Lista 3

tags: `AiSD`

Zadanie 1

```
//gcd(n, n) = n
if a == b:
    return a

//gcd(0, n) = gcd(n, 0) = n
if a == 0:
    return b
if b == 0:
    return a

if a i b parzyste:
    return 2 * gcd(a/2, b/2)

if a nieparzyste i b parzyste:
    return gcd(a, b/2)
```

Zadanie 3

3. (1,5pkt) *Otoczką wypukłą* zbioru P, punktów na płaszczyźnie, nazywamy najmniejszy wielokąt wypukły zawierający (w swoim wnętrzu lub na brzegu) wszystkie punkty z P. Naturalny, oparty na zasadzie dziel i zwyciężaj, algorytm znajdowania otoczki wypukłej dla zbioru P, dzieli P na dwa (prawie) równoliczne podzbiory (np. "pionową" prostą), znajduje rekurencyjnie otoczki wypukłe dla tych podzbiorów, a następnie scala te otoczki. Podaj algorytm wykonujący tę ostatnią fazę algorytmu, tj. algorytm scalania dwóch otoczek wypukłych.

Zadanie 4

4. Dane jest nieukorzenione drzewo z naturalnymi wagami na krawędziach oraz liczba naturalna C.

   (a) (2pkt) Ułóż algorytm obliczający, ile jest par wierzchołków odległych od siebie o C.

Zadanie 7

7. (2pkt) Macierz A rozmiaru $n \times n$ nazywamy macierzą Toeplitza, jeśli jej elementy spełniają równanie $A[i,j] = A[i-1, j-1]$ dla $2 \leq i, j \leq n$.

   (a) Podaj reprezentację macierzy Toeplitza, pozwalającą dodawać dwie takie macierze w czasie $O(n)$.

   (b) Podaj algorytm, oparty na metodzie "dziel i zwyciężaj", mnożenia macierzy Toeplitza przez wektor. Ile operacji arytmetycznych wymaga takie mnożenie?

a) Dodawanie macierzy w $O(n)$

Zauważmy, że w macierzy Toeplitza wiele komórek się powtarza, zatem wystarczy, że policzymy sumę dla każdej unikalnej komórki. W tym celu wprowadzimy jednowymiarową tablicową reprezentację macierzy, w której na przedziale $[0, n]$ trzymamy pierwszy wiersz macierzy oraz na przedziale $[n, 2n-1]$ pierwszą jej kolumnę. Widzimy, że dodanie takich tablic można wykonać w czasie $O(n)$.

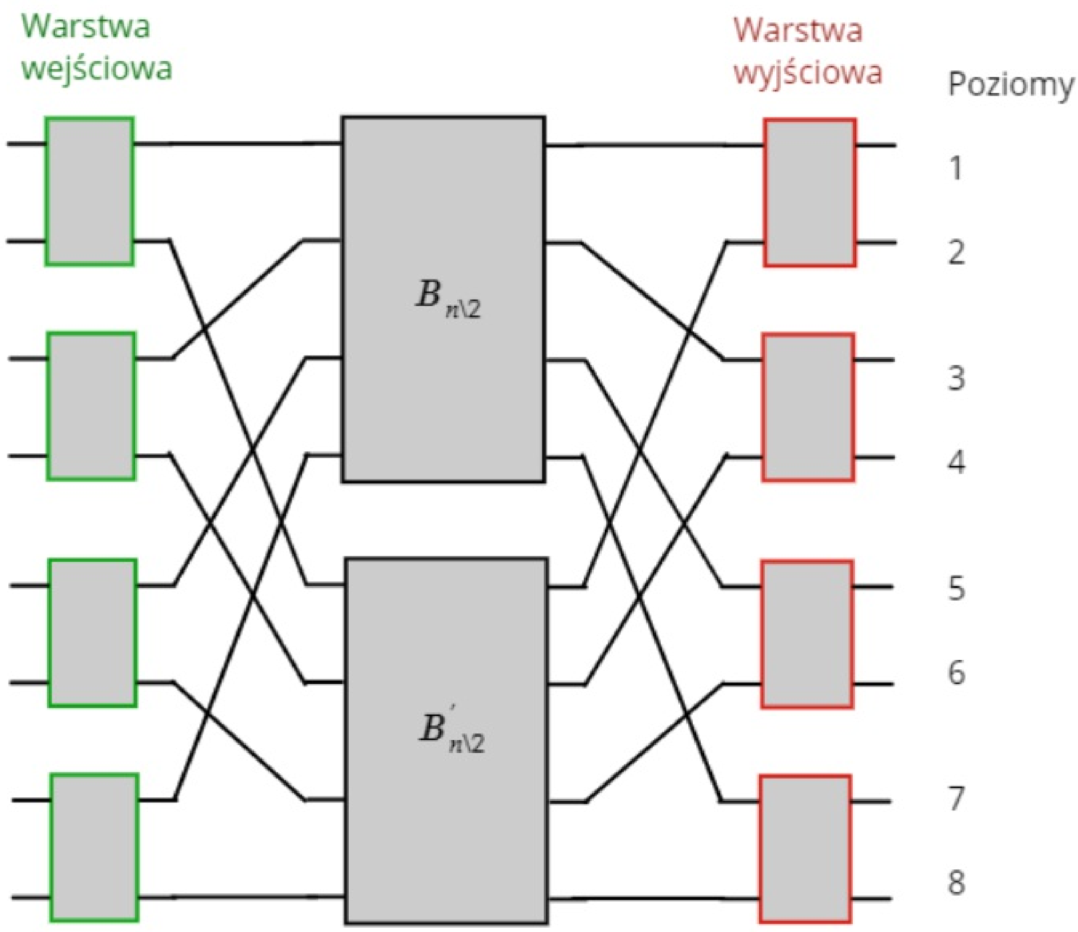
b) Algorytm mnożenia przez wektor

Załóżmy chwilowo parzystość n i rozpiszmy mnożenie macierzy razy wektor. Zacznijmy od podzielenia macierzy A na ćwiartki.

$A = \array{1}{cc}$

Zadanie 9

(2pkt) Jakie jest prawdopodobieństwo wygenerowania permutacji identycznościowej przez sieć Beneša-Waksmana, w której przełączniki ustawiane są losowo i niezależnie od siebie w jeden z dwóch stanów (każdy stan przełącznika jest osiągany z prawdopodobieństwem $1/2$).



Identyczność: sygnał opuszcza sieć na tym samym poziomie, na którym do niej trafił.

:::info Wybieramy przełącznik i przyglądamy mu się. Widać, że jeśli jego odpowiednik po drugiej stronie jest w innej pozycji to nie ma sposobu by sygnał opuścił sieć na tym samym poziomie (dzieje się tak dlatego, że sygnał zostaje przesłany do innej podsieci, takiej która łączy tylko dolne obwody przewodników). Co więcej podsieci również muszą być permutacją identycznościową (każde wyjście z podsieci prowadzi do innego przełącznika, więc jeśli podsieć nie jest identycznością to by jakiś sygnał wejściowy znajdzie się na przełączniku na innej wysokości, niż w przełączniku wejściowym - oczywiście wtedy cała sieć nie jest identycznością). :::

:::danger ***Prawdopodobieństwo*** $$ P(n) = (1/2)^{n/2} \cdot P(n/2)^2 $$ :::

$a = \frac{1}{2}$

$P_2 = \frac{1}{2}$

$$P_n = a^{n/2} \cdot \left(a^{n/4} \cdot P_{n/4}^2\right)^2$$

$$= a^{n/2} \cdot a^{n/2} \cdot \left(a^{n/8} \cdot P_{n/4}^2\right)^4$$

$$= a^{n/2} \cdot a^{n/2} \cdot a^{n/2} \cdot (\dots$$

$T: \; P_n = a^{n/2 \cdot \log_2 n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n/2) \log_2 n}$

$P_n := \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} \cdot P_{n/2}^2$

$T(n = 2^k)$:

- Baza $(k=1)$

  $P_2 = \frac{1}{2}$

  $P_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1 \cdot 1} = \frac{1}{2}$ ✓

- Krok

$$P_{2^{k+1}} = a^{2^k} \cdot P_{2^k}^2 \overset{\text{zał}}{=} a^{2^k} \cdot a^{2^k \cdot k} = a^{2^k(k+1)} \checkmark$$