RPDI - Lista 5

Zad. 1. (5 pkt.) Rozważmy rodzinę z trojgiem dzieci. Płeć każdego dziecka jest jednakowo prawdopodobna. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że rodzina ma dzieci obu płci, B — jest co najwyżej jedna dziewczynka, C — jest co najwyżej jeden chłopiec.

a) Czy zdarzenia A, B i C są wzajemnie niezależne?

b) Ile wynosi prawdopodobieństwo zdarzeń $A \cup B$, $B \cap C'$, A'?

Zad. 2 (5 pkt.) Wybieramy jedną rodzinę spośród rodzin mających n dzieci. Niech zdarzenie A polega na tym, że w losowo wybranej rodzinie jest co najwyżej jedna dziewczynka, B — w rodzinie są dziewczynki i chłopcy. Jak zwykle zakładamy, że każde narodziny dziewczynki i chłopca są jednakowo prawdopodobne i niezależne od siebie. Czy zdarzenia A i B są niezależne?

Zad. 3 (5 pkt.) Za górami, za lasami, w pewnym odludnym i odseparowanym od reszty świata społeczeństwie każda para rodziców woli mieć córkę niż syna i związku z tym stara się o kolejne dzieci dopóki nie urodzi im się dziewczynka. Jak zwykle zakładamy, że każde narodziny dziewczynki i chłopca są jednakowo prawdopodobne i niezależne od siebie. Co stanie się ze stosunkiem liczby kobiet do liczby mężczyzn w tym społeczeństwie, jeśli taka preferencja w stronę córek będzie się utrzymywać przez wiele pokoleń?

Zad. 4. (5 pkt.) Z badań ankietowych wynika, że w pewnym mieście 80% rodzin ma telewizor, 72% ma samochód, 80% ma radio, 47% ma telewizor i samochód, 55% ma samochód i radio, 70% ma radio i telewizor, 40% rodzin ma radio, telewizor i samochód. Wybrano losowo jedną z rodzin. Obliczyć prawdopodobieństwo, że będzie miała przynajmniej jedno z tych urządzeń.

Zad. 5. (5 pkt.) W urnie znajduje się dziesięć kul: sześć białych i cztery czarne. Z urny losujemy trzy razy po jednej kuli. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A oznaczającego, że wylosujemy dwie kule białe i jedną kulę czarną, jeśli losowanie odbywa się: **a)** ze zwracaniem, **b)** bez zwracania.

Niech B oznacza zdarzenie, że za pierwszym razem wylosujemy białą kulę. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A pod warunkiem zdarzenia B.

Zad. 6. (5 pkt.) Wybranej grupie studentów zadano pytanie, czy ściągają na kolokwiach z rachunku prawdopodobieństwa. Wielu studentów nie chciało udzielić odpowiedzi, dlatego postanowiono losowo zaburzyć odpowiedzi z użyciem monety w następujący sposób: student rzuca w ukryciu monetą i jeżeli wypadnie orzeł i student nie ściąga, powinien odpowiedzieć „nie‘‘, w pozostałych wypadkach mówi „tak”.

a) Załóżmy, że 70% studentów nie ściąga na egzaminie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba odpowie „nie” na zadane pytanie?

b) jak oszacować procent ściągających studentów, jeżeli w wybranej grupie było 39% odpowiedzi „nie”?

Zad. 7. (5 pkt.) W szpitalu na oddziale wewnętrznym przebywa rocznie średnio 2000 chorych. Wśród leczonych było 800 cierpiących na chorobę pierwszą, 600 na chorobę drugą, 400 na chorobę trzecią i 200 na chorobę czwartą. Prawdopodobieństwo pełnego wyleczenia z chorób wynosiło odpowiednio $0{,}9; 0{,}8; 0{,}7; 0{,}5$.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybrany pacjent jest całkowicie wyleczony.

b) Wypisany ze szpitala pacjent jest całkowicie wyleczony. Jakie jest prawdopodobieństwo, że cierpiał na drugą chorobę?

Zad. 8. (10 pkt.) Student musi poprawić oceny niedostateczne z dwóch przedmiotów. Szansa poprawienia oceny z pierwszego przedmiotu w jednej próbie wynosi p, a drugiego — q. Żeby móc poprawiać drugą ocenę, trzeba najpierw poprawić pierwszą. Poszczególne próby poprawiania są niezależne. Wiadomo, że po piętnastu próbach poprawienia oceny student jeszcze nie poprawił oceny z drugiego przedmiotu. Jaka jest szansa — pod tym warunkiem — że nie poprawił jeszcze oceny z pierwszego przedmiotu?

Zad. 9. (15 pkt.) Rzucamy $2n$ razy symetryczną monetą. Niech O_{2n} i R_{2n} oznaczają odpowiednio liczbę wyrzuconych orłów i reszek. Dla ustalonego k oblicz $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|O_{2n} - R_{2n}| \leq 2k)$.

Zad. 10. (zadanie o podziale stawki) (5 pkt.) Szansa wygrania pojedynczej partii gry przez gracza A wynosi p, i do zakończenia całej gry brakuje mu a wygranych partii; jego przeciwnikowi brakuje b wygranych partii. Niestety, pojedynek musi zostać przerwany. Jak sprawiedliwie podzielić stawkę?