_1(n) = n^2 & f_2(n) = \sqrt{n} & f_3(n) = \log^2(n) & f_4(n) = \sqrt{\log(n)!} \\
 f_5(n) = \sum_{k=2}^{\log(n)} \frac{1}{k} & f_6(n) = \log(\log(n)) & f_7(n) = 2^{2^{\sqrt{n}}} & f_8(n) = \binom{n}{3} \\
 f_9(n) = 2^{n^2} & f_{10}(n) = 3^{n\sqrt{n}} & f_{11}(n) = 2^{\binom{n}{2}} & f_{12}(n) = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{2^k}
 \end{array}$$