

RPDI - Lista 4

Zad. 1. (10 pkt.) Na odcinku $[0, 1]$ umieszczono losowo punkty L, M .

- a) jaka jest szansa, że środek odcinka LM należy do $[0, \frac{1}{3}]$?
- b) jaka jest szansa, że L jest bliżej M niż 0 ?

Zad. 2. (10 pkt.) Z przedziału $[0, 1]$ wylosowano dwa punkty, które podzieliły go na trzy odcinki. Jaka jest szansa, że z tych odcinka da się skonstruować trójkąt?

Zad. 3. (10 pkt.) Na nieskończoną szachownicę o boku a rzuca się monetę o średnicy $2r < a$. Jaka jest szansa, że

- a) moneta znajdzie się całkowicie we wnętrzu jednego z pól;
- b) przetnie się z co najwyżej jednym bokiem szachownicy?

Zad. 4. (Igła Buffona) (10 pkt.) Iglę o długości ℓ rzucono na podłogę z desek o szerokości $a > \ell$. Jaka jest szansa, że igła przetnie krawędź deski?

Uwaga: To zadanie nie jest przesadnie trudne, ale wymaga pewnej precyzji przy parametryzacji problemu i późniejszych obliczeniach. Łatwo w tych obliczeniach popełnić drobny błąd, którego późniejsze szukanie przy tablicy może zająć pół ćwiczeń — dlatego proszę o bardzo uważne przygotowanie się do prezentacji tego zadania.

Zad. 5. (5 pkt.) Korzystając z analizy zrandomizowanego algorytmu znajdowania przekroju minimalnego, uzasadnić że w grafie nie może być więcej niż $\frac{n(n-1)}{2}$ różnych przekrojów minimalnych.

Zad. 6. (10 pkt.) Oszacować prawdopodobieństwo znalezienia przekroju minimalnego jeśli dla grafu o n wierzchołkach wykonamy niezależnie $n(n-1)\log(n)$ wywołań algorytmu a następnie wybierzemy najmniejszy znaleziony przekrój.

Zad. 7. (20 pkt.) Rozważmy modyfikację algorytmu znajdowania przekroju minimalnego. Wykonujemy operację ściągnięcia krawędzi (kontrakcji) aż pozostanie k wierzchołków. Następnie ℓ razy (niezależnie) wykonujemy oryginalny algorytm zrandomizowany dla uprzednio uzyskanego k -wierzchołkowego grafu.

- a) Wyznaczyć liczbę ściągnięć krawędzi i oszacować prawdopodobieństwo znalezienia przekroju minimalnego.
- b) Jakie powinny być k, ℓ aby zoptymalizować prawdopodobieństwo znalezienia przekroju minimalnego, przy założeniu, że łączna liczba ściągnięć krawędzi wynosi nie więcej niż $2(n-2)$?