

RPDI - Lista 2

Zad. 1. (5 pkt) Jeżeli n ludzi, wśród których są A i B , ustawia się w szereg, to jakie jest prawdopodobieństwo, że pomiędzy nimi będzie dokładnie r ludzi? Pokazać, że jeśli stoją w pierścieniu, to prawdopodobieństwo nie zależy od r , czyli wynosi ono $\frac{1}{n-1}$.

Zad. 2. (10 pkt) Grupa składająca się z $2N$ chłopców i $2N$ dziewcząt została podzielona na dwie równe grupy. Znaleźć prawdopodobieństwo, że każda z tych podgrup składa się z takiej samej ilości chłopców i dziewcząt. Ocenie to prawdopodobieństwo za pomocą wzoru Stirlinga.

Zad. 3. (5 pkt) Znaleźć prawdopodobieństwo, że w losowym uporządkowaniu 52 kart żadne dwa asy nie są obok siebie.

Zad. 4. (5 pkt) Rozpatrzmy równanie

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$$

gdzie n_1, \dots, n_k są nieujemnymi liczbami całkowitymi oraz $N \in \mathbb{N}$. Ile jest różnych rozwiązań tego równania? Rozwiązania uznajemy za rozróżnialne, gdy odpowiednie ciągi uporządkowane (n_1, \dots, n_k) nie są identyczne.

Zad. 5. (5 pkt) Rozważmy kratę \mathbb{Z}^3 . Ile jest najkrótszych łamanych łączących $(0, 0, 0)$ z (a, b, c) ?

Zad. 6. (10 pkt) Rozpatrzmy słowo składające się z liter A i B . Każde maksymalne podsłowo (takie, którego nie da się przedłużyć ani w lewo, ani w prawo) składające się z tej samej litery nazwiemy *serią*. Wykazać, że jeśli mamy a liter A oraz b liter B , to liczba różnych słów, które składają się z n serii litery A oraz k serii litery B wynosi

$$\binom{a-1}{n-1} \binom{b-1}{k-1}.$$

Zad. 7. (10 pkt) Stefan Banach w każdej z kieszeni trzymał po pudełku zapalek. Początkowo każde z nich zawierało n zapalek. Za każdym razem kiedy Banach potrzebował zapalki sięgał losowo do jednej z kieszeni i wyciągał jedną zapalkę. Oblicz prawdopodobieństwo, że w momencie gdy sięgnął po puste pudełko, w drugim pozostało jeszcze k zapalek.

Zad. 8. (10 pkt) Załóżmy, że każda z n pałek została złamana na dwie części - długą i krótką. $2n$ części połączono w n par, z których utworzono nowe pałki. Znaleźć prawdopodobieństwo, że **a)** części zostaną połączone w takich samych kombinacjach jak przed złamaniem; **b)** wszystkie długie części zostaną połączone z krótkimi.

Zad. 9. (5 pkt) Nieporządkiem na zbiorze $N = \{1, 2, \dots, n\}$ nazywamy permutację π bez punktów stałych (taką, że $\pi(k) \neq k$). Algorytm dokonuje "losowego" wyboru permutacji zbioru N . Jaka jest szansa, że wybrana permutacja jest nieporządkiem.