第1章 组合分析

1.1 引言

首先，我们看一个经典的概率论问题：一个通信系统由 n 个天线组成，它们按线性顺序排成一排．只要没有两个相邻的天线都失效，这个系统就能接收到所有进来的信号，此时称这个通信系统是有效的．如果已经知道这 n 个天线里恰好有 m 个天线是失效的，那么此通信系统仍然有效的概率是多大？例如，设 $n=4$，$m=2$，那么共有 6 种可能的系统配置，即

$$
\begin{array}{cccc}
0\ 1\ 1\ 0 & 0\ 1\ 0\ 1 & 1\ 0\ 1\ 0 \\
0\ 0\ 1\ 1 & 1\ 0\ 0\ 1 & 1\ 1\ 0\ 0
\end{array}
$$

其中，1 表示天线有效，0 表示天线失效．可以看出前 3 种排列下通信系统仍然有效，而后 3 种排列下系统将失效，因此，所求的概率应该是 $3/6=1/2$．对于一般的 n 和 m 来说，用类似的方法可以计算出系统有效的概率．即先计算使得系统有效的配置方式有多少种，再计算总共有多少种配置方式，两者相除即为所求概率．

从上述讨论可以看出，一个有效的计算事件可能发生结果的数目的方法是非常有用的．事实上，概率论中的很多问题只要通过计算某个事件发生结果的数目就能得以解决．关于计数的数学理论通常称为组合分析(combinatorial analysis)． 1

1.2 计数基本法则

在本节的讨论中，我们都是以计数基本法则为基础的．简单地说，若一个试验有 m 种可能的结果，而另一个试验又有 n 种可能的结果，则这两个试验一共有 mn 种可能的结果．

计数基本法则

假设有两个试验，其中试验 1 有 m 种可能的结果，对应于试验 1 的每一个结果，试验 2 有 n 种可能的结果，则这两个试验一共有 mn 种可能的结果．

基本法则的证明 通过列举两个试验所有可能的结果可以证明这个问题，即

$$
\begin{array}{cccc}
(1,1), & (1,2), & \cdots, & (1,n) \\
(2,1), & (2,2), & \cdots, & (2,n) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(m,1), & (m,2), & \cdots, & (m,n)
\end{array}
$$

其中，(i, j)表示试验 1 出现第 i 种可能的结果，试验 2 出现第 j 种可能的结果．因此，所有可能的结果组成一个矩阵，共有 m 行 n 列，元素的总数为 $m\times n$，这样就完成了证明．

例 2a 一个小团体由 10 位妇女组成，其中每位妇女又有 3 个孩子．现在要从中选取一位妇女和这位妇女的孩子中的一个作为“年度母亲和年度儿童”，问一共有多少种可能的

选取方式？

解 将选择妇女看成试验 1，而接下来选择这位妇女三个孩子中的一个看作试验 2，那么根据计数基本法则可知，一共有 10×3=30 种可能的选取方式. ■

当有 2 个以上的试验时，基本法则可以推广.

推广的计数基本法则

如果一共有 r 个试验，试验 1 有 n_1 种可能的结果. 对应于试验 1 的每一种可能的结果，试验 2 有 n_2 种可能的结果，对应于前两个试验的每一种可能的结果，试验 3 有 n_3 种可能的结果……那么这 r 个试验一共有 $n_1n_2\cdots n_r$ 种可能的结果.

例 2b 一个大学计划委员会由 3 名大一新生、4 名大二学生、5 名大三学生和 2 名大四学生组成，现在要从中选 4 个人组成一个分委员会，要求这 4 个人来自不同的年级，那

2 么可能有多少种不同的分委员会？

解 可以把这个问题理解为从每个年级选取一个代表，从而有 4 个独立的试验，根据推广的计数基本法则，一共有 3×4×5×2=120 种可能的分委员会. ■

例 2c 对于 7 位车牌号，如果要求前 3 位必须是字母，后 4 位必须是数字，那么一共有多少种不同的 7 位车牌号？

解 根据推广的计数基本法则，可知答案为 26×26×26×10×10×10×10=175 760 000. ■

例 2d 对于只定义在 n 个点上的函数，如果每个函数的取值只能是 0 或 1，那么这样的函数共有多少个？

解 设这 n 个点为 1，2，…，n，既然对每个点来说，$f(i)$的取值只能是 0 或者 1，那么一共有 2^n 个可能的函数. ■

例 2e 在例 2c 中，如果不允许字母或数字重复，一共有多少种可能的车牌号？

解 这种情况下，一共有 26×25×24×10×9×8×7=78 624 000 种可能的车牌号. ■

1.3 排列

随意排列字母 a，b，c，一共有多少种不同的排列方式？通过直接列举，可知一共有 6 种，即 abc，acb，bac，bca，cab 和 cba. 每一种都称为一个排列(permutation). 因此，3 个元素一共有 6 种可能的排列方式. 这个结果能通过计数基本法则得到：在排列中第一个位置可供选择的元素有 3 个，第二个位置可供选择的元素是剩下的两个元素之一，第三个位置只能选择剩下的 1 个元素. 因此，一共有 3×2×1=6 种可能的排列.

假设有 n 个元素，那么用上述类似的推理，可知一共有

$$n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1=n!$$

种不同的排列方式.

这里当 n 为正整数时，$n!$ (读作“n 的阶乘”)等于 $1\times2\times\cdots\times n$，同时定义 $0!=1$.

例 3a 一个有 9 名队员的垒球队可能有多少种不同的击球顺序？

解 一共有 $9!=362\,880$ 种可能的击球顺序. ■

例 3b 某概率论班共有 6 名男生、4 名女生，有次测验是根据他们的表现来排名次，假设没有两个学生成绩一样. 3

(a) 一共有多少种可能的名次？

(b) 如果限定男生和女生分开排名次，那么一共有多少种可能的名次？

解

(a) 因为每种名次都对应着一个 10 人的排列方式，所以答案是 $10!=3\,628\,800$.

(b) 男生一起排名次有 $6!$ 种可能，女生一起排名次有 $4!$ 种可能，根据计数基本法则，一共有 $6!\times 4!=720\times 24=17\,280$ 种可能的名次. ■

例 3c Jones 女士要把 10 本书放到书架上，其中有 4 本数学书、3 本化学书、2 本历史书和 1 本语文书. 现在 Jones 女士想整理她的书，如果相同学科的所有图书都必须放在一起，那么一共可能有多少种放法？

解 如果最先摆放数学书，接下来放化学书，再下来放历史书，最后放语文书，那么一共有 $4!\times 3!\times 2!\times 1!$ 种排列方式. 而这 4 种学科的顺序一共有 $4!$ 种，因此，所求答案是 $4!\times 4!\times 3!\times 2!\times 1!=6912$. ■

接下来讨论如果有 n 个元素，其中有些是不可区分的，那么这种排列数如何计算？看下面的例子.

例 3d 用 6 个字母 PEPPER 进行排列，一共有多少种不同的排列方式？

解 如果 3 个字母 P 和 2 个字母 E 都是可以区分的(标上号)，即 $P_1E_1P_2P_3E_2R$，那么一共有 $6!$ 种排列方式. 然而，考察其中任一个排列，比如 $P_1P_2E_1P_3E_2R$，如果分别将 3 个字母 P 和 2 个字母 E 重排，那么得到的结果仍然是 PPEPER，即总共有 $3!\times 2!$ 种排列：

$$
\begin{array}{ll}
P_1P_2E_1P_3E_2R & P_1P_2E_2P_3E_1R \\
P_1P_3E_1P_2E_2R & P_1P_3E_2P_2E_1R \\
P_2P_1E_1P_3E_2R & P_2P_1E_2P_3E_1R \\
P_2P_3E_1P_1E_2R & P_2P_3E_2P_1E_1R \\
P_3P_1E_1P_2E_2R & P_3P_1E_2P_2E_1R \\
P_3P_2E_1P_1E_2R & P_3P_2E_2P_1E_1R
\end{array}
$$

这些排列都是同一种形式 PPEPER. 因此，一共有 $6!/(3!\times 2!)=60$ 种不同的排列方式. ■

> 一般来说，利用例 3d 同样的推理可知，对于 n 个元素，如果其中 n_1 个元素彼此相同，另 n_2 个彼此相同，…，n_r 个也彼此相同，那么一共有
>
> $$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$
>
> 种不同的排列方式.

例 3e 一个棋类比赛一共有 10 个选手，其中 4 个来自俄罗斯，3 个来自美国，2 个来

自英国，另 1 个来自巴西．如果比赛结果只记录选手的国籍，那么一共有多少种可能的
4 结果？

解　一共有

$$\frac{10!}{4!\times 3!\times 2!\times 1!}=12\,600$$

种可能的结果．■

例 3f　将 9 面小旗排列在一条直线上，其中 4 面白色、3 面红色和 2 面蓝色，且颜色相同的旗是完全一样的．如果不同的排列方式代表不同的信号，那么这 9 面旗一共可组成多少种不同的信号？

解　一共有

$$\frac{9!}{4!\times 3!\times 2!}=1260$$

种不同的信号．■

1.4　组合

从 n 个元素当中取 r 个组成一组，一共有多少个不同的组？这也是我们感兴趣的问题．比如，从 A，B，C，D 和 E 这 5 个元素中选取 3 个组成一组，一共有多少个不同的组？为回答这个问题，可做如下推理：取第一个元素有 5 种取法，取第 2 个元素有 4 种取法，取第三个元素有 3 种取法，所以，如果考虑选择顺序，那么一共有 $5\times4\times3$ 种取法．但是，每一个包含 3 个元素的组(如包含 A，B，C 的组)都被计算了 6 次(即如果考虑顺序，所有的排列 ABC，ACB，BAC，BCA，CAB，CBA 都被算了一次)，所以，组的总数为

$$\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$$

一般来说，如果考虑顺序，从 n 个元素中取 r 个排成一组，一共有 $n(n-1)\cdots(n-r+1)$ 种不同的方式，而每个含 r 个元素的小组都被重复计算了 $r!$ 次．所以，从 n 个元素中取 r 个组成不同组的数目为

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

记号与术语

对于 $r\leqslant n$，我们定义 $\binom{n}{r}$ 如下：

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

5 这样 $\binom{n}{r}$ 就表示从 n 个元素中一次取 r 个的可能组合数．[㊀]

㊀ 按照惯例，定义 $0!=1$，因此，$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$．当 $i<0$ 或者 $i>n$ 时，我们也认为 $\binom{n}{i}=0$．

因此，如果不考虑抽取顺序，$\binom{n}{r}$就表示从 n 个元素中取 r 个元素所组成的不同组的数目.

等价地，$\binom{n}{r}$就是从一个大小为 n 的集合中选出大小为 r 的子集的个数. 由 $0!=1$，注意

$$\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!\times n!}=1$$

这与前面的解释是一致的，因为在一个大小为 n 的集合里恰好只有一个大小为 n 的子集(也就是全集)，而且也恰好只有一个大小为 0 的子集(也就是空集). 一个有用的约定就是：当 $r>n$ 或 $r<0$ 时，定义$\binom{n}{r}=0$.

例 4a 从 20 人当中选 3 人组成委员会，可能有多少种不同的委员会?

解 一共有$\binom{20}{3}=\frac{20\times19\times18}{3\times2\times1}=1140$ 种可能的委员会. ■

例 4b 一个团体共有 12 人，其中 5 位女士，7 位男士，现从中选取 2 位女士和 3 位男士组成一个委员会，问有多少种不同的委员会? 另外，如果其中 2 位男士之间有矛盾，并且拒绝一起工作，那又有多少种不同的委员会?

解 因为有$\binom{5}{2}$种方法选取女士，有$\binom{7}{3}$种方法选取男士，所以根据基本计数法则，一共有

$$\binom{5}{2}\times\binom{7}{3}=\frac{5\times4}{2\times1}\times\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=350$$

种可能的委员会.

现在来看，如果有两位男士拒绝一起工作，那么选取 3 位男士的$\binom{7}{3}=35$ 种方法中，有$\binom{2}{2}\times\binom{5}{1}=5$ 种同时包含了这两位男士，所以，一共有 $35-5=30$ 种选取方法不同时包含那两位有矛盾的男士；另外，选取女士的方法仍是$\binom{5}{2}=10$ 种，所以，一共有 $30\times10=300$ 种可能的委员会. ■

例 4c 假设在一排 n 个天线中，有 m 个是失效的，另 $n-m$ 个是有效的，并且假设所有有效的天线之间不可区分，同样，所有失效的天线之间也不可区分. 问有多少种线性排列方式，使得任何两个失效的天线都不相邻?

解 先将 $n-m$ 个有效天线排成一排，既然没有连续两个失效的，那么在两个有效天线之间，必然至多只能放置一个失效的. 即在 $n-m+1$ 个可能位置中(见图 1-1 中的插入符号)，选择 m 个来放置失效天线. 因此有$\binom{n-m+1}{m}$种可能方式确保在两个失效天线之

$\wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \cdots \wedge 1 \wedge 1 \wedge$

1 = 有效天线

$\wedge$ = 至多放一个失效天线

图 1-1 天线的排列

6 间至少存在一个有效天线. ■

以下是一个非常有用的组合恒等式：

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}\qquad 1\leqslant r\leqslant n \tag{4.1}$$

式(4.1)可用分析的方法证明，也可从组合的角度来证明. 设想从 n 个元素中取 r 个，一共有 $\binom{n}{r}$ 种取法. 从另一个角度来考虑，不妨设这 n 个元素里有一个特殊的，记为元素 1，那么取 r 个元素就有两种结果，取元素 1 或者不取元素 1. 取元素 1 的方法一共有 $\binom{n-1}{r-1}$ 种(从 $n-1$ 个元素里面取 $r-1$ 个)；不取元素 1 的方法一共有 $\binom{n-1}{r}$ 种(从去掉元素 1 的剩下 $n-1$ 个元素中取 r 个). 两者之和就是从 n 个元素里取 r 个的方法之和，而从 n 个元素中取 r 个共有 $\binom{n}{r}$ 种方法，所以式(4.1)成立.

值 $\binom{n}{r}$ 经常称为二项式系数(binomial coefficient)，是因为它们是下面二项式定理中重要的系数.

二项式定理

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \tag{4.2}$$

下面将介绍二项式定理的两种证明方法，其一是数学归纳法，其二是基于组合考虑的证明.

二项式定理的归纳法证明　当 $n=1$ 时，式(4.2)可化为

$$x+y=\binom{1}{0}x^0y^1+\binom{1}{1}x^1y^0=y+x$$

假设式(4.2)对于 $n-1$ 成立，那么对于 n，

$$(x+y)^n=(x+y)(x+y)^{n-1}=(x+y)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-1-k}$$

7
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{k+1}y^{n-1-k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-k}$$

在前面的求和公式里令 $i=k+1$，后面的求和公式里令 $i=k$，那么有

$$\begin{aligned}(x+y)^n&=\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}x^i y^{n-i}+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^i y^{n-i}\\&=x^n+\sum_{i=1}^{n-1}\left[\binom{n-1}{i-1}+\binom{n-1}{i}\right]x^i y^{n-i}+y^n\\&=x^n+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}+y^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}\end{aligned}$$

其中倒数第二个等式由式(4.1)得到．根据归纳法，定理得证．■

二项式定理的组合法证明　考虑乘积

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)\cdots(x_n+y_n)$$

它展开后一共包含 2^n 个求和项，每一项都是 n 个因子的乘积，而且每一项都包含因子 x_i 或 y_i，$i=1,2,\cdots,n$，例如，

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)=x_1x_2+x_1y_2+y_1x_2+y_1y_2$$

这 2^n 个求和项中，一共有多少项含有 k 个 x_i 和 $n-k$ 个 y_i 作为因子？含有 k 个 x_i 和 $n-k$ 个 y_i 的每一项对应了从 n 个元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 里取 k 个元素构成一组的取法．因此，一共有 $\binom{n}{k}$ 个这样的项．这样，令 $x_i=x$，$y_i=y$，$i=1,\cdots,n$，可以看出

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$ ■

例 4d　展开 $(x+y)^3$.

解

$$\begin{aligned}(x+y)^3&=\binom{3}{0}x^0y^3+\binom{3}{1}x^1y^2+\binom{3}{2}x^2y^1+\binom{3}{3}x^3y^0\\&=y^3+3xy^2+3x^2y+x^3\end{aligned}$$ ■

例 4e　一个有 n 个元素的集合共有多少子集？

解　含有 k 个元素的子集一共有 $\binom{n}{k}$ 个，因此所求答案为

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=(1+1)^n=2^n$$ 8

该结果还可以这样得到：给该集合里的每个元素都标上 1 或 0，每种标法都一一对应了一个子集，例如，当把所有元素都标为 1 时，就对应着一个含有所有元素的子集．因为一共有 2^n 种可能的标法，所以一共有 2^n 个子集．

上述结论包含了一个元素都没有的子集(即空集)，所以至少有一个元素的子集一共有 2^n-1 个．■

1.5　多项式系数

在本节中，我们考虑如下问题：把 n 个不同的元素分成 r 组，每组分别有 $n_1,n_2,\cdots,n_r$ 个元素，其中 $\sum_{i=1}^{r}n_i=n$，一共有多少种不同的分法？要回答这个问题，我们注意，第一组元素有 $\binom{n}{n_1}$ 种选取方法，选定第一组元素后，只能从剩下的 $n-n_1$ 个元素中选第二组元素，一共有 $\binom{n-n_1}{n_2}$ 种取法，接下来第三组有 $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ 种取法，等等．因此，根据推广的计数基本法则，将 n 个元素分成 r 组可能存在

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_r}$$
$$=\frac{n!}{(n-n_1)!n_1!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!n_2!}\cdots\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1})!}{0!n_r!}$$
$$=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

种分法.

用另一种方法也可以得到这个结果：考虑 n 个值 1，1，…，1，2，…，2，…，r，…，r，其中对于 $i=1$，…，r，i 出现 n_i 次. 这些值的每个排列对应于按如下方式将 n 个元素分成 r 组的一种分法：令排列 i_1，i_2，…，i_r 对应于第 1 项归到组 i_1 中，第 2 项归到组 i_2 中，以此类推. 例如，若 $n=8$ 且 $n_1=4$，$n_2=3$，$n_3=1$，则排列 1，1，2，3，2，1，2，1 对应于将第 1，2，6，8 项归到第一组，第 3，5，7 项归到第二组，第 4 项归到第三组. 因为每个排列产生一种分法并且每个可能的分法是从相同的排列中得到的，所以将 n 个元素分成大小为 n_1，n_2，…，n_r 这样不同 r 组的分法数量，与 n 个值中 n_1 相同，n_2 相同，…，n_r 相同的排列数是相等的，正如 1.3 节中所示，这等于 $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$. 9

记号

如果 $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$，则定义 $\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r}$ 为

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

因此，$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r}$ 表示把 n 个不同的元素分成大小分别为 n_1，n_2，…，n_r 的 r 个不同组的组合数.

例 5a 某个小城的警察局有 10 名警察，其中 5 名警察需要在街道巡逻，2 名警察需要在局里值班，另外 3 名留在局里待命. 问把 10 名警察分成这样的 3 组共有多少种不同分法？

解 一共有 10!/(5!×2!×3!)=2520 种分法. ■

例 5b 将 10 个小孩平均分成 A，B 两队分别去参加两场不同的比赛，一共有多少种分法？

解 一共有 10!/(5!×5!)=252 种分法. ■

例 5c 把 10 个孩子平均分成两组进行篮球比赛，一共有多少种分法？

解 这个问题与例 5b 的不同之处在于分成的两组是不用考虑顺序的. 也就是说，这里没有 A，B 两组之分，仅仅分成各自为 5 人的两组，故所求答案为 $\frac{10!/(5!\times5!)}{2!}=126$. ■

下面的定理是二项式定理的推广，其证明留作习题.

多项式定理

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n=\sum_{\substack{(n_1,\cdots,n_r):\\ n_1+\cdots+n_r=n}}\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r}$$

上式的求和号是对满足 $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$ 的所有非负整数向量(n_1，n_2，…，n_r)求和.

$\binom{n}{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_r}$也称为多项式系数(multinomial coefficient). 10

例 5d 在第一轮淘汰赛中有 $n=2^m$ 名选手，这 n 名选手被分成 $n/2$ 组，每组都要相互比赛. 每一场比赛的败者将被淘汰而胜者将晋级下一轮，这个过程持续到只有一名选手留下. 假设我们有一场淘汰赛，其中有 8 名选手.

(a) 第一轮之后有多少种可能的结果？(如一种结果是 1 赢了 2，3 赢了 4，5 赢了 6，7 赢了 8.)

(b) 这场淘汰赛有多少种可能的结果，其中每个结果包含了所有轮次的完整信息？

解 一种确定第一轮比赛后可能的结果数的方法是首先确定那轮的可能的分组数. 注意，将 8 名选手分成第一组、第二组、第三组和第四组共有$\binom{8}{2,\ 2,\ 2,\ 2}=8!/2^4$ 种方法. 当这 4 组没有序的差别时，可能的分组方法是 $8!/(2^4\times4!)$种. 对每一组来说，一场比赛的胜者有两种可能的选择，所以一轮比赛结束有$(8!\times2^4)/(2^4\times4!)=8!/4!$ 种可能的结果. [另一种方法是注意 4 名胜者的可能的选择有$\binom{8}{4}$种，而对于每种选择来说，这里有 $4!$ 种方法来给 4 名胜者和 4 名败者配对，所以可以得出第一轮比赛之后有 $4!\times\binom{8}{4}=8!/4!$ 种可能的结果.]

类似地，对于第一轮结束后的每个结果，第二轮有 $4!/2!$ 种可能的结果，然后对于前两轮的每种结果，第三轮有 $2!/1!$ 种可能的结果. 再根据推广的计数基本法则可以得到这次淘汰赛有$(8!/4!)\times(4!/2!)\times(2!/1!)=8!$ 种可能的结果. 事实上，由同样的论证方式可以得出，当淘汰赛有 $n=2^m$ 名选手时会有 $n!$ 种可能的结果.

知道上述的结果后，提出下面这个更加直接的结论就不困难了. 在淘汰赛可能的结果的集合和 1，…，n 的所有排列的集合之间存在着一个一一对应. 要得到这样一个对应，需要把所有淘汰赛结果的选手进行如下排序：将淘汰赛的冠军排为第 1 名，将最终轮的败者排为第 2 名. 对倒数第二轮中的两个败者，将输给第 1 名的选手排为第 3 名，将输给第 2 名的选手排为第 4 名. 对倒数第三轮中的四个败者，将输给第 1 名的选手排为第 5 名，将输给第 2 名的选手排为第 6 名，将输给第 3 名的选手排为第 7 名，将输给第 4 名的选手排为第 8 名. 按照这种方法给每名选手排名次. (一种更简洁的描述是将淘汰赛的胜者排为第 1 名，其余选手的排名按照输的那轮的比赛次数 2^k 次加上打败他的选手的排名得到，$k=0$，…，$m-1$.)在这种方法下，淘汰赛的结果可以用排列 i_1，i_2，…，i_n 表示，其中 i_j 是

被排名为第 j 的选手．因为不同的淘汰赛结果导致不同的排列，而且每个淘汰赛的结果对
11 应一个排列，于是得出结论：淘汰赛的可能结果数与 1，…，n 的排列数相同．■

例 5e

$$
\begin{aligned}
(x_1+x_2+x_3)^2 &= \binom{2}{2,0,0}x_1^2x_2^0x_3^0+\binom{2}{0,2,0}x_1^0x_2^2x_3^0+\binom{2}{0,0,2}x_1^0x_2^0x_3^2 \\
&\quad+\binom{2}{1,1,0}x_1^1x_2^1x_3^0+\binom{2}{1,0,1}x_1^1x_2^0x_3^1+\binom{2}{0,1,1}x_1^0x_2^1x_3^1 \\
&= x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3
\end{aligned}
$$
■

*1.6　方程的整数解个数[㊀]

一个人去 Ticonderoga 湖钓鱼，湖中共有 4 种不同的鱼：鳟鱼、鲶鱼、鲈鱼和竹荚鱼．如果将这次钓鱼之旅的结果定为钓到每种类型的鱼的数量，那么计算在总共钓到 10 条鱼的情况下有多少种不同的结果．首先我们可以用向量(x_1, x_2, x_3, x_4)来定义钓鱼之旅的结果，其中 x_1 表示鳟鱼的数量，x_2 表示鲶鱼的数量，x_3 表示鲈鱼的数量，x_4 表示竹荚鱼的数量．因此，可能的结果数就是和为 10 的非负向量(x_1, x_2, x_3, x_4)的个数．

更一般地，如果我们假设有 r 种鱼且一共钓到 n 条鱼，那么可能的结果数就是满足

$$x_1+x_2+\cdots+x_r=n \tag{6.1}$$

的非负整数向量$(x_1, x_2, \cdots, x_r)$的个数．要计算这个数，我们要先考虑符合上述条件的正整数向量$(x_1, x_2, \cdots, x_r)$的个数．为此，假设有 n 个连续的数值 0 排成一行：

$$0\ 0\ 0\ \cdots\ 0\ 0$$

注意，从 $n-1$ 个相邻的 0 的间隔中选出 $r-1$ 个间隔(见图 1-2)的每一种选择对应式(6.1)的一个正数解，使得 x_1 等于第一个被选择的间隔之前的 0 的个数，x_2 等于第一个和第二个被选择的间隔之间的
12 0 的个数，…，x_r 等于最后一个被选的间隔后面的 0 的个数．

$0\wedge 0\wedge 0\wedge\ \cdots\wedge 0\wedge 0$

n个对象0

在间隔 $\wedge$ 处选择$r-1$个

图 1-2　正数解的个数

例如，如果 $n=8$，$r=3$，那么(选择用点表示)选择

$$0.0\,0\,0\,0.0\,0\,0$$

对应解 $x_1=1$，$x_2=4$，$x_3=3$．式(6.1)的正数解以一对一的方式对应于从 $n-1$ 个间隔中选择 $r-1$ 个间隔的结果，由此得出不同的正数解的个数等于从 $n-1$ 个间隔里选择$r-1$ 的方法个数．于是，我们得到如下命题．

命题 6.1　共有$\binom{n-1}{r-1}$个不同的正整数向量$(x_1, x_2, \cdots, x_r)$满足

$$x_1+x_2+\cdots+x_r=n \qquad x_i>0, i=1,\cdots,r$$

为了得到非负整数解(而不是正整数解)的个数，注意，$x_1+x_2+\cdots+x_r=n$ 的非负整数解个数与 $y_1+y_2+\cdots+y_r=n+r$ 的正整数解个数是相同的(令 $y_i=x_i+1$，$i=1$，…，r)．因此，利用命题 6.1，可得到如下命题．

㊀　本书中打 * 号表示这些内容可以选学．

命题 6.2 共有$\binom{n+r-1}{r-1}$个不同的非负整数向量$(x_1, x_2, \cdots, x_r)$满足

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$$

因此，由命题 6.2 可得，在 Ticonderoga 湖共钓到 10 条鱼的情况下总共有$\binom{13}{3}=286$种可能的结果.

例 6a 方程 $x_1+x_2=3$ 共有多少组不同的非负整数解？

解 一共有$\binom{3+2-1}{2-1}=4$ 组解：(0，3)，(1，2)，(2，1)，(3，0). ■

例 6b 一位投资者有 2 万美元可投资到 4 个项目上，且每种投资必须是 1000 美元的整数倍. 如果要求将 2 万美元全部投资，一共有多少种可行的投资方法？如果不要求将钱全部投资呢？

解 如果令 $x_i(i=1, 2, 3, 4)$分别表示 4 个项目的投资额(单位：千美元)，那么，4 个项目的投资额就是方程

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \qquad x_i \geqslant 0$$

的非负整数解. 因此，根据命题 6.2，一共有$\binom{23}{3}=1771$ 种可能的投资方式. 如果并不需要将钱全部投资，那么假设 x_5 表示剩余资金，一种投资策略就对应了如下方程的一个非负整数解：

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

再由命题 6.2 知，存在$\binom{24}{4}=10\ 626$ 种可能的投资策略. ■ 13

例 6c 在$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n$ 的展开式中，一共有多少项？

解

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum \binom{n}{n_1, \cdots, n_r} x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r}$$

其中，求和针对所有满足 $n_1+\cdots+n_r=n$ 的非负整数$(n_1, \cdots, n_r)$. 因此，根据命题 6.2，一共有$\binom{n+r-1}{r-1}$项. ■

例 6d 再来讨论例 4c，有 n 个天线，其中 m 个是不可分辨的失效天线，另 $n-m$ 个天线也是不可分辨但却有效的. 现在要求出排成一排且没有相邻两个失效天线的可能排列数. 为此，设想 m 个失效的天线排成一排，现找出放 $n-m$ 个有效天线的位置. 如果是排成了如下方式：

$$x_1\ 0\ x_2\ 0 \cdots x_m\ 0\ x_{m+1}$$

其中 $x_1 \geqslant 0$ 是放在最左边的有效天线数，$x_i>0(i=2, \cdots, m)$是放在第 $i-1$ 个失效天线和第 i 个失效天线之间的有效天线数，$x_{m+1} \geqslant 0$ 是放在最右边的有效天线数. 这样的配置意味着任两个失效天线之间都至少有一个有效天线，因此，满足条件的可能的结果数是下列方程的向量解的个数：

$$x_1 + \cdots + x_{m+1} = n - m \qquad x_1 \geqslant 0, x_{m+1} \geqslant 0, x_i > 0, i = 2, \cdots, m$$

令 $y_1=x_1+1$，$y_i=x_i(i=2,\cdots,m)$，$y_{m+1}=x_{m+1}+1$，可以看出这个数等同于以下方程的正整数向量解的个数：

$$y_1+y_2+\cdots+y_{m+1}=n-m+2$$

由命题 6.1 知，一共有 $\binom{n-m+1}{m}$ 种这样的配置方式，这与例 4c 的结果一致.

现在来考虑每两个失效天线之间至少有 2 个有效天线这种情况的排列数，根据上述同样的推理可知，结果为如下方程的向量解的个数：

$$x_1+\cdots+x_{m+1}=n-m\qquad x_1\geqslant 0,x_{m+1}\geqslant 0,x_i\geqslant 2,i=2,\cdots,m$$

令 $y_1=x_1+1$，$y_i=x_i-1(i=2,\cdots,m)$，$y_{m+1}=x_{m+1}+1$，可以看出这个数等同于以下方程的正整数向量解的个数：

$$y_1+y_2+\cdots+y_{m+1}=n-2m+3$$

14 因此，由命题 6.1 可知，一共有 $\binom{n-2m+2}{m}$ 种配置方式. ■

小结

计数基本法则阐述了如下事实：如果一个试验分成两个阶段，第一个阶段有 n 种可能的结果，每种结果又对应于第二个阶段的 m 种可能的结果，那么该试验一共有 nm 种可能的结果.

n 个元素一共有 $n!=n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ 种可能的排列方式. 特别地，定义 $0!=1$.

令

$$\binom{n}{i}=\frac{n!}{(n-i)!i!}$$

其中 $0\leqslant i\leqslant n$，否则等于 0. 此式表明了从 n 个元素中选取 i 个元素组的所有可能的组数. 因其在二项式定理中的突出地位，它也常称为二项式系数，二项式定理是说

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}$$

对于任意和为 n 的非负整数 $n_1,\cdots,n_r$，

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

它等于把 n 个元素分成互不重叠的 r 部分且各个部分的元素个数分别是 $n_1,n_2,\cdots,n_r$ 的分法数. 这些数称为多项式系数.

习题

1.1 (a) 前 2 位为字母，后 5 位为数字的 7 位汽车牌照一共多少种？

(b) 在上述条件下，如果不允许字母和数字重复又有多少种？

1.2 掷一枚骰子 4 次，一共有多少种结果序列？例如，如果第一次为 3，第二次为 4，第三次为 3，第四次为 1，那么结果就是“3，4，3，1”.

1.3 把 20 份不同的工作分派给 20 个工人，每个工人一份工作，问有多少种可能的分派方式？

1.4 约翰、吉姆、杰伊和杰克组成一个有 4 种乐器的乐队，如果每个人都会演奏这 4 种乐器，问可以有多少种不同的组合？如果约翰和吉姆会演奏这 4 种乐器，而杰伊和杰克分别只会弹钢琴及打鼓，那么又有多少种不同的组合？

1.5 一直以来，美国和加拿大的电话区号都由 3 位数字组成．第一位是 2～9 之间的任一数字；第二位是 0 或者 1；第三位是 1～9 之间的任一数字，问一共有多少种可能的区号？以 4 开头的区号一共有多少种可能？

1.6 有个熟知的童谣：

我出发去圣-艾弗斯，
路上碰见一个人，
带着他 7 个老婆，
每个老婆挎着 7 个包，
每个包里装着 7 只猫，
每只猫生了 7 只小猫，
数数看，我到底看到了多少只小猫？

1.7 (a) 3 个男孩和 3 个女孩坐在一排，一共有多少种坐法？
(b) 如果男孩和女孩分别坐在一起，一共有多少种坐法？
(c) 如果只要求男孩坐在一起，一共有多少种坐法？
(d) 如果相邻的座位上必须坐异性，一共有多少种坐法？

1.8 以下单词的字母可以有多少种排列方式？
(a) Fluke；(b) Propose；(c) Mississippi；(d) Arrange.

1.9 一个孩子有 12 块积木，其中 6 块黑色、4 块红色、1 块白色和 1 块蓝色．孩子想把这些积木排成一排，一共有多少种排法？

1.10 8 人坐在一排，一共有多少种坐法，如果
(a) 没什么限制；(b) A 和 B 必须坐在一起；
(c) 一共 4 个男人，4 个女人，且任何两个男人不能坐在一起，任何两个女人也不能坐在一起；
(d) 共有 5 个男人，且他们必须坐在一起；(e) 有 4 对夫妇，每对夫妇必须坐在一起.

1.11 要把 3 本小说、2 本数学书和 1 本化学书摆放到书架上，一共有多少种摆放方法：
(a) 书可以以任何顺序；(b) 要求数学书必须放一起，小说必须放一起；
(c) 小说必须放一起，其他书无所谓. 15

1.12 某个班级有 30 名学生，有 5 个不同的奖项(成绩奖和组织奖等)要颁发，一共有多少种不同的颁奖方式？
(a) 一个学生可以得多个奖项. (b) 每个学生最多只能得 1 个奖项.

1.13 有 20 个人，每人都要与其他人握一次手，一共要握多少次手？

1.14 从一副牌的 52 张中任意抽取 5 张，一共有多少种抽取结果？

1.15 一个舞蹈班有 22 名学生，10 女 12 男，要挑选 5 男 5 女然后配对，一共有多少种配法？

1.16 某学生从 6 本数学书、7 本科学书和 4 本经济学书里卖掉 2 本，他有多少种选择？如果
(a) 两本书同一科目；(b) 两本书不同科目.

1.17 有 7 件不同的礼物要分给 10 个孩子，如果每个孩子最多只能拿 1 件礼物，一共有多少种分法？

1.18 有 5 名共和党人、6 名民主党人和 4 名无党派人士，要从中分别选取 2 名共和党人、2 名民主党人和 3 名无党派人士组成一个 7 人委员会．一共有多少种选取结果？

1.19 从 8 女 6 男里选择 3 女 3 男组成委员会，一共有多少种选取结果？

(a) 其中有两个男人拒绝同时进入委员会；(b) 其中有两个女人拒绝同时进入委员会；

(c) 其中有一男一女拒绝同时进入委员会.

1.20 某人有 8 个朋友，他打算邀请其中 5 人参加聚会，

(a) 如果有某两人长期不和，不能同时参加聚会，他有多少种邀请方案？

(b) 如果有某两人只能同时被邀请，一共有多少种邀请方案？

1.21 如图 1-3 所示，从标有 A 的地方出发，每一步只能向上或者向右移动，问移动到 B 一共有多少种移动方式？

提示：从 A 到 B 需向右 4 步，向上 3 步.

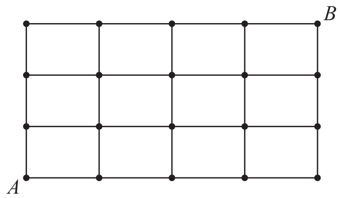

图　1-3

1.22 在习题 1.21 中，如果要求必须经过标有圆圈的点(见图 1-4)，一共有多少种移动方式？

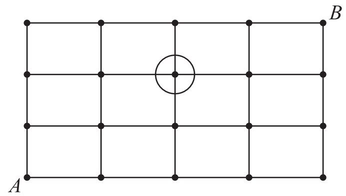

图　1-4

1.23 某从事睡梦研究的心理学实验室有 3 个房间，每个房里有 2 张床. 现要安排 3 对双胞胎进行睡梦实验研究，要求每对双胞胎必须安排在同一间房的不同床上，一共有多少种安排方法？

1.24 展开$(3x^2+y)^5$.

1.25 桥牌比赛中有 4 个选手，每人分到 13 张牌，一共有多少种分法？

1.26 展开$(x_1+2x_2+3x_3)^4$.

1.27 把 12 个人分成 3 个委员会，各委员会分别有 3 人、4 人和 5 人，一共有多少种方法？

1.28 把 8 个老师分配到 4 个学校，一共有多少种分法？如果要求每个学校必须接收 2 个老师呢？

1.29 一共 10 个举重选手参加比赛，其中 3 名美国选手、4 名俄罗斯选手、2 名中国选手和 1 名加拿大选
16 手. 如果成绩只记录每个选手的国籍，一共有多少种可能的结果？如果美国选手有 1 名在总成绩前三名，另两名在总成绩的最后三名中，那么一共有多少种可能的结果？

1.30 有分别来自俄国、法国、英国和美国等 10 个国家的代表坐在一排，如果法国代表和英国代表必须坐在一起，而俄国代表和美国代表不能坐在一起，一共有多少种坐法？

* **1.31** 8 块相同的黑板分给 4 所学校，一共有多少种分法？如果要求每所学校至少分到 1 块黑板呢？

* **1.32** 电梯载着 8 个人(不包括电梯工)自底层启动，到顶层 6 楼后，乘客已全部下完. 如果电梯工只注意每层楼出去的人数，那么他能看到多少种离开电梯的方式？如果 8 个乘客中有 5 个男人和 3 个女人，而电梯工又只注意出去人的性别，问题的答案又是多少？

* **1.33** 有 2 万美元要投资到 4 个项目上，每份投资必须是 1000 美元的整数倍，且每个项目如果有投资的话，最少投资额分别为 2000，2000，3000 和 4000 美元，一共有多少种可行的投资方法，如果：

(a) 每个项目都要投资；(b) 至少投资其中 3 个项目.

* **1.34** 假设一个湖中共有 5 种鱼，现从中捕到了 10 条鱼.

(a) 如果每种鱼都有捕到，那么有多少种可能的不同结果？

(b) 如果有 3 条鱼是鳟鱼，那么有多少种可能的不同结果？

(c) 如果至少有 2 条鱼是鳟鱼，那么有多少种可能的不同结果？

理论习题

1.1 证明推广的计数基本法则.

1.2 做两个试验，第一个试验有 m 种结果. 对应其第 i 个结果，第二个试验有 n_i 种结果，$i=1, 2, \cdots$,

m. 问这两个试验一共多少种可能的结果?

1.3 从 n 个元素里取 r 个，如考虑抽取次序的话有多少种取法?

1.4 有 n 个球，其中 r 个黑球，$n-r$ 个白球，把它们排成一排，用组合学知识解释共有 $\binom{n}{r}$ 种排列方式.

1.5 计算形如$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的向量的个数，其中 x_i 等于 0 或者 1，且

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant k$$

1.6 有多少个这样的向量$(x_1, \cdots, x_k)$，其中 x_i 是正整数，且满足 $1 \leqslant x_i \leqslant n$ 和 $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$?

1.7 用分析的方法证明式(4.1).

1.8 证明

$$\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \cdots + \binom{n}{r}\binom{m}{0}$$

提示：设有 n 个男人和 m 个女人，从中挑选 r 人组成一组，一共有多少个不同的组?

1.9 利用理论习题 1.8 的结论证明：

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

1.10 从 n 个人中选取 k 个人组成一个委员会，$k \leqslant n$，其中一人被任命为主席.

(a) 考虑先选出 k 个人，然后任命其中一人为主席，说明一共有 $\binom{n}{k}k$ 种可能的选择.

(b) 考虑先选出 $k-1$ 个人，其中没有主席，然后再在剩下的 $n-k+1$ 个人中选一人为主席，说明一共有 $\binom{n}{k-1}(n-k+1)$种可能的选择.

(c) 考虑先选出主席，然后再选出其他委员会成员，说明一共有 $n\binom{n-1}{k-1}$种可能的选择.

(d) 总结(a)、(b)、(c)，得出

$$k\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n}{k-1} = n\binom{n-1}{k-1}$$

(e) 利用 $\binom{m}{r}$ 的阶乘定义证明(d)中的恒等式. 17

1.11 以下是著名的费马组合恒等式：

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1} \qquad n \geqslant k$$

试从组合的角度(不用计算)来验证该恒等式.

提示：考虑从 1，2，…，n 的集合，以 i 为最大值的含有 k 个元素的子集一共有多少个?

1.12 考虑如下组合恒等式：

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

(a) 试从组合的角度解释上式，可考虑从 n 个人中挑选若干人组成委员会并在其中选定一名主席的可能方式的两种计算方法.

提示：

(i) 如果选择 k 个人组成会员会并选定一名主席，一共有多少种方法?

(ii) 先选好主席，然后再选择其他成员，一共有多少种选法?

(b) 证明以下等式对 $n=1$，2，3，4，5 都成立：

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2 = 2^{n-2}n(n+1)$$

为了从组合的角度证明上式，指出上式的两边都等于如下的可能选择方式：考虑有 n 个人，从中选择若干人组成一个委员会，并选定一名主席和一名秘书(有可能是同一人).

提示：

(i) 如果委员会一共有 k 个人，一共有多少种选择方式?

(ii) 如果主席和秘书为同一人，一共有多少种选择方式?

(iii) 如果主席和秘书为不同的人，一共有多少种选择方式?

(c) 证明：

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^3 = 2^{n-3}n^2(n+3)$$

1.13 证明：对于 $n>0$，有

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} = 0$$

提示：利用二项式定理.

1.14 从 n 个人里选择 j 个人组成委员会，再从这个委员会里选择 $i(i\leqslant j)$个人组成分委员会.

(a) 通过用两种方法分别计算委员会和分委员会的可能选择数来导出组合恒等式. 其中，第一种方法是先选择 j 人组成委员会，再从中选择 i 人组成分委员会. 第二种方法是先选择 i 人组成分委员会，再补充 $j-i$ 人组成委员会.

(b) 利用(a)证明组合恒等式：

$$\sum_{j=i}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{i} = \binom{n}{i}2^{n-i} \qquad i\leqslant n$$

(c) 利用(a)和理论习题 1.13 证明：

$$\sum_{j=i}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{i}(-1)^{n-j} = 0 \qquad i<n$$

1.15 令 $H_k(n)$为向量$(x_1, x_2, \cdots, x_k)$的数目，其中 x_i 是正整数且满足 $1\leqslant x_i\leqslant n$ 及 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_k$.

(a) 不用任何计算，证明：

$$H_1(n) = n$$

$$H_k(n) = \sum_{j=1}^{n}H_{k-1}(j) \qquad k>1$$

提示：如果 $x_k=j$，那么一共有多少向量?

(b) 利用上述递推公式计算 $H_3(5)$.

提示：先计算 $H_2(n)$，$n=1$，2，3，4，5.

1.16 有 n 个选手参加比赛，最后排定成绩，并且允许选手排名相同. 即可以按成绩排名将选手分成组，成绩最好的为第一组，成绩其次的为第二组，等等. 用 $N(n)$表示不同结果的可能数，比如$N(2)=3$，因为在一个只有 2 名选手参加的比赛中，比赛结果一共有 3 种：第一个选手获第一，第二个选手获第一，两个选手并列第一.

(a) 列出所有 $n=3$ 时的可能结果；

(b) 令 $N(0)=1$，不用任何计算，证明：

$$N(n) = \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}N(n-i)$$

18

提示：共有 i 个选手并列最后一名，一共有多少种结果？

(c) 证明：(b)中的公式等价于

$$N(n)=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}N(i)$$

(d) 利用上述递推公式，求出 $N(3)$和 $N(4)$.

1.17 从组合的角度解释$\binom{n}{r}=\binom{n}{r,\ n-r}$.

1.18 证明：

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}=\binom{n-1}{n_1-1,n_2,\cdots,n_r}+\binom{n-1}{n_1,n_2-1,\cdots,n_r}+\cdots+\binom{n-1}{n_1,n_2,\cdots,n_r-1}$$

提示：利用证明式(4.1)的类似方法.

1.19 证明多项式定理.

* **1.20** 将 n 个相同的球放到 r 个坛子里，要求第 i 个坛子至少有 $m_i(i=1,\ \cdots,\ r)$个球，一共有多少种放法？假设 $n\geqslant\sum_{i=1}^{r}m_i$.

* **1.21** 证明：方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_r=n$$

正好有$\binom{r}{k}\binom{n-1}{n-r+k}$个解，其中恰好有 k 个 x_i 为 0.

* **1.22** 考虑 n 元函数 $f(x_1,\ \cdots,\ x_n)$，f 一共有多少个 r 阶偏导数？

* **1.23** 求向量$(x_1,\ \cdots,\ x_n)$的数目，其中 x_i 为非负整数且满足

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\leqslant k$$

自检习题

1.1 字母 A，B，C，D，E，F 一共有多少种排列方式，如果

(a) A 和 B 必须在一起；(b) A 在 B 之前；(c) A 在 B 之前，B 在 C 之前；

(d) A 在 B 之前，C 在 D 之前；(e) A 和 B 必须在一起，C 和 D 也必须在一起；(f) E 不在最后.

1.2 如果 4 个美国人、3 个法国人和 3 个英国人坐在一排，要求相同国籍的人必须坐在一起，那么一共有多少种坐法？

1.3 从有 10 个人的俱乐部中分别选 1 名总裁、1 名财务和 1 名秘书，一共有多少种选法，如果

(a) 没有任何限制；(b) A 和 B 不能同时被选；(c) C 和 D 要么同时被选，要么同时不被选；

(d) E 必须被选；(e) F 被选中的话，必须担任总裁.

1.4 在一次考试中，学生应从 10 道考题中选择 7 道回答，一共有多少种选法？如果规定必须在前 5 道中至少选 3 道，那么有多少种选法？

1.5 某人将 7 件礼物分给他的 3 个孩子，其中老大得 3 件，其余两人分别得 2 件，一共有多少分法？

1.6 一个 7 位汽车牌照中有 3 位是字母，4 位是数字，如果允许字母或数字重复且位置没有任何限制，一共有多少种可能的牌照号？

1.7 从组合的角度解释下列恒等式：

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

1.8 考虑一个 n 位数，每位数字都是 0，1，…，9 中的一个，一共有多少个这样的数？如果 (a) 没有连续的相同的两个数字；(b) 0 出现 i 次，$i=0$，…，n.

1.9 考虑 3 个班级，每个班级有 n 名学生，从这 $3n$ 名学生中选 3 人.

(a) 一共有多少种选法？

(b) 如果 3 人来自相同的班级，一共有多少种选法？

(c) 如果有 2 人来自相同的班级，另 1 人来自其他班级，一共有多少种选法？

(d) 3 人分别来自不同的班级，一共有多少种选法？

19 (e) 利用(a)到(d)的结果，写出一个组合恒等式.

1.10 由整数 1，2，…，9 组成的 5 位数一共有多少？要求每一个数中不容许有数字重复多于 2 次(如 41434 是不容许的).

1.11 从 10 对已婚人士中选出 6 人组成一组，其中不容许包含任何一对夫妇. (a) 有多少种选择？(b) 如果这 6 个人里必须包含 3 男 3 女，有多少种选择？

1.12 从 7 个男人和 8 个女人中选取 6 人组成委员会. 如果要求至少 3 个女人、2 个男人，一共有多少种选取方法？

* **1.13** 一个艺术品收藏拍卖会共有 15 件艺术品要拍卖，其中 4 件达利的、5 件凡高的和 6 件毕加索的. 共有 5 位艺术品收藏家买下了这批艺术品. 而某记者只记载了每位收藏家得到的达利、凡高和毕加索作品的数量，问销售记录能有多少种不同的结果？

* **1.14** 计算向量$(x_1, \cdots, x_n)$的个数，这里要求 x_i 是正整数，且

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant k$$

其中 $k \geqslant n$.

1.15 n 名学生参加保险精算师考试，公榜结果只列出那些通过考试的学生名单，并且按照他们的分数由高到低进行排序，例如，公榜结果为"Brown，Cho"意味着只有 Brown 和 Cho 通过了考试，而且 Brown 的分数比 Cho 的高，如果没有相同的分数，那么公布的考试结果一共有多少种情况？

1.16 从集合 $S=\{1, 2, \cdots, 20\}$中选 4 个元素组成子集，并且 1，2，3，4，5 中至少有一个被选中，一共有多少个不同的子集？

1.17 给出下列恒等式的分析证明：

$$\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + k(n-k) + \binom{n-k}{2} \qquad 1 \leqslant k \leqslant n$$

并给出该恒等式的组合解释.

1.18 在某一个社区里，有 3 个家庭是由 1 个家长和 1 个孩子组成，3 个家庭是由 1 个家长和 2 个孩子组成，5 个家庭是由 2 个家长和 1 个孩子组成，7 个家庭是由 2 个家长和 2 个孩子组成，6 个家庭是由 2 个家长和 3 个孩子组成. 如果来自同样家庭的 1 个家长和 1 个孩子将要被选，会有多少种不同的选择？

1.19 如果对数字和字母所放的位置没有限制，由不重复的 5 个字母和 3 个数字组成的 8 位汽车牌照有多少种可能的结果？如果三个数字是连续的呢？

1.20 证明等式

$$\sum_{x_1+\cdots+x_r=n,\, x_i\geqslant 0} \frac{n!}{x_1!\,x_2!\cdots x_r!} = r^n$$

先证明当 $n=3$，$r=2$ 时等式成立，然后再证明对任意的 n 和 r 等式总是成立的. (求和是对所有 r 个非负整数值的和是 n 的向量进行的.)提示：在字母表中由前 r 个字母组成的 n 字母序列有多少种？在字母表中使用了字母 i 总共 x_i($i=1$，…，r)次，这样组成的 n 字母序列有多少种？

20