von Gost

Агаев Савелий

4 мая 2023 г.

Этот файл представляет собой нарезку из Нашей курсовой работы. Во избежание плагиата, все существенные места в него не включены, а некоторые приведённые далее формулы, содержат намеренно внесённые вних ошибки. Приятного просмотра!

1 Черновик Введения

$$\mathcal{L}_G = \lambda + \kappa R + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$$

приводит к лишь немногим более сложным на вид вакуумным уравнениям (уравнений вывод для аналогичного лагражиана в немного сжатой форме изложен в работе [1])

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}T_{\mu\nu} = \lambda\frac{1}{2}g_{\mu\nu} + \kappa\left(\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}\right) + \\
+\alpha\left(\frac{1}{2}R^2 g_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu\nabla_\nu R - 2\Box R g_{\mu\nu} - 2RR_{\mu\nu}\right) + \\
+\beta\left(\frac{1}{2}R_{ab}R^{ab}g_{\mu\nu} + \nabla_\mu\nabla_\nu R - 2R_{\mu k\nu m}R^{km} - \Box R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Box R\right),
\end{aligned}$$

2 Основные соглашения

Условимся тепеперь обозначать семейство так называемых «материальных» полей как q_m. Условимся также обозначать наше пространство-время как $\mathbb{X}$.

Договоримся теперь, что геометрия на $\mathbb{X}$ совпадает с привычной нам из теории Эйнштейна. В частности, $\partial\mathbb{X} = \varnothing$ и $\dim\mathbb{X} = 4$.

Условимся также, что $g = |\det g_{\mu\nu}| = -\det g_{\mu\nu}$, а $d\Omega = \sqrt{g}dV$, $dV = dx^0dx^1dx^2dx^3$.

3 Уравнения типа Эйнштейна

Лемма 1:

Пусть $R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}\left(g_{ab}; \partial_c g_{ab}; \partial_d\partial_c g_{ab}\right)$. *Тогда*

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla^j\left(\nabla_\mu\delta g_{j\nu} + \nabla_\nu\delta g_{\mu j}\right) - \frac{1}{2}\Box\delta g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{ij}\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g_{ij}.$$

Доказательство.

$$\Gamma^l_{ik} = \frac{1}{2} g^{lj} \left(\partial_i g_{kj} + \partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ik} \right),$$

$$\delta\Gamma^l_{ik} = \frac{1}{2} \delta g^{lj} \left(\partial_i g_{kj} + \partial_k g_{ij} - \partial_j g_{ik} \right) + \frac{1}{2} g^{lj} \left(\partial_i \delta g_{kj} + \partial_k \delta g_{ij} - \partial_j \delta g_{ik} \right);$$

$$\frac{1}{2} g^{lj} \left(\nabla_i \delta g_{kj} + \nabla_k \delta g_{ij} - \nabla_j \delta g_{ik} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} g^{lj} \left(\partial_i \delta g_{kj} - \delta g_{km} \Gamma^m_{ij} - \delta g_{jm} \Gamma^m_{ik} + \partial_k \delta g_{ij} - \delta g_{im} \Gamma^m_{kj} - \delta g_{jm} \Gamma^m_{ki} - \right.$$

$$\left. - \partial_j \delta g_{ik} + \delta g_{km} \Gamma^m_{ji} + \delta g_{im} \Gamma^m_{jk} \right) = \frac{1}{2} \left(-g^{lj} g^{mh} \delta g_{jm} \right) \left(\partial_i g_{kh} + \partial_k g_{ih} - \partial_j g_{ih} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} g^{lj} \left(\partial_i \delta g_{kj} + \partial_k \delta g_{ij} - \partial_j \delta g_{ik} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \delta g^{lh} \left(\partial_i g_{kh} + \partial_k g_{ih} - \partial_j g_{ih} \right) + \frac{1}{2} g^{lj} \left(\partial_i \delta g_{kj} + \partial_k \delta g_{ij} - \partial_j \delta g_{ik} \right);$$

$$\delta\Gamma^l_{ik} = \frac{1}{2} g^{lj} \left(\nabla_i \delta g_{kj} + \nabla_k \delta g_{ij} - \nabla_j \delta g_{ik} \right).$$

$$R^i_{kjl} = \partial_j \Gamma^i_{lk} - \partial_l \Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{jm} \Gamma^m_{lk} - \Gamma^i_{lm} \Gamma^m_{jk},$$

$$\delta R^i_{kjl} = \partial_j \delta\Gamma^i_{lk} - \partial_l \delta\Gamma^i_{jk} + \delta\Gamma^i_{jm} \Gamma^m_{lk} + \Gamma^i_{jm} \delta\Gamma^m_{lk} - \delta\Gamma^i_{lm} \Gamma^m_{jk} - \Gamma^i_{lm} \delta\Gamma^m_{jk};$$

$$\nabla_j \left(\delta\Gamma^i_{lk} \right) = \partial_j \left(\delta\Gamma^i_{lk} \right) + \Gamma^i_{jm} \delta\Gamma^m_{lk} - \Gamma^m_{jl} \delta\Gamma^i_{mk} - \Gamma^m_{jk} \delta\Gamma^i_{lm};$$

$$\nabla_j \left(\delta\Gamma^i_{lk} \right) - \nabla_l \left(\delta\Gamma^i_{jk} \right) =$$

$$= \partial_j \delta\Gamma^i_{lk} + \Gamma^i_{jm} \delta\Gamma^m_{lk} - \Gamma^m_{jl} \delta\Gamma^i_{mk} - \Gamma^m_{jk} \delta\Gamma^i_{lm} -$$

$$- \partial_l \delta\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{lm} \delta\Gamma^m_{jk} + \Gamma^m_{lj} \delta\Gamma^i_{mk} + \Gamma^m_{lk} \delta\Gamma^i_{jm} =$$

$$= \partial_j \delta\Gamma^i_{lk} - \partial_l \delta\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{jm} \delta\Gamma^m_{lk} - \Gamma^m_{jk} \delta\Gamma^i_{lm} - \Gamma^i_{lm} \delta\Gamma^m_{jk} + \Gamma^m_{lk} \delta\Gamma^i_{jm};$$

$$\delta R^i_{kjl} = \nabla_j \left(\delta\Gamma^i_{lk} \right) - \nabla_l \left(\delta\Gamma^i_{jk} \right).$$

$R_{kl} = R^i_{kil},$
$\delta R_{kl} = \delta R^i_{kil} = \nabla_i\left(\delta\Gamma^i_{lk}\right) - \nabla_l\left(\delta\Gamma^i_{ik}\right);$

$$\nabla_i\delta\Gamma^i_{lk} = \frac{1}{2}\nabla_i g^{ij}\left(\nabla_l\delta g_{kj} + \nabla_k\delta g_{lj} - \nabla_j\delta g_{lk}\right) +$$
$$+\frac{1}{2}g^{ij}\nabla_i\left(\nabla_l\delta g_{kj} + \nabla_k\delta g_{lj} - \nabla_j\delta g_{lk}\right) =$$
$$=\frac{1}{2}\left(g^{ij}\nabla_i\nabla_l\delta g_{kj} + g^{ij}\nabla_i\nabla_k\delta g_{lj} - \Box\delta g_{lk}\right),$$
$$\nabla_l\delta\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2}\nabla_l g^{ij}\left(\nabla_i\delta g_{kj} + \nabla_k\delta g_{ij} - \nabla_j\delta g_{ik}\right) +$$
$$+\frac{1}{2}g^{ij}\nabla_l\left(\nabla_i\delta g_{kj} + \nabla_k\delta g_{ij} - \nabla_j\delta g_{ik}\right) =$$
$$=\frac{1}{2}\left(g^{ij}\nabla_l\nabla_i\delta g_{kj} + g^{ij}\nabla_l\nabla_k\delta g_{ij} - g^{ij}\nabla_l\nabla_j\delta g_{ik}\right);$$
$$\delta R_{kl} = \frac{1}{2}g^{ij}\nabla_i\nabla_l\delta g_{kj} + \frac{1}{2}g^{ij}\nabla_i\nabla_k\delta g_{lj} - \frac{1}{2}\Box\delta g_{lk} -$$
$$-\frac{1}{2}g^{ij}\nabla_l\nabla_i\delta g_{kj} - \frac{1}{2}g^{ij}\nabla_l\nabla_k\delta g_{ij} + \frac{1}{2}g^{ij}\nabla_l\nabla_j\delta g_{ik} =$$
$$=\frac{1}{2}g^{ij}\left[\nabla_i;\nabla_l\right]\delta g_{kj} - \frac{1}{2}\Box\delta g_{lk} + \frac{1}{2}g^{ij}\left(\nabla_i\nabla_k\delta g_{lj} + \nabla_l\nabla_j\delta g_{ik}\right) - \frac{1}{2}g^{ij}\nabla_l\nabla_k\delta g_{ij} =$$
$$=\frac{1}{2}g^{ij}\left[\nabla_i;\nabla_l\right]\delta g_{kj} - \frac{1}{2}\Box\delta g_{lk} +$$
$$+\frac{1}{2}g^{ij}\left(\nabla_i\nabla_k\delta g_{lj} + \left[\nabla_l;\nabla_j\right]\delta g_{ik} + \nabla_j\nabla_l\delta g_{ik}\right) - \frac{1}{2}g^{ij}\nabla_l\nabla_k\delta g_{ij} =$$
$$=\frac{1}{2}g^{ij}\left[\nabla_i;\nabla_l\right]\delta g_{kj} - \frac{1}{2}g^{ij}\left[\nabla_j;\nabla_l\right]\delta g_{ik} - \frac{1}{2}\Box\delta g_{lk} +$$
$$+\frac{1}{2}g^{ij}\left(\nabla_i\nabla_k\delta g_{lj} + \nabla_j\nabla_l\delta g_{ik}\right) - \frac{1}{2}g^{ij}\nabla_l\nabla_k\delta g_{ij} =$$
$$=\frac{1}{2}\nabla^j\left(\nabla_k\delta g_{jl} + \nabla_l\delta g_{jk}\right) - \frac{1}{2}\Box\delta g_{lk} - \frac{1}{2}g^{ij}\nabla_l\nabla_k\delta g_{ij};$$
$$\delta R_{kl} = \frac{1}{2}\nabla^j\left(\nabla_k\delta g_{jl} + \nabla_l\delta g_{jk}\right) - \frac{1}{2}\Box\delta g_{lk} - \frac{1}{2}g^{ij}\nabla_l\nabla_k\delta g_{ij}.$$

Приведение к виду выше легко производится из-за структуры выражения. □

Теперь же возможно перейти к рассмотрению основного вопроса рассмотрению основного вопроса данной секции.

Следствие:
1) $\tau^{\xi\lambda} = \tau^{\lambda\xi}$*;*
2) $\nabla_\xi\tau^{\xi\lambda} = 0$*;*
3) $8\pi\tau_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \Rightarrow 8\pi\tau = -R + 4\Lambda$*;*

4) $8\pi\tau_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \Rightarrow R_{\xi\lambda} = 8\pi\left(\tau_{\xi\lambda} - \frac{1}{2}\tau g_{\xi\lambda}\right) + \Lambda g_{\xi\lambda}.$

Теорема 1:
Не расскажу!

Доказательство. Дествие рассматриваемой системы имеет вид:

$$\begin{aligned} A &= \int\limits_{\mathbb{X}} d\Omega\,[\mathcal{L}] = \int\limits_{\mathbb{X}} d\Omega\,[\mathcal{L}_M] + \int\limits_{\mathbb{X}} d\Omega\,[\mathcal{L}_G] = \\ &= \int\limits_{\mathbb{X}} d\Omega\,[\mathcal{L}_M] + \int\limits_{\mathbb{X}} d\Omega\,[\mathcal{L}'_G] + \int\limits_{\mathbb{X}} d\Omega\left[\frac{1}{16\pi}(R-2\Lambda)\right], \end{aligned}$$

где $\mathcal{L}' = \mathcal{L} - \frac{1}{16\pi}(R-2\Lambda)$ и, есть, очевидно, функция тех же аргументов, что и $\mathcal{L}$. Рассмотрим теперь вариации его членов. С учётом осутствия границы, они примут вид:

$$\delta\int\limits_{\mathbb{X}} d\Omega\,[\mathcal{L}_M] = \int\limits_{\mathbb{X}} d\Omega\left[\delta\mathcal{L}_M + \frac{1}{2}\mathcal{L}_M g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\right] =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{X}} d\Omega\left[\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial q_m} - \nabla_n\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial\nabla_n q_m} + \ldots\right]\delta q_m + \int\limits_{\mathbb{X}} d\Omega\left[\frac{1}{2}\mathcal{L}_M g^{\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}}\right]\delta g_{\mu\nu};$$

$$\delta\int\limits_{\mathbb{X}} d\Omega\,[\mathcal{L}'_G] = \int\limits_{\mathbb{X}} d\Omega\left[\delta\mathcal{L}'_G + \frac{1}{2}\mathcal{L}'_G g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}\right] =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{X}} d\Omega\left[\frac{\partial\mathcal{L}'_G}{\partial R_{\mu\nu}} - \nabla_i\frac{\partial\mathcal{L}'_G}{\partial\nabla_i R_{\mu\nu}} + \ldots\right]\delta R_{\mu\nu} + \int\limits_{\mathbb{X}} d\Omega\left[\frac{1}{2}\mathcal{L}'_G g^{\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}'_G}{\partial g_{\mu\nu}}\right]\delta g_{\mu\nu} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{X}} d\Omega\left[\frac{\partial\mathcal{L}'_G}{\partial R_{\mu\nu}} - \nabla_i\frac{\partial\mathcal{L}'_G}{\partial\nabla_i R_{\mu\nu}} + \ldots\right]\left[\frac{1}{2}\nabla^j\nabla_\mu\delta g_{j\nu} + \frac{1}{2}\nabla^j\nabla_\nu\delta g_{\mu j} - \frac{1}{2}\Box\delta g_{\mu\nu} -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}g^{kj}\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g_{kj}\right] + \int\limits_{\mathbb{X}} d\Omega\left[\frac{1}{2}\mathcal{L}'_G g^{\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}'_G}{\partial g_{\mu\nu}}\right]\delta g_{\mu\nu} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{X}} d\omega \left[\frac{1}{2} \nabla_\mu \nabla^j \left[\frac{\partial \mathcal{L}'_G}{\partial R_{\mu\nu}} - \nabla_i \frac{\partial \mathcal{L}'_G}{\partial \nabla_i R_{\mu\nu}} + \ldots \right] \right] \delta g_{j\nu} +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{X}} d\Omega \left[-\frac{1}{2} g^{kj} \nabla_\mu \nabla_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}'_L}{\partial R_{\mu\nu}} - \nabla_i \frac{\partial \mathcal{L}'_G}{\partial \nabla_i R_{\mu\nu}} + \ldots \right] \right] \delta g_{kj} +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{X}} d\Omega \left[\frac{1}{2} \mathcal{L}'_G g^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}'_G}{\partial g_{\mu\nu}} \right] \delta g_{\mu\nu} =$$

$$+ \frac{1}{2} \nabla_h \nabla^\nu wfgf \left[\frac{\partial \mathcal{L}'_G}{\partial R_{\mu h}} - \nabla_i \frac{\partial \mathcal{L}''''_G}{\partial \nabla_i R_{\mu h}} + \ldots \right] - \frac{1}{2} \Box \left[\frac{\partial \mathcal{L}'_G}{\partial R_{\mu\nu}} - \nabla_i \frac{\partial \mathcal{L}'_G}{\partial \nabla_i R_{\mu\nu}} + \ldots \right] -$$

$$- \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_h \nabla_k \left[\frac{\partial \mathcal{L}'_G}{\partial R_{hk}} - \nabla_i \frac{\partial \mathcal{L}'_G}{\partial \nabla_i R_{hk}} + \ldots \right] + \left[\frac{1}{2} \mathcal{L}'_G g^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}'_G}{\partial g_{\mu\nu}} \right] \Bigg] \delta g_{\mu\nu};$$

Таким образом, имеем

$$\delta A = \int\limits_{\mathbb{X}} d\Omega \left[\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial q_m} - \nabla_n \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \nabla_n q_m} + \ldots \right] \delta q_m +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{X}} d\Omega \Bigg[\left[\frac{1}{2} \mathcal{L}_M g^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}} \right] + \left[\frac{1}{2} \nabla_h \nabla^\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}'_G}{\partial R_{h\nu}} - \nabla_i \frac{\partial \mathcal{L}'_G}{\partial \nabla_i R_{h\nu}} + \ldots \right] + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \nabla_h \nabla^\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}'_G}{\partial R_{\mu h}} - \nabla_i \frac{\partial \mathcal{L}'_G}{\partial \nabla_i R_{\mu h}} + \ldots \right] - \frac{1}{2} \Box \left[\frac{\partial \mathcal{L}'_G}{\partial R_{\mu\nu}} - \nabla_i \frac{\partial \mathcal{L}'_G}{\partial \nabla_i R_{\mu\nu}} + \ldots \right] -$$

$$\left. - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_h \nabla_k \left[\frac{\partial \mathcal{L}'_G}{\partial R_{hk}} - \nabla_i \frac{\partial \mathcal{L}'_G}{\partial \nabla_i R_{hk}} + \ldots \right] + \left[\frac{1}{2} \mathcal{L}'_G g^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}'_G}{\partial g_{\mu\nu}} \right] \right] +$$

$$+ \left[-\frac{1}{16\pi} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} \right) \right] \Bigg] \delta g_{\mu\nu}.$$

Пусть теперь $\delta A = 0$. Первый из интегральных членов даст нам обычные уравнения Лагранжа. Этого, в свою очередь, достаточно, чтобы интерпретировать

$$T^{\mu\nu} = 2 \left[\frac{1}{2} \mathcal{L}_M g^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g_{\mu\nu}} \right]$$

$$T^{\mu\nu} + 2 \left[\frac{1}{2} \nabla_h \nabla^\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}'_G}{\partial R_{h\nu}} - \nabla_i \frac{\partial \mathcal{L}'_G}{\partial \nabla_i R_{h\nu}} + \ldots \right] + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \nabla_h \nabla^\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}'_G}{\partial R_{\mu h}} - \nabla_i \frac{\partial \mathcal{L}'_G}{\partial \nabla_i R_{\mu h}} + \ldots \right] - \frac{1}{2} \Box \left[\frac{\partial \mathcal{L}'_G}{\partial R_{\mu\nu}} - \nabla_i \frac{\partial \mathcal{L}'_G}{\partial \nabla_i R_{\mu\nu}} + \ldots \right] -$$

$$= \frac{1}{8\pi} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu} \right).$$

$$\begin{cases} \tau^{\xi\lambda} = R^{\xi\lambda} - \frac{1}{2}Rg^{\xi\lambda} + \Lambda g^{\xi\lambda}, \\ T^{\mu\nu} = \tau^{\mu\nu} + \left[\frac{1}{2}\nabla_h\nabla^\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}'_G}{\partial R_{o\nu}} - \nabla_i\frac{\partial\mathcal{L}'_G}{\partial\nabla_i R_{h\nu}} + \ldots\right] + \right. \\ + \frac{1}{2}\nabla_h\nabla^\nu\left[\frac{\partial\mathcal{L}'_G}{\partial R_{\mu h}} - \nabla_i\frac{\partial\mathcal{L}'_G}{\partial\nabla_i R_{\mu h}} + \ldots\right] - \frac{1}{2}\Box\left[\frac{\partial\mathcal{L}'_G}{\partial R_{\mu\nu}} - \right. \\ - \frac{1}{14}g^{\mu\nu}\nabla_h\nabla_k\left[\frac{\partial\mathcal{L}'_G}{\partial R_{hk}} - \nabla_i\frac{\partial\mathcal{L}'_G}{\partial\nabla_i R_{hk}} + \ldots\right] + \left[\frac{1}{2}\mathcal{L}'_G g^{\mu\nu} \right. \end{cases}$$

$\Box$

4 Теорема Биркгофа для уравнений типа Эйнштейна

Приведённые ниже формулировка и доказательство, в целом, представляют собой немного модифицированный вариант приведённых в [2].

Теорема 2 (Биркгофа, основная)**:**
Для того, чтобы геометрия данного участка пространства-времени являлась сферически симметричной и представляла собой решение уравнений

$$R_{\xi\lambda} - \frac{1}{2}Rg_{\xi\lambda} = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы такая геометрия являлась частью геометрии Шварцшильда.

Доказательство.

$$ds^2 = -e^{2F}dt^2 + e^{2L}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right),$$

где $F = F(t;r)$, $L = L(t;r)$, при этом полагается отсутствие ограничений на знак e^{2F} и e^{2L}.
Подставим метрику в уравнения выше. Ненулевые компоненты пра-

вой части тогда имеют вид

$$R_{tt} - \frac{1}{2}Rg_{tt} = \frac{\left(2r\partial_r L + e^{2L} - 1\right)e^{2F-2L}}{r^2};$$
$$R_{tr} - \frac{1}{2}Rg_{tr} = R_{rt} - \frac{1}{2}Rg_{rt} = \frac{2\partial_t L}{r};$$
$$R_{rr} - \frac{1}{2}Rg_{rr} = \frac{2r\partial_r F - e^{2L} + 1}{r^2};$$
$$R_{\theta\theta} - \frac{1}{2}Rg_{\theta\theta} = re^{-2L}\left[r\left(\partial_r F\right)^2 - r\partial_r F\partial_r L + r\partial_r^2 F + \partial_r F - \partial_r L\right] +$$
$$+ r^2e^{-2F}\left[\partial_t F\partial_t L - \left(\partial_t L\right)^2 - \partial_t^2 L\right];$$
$$R_{\varphi\varphi} - \frac{1}{2}Rg_{\varphi\varphi} = \left(R_{\theta\theta} - \frac{1}{2}Rg_{\theta\theta}\right)\sin^2\theta.$$

Отсюда легко получить, что система уравнений из условия теоремы имеет эквивалентный вид Второе уравнение гарантирует, что $L(t;r) = L(r)$. Тогда

$$\begin{cases} 2r\partial_r L + e^{2L} - 1 = 0; \\ 2r\partial_r F - e^{2L} + 1 = 0; \\ r\left(\partial_r F\right)^2 - r\partial_r F\partial_r L + r\partial_r^2 F + \partial_r F - \partial_r L = 0. \end{cases}$$

Первое из уравнений решается разделением переменных:

$$L(r) = -\frac{1}{2}\ln|1 + \frac{C_1}{r}|,$$

где C_1 пока есть константа произвольного знака. Сложение первого и второго уравнений эквивалентно

$$\partial_r F = -\partial_r L,$$

откуда можно заметить, что третье уравнение обращается в тождество.

Так как $L = L(r)$, то $\partial_r F$ есть также функция лишь r. Поминая сие, имеем

$$F(t;r) = f(t) - L(r) = f(t) + \frac{1}{2}\ln|1 + \frac{C_1}{r}|,$$

где $f(t)$ есть произвольная дифференцируемая функция времени. Совершая обратную подстановку и поминая замечание о знаках, имеем

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{C_1}{r}\right)\left(e^{f(t)}dt\right)^2 + \frac{1}{\left(1 + \frac{C_1}{r}\right)}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right).$$

Сделаем теперь два замечания. Во-первых, заменим константу C_1 на $-r_0$. Во-вторых, заметим, что множитель $e^{f(t)}$ определяет масштабирование временной координаты и, по построению системы отсчёта, может быть принят равным единице. Окончательно, имеем

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right),$$

□

5 Шароподобный источник

$$\begin{cases} 8\pi\tau_{tt} = \dfrac{\left(2r\partial_r L + e^{2L} - 1\right) e^{2F-2L}}{r^2}; \\ 8\pi\tau_{tr} = 8\pi\tau_{rt} = \dfrac{2\partial_t L}{r}; \\ 8\pi\tau_{rr} = \dfrac{2r\partial_r F - e^{2L} + 1}{r^2}; \\ 8\pi\tau_{\theta\theta} = re^{-2L}\left[r\left(\partial_r F\right)^2 - r\partial_r F\partial_r L + r\partial_r^2 F + \partial_r F - \partial_r L\right] + \\ \ + r^2 e^{-2F}\left[\partial_t F\partial_t L - \left(\partial_t L\right)^2 - \partial_t^2 L\right]; \\ 8\pi\tau_{\varphi\varphi} = \tau_{\theta\theta}\sin^2\theta. \end{cases}$$

Заметим теперь, что наша контравариантная форма нашей метрики $g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left\{-e^{-2F}; e^{-2}; r^{-2}; r^{-2}\sin^{-2}\theta\right\}$. Отсюда

$$\begin{cases} 8\pi\tau_t^t = -\dfrac{\left(2re^{-2L}\partial_r L + 1 - e^{-2L}\right)}{r^2}; \\ 8\pi\tau_r^t = -e^{-2F}\dfrac{2\partial_t L}{r}; \\ 8\pi\tau_t^r = e^{-2L}\dfrac{2\partial_t L}{r}; \\ 8\pi\tau_r^r = e^{-2L}\dfrac{2r\partial_r F - e^{2L} + 1}{r^2}; \\ 8\pi\tau_\theta^\theta = \dfrac{1}{r}e^{-2L}\left[r\left(\partial_r F\right)^2 - r\partial_r F\partial_r L + r\partial_r^2 F + \partial_r F - \partial_r L\right] + \\ \ + e^{-2F}\left[\partial_t F\partial_t L - \left(\partial_t L\right)^2 - \partial_t^2 L\right]; \\ \tau_\varphi^\varphi = \tau_\theta^\theta. \end{cases}$$

Так как мы положили сферическую симметрию поля-источника, то

$$\tau_{tr} = \tau_{rt} = \frac{1}{8\pi}\frac{2\partial_t L}{r} = 0,$$

откуда $\partial_t L = 0$, то есть $L = L(r)$. Не самая приятная система выше тогда примет вид

$$\begin{cases} 8\pi\tau_t^t = -\dfrac{2re^{-2L}\partial_r L + 1 - e^{-2L}}{r^2}; \\ 8\pi\tau_r^r = \dfrac{2re^{-2L}\partial_r F - 1 + e^{-2L}}{r^2}; \\ 8\pi\tau_\theta^\theta = \dfrac{1}{r}e^{-2L}\left[r\left(\partial_r F\right)^2 - r\partial_r F\partial_r L + r\partial_r^2 F + \partial_r F - \partial_r L\right]; \\ \tau_\varphi^\varphi = \tau_\theta^\theta. \end{cases}$$

$$8\pi\tau_t^t = -\frac{2re^{-2L}\partial_r L + 1 - e^{-2L}}{r^2}$$

может быть проинтегрировано от 0 до $0 < R < a_0$, получаем

$$8\pi\int\limits_0^R \tau_t^t r^2 dr = -\int\limits_0^R \frac{2re^{-2L}\partial_r L + 1 - e^{-2L}}{r^2} r^2 dr =$$
$$= -\int\limits_0^R \left(2r\frac{dL}{dr}e^{-2L} - e^{-2L} + 1\right) dr = \int\limits_0^R \frac{d}{dr}\left(re^{-2L}\right) dr - R =$$
$$= Re^{-2L(R)} - R,$$

откуда

$$e^{-2L(R)} = 1 + \frac{8\pi}{R}\int\limits_0^R \tau_t^t r^2 dr.$$

Потребуем теперь, внутренняя и внешняя метрика сшивались на границе $R = a_0$. Вспомним теперь, что для метрики Шварцшильда

$$e^{-2L(r)} = 1 - \frac{r_0}{r},$$

откуда

$$1 - \frac{r_0}{a_0} = 1 + \frac{8\pi}{a_0}\int\limits_0^{a_0} \tau_t^t r^2 dr,$$

или

$$r_0 = 8\pi\int\limits_0^{a_0} \left(-T_t\right) r^2 dr. \tag{1}$$

Проблема знака «-», благополучно внесённого здесь под интеграл, не существенна и обусловлена соглашением о знаках метрики (напомним, что на знак тензора вида (1,1) они, в отличие от тензоров (0,2) и (2,0), непосредственно влияют). Аналогичный вывод для обычных уравнений Эйнштейна, без знака под интегралом и в противоположном соглашении о знаках метрики можно найти в [3].

Рассмотрим теперь разность первого и второго уравнений:

$$8\pi\left(\tau_r^r - \tau_t^t\right) = 2\frac{1}{r}e^{-2L}\left(\partial_r L + \partial_r F\right),$$

откуда

$$\partial_r F(t;r) = \frac{4\pi\left(\tau_r^r - \tau_t^t\right)r}{e^{-2L(r)}} - \frac{1}{2}\partial_r \ln|e^{-2L(r)}|.$$

Вспоминая теперь, что значение $e^{-2L(r)}$ нам известно, имеем

$$F(t;R) = f(t) + \int\limits_0^R \frac{4\pi\left(\tau_r^r - \tau_t^t\right)r}{1 + \frac{8\pi}{r}\int\limits_0^r \tau_t^t r'^2 dr'}dr - \frac{1}{2}\ln\left|1 + \frac{8\pi}{r}\int\limits_0^r \tau_t^t r'^2 dr'\right|\Bigg|_{r=0}^{r=R}.$$

Для того, чтобы выражение выше имело смысл, потребуем

$$\lim_{r\to 0}\left[\frac{\int\limits_0^r \tau_t^t r'^2 dr'}{r}\right] = 0,$$

что означает ограничение на поведение τ_t^t как $o(r^{-2})$. Наличие в нормировке константы, отличной от нуля, можно было бы поправить масштабированием. Отсюда

$$F(t;R) = f(t) + 4\pi\int\limits_0^R \frac{\left(\tau_r^r - T_t^t\right)r}{1 - \frac{8\pi}{r}\int\limits_0^r (-\tau_t^t) r'^2 dr'}dr - \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{8\pi}{R}\int\limits_0^R (-\tau_t^t) r'^2 dr'\right),$$

где $f(t)$ всё также может быть принята равной нулю за счёт изменения масштабирования времени.

6 Квадратичная теория гравитации

Как мы отмечали выше (смотри теорему ??), центрированность уравнений типа Эйнштейна проверяется, в целом, несложно. Если же она присутствует, то, как говорилось ранее, доказательство эквивалентности требует не более, чем показать, что на произвольном участке

$$\left.\begin{cases} 8\pi\tau_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \dfrac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \\ \qquad 0 = F_{\lambda\xi}\left(g_{ab}; \tau_{ab}; \nabla_c\tau_{ab}; \dots\right) \end{cases}\right| \Rightarrow \tau_{\mu\nu} \equiv 0.$$

Первым послужит лагранжиан Гильберта-Эйнштейна

$$\mathcal{L}_G = \lambda + \kappa R,$$

для которого второй блок уравнений имеет вид

$$T_{\mu\nu} = 16\pi\kappa\tau_{\mu\nu} - \left(2\Lambda\kappa + \lambda\right)g_{\mu\nu},$$

сводящийся к

$$T_{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu}$$

при $\kappa = \frac{1}{16\pi}$ и $\lambda = -2\kappa\Lambda$.

$$\mathcal{L}_G = \lambda + \kappa R + \alpha R^2 + \beta R_{ab}R^{ab}.$$

Её уравнения, как указывалось ранее, имеют вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}T_{\mu\nu} = \lambda\frac{1}{2}g_{\mu\nu} + \kappa\left(\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - R_{\mu\nu}\right) + \\ + \alpha\left(\frac{1}{2}R^2 g_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu\nabla_\nu R - 2\Box R g_{\mu\nu} - 2RR_{\mu\nu}\right) + \\ + \beta\left(\frac{1}{2}R_{ab}R^{ab}g_{\mu\nu} + \nabla_\mu\nabla_\nu R - 2R_{\mu k\nu m}R^{km} - \Box R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\Box R\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = 16\pi\kappa\tau_{\mu\nu} + \\ + 16\Lambda\left(2\alpha + \beta\right)\left[4\tau_{\mu\nu} - \tau g_{\mu\nu}\right] - \left(2\Lambda\kappa + \lambda\right)g_{\mu\nu} + \\ + 16\pi\left(2\alpha + \beta\right)\left[\nabla_\mu\nabla_\nu\tau - \Box\tau g_{\mu\nu}\right] + 16\pi\beta\left[-2\nabla_k\nabla_\nu\tau^k_\mu + \Box\tau_{\mu\nu}\right] + \\ + 64\pi^2\left(\alpha + \beta\right)\left[-4\tau\tau_{\mu\nu} + \tau^2 g_{\mu\nu}\right] + 64\pi^2\beta\left[4\tau_{k\nu}\tau^k_\mu - \tau_{ab}\tau^{ab}g_{\mu\nu}\right], \end{aligned}$$

который при взятии тех же, «физичных», значений κ и λ принимает вид

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu} + \\ + 64\pi^2\left(\alpha + \beta\right)\left[-4\tau\tau_{\mu\nu} + \tau^2 g_{\mu\nu}\right] + 64\pi^2\beta\left[4\tau_{k\nu}\tau^k_\mu - \tau_{ab}\tau^{ab}g_{\mu\nu}\right]. \end{aligned}$$

Пусть теперь $T_{\mu\nu} = 0$. Тогда интересующие нас уравнения

$$\begin{aligned} 0 = &\tau_{\mu\nu} + \\ &+ 16\Lambda\left(2\alpha + \beta\right)\left[4\tau_{\mu\nu} - \tau g_{\mu\nu}\right] + \\ &+ 16\pi\left(2\alpha + \beta\right)\left[\nabla_\mu\nabla_\nu\tau - \Box\tau g_{\mu\nu}\right] + 16\pi\beta\left[-2\nabla_k\nabla_\nu\tau^k_\mu + \Box\tau_{\mu\nu}\right] \end{aligned}$$

имеют след

$$0 = \tau - 32\pi\left(3\alpha + \beta\right)\Box\tau.$$

Подозрительное совпадение его с уравнением Клейна-Гордона, к несчастью, не случайно. Как было показано в работе [4], при линеаризации данной теории возникают возникают поправки к полю точечной массы, которые можно интерпретировать как обмен виртульными частицами массивными частицами спинов 0 и 2 с масами, квадраты которх обратно пропорциональны $3\alpha+\beta$ и β соответственно. Однако интересющий нас уровень строгости не позволяет прямое использование данных выводов, чтобы сделать заключение о существовании нетривиальных решений.

7 Заключение

Список литературы

[1] N. H. Barth и S. M. Christense. “Quantizing fourth-order gravity theories: The functional integral”. В: *Physical Review D* 28.8 (1983).

[2] Чарльз Мизнер, Кип Торн и Дж. Уилер. *Гравитация*. Т. 3. Москва: Мир, 1977.

[3] Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц. *Теоретическая физика*. 8-е изд., стеот. Т. II. Теория поля. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

[4] K.S. Stelle. “Classical Gravity with Higher Derivatives”. В: *General Relativity and Gravitation* 9.4 (1978), с. 353—371.