

RPDI - Lista 1

Zad. 1. (10 pkt) Wykazać za pomocą indukcji prawdziwość zasady włączeń i wyłączeń. **Uwaga:** na wykładzie został zaprezentowany alternatywny dowód i chciałbym podkreślić, że zaprezentowanie tamtego dowodu ze sztucznie dodaną indukcją (krok indukcyjny niezależny od założenia indukcyjnego) nie będzie uznawane jako prawidłowe rozwiązanie. Co więcej, to zadanie **może okazać się dosyć żmudne**, dlatego proszę zwrócić szczególną uwagę na dobre przygotowanie się do prezentacji tego zadania, tak aby trwała ona **co najwyżej 15 minut**.

Zad. 2. (5 pkt) Wybieramy losowo (z jednostajnym prawdopodobieństwem) liczbę naturalną z przedziału $[1, 1000000]$. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że wybrana liczba jest podzielna przez co najmniej jedną z liczb: 4, 6 lub 9.

Zad. 3. (5 pkt) Dane są $\mathbb{P}(A') = 1/3$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$, $\mathbb{P}(A \cup B) = 2/3$. Obliczyć $\mathbb{P}(B')$, $\mathbb{P}(A \cap B')$, $\mathbb{P}(B \setminus A)$.

Zad. 4. (10 pkt) Niech $A \cup B \cup C = \Omega$, $\mathbb{P}(B) = 2\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(C) = 3\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C)$. Pokaż, że $1/6 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1/4$. Uzasadnij, że są to najlepsze możliwe oszacowania.

Zad. 5. (10 pkt) Z jeziora wyłowiono 200 ryb, oznakowano je i wpuszczono do wody. Po pewnym czasie wyłowiono 100 ryb, a wśród nich było 8 oznakowanych. Za rozsądną ocenę liczby ryb w jeziorze można uznać liczbę ryb, dla której zrealizowało się zdarzenie o największym prawdopodobieństwie. Jaka to liczba?

Zad. 6. (10 pkt) Z 24 kart talii do gry w pokera (dziewiątki, dziesiątki i wszystkie figury) wybieramy 5. Obliczyć szanse otrzymania następujących układów: para, dwie pary, straight (karty tworzą sekwens¹, kolory dowolne, byle nie jednakowe), trójka, full (trójka i para), kareta (cztery karty tej samej wartości), kolor (wszystkie karty w tym samym kolorze, ale nie poker) i poker (sekwens, w tym samym kolorze). **Uwaga:** nie liczymy możliwości, w których dany układ jest podzbiorem innego, np. układu z dwoma uzyskanymi parami nie uwzględniamy przy zliczaniu układów z jedną parą, fulli nie liczymy jako trójek, itp.

Zad. 7. (10 pkt) W Lotto losuje się 6 liczb z 49. Jaka jest szansa, że żadne dwie nie będą kolejnymi?

Zad. 8. (5 pkt) Towarzystwo składa się z n pań i n panów. Tworzymy zespół par z tego towarzystwa. Nie jest konieczne, aby w skład zespołu wchodziły wszystkie panie i wszyscy panowie. Ile jest sposobów utworzenia takiego zespołu? **Uwaga:** nie trzeba znajdować postaci zwartej wyniku.

Zad. 9. (5 pkt) Parking samochodowy posiada 12 miejsc ustawionych w jednym rzędzie. 8 aut zaparkowało na nim tak, że pozostały 4 wolne miejsca jedno obok drugiego. Czy uporządkowanie to jest przypadkowe (obliczyć prawdopodobieństwo)?

¹Kilka kolejnych co do wartości kart w tym samym kolorze.