

Рассуждения об интегралах

5 мая 2023 г.

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x dx}{1-x^2} &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{d(x^2)}{1-x^2} = -\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{d(1-x^2)}{1-x^2} = -\frac{1}{2} \ln |1-x^2| \Big|_1^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \ln 3 + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2} \ln |1-x^2| = -\infty,\end{aligned}$$

данный интеграл является несобственным интегралом второго рода, в нем подынтегральная функция не ограничена в нижнем пределе интегрирования, и он расходится.

Следующий интеграл вычислим интегрированием по частям:

$$\begin{aligned}\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx &= x \cdot \ln(x+1) \Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} x d(\ln(x+1)) = \\ &= (e-1) \ln e - 0 \cdot \ln 1 - \int_0^{e-1} \frac{x dx}{x+1} = \\ &= e-1 - \int_0^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1} dx = e-1 - \int_0^{e-1} dx + \int_0^{e-1} \frac{dx}{x+1} = \\ &= e-1 - (e-1) + \int_0^{e-1} \frac{d(x+1)}{x+1} = \ln(x+1) \Big|_0^{e-1} = \ln e - \ln 1 = 1.\end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_4^9 \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx \tag{1}$$

Сделаем замену: $\sqrt{x}+1=t$, тогда $dt = d(\sqrt{x}+1) = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{dx}{2(t-1)}$, откуда $dx = 2(t-1)dt$. Получаем, что интеграл (1) равен

$$\begin{aligned}\int_3^4 \frac{2(t-1) \cdot 2(t-1)dt}{t} &= 4 \int_3^4 \frac{t^2-2t+1}{t} dt = 4 \int_3^4 \left(t-2+\frac{1}{t}\right) dt = \\ &= 4 \left(\frac{t^2}{2} - 2t + \ln|t|\right) \Big|_3^4 = 4 \left(8-8+\ln 4 - \frac{9}{2} + 6 - \ln 3\right) = 6 + 4 \ln \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

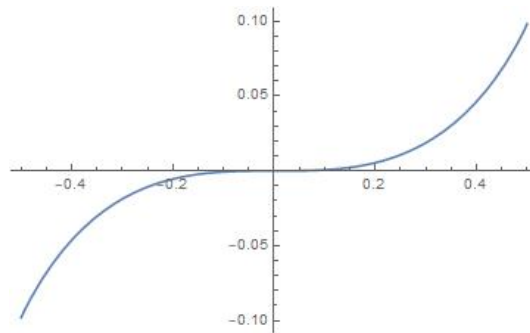


Рис. 1: График функции $\int_0^x t \cdot \arcsin 2t dt$.

Решим занесением под дифференциал:

$$\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx = \int_1^e \ln^3 x d(\ln x) = \frac{\ln^4 x}{4} \Big|_1^e = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}.$$

Рассмотрим интеграл $\int_0^{\pi/4} x \cdot \arcsin 2x dx$. Данный интеграл записан некорректно: $\arcsin 2x$ не существует в окрестности точки $\pi/4$ ($2x = \pi/2 > 1$). Построим график этой функции на рис. 1:

Для подготовки данного файла была использована книга [1], а также книги [2, 3]

Список литературы

- [1] Львовский С.М., Набор и верстка в пакете L^AT_EX/ 3-е издание, исправленное и дополненное. — Москва : Московский центр непрерывного математического образования. — 2003. — С. 448.
- [2] Кудрявцев Н.Л., Лекции по математическому анализу. Часть I: Учебное пособие. — М. : ООО “Сам полиграфист”, 2021. — 256 с.
- [3] Демидович Б.П., Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие. — 18-е изд., испр. — М. : Изд-во Моск. ун-та, ЧеРо, 1997. — 624 с.