

Institute of Systems Science and Intelligent Control Technology 系统科学与智能控制研究所

鲁棒控制： 建模、跟踪、抗扰、容错

周克敏
山东科技大学
电气与自动化工程学院
2020年5月7日
(第二讲)

爱眼无窮

提纲

- 1 古典控制基础（继续）
- 2 鲁棒控制理论基础
- 3 鲁棒控制在迟滞系统中应用
- 4 高精度跟踪与抗扰控制
- 5 故障诊断与容错控制
- 6 教材2-16章

2

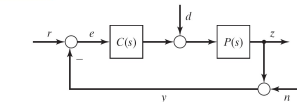
输入稳态跟踪误差

$$L(s) = P(s)C(s)$$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} L(s);$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sL(s);$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 L(s)$$



$$e = \frac{1}{1+PC}(r-n) - \frac{P}{1+PC}d$$

系统型号 k

	k = 0	k = 1	k = 2
K_p	$L_0(0)$	∞	∞
K_v	0	$L_0(0)$	∞
K_a	0	0	$L_0(0)$

Steady State Error

	k = 0	k = 1	k = 2
$r(t) = 1(t)$	$\frac{1}{1+K_p}$	0	0
$r(t) = t$	∞	$\frac{1}{K_v}$	0
$r(t) = \frac{t^2}{2}$	∞	∞	$\frac{1}{K_a}$

扰动稳态误差

$$L(s) = P(s)C(s)$$

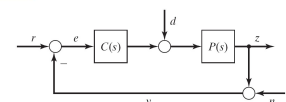
$$d(t) = t^l / l! \quad C(s) = \frac{1}{s^k} C_0(s)$$

$$e = \frac{1}{1+PC}(r-n) - \frac{P}{1+PC}d$$

$$z = \frac{PC}{1+PC}(r-n) + \frac{P}{1+PC}d$$

$$z(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sZ(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{k-l}P(s)}{s^k + P(s)C_0(s)}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if } k > l \\ \frac{P(0)}{1+P(0)C_0(0)} & \text{if } k = l = 0 \\ \frac{1}{C_0(0)} & \text{if } k = l > 0 \\ \infty & \text{if } k < l \end{cases}$$



完美抗扰：控制器的极点必须包括 $L\{d(t)\}$ 的不稳定极点。例如

$$L\{d(t)\} = L\{t^l / l!\} = \frac{1}{s^{l+1}}$$

$$L\{d(t)\} = L\{A \sin \omega t\} = \frac{As}{s^2 + \omega^2}$$

内模原理

$$L(s) = P(s)C(s)$$

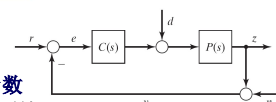
完美跟踪：回路传递函数 $L(s)$ 的极点必须包括 $L\{r(t)\}$ 的不稳定极点。

完美抗扰：控制器的极点必须包括 $L\{d(t)\}$ 的不稳定极点。

例如：r是阶跃，则

$$L\{r(t)\} = L\{1(t)\} = \frac{1}{s}$$

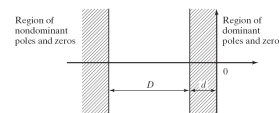
因此回路传递函数 $L(s)$ 必须包括一个积分。



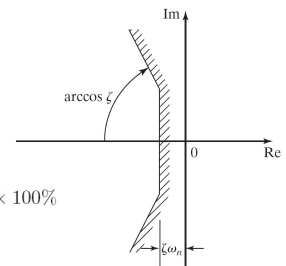
$$e = \frac{1}{1+PC}(r-n) - \frac{P}{1+PC}d$$

主导零极点

主导零极点



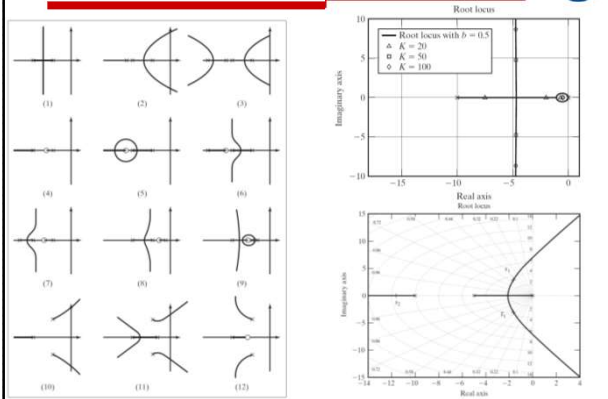
期望的主导零极点



$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}, \quad PO = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\%$$

$$\zeta\omega_n \geq \frac{4}{t_s}, \quad \zeta \geq \frac{-\ln(PO)}{\sqrt{\pi^2 + (\ln PO)^2}}$$

频域设计：根轨迹能告诉你什么？



频率响应 (1)

对正弦信号的稳态响应叫做频率响应

正弦信号: $u(t) = A \sin \omega t$

指数形式: $u(t) = A \sin \omega t = \frac{A}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$

由于对 $u_1(t) = e^{j\omega t}$ with $s = j\omega$ 的响应是 $H(s) = H(j\omega)$,

对 $u(t) = A \sin \omega t$ 的响应是

$$y(t) = \frac{A}{2j} (H(j\omega)e^{j\omega t} - H(-j\omega)e^{-j\omega t})$$

因 $H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\angle H(j\omega)}$, $H(-j\omega) = |H(j\omega)| e^{-j\angle H(j\omega)}$

$$y(t) = \frac{A}{2j} |H(j\omega)| (e^{j(\angle H(j\omega) + \omega t)} - e^{-j(\angle H(j\omega) + \omega t)})$$

$$= A |H(j\omega)| \sin(\omega t + \angle H(j\omega))$$

频率响应 (2)

例子: $u(t) = A \sin \omega t$ $\dot{y} + ky = u(t)$

那么 $H(s) = \frac{1}{s+k} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{j\omega+k}$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \quad \angle H(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{\omega}{k}$$

$$y(t) = A |H(j\omega)| \sin(\omega t + \angle H(j\omega))$$

$|H(j\omega)|$ 是幅值比 $\angle H(j\omega)$ 是相位

频率响应是系统的稳态响应

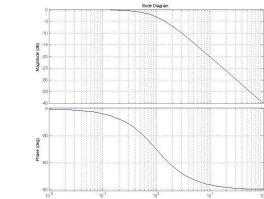
MATLAB Commands:

```
k=1;
num=1;
den=[1,k];
sysH=tf(num,den);
w=logspace(-2,2);
%50 points from 10^-2 to 10^2
bode(sysH,w)
or just bode(sysH)
```

$$y(t) = \frac{A\omega}{k^2 + \omega^2} e^{-kt} + A |H(j\omega)| \sin(\omega t + \angle H(j\omega))$$

$$y_t = \frac{A\omega}{k^2 + \omega^2} e^{-kt} \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty \text{ 是瞬态响应}$$

$$y_{ss}(t) = A |H(j\omega)| \sin(\omega t + \angle H(j\omega))$$



频率响应 (3)

令 $u(t) = (\sin 10t)u(t)$

$\dot{y} + y = u(t)$

$$\text{那么 } U(s) = \frac{10}{s^2 + 10^2} \quad H(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow Y(s) = H(s)U(s) = \frac{1}{s+1} \frac{10}{s^2 + 10^2}$$

$$= \frac{10}{101} \frac{1}{s+1} + \frac{10}{101} \frac{-s+1}{s^2 + 10^2}$$

因此

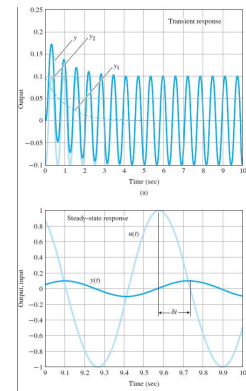
$$y(t) = \frac{10}{101} e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{101}} \sin(10t + \phi)$$

$$= \frac{10}{101} e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{101}} \sin(10t - 1.47)$$

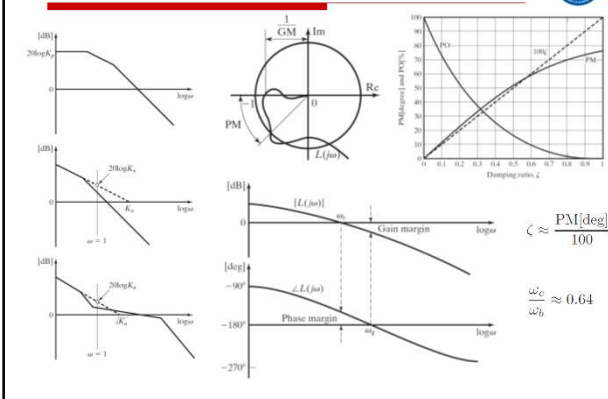
$$= \frac{10}{101} e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{101}} \sin 10(t - 0.147)$$

$$\phi = -\tan^{-1} 10 = -1.47 \text{ rad} = -84.29^\circ$$

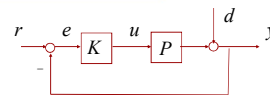
稳态响应滞后输入 84.29° 或者 $\delta t = 0.147$ sec.



频域设计：稳态精度与动态性能



跟踪与抗扰



跟踪正弦信号

如果 $r(t) = \sin \omega_0 t$, 稳态跟踪误差为

$$e_{ss}(t) = |T_{er}(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \angle T_{er}(j\omega_0)) \quad T_{er}(s) = (I + PK)^{-1}$$

抗扰正弦扰动

如果 $d(t) = \sin \omega_0 t$, 稳态输出响应为

$$y_{ss}(t) = |T_{yd}(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \angle T_{yd}(j\omega_0)) \quad T_{yd}(s) = (I + PK)^{-1}$$

如果 ω_0 可以在一个范围 W 内变化, 则最大可能误差为

$$\max_{\omega \in W} |T_{er}(j\omega)| \text{ or } \max_{\omega \in W} |T_{yd}(j\omega)|$$

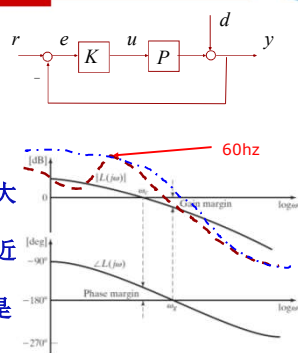
跟踪与抗扰的矛盾

$e = (I + PK)^{-1}(r - d)$
无法区分参考与扰动
灵敏度函数:

$$S = (I + PK)^{-1}$$

如扰动在60Hz, 则需
 $|L(j\omega)|$ 在60Hz附近较大
而跟踪低频输入信号则
需要 $|L(j\omega)|$ 在低频附近
较大

不牺牲稳定裕度这是
不可能的!



13

Example: 2自由度控制

$$P(s) = \frac{1}{s(s-1)} \quad C(s) = \frac{18s+6}{s+7}$$

$$\text{Closed-loop TF with overshoot} = \frac{18s+6}{s^3+6s^2+11s+6}$$

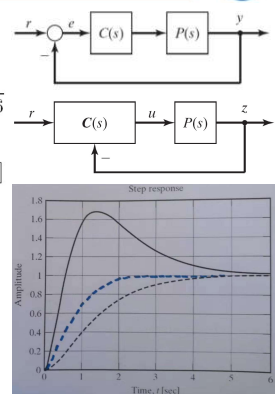
$$C(s) = \frac{1}{s+7} [2s+6 \quad 18s+6]$$

$$\text{Closed-loop TF without overshoot} = \frac{2}{s^2+3s+2}$$

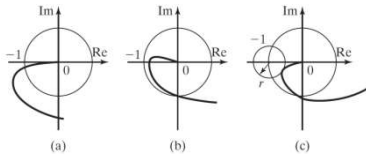
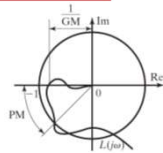
A better one is

$$C(s) = \frac{1}{s+7} [6s+6 \quad 18s+6]$$

with closed-loop TF $\frac{6}{(s+2)(s+3)}$



频域设计：古典稳定裕度的局限



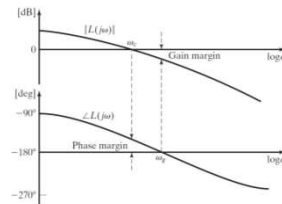
波德：增益与相位关系

$L = PK$ stable and minimum phase:

$$\angle L(j\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \ln |L|}{d \nu} \ln \coth \frac{|v|}{2} dv, \quad v := \ln \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$|1 + L(j\omega_c)| = |1 + L^{-1}(j\omega_c)| = 2 \left| \sin \frac{\pi + \angle L(j\omega_c)}{2} \right|$$

must not be too small for good stability robustness.



□ 为保证稳定裕度, L 在穿越频率附近足够宽的频率范围内的斜率不能太陡 (~ -20 dB/decade)

16

波德：增益与相位关系

L stable and nonminimum phase with RHP zeros: z_1, \dots, z_k :

$$L(s) = \frac{-s+z_1}{s+z_1} \frac{-s+z_2}{s+z_2} \dots \frac{-s+z_k}{s+z_k} L_{\text{reg}}(s)$$

$$\angle L(j\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \ln |L|}{d \nu} \ln \coth \frac{|v|}{2} dv + \sum_{i=1}^k \angle \frac{-j\omega_0 + z_i}{j\omega_0 + z_i}$$

$$\angle L(j\omega_0) < \begin{cases} -\ell \times 65.3^\circ, & \text{if the slope of } L = -\ell \text{ for } \frac{1}{10} \leq \frac{\omega}{\omega_0} \leq 3 \\ -\ell \times 75.3^\circ, & \text{if the slope of } L = -\ell \text{ for } \frac{1}{5} \leq \frac{\omega}{\omega_0} \leq 5 \\ -\ell \times 82.7^\circ, & \text{if the slope of } L = -\ell \text{ for } \frac{1}{10} \leq \frac{\omega}{\omega_0} \leq 10. \end{cases}$$

$$\phi_1(\omega_0/z) := \angle \frac{-j\omega_0 + z}{j\omega_0 + z} \Big|_{\omega_0 = z, z/2, z/4} = -90^\circ, -53.13^\circ, -28^\circ$$

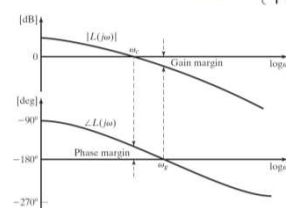
$$\phi_2(\omega_0/|z|) := \angle \frac{-j\omega_0 + z}{j\omega_0 + z} \Big|_{\omega_0 = |z|, |z|/2, |z|/3, |z|/4}$$

$$\approx \begin{cases} -180^\circ, & -106.26^\circ, & -73.7^\circ, & -56^\circ, & \text{Re}(z) \gg \Im(z) \\ -180^\circ, & -86.7^\circ, & -55.9^\circ, & -41.3^\circ, & \text{Re}(z) \approx \Im(z) \\ -360^\circ, & 0^\circ, & 0^\circ, & 0^\circ, & \text{Re}(z) \ll \Im(z) \end{cases}$$

波德：增益与相位关系

□ 穿越频率不能太大, 否则闭环系统稳定性和性能没有保障。

$$\omega_c < \begin{cases} z/2, & \text{for real zero} \\ |z|/4, & \text{for complex zero: } \Re(z) \gg \Im(z) \\ |z|/3, & \text{for complex zero: } \Re(z) \approx \Im(z) \\ |z|, & \text{for complex zero: } \Re(z) \ll \Im(z) \end{cases}$$



John Doyle's CDC and CCC Presentation

Yoke Peng Leong

Efficient physiology and technology

- Sound waves (hearing)
- Light waves (vision, radio)
- Walking/flying (wheels)
- Respiration (pumps)
- Cardiovascular rhythms
- Cellular calcium signaling
- Eat, chew, swallow
- Peristalsis
- Blinking
- Brain rhythms?

Why oscillations?

Conservation of energy

Linearized*

$$(M+m)\ddot{x} \pm m\ddot{\theta} = u + r$$

$$m(\ddot{x} \pm l\ddot{\theta} \mp g\theta) = 0$$

$$z = x \pm l_0\theta$$

$$y = z + n$$

Laplace transformed†

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{D(s)} \begin{bmatrix} ls^2 \mp g \\ \mp s^2 g \end{bmatrix} (\ddot{u} + \ddot{r})$$

$$\ddot{z} = \frac{(l-l_0)s^2 \mp g}{D(s)} (\ddot{u} + \ddot{r})$$

$$\ddot{y} = \ddot{z} + \ddot{n}$$

* The top (bottom) sign in \pm or \mp corresponds to linearization around (down) equilibrium.

† $D(s) = s^2(Mls^2 \mp (M+m)g)$

波德灵敏度函数积分

□ 命 p_1, p_2, \dots, p_m 为开环系统右半平面极点

$$\int_0^\infty \ln|S(j\omega)| d\omega = \pi \sum_{i=1}^m \Re(p_i) \geq 0$$

□ 开环稳定系统

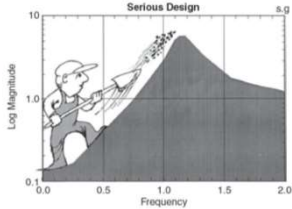
$$\int_0^\infty \ln|S(j\omega)| d\omega = 0$$

$$S = (I + PK)^{-1}$$

Nothing Is Free!

$$L = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\xi\omega_n)}$$

$$\alpha = \sqrt{0.5 + 0.5\sqrt{1 + 8\xi^2}} \text{ and } \omega_{\max} = \alpha\omega_n \quad |S(j\omega_{\max})| = \frac{\alpha\sqrt{\alpha^2 + 4\xi^2}}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + 4\xi^2\alpha^2}}$$



球杆系统（纯滑动）

$$M\ddot{x}(t) = Mg \sin \phi(t)$$

tilt angle $\phi(t)$ is small

$$\ddot{x}(t) = g\phi(t)$$

$$\frac{X(s)}{\Phi(s)} = \frac{g}{s^2}$$

$$\frac{\Phi(s)}{\Theta_d(s)} = \frac{\phi(t)}{\theta(t)} = \frac{R}{L}$$

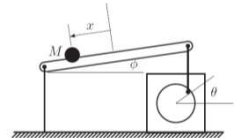
$$\frac{\Theta_d(s)}{\Theta_m(s)} = K_g$$

$$\begin{bmatrix} \Theta(s) \\ X(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{R_a s^3 (J_s + K_f)} \begin{bmatrix} K_t K_g s^2 \\ K_t K_g R g / L \end{bmatrix} U(s)$$

$$\frac{u}{\frac{K_t}{R_a s^3 (J_s + K_f)}} \rightarrow \theta_m \rightarrow \frac{K_g}{\frac{R}{L}} \rightarrow \phi \rightarrow \frac{g}{s^2} \rightarrow x$$

球杆系统（纯滚动）

假设球只滚动，不滑动。
假设球的半径是 r 。那么相对球心轴的转动惯量为 $J_c = 2/5 Mr^2$ 。而相对于滑动表面的转动惯量为 $J = J_c + Mr^2 = 7/5 Mr^2$ 。因此运动方程为



$$J\ddot{\theta} = r(Mg \sin \phi)$$

where $x = r\theta$ and β is the angle the ball rolled

$$\frac{7}{5} Mr^2 \ddot{\theta} = r(Mg \sin \phi)$$

$$\ddot{x} = \frac{5}{7} g \sin \phi \approx \frac{5}{7} g \phi$$

This equation can also be derived as follows

$$M\ddot{x} = Mg \sin \phi - F$$

where F is friction. Then the rolling motion is governed by

$$J\ddot{\theta} = r(F) \text{ i.e.,}$$

$$\frac{2}{5} Mr^2 \ddot{\theta} = r(Mg \sin \phi - M\ddot{x})$$

$$\frac{7}{5} \ddot{x} = g \sin \phi = g\phi, \quad \frac{X(s)}{\Phi(s)} = \frac{5g}{7s^2}$$

球杆系统（一般情况）

滚动模型：

$$\frac{X(s)}{\Phi(s)} = g \frac{1}{s^2}$$

一般情况下，球可能既有滚动又有滑动。因此系统的运动方程介于两者之间：

$$\frac{X(s)}{\Phi(s)} = kg \frac{1}{s^2}$$

$$\frac{5}{7} \leq k \leq 1$$

k 是不确定参数

滑动模型：

$$\frac{X(s)}{\Phi(s)} = \frac{5}{7} g \frac{1}{s^2}$$

倒立摆

$$f(t) = M_c \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + M_p \frac{d^2 [x(t) - L/2 \sin \theta(t)]}{dt^2}$$

$$J = \int_0^L \ell^2 \left(\frac{M_p}{L} d\ell \right) = \frac{1}{3} M_p L^2$$

$$J\ddot{\theta}(t) = M_p \ddot{x}(t) \cos \theta(t) \frac{L}{2} + M_p g \sin \theta(t) \frac{L}{2}$$

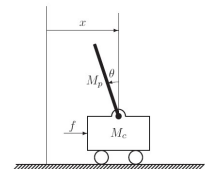
$$(M_p + M_c) \ddot{x}(t) - \frac{1}{2} M_p L \ddot{\theta}(t) \cos \theta(t) + \frac{1}{2} M_p L \dot{\theta}^2(t) \sin \theta(t) = f(t)$$

$$-\ddot{x}(t) \cos \theta(t) + \frac{2}{3} \ddot{\theta}(t) - g \sin \theta(t) = 0.$$

线性化得到

$$(M_p + M_c) \ddot{x}(t) - \frac{1}{2} M_p L \ddot{\theta}(t) = f(t)$$

$$-\ddot{x}(t) + \frac{2}{3} \ddot{\theta}(t) - g \theta(t) = 0.$$



倒立摆

进行拉普拉斯变换

$$(M_p + M_c)s^2 X(s) - \frac{1}{2}M_p L s^2 \Theta(s) = F(s)$$

$$-s^2 X(s) + \frac{2}{3}L s^2 \Theta(s) - g \Theta(s) = 0.$$

$$\begin{bmatrix} X(s) \\ \Theta(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 \left[(M_p + 4M_c)L s^2 - 6(M_p + M_c)g \right]} \begin{bmatrix} 4L s^2 - 6g \\ 6s^2 \end{bmatrix} F(s) = P(s)F(s)$$

$M_c=1[\text{kg}], M_p=2[\text{kg}], L=1[\text{m}]$

$$P(s) = \frac{1}{s^2(s^2 - 3g)} \begin{bmatrix} 2/3s^2 - g \\ s^2 \end{bmatrix}$$

$$g = 9.8 [\text{m/sec}^2]$$

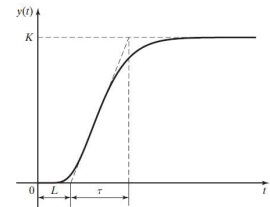
PID 控制器

Ziegler and Nichols
Tuning Rules

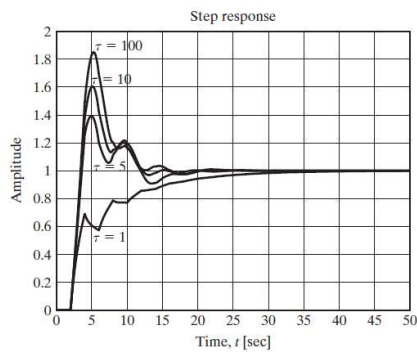
$$C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

$$P(s) = \frac{K e^{-Ls}}{\tau s + 1}$$

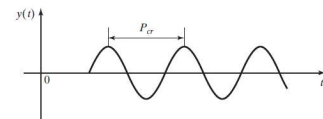
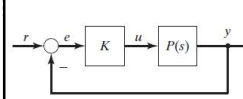
Controller type	K_P	T_I	T_D
P	$\frac{\tau}{K_L}$		
PI	$\frac{0.9\tau}{K_L}$	$\frac{L}{0.3}$	
PID	$\frac{1.2\tau}{K_L}$	$2L$	$0.5L$



PID 控制器

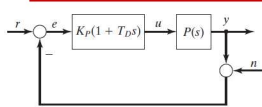


PID调节第二方法



Controller	K_P	T_I	T_D
P	$0.5K_{cr}$		
PI	$0.45K_{cr}$	$\frac{1}{1.2}P_{cr}$	
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

微分控制



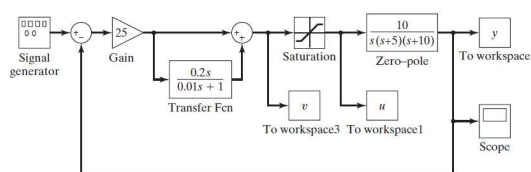
Approximate derivative
control: small $T > 0$

$$C(s) = K_P \left(1 + \frac{T_D s}{T s + 1} \right)$$

Example

$$C(s) = 5(s+5) = 25(0.2s+1), \quad P(s) = \frac{10}{s(s+5)(s+10)}$$

$$C(s) = 25 \left(1 + \frac{0.2s}{T s + 1} \right) \quad T = 0.01$$



内稳定与外稳定

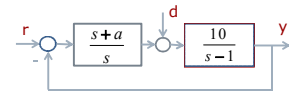
□ $a=-1$ 闭环稳定吗?

□ 有人说稳定因为从 r 到 y 传函是稳定的

$$\frac{10}{s+10}$$

□ 有人说不稳定因为我们无法精确地做到 $a=-1$ 。那么从 r 到 y 传函是

$$\frac{10(s+a)}{s^2+9s+10a} \quad (\text{不稳定}).$$



□ 假如我们能够精确地做到 $a=-1$ ，如何?

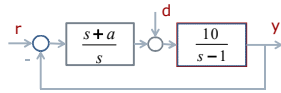
内稳定与外稳定

- $a=-1$ 闭环稳定吗?
- 有人说稳定因为从 r 到 y 传函是稳定的

$$\frac{10}{s+10}$$

- 有人说说不稳定因为我们无法精确地做到 $a=-1$ 。那么从 r 到 y 传函是

$$\frac{10(s+a)}{s^2+9s+10a} \quad (\text{不稳定}).$$



- 假如我们能够精确地做到 $a=-1$ ，如何?

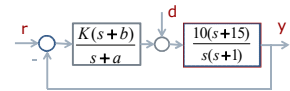
- 答案：仍然**不稳定**因为从 d 到 y 传函是

$$\frac{10s}{(s-1)(s+10)}$$

题外话：古典控制设计

- 我们被告知不要做零极点对消！为什么？大部分解释牛头不对马嘴。

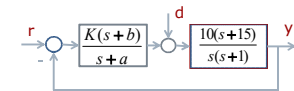
- 经典的方法是用根轨迹或者波德图找出合适的 a 和 b (It is an art! 可怜的本科生浪费了多少花前月下的好时光也没搞懂)。



题外话：古典控制设计

- 我们被告知不要做零极点对消！为什么？大部分解释牛头不对马嘴。

- 经典的方法是用根轨迹或者波德图找出合适的 a 和 b (It is an art! 可怜的本科生浪费了多少花前月下的好时光也没搞懂)。

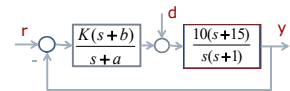


- 其实最简单有效的控制设计就是取 $b=1$ ，做零极点对消!!!!!!

题外话：古典控制设计

- 我们被告知不要做零极点对消！为什么？大部分解释牛头不对马嘴。

- 经典的方法是用根轨迹或者波德图找出合适的 a 和 b (It is an art! 可怜的本科生浪费了多少花前月下的好时光也没搞懂)。



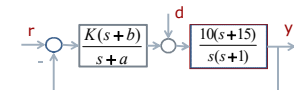
- 其实最简单有效的控制设计就是取 $b=1$ ，做零极点对消!!!!!!

- 如果控制器的频带允许的话，甚至可以取 $a=15$!

题外话：古典控制设计

- 我们被告知不要做零极点对消！为什么？大部分解释牛头不对马嘴。

- 经典的方法是用根轨迹或者波德图找出合适的 a 和 b (It is an art! 可怜的本科生浪费了多少花前月下的好时光也没搞懂)。



- 其实最简单有效的控制设计就是取 $b=1$ ，做零极点对消!!!!!!

- 如果控制器的频带允许的话，甚至可以取 $a=15$!

- 鲁棒控制在很大程度上依赖于**稳定的**零极点对消!

现代控制理论

- 状态空间理论：多变量系统状态空间实现，可控性，可稳性，可观性，可测性
- 优化控制：变分法，最大值原理，动态规划
- 卡尔曼滤波
- 微分对策
- LQG 控制
- 自适应控制
- 英国流派：逆奈奎斯特法，特征根轨迹法，
- 鲁棒控制：LQG 回路重塑，H 无穷控制，鲁棒 H2 控制，L1 优化控制，