Table des matières

Chapitre IX

Espaces Préhilbertiens

I – Produits scalaires usuels

1 – Produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Proposition 1

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Le produit scalaire canonique de A par B est défini par :

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}b_{i,j} = \mathrm{tr}(A^\top B).$$

Remarque 2 — Si A, B et C sont des matrices de tailles adéquates, on a :

$$\langle AB, C\rangle = \langle B, A^\top C\rangle = \langle A, CB^\top\rangle.$$

Remarque 3 — Si $p = 1$, on travaille avec des vecteurs colonnes.
Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, comme on assimile $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$:

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \mathrm{tr}(X^\top Y) = X^\top Y.$$

2 – Produit scalaire intégral

Proposition 4

Soit $f, g \in C^0([0,1], \mathbb{R})$. L'application suivante est un produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 5

De même, si $\theta \in C^0([0,1], \mathbb{R}_+^*)$, l'application suivante est également un produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\theta(t)\,\mathrm{d}t.$$

3 – Produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

Proposition 6

Sur l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels $\mathbb{R}[X]$, on peut définir un produit scalaire par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

II – Orthogonalité et projection orthogonale

Soit E un espace préhilbertien, muni d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$.

1 – Généralités

Définition 7 — Orthogonal et orthogonal d'une partie

- Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, on note $A^\perp$ l'orthogonal de A défini par :
$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0\}.$$
- Soit $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$, $A \perp B$ signifie que pour tout $x \in A$ et pour tout $y \in B$, on a $\langle x, y \rangle = 0$. Cela est équivalent à $A \subset B^\perp$ ou $B \subset A^\perp$, c'est-à-dire :
$$A \perp B \iff \forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad \langle x, y \rangle = 0 \iff A \subset B^\perp \text{ ou } B \subset A^\perp.$$