# Класове на сложност **P** и **NP**

Тодор Дуков

## Какво имаме предвид под класове на сложност?

При решаването на различни видове задачи, които ни интересуват, е естествено да се опитаме да ги класифицираме по това колко са *"сложни"*. Това сме го виждали вече – в курса по ЕАИ сме класифицирали различни езици спрямо това каква машина може да решава въпроса за принадлежност към съответния език. Тук ще направим нещо подобно, разликата ще бъде в това, че ще се интересуваме от това за какво време се решава една задача.

- Класът на сложност **P** ще бъде множеството от всички изчислителни задачи за разпознаване, за които съществува алгоритъм с полиномиална времева сложност при най-лоши входни данни.
- Класът на сложност **NP*** ще бъде множеството от всички изчислителни задачи за разпознаване, за които съществува алгоритъм с полиномиална времева сложност при всякакви входни данни, проверяващ отговора ДА на задачата с помощта на допълнителен параметър, наречен **сертификат**, който зависи от входните данни на задачата и чиято дължина е полиномиална спрямо тяхната

Нека дадем пример за сертификат. Да кажем, че търсим отговор на въпроса

*Вярно ли е, че уравнението* $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0$ *има реален корен?*

По-лесно ще бъде да верифицираме някое предложено решение т.е. да отговорим на въпроса

*Вярно ли е, че реалното число* $x_0$ *е корен на уравнението* $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0$*?*

В него имаме още един параметър – предложеното решение $x_0$. В този случай това ще бъде сертификатът. Въпреки, че в примера е направено така, не е нужно сертификата да се използва. Той е само помощен, и съществуването му е нужно само при отговор ДА. Ясно е, че при отговор НЕ няма и как да има сертификат.
Неформално казано, в класа **P** се намират задачите, които се решават *"бързо"* (за полиномиално време), а в класа **NP** се намират задачите, чиито решения се верифицират *"бързо"*. Лесно може да се види, че $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$. Ако една задача може да се реши за полиномиално време без да използва сертификат, то тогава тя може да се реши и със използване на сертификат.

## Няколко важни задачи за класа NP

Следните задачи за изключително важни за класа **NP** (по-късно ще разберем защо):

- Задачата **SAT**:

  **Вход:** Съждителна формула $\varphi$ в конюнктивна нормална форма.

  **Въпрос:** Има ли оценка, в която $\varphi$ е вярна?

- Задачата **3SAT**:

  **Вход:** Съждителна формула $\varphi$ в конюнктивна нормална форма, при която във всяка дизюнктивна клауза участват точно три литерала.

  **Въпрос:** Има ли оценка, в която $\varphi$ е вярна?

- Задачата **SubsetSum**:

  **Вход:** Масив $A[1 \dots n]$ от положителни числа и естествено число $s$.

  **Въпрос:** Има ли $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, за което $\sum\limits_{i \in I} A[i] = s$?

- Задачата **2Partition**:

  **Вход:** Масив $A[1 \dots n]$ от положителни числа.

  **Въпрос:** Има ли $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, за което $\sum\limits_{i \in I} A[i] = \sum\limits_{i \in \{1,\dots,n\} \setminus I} A[i]$?

*За този клас има и алтернативна дефиниция – в нея не е нужен сертификат, но се допуска алгоритъмът да е недетерминиран. Идеята е, че той едновременно *"познава"* правилния отговор, и го верифицира.

- Задачата **VertexCover**:

  **Вход:** Граф $G = \langle V, E \rangle$ и естествено число $k$.

  **Въпрос:** Има ли $X \subseteq V$, за което $|X| \leq k$ и $X$ съдържа поне един край на всяко ребро от $E$?

- Задачата **DominatingSet**:

  **Вход:** Граф $G = \langle V, E \rangle$ и естествено число $k$.

  **Въпрос:** Има ли $X \subseteq V$, за което $|X| \leq k$ и всеки връх от $V \setminus X$ е съседен на някой от $X$?

- Задачата **Clique**:

  **Вход:** Граф $G = \langle V, E \rangle$ и естествено число $k$.

  **Въпрос:** Има ли клика $X \subseteq V$, за която $|X| \geq k$?

- Задачата **Anticlique**:

  **Вход:** Граф $G = \langle V, E \rangle$ и естествено число $k$.

  **Въпрос:** Има ли антиклика $X \subseteq V$, за която $|X| \geq k$?

- Задачата **HamiltonianPath**:

  **Вход:** Граф $G = \langle V, E \rangle$ и два върха $s, e \in V$.

  **Въпрос:** Има ли хамилтонов път в $G$ от $s$ до $e$?

- Задачата **SubgraphIsomorphism**:

  **Вход:** Два графа $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ и $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$.

  **Въпрос:** Има ли подграф $G$ на $G_1$, който е изоморфен на $G_2$?

- Задачата **TSP**:

  **Вход:** Тегловен граф $G = \langle V, E, w \rangle$ и естествено число $k$.

  **Въпрос:** Има ли хамилтонов път в $G$ с тегло ненадвишаващо $k$?

Нека покажем за някои от тях, че попадат в класа **NP**.
Да започнем със **SAT**. Трябва да предложим полиномиален алгоритъм, който с помощта на сертификат проверява за отговор ДА. Сертифкатът ще бъде оценката. Оценката може да се представи като масив от променливи $V[1 \dots k]$, чиито членове са променливите, които имат стойност истина. Ясно е, че тази кодировка е с полиномиална относно формулата дължина. При дадена оценка, лесно можем да видим дали формулата е вярна:

```
SAT(φ - съждителна формула в КНФ, V[1...k] - сертификат):
    за всеки дизюнкт D във φ:
        ако има литерал L в D, за който (L = x и x ∈ V[1...k]) или (L = x̄ и x ∉ V[1...k]):
            продължи нататък
        иначе:
            върни False

    върни True
```

Този алгоритъм очевидно работи за полиномиално време. Наистина, той проверява дали $V[1 \dots k]$ задава оценка, в която $\varphi$ е вярна. Така **SAT** е в класа **NP**. Тъй като **3SAT** е просто по-лесна версия на **SAT**, тя също попада в класа **NP**.
Нека сега видим, че **SubsetSum** е в класа **NP**. Тук сертификатът ще бъде масив $I[1 \dots k]$, който ще представя множество от индекси за входния масив. При дадено множество от индекси, лесно можем да проверим дали е изпълнено условието за сумата:

```
SubsetSum(A[1...n] - масив от положителни числа, s - естествено число, I[1...k] - сертификат):
    инициализирай S със 0

    за всяко i от 1 до k:
        прибави A[I[i]] към S

    върни дали S = s?
```

Този алгоритъм очевидно работи за полиномиално време. Наистина, той проверява дали $I[1 \dots k]$ задава подмножество $I$ на $\{1, \dots, n\}$, за което $\sum\limits_{i \in I} A[i] = s$. Така **SubsetSum** е в класа **NP**.

Да видим сега, че **VertexCover** е в класа **NP**. Тук сертификатът ще бъде масив $X[1 \dots n]$, който ще представя множеството от върховете, които ще образуват потенциално върхово покритие. При дадено множество от върхове, лесно можем да видим дали то е върхово покритие с размер най-много $k$:

```
VertexCover(G = (V, E) - граф, k - естествено число, X[1...n] - сертификат):
    ако n > k:
        върни False

    за всяко ребро (u, v) ∈ E:
        ако u ∉ X[1...n] и v ∉ X[1...n]:
            върни False

    върни True
```

Този алгоритъм очевидно работи за полиномиално време. Наистина, той проверява дали $X[1 \dots n]$ задава върхово покритие на $G$ с най-много $k$ елемента. Така **VertexCover** е в класа **NP**.
Сега ще покажем, че **Clique** е в класа **NP**. Тук сертификатът ще бъде масив $X[1 \dots n]$, който ще представя множеството от върховете, които ще образуват потенциална клика. При дадено множество от върхове, лесно можем да видим дали то е клика с размер поне $k$:

```
Clique(G = (V, E) - граф, k - естествено число, X[1...n] - сертификат):
    ако n < k:
        върни False

    за всеки връх u ∈ X[1...n]:
        за всеки връх v ∈ X[1...n]:
            ако u ≠ v и (u, v) ∉ E:
                върни False

    върни True
```

Този алгоритъм очевидно работи за полиномиално време. Наистина, той проверява дали $X[1 \dots n]$ задава клика в $G$ с поне $k$ елемента. Така **Clique** е в класа **NP**.

## Задачи

*Задача* 1. Да се докаже, че следните задачи са в класа **NP**:

- **2Partition**;
- **DominatingSet**;
- **Anticlique**;
- **HamiltonianPath**;
- **SubgraphIsomorphism**;
- **TSP**.

*Задача* 2. Разглеждаме задачата **StarFreeRegexIneq**:

**Вход:** Два регулярни израза $r_1$ и $r_2$, в които не участва $*$.
**Въпрос:** Вярно ли е, че $\mathcal{L}[\![r_1]\!] \neq \mathcal{L}[\![r_2]\!]$?

Да се докаже, че задачата **StarFreeRegexIneq** е в класа **NP**.

*Задача* 3. Разглеждаме задачата **ChromaticNumber**:

**Вход:** Граф $G = \langle V,\ E \rangle$ и естествено число $k$.
**Въпрос:** Вярно ли е, че хроматичното число на $G$ не надвишава $k$?

Да се докаже, че задачата **ChromaticNumber** е в класа **NP**.