

多元线性回归的预测建模方法

王惠文 孟 洁

(北京航空航天大学 经济管理学院, 北京 100083)

摘 要: 根据历史的样本数据, 建立多元线性回归的预测模型; 从而在不需要未来样本数据的情况下, 预测未来时刻多元线性回归模型中的回归参数, 以及主要的模型精度评估指标. 对多元线性回归模型参数的预测, 转化为对其变量集合的增广矩阵的叉积阵的预测. 对叉积阵进行谱分解, 利用高维群点主轴旋转的预测建模方法, 通过 Givens变换得到特征向量矩阵的转角值, 对自由取值的转角以及特征值建立预测模型. 仿真实验例示了该方法的主要计算步骤; 计算结果显示, 利用本模型得到的拟合值精度较高, 预测值真实可信. 最终计算结果和实验结果吻合较好, 表明这种方法可以用于分析和预测众多领域中因变量对自变量的回归关系问题.

关 键 词: 回归分析; 建模; 预测; 评估

中图分类号: O 212 4

文献标识码: A **文章编号:** 1001-5965(2007)04-0500-05

Predictive modeling on multivariate linear regression

Wang Huiven Meng Jie

(School of Economics and Management, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: Based on the historical data, predictive method of multivariate linear regression model was discussed, where both future multivariate regression parameters and the performance evaluation statistics were estimated without future data. Prediction to the regression parameters was converted to predict cross product matrix of the variable augmented matrix. By applying spectral decomposition, cross product matrix was decomposed of eigenvectors and eigenvalues. Predictive method of orthonormal matrix based on rotations of principal axes was adopted to predict eigenvector matrix, where rotated angles from Givens transformation were obtained, and regular predictive models were built on both the angles and eigenvalues, respectively. The experimental simulation illustrates main computational procedures of the predictive model. Besides, the results show a high precise of the fitted values and a statistical validity of the predictive values. The agreement of the final computation results with the experimental data indicates this method could be used to analyze and forecast regression relationships of dependent variable to independent variables in many application fields.

Key words: regression analysis; model buildings; prediction; evaluation

1 问题的提出

多元线性回归是多元统计分析中的一个重要方法, 被广泛应用于社会、经济、技术以及众多自然科学领域的研究中. 在本文中将要讨论的问题是, 如果有一系列按时间顺序收集的样本数据, 如

何建立多元线性回归的预测模型, 并分析其估计标准误差以及调整的复测定系数等评估指标的动态变化规律.

设因变量为 y , 自变量集合为 x_1, x_2, \dots, x_p , 样本容量为 n . 记 $n \times (p+1)$ 维的矩阵 $X = (1, x_1, x_2, \dots, x_p)$, 该矩阵的第一列中的元素均等于 1.

以及增广矩阵为 $Z=(X, y)$. 根据多元线性回归方法, 回归系数以及各种模型评估参数的计算都取决于增广矩阵 $Z=(X, y)$ 的叉积阵:

$$V=\begin{pmatrix} X'X & X'y \\ y'X & y'y \end{pmatrix}$$

由此可见, 建立多元线性回归预测模型的关键技术是, 如何对叉积阵进行预测建模^[1-2].

叉积阵 V 是一个对称矩阵. 根据代数学理论, 通过谱分解, 总可以将其分解成特定的特征值对角矩阵和特征向量矩阵. 从几何的观点来看, 如果将矩阵 $Z=(X, y)$ 描述的数据看成是 $(p+2)$ 维空间中 n 个样本点的集合, 则它们形成一个超椭球. 并且其叉积阵 V 的特征向量矩阵依次指出该椭球最长的主轴、次长的主轴, …… , 最短的主轴. 而特征值则从大到小排序, 表示该超椭球在每一个主轴上的轴长范围. 由此可见, 对叉积阵 V 的预测可以分解成两个部分, 一是超椭球的主轴会随着时间的发生旋转运动; 同时, 该椭球的各个轴长也会随时间呈现拉伸或缩短的变化规律^[3]. 关于高维空间群点主轴旋转的预测建模技术已经有了一些适用的方法. 王惠文和刘强^[4]曾在分析多元数据的主轴旋转规律的文章中, 给出一种标准正交的特征向量矩阵的预测建模方法. 而对于特征值的预测, 由于不存在特殊的约束, 因此只需要应用经典的预测模型分别预测即可.

在本文中, 将把多元线性回归与高维空间群点主轴旋转预测建模方法有机的结合起来, 最终实现对多元线性回归的预测建模研究.

2 高维群点的主轴旋转预测建模

高维群点主轴旋转的预测方法^[4]是多元线性回归预测建模的关键技术. 实际上, 它又可以简单地看成是对标准正交矩阵的预测方法, 即根据已知 $1 \sim T$ 时刻的标准正交矩阵, 预测 $T+1$ 时刻的标准正交矩阵.

设 t 时刻的标准正交矩阵为 $G^t=(u_1^t \ u_2^t \ \cdots \ u_p^t) \in \mathbf{R}^{p \times p}$ $\mathbf{R}^{p \times p}$ 表示 $p \times p$ 维实空间. 按照 Givens 变换, 它可以通过以下 $\frac{1}{2}p \times (p-1)$ 步转动独立唯一地分解为

$$G^t=(G'_{12}G'_{13}\cdots G'_{1p})(G'_{23}G'_{24}\cdots G'_{2p})\cdots(G'_{p-1,p}) \tag{1}$$

其中

$$G'_{ij}=G'_{ij}(\phi_{ij}^t)=$$

$$\begin{pmatrix} & i & & & j & \\ \begin{matrix} I & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{matrix} & & & & & \\ \begin{matrix} 0 & \cos \phi_{ij}^t & \cdots & 0 & \cdots & -\sin \phi_{ij}^t & 0 \end{matrix} & & & & & i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & I & \cdots & 0 & 0 \end{matrix} & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \begin{matrix} 0 & \sin \phi_{ij}^t & \cdots & 0 & \cdots & \cos \phi_{ij}^t & 0 \end{matrix} & & & & & j \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & I \end{matrix} & & & & & \end{pmatrix}_{p \times p} \tag{2}$$

其中, 矩阵上侧和右侧的 i, j 分别表示第 i, j 行和列; $-\frac{\pi}{2} \leq \phi_{ij}^t \leq \frac{\pi}{2} (1 \leq i < j \leq p)$, 并且所有的 $\phi_{ij}^t (1 \leq i < j \leq p)$ 自由取值. 这样, 对于一个 p 维正交矩阵 G^t 的预测就归结为对矩阵相应转角 $\phi_{ij}^t (1 \leq i < j \leq p)$ 的预测. 下面给出正交矩阵预测建模的主要步骤.

1) 记

$$G^t=G^t=(u_1^t \ u_2^t \ \cdots \ u_p^t) \\ \text{def}(v_1^{1t} \ v_2^{1t} \ \cdots \ v_p^{1t})$$

其中, $v_1^{1t}=(v_{11}^{1t}, v_{12}^{1t}, \cdots, v_{1p}^{1t})'$ 是矩阵 G^t 的第 1 列. 根据文献[2]的推导, 可以求出

$$\phi_{1p}^t=\arcsin \frac{v_{1p}^{1t}}{v_p^{1t}} \\ \phi_{1k}^t=\arcsin \left\{ \frac{v_{1k}^{1t}}{\cos \phi_{1p}^t \cdots \cos \phi_{1,k+1}^t} \right\} \\ k=2 \ 3 \ \cdots \ p-1 \tag{3}$$

2) 根据式(2), 由 ϕ_{ij}^t 可以计算出 $G_{ij}^t=G_{ij}^t(\phi_{ij}^t) (j=2 \ 3 \ \cdots \ p)$. 于是, 记

$$G_2^t=(G_{2p}^t)' \cdots (G_{12}^t)' G_1^t=(v_1^{2t} \ v_2^{2t} \ \cdots \ v_p^{2t})$$

其中, $v_2^{2t}=(v_{21}^{2t}, v_{22}^{2t}, \cdots, v_{2p}^{2t})'$ 是矩阵 G_2^t 的第 2 列. 可以求出

$$\phi_{2p}^t=\arcsin \frac{v_{2p}^{2t}}{v_p^{2t}} \\ \phi_{2k}^t=\arcsin \left\{ \frac{v_{2k}^{2t}}{\cos \phi_{2p}^t \cdots \cos \phi_{2,k+1}^t} \right\} \\ k=3 \ 4 \ \cdots \ p-1 \tag{4}$$

依次类推, 最后定义

$$G_{p-1}^t=(G_{p-2,p}^t)'(G_{p-2,p-1}^t)'G_{p-2}^t= \\ (v_1^{(p-1)t} \ v_2^{(p-1)t} \ \cdots \ v_p^{(p-1)t})$$

则最终有

$$\phi_{p-1,p}^t=\arcsin \frac{v_{p-1,p}^{(p-1)t}}{v_p^{(p-1)t}} \tag{5}$$

3) 根据前两步计算得到的转角数据 $\{\phi_{ij}^t, t=1 \ 2 \ \cdots \ T\}$, 分别建立 $\frac{1}{2}p(p-1)$ 个预测模型, 例如

$$\phi_{ij}^t=f_{ij}(t)+\epsilon_{ij}^t \quad 1 \leq i < j \leq p \tag{6}$$

并预测第 $T+1$ 时刻的转角

$$\phi_{ij}^{T+l} = f_{ij}(T+l) \quad l = 1, 2, \dots \quad (7)$$

4) 根据角度的预测值, 并利用式 (1) 和式 (2), 可以求得第 $T+l$ 时刻预测的正交矩阵 $G^{T+l} = (u_1^{T+l} \ u_2^{T+l} \ \dots \ u_p^{T+l})$.

3 多元线性回归的预测建模方法

为了讨论多元线性回归的预测建模方法, 本节首先简要介绍经典多元线性回归方法.

设样本点容量为 n , t 时刻的因变量为 y^t , p 个自变量为 $x_j^t (j = 1, 2, \dots, p)$, 则总体线性回归模型的形式为

$$y_i^t = \beta_0 + \beta_1^t x_{i1}^t + \dots + \beta_p^t x_{ip}^t + \epsilon_i^t \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

记
$$y^t = \begin{pmatrix} y_1^t \\ y_2^t \\ \vdots \\ y_n^t \end{pmatrix}_{n \times 1} \quad \beta^t = \begin{pmatrix} \beta_0^t \\ \beta_1^t \\ \vdots \\ \beta_p^t \end{pmatrix}_{(p+1) \times 1}$$

$$X^t = \begin{pmatrix} 1 & x_{11}^t & x_{12}^t & \dots & x_{1p}^t \\ 1 & x_{21}^t & x_{22}^t & \dots & x_{2p}^t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1}^t & x_{n2}^t & \dots & x_{np}^t \end{pmatrix}_{n \times (p+1)}$$

则增广矩阵 (X^t, y^t) 的叉积阵 V^t 为
$$V^t = \begin{pmatrix} (X^t)' X^t & (X^t)' y^t \\ (y^t)' X^t & (y^t)' y^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11}^t & V_{12}^t \\ V_{21}^t & V_{22}^t \end{pmatrix} \quad (9)$$

回归系数 β^t 的最小二乘估计量为
$$\hat{\beta}^t = (V_{11}^t)^{-1} V_{12}^t \quad (10)$$

还可以证明, t 时刻的 S_{SSE} 和 S_{SST} 值分别如式 (11) 和式 (12) 所示^[4].

$$S_{SSE}^t = V_{22}^t - V_{21}^t (V_{11}^t)^{-1} V_{12}^t \quad (11)$$

$$S_{SST}^t = V_{22}^t - \frac{1}{n} (V_{12,1}^t)^2 \quad (12)$$

其中 $V_{12,1}^t$ 是 V_{12}^t 的第一个分量. 根据式 (11) 和式 (12), t 时刻的拟合优度 (调整的复测定系数) 为

$$\bar{R}_t^2 = 1 - \frac{S_{SSE}^t / (n - p - 1)}{S_{SST}^t / (n - 1)} \quad (13)$$

同时, 有 t 时刻的估计标准误差为

$$S_e^t = \sqrt{\frac{1}{n - p - 1} S_{SSE}^t} \quad (14)$$

根据前面介绍的关键技术, 下面给出多元线性回归的预测建模方法.

- 1) 计算 $t (t = 1, 2, \dots, T)$ 时刻增广矩阵 (X^t, y^t) 的叉积阵 V^t ;
- 2) 计算 V^t 的特征值 $\lambda_1^t \geq \lambda_2^t \geq \dots \geq \lambda_{p+2}^t \geq 0$ 和对应的标准正交特征向量 $u_1^t, u_2^t, \dots, u_{p+2}^t (t =$

- $1, 2, \dots, T)$;
- 3) 根据 $1 \sim T$ 时刻叉积阵 V^t 的特征向量阵, 采用正交矩阵预测方法, 预测 $T+l$ 时刻的特征向量矩阵 $(u_1^{T+l} \ u_2^{T+l} \ \dots \ u_{p+2}^{T+l})$;

- 4) 根据 $1 \sim T$ 时刻叉积阵 V^t 的特征值, 应用时序分析方法, 分别预测 $T+l$ 时刻的特征值 $(\lambda_1^{T+l}, \lambda_2^{T+l}, \dots, \lambda_{p+2}^{T+l})$;

- 5) 根据上两步的计算结果, 计算出 $T+l$ 时刻的叉积阵 V^{T+l} 为

$$V^{T+l} = (u_1^{T+l} \ u_2^{T+l} \ \dots \ u_{p+2}^{T+l}) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^{T+l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{T+l} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{p+2}^{T+l} \end{pmatrix} \cdot (u_1^{T+l} \ u_2^{T+l} \ \dots \ u_{p+2}^{T+l})'$$

- 6) 根据式 (10), 可得到 $T+l$ 时刻的回归参数的估计量 $\hat{\beta}^{T+l}$;

- 7) 根据式 (11) ~ 式 (14), 可计算 $T+l$ 时刻的回归模型的拟合优度 \bar{R}_{T+l}^2 和估计标准误差 S_e^{T+l} .

4 仿真案例

在本仿真案例中, 取自变量维数为 3 每个时刻的样本数为 $n = 30$ 按照如下方式生成 $t = 1 \sim 10$ 个时刻的历史数据表: 首先, 生成 $[-1, 1]$ 上均匀分布的独立随机数 $[x_1^0 \ x_2^0 \ x_3^0]_{30 \times 3}$; 然后, 根据 $[x_1^0 \ x_2^0 \ x_3^0]_{30 \times 3}$ 生成 $[x_1^t \ x_2^t \ x_3^t] (t = 1, \dots, 10)$, 其中

$$\begin{cases} x_1^t = x_1^0 + 0.02t \\ x_2^t = x_2^0 + 0.01t \\ x_3^t = x_3^0 + 0.03t \end{cases}$$

最后, 按照 $y^t = -1 + 0.2t \cdot x_1^t + 0.1t \cdot x_2^t - 0.3t \cdot x_3^t + \epsilon_t$, 生成因变量 y^t . 其中, $\epsilon_t \sim N(0, 0.01)$ 为随机误差项. 需要说明的是, 由于本文所研究的是多元回归的动态建模预测问题, 因此, 需要考虑变量以及模型 (回归系数) 随时间 t 的变化特征; 为此, 在构造自变量和因变量的仿真数据时, 采用了上述方式生成具有时序变化规律 (这里以线性趋势为例) 的历史数据表.

下面将采用 $t = 1 \sim 10$ 时刻的仿真数据, 按照第 3 部分的方法进行多元回归预测建模, 对历史的自变量与因变量的回归关系进行拟合, 并根据拟合模型预测 $t = 11$ 时刻的多元回归模型, 评价模型的拟合、预测精度, 验证模型的拟合、预测结果的合理可靠性.

具体建模步骤如下:

1) 计算 $t=1 \sim 10$ 时刻样本数据的叉积阵 V^t , 及其对应的特征值 $(\lambda_1^t \ \lambda_2^t \ \cdots \ \lambda_5^t)$ 和标准正交特征向量矩阵 $(u_1^t \ u_2^t \ \cdots \ u_5^t)$; 并采用正交矩阵转角分解方法, 得到 $(u_1^t \ u_2^t \ \cdots \ u_5^t)$ 对应的转角 $\phi_{ij}^t (1 \leq i < j \leq 5)$.

2) 根据 $t=1 \sim 10$ 时刻 $\lambda_j^t (1 \leq i < j \leq 5)$ 的计算值, 建立每个特征值的时序拟合模型. 并根据这些模型计算 $t=11$ 时刻的预测特征值. 所得到特征值 $\lambda_j^t (1 \leq i < j \leq 5)$ 的拟合值和预测值如图 1 所示. 在图 1 中, 实心点表示根据已知数据计算得到的实际特征值, 虚线表示采用预测模型得到的特征值的拟合值.

3) 根据 $t=1 \sim 10$ 时刻转角 $\phi_{ij}^t (1 \leq i < j \leq 5)$ 的计算值, 分别建立每个转角的时序拟合模型. 并根据这些模型计算 $t=11$ 时刻的预测的转角值. 所得到转角 $\phi_{ij}^t (1 \leq i < j \leq 5)$ 的拟合值和预测值如图 2 所示. 在图 2 中, 实心点表示根据已知数据计算得到的实际特征值, 虚线表示采用预测模型得到的特征值的拟合值.

4) 根据转角拟合模型, 计算叉积阵的特征向量矩阵 $(u_1^t \ u_2^t \ \cdots \ u_5^t)$ 的拟合值. 表 1 列出了 $t=10$ 时刻叉积阵的特征值和特征向量的计算值、拟合值, 以及 $t=11$ 时刻的预测值.

5) 根据特征值和特征向量的拟合值, 可以计算各时刻的叉积阵 V^t 的拟合值. 表 2 为 $t=10$ 时刻叉积阵的计算值和拟合值, 以及 $t=11$ 时刻的预测值.

6) 计算各时刻的调整的复测定系数和估计标准误差, 见表 3 从表 3 可以看出, $t=1 \sim 10$ 时刻, 回归模型的拟合精度较高, 调整的复测定系数 (\bar{R}^2) 始终高于 0.8 且随时间呈明显上升趋势; 而估计标准误差 S_e 在 0.1 附近波动. 预测 $t=11$ 时刻模型的调整的复测定系数为 0.999 回归标准误差为 0.023

从表 3 可以看出, 动态多元线性回归模型的整体拟合效果较好, 拟合优度较高, 采用预测方法得到的 \bar{R}^2 和 S_e 与实际值十分接近. 因此可以判

断, 对 $t=11$ 时刻的回归模型的评估指标 \bar{R}^2 , S_e 的预测也是可信的.

7) 计算各时刻多元回归预测模型的回归系数. 表 4 为 $t=10$ 时刻回归系数的计算值和拟合值, 以及 $t=11$ 时刻的预测值.

更直观的, 给出 $t=1 \sim 11$ 时刻多元线性回归模型系数的时序图, 如图 3 所示. 其中, 实心点表示实际计算值, 虚线为拟合值, 空心点为预测值.

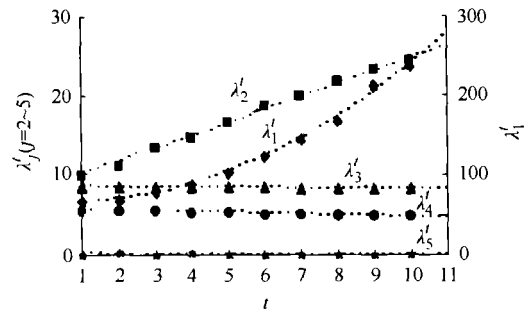


图 1 $t=1 \sim 11$ 时刻 $\lambda_j^t (1 \leq i < j \leq 5)$ 的时序拟合预测图

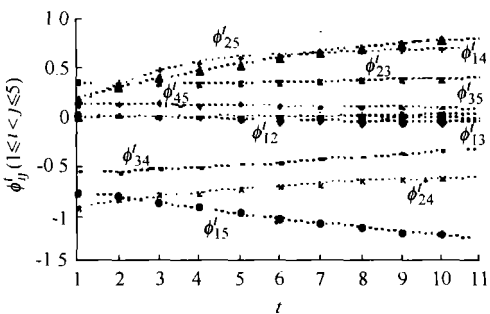


图 2 $t=1 \sim 11$ 时刻 $\phi_{ij}^t (1 \leq i < j \leq 5)$ 的时序拟合预测图

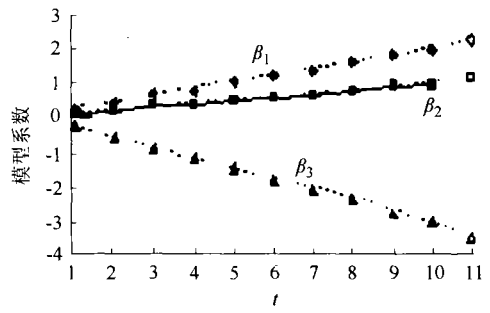


图 3 $t=1 \sim 11$ 时期动态多元回归模型的系数趋势图

表 1 $t=10 \ 11$ 时刻叉积阵的特征值, 特征向量的计算值、拟合值和预测值

特征解	$t=10$ 计算值	$t=10$ 拟合值	$t=11$ 预测值
特征值	(237.13 24.44 8.13 4.56 0.01)	(239.98 24.71 8.10 4.68 0.01)	(279.08 26.34 8.11 4.63 0.001)
特征向量	$\begin{pmatrix} 0.23 & 0.82 & 0.19 & -0.43 & 0.23 \\ -0.02 & 0.50 & -0.58 & 0.41 & -0.49 \\ -0.01 & 0.19 & 0.76 & 0.57 & -0.24 \\ 0.22 & 0.07 & -0.20 & 0.57 & 0.76 \\ -0.95 & 0.20 & 0.01 & 0.02 & 0.25 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.23 & 0.82 & 0.20 & -0.43 & 0.24 \\ -0.02 & 0.50 & -0.58 & 0.41 & -0.50 \\ -0.01 & 0.19 & 0.77 & 0.56 & -0.25 \\ 0.22 & 0.07 & -0.19 & 0.58 & 0.76 \\ -0.95 & 0.20 & 0.01 & 0.02 & 0.25 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.20 & 0.82 & 0.19 & -0.45 & 0.21 \\ -0.02 & 0.50 & -0.58 & 0.42 & -0.50 \\ -0.01 & 0.19 & 0.78 & 0.54 & -0.26 \\ 0.20 & 0.10 & -0.17 & 0.57 & 0.77 \\ -0.96 & 0.18 & 0.01 & 0.01 & 0.22 \end{pmatrix}$

表 2 $t=10\ 11$ 时刻叉积阵的计算值、拟合值和预测值

$t=10$ 计算值						$t=10$ 拟合值						$t=11$ 预测值					
30	7.12	3.38	12.09	-47.56		30.14	7.25	3.34	11.98	-47.81		30.23	7.91	3.58	12.18	-47.67	
	9.74	-0.20	1.69	7.23			9.83	-0.16	1.73	7.27			10.07	-0.08	2.17	7.44	
		7.12	0.07	3.08				7.13	0.12	3.25				7.23	0.35	3.53	
			13.77	-49.84					13.69	-49.87					13.56	-53.87	
				213.64						216.68						257.07	

表 3 $t=1\sim 11$ 时刻调整的复测定系数和估计标准误差的计算值、估计值

t	\bar{R}^2	\bar{R}^2	S_e	S_e
	计算值	估计值	计算值	估计值
1	0.836	0.808	0.087	0.094
2	0.942	0.960	0.109	0.097
3	0.983	0.979	0.092	0.104
4	0.977	0.985	0.132	0.111
5	0.990	0.989	0.109	0.116
6	0.995	0.992	0.090	0.117
7	0.995	0.994	0.101	0.116
8	0.998	0.996	0.081	0.111
9	0.996	0.997	0.125	0.101
10	0.998	0.999	0.094	0.078
11		0.999		0.023

表 4 $t=10\ 11$ 时刻回归系数的计算值、拟合值和预测值

$t=10$ 计算值			$t=10$ 拟合值			$t=11$ 预测值		
β_1	β_2	β_3	β_1	β_2	β_3	β_1	β_2	β_3
1.971	0.960	-3.046	2.003	1.00	-3.062	2.254	1.156	-3.500

综上所述,从上述计算过程中,从所得到的相应参数的实际值和拟合值可以看出,本文所建立的多元线性回归分析的时序动态模型的拟合效果较好,预测结果合理可靠.

5 结 束 语

本文讨论了如何利用历史的样本数据,建立多元线性回归的动态分析模型,并对回归系数进行预测.在该模型中,主要采用正交矩阵主轴旋转的预测建模方法,实现对叉积阵的预测建模.运用多元线性回归的预测模型,可以在无须对未来系统采样的情况下,推测未来的回归系数及模型精

度.另一方面,从该模型中,还可以识别解释变量对因变量影响程度的动态规律以及变化趋势.通过仿真实验,验证了模型拟合、预测结果的可行性和有效性.

需要指出的是,本文所提出的方法还有很大的理论探讨空间.例如,本文是按照推测模型的调整的复测定系数和估计标准误差的方法,判断未来回归模型的精度.而事实上,利用对叉积阵 V' 的预测结果,还可以很方便地计算未来的 F 检验值和 t 检验值.

然而,由于 F 检验值和 t 检验都必须要在 Gauss-Marcov 假设条件下才能进行,而按照本文预测方法所得到的预测参数是否依然符合经典回归模型中的基本假设,还有待更深入的理论分析.这将是本文所提方法需要进一步研究的主要内容之一.

参考文献 (References)

[1] Fisher R A. The use of multiple measurements in taxonomic problems[J]. Ann of Eugenics, 1936, 7: 179-188

[2] 高惠璇.统计计算[M].北京:北京大学出版社, 2005

Gao Huixuan. Statistical computation[M]. Beijing: Beijing University Press, 2005(in Chinese)

[3] Roger A H, Charles R J. 杨奇译.矩阵分析[M].北京:机械工业出版社, 2005

Roger A H, Charles R J. Translated by Yang Qi. Matrix Analysis[M]. Beijing: Machinery Industry Press, 2005(in Chinese)

[4] Wang Huiwen, Liu Qiang. Forecast modeling for rotations of principal axes of multi dimensional data set[J]. Computational Statistics & Data Analysis, 1998, 27(3): 345-35

(责任编辑: 彭 徽)