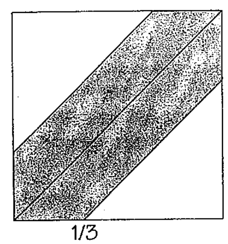
Warto narysować oba zdarzenia i przekonać się, że powyższy wzór wynika natychmiast ze wzoru na pole prostokąta. Nieco później okaże się, że jest to definicja niezależności zdarzeń. Na razie, przy intuicyjnym rozumieniu niezależności, nietrudno zgodzić się, że czasy przybycia koleżanek powinny być niezależne.



Właściwie to już tu pojawia się niezależność zmiennych losowych!

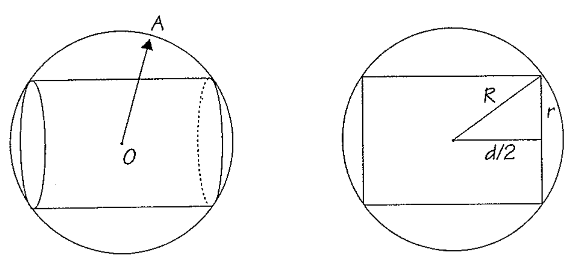
Jakie są szanse, że dojdzie do spotkania? Takie, jak pole zacienionego obszaru na rysunku (jest to zbiór punktów $(t_1, t_2) \in [0,1]\times[0,1]$ spełniających warunek $|t_1 - t_2| \leqslant \frac{1}{3}$), czyli $1 - (\frac{2}{3})^2 = \frac{5}{9}$. ■

Rzut monetą też może prowadzić do zadania typu „prawdopodobieństwo geometryczne".

Przykład 2 (Gruba moneta). Jaką grubość powinna mieć moneta, żeby prawdopodobieństwo upadnięcia na kant wynosiło $\frac{1}{3}$?

John von Neumann podobno rozwiązał to zadanie w 15 sekund.

Model, który tu proponujemy, jest skrajnym uproszczeniem tego, co w rzeczywistości dzieje się przy rzucie monetą. Otóż wiadomo, że bryła umieszczona na płaskiej powierzchni nie przewraca się, jeśli rzut środka ciężkości znajduje się wewnątrz powłoki wypukłej rzutu podstawy. Jeśli zatem wektor siły ciężkości przebije pobocznicę walca (monety), to przyjmiemy, że moneta nie przewróci się i upadnie na kant.



Zbiorem zdarzeń elementarnych może być sfera, opisana na walcu. Jeśli wektor o początku O i końcu w punkcie A, losowo wybranym ze sfery, przebija pobocznicę walca, to moneta pada na kant. Wymiary monety muszą

więc być takie, by pas wycięty ze sfery przez pobocznicę walca miał pole równe $\frac{1}{3}$ pola całej sfery, co oznacza, że jego szerokość d musi być równa $\frac{2}{3}$ promienia sfery. Przy oznaczeniach z rysunku (r — promień monety) mamy

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 + r^2 = R^2,$$

a ponieważ $\frac{d}{2} = \frac{1}{3}R$, to

$$r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R,$$

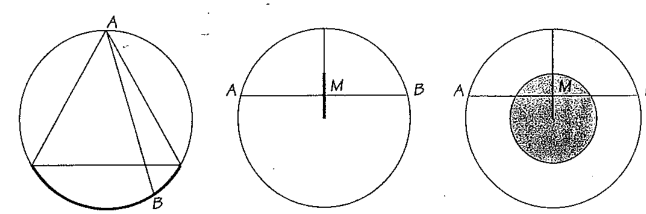
skąd $\frac{r}{d} = \sqrt{2}$. ■

Pas wycięty ze sfery ma pole proporcjonalne do szerokości. Tak się dzieje przypadkiem w trzech wymiarach.

Dość często osoby rozwiązujące to zadanie proponują jeszcze prostszy model, mianowicie zbiorem zdarzeń elementarnych miałby być zamiast sfery okrąg, bowiem sytuacja jest niezmiennicza ze względu na obroty wokół osi monety. Moneta zostaje zatem zredukowana do prostokąta, sfera zaś do okręgu. Wtedy jednak otrzymuje się inną odpowiedź. Warto się zastanowić, dlaczego (być może po lekturze rozdziału 6).

W następnym przykładzie (paradoksie Bertranda) i zadaniu 7 (o igle Buffona) robimy podobne uproszczenia — ale tym razem nie ma to wpływu na odpowiedź.

Przykład 3 (Paradoks Bertranda). Z okręgu o promieniu 1 wybrano losowo cięciwę AB. Jaka jest szansa, że będzie ona dłuższa niż bok trójkąta równobocznego, wpisanego w okrąg?



1. Jeśli umieścimy trójkąt tak, by jednym z wierzchołków był punkt A, to — jak widać z rysunku — warunek zadania będzie spełniony, jeśli B wpadnie do pogrubionego łuku, czyli jeśli kąt środkowy, oparty na cięciwie, będzie większy niż $2\pi/3$. Prawdopodobieństwo tego zdarzenia wynosi $\frac{1}{3}$.
2. Można wybrać odległość środka cięciwy M od środka okręgu. Rysunek sugeruje, że szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{2}$.

3. Może jednak należałoby wziąć pod uwagę kierunek promienia? Wybierzmy punkt M i dorysujmy do niego promień i cięciwę. Teraz wygląda na to, że szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{4}$.

Jakie jest źródło paradoksu? We wszystkich trzech przypadkach ogólny schemat jest ten sam: losujemy zdarzenie elementarne $\omega \in \Omega$, a długość cięciwy jest pewną funkcją $f(\omega)$. Za każdym razem jednak mamy do czynienia z inną przestrzenią Ω i inną funkcją:

1. $\Omega = [0, 2\pi)$, $f(\omega) = 2\sin\frac{\omega}{2}$;
2. $\Omega = [0,1]$, $f(\omega) = 2\sqrt{1-\omega^2}$;
3. Ω jest kołem o promieniu 1, wobec tego $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ i

$$f(\omega) = 2\sqrt{1-(\omega_1^2+\omega_2^2)}.$$

Prawdopodobieństwo jest zawsze rozłożone „równo" na odpowiednim zbiorze. Mamy tu do czynienia z trzema różnymi zadaniami, stąd trzy różne wyniki. ■

Należy zwrócić uwagę, że termin „losowo" nie znaczy nic, dopóki nie podamy modelu doświadczenia, czyli przestrzeni probabilistycznej.

Jaką metodą wybierzemy metodę głosowania? *Fragment dialogu z filmu „Rejs"*

Paradoks Bertranda jest dobrą ilustracją faktu, że rozwiązanie problemu następuje dopiero po wybraniu przestrzeni probabilistycznej. Jednak sam rachunek prawdopodobieństwa nie rozstrzyga, jaką przestrzeń probabilistyczną, czyli jaki model doświadczenia należy wybrać. Rachunek prawdopodobieństwa pozwala jedynie obliczać prawdopodobieństwa pewnych zdarzeń, jeśli znane są prawdopodobieństwa innych zdarzeń. Tylko tyle i aż tyle.

Zadania

1. Z kwadratu jednostkowego wybrano losowo punkt o współrzędnych (x, y). Wyznaczyć funkcje:
a) $f(a) = P(\min(x, \frac{1}{2}) < a)$,
b) $g(a) = P(\max(x, \frac{1}{3}) < a)$,
c) $h(a) = P(\min(x, y) < a)$,
d) $k(a) = P(\max(x, y) < a)$.

2. Na odcinku $[0,1]$ umieszczono losowo punkty L i M.
a) jaka jest szansa, że środek odcinka LM należy do $[0, 1/3]$?
b) jaka jest szansa, że z L jest bliżej do M niż do zera?

3. Na odcinku $[0,1]$ umieszczono losowo punkty A_1, A_2, A_3. Jaka jest szansa, że $A_1 \leqslant A_2 \leqslant A_3$?

4. Z przedziału $[0,1]$ wybrano losowo dwa punkty, które podzieliły go na trzy odcinki. Jaka jest szansa, że z tych odcinków da się skonstruować trójkąt?

5. W czasach, gdy autorzy tej książki chodzili do szkoły, na strzelnicach można było grać w następującą grę: na duży stół, na którym namalowano dość grubymi liniami kratę, rzucało się monetę. Jeśli moneta przecięła linię, zostawała na stole. W przeciwnym razie gracz zabierał wszystkie leżące na stole monety, oprócz jednej. Przypuśćmy teraz, że moneta ma promień d, a linie o grubości c umieszczone są w odległości a (dokładniej, a jest odległością między środkami linii). Jaka jest szansa, że moneta nie przetnie linii?

6. Abstrakcyjny wariant poprzedniego zadania. Na nieskończoną szachownicę o boku a rzuca się monetę o średnicy $2r < a$. Jaka jest szansa, że a) moneta znajdzie się całkowicie we wnętrzu jednego z pól; b) przetnie się z co najwyżej jednym bokiem szachownicy?

7. Igła Buffona[1]. Igłę o długości l rzucono na podłogę z desek o szerokości a $(l \leqslant a)$. Jaka jest szansa, że igła przetnie krawędź deski?

8. Rozwiązać zadanie 7, gdy $l > a$ (dla tych, którzy nie boją się rachunków). Autorom wygodniej uznać, że się boją

***9. Uogólnienie zadania o igle Buffona.** Na płaszczyznę, podzieloną prostymi równoległymi na pasy o szerokości równej 1, rzucono losowo wielokąt wypukły o średnicy mniejszej niż 1. Znaleźć prawdopodobieństwo, że przetnie on jakąś prostą.
„Losowo" oznacza, że wybieramy pewien odcinek, sztywno związany z wielokątem, i rzucamy go losowo w sensie poprzedniego zadania. Tak zdefiniowana „losowość" nie zależy od wyboru odcinka.

10. Na płaszczyźnie jest nieskończenie wiele prostych równoległych, w odległościach na przemian 2 i 10 cm. Na płaszczyznę rzucono okrąg o promieniu 3 cm. Jaka jest szansa, że nie przetnie on żadnej prostej?

***11.** Z przedziału $[0,1]$ wybrano losowo przeliczalnie wiele punktów. Udowodnić, że zdarzenie A, polegające na tym, że każdy podprzedział zawiera co najmniej jeden z wylosowanych punktów, ma prawdopodobieństwo 1.

12. Z przedziału $[0,1]$ wybrano losowo liczbę x. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to liczba wymierna? Niewymierna?

Gruba moneta jeszcze raz. Oto dane z próby weryfikacji modelu zaproponowanego w przykładzie 2: w serii 500 rzutów monetą (sklejoną z pięciu pięciogroszówek) o średnicy 19,4 mm i grubości 6,7 mm wypadło 176 orłów (35,2%), 170 reszek (34,0%) i 154 „kanty" (30,8%). Monetę rzucano na wykładzinę dywanową z wysokości 10–20 cm. Okazało się, że przy rzutach na podłogę drewnianą „kant" wypada bardzo rzadko ze względu na odbicia sprężyste[2].

Model przewiduje szansę upadku na „kant" równą 32,64%, zgodność jest więc bardzo dobra. Dokładniej, szansa uzyskania gorszego dopasowania do częstości teoretycznych wynosi ok. 60%. Taką wartość otrzymuje się z testu χ^2 (którego nie znajdziemy w tej książce). Zamiast niego Czytelnik może spróbować zastosować twierdzenie de Moivre'a–Laplace'a z rozdziału 7.

[1] Georges Louis Leclerc de Buffon opublikował wzmiankę o tym doświadczeniu w 1735 roku, chcąc zademonstrować „przewagę geometrii nad analizą" w teorii prawdopodobieństwa. Laplace zauważył, że można w ten sposób wyznaczać doświadczalnie liczbę π.
[2] Doświadczenie wykonał Filip Świtała (student Wydz. Ekonomii UW).