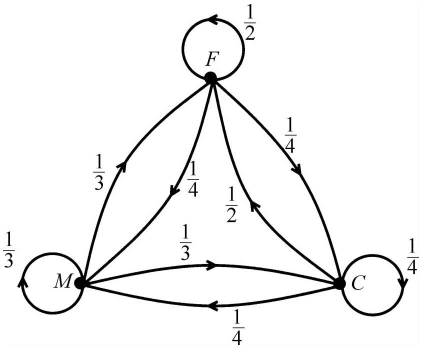
第 1 章 矩阵与方程组



求解线性方程组或许是数学问题中最重要的问题. 超过 75%的科学研究和工程应用中的数学问题，在某个阶段都涉及求解线性方程组. 利用新的数学方法，通常可将较为复杂的问题化为线性方程组. 线性方程组广泛应用于商业、经济学、社会学、生态学、人口统计学、遗传学、电子学、工程学以及物理学等领域. 因此，本书从讨论线性方程组开始应当是合适的.

1.1 线性方程组

形如

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$$

的方程称为含有 n 个未知量的线性方程，其中 a_1，a_2，…，a_n 和 b 为实数，x_1，x_2，…，x_n 称为变量. 含有 m 个方程和 n 个未知量的线性方程组定义为

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2\\ &\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n&=b_m \end{aligned} \tag{1}$$

其中 a_{ij} 及 b_i 均为实数. (1)称为 $m\times n$ 的线性方程组. 下面是几个线性方程组的例子：

$$\text{(a)}\ \begin{aligned} x_1+2x_2&=5\\ 2x_1+3x_2&=8 \end{aligned} \qquad \text{(b)}\ \begin{aligned} x_1-x_2+x_3&=2\\ 2x_1+x_2-x_3&=4 \end{aligned} \qquad \text{(c)}\ \begin{aligned} x_1+x_2&=2\\ x_1-x_2&=1\\ x_1\qquad&=4 \end{aligned}$$

1[1]

方程组(a)称为 2×2 的方程组，(b)称为 2×3 的方程组，(c)称为 3×2 的方程组.

若有序 n 元组(x_1，x_2，…，x_n)满足方程组中的所有方程，则称其为 $m\times n$ 的方程组的解. 例如，有序数对(1，2)为方程组(a)的解，因为

$$\begin{aligned} 1\cdot(1)+2\cdot(2)&=5\\ 2\cdot(1)+3\cdot(2)&=8 \end{aligned}$$

有序三元组(2，0，0)为方程组(b)的解，因为

[1] 此页码为英文原书页码，与索引页码一致.

$$1\cdot(2)-1\cdot(0)+1\cdot(0)=2$$
$$2\cdot(2)+1\cdot(0)-1\cdot(0)=4$$

事实上，方程组(b)有很多解．易见，对任意的实数 α，有序三元组$(2,\alpha,\alpha)$均为(b)的解．但是，方程组(c)无解．由(c)中的第三个方程知，第一个变量的取值应为 4．将 $x_1=4$代入其前两个方程，可以看出，第二个变量必须满足

$$4+x_2=2$$
$$4-x_2=1$$

由于不存在实数能同时满足上述两个方程，故方程组(c)无解．如果线性方程组无解，则称该方程组是不相容的(inconsistent)．如果线性方程组至少存在一个解，则称该方程组是相容的(consistent)．由此，方程组(c)为不相容的，而方程组(a)和(b)均为相容的．

线性方程组的所有解的集合称为方程组的解集(solution set)．如果线性方程组不相容，则其解集为空集．相容的线性方程组的解集必非空．因此，求解线性方程组，就是寻找其解集．

2×2 方程组

让我们从几何的角度考察方程组

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2$$

每一个方程均可对应于平面上的一条直线．有序对(x_1,x_2)为上述方程组解的充分必要条件是，两条直线均过该实数对对应的平面上的点．例如，考虑三个方程组

(i) $\begin{aligned}x_1+x_2&=2\\ x_1-x_2&=2\end{aligned}$　　(ii) $\begin{aligned}x_1+x_2&=2\\ x_1+x_2&=1\end{aligned}$　　(iii) $\begin{aligned}x_1+x_2&=2\\ -x_1-x_2&=-2\end{aligned}$

方程组(i)对应的两条直线的交点为$(2,0)$．因此$\{(2,0)\}$为方程组(i)的解集．方程组(ii)对应的两条直线是平行的，因此，方程组(ii)为不相容的，即它的解集为空集．方程组(iii)对应的两条直线相互重合，因此，直线上任一点的坐标均为方程组(iii)的解(参见图 1.1.1)．

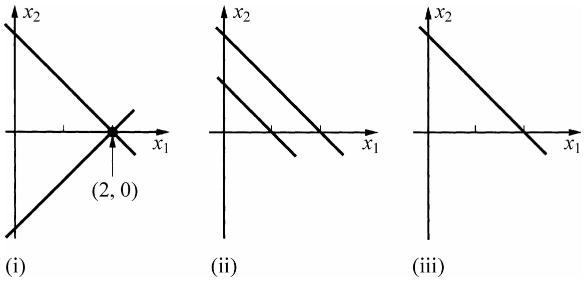


图 1.1.1

一般地，两条直线间有三种情况：相交、平行或重合，相应的解集中分别含有一个、零个或无穷多个元素．

$m\times n$ 的方程组与此类似．$m\times n$ 的方程组可能相容，也可能不相容．如果它们相容，则方程组只能是有且只有一个解，或有无穷多个解．事实上，这就是所有的可能性．其原因将在 1.2 节中学习行阶梯形方程组时予以讲解．下面关注的问题是求所给方程组的所有解．为处理这个问题，首先引入等价方程组(equivalent systems)的概念．

等价方程组

考虑两个方程组

$$\text{(a)}\quad \begin{aligned} 3x_1+2x_2-x_3&=-2\\ x_2&=3\\ 2x_3&=4 \end{aligned} \qquad\qquad \text{(b)}\quad \begin{aligned} 3x_1+2x_2-x_3&=-2\\ -3x_1-x_2+x_3&=5\\ 3x_1+2x_2+x_3&=2 \end{aligned}$$

显然，方程组(a)容易求解．因为，由后两个方程容易得到 $x_2=3$ 和 $x_3=2$．将这些值代入第一个方程，可得

$$\begin{aligned} 3x_1+2\cdot 3-2&=-2\\ x_1&=-2 \end{aligned}$$

于是，方程组(a)的解为$(-2,3,2)$．求解方程组(b)似乎不是很容易．其实，方程组(b)与方程组(a)有相同的解．为看清这一点，首先将其前两个方程相加：

$$\begin{array}{r} 3x_1+2x_2-x_3=-2\\ -3x_1-x_2+x_3=5\\ \hline x_2=3 \end{array}$$

若(x_1,x_2,x_3)为(b)的解，则它必满足方程组中的所有方程．因此，它必然满足任意两个方程相加后得到的新方程．因此，x_2 必为 3．类似地，(x_1,x_2,x_3)必满足第三个方程减去第一个方程后得到的新方程：

$$\begin{array}{r} 3x_1+2x_2+x_3=2\\ 3x_1+2x_2-x_3=-2\\ \hline 2x_3=4 \end{array}$$

因此，方程组(b)的解必为方程组(a)的解．通过类似的讨论，可以证明方程组(a)的解也是方程组(b)的解．由(a)中的第二个方程减去第一个方程得 3

$$\begin{array}{r} x_2=3\\ 3x_1+2x_2-x_3=-2\\ \hline -3x_1-x_2+x_3=5 \end{array}$$

然后，将其第一个方程与第三个方程相加：

$$\begin{array}{r} 3x_1+2x_2-x_3=-2\\ 2x_3=4\\ \hline 3x_1+2x_2+x_3=2 \end{array}$$

因此，(x_1,x_2,x_3)为(b)的解的充要条件是，它是方程组(a)的解．即方程组(a)和方程组(b)有相同的解集$\{(-2,3,2)\}$．

定义 若两个含有相同变量的方程组具有相同的解集，则称它们是**等价的**(equivalent)．

显然，交换方程组中任意两个方程的位置，不会影响方程组的解集．重新排列后的

方程组将等价于原方程组．例如，方程组

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 &= 6 \end{aligned} \quad \text{和} \quad \begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= 6 \\ 3x_1 - x_2 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

含有三个相同的方程，因此，它们必有相同的解集．

若将方程组中的某一方程两端同乘一非零实数，则方程组的解集不变，并且新方程组等价于原方程组．例如，方程组

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned} \quad \text{和} \quad \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

是等价的．

若将方程组中某一方程的倍数加到另一方程上，新的方程组将与原方程组等价．由此可得，n 元组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$满足两个方程

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n &= b_i \\ a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n &= b_j \end{aligned}$$

的充要条件是，它满足方程

4

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n &= b_i \\ (a_{j1} + \alpha a_{i1})x_1 + \cdots + (a_{jn} + \alpha a_{in})x_n &= b_j + \alpha b_i \end{aligned}$$

综上所述，有三种运算可得到等价的方程组：

Ⅰ．交换任意两个方程的顺序．

Ⅱ．任一方程两边同乘一个非零的实数．

Ⅲ．任一方程的倍数加到另一方程上．

对给定的方程组，可以使用这些运算得到一个容易求解的等价方程组．

$n \times n$ 方程组

本节中仅讨论 $n\times n$ 的方程组．本节将证明，若 $n\times n$ 的方程组仅有一个解，则利用上面的运算Ⅰ和运算Ⅲ可得到一个等价的"严格三角形方程组"．

定义 若方程组中，第 k 个方程的前 $k-1$ 个变量的系数均为零，且 $x_k(k=1, \cdots, n)$的系数不为零，则称该方程组为**严格三角形的**(strict triangular form)．

▶**例 1** 方程组

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

为严格三角形的，因为第二个方程中的系数分别为 0，1，−1，且第三个方程中的系数分别为 0，0，2．由于该方程组为严格三角形的，因此容易求解．由第三个方程可得 $x_3=2$．将其代入第二个方程，有

$$x_2 - 2 = 2 \quad \text{或} \quad x_2 = 4$$

将 $x_2=4$，$x_3=2$ 代入第一个方程，最终可得

$$
\begin{aligned}
3x_1+2\cdot 4+2&=1\\
x_1&=-3
\end{aligned}
$$

因此，方程组的解为$(-3,4,2)$. ◀

任何 $n\times n$ 的严格三角形方程组均可采用和上例相同的方法求解. 首先，从第 n 个方程解得 x_n，将其代入第 $n-1$ 个方程解得 x_{n-1}，将 x_n 和 x_{n-1} 的值代入第 $n-2$ 个方程解得 x_{n-2}，以此类推. 称这种求解严格三角形方程组的方法为**回代法**(back substitution). 5

▶**例 2** 解方程组

$$
\begin{aligned}
2x_1-x_2+3x_3-2x_4&=1\\
x_2-2x_3+3x_4&=2\\
4x_3+3x_4&=3\\
4x_4&=4
\end{aligned}
$$

解 利用回代法可得

$$
\begin{aligned}
4x_4&=4 & x_4&=1\\
4x_3+3\cdot 1&=3 & x_3&=0\\
x_2-2\cdot 0+3\cdot 1&=2 & x_2&=-1\\
2x_1-(-1)+3\cdot 0-2\cdot 1&=1 & x_1&=1
\end{aligned}
$$

因此，方程组的解为$(1,-1,0,1)$. ◀

一般地，给定一个 n 个方程 n 个未知量的线性方程组，可用运算Ⅰ和Ⅲ尽可能将其转化为等价的严格三角形方程组.（我们将在下一节中看到，当方程组不是唯一解时，不可能将其化简为严格三角形式.）

▶**例 3** 解方程组

$$
\begin{aligned}
x_1+2x_2+x_3&=3\\
3x_1-x_2-3x_3&=-1\\
2x_1+3x_2+x_3&=4
\end{aligned}
$$

解 第二式减去第一式的 3 倍，可得

$$-7x_2-6x_3=-10$$

第三式减去第一式的 2 倍，可得

$$-x_2-x_3=-2$$

若将方程组中的第二和第三个方程分别用上面两个新方程替换后，则得到等价的方程组

$$
\begin{aligned}
x_1+2x_2+x_3&=3\\
-7x_2-6x_3&=-10\\
-x_2-x_3&=-2
\end{aligned}
$$

若该方程组的第三个方程替换为它与第二个方程的$-\frac{1}{7}$倍的和，最终可得严格三角形

方程组：

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \quad x_3 &= 3 \\ -7x_2 - \quad 6x_3 &= -10 \\ -\frac{1}{7}x_3 &= -\frac{4}{7} \end{aligned}$$

6

利用回代法，得到

$$x_3 = 4, \quad x_2 = -2, \quad x_1 = 3$$

回顾上例中的方程组. 可以把方程组与一个以 x_i 的系数为元的 3×3 数字阵列联系起来.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

这个阵列称为方程组的系数矩阵(coefficient matrix). 简单地说，矩阵(matrix)就是一个矩形的数字阵列. 一个 m 行和 n 列的矩阵称为 $m\times n$ 矩阵. 如果矩阵的行数和列数相等，即 $m=n$，则称该矩阵为方阵.

如果在系数矩阵右侧添加一列方程组的右端项，可得到一个新的矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

这个矩阵称为方程组的增广矩阵(augmented matrix). 一般地，当一个 $m\times r$ 的矩阵 B 采用上述方法附加到一个 $m\times n$ 的矩阵 A 上时，相应的增广矩阵记为$(A\mid B)$. 若

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mr} \end{bmatrix}$$

则

$$(A\mid B) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mr} \end{array}\right]$$

每一方程组均对应于一个增广矩阵，形如

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

方程组的求解可以通过对增广矩阵进行运算得到. x_i 作为位置标志符，在计算结束前可以省略. 用于得到等价方程组的三个运算，可对应于下列增广矩阵的行运算.

初等行运算

Ⅰ. 交换两行.

Ⅱ. 以非零实数乘以某行.

Ⅲ. 将某行替换为它与其他行的倍数的和.

7

注意到前面的例子，是用第一行将其他各行中的第一列元素消去. 称第一行为**主行**(pivotal row). 为明显起见，主行中的元素均加黑表示并为整行添加阴影. 主行的第一个非零元素称为**主元**(pivot).

$$\text{(主元 } a_{11}=1\text{)}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{需要消去的元}\\ a_{21}=3 \text{ 和 } a_{31}=2\end{matrix}\right\}\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3}\\ 3 & -1 & -3 & -1\\ 2 & 3 & 1 & 4\end{array}\right] \begin{matrix}\leftarrow \text{主行}\\ \\ \\ \end{matrix}$$

通过利用行运算Ⅲ，从第二行中减去第一行的 3 倍，从第三行中减去第一行的 2 倍. 之后，得到矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 3\\ \mathbf{0} & \mathbf{-7} & \mathbf{-6} & \mathbf{-10}\\ 0 & -1 & -1 & -2\end{array}\right] \begin{matrix}\\ \leftarrow \text{主行}\\ \\ \end{matrix}$$

在这一步，选择第二行为新的主行并利用行运算Ⅲ消去第二列中最后一个元. 此时，主元为-7，商$\frac{-1}{-7}=\frac{1}{7}$即为从第三行中减去的第二行的倍数. 最终得到矩阵

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & -7 & -6 & -10\\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7}\end{array}\right]$$

这就是与原方程组等价的严格三角形方程组的增广矩阵. 使用回代法容易得到此方程组的解.

▶**例 4** 解方程组

$$\begin{aligned} -x_2-x_3+x_4&=0\\ x_1+x_2+x_3+x_4&=6\\ 2x_1+4x_2+x_3-2x_4&=-1\\ 3x_1+x_2-2x_3+2x_4&=3\end{aligned}$$

解 该方程组对应的增广矩阵为

$$\left[\begin{array}{cccc|c}0 & -1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6\\ 2 & 4 & 1 & -2 & -1\\ 3 & 1 & -2 & 2 & 3\end{array}\right]$$

由于用 0 作为主元不可能消去同列的其他元，所以我们将利用行运算Ⅰ交换增广矩阵的

前两行. 新的第一行将作为主行，且其主元将为 1.

$$(\text{主元 } a_{11}=1)\quad \left[\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{6} \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right] \leftarrow \text{主行}$$

8 然后使用两次行运算Ⅲ，消去第一列中的两个非零元.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & 2 & -1 & -4 & -13 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & -15 \end{array}\right]$$

接着，选择第二行为主行，消去第二列中主元-1下面的两个元.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{-2} & \mathbf{-13} \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -15 \end{array}\right]$$

最后，用第三行作为主行，消去第三列中的最后一个元.

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

这个增广矩阵就表示一个严格三角形方程组. 利用回代法求解，得到解为$(2,-1,3,2)$. ◀

一般地，如果 $n\times n$ 的线性方程组可以化简为严格三角形式，则它将有一个唯一解，并可通过三角形方程组的回代法求得. 化简过程可被看成一个 $n-1$ 步的算法. 第一步，从矩阵的第一列所有非零元中选择一个主元. 包含主元的行称为*主行*(pivotal row). 交换行(若需要)使得主行成为第一行. 然后其余的 $n-1$ 行减去主行的某个倍数，使得从第二到第 n 行中的第一个元为 0. 第二步，从矩阵的第二行到第 n 行中选择第二列的一个非零元作为主元，将包含主元的行作为主行，并和矩阵的第二行交换作为新的主行. 然后，余下的 $n-2$ 行减去主行的某个倍数，消去第二列中主元下面的所有元. 从第三列到第 $n-1$ 列重复相同的过程. 注意，在第二步中，第一行和第一列的元素并不发生变化；进行第三步时，前两行以及前两列的元素保持不变，以此类推. 在每一个步骤中，方程组的维数实际上有效地减少 1(参见图 1.1.2).

如果能像上述方式进行消元，$n-1$ 步之后，即可得到一个等价的严格三角形方程组. 然而，上述过程中，如果在任何一步所有可能选择的主元均为 0，此时该过程就将在这一步停止. 当这种情况发生时，可以考虑将方程组化为某种特殊的梯形或阶梯形.

9 阶梯形的方程组将在下一节进行讨论. 它们还可用于 $m\times n$ 的方程组，其中 $m\neq n$.

第一步 $\left[\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \end{array}\right]$

第二步 $\left[\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \end{array}\right]$

第三步 $\left[\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{array}\right]$

图 1.1.2

1.1 节练习

1. 利用回代法求解下列方程组.

(a) $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 2 \\ 2x_2 &= 6 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 8 \\ 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 3x_3 &= 9 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 5 \\ 3x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ -x_3 + 2x_4 &= -1 \\ 4x_4 &= 4 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 5 \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 &= 1 \\ 4x_3 + x_4 - 2x_5 &= 1 \\ x_4 - 3x_5 &= 0 \\ 2x_5 &= 2 \end{aligned}$

2. 给出练习 1 中方程组的系数矩阵.

3. 在下列方程组中，将每一方程表示为平面上的一条直线. 画出每一方程组所表示的直线并利用几何关系确定方程组解的个数.

(a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &= 2 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ -2x_1 - 4x_2 &= 4 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ -4x_1 + 2x_2 &= -6 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 1 \\ -x_1 + 3x_2 &= 3 \end{aligned}$

4. 写出练习 3 中每一方程组对应的增广矩阵.

5. 写出下列每一增广矩阵对应的方程组.

(a) $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \end{array}\right]$

(b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right]$

(c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 6 & -1 \end{array}\right]$

(d) $\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -5 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & 3 & -2 & 7 \end{array}\right]$

6. 解下列方程组.

(a) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 8 \\ 4x_1 - 3x_2 &= 6 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= 4 \\ \frac{2}{3}x_1 + 4x_2 &= 3 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 7 \end{aligned}$

(e) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 1 \\ 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= -3 \end{aligned}$

(f) $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$

(g) $\begin{aligned} \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 &= \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + \frac{12}{5}x_3 &= \frac{1}{10} \end{aligned}$

10

(h) $\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_3 - 4x_4 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= 6 \end{aligned}$

7. 两个方程组

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 &= 5 \end{aligned} \quad 和 \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= -1 \\ 4x_1 + 3x_2 &= 1 \end{aligned}$$

有相同的系数矩阵，但右端项不同．试用类似的消元法消去如下增广矩阵中的第二行第一个元：

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right]$$

并利用回代法求解每一右端项所在列构成的方程组.

8. 使用 3×5 的增广矩阵然后使用两次回代法求解两个方程组

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 9 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= -2 \end{aligned}$$

9. 给定方程组

$$\begin{aligned} -m_1x_1 + x_2 &= b_1 \\ -m_2x_1 + x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

其中 m_1，m_2，b_1 和 b_2 为常数：

(a)试证：若 $m_1 \neq m_2$，则方程组有唯一解.

(b)若 $m_1 = m_2$，试证仅当 $b_1 = b_2$ 时方程组相容.

(c)试给出(a)和(b)的几何表示.

10. 考虑形如

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0 \end{aligned}$$

的方程组．其中 a_{11}，a_{12}，a_{21} 和 a_{22} 均为常数．试说明为什么一个这样形式的方程组必相容.

11. 给出一个有三个未知量的线性方程的几何表示．给出一个 3×3 线性方程组可能的解集的几何表示.

1.2 行阶梯形

1.1 节中介绍了将 $n\times n$ 的线性方程组化简为严格三角形方程组的方法．但是，若在

化简过程中的某一步，主元所有可能的选择只能是 0，该方法将无法继续.

▶**例 1** 考虑如下增广矩阵表示的方程组：

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{rrrrr|r} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \leftarrow \text{主行} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

若利用行运算Ⅲ消去主行下四行中第一列的非零元素，矩阵将化为

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{主行} \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

此时，无法继续将其化简为严格三角形式. 因为四个可以选作主元的元素均为 0. 该 11
如何继续呢？因为我们的目的就是将方程组尽可能地化简，所以自然是要消去第三列后面的三个元素.

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{主行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

在第四列中，所有可能的主元均为 0；因此，仍从下一列继续. 若用第三行作为主行，则可消去后面两行的第五列元素.

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

最终得到的系数矩阵不是严格三角形的；它是阶梯形的. 系数矩阵中的水平和垂直线段说明了系数矩阵的阶梯形式. 注意，每一步在垂直方向下降 1，但在水平方向的扩展可能多于 1.

最后两行表示的方程为

$$\begin{aligned} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= -4 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= -3 \end{aligned}$$

由于不存在 5 元组满足上述方程，因此方程组不相容. ◀

假设现在我们更改最后一个例子中方程组的右端项，使得方程组成为相容的. 例

如，从

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

开始，通过化简过程将得到阶梯形的增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

12 此时，任意的 5 元组均满足上述方程组的最后两个方程．因此，方程组的解集是所有满足前三个方程的 5 元组．

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_5 &= 3 \end{aligned} \tag{1}$$

增广矩阵每一行第一个非零元对应的变量称为首变量(lead variables)．因此，x_1，x_3 和 x_5 为首变量．化简过程中跳过的列对应的变量称为自由变量(free variables)．因此，x_2 和 x_4 为自由变量．如果将(1)中的自由变量移到等式右端，我们得到方程组

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_5 &= 1 - x_2 - x_4 \\ x_3 + 2x_5 &= -x_4 \\ x_5 &= 3 \end{aligned} \tag{2}$$

方程组(2)即为未知量 x_1，x_3 和 x_5 的严格三角形方程组．因此，对每一对给定的变量 x_2 和 x_4，均存在唯一解．例如，若 $x_2=x_4=0$，则 $x_5=3$，$x_3=-6$，$x_1=4$，因此 $(4, 0, -6, 0, 3)$ 为方程组的一个解．

定义 若一个矩阵满足

(i)每一非零行中的第一个非零元为 1；

(ii)第 k 行的元不全为零时，第 $k+1$ 行首变量之前零的个数多于第 k 行首变量之前零的个数；

(iii)所有元素均为零的行必在不全为零的行之后，

则称其为**行阶梯形矩阵**(row echelon form)．

▶**例 2** 下列矩阵为行阶梯形的．

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ◀

▶**例 3** 下列矩阵不是行阶梯形的.

$$\begin{bmatrix}2&4&6\\0&3&5\\0&0&4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

第一个矩阵不满足条件(i)，第二个矩阵不满足条件(iii)，而第三个矩阵不满足条件(ii).

◀

定义 利用行运算Ⅰ、Ⅱ和Ⅲ，将线性方程组的增广矩阵化为行阶梯形的过程称为**高斯消元法**(Gaussian elimination). 13

注意，利用行运算Ⅱ使各行的首系数全化为1. 如果增广矩阵的行阶梯形中含有如下形式的行：

$$\left[\begin{array}{cccc|c}0&0&\cdots&0&1\end{array}\right]$$

则该方程组不相容. 否则，方程组将相容. 若方程组相容且行阶梯形矩阵的非零行构成了严格三角形方程组，则这个方程组有唯一解.

超定方程组

若一个线性方程组中方程的个数多于未知量的个数，则称其为超定的(overdetermined). 超定方程组通常是(但不总是)不相容的.

▶**例 4**

(a)
$$\begin{aligned}x_1+x_2&=1\\x_1-x_2&=3\\-x_1+2x_2&=-2\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}x_1+2x_2+x_3&=1\\2x_1-x_2+x_3&=2\\4x_1+3x_2+3x_3&=4\\2x_1-x_2+3x_3&=5\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}x_1+2x_2+x_3&=1\\2x_1-x_2+x_3&=2\\4x_1+3x_2+3x_3&=4\\3x_1+x_2+2x_3&=3\end{aligned}$$

解 现在读者应当已经比较熟悉消元过程了，因此，我们可以省略每一方程组的消元过程的中间过程.

方程组(a)：
$$\left[\begin{array}{rr|r}1&1&1\\1&-1&3\\-1&2&-2\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{rr|r}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{array}\right]$$

根据化简后矩阵的最后一行可知该方程组不相容. 方程组(a)中的三个方程表示平面上的三条直线. 前两条直线的交点为(2，−1). 而第三条直线并不经过该点. 因此，三条直线不过同一点(参见图1.2.1).

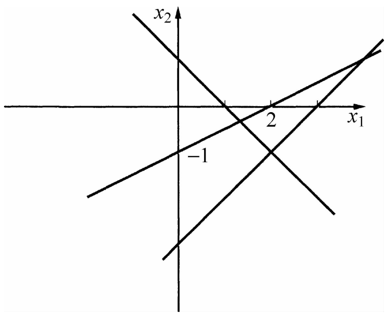


图 1.2.1

$$\text{方程组(b)：}\left[\begin{array}{rrr|r}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 3 & 5\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

14 利用回代法，我们看到方程组(b)仅有一个解(0.1，−0.3，1.5)．因为化简后的矩阵的非零行构成了一个严格三角形方程组，故解是唯一的．

$$\text{方程组(c)：}\left[\begin{array}{rrr|r}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2 & 3\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

用 x_3 表示 x_2 和 x_1，我们得到

$$\begin{aligned} x_2 &= -0.2x_3\\ x_1 &= 1-2x_2-x_3 = 1-0.6x_3 \end{aligned}$$

由此可得，方程组的解集为形如$(1-0.6\alpha,\ -0.2\alpha,\ \alpha)$的有序 3 元组集合，其中 α 为实数．由于存在自由变量 x_3，所以该方程组是相容的且有无穷多组解． ◀

亚定方程组

一个有 n 个未知量 m 个线性方程的方程组称为亚定的(underdetermined)，若方程的个数少于未知量的个数($m<n$)．尽管亚定方程组有可能不相容，但通常是相容的，且有无穷多组解．亚定方程组不可能只有唯一解，这是因为系数矩阵的行阶梯形式均有 $r\leqslant m$ 个非零行．因此，必有 r 个首变量和 $n-r$ 个自由变量，其中 $n-r\geqslant n-m>0$．若方程组是相容的，我们可给自由变量任意赋值并求得首变量的值．因此，一个相容的亚定方程组将有无穷多组解．

▶例 5

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1\\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 2\\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 3\\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2 \end{aligned}$$

15

解

$$\text{方程组(a)：}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 2 & 3\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

显然，方程组(a)不相容．可以认为方程组(a)中的两个方程表示 3 维空间中的平面．通常，两个平面相交于一条直线；但是，现在的情形是两个平面平行．

$$\text{方程组(b)：}\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&2\\1&1&1&2&2&3\\1&1&1&2&3&2\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&2\\0&0&0&1&1&1\\0&0&0&0&1&-1\end{array}\right]$$

方程组(b)是相容的，且由于有两个自由变量，该方程组将有无穷多组解．通常，这种形式的方程组可以继续进行消元过程，直到各方程的首变量 1 之上的所有项均被消去为止．因此，对方程组(b)，我们将继续消去第五列的前两个元素以及第四列的第一个元素，可得

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&2\\0&0&0&1&1&1\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{-1}\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&0&3\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{2}\\0&0&0&0&1&-1\end{array}\right]$$
$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&0&0&1\\0&0&0&1&0&2\\0&0&0&0&1&-1\end{array}\right]$$

如果将自由变量移到方程右端，可得

$$\begin{aligned}x_1&=1-x_2-x_3\\x_4&=2\\x_5&=-1\end{aligned}$$

因此，对任意的实数 α 和 β，5 元组

$$(1-\alpha-\beta,\alpha,\beta,2,-1)$$

为方程组的一个解． ◀

当相容的方程组对应的行阶梯形中含有自由变量时，可继续进行消元过程，直到类似上例方程组(b)中，所有首变量 1 之上的所有元均被消去．得到的结果矩阵为行最简形的．

行最简形

定义 若一个矩阵满足

(i)矩阵是行阶梯形的；

(ii)每一行的第一个非零元是该列唯一的非零元，

则称该矩阵为**行最简形**(reduced row echelon form)． 16

下列矩阵为行最简形的：

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&2\\0&0&1&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&1&2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

采用基本行运算将矩阵化为行最简形的过程称为高斯-若尔当消元法(Gauss-Jordan reduction)．

▶**例 6** 用高斯-若尔当消元法解方程组

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

解

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{-4} & \mathbf{8} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{array}\right] \quad \text{行阶梯形}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad \text{行最简形}$$

若令 x_4 为任意实数 α，则 $x_1=\alpha$，$x_2=-\alpha$，$x_3=\alpha$. 因此，所有形如$(\alpha, -\alpha, \alpha, \alpha)$的 4 元组均为方程组的解. ◀

应用 1：交通流量

如图 1.2.2 所示，某城市市区的交叉路口由两条单向车道组成. 图中给出了在交通高峰时段每小时进入和离开路口的车辆数. 计算在四个交叉路口间车辆的数量.

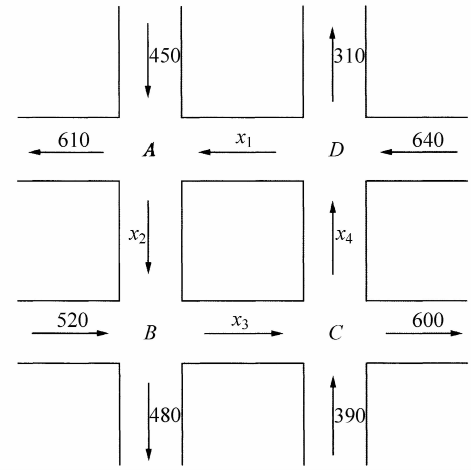


图 1.2.2

解 在每一路口，必有进入的车辆数与离开的车辆数相等. 例如，在路口 A，进入该路口的车辆数为 x_1+450，离开路口的车辆数为 x_2+610. 因此

17

$$x_1+450=x_2+610 \quad (\text{路口 } A)$$

类似地

$$x_2 + 520 = x_3 + 480 \quad (\text{路口 } B)$$
$$x_3 + 390 = x_4 + 600 \quad (\text{路口 } C)$$
$$x_4 + 640 = x_1 + 310 \quad (\text{路口 } D)$$

此方程组的增广矩阵为

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & 160 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 210 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -330 \end{array}\right]$$

相应的行最简形为

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 330 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 170 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 210 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

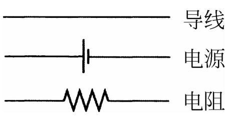
该方程组为相容的，且由于方程组中存在一个自由变量，因此有无穷多组解．而交通示意图并没有给出足够的信息来唯一地确定 x_1，x_2，x_3 和 x_4．如果知道在某一路口的车辆数量，则其他路口的车辆数量即可求得．例如，假设在路口 C 和 D 之间的平均车辆数量为 $x_4=200$，则相应的 x_1，x_2 和 x_3 为

$$x_1 = x_4 + 330 = 530$$
$$x_2 = x_4 + 170 = 370$$
$$x_3 = x_4 + 210 = 410$$ 18

应用 2：电路

在一个电路中，可根据电阻大小和电源电压来确定电路中各分支的电流．例如，图 1.2.3所示的电路．

图中的符号为



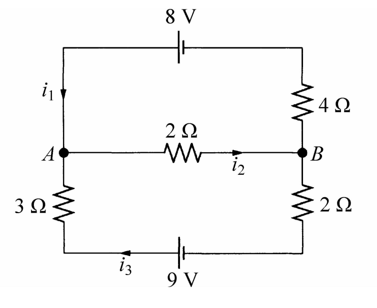


图 1.2.3

电源通常采用电池(单位为“伏特”，V)，当附加荷载后，就会产生电流．电流从电源的输出端(即用较长竖线表示的一端)流出．电阻的单位为“欧姆”．字母表示连接节点，i 表示节点间的电流．电流的单位为“安培”(A)．导线上的箭头表示电流的方向．如果某分支上的电流(如 i_2)的符号为负的，则表示在该分支上电流的方向与箭头方向相反．

为计算分支上的电流，需使用如下的定律．

基尔霍夫定律(Kirchhoff's Law)

1. 任一节点上流出电流的量等于流入电流的量．

2. 任一回路上电压的代数和等于各元件压降的代数和.

计算电阻的压降 E 可使用欧姆定律(Ohm's law):

$$E = iR$$

其中 i 为通过电阻的电流，单位为安培；R 表示电阻，单位为欧姆.

下面计算图 1.2.3 所示的电路中的电流. 利用基尔霍夫电流定律，有

19

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 + i_3 &= 0 \quad (\text{节点 } A) \\ -i_1 + i_2 - i_3 &= 0 \quad (\text{节点 } B) \end{aligned}$$

利用欧姆定律

$$\begin{aligned} 4i_1 + 2i_2 &= 8 \quad (\text{上层回路}) \\ 2i_2 + 5i_3 &= 9 \quad (\text{下层回路}) \end{aligned}$$

由此，电路对应的增广矩阵为

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right]$$

相应的行阶梯形矩阵为

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

利用回代法可得 $i_1=1$，$i_2=2$ 及 $i_3=1$.

齐次方程组

如果线性方程组的右端项全为零，则称其为齐次的(homogeneous). 齐次方程组总是相容的，求其一个解并不难，只要令所有未知量为 0，即可满足方程组. 因此，如果 $m\times n$ 齐次方程组有唯一解，则必然是其平凡解(0，0，…，0). 例 6 即为相容的齐次方程组，其中含有 $m=3$ 个方程和 $n=4$ 个未知量. 当 $n>m$ 时，总是存在自由变量，因此方程组存在非平凡解. 其实，这个结果已经在研究亚定方程组时讨论过了，但由于这个结果十分重要，故给出如下定理.

定理 1.2.1 若 $n>m$，则 $m\times n$ 的齐次线性方程组有非平凡解.

证 齐次方程组总是相容的. 因为其增广矩阵的行阶梯形最多有 m 个非零行，故至多有 m 个首变量. 又由于变量个数 n 满足 $n>m$，故必存在自由变量. 而自由变量可任意取值，对自由变量的任一组取值，均可得到方程组的一组解. ■

应用 3：化学方程式

在光合作用中，植物利用太阳提供的辐射能，将二氧化碳(CO_2)和水(H_2O)转化为葡萄糖($C_6H_{12}O_6$)和氧气(O_2). 该化学反应的方程式为

$$x_1CO_2 + x_2H_2O \rightarrow x_3O_2 + x_4C_6H_{12}O_6$$

为平衡该方程式，需适当选择其中的 x_1，x_2，x_3 和 x_4，使得方程式两边的碳、氢和氧原子的数量分别相等．由于一个二氧化碳分子含有一个碳原子，而一个葡萄糖分子含有 20 六个碳原子，因此为平衡方程，需有

$$x_1 = 6x_4$$

类似地，要平衡氧原子需满足

$$2x_1 + x_2 = 2x_3 + 6x_4$$

氢原子需满足

$$2x_2 = 12x_4$$

将所有未知量移到等式左端，即可得到一个齐次线性方程组

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad - \ \ 6x_4 &= 0 \\ 2x_1 + \ x_2 - 2x_3 - \ \ 6x_4 &= 0 \\ 2x_2 \qquad\quad - 12x_4 &= 0 \end{aligned}$$

由定理 1.2.1，该方程组有非平凡解．为平衡化学方程式，我们需找到一组解(x_1，x_2，x_3，x_4)，其中每个元均为非负整数．如果我们使用通常的方法求解方程组，可以看到 x_4 为自由变量且

$$x_1 = x_2 = x_3 = 6x_4$$

如果令 $x_4=1$，则 $x_1=x_2=x_3=6$，且化学方程式的形式为

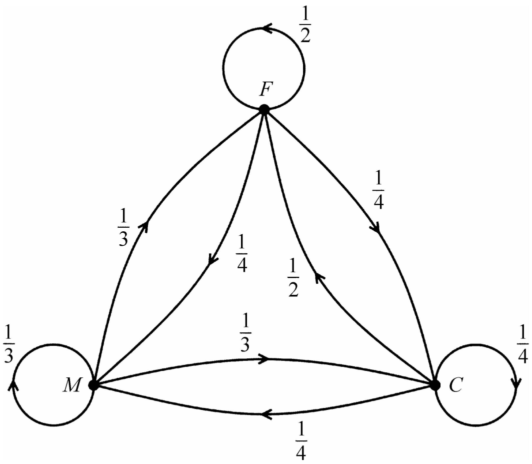
$$6CO_2 + 6H_2O \rightarrow 6O_2 + C_6H_{12}O_6$$

应用 4：商品交换的经济模型

假设一个原始社会的部落中，人们从事三种职业：农业生产、工具和器皿的手工制作、缝制衣物．最初，假设部落中不存在货币制度，所有的商品和服务均进行实物交换．我们记这三类人为 F，M 和 C，并假设有向图 1.2.4 表示实际的实物交易系统．

上图说明，农民留他们收成的一半给自己、1/4 收成给手工业者，并将 1/4 收成给制衣工人．手工业者将他们的产品平均分为三份，每一类成员得到 1/3．制衣工人将一半的衣物给农民，并将剩余的一半平均分给手工业者和他们自己．综上所述，可得如下表格：

	F	M	C
F	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
M	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
C	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$



21

图 1.2.4

该表格的第一列表示农民生产产品的分配、第二列表示手工业者生产产品的分配，第三列表示制衣工人生产产品的分配.

当部落规模增大时，实物交易系统就变得非常复杂，因此，部落决定使用货币系统. 对这个简单的经济体系，我们假设没有资本的积累和债务，并且每一种产品的价格均可反映实物交换系统中产品的价值. 问题是，如何给三种产品定价，就可以公平地体现当前的实物交易系统.

这个问题可以利用诺贝尔奖获得者——经济学家列昂惕夫(Wassily Leontief)提出的经济模型转化为线性方程组. 对这个模型，我们令 x_1 为所有农产品的价值，x_2 为所有手工业品的价值，x_3 为所有服装的价值. 由表格的第一行，农民获得的产品价值是所有农产品价值的一半，加上 1/3 的手工业品的价值，再加上 1/2 的服装价值. 因此，农民总共得到的产品价值为 $\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{2}x_3$. 如果这个系统是公平的，那么农民获得的产品价值应等于农民生产的产品总价值 x_1. 即我们有线性方程

$$\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{2}x_3=x_1$$

利用表格的第二行，将手工业者得到和制造的产品价值写成方程，我们得到第二个方程

22

$$\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{4}x_3=x_2$$

最后，利用表格的第三行，我们得到

$$\frac{1}{4}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{4}x_3=x_3$$

这些方程可写成齐次方程组：

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{2}x_3&=0\\ \frac{1}{4}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{4}x_3&=0\\ \frac{1}{4}x_1+\frac{1}{3}x_2-\frac{3}{4}x_3&=0 \end{aligned}$$

该方程组对应的增广矩阵的行最简形式为

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{3} & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

它有一个自由变量 x_3. 令 $x_3=3$，我们得到解(5，3，3)，并且通解包含所有(5，3，3)的倍数. 由此可得，变量 x_1，x_2，x_3 应按下面的比例取值：

$$x_1:x_2:x_3=5:3:3$$

这个简单的系统是封闭的列昂惕夫生产-消费模型的例子. 列昂惕夫模型是我们理解经济体系的基础. 现代应用则会包含成千上万的工厂并得到一个非常庞大的线性方程组. 列昂惕夫模型将在 6.8 节更为细致地讨论.

1.2 节练习

1. 下列矩阵哪些是行阶梯形的？哪些是行最简形的？

(a) $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&0&1&2\end{bmatrix}$　(b) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$　(c) $\begin{bmatrix}1&3&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$　(e) $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&3\end{bmatrix}$　(f) $\begin{bmatrix}1&4&6\\0&0&1\\0&1&3\end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix}1&0&0&1&2\\0&1&0&2&4\\0&0&1&3&6\end{bmatrix}$　(h) $\begin{bmatrix}0&1&3&4\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

2. 下列增广矩阵均为行阶梯形的．对每一种情形，确定它对应的线性方程组是否相容．如果方程组有唯一解，求之．

(a) $\left[\begin{array}{cc|c}1&2&4\\0&1&3\\0&0&1\end{array}\right]$　(b) $\left[\begin{array}{cc|c}1&3&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{array}\right]$　(c) $\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&4&1\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{array}\right]$

(d) $\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&-2\\0&1&-1&3\\0&0&1&2\end{array}\right]$　(e) $\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&2&-2\\0&0&1&4\\0&0&0&1\end{array}\right]$　(f) $\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&3&8\\0&1&2&7\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{array}\right]$ 23

3. 下列增广矩阵均为行最简形的．对每一种情形，求出其对应的线性方程组的解集．

(a) $\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-2\\0&1&0&5\\0&0&1&3\end{array}\right]$　(b) $\left[\begin{array}{ccc|c}1&4&0&2\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{array}\right]$　(c) $\left[\begin{array}{ccc|c}1&-3&0&2\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right]$

(d) $\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&0&1&5\\0&0&1&3&4\end{array}\right]$　(e) $\left[\begin{array}{cccc|c}1&5&-2&0&3\\0&0&0&1&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$　(f) $\left[\begin{array}{ccc|c}0&1&0&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right]$

4. 对练习 3 中的每一方程组，分别列表写出它的首变量和自由变量．

5. 利用高斯消元法，给出与下列方程组等价且系数矩阵为行阶梯形的方程组．指出方程组是否是相容的．如果方程组是相容的且没有自由变量，则利用回代法求其唯一解．如果方程组是相容的且存在自由变量，则将其转换为行最简形并求所有解．

(a) $\begin{aligned}x_1-2x_2&=3\\2x_1-x_2&=9\end{aligned}$　(b) $\begin{aligned}2x_1-3x_2&=5\\-4x_1+6x_2&=8\end{aligned}$

(c) $\begin{aligned}x_1+x_2&=0\\2x_1+3x_2&=0\\3x_1-2x_2&=0\end{aligned}$　(d) $\begin{aligned}3x_1+2x_2-x_3&=4\\x_1-2x_2+2x_3&=1\\11x_1+2x_2+x_3&=14\end{aligned}$

(e) $\begin{aligned}2x_1+3x_2+x_3&=1\\x_1+x_2+x_3&=3\\3x_1+4x_2+2x_3&=4\end{aligned}$　(f) $\begin{aligned}x_1-x_2+2x_3&=4\\2x_1+3x_2-x_3&=1\\7x_1+3x_2+4x_3&=7\end{aligned}$

(g) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - x_4 &= 4 \end{aligned}$

(h) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \\ -5x_1 + 8x_2 &= 4 \end{aligned}$

(i) $\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\ -3x_1 + 8x_2 + 5x_3 &= 17 \end{aligned}$

(j) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 &= 6 \\ -2x_1 - 4x_2 + 7x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$

(k) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 8 \\ x_1 - 5x_2 + x_4 &= 5 \end{aligned}$

(l) $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$

6. 利用高斯-若尔当消元法求解下列方程组.

(a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -1 \\ 4x_1 - 3x_2 &= 3 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

(d) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$

7. 采用几何法说明，含有两个方程和三个变量的齐次线性方程组有无穷多解. 对非齐次的 2×3 线性
24 方程组会有多少组解？给出答案的几何解释.

8. 考虑线性方程组，其增广矩阵为

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & a & 3 \end{array}\right]$$

当 a 取何值时，该方程组有唯一解？

9. 考虑线性方程组，其增广矩阵为

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & \beta & 0 \end{array}\right]$$

(a)该方程组是否会不相容？试说明.

(b)当 β 取何值时，该方程组有无穷多解？

10. 考虑线性方程组，其增广矩阵为

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & a & b \end{array}\right]$$

(a)当 a 和 b 取何值时，该方程组有无穷多解？

(b)当 a 和 b 取何值时，该方程组不相容？

11. 给定线性方程组

(a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2 \\ 3x_1 + 7x_2 &= 8 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 7x_2 &= 7 \end{aligned}$

将这两个方程组的右端项合并为一个 2×2 矩阵 B，然后利用矩阵

$$(A\mid B)=\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&2&1\\3&7&8&7\end{array}\right]$$

的行最简形求解这两个方程组.

12. 给定方程组

(a)
$$\begin{aligned}x_1+2x_2+x_3&=2\\-x_1-x_2+2x_3&=3\\2x_1+3x_2&=0\end{aligned}$$

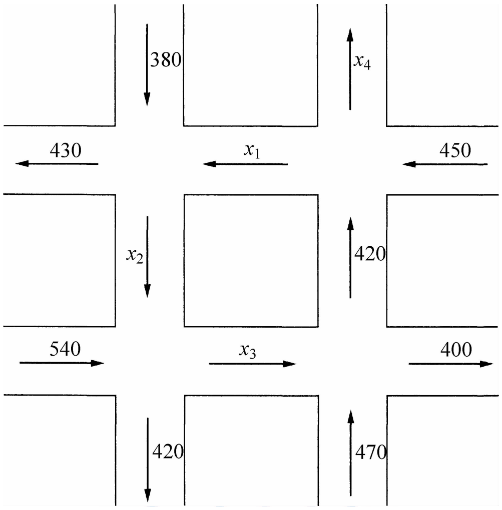
(b)
$$\begin{aligned}x_1+2x_2+x_3&=-1\\-x_1-x_2+2x_3&=2\\2x_1+3x_2&=-2\end{aligned}$$

利用增广矩阵$(A\mid B)$的行最简形和两次回代法求解它们.

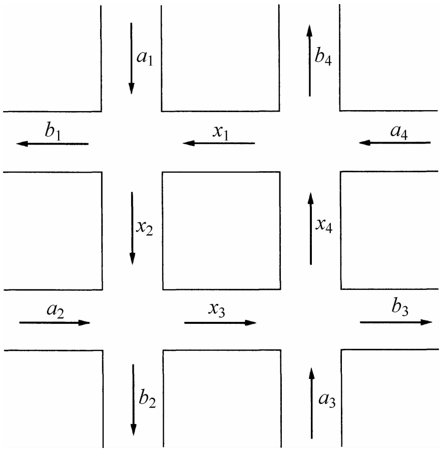
13. 给定一个齐次线性方程组，如果该方程组是超定方程组，其解的个数有什么可能性？试说明.

14. 给定一个非齐次线性方程组，如果该方程组是亚定方程组，其解的个数有什么可能性？试说明.

15. 确定下图中给出的交通流量 x_1，x_2，x_3 和 x_4.



16. 考虑如下的交通图，其中 a_1，a_2，a_3，a_4，b_1，b_2，b_3，b_4 为固定正整数. 构造一个关于变量 x_1，x_2，x_3，x_4 的线性方程组，并证明该方程组相容的充要条件为



$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

25 由此可得进入和离开该交通网络的汽车数量有什么关系？

17. 令(c_1, c_2)为 2×2 方程组

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0 \end{aligned}$$

的解．证明，对任意实数 α，有序对$(\alpha c_1, \alpha c_2)$也是方程组的解．

18. 在应用 3 中，如令自由变量 $x_4=1$，则可得解(6，6，6，1)．

(a)求当 $x_4=0$ 时方程组的解．这个解是否指出化学反应的某些信息？此时称“平凡解”是否合适？

(b)选择一些其他的 x_4，例如 2，4 或 5，并求相应的解．这些非平凡解之间有什么关系？

19. 液态苯在空气中可以燃烧．如果将一个冷的物体直接放在燃烧的苯上部，则水蒸气就会在物体上凝结，同时烟灰(碳)也会在该物体上沉积．这个化学反应的方程式为

$$x_1 C_6H_6 + x_2 O_2 \rightarrow x_3 C + x_4 H_2O$$

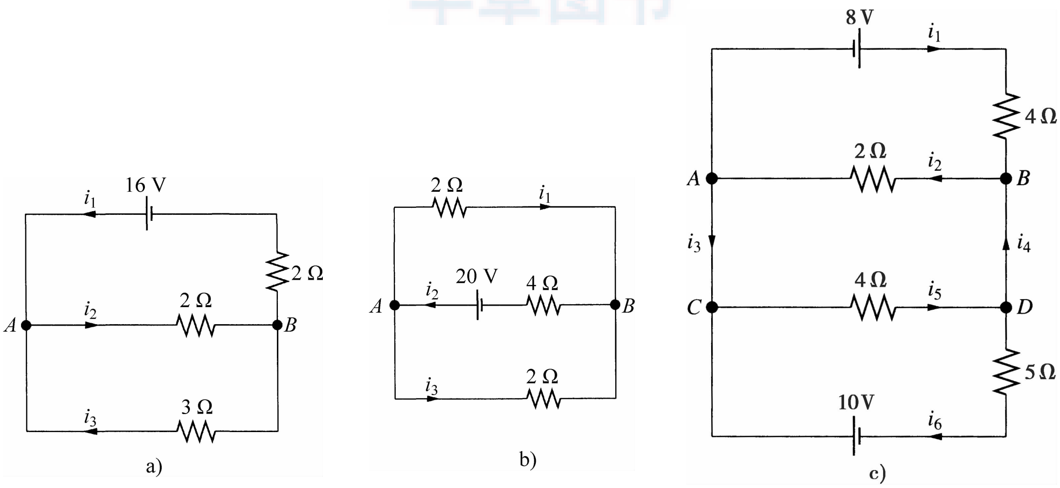
求变量 x_1，x_2，x_3 和 x_4，以配平该方程．

20. 市场上的硝酸是通过三个化学反应过程制造出来的．第一个反应中，氮(N_2)与氢(H_2)化合，生成氨(NH_3)．第二步，氨和氧(O_2)化合，生成二氧化氮(NO_2)和水．最后，NO_2 与水反应生成硝酸(HNO_3)和一氧化氮(NO)．在每一个反应过程中，衡量物质的量的单位是摩尔(化学反应中的标准单位)．要制造 8 摩尔的硝酸，需使用多少摩尔的氮、氢和氧呢？

21. 应用 4 中，若采用下表所示的商品分配方法，确定商品的相对价值 x_1，x_2 和 x_3．

	F	M	C
F	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
M	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
C	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

22. 求下列电路中各电流强度．



26

1.3 矩阵算术

本节我们引入矩阵和向量的标准记号，并定义矩阵的算术运算(加、减、乘)．我们还将引入两种附加运算：标量乘法和转置．我们将了解如何表示包含矩阵和向量的线性方程组，然后推导出线性方程组相容的定理．

矩阵中的元素称为标量(scalar)．它们通常是实数或复数．在大多数情况下，我们考虑所有元素为实数的矩阵．在本书的前五章中，读者可以认为术语标量(scalar)就表示实数．在第 6 章中将会出现使用复数作为标量的情形．

矩阵记号

若我们要引用矩阵，而不写出矩阵的所有元素，则可使用大写字母 A，B，C 等表示矩阵．一般地，a_{ij} 表示矩阵 A 的第 i 行第 j 列的元素，并用$(i，j)$表示它．因此，若 A 为一个 $m\times n$ 的矩阵，则

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

有时还将矩阵简记为 $A=(a_{ij})$．类似地，矩阵 B 可表示为(b_{ij})，矩阵 C 可表示为(c_{ij})等．

向量

由于仅有一行或一列的矩阵可以用来表示线性方程组的解，因此特别值得注意．具有 m 个线性方程 n 个变量的线性方程组的解是一个实的 n 元组．我们以后称由实数组成的 n 元组为向量(vector)．如果将 n 元组表示为一个 $1\times n$ 的矩阵，则称为行向量(row vector)．此外，若将 n 元组表示为一个 $n\times 1$ 的矩阵，则称为列向量(column vector)．例如，线性方程组

$$\begin{aligned} x_1+x_2&=3 \\ x_1-x_2&=1 \end{aligned}$$

的解可表示为行向量(2，1)，或列向量$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

在使用矩阵方程时，用列向量($n\times 1$ 的矩阵)表示解是较为方便的．所有 $n\times 1$ 的实矩阵构成的集合称为 n 维欧几里得空间(Euclidean n-space)，通常记为 $\mathbf{R}^n$．由于后面大部分使用列向量，因此一般省略“列”字，并简称为 $\mathbf{R}^n$ 中的向量．列向量的标准记号采用黑斜体小写字母． 27

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

对于行向量，没有通用的标准记号．本书中，我们用黑斜体小写字母表示行向量及

列向量，为区分行向量和列向量，在字母上面加上一水平箭头表示行向量．也就是说，水平箭头表示水平数组(行向量)而不是垂直数组(列向量)．

例如，

$$\vec{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

分别是有 4 项的行向量和列向量．

给定一个 $m \times n$ 矩阵 A，经常会使用它的特定行或列．A 的第 j 个列向量的标准记号为 $\boldsymbol{a}_j$．矩阵 A 的第 i 个行向量没有通用的标准记号．本书中，由于使用水平箭头表示行向量，我们将 A 的第 i 个行向量记为$\vec{\boldsymbol{a}}_i$．

设 A 为一 $m \times n$ 矩阵，则 A 的行向量为

$$\vec{\boldsymbol{a}}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}), \quad i = 1, \cdots, m$$

同时，列向量表示为

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \quad j = 1, \cdots, n$$

矩阵 A 可以用它的列向量或者行向量表示．

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) \quad 或 \quad A = \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{a}}_1 \\ \vec{\boldsymbol{a}}_2 \\ \vdots \\ \vec{\boldsymbol{a}}_m \end{bmatrix}$$

类似地，如果 B 为一 $n \times r$ 矩阵，则

$$B = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_r) = \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{b}}_1 \\ \vec{\boldsymbol{b}}_2 \\ \vdots \\ \vec{\boldsymbol{b}}_n \end{bmatrix}$$

28

▸例 1 如果

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}}_1 = (3, 2, 5), \vec{\boldsymbol{a}}_2 = (-1, 8, 4)$$ ◂

相等

若两个矩阵相等，则它们的维数以及它们对应的元素必相等．

定义 若两个 $m\times n$ 矩阵 A 和 B 对任一 i 和 j 均满足 $a_{ij}=b_{ij}$，则称它们**相等**(equal).

标量乘法

设 A 为一矩阵，且 α 为一标量，则 αA 为将 A 中的任一元素乘以 α 而构成的一个矩阵.

定义 设 A 为 $m\times n$ 的矩阵，且 α 为一标量，则 αA 为一 $m\times n$ 的矩阵，其(i, j)元素为 αa_{ij}.

例如，设

$$A=\begin{bmatrix}4 & 8 & 2\\ 6 & 8 & 10\end{bmatrix}$$

则

$$\frac{1}{2}A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix} \quad \text{且} \quad 3A=\begin{bmatrix}12 & 24 & 6\\ 18 & 24 & 30\end{bmatrix}$$

矩阵加法

两个相同维数矩阵的加法可通过对应元素相加得到.

定义 设 $A=(a_{ij})$及 $B=(b_{ij})$都是 $m\times n$ 矩阵，则它们的**和**(sum)$A+B$ 也为一个 $m\times n$的矩阵，对每一个有序对(i, j)，它的(i, j)元素为 $a_{ij}+b_{ij}$. 29

例如，

$$\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 4 & 3\\ 5 & 7 & 9\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-8\\ 3\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\ 4\\ 10\end{bmatrix}$$

若我们定义 $A-B$ 为 $A+(-1)B$，则可得 $A-B$ 为矩阵 A 中的元素减去矩阵 B 中的对应元素形成的矩阵. 因而

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 5\\ 2 & 3\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}4 & 5\\ 2 & 3\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & -5\\ -2 & -3\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}2-4 & 4-5\\ 3-2 & 1-3\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

如果用 O 表示与 A 维数相同且元素全为 0 的矩阵，则

$$A+O=O+A=A$$

我们称 O 为**零矩阵**(zero matrix). 该矩阵为所有 $m\times n$ 矩阵集合中关于加法的单位元.

此外，每一个 $m\times n$ 矩阵都有一个加法意义下的逆元. 事实上

$$A+(-1)A=O=(-1)A+A$$

通常记加法的逆元为 $-A$. 因此

$$-A=(-1)A$$

矩阵乘法及线性方程组

我们还定义了极为重要的运算，即两个矩阵的乘法. 引入如下定义方式的主要原因来源于线性方程组的应用. 若有一个单变量的线性方程，它可写为如下形式：

$$ax=b \tag{2}$$

我们通常认为 a，x 和 b 是标量；然而，它们也可以看成 1×1 矩阵. 现在的目标就是将方程(2)推广，使得一个 $m\times n$ 的线性方程组可表示为一个矩阵方程

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

其中 A 为一 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{x}$ 为一 $\mathbf{R}^n$ 中的未知向量，$\boldsymbol{b}$ 为 $\mathbf{R}^m$ 中的向量. 我们首先考虑一
30 个方程有多个未知量的情形.

情形 1：一个方程有多个未知量

我们首先考虑一个方程有多个变量的情形. 例如考虑方程

$$3x_1+2x_2+5x_3=4$$

若令

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 5\end{bmatrix} \quad 及 \quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

并定义乘积 $A\boldsymbol{x}$ 为

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=3x_1+2x_2+5x_3$$

则方程 $3x_1+2x_2+5x_3=4$ 可写为矩阵方程

$$A\boldsymbol{x}=4$$

对一个有 n 个未知量的线性方程

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$$

若令

$$A=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{bmatrix} \quad 及 \quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

并定义乘积 $A\boldsymbol{x}$ 为

$$A\boldsymbol{x}=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$$

则方程组可写为 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的形式.

例如，若

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -3 & 4\end{bmatrix} \quad 且 \quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}3\\2\\1\\-2\end{bmatrix}$$

则

$$A\boldsymbol{x}=2\cdot 3+1\cdot 2+(-3)\cdot 1+4\cdot(-2)=-3$$

注意，左侧的行向量与右侧的列向量乘积的结果为一个标量．因此，这种乘法通常称为标量积(scalar product)． 31

情形 2：m 个方程 n 个未知量

现在考虑一个 $m\times n$ 线性方程组

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2\\&\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n&=b_m\end{aligned} \tag{3}$$

若能将这个方程组写为类似(2)的形式则是理想的，即写为矩阵方程

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \tag{4}$$

其中 $A=(a_{ij})$已知，$\boldsymbol{x}$ 为一个 $n\times 1$ 的未知变量矩阵，$\boldsymbol{b}$ 为一个 $m\times 1$ 矩阵，表示方程组的右端项．这样，若令

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & & & \\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}$$

并定义乘积 $A\boldsymbol{x}$ 为

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{bmatrix} \tag{5}$$

则线性方程组(3)等价于矩阵方程(4)．

给定一个 $m\times n$ 矩阵 A 和空间 $\mathbf{R}^n$ 中的向量 $\boldsymbol{x}$，可用(5)计算乘积 $A\boldsymbol{x}$．乘积 $A\boldsymbol{x}$ 将是一个$m\times 1$ 的矩阵，即是 $\mathbf{R}^m$ 中的一个向量．$A\boldsymbol{x}$ 中第 i 个元素可采用下面的方法计算：

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n$$

它等于矩阵 A 的第 i 个行向量与列向量 $\boldsymbol{x}$ 的标量积$\vec{\boldsymbol{a}}_i\boldsymbol{x}$．因此

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\vec{\boldsymbol{a}}_1\boldsymbol{x}\\\vec{\boldsymbol{a}}_2\boldsymbol{x}\\\vdots\\\vec{\boldsymbol{a}}_n\boldsymbol{x}\end{bmatrix}$$

32

▶**例 2**

$$A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 5 & 3 & 7\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}4x_1+2x_2+x_3\\ 5x_1+3x_2+7x_3\end{bmatrix}$$ ◀

▶**例 3**

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 2 & 5\\ 4 & 2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}$$

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-3\cdot 2+1\cdot 4\\ 2\cdot 2+5\cdot 4\\ 4\cdot 2+2\cdot 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 24\\ 16\end{bmatrix}$$ ◀

▶**例 4** 将下列方程组写为矩阵方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$.

$$\begin{aligned}3x_1+2x_2+x_3&=5\\ x_1-2x_2+5x_3&=-2\\ 2x_1+x_2-3x_3&=1\end{aligned}$$

解

$$\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 5\\ 2 & 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$$ ◀

另外一种将线性方程组(3)表示为矩阵方程的方法是，将乘积 $A\boldsymbol{x}$ 表示为列向量和的形式：

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{bmatrix}$$

$$=x_1\begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{bmatrix}+\cdots+x_n\begin{bmatrix}a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{bmatrix}$$

因此，有

$$A\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n \tag{6}$$

利用这个公式，可将方程组(3)表示为一矩阵方程

$$x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{b} \tag{7}$$

▶**例 5** 线性方程组

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

可以写为一矩阵方程

$$x_1\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$$ ◀ 33

定义 若 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$ 为 $\mathbf{R}^m$ 中的向量，且 c_1，c_2，…，c_n 为标量，则和式

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n$$

称为向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$ 的一个**线性组合**(linear combination).

由方程(6)可知，乘积 $A\boldsymbol{x}$ 为矩阵 A 的列向量的一个线性组合. 某些书上甚至用这种线性组合的表示来定义矩阵与向量的乘积.

> 若 A 为一 $m\times n$ 的矩阵，且 $\boldsymbol{x}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个向量，则
> $$A\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n$$

▶**例 6** 如果我们在例 5 中选择 $x_1=2$，$x_2=3$，$x_3=4$，则

$$\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$$

因此，向量 $\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$ 为系数矩阵三个列向量的线性组合. 由此可知例 5 中的线性方程组是相容的，且

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$$

为方程组的一个解. ◀

矩阵方程(7)给出了一个很好的方法来刻画线性方程组是否是相容的. 事实上，下面的定理是(7)的直接推论.

定理 1.3.1(线性方程组的相容性定理) 一个线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 相容的充要条件是向量 $\boldsymbol{b}$ 可写为矩阵 A 列向量的一个线性组合.

▶**例 7** 线性方程组

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 1 \end{aligned}$$

是不相容的，因为向量 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 不能表示为列向量 $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$ 的一个线性组合. 注意，这些向量的任何线性组合应形如

$$x_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+2x_2\\2x_1+4x_2\end{bmatrix}$$

34 因此，该向量的第二个元素必为其第一个元素的两倍. ◂

矩阵乘法

更为一般地，如果矩阵 A 的列数等于矩阵 B 的行数，则矩阵 A 可以和矩阵 B 相乘. 乘积的第一列由矩阵 B 的第一列求得，即 AB 的第一列为 $A\boldsymbol{b}_1$，AB 的第二列为 $A\boldsymbol{b}_2$，等等. 因此乘积 AB 是以 $A\boldsymbol{b}_1$，$A\boldsymbol{b}_2$，…，$A\boldsymbol{b}_n$ 为列的矩阵.

$$AB=(A\boldsymbol{b}_1,A\boldsymbol{b}_2,\cdots,A\boldsymbol{b}_n)$$

AB 的(i,j)元素为列向量 $A\boldsymbol{b}_j$ 的第 i 个元素. 它是由 A 的第 i 个行向量乘以 B 的第 j 个列向量得到的.

定义 若 $A=(a_{ij})$为一个 $m\times n$ 的矩阵，且 $B=(b_{ij})$为一个 $n\times r$ 的矩阵，则乘积 $AB=C=(c_{ij})$为一个 $m\times r$ 的矩阵，它的元素定义为

$$c_{ij}=\vec{\boldsymbol{a}}_i\boldsymbol{b}_j=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

▸**例 8** 若

$$A=\begin{bmatrix}3&-2\\2&4\\1&-3\end{bmatrix}\quad 及\quad B=\begin{bmatrix}-2&1&3\\4&1&6\end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned}AB&=\begin{bmatrix}3&-2\\\mathbf{2}&\mathbf{4}\\1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&1&\mathbf{3}\\4&1&\mathbf{6}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}3\cdot(-2)-2\cdot4&3\cdot1-2\cdot1&3\cdot3-2\cdot6\\2\cdot(-2)+4\cdot4&2\cdot1+4\cdot1&\mathbf{2\cdot3+4\cdot6}\\1\cdot(-2)-3\cdot4&1\cdot1-3\cdot1&1\cdot3-3\cdot6\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}-14&1&-3\\12&6&\mathbf{30}\\-14&-2&-15\end{bmatrix}\end{aligned}$$

阴影部分表示乘积中的元素(2，3)是如何由 A 的第二行和 B 的第三列求得的. 也可计算乘积 BA；然而结果矩阵 BA 并不等于 AB. 事实上，正如下面的乘积所示，AB 和 BA 甚至没有相同的维数.

$$\begin{aligned}BA&=\begin{bmatrix}-2\cdot3+1\cdot2+3\cdot1&-2\cdot(-2)+1\cdot4+3\cdot(-3)\\4\cdot3+1\cdot2+6\cdot1&4\cdot(-2)+1\cdot4+6\cdot(-3)\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}-1&-1\\20&-22\end{bmatrix}\end{aligned}$$ ◂

35

▸**例 9** 若

$$A=\begin{bmatrix}3&4\\1&2\end{bmatrix}\quad 及\quad B=\begin{bmatrix}1&2\\4&5\\3&6\end{bmatrix}$$

则不可能将 A 乘以 B，因为 A 的列数不等于 B 的行数．然而，可以用 B 乘以 A．

$$BA=\begin{bmatrix}1&2\\4&5\\3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&8\\17&26\\15&24\end{bmatrix}$$ ◀

若 A 和 B 均为 $n\times n$ 的矩阵，则 AB 和 BA 也将是 $n\times n$ 的矩阵，但一般它们不相等．矩阵的乘法不满足交换律．

▶**例 10** 若

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\quad 及\quad B=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}$$

则

$$AB=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3\\0&0\end{bmatrix}$$

且

$$BA=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}$$

因此，$AB\neq BA$． ◀

应用 1：生产成本

某工厂生产三种产品．它的成本分为三类．每一类成本中，给出生产单个产品时估计需要的量．同时给出每季度生产每种产品数量的估计．这些估计在表 1 和表 2 中给出．该公司希望在股东会议上用一个表格展示出每一季度三类成本中的每一类成本的数量：原料费、工资和管理费．

表 1　生产单位产品的成本(美元)

成　本	产　品		
	A	B	C
原料费	0.10	0.30	0.15
工资	0.30	0.40	0.25
管理费和其他	0.10	0.20	0.15

36

表 2　每季度产量

产　品	季　度			
	夏季	秋季	冬季	春季
A	4 000	4 500	4 500	4 000
B	2 000	2 600	2 400	2 200
C	5 800	6 200	6 000	6 000

解　我们用矩阵的方法考虑这个问题．这两个表格中的每一个均可表示为一个矩阵．

$$M=\begin{bmatrix}0.10 & 0.30 & 0.15\\ 0.30 & 0.40 & 0.25\\ 0.10 & 0.20 & 0.15\end{bmatrix}$$

及

$$P=\begin{bmatrix}4\,000 & 4\,500 & 4\,500 & 4\,000\\ 2\,000 & 2\,600 & 2\,400 & 2\,200\\ 5\,800 & 6\,200 & 6\,000 & 6\,000\end{bmatrix}$$

如果我们构造乘积 MP，则 MP 的第一列表示夏季的成本.

原料费：　　　$(0.10)(4\,000)+(0.30)(2\,000)+(0.15)(5\,800)=1\,870$

工资：　　　　$(0.30)(4\,000)+(0.40)(2\,000)+(0.25)(5\,800)=3\,450$

管理费和其他：$(0.10)(4\,000)+(0.20)(2\,000)+(0.15)(5\,800)=1\,670$

MP 的第二列表示秋季的成本.

原料费：　　　$(0.10)(4\,500)+(0.30)(2\,600)+(0.15)(6\,200)=2\,160$

工资：　　　　$(0.30)(4\,500)+(0.40)(2\,600)+(0.25)(6\,200)=3\,940$

管理费和其他：$(0.10)(4\,500)+(0.20)(2\,600)+(0.15)(6\,200)=1\,900$

MP 的第三列和第四列表示冬季和春季的成本.

$$MP=\begin{bmatrix}1\,870 & 2\,160 & 2\,070 & 1\,960\\ 3\,450 & 3\,940 & 3\,810 & 3\,580\\ 1\,670 & 1\,900 & 1\,830 & 1\,740\end{bmatrix}$$

MP 第一行的元素表示四个季度中每一季度原料的总成本. 第二和第三行的元素分别表示四个季度中每一季度工资和管理的成本. 每一类成本的年度总成本可由矩阵的每一行元素相加得到. 每一列元素相加，即可得到每一季度的总成本. 表 3 汇总了总成本.

37

表　3

	季　度				
	夏季	秋季	冬季	春季	全年
原料费	1 870	2 160	2 070	1 960	8 060
工资	3 450	3 940	3 810	3 580	14 780
管理费和其他	1 670	1 900	1 830	1 740	7 140
总计	6 990	8 000	7 710	7 280	29 980

应用 2：管理科学——层次分析法

层次分析法(Analytic Hierarchy Process，AHP)是一种进行复杂决策分析时常用的方法. 该方法最早由 T. L. Saaty 在 20 世纪 70 年代提出. 层次分析法在商业、工业、政

府、教育和医疗等领域有着广泛的应用．该方法适用于存在某一特定目标，并存在固定数量达到目标的可选项的问题．何种选项是否最终被选择依赖于一系列评价准则．当处理复杂的决策问题时，每一个评价准则都可能存在一系列的子准则，同时，每一子准则仍可能存在子准则，以此类推．因此，对于复杂的决策问题，人们可能需要多层的决策准则．

为说明层次分析法是如何工作的，我们考虑一个简单的问题．一个州立大学数学系的查找与筛选委员会(Search and Screen Committee)正在执行一项填补本系教授职位的筛选过程．经过预筛选过程之后，该委员会将候选人数缩小到三位：Gauss 博士、O'Leary 博士和 Taussky 博士．经过最后一轮的面试，委员会必须挑选出最适合该职位的候选人．为达到这个目标，他们必须在下列各个方面对候选人进行评估：研究、教学和学术活动．完成该项决策过程的层次结构如图 1.3.1 所示．

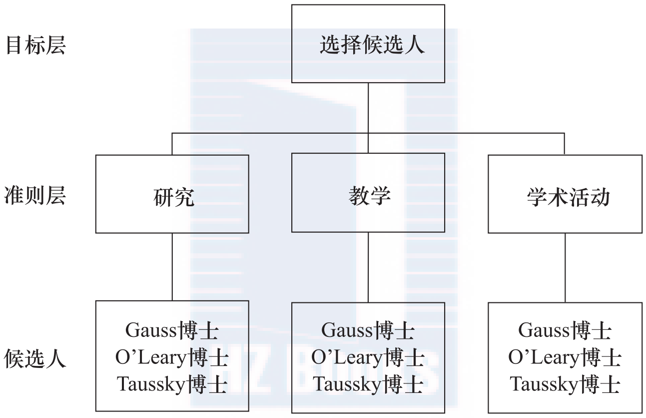


图 1.3.1 层次分析过程

层次分析法的第一步是确定三个评估标准的相对重要性．这可通过两两比较完成．例如，若委员会认为研究和教学应当具有相同的重要性，而这两点的重要性都是学术活 38
动的两倍，则数学上可将这些相对的评级用权重 0.40，0.40 和 0.20 进行相应的赋值．需要注意的是，前两项评估标准的权重是第三项评估标准权重的两倍．还需注意的是，权重的选择需要使得它们的和为 1．权重向量

$$\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}0.40\\0.40\\0.20\end{bmatrix}$$

给出了查找准则之间相对重要性的数值表示．

该方法的下一步是针对每一准则，为列表中的三个候选人给出相对的权重评级．给出这些权重的方法可以是定量的，也可以是定性的．例如，对研究的评估可以用三个候选人在研究性期刊上发表的论文页数进行定量的评估．因此，若 Gauss 发表了 500 页，O'Leary 发表了 250 页，Taussky 发表了 250 页，则可以将权重赋值为将这些数值除以

1 000(三人发表论文页数的总和). 因此，此方法得到的权重为 0.50，0.25 和 0.25. 定量的评估并不考虑论文质量不同的因素. 确定定性的权重需要人来判断，但该过程不能完全主观. 后面的章节(第 5 章和第 6 章)中我们将回顾这个例子，并考虑如何定性确定权重. 该方法需要引入成对比较，因此需要使用更为高级的矩阵方法从成对比较结果中得到权重.

委员会另外一种细化查找过程的方法是将研究准则细分为两个子类——定量的研究和定性的研究. 此时，可以直接在图 1.3.1 的准则层下再加上一个子准则层. 这种细化的方法将在 5.3 节回顾层次分析法的例子中引入.

至此，假设委员会已经确定了针对三个准则中每一准则的相对权重，且这些权重在图 1.3.2 中给出. 相对于研究、教学和学术活动，候选人的相对评级可使用如下向量表示：

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}0.50\\0.25\\0.25\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}0.20\\0.50\\0.30\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}0.25\\0.50\\0.25\end{bmatrix}$$

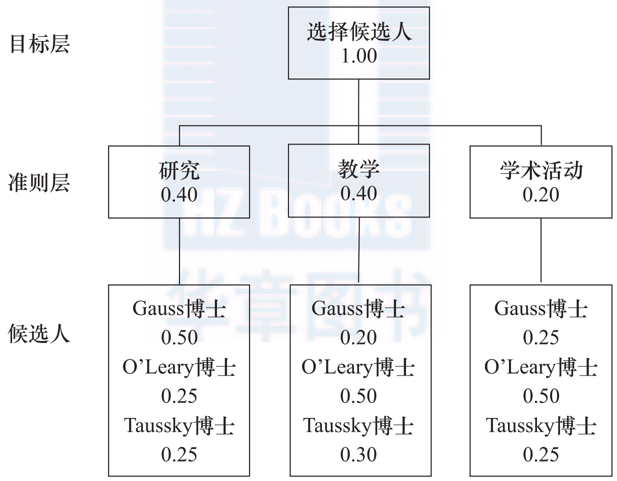


图 1.3.2　带权的层次分析图

为确定候选人的总体评级，我们将每一个这样的向量都乘以相应的权重 w_1，w_2，w_3 并将结果相加.

$$\boldsymbol{r}=w_1\boldsymbol{a}_1+w_2\boldsymbol{a}_2+w_3\boldsymbol{a}_3=0.40\begin{bmatrix}0.50\\0.25\\0.25\end{bmatrix}+0.40\begin{bmatrix}0.20\\0.50\\0.30\end{bmatrix}+0.20\begin{bmatrix}0.25\\0.50\\0.25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.33\\0.40\\0.27\end{bmatrix}$$

39

注意到，如果令 $A=[\boldsymbol{a}_1\quad \boldsymbol{a}_2\quad \boldsymbol{a}_3]$，则相对评级向量 $\boldsymbol{r}$ 可使用矩阵 A 与向量 $\boldsymbol{w}$ 的乘积表示

$$\boldsymbol{r} = A\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.20 & 0.25 \\ 0.25 & 0.50 & 0.50 \\ 0.25 & 0.30 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.40 \\ 0.40 \\ 0.20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.33 \\ 0.40 \\ 0.27 \end{bmatrix}$$

本例中，第二个候选人具有最高的相对评级，因此委员会取消了 Gauss 和 Taussky，并将该职位提供给 O'Leary. 若 O'Leary 拒绝了该职位，下一个考虑的人员将是 Gauss，他的相对评级处于第二位.

参考文献

1. Saaty, T. L., *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw Hill, 1980.

符号规则

正如通常的代数，如果表达式中既包含乘法也包含加法，且没有使用括号指明运算的顺序，那么乘法先于加法计算. 这同样适用于标量乘法和矩阵乘法. 例如，设

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

则

$$A + BC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

且

$$3A + B = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$ 40

矩阵的转置

给定 $m \times n$ 矩阵 A，构造一个各列是 A 的各行的 $n \times m$ 矩阵常常是非常有用的.

定义 一个 $m \times n$ 矩阵 A 的**转置**(transpose)为 $n \times m$ 矩阵 B，定义为

$$b_{ji} = a_{ij} \tag{8}$$

其中 $j=1, \cdots, n$ 和 $i=1, \cdots, m$. A 的转置记为 A^{T}.

由(8)可得 A^{T} 的第 j 行元素分别与 A 的第 j 列元素相同，并且 A^{T} 的第 i 列元素分别与 A 的第 i 行元素相同.

▸**例 11** (a)若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$，则 $A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

(b)若 $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$，则 $B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

(c)若 $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$，则 $C^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. ◂

例 11 中的矩阵 C 是自转置的，这在实际应用中经常出现.

定义 一个 $n \times n$ 的矩阵 A，若满足 $A^{\mathrm{T}} = A$，则称为**对称的**(symmetric).

下面给出了一些对称矩阵的例子：

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -4\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\3 & 1 & 5\\4 & 5 & 3\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\1 & 1 & -2\\2 & -2 & -3\end{bmatrix}$$

应用 3：信息检索

因特网上数据库的发展带动了信息存储和信息检索的巨大进步．现代检索技术是基于矩阵理论和线性代数的．

在典型情况下，一个数据库包含一组文档，并且我们希望通过搜索这些文档找到最符合特定搜索内容的文档．根据数据库的类型，我们可以像在期刊上搜索论文、在因特
41 网上搜索网页、在图书馆中搜索图书或在电影集中搜索某部电影一样，搜索这些条目．

为说明搜索是如何进行的，假设数据库包含 m 个文档和 n 个可用于搜索的关键字的字典字．由于搜索类似冠词和前缀之类的通用词汇不是很现实，因此并不是所有的词汇都是允许的．假设字典字是按照字母顺序进行排序的，那么我们可将数据库表示为一个 $m\times n$ 矩阵 A．每一个文档被表示为矩阵的一列．A 的第 j 列的第一个元素为第 j 个文档中第一个字典字出现的相对频率．元素 a_{2j} 表示第 j 个文档中出现的第二个字典字的相对频率，等等．用于搜索的关键字被表示为 $\mathbf{R}^m$ 中的一个向量 $\boldsymbol{x}$．如果第 i 个关键字在搜索列表中，则向量 $\boldsymbol{x}$ 中的第 i 个元素为 1；否则，令 $x_i=0$．为完成搜索，我们只需用 A^{T} 乘以 $\boldsymbol{x}$.

简单匹配搜索

一类最简单的搜索是确定每一个文档中有多少个搜索的关键字，这种方法不考虑字的相对频率问题．例如，假设数据库中包含下列书名：

B1. Applied Linear Algebra

B2. Elementary Linear Algebra

B3. Elementary Linear Algebra with Applications

B4. Linear Algebra and Its Applications

B5. Linear Algebra with Applications

B6. Matrix Algebra with Applications

B7. Matrix Theory

按照字母顺序给出关键字集合为

algebra，application，elementary，linear，matrix，theory

对简单匹配搜索，只需在数据库矩阵中使用 0 和 1，而不必考虑关键字的相对频率．因此矩阵的 $(i,\ j)$ 元素用 1 表示第 i 个单词出现在第 j 个书名中，0 表示第 i 个单词不出现在第 j 个书名中．假设搜索引擎十分先进，可以将单词的不同形式认为是一个单词．例如，在上面给出的书名列表中，单词 applied 和 application 均被认为是单词 application．所给出的书名列表对应的数据库矩阵定义为表 4 中的阵列．

表 4　线性代数书籍数据库的阵列表示

关键字	书籍						
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7
algebra	1	1	1	1	1	1	0
application	1	0	1	1	1	1	0
elementary	0	1	1	0	0	0	0
linear	1	1	1	1	1	0	0
matrix	0	0	0	0	0	1	1
theory	0	0	0	0	0	0	1

如果搜索的关键字是 applied，linear 和 algebra，则数据库矩阵和搜索向量为

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&0\\1&0&1&1&1&1&0\\0&1&1&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$ 42

如果令 $\boldsymbol{y}=A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，则

$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0&0\\1&0&1&1&0&0\\1&1&1&1&0&0\\1&1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\\3\\3\\3\\2\\0\end{bmatrix}$$

y_1 的值就是搜索关键字在第一个书名中的数量，y_2 的值就是搜索关键字在第二个书名中的数量，等等．因为 $y_1=y_3=y_4=y_5=3$，故书名 B1、B3、B4 和 B5 必然包含所有三个搜索的单词．如果搜索设置为匹配所有搜索单词，那么搜索引擎将返回第一、第三、第四和第五个书名．

相对频率搜索

非营利数据库的搜索通常会找到所有包含搜索关键字的文档，并将它们按照相对频率进行排序．此时，数据库矩阵的元素应能反映出关键字在文档中出现的频率．例如，假设数据库所有关键字的字典中第 6 个单词为 algebra、第 8 个单词为 applied，字典中的单词采用字母顺序排序．如果说，数据库中文档 9 包含关键字字典中单词的总次数为 200，且若单词 algebra 在文档中出现 10 次，而单词 applied 出现 6 次，那么这些单词的相对频率分别为 $\frac{10}{200}$ 和 $\frac{6}{200}$，并且它们对应的数据库矩阵中的元素分别为

$$a_{69}=0.05\qquad 和\qquad a_{89}=0.03$$

为搜索这两个单词，我们取搜索向量 $\boldsymbol{x}$ 为其元素 x_6 和 x_8 为 1、其他元素为 0 的向量．

然后我们计算

43 $$\boldsymbol{y}=A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{y}$ 中对应于文档 9 的元素为

$$y_9=a_{69}\cdot 1+a_{89}\cdot 1=0.08$$

这说明文档 9 中出现搜索单词为 200 次中的 16 次(所有单词出现次数的 8%). 如果 y_j 为向量 $\boldsymbol{y}$ 中最大的元素，则说明数据库中的文档 j 包含关键字的相对频率最大.

高级搜索方法

搜索某些关键字，例如 linear 和 algebra，可能会很容易返回数以百计的文档，其中有些文档甚至不是关于线性代数的. 如果增加搜索关键字的数量并要求所有搜索的单词均要匹配，那么可能不包含某些重要的线性代数文档. 相较匹配扩展的搜索列表中所有单词的方法，我们的数据库搜索应优先给出匹配关键字最多且相对频率高的文档. 为实现它，需要寻找和搜索向量 $\boldsymbol{x}$“接近”的数据库矩阵 A 的一个列. 一种衡量两个向量接近程度的方法是定义**两向量间的夹角**(the angle between the vectors). 我们将在 5.1 节中讨论它.

在学习了**奇异值分解**(singular value decomposition)(6.5 节)后，我们还会重新考虑信息搜索的应用问题. 这种分解可用于寻找数据库矩阵的一个简单近似，它使得搜索速度极大提高. 通常，这种方法还有一个额外的好处，就是过滤**噪声**(noise)；即使用数据库矩阵的近似版本，可以自动地消除不必要的上下文中含有关键字的文档. 例如，一个牙科学生和一个数学学生可能都会用到 calculus 作为他们搜索的单词之一. 因为数学搜索词列表中不包含任何其他关于牙科的项，因此可以期望使用近似数据库矩阵的数学搜索排除所有与牙科相关的文档. 类似地，牙科学生的搜索中也应过滤掉数学文档.

网络搜索和网页分级

现代网络搜索很容易出现在数以十亿计的文档中搜索成百上千个关键字的情形. 事实上，如 2008 年 6 月，在因特网上有超过一万亿的网页，要求搜索引擎在一天的时间内更新 1 000 万个网页是很常见的. 尽管因特网上网页的数据库矩阵极其巨大，但是搜索却可以极大简化，因为矩阵和搜索向量均是**稀疏的**(sparse)，即任一列中大多数元素为 0.

对网络搜索，好的搜索引擎应能通过简单的匹配找到所有包含关键字的网页，但这些网页并不按照其关键字的相对频率进行排序. 这在因特网商务中很自然，因为希望出售商品的人可以通过重复使用关键字，来保证他们的网站总是处于任何使用相对频率的搜索中级别较高的位置. 事实上，很容易将某一关键字列表在不知不觉中重复上百次.
44 如果将单词的前景色和网页的背景色设为相同，那么浏览者将不会察觉到单词的重复.

对网络搜索，一个更为先进的算法，需要将包含所有搜索关键字的网页进行分级. 第 6 章中我们将学习一类特殊的矩阵模型，它针对某些特定随机过程计算概率. 这种模型称为**马尔可夫过程**(Markov process)或**马尔可夫链**(Markov chain). 6.3 节中我们会看到如何使用马尔可夫链模拟网上冲浪并得到网页分级的模型.

参考文献

1. Berry, Michael W., and Murray Browne, *Understanding Search Engines: Mathematical*

Modeling and Text Retrieval，SIAM，Philadelphia，1999.

2. Langville，Amy N.，and Carl D. Meyer，*Google's PageRank and Beyond*：*The Science of Search Engine Rankings*，Princeton University Press，2012.

1.3 节练习

1. 设

$$A=\begin{bmatrix}3&1&4\\-2&0&1\\1&2&2\end{bmatrix}\quad 和 \quad B=\begin{bmatrix}1&0&2\\-3&1&1\\2&-4&1\end{bmatrix}$$

求：

(a)$2A$　(b)$A+B$　(c)$2A-3B$　(d)$(2A)^{\mathrm{T}}-(3B)^{\mathrm{T}}$

(e)AB　(f)BA　(g)$A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$　(h)$(BA)^{\mathrm{T}}$

2. 对下列每一对矩阵，确定是否可以用第一个矩阵乘以第二个矩阵．如果可以，求它们的乘积．

(a) $\begin{bmatrix}3&5&1\\-2&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&3\\4&1\end{bmatrix}$　(b) $\begin{bmatrix}4&-2\\6&-4\\8&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}$　(c) $\begin{bmatrix}1&4&3\\0&1&4\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\1&1\\4&5\end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix}4&6\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&5\\4&1&6\end{bmatrix}$　(e) $\begin{bmatrix}4&6&1\\2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&5\\4&1&6\end{bmatrix}$　(f) $\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&4&5\end{bmatrix}$

3. 对练习 2 中的每一对矩阵，是否可以用第二个矩阵乘以第一个矩阵？它们的乘积的维数是多少？

4. 将下列方程组写为矩阵方程的形式．

(a) $\begin{aligned}3x_1+2x_2&=1\\2x_1-3x_2&=5\end{aligned}$　(b) $\begin{aligned}x_1+x_2\qquad\quad&=5\\2x_1+x_2-x_3&=6\\3x_1-2x_2+2x_3&=7\end{aligned}$　(c) $\begin{aligned}2x_1+x_2+x_3&=4\\x_1-x_2+2x_3&=2\\3x_1-2x_2-x_3&=0\end{aligned}$

5. 设

$$A=\begin{bmatrix}3&4\\1&1\\2&7\end{bmatrix}$$

验证：

(a)$5A=3A+2A$　(b)$6A=3(2A)$　(c)$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$

6. 设

$$A=\begin{bmatrix}4&1&6\\2&3&5\end{bmatrix}\quad 及 \quad B=\begin{bmatrix}1&3&0\\-2&2&-4\end{bmatrix}$$

验证：

(a)$A+B=B+A$　(b)$3(A+B)=3A+3B$　(c)$(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$

7. 设

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\6&3\\-2&4\end{bmatrix}\quad 及 \quad B=\begin{bmatrix}2&4\\1&6\end{bmatrix}$$

45

验证：

(a)$3(AB)=(3A)B=A(3B)$　(b)$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

8. 设

$$A=\begin{bmatrix}2&4\\1&3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-2&1\\0&4\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}3&1\\2&1\end{bmatrix}$$

验证：

(a) $(A+B)+C=A+(B+C)$　　(b) $(AB)C=A(BC)$

(c) $A(B+C)=AB+AC$　　(d) $(A+B)C=AC+BC$

9. 设 $A=\begin{bmatrix}1&2\\1&-2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix}$.

(a)将 $\boldsymbol{b}$ 写为列向量 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 的线性组合的形式.

(b)利用(a)的结果确定线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解．方程组有其他的解吗？试说明.

(c)将 $\boldsymbol{c}$ 写为列向量 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 的线性组合的形式.

10. 对下列的 A 和 $\boldsymbol{b}$，通过考察 $\boldsymbol{b}$ 与 A 的列向量的关系确定方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 是否是相容的．解释每一情形的答案.

(a) $A=\begin{bmatrix}2&1\\-2&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$　(b) $A=\begin{bmatrix}1&4\\2&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}$　(c) $A=\begin{bmatrix}3&2&1\\3&2&1\\3&2&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$

11. 设 A 为 5×3 的矩阵．如果 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$，则关于线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解的个数会有什么结论？试说明.

12. 设 A 为 3×4 的矩阵．如果 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$，则关于线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解的个数会有什么结论？试说明.

13. 设 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 是增广矩阵具有最简形

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}1&2&0&3&1&-2\\0&0&1&2&4&5\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

的线性方程组.

(a)求出方程组的所有解.

(b)如果 $\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\3\\4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\\3\end{bmatrix}$，确定 $\boldsymbol{b}$.

14. 在应用2中，假设我们要在7本线性代数书的数据库中搜索单词 elementary，matrix，algebra．构造一个搜索向量 $\boldsymbol{x}$，然后计算表示搜索结果的向量 $\boldsymbol{y}$．解释向量 $\boldsymbol{y}$ 的元素的意义.

15. 设 A 是 $m\times n$ 的矩阵．解释为什么矩阵乘法 $A^{\mathrm{T}}A$ 和 AA^{T} 是可行的.

16. 如果 $A^{\mathrm{T}}=-A$，则称矩阵 A 是反对称的．证明如果矩阵是反对称的，则它的对角元素均为0.

17. 在应用3中，假设我们在有七本线性代数书籍数据库中搜索单词 elementary，matrix，algebra．利用搜索向量 $\boldsymbol{x}$ 计算表示搜索结果的向量 $\boldsymbol{y}$．说明向量 $\boldsymbol{y}$ 中数值所表示的含义.

18. 设 A 是 2×2 的矩阵，其中 $a_{11}\neq0$，设 $\alpha=a_{21}/a_{11}$．证明 A 可分解为积的形式

$$\begin{bmatrix}1&0\\\alpha&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\0&b\end{bmatrix}$$

b 的值是多少？

1.4 矩阵代数

实数的代数法则可能适用也可能不适用于矩阵．例如，如果 a 和 b 是实数，则

$$a+b=b+a\text{，且 } ab=ba$$ 46

对实数而言，加法运算和乘法运算都满足交换律．当我们用方阵 A 和 B 代替 a 和 b 时，上述第一条代数法则仍适用，即

$$A+B=B+A$$

然而，我们已经知道矩阵乘法不满足交换律．这一点应格外引起重视．

警告 一般来讲，$AB\neq BA$．矩阵乘法不满足交换律．

本节我们考察哪些代数法则适用于矩阵．

代数法则

下面的定理给出了一些矩阵代数中有用的法则．

定理 1.4.1 在定义了需要的运算后，下述法则对任何标量 α 和 β 及矩阵 A，B 和 C 都是成立的．

1. $A+B=B+A$
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$
3. $(AB)C=A(BC)$
4. $A(B+C)=AB+AC$
5. $(A+B)C=AC+BC$
6. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$
7. $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$
8. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
9. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

我们将证明其中的两个法则，其他的留给读者验证．

证(法则 4) 设 $A=(a_{ij})$ 为一 $m\times n$ 矩阵，$B=(b_{ij})$ 和 $C=(c_{ij})$ 均为 $n\times r$ 的矩阵．令 $D=A(B+C)$ 及 $E=AB+AC$．则有

$$d_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})$$

及

$$e_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}$$

但

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}$$

所以 $d_{ij}=e_{ij}$，由此 $A(B+C)=AB+AC$． ■ 47

证(法则 3) 令 A 为一 $m\times n$ 矩阵，B 为一 $n\times r$ 矩阵，C 为一 $r\times s$ 矩阵．令 $D=AB$ 及 $E=BC$．我们需证明 $DC=AE$．根据矩阵乘法的定义有

$$d_{il}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl} \quad \text{及} \quad e_{kj}=\sum_{l=1}^{r}b_{kl}c_{lj}$$

DC 的(i, j)元为

$$\sum_{l=1}^{r}d_{il}c_{lj}=\sum_{l=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj}$$

且 AE 的(i, j)元为

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}e_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{r}b_{kl}c_{lj}\right)$$

由于

$$\sum_{l=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj}=\sum_{l=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}c_{lj}\right)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{r}b_{kl}c_{lj}\right)$$

可得

$$(AB)C=DC=AE=A(BC) \qquad \blacksquare$$

定理 1.4.1 中的代数法则看起来十分自然，因为它们与我们对实数的法则类似. 然而，矩阵的代数法则和实数的代数法则之间有着重要的区别. 其中一些差别在本节最后的练习 1 到练习 5 中加以说明.

▶**例 1** 若

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 1\\-3 & 2\end{bmatrix} \quad \text{及} \quad C=\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}$$

验证 $A(BC)=(AB)C$ 及 $A(B+C)=AB+AC$.

解

$$A(BC)=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 5\\16 & 11\end{bmatrix}$$

48 $$(AB)C=\begin{bmatrix}-4 & 5\\-6 & 11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 5\\16 & 11\end{bmatrix}$$

于是

$$A(BC)=\begin{bmatrix}6 & 5\\16 & 11\end{bmatrix}=(AB)C$$

$$A(B+C)=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\-1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 7\\5 & 15\end{bmatrix}$$

$$AB+AC=\begin{bmatrix}-4 & 5\\-6 & 11\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 2\\11 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 7\\5 & 15\end{bmatrix}$$

因此

$$A(B+C)=AB+AC \qquad ◀$$

记号 由于$(AB)C=A(BC)$，因此可以省略圆括号，并写为 ABC. 对四个或更多矩阵的乘积，这个结论也是成立的. 当一个 $n\times n$ 矩阵与自身相乘有限次时，使用幂记号表示比较方便. 因此，若 k 为一个正整数，则

$$A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k次}$$

▶**例 2** 若

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = AAA = AA^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

一般地

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}$$ ◀

应用 1：一个婚姻状况计算的简单模型

某个城镇中，每年有 30% 的已婚女性离婚，20% 的单身女性结婚. 城镇中有 8 000 位已婚女性和 2 000 位单身女性. 假设所有女性的总数为一常数，1 年后，有多少已婚女性和单身女性呢？2 年后呢？ 49

解 可用如下方式构造矩阵 A. 矩阵 A 的第一行元素分别为 1 年后仍处于婚姻状态的已婚女性和已婚的单身女性的百分比. 第二行元素分别为 1 年后离婚的已婚女性和未婚的单身女性的百分比. 因此

$$A = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{bmatrix}$$

若令 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 8\,000 \\ 2\,000 \end{bmatrix}$，则 1 年后已婚女性和单身女性人数可以用 A 乘以 $\boldsymbol{x}$ 计算.

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8\,000 \\ 2\,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\,000 \\ 4\,000 \end{bmatrix}$$

1 年后将有 6 000 位已婚女性，4 000 位单身女性. 要求 2 年后已婚女性和单身女性的数量，计算

$$A^2\boldsymbol{x} = A(A\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6\,000 \\ 4\,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\,000 \\ 5\,000 \end{bmatrix}$$

2 年后，一半的女性将为已婚，一半的女性将为单身. 一般地，n 年后已婚女性和单身女性的数量可由 $A^n\boldsymbol{x}$ 求得.

应用 2：生态学：海龟的种群统计学

管理和保护很多野生物种依赖于我们模型化动态种群的能力. 一个经典的模型化方

法是将物种的生命周期划分为几个阶段．该模型假设每一阶段种群的大小仅依赖于雌性的数量，并且每一个雌性个体从一年到下一年存活的概率仅依赖于它在生命周期中的阶段，而并不依赖于个体的实际年龄．例如，我们考虑一个 4 个阶段的模型来分析海龟(图 1.4.1)的动态种群．

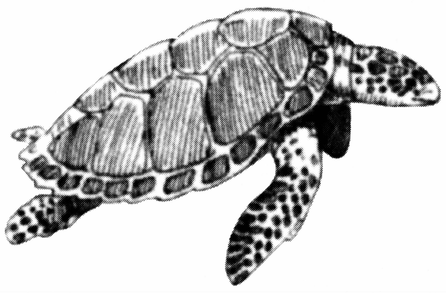


图 1.4.1　海龟

在每一个阶段，我们估计出 1 年中存活的概率，并用每年期望的产卵量近似给出繁殖能力的估计．这些结果在表 4 中给出．在每一阶
50 段名称后的圆括号中给出该阶段近似的年龄．

表 1　海龟种群统计学的 4 个阶段

阶段编号	描述(年龄以年为单位)	年存活率	年产卵量
1	卵、孵化期(＜1)	0.67	0
2	幼年和未成年期(1～21)	0.74	0
3	初始繁殖期(22)	0.81	127
4	成熟繁殖期(23～54)	0.81	79

若 d_i 表示第 i 个阶段持续的时间，s_i 为该阶段每年的存活率，那么在第 i 阶段中，下一年仍然存活的比例将为

$$p_i = \left(\frac{1 - s_i^{d_i - 1}}{1 - s_i^{d_i}}\right) s_i \tag{1}$$

而下一年转移到第 $i+1$ 个阶段时，可以存活的比例应为

$$q_i = \frac{s_i^{d_i}(1 - s_i)}{1 - s_i^{d_i}} \tag{2}$$

若令 e_i 表示阶段 $i(i=2, 3, 4)$1 年中平均的产卵量，并构造矩阵

$$L = \begin{bmatrix} p_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ q_1 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & p_4 \end{bmatrix} \tag{3}$$

则 L 可以用于预测以后每阶段海龟的数量．形如(3)的矩阵称为**莱斯利**(Leslie)**矩阵**，相应的种群模型通常称为**莱斯利种群模型**．利用表 1 给出的数字，模型的莱斯利矩阵为

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 127 & 79 \\ 0.67 & 0.739\,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.000\,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.81 & 0.809\,7 \end{bmatrix}$$

假设初始时种群在各个阶段的数量分别为 200 000，300 000，500 和 1 500．若将这个初始种群数量表示为向量 $\boldsymbol{x}_0$，1 年后各个阶段的种群数量可如下计算：

$$x_1 = Lx_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 127 & 79 \\ 0.67 & 0.7394 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0006 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.81 & 0.8097 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200\,000 \\ 300\,000 \\ 500 \\ 1\,500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 182\,000 \\ 355\,820 \\ 180 \\ 1\,620 \end{bmatrix}$$ 51

(上述结果已经四舍五入到最近的整数了.)为求得 2 年后种群数量向量，再次乘以矩阵 L.

$$x_2 = Lx_1 = L^2 x_0$$

一般地，k 年后种群数量可通过计算向量 $x_k = L^k x_0$ 求得. 为观察长时间的趋势，我们计算 x_{10}，x_{25}，x_{50}. 结果归纳在表 2 中. 这个模型预测，繁殖期的海龟数量将在 50 年后减少 80%.

表 2　海龟种群预测

阶段编号	初始种群数量	10 年后	25 年后	50 年后	100 年后
1	200 000	115 403	75 768	37 623	9 276
2	300 000	331 274	217 858	108 178	26 673
3	500	215	142	70	17
4	1 500	1 074	705	350	86

一个七阶段的种群动态模型在文献[1]中进行了描述. 我们将在本章最后的练习中使用七阶段模型计算. 文献[2]为 Leslie 最初的文献.

参考文献

1. Crouse，Deborah T.，Larry B. Crowder，and Hal Caswell，"A Stage-Based Population Model for Loggerhead Sea Turtles and Implications for Conservation"，*Ecology*，68(5)，1987.

2. Leslie，P. H.，"On the Use of Matrices in Certain Population Mathematics"，*Biometrika*，33，1945.

单位矩阵

正如数 1 为实数乘法中的单位元一样，也存在一个特殊矩阵 I 是矩阵乘法中的单位元，即

$$IA = AI = A \tag{4}$$

对任意 $n\times n$ 矩阵 A 都成立. 容易验证，若我们定义 I 为一个主对角元素均为 1、其他元素均为 0 的 $n\times n$ 矩阵，则对任意的 $n\times n$ 矩阵 A，I 满足(4). 更为正式地，我们有如下定义.

定义　$n\times n$ 的**单位矩阵**(identity matrix)为矩阵 $I=(\delta_{ij})$，其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & 当\ i = j \\ 0 & 当\ i \neq j \end{cases}$$ 52

作为一个例子，我们验证公式(4)在 $n=3$ 时的情形.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

且

$$\begin{bmatrix}3&4&1\\2&6&3\\0&1&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4&1\\2&6&3\\0&1&8\end{bmatrix}$$

一般地，若 B 为任一 $m\times n$ 矩阵，且 C 为任一 $n\times r$ 矩阵，则

$$BI=B \quad 且 \quad IC=C$$

$n\times n$ 单位矩阵 I 的列向量为用于定义 n 维欧几里得坐标空间的标准向量．I 的第 j 列向量的标准记号为 $\boldsymbol{e}_j$，而不是通常的 $\boldsymbol{i}_j$．因此，$n\times n$ 单位矩阵可写为

$$I=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$$

矩阵的逆

对一个实数 a，如果存在一个数 b 使得 $ab=1$，则称它有关于乘法的逆元．任何非零的数 a 均有一个乘法逆元 $b=\frac{1}{a}$．如下定义将这个概念推广到一般矩阵乘法的逆．

定义 若存在一个矩阵 B 使得 $AB=BA=I$，则称 $n\times n$ 矩阵 A 为**非奇异的**(nonsingular)或**可逆的**(invertible)．矩阵 B 称为 A 的**乘法逆元**(multiplicative inverse)．

若 B 和 C 均为 A 的乘法逆元，则

$$B=BI=B(AC)=(BA)C=IC=C$$

因此，一个矩阵最多有一个乘法逆元．我们将非奇异矩阵 A 的乘法逆元简称为 A 的*逆*(inverse)，并记为 A^{-1}．

▶**例 3** 矩阵

$$\begin{bmatrix}2&4\\3&1\end{bmatrix} \quad 和 \quad \begin{bmatrix}-\frac{1}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{3}{10}&-\frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

互为逆元，因为

53

$$\begin{bmatrix}2&4\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{3}{10}&-\frac{1}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

且

$$\begin{bmatrix}-\frac{1}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{3}{10}&-\frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$ ◀

▶**例 4** 3×3 矩阵

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix} \quad 和 \quad \begin{bmatrix}1&-2&5\\0&1&-4\\0&0&1\end{bmatrix}$$

是互逆的，因为

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&5\\0&1&-4\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

且

$$\begin{bmatrix}1&-2&5\\0&1&-4\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

例 5 矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$$

没有逆．事实上，若 B 为任一 2×2 矩阵，则

$$BA=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}&0\\b_{21}&0\end{bmatrix}$$

因此，BA 不可能等于 I.

定义 一个 $n\times n$ 矩阵若不存在乘法逆元，则称为**奇异的**(singular).

注意 只有方阵有乘法递元．对于非方阵，不应使用术语**奇异**或**非奇异**.

我们通常使用非奇异矩阵的乘积．可以证明，任意非奇异矩阵的乘积是非奇异的．下面的定理刻画了两个非奇异矩阵 A 和 B 的乘积之逆与 A 和 B 的逆之乘积间的关系.

定理 1.4.2 若 A 和 B 为非奇异的 $n\times n$ 矩阵，则 AB 也为非奇异的，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. 54

证

$$(B^{-1}A^{-1})AB=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}B=I$$
$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AA^{-1}=I$$

由此可得，若 A_1，…，A_k 均为 $m\times n$ 非奇异矩阵，则乘积 $A_1A_2\cdots A_k$ 为非奇异的，且

$$(A_1A_2\cdots A_k)^{-1}=A_k^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

下一节我们将研究如何确定矩阵是否有乘法逆元，还将学习求非奇异矩阵逆的一个方法.

转置的代数法则

在矩阵的转置中有四个代数法则.

转置的代数法则

1. $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$
2. $(\alpha A)^{\mathrm{T}}=\alpha A^{\mathrm{T}}$
3. $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$
4. $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

前三个法则是显然的，我们将它们留给读者验证．为证明第四个法则，仅需证明$(AB)^{\mathrm{T}}$ 和 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 的(i,j)元素相等．若 A 为一 $m\times n$ 矩阵，则要使矩阵乘法可以进行，矩阵 B 必有 n 行．$(AB)^{\mathrm{T}}$ 的(i,j)元素为 AB 的(j,i)元素．该元素可由 A 的第 j 行向量与 B 的第 i 列向量相乘求得．

$$\vec{\boldsymbol{a}}_j\boldsymbol{b}_i=(a_{j1},a_{j2},\cdots,a_{jn})\begin{bmatrix}b_{1i}\\b_{2i}\\\vdots\\b_{ni}\end{bmatrix}=a_{j1}b_{1i}+a_{j2}b_{2i}+\cdots+a_{jn}b_{ni} \tag{5}$$

$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 的(i,j)元素可由 B^{T} 的第 i 行乘以 A^{T} 的第 j 列求得．因为 B^{T} 的第 i 行为 B 的第 i 列的转置，A^{T} 的第 j 列为 A 的第 j 行的转置，所以 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 的(i,j)元素为

$$\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}}\vec{\boldsymbol{a}}_j^{\mathrm{T}}=(b_{1i},b_{2i},\cdots,b_{ni})\begin{bmatrix}a_{j1}\\a_{j2}\\\vdots\\a_{jn}\end{bmatrix}=b_{1i}a_{j1}+b_{2i}a_{j2}+\cdots+b_{ni}a_{jn} \tag{6}$$

55 由(5)和(6)可得$(AB)^{\mathrm{T}}$ 和 $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 的(i,j)元素相等．

下面的例子说明了最后一个证明的思想．

▸**例 6** 令

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&3&5\\2&4&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&2\\2&1&1\\5&4&1\end{bmatrix}$$

注意到 AB 的(3，2)元素由 A 的第 3 行和 B 的第 2 列求得．

$$AB=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&3&5\\\mathbf{2}&\mathbf{4}&\mathbf{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\mathbf{0}&2\\2&\mathbf{1}&1\\5&\mathbf{4}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&6&5\\34&23&14\\15&\mathbf{8}&9\end{bmatrix}$$

当乘积转置后，AB 的(3，2)元素成为$(AB)^{\mathrm{T}}$ 的(2，3)元素．

$$(AB)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}10&34&15\\6&23&\mathbf{8}\\5&14&9\end{bmatrix}$$

另一方面，$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ 的(2，3)元素可由 B^{T} 的第 2 行和 A^{T} 的第 3 列求得．

$$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&2&5\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{4}\\2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&\mathbf{2}\\2&3&\mathbf{4}\\1&5&\mathbf{1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&34&15\\6&23&\mathbf{8}\\5&14&9\end{bmatrix}$$

这两种情况下计算(3，2)元素的算术运算是相同的． ◂

对称矩阵和网络

回顾若 $A^{\mathrm{T}}=A$，则矩阵 A 是对称矩阵．

在一类关于网络的应用问题中，即可导出对称矩阵．这种问题通常使用数学领域中

的图论(graph theory)进行求解.

应用 3：网络和图

图论是应用数学中的一个重要领域. 事实上所有的应用科学中都用到图论构造模型问题. 图论在通信网络中更为有用.

一个图(graph)定义为**顶点**(vertex)和无序的顶点对(或称为**边**(edge))的集合. 图 1.4.2 给出了一个图的几何表示. 我们可以将顶点 V_1，V_2，V_3，V_4，V_5 看成通信网络的结点.

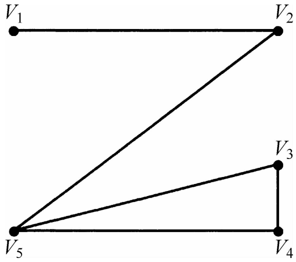


图 1.4.2

将两个顶点互相连接的线段对应于边，如下表示：

$$\{V_1,V_2\},\{V_2,V_5\},\{V_3,V_4\},\{V_3,V_5\},\{V_4,V_5\}$$

每条边表示网络中两个结点之间有直接通信链路.

一个实际的通信网络可能包含大量的结点和边. 事实上，如果有几百万个顶点，网络的图形将变得十分混乱. 另一个方法是使用矩阵来表示网络. 如果图共包含 n 个顶点，可定义一个 $n\times n$ 的矩阵 A 为 56

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{如果}\{V_i,V_j\}\text{是图的一条边}\\ 0 & \text{如果没有边连接顶点 } V_i \text{ 和 } V_j\end{cases}$$

矩阵 A 称为图的**邻接矩阵**(adjacency matrix). 图 1.4.2 的邻接矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&1&0&1\\0&1&1&1&0\end{bmatrix}$$

注意矩阵 A 是对称的. 事实上，任何邻接矩阵必然是对称的，因为如果$\{V_i, V_j\}$是图的一条边，则 $a_{ij}=a_{ji}=1$，否则如果没有边连接顶点 V_i 和 V_j，则 $a_{ij}=a_{ji}=0$. 在每种情况，$a_{ij}=a_{ji}$.

可以将图上的**路**(walk)看成连接一个顶点到另一个顶点的边的序列. 例如，图 1.4.2 的边$\{V_1, V_2\}$，$\{V_2, V_5\}$就表示从顶点 V_1 到顶点 V_5 的一条路. 称该路的长度为 2，因为它包含了两条边. 一个简单的表示路的方法是将顶点间的移动用箭头表示. 因此 $V_1\rightarrow V_2\rightarrow V_5$ 表示从 V_1 到 V_5 长度为 2 的路. 类似地，$V_4\rightarrow V_5\rightarrow V_2\rightarrow V_1$ 表示从 V_4 到 V_1 长度为 3 的路. 一条路可能多次经过同一条边. 例如 $V_5\rightarrow V_3\rightarrow V_5\rightarrow V_3$ 就是一条从 V_5 到 V_3 长度为 3 的路. 一般地，通过将邻接矩阵乘幂，可以求任意两顶点间给定长度的路的条数.

定理 1.4.3 设 A 为某图的 $n\times n$ 邻接矩阵，且 $a_{ij}^{(k)}$ 表示 A^k 的(i, j)元素，则 $a_{ji}^{(k)}$ 等于顶点 V_i 和 V_j 间长度为 k 的路的条数.

证 采用数学归纳法. 当 $k=1$ 时，由邻接矩阵的定义可知，a_{ij} 表示从顶点 V_i 到 V_j 长度为 1 的路的数量. 假设对某个 m，矩阵 A^m 中的每一元素表示相应两顶点间长度为 m 的路的数量. 因此，$a_{il}^{(m)}$ 表示从顶点 V_i 到 V_l 长度为 m 的路的数量. 如果有一条边$\{V_l$， 57

$V_j\}$，则 $a_{il}^{(m)}a_{lj}=a_{il}^{(m)}$ 表示从顶点 V_i 到 V_j 长度为 $m+1$ 的形如

$$V_i\to\cdots\to V_l\to V_j$$

的路的数量. 另一方面，如果$\{V_l, V_j\}$不是一条边，则从 V_i 到 V_j 没有长度为 $m+1$ 的路，且

$$a_{il}^{(m)}a_{lj}=a_{il}^{(m)}\cdot 0=0$$

由此得到，从 V_i 到 V_j 长度为 $m+1$ 的所有路的总数为

$$a_{i1}^{(m)}a_{1j}+a_{i2}^{(m)}a_{2j}+\cdots+a_{in}^{(m)}a_{nj}$$

而这恰为 A^{m+1} 的(i, j)元素. ■

▶**例 7** 为求图 1.4.2 中任何两个顶点间长度为 3 的路的数量，我们只需计算

$$A^3=\begin{bmatrix}0&2&1&1&0\\2&0&1&1&4\\1&1&2&3&4\\1&1&3&2&4\\0&4&4&4&2\end{bmatrix}$$

因此，从 V_3 到 V_5 长度为 3 的路的数量为 $a_{35}^{(3)}=4$. 注意，矩阵 A^3 是对称的，这说明了从顶点 V_i 到 V_j 长度为 3 的路之条数与从顶点 V_j 到 V_i 的路之条数相同. ◀

1.4 节练习

1. 说明为什么下列代数法则中将实数 a 和 b 用 $n\times n$ 矩阵 A 和 B 替换后一般是不成立的.
   (a) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$　　(b) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
2. 若将习题 1 法则中的实数 a 替换为 $n\times n$ 矩阵 A，将 b 替换为 $n\times n$ 单位矩阵 I，它们是否成立？
3. 求 2×2 非零矩阵 A 和 B，满足 $AB=O$.
4. 求非零矩阵 A，B，C，使得
$$AC=BC\quad\text{且}\quad A\neq B$$
5. 矩阵
$$A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&-1\end{bmatrix}$$
   有性质 $A^2=O$. 是否存在一个 2×2 的对称非零矩阵满足这个性质？证明你的结论.
6. 对 2×2 矩阵，证明矩阵乘法的结合律，即令
$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{bmatrix}$$
   并证明

58

$$(AB)C=A(BC)$$

7. 令
$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$
   求 A^2 和 A^3. A^n 是什么？
8. 令

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

求 A^2 和 A^3. A^{2n} 和 A^{2n+1} 是什么?

9\. 令

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

证明当 $n\geqslant 4$ 时 $A^n=O$.

10\. 设 A 和 B 为对称 $n\times n$ 矩阵. 对下列每一情形，确定给出的矩阵是否必为对称的或者是非对称的：

(a) $C=A+B$　　(b) $D=A^2$

(c) $E=AB$　　(d) $F=ABA$

(e) $G=AB+BA$　　(f) $H=AB-BA$

11\. 设 C 是非对称 $n\times n$ 矩阵. 对下列每一情形，确定给出的矩阵是否必为对称矩阵或非对称矩阵：

(a) $A=C+C^{\mathrm{T}}$　　(b) $B=C-C^{\mathrm{T}}$

(c) $D=C^{\mathrm{T}}C$　　(d) $E=C^{\mathrm{T}}C-CC^{\mathrm{T}}$

(e) $F=(I+C)(I+C^{\mathrm{T}})$　　(f) $G=(I+C)(I-C^{\mathrm{T}})$

12\. 令

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

证明：若 $d=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$，则

$$A^{-1}=\frac{1}{d}\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$$

13\. 利用习题 12 的结论求出下列每一个矩阵的逆矩阵.

(a) $\begin{bmatrix}7 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$　　(b) $\begin{bmatrix}3 & 5\\ 2 & 3\end{bmatrix}$　　(c) $\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$

14\. 设 A 和 B 是 $n\times n$ 矩阵. 证明：如果

$$AB=A \text{ 且 } B\neq I$$

则 A 必为奇异矩阵.

15\. 令 A 为非奇异矩阵，证明 A^{-1} 也是非奇异的且 $(A^{-1})^{-1}=A$.

16\. 证明：若 A 为非奇异的，则 A^{T} 为非奇异的且

$$(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$$

[提示：$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.]

17\. 令 A 为一 $n\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的向量. 证明：如果 $A\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{y}$ 且 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$，则 A 必为奇异的.

18\. 令 A 为一非奇异的 $n\times n$ 矩阵. 用数学归纳法证明 A^m 为非奇异的，且对 $m=1, 2, 3, \cdots$，

$$(A^m)^{-1}=(A^{-1})^m$$

19. 设 A 为 $n\times n$ 矩阵. 证明：如果 $A^2=O$，则 $I-A$ 是非奇异的且 $(I-A)^{-1}=I+A$.
20. 设 A 为 $n\times n$ 矩阵. 证明：如果 $A^{k+1}=O$，则 $I-A$ 是非奇异的，且 $(I-A)^{-1}=I+A+A^2+\cdots+A^k$.
21. 给定 $R=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，证明 R 是非奇异的且 $R^{-1}=R^{\mathrm{T}}$.
22. 如果 $A^2=I$，则称 $n\times n$ 矩阵 A 是一个对合. 证明：如果 G 是任一形如 $G=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$ 的矩阵，则 G 是一个对合.
23. 设 $\boldsymbol{u}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个单位向量(即 $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}=1$)，令 $H=I-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$. 证明 H 是一个对合.
24. 如果 $A^2=A$，则称矩阵 A 是幂等的. 证明下列每一个矩阵都是幂等的.

(a) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

59

25. 设 A 是一个幂等矩阵.
   (a)证明 $I-A$ 也是幂等的.
   (b)证明 $I+A$ 是非奇异的且 $(I+A)^{-1}=I-\frac{1}{2}A$.
26. 设 D 是 $n\times n$ 对角矩阵，其对角元为 0 或 1.
   (a)证明 D 是幂等的.
   (b)证明：如果 X 是非奇异矩阵且 $A=XDX^{-1}$，则 A 是幂等的.
27. 设 A 是一个对合矩阵，并设 $B=\frac{1}{2}(I+A)$，$C=\frac{1}{2}(I-A)$.
   证明 B 和 C 都是幂等的且 $BC=O$.
28. 令 A 为一 $m\times n$ 矩阵. 证明 $A^{\mathrm{T}}A$ 和 AA^{T} 均为对称的.
29. 令 A 和 B 均为 $n\times n$ 的对称矩阵. 证明 $AB=BA$ 当且仅当 AB 对称.
30. 令 A 为一 $n\times n$ 矩阵，且令

$$B=A+A^{\mathrm{T}} \quad 和 \quad C=A-A^{\mathrm{T}}$$

   (a)证明 B 为对称的，C 为反对称的.
   (b)证明每一 $n\times n$ 矩阵均可表示为一个对称矩阵和一个反对称矩阵的和.
31. 在应用 2 中，3 年后有多少已婚女性和单身女性？
32. 给定矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

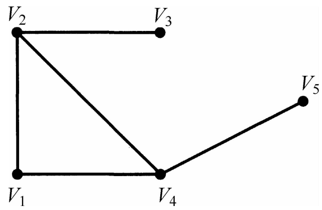
   (a)画一个以 A 为邻接矩阵的图，并对图的顶点进行标注.
   (b)通过检查图，确定从 V_2 到 V_3 和从 V_2 到 V_5 长度为 2 的路的条数.
   (c)计算 A^3 的第 2 列，并由此确定从 V_2 到 V_3 和从 V_2 到 V_5 长度为 3 的路的条数.

33. 如右图.

(a)确定图的邻接矩阵 A.

(b)计算 A^2. A^2 的第一行告诉你关于从 V_1 开始长度为 2 的路的什么信息?

(c)计算 A^3. 从 V_2 到 V_4 有几条长度为 3 的路? 从 V_2 到 V_4 有几条长度小于或等于 3 的路?



对下列每一个条件命题，如果命题总是为真则答案为真，反之则为假. 在命题为真的情况下，解释或证明你的答案. 在命题为假的情况下，给出可以证明命题不总为真的例子.

34. 对某个非零向量 $\mathbf{x}$，如果 $A\mathbf{x}=B\mathbf{x}$，则矩阵 A 和 B 必相等.

35. 如果 A 和 B 为奇异的 $n\times n$ 矩阵，是 $A+B$ 也为奇异的.

36. 如果 A 和 B 为非奇异矩阵，则 $(AB)^{\mathrm{T}}$ 为非奇异矩阵，且 $((AB)^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}(B^{-1})^{\mathrm{T}}$.

1.5 初等矩阵

本节我们将介绍通过矩阵乘法，而不是使用行运算，求解线性方程组. 给定一线性方程组$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$，可以在其两端同乘一系列特殊矩阵，以得到一个等价的行阶梯形方程组. 我们将使用的这些特殊矩阵称为*初等矩阵*(elementary matrix). 它们将用来观察如何计算非奇异矩阵的逆矩阵，以及得到一个重要的矩阵分解. 下面从考虑线性方程组两端同乘一个非奇异矩阵的作用开始. 60

等价方程组

给定一 $m\times n$ 线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$，可以通过在其两端同乘一个非奇异的 $m\times m$ 矩阵 M，得到它的一个等价方程组.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

$$MA\mathbf{x} = M\mathbf{b} \tag{2}$$

显然，任何(1)的解也将为(2)的解. 另一方面，如果 $\hat{\mathbf{x}}$ 为(2)的解，则

$$M^{-1}(MA\hat{\mathbf{x}}) = M^{-1}(M\mathbf{b})$$
$$A\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$$

因此，这两个方程组是等价的.

为获得一个容易求解的等价方程组，我们可以将一系列非奇异的矩阵 E_1，…，E_k 应用到方程 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 的两端，从而得到一个较为简单的方程组：

$$U\mathbf{x} = \mathbf{c}$$

其中 $U=E_k\cdots E_1A$，且 $\mathbf{c}=E_k\cdots E_1\mathbf{b}$. 由于 $M=E_k\cdots E_1$ 为非奇异的，因此新的方程组和原有方程组是等价的. 然而，因为 M 为非奇异矩阵的乘积，故它也为非奇异的.

下面将说明三个初等行运算可以用 A 左乘一个非奇异矩阵来实现.

初等矩阵

如果从单位矩阵 I 开始，只进行一次初等行运算，得到的矩阵称为*初等*(elementary)矩阵.

分别对应于三类初等行运算，有三类初等矩阵.

类型 Ⅰ. 第Ⅰ类初等矩阵由交换矩阵 I 的两行得到.

▶**例 1** 令

$$E_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

E_1 就是一个第Ⅰ类初等矩阵，因为它可由交换矩阵 I 的前两行得到. 令 A 是一个 3×3 的矩阵，则

$$E_1A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$$

$$AE_1=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{12}&a_{11}&a_{13}\\a_{22}&a_{21}&a_{23}\\a_{32}&a_{31}&a_{33}\end{bmatrix}$$

61

A 左乘 E_1 就是交换矩阵 A 的第一行和第二行，A 右乘 E_1 等价于交换第一列和第二列的初等列运算. ◀

类型 Ⅱ. 第Ⅱ类初等矩阵由单位矩阵 I 的某一行乘以一个非零常数得到.

▶**例 2**

$$E_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$$

为第Ⅱ类初等矩阵. 若 A 为一 3×3 矩阵，则

$$E_2A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\3a_{31}&3a_{32}&3a_{33}\end{bmatrix}$$

$$AE_2=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&3a_{13}\\a_{21}&a_{22}&3a_{23}\\a_{31}&a_{32}&3a_{33}\end{bmatrix}$$

左乘 E_2 就是将矩阵的第三行乘以 3 的初等行运算，右乘矩阵 E_2 就是将矩阵的第三列乘以 3 的初等列运算. ◀

类型 Ⅲ. 第Ⅲ类初等矩阵由矩阵 I 的某一行的倍数加到另一行得到.

▶**例 3**

$$E_3=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

为第Ⅲ类初等矩阵．若 A 为一 3×3 矩阵，则

$$E_3A=\begin{bmatrix}a_{11}+3a_{31} & a_{12}+3a_{32} & a_{13}+3a_{33}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

$$AE_3=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & 3a_{11}+a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & 3a_{21}+a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & 3a_{31}+a_{33}\end{bmatrix}$$

左乘 E_3 就是将矩阵的第三行的 3 倍加到矩阵的第一行，右乘 E_3 就是将矩阵的第一列的 3 倍加到第三列．

一般地，假设 E 为一 $n\times n$ 的初等矩阵．我们可以认为 E 是由 I 经过一个行运算或 62
一个列运算得到的．若 A 为一 $n\times r$ 的矩阵，A 左乘 E 的作用就是对 A 进行相应的行运算．若 B 为一 $m\times n$ 的矩阵，B 右乘 E 等价于对 B 进行相应的列运算．

定理 1.5.1 若 E 为一初等矩阵，则 E 是非奇异的，且 E^{-1} 为一与它同类型的初等矩阵．

证 若 E 为第Ⅰ类初等矩阵，且是 I 交换第 i 行和第 j 行得到的，则 E 可通过交换这两行回到 I．于是 $EE=I$，因此 E 为自逆的．若 E 为第Ⅱ类初等矩阵，且是由 I 的第 i 行乘以某非零标量 α 得到的，则 E 可通过将第 i 行或第 i 列乘以标量 $\dfrac{1}{\alpha}$ 得到单位矩阵．因此

$$E^{-1}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & O & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1/\alpha & & & \\ & & & & 1 & & \\ & O & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

最后，假设 E 为第Ⅲ类初等矩阵，且是由 I 的第 i 行的 m 倍加到第 j 行得到的．

$$E=\begin{bmatrix}1 & & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & O & \\ 0 & \cdots & 1 & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & m & \cdots & 1 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \text{第 } j \text{ 行}\\ \\ \\ \end{array}$$

则 E 可通过将第 j 行减去第 i 行的 m 倍回到单位矩阵．因此

$$E^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & & O & \\ 0 & \cdots & 1 & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & -m & \cdots & 1 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

63 ■

定义 若存在一个有限初等矩阵的序列 E_1，E_2，…，E_k，使得

$$B = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A$$

则称 A 与 B 为**行等价的**(row equivalent).

换句话说，如果矩阵 B 可以由矩阵 A 经过有限次行运算得到，则 B 与 A 是行等价的. 特别地，当且仅当 $A\boldsymbol{x}=b$ 和 $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$ 是等价方程组时，两个增广矩阵$(A\mid\boldsymbol{b})$和$(B\mid\boldsymbol{c})$是行等价的.

容易得到以下行等价矩阵的性质：

Ⅰ. 若 A 与 B 是行等价的，则 B 与 A 是行等价的.

Ⅱ. 若 A 与 B 是行等价的，且 B 与 C 是行等价的，则 A 与 C 是行等价的.

性质Ⅰ可利用定理 1.5.1 证明. 性质Ⅰ和Ⅱ的具体证明留给读者作为练习.

定理 1.5.2(非奇异矩阵的等价条件) 令 A 为一 $n\times n$ 矩阵，则下列命题是等价的：

(a)A 是非奇异的.

(b)$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 仅有平凡解 $\boldsymbol{0}$.

(c)A 与 I 行等价.

证 我们首先证明(a)可推出(b). 若 A 是非奇异的，且 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 是 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个解，则

$$\hat{\boldsymbol{x}} = I\hat{\boldsymbol{x}} = (A^{-1}A)\hat{\boldsymbol{x}} = A^{-1}(A\hat{\boldsymbol{x}}) = A^{-1}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

因此 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 仅有平凡解. 然后我们证明(b)可推出(c). 若我们使用初等行运算，则方程组可以化为 $U\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的形式，其中 U 是行阶梯形的. 若 U 的某一个对角元素为 0，那么 U 的最后一行元素应全部为 0. 但此时，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 会等价于一个未知量的个数多于方程个数的方程组，因此，由定理 1.2.1 知，应存在非平凡解. 故 U 必为一个对角元素全为 1 的严格三角形矩阵. 于是 I 就是 A 的行最简形，因此 A 与 I 行等价.

最后，我们证明(c)可推出(a). 若 A 与 I 行等价，则必存在初等矩阵 E_1，E_2，…，E_k，使得

$$A = E_k E_{k-1} \cdots E_1 I = E_k E_{k-1} \cdots E_1$$

但由于 $E_i(i=1，\cdots，k)$是可逆的，乘积 $E_k E_{k-1}\cdots E_1$ 也可逆. 因此 A 为非奇异的，且

64 $$A^{-1} = (E_k E_{k-1} \cdots E_1)^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$$ ■

推论 1.5.3 当且仅当 A 非奇异时，n 个未知量 n 个方程的线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解.

证 若 A 为非奇异的，且 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 为 $A\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，则 $A\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}$，将其两端同乘 A^{-1}，可

得到 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 必等于 $A^{-1}\boldsymbol{b}$.

反之，若 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解 $\hat{\boldsymbol{x}}$，则我们说 A 不会是奇异的. 事实上，若 A 是奇异的，则方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 应有一个解 $\boldsymbol{z}\neq\boldsymbol{0}$. 但这将意味着 $\boldsymbol{y}=\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{z}$ 为 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的第二个解，因为

$$A\boldsymbol{y} = A(\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{z}) = A\hat{\boldsymbol{x}}+A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{b}$$

因此，若 $A\boldsymbol{x}=b$ 有唯一解，则 A 必为非奇异的. ■

若 A 为非奇异的，则 A 与 I 行等价，也即存在初等矩阵 E_1，…，E_k，使得

$$E_kE_{k-1}\cdots E_1A = I$$

这个方程两端右乘 A^{-1}，我们得到

$$E_kE_{k-1}\cdots E_1I = A^{-1}$$

因此，与将非奇异矩阵 A 转换为 I 相同的初等矩阵序列将把 I 转换为 A^{-1}. 这也就给出了一个求 A^{-1}的方法. 若将 A 和 I 写为增广形式，并利用初等行运算将其中的 A 转换为 I，则 I 将转换为 A^{-1}. 也就是说，增广矩阵$(A\mid I)$的行最简形为$(I\mid A^{-1})$.

▶**例 4** 求 A^{-1}，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 3\\ -1 & -2 & 0\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

解

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 1 & 3 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 4 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 6 & 1 & 3 & 1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 6 & 1 & 3 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\end{array}\right]$$ 65

因此

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$$ ◀

例 5 解方程组

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 12 \\ -x_1 - 2x_2 &= -12 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

解 这个方程组的系数矩阵为上一个例子中的 A. 方程组的解为

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ -12 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

对角矩阵和三角形矩阵

一个 $n\times n$ 矩阵 A，当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$，则称为上三角形的(upper triangular)；当 $i<j$时，$a_{ij}=0$，则称为下三角形的(lower triangular). 同时，如果 A 为上三角形的或下三角形的，又称为三角形的(triangular). 例如，3×3 矩阵

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad 和 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

均为三角形的，其中第一个是上三角形的，第二个是下三角形的.

一个三角形矩阵的对角线元素可能是 0. 然而，对严格三角形的线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，系数矩阵 A 必为对角元素非零的上三角形矩阵.

一个 $n\times n$ 的矩阵 A，当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=0$，则称为对角的(diagonal). 矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

66 均为对角的. 对角矩阵既是上三角形的又是下三角形的.

三角形分解

如果一个 $n\times n$ 的矩阵 A 可以仅利用行运算Ⅲ化简为严格上三角形的，则可将化简过程用矩阵分解表示. 我们用下面的例子说明如何进行.

例 6 令

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

下面仅利用行运算Ⅲ进行化简. 第一步用第二行减去第一行的 $\frac{1}{2}$ 倍，然后从第三行减去第一行的 2 倍.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & 5 \end{bmatrix}$$

为明确减去第一行的倍数，我们令 $l_{21}=\frac{1}{2}$，$l_{31}=2$．再消去(3，2)处的-9，则可完成消元过程.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

令 $l_{32}=-3$ 表示从第三行减去第二行的倍数．如果称结果矩阵为 U，并令

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

则容易验证

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 9 \end{bmatrix} = A$$ ◀

上例中的矩阵 L 为对角元素是 1 的下三角形矩阵．我们称 L 为单位下三角形矩阵(unit lower triangular)．将矩阵 A 分解为一个单位下三角形矩阵和一个严格上三角形矩阵 U 的乘积的过程，通常称为 LU 分解(LU factorization)．

为看到为什么例 6 中的分解可行，我们从初等矩阵的角度考察消元过程．对矩阵 A 进行的三个行运算可以表示为矩阵与初等矩阵相乘的形式：

$$E_3E_2E_1A = U \tag{3}$$ 67

其中

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

对应于消元过程的行运算．由于每一个初等矩阵均为非奇异的，可将方程(3)两端乘以它们的逆矩阵：

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}U$$

[我们用逆序乘方程两端，因为$(E_3E_2E_1)^{-1}=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}$.]然而，当采用这个顺序乘以逆矩阵时，乘子 l_{21}，l_{31}，l_{32}将填入它们乘积的对角线下方.

$$E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} = L$$

一般地，如果一个 $n\times n$ 矩阵 A 可以仅利用行运算Ⅲ化简为严格上三角形的，则 A 有一 LU 分解．矩阵 L 为单位下三角形矩阵，且若 $i>j$，则 l_{ij} 为消元过程中第 i 行减去第 j 行的倍数．

LU 分解在消元过程中十分有用．我们将在第 7 章中学习求解线性方程组的计算机方法时看到，这种方法特别有用．线性代数中很多重要内容都可看成是矩阵分解．在第 5～7 章中，我们将学习其他有趣的和重要的分解．

1.5 节练习

1. 下列哪个是初等矩阵？将每一初等矩阵进行分类．

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$　(b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$　(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. 求练习 1 中各矩阵的逆．对每一初等矩阵，验证它的逆为相同类型的初等矩阵．

3. 对下列每一对矩阵，求一个初等矩阵 E 使得 $EA=B$．

(a) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$　$B=\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$　$B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

(c) $A=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$　$B=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

4. 对下列每一对矩阵，求一个初等矩阵 E 使得 $AE=B$．

(a) $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$　$B=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

68 (b) $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$　$B=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $A=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$　$B=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

5. 给定

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

(a)求一个初等矩阵 E，使得 $EA=B$．

(b)求一个初等矩阵 F，使得 $FB=C$．

(c)C 与 A 行等价吗？试说明．

6. 给定

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(a)求初等矩阵 E_1，E_2，E_3，使得

$$E_3E_2E_1A = U$$

其中 U 为一上三角形矩阵.

(b)求矩阵 E_1，E_2，E_3 的逆，并令 $L=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}$. 矩阵 L 是何种类型的？验证 $A=LU$.

7. 给定

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

(a)将 A^{-1} 写为初等矩阵的乘积.

(b)将 A 写为初等矩阵的乘积.

8. 计算下列矩阵的 LU 分解.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$　(b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \\ -2 & 2 & 7 \end{bmatrix}$　(d) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ -6 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

9. 令

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(a)验证

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

(b)对下列 $\boldsymbol{b}$，利用 A^{-1}求解 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$.

(i)$\boldsymbol{b}=(1，1，1)^{\mathrm{T}}$　(ii)$\boldsymbol{b}=(1，2，3)^{\mathrm{T}}$　(iii)$\boldsymbol{b}=(-2，1，0)^{\mathrm{T}}$

10. 求下列矩阵的逆.

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$　(b) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$　(c) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$　(e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　(f) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & 3 \end{bmatrix}$　(h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

11. 给定

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad 和 \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

计算 A^{-1}，并用它：

(a)求一个 2×2 矩阵 X，使得 $AX=B$.

(b)求一个 2×2 矩阵 Y，使得 $YA=B$.

12. 给定

$$A=\begin{bmatrix}5&3\\3&2\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}6&2\\2&4\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}4&-2\\-6&3\end{bmatrix}$$

解下列矩阵方程：

(a) $AX+B=C$　　(b) $XA+B=C$

(c) $AX+B=X$　　(d) $XA+C=X$

13. 初等矩阵的转置和原初等矩阵类型相同吗？两个初等矩阵的乘积是否是初等矩阵？

14. 令 U 与 R 为 $n\times n$ 上三角形矩阵，且令 $T=UR$. 证明 T 也是上三角形矩阵，且 $t_{jj}=u_{jj}r_{jj}$，$j=1,\cdots,n$.

15. 令 A 为一 3×3 矩阵，并假设

$$2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2-4\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$$

方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有多少解？试说明. A 是否是非奇异的？试说明.

16. 令 A 为一 3×3 矩阵，并假设

$$\boldsymbol{a}_1=3\boldsymbol{a}_2-2\boldsymbol{a}_3$$

69 方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 是否有非平凡解？A 是否为非奇异的？试说明你的答案.

17. 令 A 和 B 为 $n\times n$ 的矩阵，并令 $C=A-B$. 证明：如果 $A\boldsymbol{x}_0=B\boldsymbol{x}_0$ 且 $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$，则 C 必为奇异的.

18. 令 A 和 B 为 $n\times n$ 的矩阵，并令 $C=AB$. 证明：如果 B 为奇异的，则 C 也必为奇异的. [提示：用定理 1.5.2.]

19. 令 U 为对角元素非零的 $n\times n$ 上三角形矩阵.

(a) 说明为什么 U 必为非奇异的.

(b) 说明为什么 U^{-1} 必为上三角形矩阵.

20. 令 A 为非奇异的 $n\times n$ 矩阵，且令 B 为一 $n\times r$ 矩阵. 证明 $(A\mid B)$ 的行最简形是 $(I\mid C)$，其中 $C=A^{-1}B$.

21. 一般地，矩阵乘法是不满足交换律的(即 $AB\neq BA$). 然而，在特定情况下，交换律是成立的. 证明：

(a) 如果 D_1 和 D_2 为 $n\times n$ 的对角矩阵，则 $D_1D_2=D_2D_1$.

(b) 如果 A 为一 $n\times n$ 的矩阵，且

$$B=a_0I+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_kA^k$$

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_k$ 均为标量，则 $AB=BA$.

22. 证明：若 A 为对称的非奇异矩阵，则 A^{-1} 也是对称的.

23. 证明：若 A 行等价于 B，则 B 行等价于 A.

24. (a) 证明：若 A 行等价于 B，且 B 行等价于 C，则 A 行等价于 C.

(b) 证明：任意两个非奇异的 $n\times n$ 矩阵是行等价的.

25. 设 A 和 B 是 $m\times n$ 矩阵，证明：如果 B 行等价于 A，且 U 为 A 的任何行阶梯形，则 B 行等价于 U.

26. 证明：B 行等价于 A 的充要条件是，存在非奇异矩阵 M，使得 $B=MA$.

27. 奇异矩阵 B 有可能行等价于非奇异矩阵 A 吗？试说明.

28. 给定向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^{n+1}$，定义 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵 V 为

$$v_{ij}=\begin{cases}1 & j=1\\ x_i^{j-1} & j=2,\cdots,n+1\end{cases}$$

称其为范德蒙德(Vandermonde)矩阵.

(a) 证明：如果

$$V\boldsymbol{c}=\boldsymbol{y}$$

且

$$p(x)=c_1+c_2x+\cdots+c_{n+1}x^n$$

则

$$p(x_i)=y_i,\quad i=1,2,\cdots,n+1$$

(b)假定 x_1，x_2，…，x_{n+1} 均不同．证明：如果 $\boldsymbol{c}$ 是 $V\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，则系数 c_1，c_2，…，c_n 必全为零，因此 V 必为非奇异的．

对下列每一个命题，如果命题总是为真则答案为真，反之则为假．在命题为真的情况下，解释或证明你的答案．在命题为假的情况下，举例说明命题不总为真．

29. 如果 A 行等价于 I 且 $AB=AC$，则 B 必等于 C．
30. 如果 E 和 F 是初等矩阵且 $G=EF$，则 G 是非奇异的．
31. 如果 A 是 4×4 矩阵且 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_3+2\boldsymbol{a}_4$，则 A 必为奇异的．
32. 如果 A 行等价于 B 和 C，则 A 行等价于 $B+C$．

1.6 分块矩阵

通常，将矩阵看成由若干子矩阵复合而成很有用．一个矩阵 C 可通过在其行中画一条横线，并在其列中画一条竖线划分为较小的矩阵．这种较小的矩阵通常称为块(block)．例如，令

$$C=\begin{bmatrix}1&-2&4&1&3\\2&1&1&1&1\\3&3&2&-1&2\\4&6&2&2&4\end{bmatrix}$$ 70

如果在第二行和第三行之间画一条横线、在第三列和第四列之间画一条竖线，则矩阵 C 被划分为四个子矩阵，即 C_{11}，C_{12}，C_{21}，C_{22}．

$$\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}\\C_{21}&C_{22}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|cc}1&-2&4&1&3\\2&1&1&1&1\\\hline 3&3&2&-1&2\\4&6&2&2&4\end{array}\right]$$

一种有用的方法是将矩阵按列分划．例如，设

$$B=\begin{bmatrix}-1&2&1\\2&3&1\\1&4&1\end{bmatrix}$$

可将 B 划分为三个列子矩阵：

$$B=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=\left[\begin{array}{c|c|c}-1&2&1\\2&3&1\\1&4&1\end{array}\right]$$

假设我们给定一个有三列的矩阵 A，则乘积 AB 可以看成一个分块乘法，矩阵 B 的每一块均乘以 A，并且结果矩阵也有三块，即 $A\boldsymbol{b}_1$，$A\boldsymbol{b}_2$，$A\boldsymbol{b}_3$；也就是说

$$AB=A(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=(A\boldsymbol{b}_1,A\boldsymbol{b}_2,A\boldsymbol{b}_3)$$

例如，若

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

$$A\boldsymbol{b}_1=\begin{bmatrix}6\\ -2\end{bmatrix},\quad A\boldsymbol{b}_2=\begin{bmatrix}15\\ -1\end{bmatrix},\quad A\boldsymbol{b}_3=\begin{bmatrix}5\\ 1\end{bmatrix}$$

因此

$$A(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)=\left[\begin{array}{r|r|r}6 & 15 & 5\\ -2 & -1 & 1\end{array}\right]$$

一般地，如果 A 为一 $m\times n$ 矩阵，而 B 为一按列划分的 $n\times r$ 矩阵$(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_r)$，那么，$A$ 乘 B 的分块乘法由下式给出：

$$\boxed{AB=(A\boldsymbol{b}_1,\ A\boldsymbol{b}_2,\ \cdots,\ A\boldsymbol{b}_r)}$$

特别地，

71 $$(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=A=AI=(A\boldsymbol{e}_1,\cdots,A\boldsymbol{e}_n)$$

令 A 为一 $m\times n$ 矩阵．如果将 A 按行分块，那么

$$A=\begin{bmatrix}\vec{\boldsymbol{a}}_1\\ \vec{\boldsymbol{a}}_2\\ \vdots\\ \vec{\boldsymbol{a}}_m\end{bmatrix}$$

如果 B 为一 $n\times r$ 矩阵，乘积 AB 的第 i 行是由 A 的第 i 行乘以 B 得到的．因此，AB 的第 i 行为 $\vec{\boldsymbol{a}}_iB$．一般地，乘积 AB 可写为如下分块行的形式：

$$AB=\begin{bmatrix}\vec{\boldsymbol{a}}_1B\\ \vec{\boldsymbol{a}}_2B\\ \vdots\\ \vec{\boldsymbol{a}}_mB\end{bmatrix}$$

为说明这个结论，我们来看一个例子．设

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 3 & 4\\ 1 & 7\end{bmatrix}\quad 和\quad B=\begin{bmatrix}3 & 2 & -3\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

则

$$\vec{\boldsymbol{a}}_1B=[1\quad 9\quad -1]$$
$$\vec{\boldsymbol{a}}_2B=[5\quad 10\quad -5]$$
$$\vec{\boldsymbol{a}}_3B=[-4\quad 9\quad 4]$$

这就是乘积 AB 的行向量．

$$AB=\begin{bmatrix}\vec{\boldsymbol{a}}_1B\\ \vec{\boldsymbol{a}}_2B\\ \vec{\boldsymbol{a}}_3B\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{rrr}1 & 9 & -1\\ \hline 5 & 10 & -5\\ \hline -4 & 9 & 4\end{array}\right]$$

下面我们考虑如何使用更为一般的分块来计算 A 和 B 的乘积 AB.

分块乘法

令 A 为一 $m\times n$ 矩阵，且 B 为一 $n\times r$ 矩阵. 经常将 A 和 B 进行分块，并将 A 和 B 的乘积表示为它们的子矩阵乘积的形式. 考虑如下四种情形. 72

情形 1：$B=[B_1\quad B_2]$，其中 B_1 为一 $n\times t$ 矩阵，且 B_2 为一 $n\times(r-t)$矩阵.

$$\begin{aligned} AB &= A(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_t,\boldsymbol{b}_{t+1},\cdots,\boldsymbol{b}_r) \\ &= (A\boldsymbol{b}_1,\cdots,A\boldsymbol{b}_t,A\boldsymbol{b}_{t+1},\cdots,A\boldsymbol{b}_r) \\ &= (A(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_t),A(\boldsymbol{b}_{t+1},\cdots,\boldsymbol{b}_r)) \\ &= [AB_1\quad AB_2] \end{aligned}$$

因此

$$\boxed{A[B_1\quad B_2]=[AB_1\quad AB_2]}$$

情形 2：$A=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}$，其中 A_1 为一 $k\times n$ 矩阵，且 A_2 为一$(m-k)\times n$ 矩阵.

$$\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}B=\left[\begin{array}{c}\vec{\boldsymbol{a}}_1\\ \vdots\\ \vec{\boldsymbol{a}}_k\\ \hline \vec{\boldsymbol{a}}_{k+1}\\ \vdots\\ \vec{\boldsymbol{a}}_m\end{array}\right]B=\left[\begin{array}{c}\vec{\boldsymbol{a}}_1B\\ \vdots\\ \vec{\boldsymbol{a}}_kB\\ \hline \vec{\boldsymbol{a}}_{k+1}B\\ \vdots\\ \vec{\boldsymbol{a}}_mB\end{array}\right]$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{\boldsymbol{a}}_1\\ \vdots\\ \vec{\boldsymbol{a}}_k\end{bmatrix}B\\ \begin{bmatrix}\vec{\boldsymbol{a}}_{k+1}\\ \vdots\\ \vec{\boldsymbol{a}}_m\end{bmatrix}B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1B\\A_2B\end{bmatrix}$$

因此

$$\boxed{\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}B=\begin{bmatrix}A_1B\\A_2B\end{bmatrix}}$$

情形 3：$A=[A_1\quad A_2]$，且 $B=\begin{bmatrix}B_1\\B_2\end{bmatrix}$，其中 A_1 为一 $m\times s$ 矩阵，A_2 为一 $m\times(n-s)$矩阵，B_1 为一 $s\times r$ 矩阵，且 B_2 为一$(n-s)\times r$ 矩阵. 若 $C=AB$，则

$$c_{ij}=\sum_{l=1}^{n}a_{il}b_{lj}=\sum_{l=1}^{s}a_{il}b_{lj}+\sum_{l=s+1}^{n}a_{il}b_{lj}$$ 73

因此 c_{ij} 为 A_1B_1 的(i, j)元素与 A_2B_2 的(i, j)元素之和. 因此，

$$AB=C=A_1B_1+A_2B_2$$

由此得到

$$\boxed{\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}=A_1B_1+A_2B_2}$$

情形 4： 令 A 和 B 采用如下的方式分块：

$$A=\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]\begin{array}{l} k \\ m-k \end{array} \\ \begin{array}{cc} s & n-s \end{array} \end{array}, \qquad B=\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]\begin{array}{l} s \\ n-s \end{array} \\ \begin{array}{cc} t & r-t \end{array} \end{array}$$

令

$$A_1=\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} \qquad A_2=\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B_1=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \end{bmatrix} \qquad B_2=\begin{bmatrix} B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

由情形 3 有

$$AB=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}=A_1B_1+A_2B_2$$

由情形 1 和 2 有

$$A_1B_1=\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix}B_1=\begin{bmatrix} A_{11}B_1 \\ A_{21}B_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} \end{bmatrix}$$

$$A_2B_2=\begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix}B_2=\begin{bmatrix} A_{12}B_2 \\ A_{22}B_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

因此，

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

一般地，如果各块的维数适当，则分块矩阵的乘法按与通常的矩阵乘法相同的方式进行．设

74

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix} \quad 及 \quad B=\begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{bmatrix}$$

则

$$AB=\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{bmatrix}$$

其中

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}$$

仅当对每一个 k，A_{ik} 的列数等于 B_{kj} 的行数时，这种乘法是可以进行的．

▶**例 1** 令

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\2&2&1&1\\3&3&2&2\end{bmatrix}$$

及

$$B=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&1&1\\1&2&1&1\\\hline 3&1&1&1\\3&2&1&2\end{array}\right]$$

将 A 分成四块并进行分块乘法.

解 由于每个 B_{kj} 有两行，每个 A_{ik} 必须有两列. 因此有两种可能：

$$\text{(i)}\quad\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&1&1\\\hline 2&2&1&1\\3&3&2&2\end{array}\right]$$

此时

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&1&1\\\hline 2&2&1&1\\3&3&2&2\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&1&1\\1&2&1&1\\\hline 3&1&1&1\\3&2&1&2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|cc}8&6&4&5\\\hline 10&9&6&7\\18&15&10&12\end{array}\right]$$

或

$$\text{(ii)}\quad\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&1&1\\2&2&1&1\\\hline 3&3&2&2\end{array}\right]$$

75

此时

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&1&1\\2&2&1&1\\\hline 3&3&2&2\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&1&1\\1&2&1&1\\\hline 3&1&1&1\\3&2&1&2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|cc}8&6&4&5\\10&9&6&7\\\hline 18&15&10&12\end{array}\right]$$

▶**例 2** 令 A 为一 $n\times n$ 矩阵，形如

$$\begin{bmatrix}A_{11}&O\\O&A_{22}\end{bmatrix}$$

其中 A_{11} 为一 $k\times k(k<n)$ 矩阵. 证明当且仅当 A_{11} 和 A_{22} 非奇异时，A 为非奇异的.

解 若 A_{11} 和 A_{22} 为非奇异的，则有

$$\begin{bmatrix}A_{11}^{-1}&O\\O&A_{22}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}&O\\O&A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_k&O\\O&I_{n-k}\end{bmatrix}=I$$

及

$$\begin{bmatrix}A_{11}&O\\O&A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11}^{-1}&O\\O&A_{22}^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_k&O\\O&I_{n-k}\end{bmatrix}=I$$

所以 A 为非奇异的，且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}A_{11}^{-1} & O\\ O & A_{22}^{-1}\end{bmatrix}$$

反之，设 A 为非奇异的，则令 $B=A^{-1}$，且 B 采用与 A 相同的方法分块. 因为

$$BA=I=AB$$

则可得

$$\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11} & O\\ O & A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_k & O\\ O & I_{n-k}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & O\\ O & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}B_{11}A_{11} & B_{12}A_{22}\\ B_{21}A_{11} & B_{22}A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_k & O\\ O & I_{n-k}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12}\\ A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22}\end{bmatrix}$$

因此

$$B_{11}A_{11}=I_k=A_{11}B_{11}$$

$$B_{22}A_{22}=I_{n-k}=A_{22}B_{22}$$

76 于是，A_{11} 和 A_{22} 均为非奇异的，且逆分别为 B_{11} 和 B_{22}. ◂

外积展开

给定 $\mathbf{R}^n$ 中的两个向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$，若首先将其中一个向量转置，则这两个向量即可进行矩阵乘法. 矩阵乘积 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ 为一个行向量($1\times n$ 矩阵)和一个列向量($n\times 1$ 矩阵)的乘积. 结果为一 1×1 矩阵，或简称标量.

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

这种乘积称为标量积(scalar product)或内积(inner product). 标量积是一种常见的运算. 例如，当计算两个矩阵的乘积时，乘积中的每一元素就是一个标量积(一个行向量乘以一个列向量).

一个列向量乘以一个行向量同样十分有用. 矩阵乘积 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$ 为一 $n\times 1$ 矩阵乘以一 $1\times n$ 矩阵. 其结果为一个 $n\times n$ 矩阵.

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{bmatrix}x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n\\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n\\ \vdots & & & \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n\end{bmatrix}$$

乘积 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$ 称为 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的外积(outer product). 矩阵的外积有着特殊的结构，它的每一行均为 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$ 的倍数，且列向量均为 $\boldsymbol{x}$ 的倍数. 例如，设

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}4\\ 1\\ 3\end{bmatrix}\quad 和\quad \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}3\\ 5\\ 2\end{bmatrix}$$

则

$$xy^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}4\\1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&5&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12&20&8\\3&5&2\\9&15&6\end{bmatrix}$$

注意，每一行均为(3，5，2)的倍数，且每一列均为 $\boldsymbol{x}$ 的倍数.

下面我们将外积的概念从向量推广到矩阵. 假设从一个 $m\times n$ 矩阵 X 和一个 $k\times n$ 矩阵 Y 开始. 我们可以得到矩阵乘积 XY^{T}. 设将 X 按列进行划分，且将 Y^{T}按行进行划分，然后进行分块矩阵乘法，我们看到 XY^{T}可以表示为向量的外积之和.

$$XY^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{y}_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\boldsymbol{y}_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{y}_n^{\mathrm{T}}$$ 77

这个表达式称为外积展开(outer product expansion). 这种展开在很多应用中起着重要的作用. 在 6.5 节中，我们会看到外积展开如何在数字图像处理和信息检索中加以应用.

例 3 给定

$$X=\begin{bmatrix}3&1\\2&4\\1&2\end{bmatrix}\quad 和\quad Y=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\\3&1\end{bmatrix}$$

计算 XY^{T}的外积展开.

解

$$\begin{aligned}XY^{\mathrm{T}}&=\begin{bmatrix}3&1\\2&4\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\4\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}3&6&9\\2&4&6\\1&2&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&4&1\\8&16&4\\4&8&2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

1.6 节练习

1. 令 A 为一 $n\times n$ 非奇异矩阵. 计算下列乘法.

(a) $A^{-1}[A\quad I]$ (b) $\begin{bmatrix}A\\I\end{bmatrix}A^{-1}$ (c) $[A\quad I]^{\mathrm{T}}[A\quad I]$

(d) $[A\quad I][A\quad I]^{\mathrm{T}}$ (e) $\begin{bmatrix}A^{-1}\\I\end{bmatrix}[A\quad I]$

2. 令 $B=A^{\mathrm{T}}A$. 证明 $b_{ij}=\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_j$.

3. 令

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix} \quad 和 \quad B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

(a)计算 $A\boldsymbol{b}_1$ 与 $A\boldsymbol{b}_2$.

(b)计算 $\vec{\boldsymbol{a}}_1 B$ 和 $\vec{\boldsymbol{a}}_2 B$.

(c)计算 AB，并验证它的列向量为(a)中的向量，行向量为(b)中的向量.

4. 令

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad O=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

及

$$B=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ \hline 3 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 2\end{array}\right]$$

计算下列分块乘法：

(a) $\begin{bmatrix}O & I\\ I & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix}C & O\\ O & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}$

78 (c) $\begin{bmatrix}D & O\\ O & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix}E & O\\ O & E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}$

5. 计算下列分块乘法：

(a) $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 2 & -1\end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc}4 & -2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ \hline 1 & 2 & 3\end{array}\right]$

(b) $\left[\begin{array}{cc}4 & -2\\ 2 & 3\\ 1 & 1\\ \hline 1 & 2\end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 2 & -1\end{array}\right]$

(c) $\left[\begin{array}{cc|cc}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & 0\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c}\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0\\ \hline 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

(d) $\left[\begin{array}{ccc|cc}0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}1 & -1\\ 2 & -2\\ 3 & -3\\ \hline 4 & -4\\ 5 & -5\end{array}\right]$

6. 给定

$$X=\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ 4 & 2 & 3\end{bmatrix} \qquad Y=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

(a)计算 XY^{T} 的外积展开.

(b)计算 YX^{T} 的外积展开. YX^{T} 的外积展开和 XY^{T} 的外积展开之间有什么联系？

7. 令

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix} \quad 和 \quad A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}A_{11}^{\mathrm{T}} & A_{21}^{\mathrm{T}}\\ A_{12}^{\mathrm{T}} & A_{22}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

是否可计算分块乘法 AA^{T} 和 $A^{\mathrm{T}}A$？试说明.

8. 令 A 为一 $m\times n$ 矩阵，X 为一 $n\times r$ 矩阵，B 为一 $m\times r$ 矩阵. 证明

$$AX=B$$

的充要条件是

$$A\boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{b}_j, \quad j = 1, \cdots, r$$

9. 令 A 为一 $n\times n$ 矩阵，并令 D 为一 $n\times n$ 对角矩阵.

(a)证明 $D=(d_{11}\boldsymbol{e}_1, d_{22}\boldsymbol{e}_2, \cdots, d_{nn}\boldsymbol{e}_n)$.

(b)证明 $AD=(d_{11}\boldsymbol{a}_1, d_{22}\boldsymbol{a}_2, \cdots, d_{nn}\boldsymbol{a}_n)$.

10. 令 U 为一 $m\times m$ 矩阵，V 为一 $n\times n$ 矩阵，并令

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ O \end{bmatrix}$$

其中 Σ_1 为一 $n\times n$ 对角矩阵，其对角元素为 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$，且 O 为$(m-n)\times n$ 的零矩阵.

(a)设 $U=(U_1, U_2)$，其中 U_1 有 n 列，证明

$$U\Sigma = U_1\Sigma_1$$

(b)证明：如果 $A=U\Sigma V^{\mathrm{T}}$，则 A 可表示为外积展开形式

$$A = \sigma_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} + \sigma_2\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}} + \cdots + \sigma_n\boldsymbol{u}_n\boldsymbol{v}_n^{\mathrm{T}}$$

11. 令

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$$

其中四个分块矩阵均为 $n\times n$ 矩阵.

(a)若 A_{11} 和 A_{22} 为非奇异的，证明 A 必为非奇异的，且 A^{-1} 必形如

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11}^{-1} & C \\ \hline O & A_{22}^{-1} \end{array}\right]$$

(b)求 C.

12. 令 A 和 B 为 $n\times n$ 矩阵，并令 M 为如下的分块矩阵：

$$M = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$$

利用定理 1.5.2 的条件(b)证明：如果 A 或 B 为奇异的，则 M 必为奇异的.

13. 令

$$A = \begin{bmatrix} O & I \\ B & O \end{bmatrix}$$

其中四个子矩阵均为 $k\times k$ 的. 求 A^2 和 A^4.

14. 令 I 为 $n\times n$ 单位矩阵. 求下列 $2n\times 2n$ 矩阵分块形式的逆矩阵.

(a)$\begin{bmatrix} O & I \\ I & O \end{bmatrix}$　　(b)$\begin{bmatrix} I & O \\ B & I \end{bmatrix}$ 79

15. 令 O 为 $k\times k$ 矩阵，其元素全部为 0，令 I 为 $k\times k$ 单位矩阵，B 为 $k\times k$ 矩阵，满足 $B^2=O$. 如果 $A=\begin{bmatrix} O & I \\ I & B \end{bmatrix}$，求分块形式 $A^{-1}+A^2+A^3$.

16. 令 A 和 B 为 $n\times n$ 的矩阵，并定义 $2n\times 2n$ 矩阵 S 和 M 为

$$S = \begin{bmatrix} I & A \\ O & I \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} AB & O \\ B & O \end{bmatrix}$$

求 S^{-1}的分块形式，并利用它计算乘积 $S^{-1}MS$ 的分块形式.

17. 令

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

其中 A_{11} 为一 $k\times k$ 非奇异矩阵．证明 A 可分解为乘积

$$\begin{bmatrix} I & O \\ B & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & C \end{bmatrix}$$

其中

$$B=A_{21}A_{11}^{-1} \quad 和 \quad C=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

（注意，这个问题给出了 1.3 节中练习 18 的分块矩阵形式的分解.）

18. 令 A，B，L，M，S，T 为 $n\times n$ 矩阵，其中 A，B，M 非奇异，而 L，S，T 为奇异的．确定是否可求得矩阵 X 和 Y 使得

$$\begin{bmatrix} O & I & O & O & O & O \\ O & O & I & O & O & O \\ O & O & O & I & O & O \\ O & O & O & O & I & O \\ O & O & O & O & O & X \\ Y & O & O & O & O & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M \\ A \\ T \\ L \\ A \\ B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A \\ T \\ L \\ A \\ S \\ T \end{bmatrix}$$

如果可以，说明如何求；如果不可以，说明原因.

19. 令 A 为一 $n\times n$ 矩阵且 $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$.

(a)一个标量 c 也可看成一 1×1 矩阵 $C=[c]$，且向量 $\mathbf{b}\in\mathbf{R}^n$ 可看成一 $n\times 1$ 矩阵 B．尽管矩阵乘法 CB 没有定义，但证明矩阵乘积 BC 等于标量乘法 $c\mathbf{b}$.

(b)将 A 按列划分，同时将 $\mathbf{x}$ 按行划分，用分块矩阵乘法计算 A 乘以 $\mathbf{x}$.

(c)证明

$$A\mathbf{x}=x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\cdots+x_n\mathbf{a}_n$$

20. 设 A 为一 $n\times n$ 矩阵，且对所有 $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ 有 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$，证明 $A=O$．[提示：令 $\mathbf{x}=\mathbf{e}_j$，$j=1$，…，n.]

21. 令 B 和 C 为 $n\times n$ 矩阵，且对所有 $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ 有 $B\mathbf{x}=C\mathbf{x}$．证明 $B=C$.

22. 考虑如下方程组

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{a} \\ \mathbf{c}^{\mathrm{T}} & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}$$

其中 A 为一 $n\times n$ 非奇异矩阵，且 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$ 及 $\mathbf{c}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的向量.

(a)方程组两端同乘

$$\begin{bmatrix} A^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}^{\mathrm{T}}A^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

可得到一等价三角形方程组.

(b)令 $\mathbf{y}=A^{-1}\mathbf{a}$ 且 $\mathbf{z}=A^{-1}\mathbf{b}$．证明：若 $\beta-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}\neq 0$，则计算方程组的解可令

$$x_{n+1}=\frac{b_{n+1}-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}}{\beta-\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}}$$

然后令

$$\mathbf{x}=\mathbf{z}-x_{n+1}\mathbf{y}$$

第 1 章练习

MATLAB 练习

下面的练习均是使用 MATLAB 软件包进行求解，该软件在本书附录中进行介绍．这些练习也包

含需要结合计算中阐明的基本数学原理进行回答的问题．将你的所有会话保存在一个文件中．当编辑并打印出该文件后，问题的答案即可直接从输出中得到． 80

MATLAB 有一个方便的帮助系统，包含了它所有命令和运算的说明．例如，要得到 MATLAB 命令 rand 的信息，只需输入：help rand．本章练习中用到的 MATLAB 命令有 inv，floor，rand，tic，toc，rref，abs，max，round，sum，eye，triu，ones，zeros 和 magic．引入的运算有＋，－，＊，′，\．其中＋和－表示通常标量及矩阵的加法和减法运算．＊表示标量或矩阵的乘法．对所有元素为实数的矩阵，′运算对应于转置运算．若 A 为一 $n\times n$ 非奇异矩阵且 B 为一 $n\times r$ 矩阵，则运算 $A\backslash B$ 等价于计算 $A^{-1}B$．

1. 用 MATLAB 随机生成 4×4 矩阵 A 和 B．求下列指定的 $A1$，$A2$，$A3$，$A4$，并确定哪些矩阵是相等的．你可以利用 MATLAB 计算两个矩阵的差来测试两个矩阵是否相等．
   (a) $A1=A*B$，$A2=B*A$，$A3=(A'*B')'$，$A4=(B'*A')'$
   (b) $A1=A'*B'$，$A2=(A*B)'$，$A3=B'*A'$，$A4=(B*A)'$
   (c) $A1=\texttt{inv}(A*B)$，$A2=\texttt{inv}(A)*\texttt{inv}(B)$，$A3=\texttt{inv}(B*A)$，$A4=\texttt{inv}(B)*\texttt{inv}(A)$
   (d) $A1=\texttt{inv}((A*B)')$，$A2=\texttt{inv}(A'*B')$，$A3=\texttt{inv}(A')*\texttt{inv}(B')$，$A4=(\texttt{inv}(A)*\texttt{inv}(B))'$
2. 令 $n=200$ 并使用命令
$$A=\texttt{floor}(10*\texttt{rand}(n));\quad \boldsymbol{b}=\texttt{sum}(A')';\quad \boldsymbol{z}=\texttt{ones}(n,1)$$
   生成一个 $n\times n$ 矩阵和两个 $\mathbf{R}^n$ 中的向量，它们的元素均为整数．（因为矩阵和向量都很大，我们添加分号来抑制输出．）
   (a) 方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的真解应为向量 $\boldsymbol{z}$．为什么？试说明．可在 MATLAB 中利用“\”运算或计算 A^{-1}，然后用 A^{-1} 乘以 $\boldsymbol{b}$ 来求解．比较这两种计算方法的速度和精度．我们将使用 MATLAB 命令 tic 和 toc 来测量每一个计算过程消耗的时间．只需用下面的命令：
$$\texttt{tic},\quad \boldsymbol{x}=A\backslash\boldsymbol{b};\quad \texttt{toc}$$
$$\texttt{tic},\quad \boldsymbol{y}=\texttt{inv}(A)*\boldsymbol{b};\quad \texttt{toc}$$
   哪一种方法更快？
   为比较这两种方法的精度，可以测量求得的解 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 与真解 $\boldsymbol{z}$ 接近的程度．利用下面的命令：
$$\texttt{max}(\texttt{abs}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}))$$
$$\texttt{max}(\texttt{abs}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}))$$
   哪种方法得到的解更精确？
   (b) 用 $n=500$ 和 $n=1000$ 替换(a)中的 n．
3. 令 $A=\texttt{floor}(10*\texttt{rand}(6))$．根据构造，矩阵 A 将有整数元．将矩阵 A 的第六列更改，使得矩阵 A 为奇异的．令
$$B=A',\quad A(:,6)=-\texttt{sum}(B(1:5,:))'$$
   (a) 设 $\boldsymbol{x}=\texttt{ones}(6,1)$，并利用 MATLAB 计算 $A\boldsymbol{x}$．为什么我们知道 A 必为奇异的？试说明．通过化为行最简形来判断 A 是奇异的．
   (b) 令
$$B=\boldsymbol{x}*[1:6]$$
   乘积 AB 应为零矩阵．为什么？试说明．用 MATLAB 的＊运算计算 AB 进行验证．
   (c) 令
$$C=\texttt{floor}(10*\texttt{rand}(6))\quad 和\quad D=B+C$$
   尽管 $C\neq D$，但乘积 AC 和 AD 是相等的．为什么？试说明．计算 $A*C$ 和 $A*D$ 并验证它们确实相等．

4. 采用如下方式构造一个矩阵．令

$$B = \text{eye}(10) - \text{triu}(\text{ones}(10),1)$$

为什么我们知道 B 必为奇异的？令

$$C = \text{inv}(B) \quad 且 \quad \boldsymbol{x} = C(:,10)$$

现在用 $B(10,1)=-1/256$ 将 B 进行微小改变．利用 MATLAB 计算乘积 $B\boldsymbol{x}$．由这个计算结果，你可以得出关于新矩阵 B 的什么结论？它是否仍然为奇异的？试说明．用 MATLAB 计算它的行最
81 简形．

5. 生成一个矩阵 A：

$$A = \text{floor}(10 * \text{rand}(6))$$

并生成一个向量 $\boldsymbol{b}$：

$$\boldsymbol{b} = \text{floor}(20 * \text{rand}(6,1)) - 10$$

(a)因为 A 是随机生成的，我们可以认为它是非奇异的．那么方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 应有唯一解．用运算"\"求解．用 MATLAB 计算$[A \quad \boldsymbol{b}]$的行最简形 U．比较 U 的最后一列和解 $\boldsymbol{x}$，结果是什么？在精确算术运算时，它们应当是相等的．为什么？试说明．为比较它们两个，计算差 $U(:,7)-\boldsymbol{x}$ 或用 format long 考察它们．

(b)现在改变 A，使它成为奇异的．令

$$A(:,3) = A(:,1:2) * [4 \quad 3]'$$

利用 MATLAB 计算 rref($[A \quad \boldsymbol{b}]$)．方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有多少组解？试说明．

(c)令

$$\boldsymbol{y} = \text{floor}(20 * \text{rand}(6,1)) - 10 \quad 且 \quad \boldsymbol{c} = A * \boldsymbol{y}$$

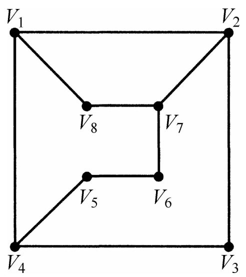
为什么我们知道方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$ 必为相容的？试说明．计算$[A \quad \boldsymbol{c}]$的行最简形 U．方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$ 有多少解？试说明．

(d)由阶梯形确定的自由变量应为 x_3．通过考察矩阵 U 对应的方程组，可以求得 $x_3=0$ 时所对应的解．将这个解作为列向量 $\boldsymbol{w}$ 输入 MATLAB 中．为检验 $A\boldsymbol{w}=\boldsymbol{c}$，计算剩余向量 $\boldsymbol{c}-A\boldsymbol{w}$．

(e)令 $U(:,7)=\text{zeros}(6,1)$．矩阵 U 应对应于$(A \mid \boldsymbol{0})$的行最简形．用 U 求自由变量 $x_3=1$ 时齐次方程组的解(手工计算)，并将你的结果输入为向量 $\boldsymbol{z}$．用 $A * \boldsymbol{z}$ 检验你的结论．

(f)令 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}+3 * \boldsymbol{z}$．向量 $\boldsymbol{v}$ 应为方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$ 的解．为什么？试说明．用 MATLAB 计算剩余向量 $\boldsymbol{c}-A\boldsymbol{v}$ 来验证 $\boldsymbol{v}$ 为方程组的解．在这个解中，自由变量 x_3 的取值是什么？如何使用向量 $\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{z}$ 来求所有可能的方程组的解？试说明．

6. 考虑右图．



(a)确定图的邻接矩阵 A，并将其输入 MATLAB.

(b)计算 A^2 并确定长度为 2 的路的条数，其起止点分别为：(i)V_1 到 V_7，(ii)V_4 到 V_8，(iii)V_5 到 V_6，(iv)V_8 到 V_3．

(c)计算 A^4，A^6，A^8 并回答(b)中各长度为 4，6，8 的路的条数．试推测什么时候从顶点 V_i 到 V_j 没有长度为偶数的路．

(d)计算 A^3，A^5，A^7 并回答(b)中各长度为 3，5，7 的路的条数．你由(c)得到的推测对长度为奇数的路是否成立？试说明．推测根据 $i+j+k$ 的奇偶性，是否存在长度为 k 的路．

(e)如果我们在图中增加边$\{V_3, V_6\}$，$\{V_5, V_8\}$，新图的邻接矩阵 B 可首先令$B=A$，然后令

$$B(3,6) = 1, \quad B(6,3) = 1, \quad B(5,8) = 1, \quad B(8,5) = 1$$

对 $k=2,3,4,5$，计算 B^k．(d)中的推测在新的图形中是否还是成立的？

(f)在图中增加$\{V_6, V_8\}$，并构造得到的图的邻接矩阵 C. 计算 C 的幂次，并验证你在(d)中的推测对这个新图是否仍然成立. 82

7. 在 1.4 节应用 1 中，对给定矩阵 A 和 X，1 年后和 2 年后已婚女性和单身女性的数量可由计算 AX 和 A^2X 得到. 使用 format long，并将这些矩阵输入 MATLAB. 对 $k=5$，10，15，20，计算 A^k 和 A^kX. 当 k 增大时，A^k 有什么变化？城镇中已婚女性和单身女性较长时间后如何分布？

8. 表 1 是生命周期为 7 个阶段的海龟模型.

表 1　海龟种群统计学的 7 个阶段

阶段编号	描述（年龄以年为单位）	年存活率	年产卵量
1	卵、孵化期(<1)	0.674 7	0
2	小幼龟(1～7)	0.785 7	0
3	大幼龟(8～15)	0.675 8	0
4	未成年龟(16～21)	0.742 5	0
5	初始繁殖期(22)	0.809 1	127
6	第一年洄游(23)	0.809 1	4
7	成熟繁殖期(24～54)	0.808 9	80

相应的莱斯利矩阵为

$$L=\begin{bmatrix}0&0&0&0&127&4&80\\0.6747&0.7370&0&0&0&0&0\\0&0.0486&0.6610&0&0&0&0\\0&0&0.0147&0.6907&0&0&0\\0&0&0&0.0518&0&0&0\\0&0&0&0&0.8091&0&0\\0&0&0&0&0&0.8091&0.8089\end{bmatrix}$$

假设初始海龟种群各个阶段中，海龟的数量表示为向量

$$\boldsymbol{x}_0=(200\,000\quad 130\,000\quad 100\,000\quad 70\,000\quad 500\quad 400\quad 1\,100)^{\mathrm{T}}$$

(a)在 MATLAB 中输入 L，并令

```
x0 = (200000,130000,100000,70000,500,400,1100)′
```

使用命令

```
x50 = round(L^50 * x0)
```

计算 $\boldsymbol{x}_{50}$. 再计算 $\boldsymbol{x}_{100}$，$\boldsymbol{x}_{150}$，$\boldsymbol{x}_{200}$，$\boldsymbol{x}_{250}$ 及 $\boldsymbol{x}_{300}$.

(b)海龟在陆地上产卵. 假设自然资源保护学家采用特殊的方法保护这些卵，结果使得卵的存活和孵化率提高到 77%. 为将这个变化加入到我们的模型中，只需改变 L 中的(2，1)元素为 0.77. 更改矩阵 L 后，重复进行(a). 海龟生存的趋势是否有明显的变化呢？

(c)假设不改变产卵和孵化率，而改以保护小幼龟，使得它们的存活率增长到 88%. 利用 1.4 节应用 2 中的方程(1)和(2)，求采用保护小幼龟的方法后，在同一阶段中存活的数量以及长大到下一阶段存活的数量. 相应修改初始的 L 矩阵并利用新矩阵重复(a). 海龟存活的趋势是否有明显的变化呢？ 83

9. 令 $A=$magic(8)，然后计算其行最简形. 使得首 1 对应于前三个变量 x_1，x_2，x_3，且其余的五个变

量均为自由的.

(a)令 $\boldsymbol{c}=[1:8]'$，通过计算矩阵 $[A\quad \boldsymbol{c}]$ 的行最简形确定方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$ 是否相容. 方程组是相容的吗？试说明.

(b)令

$$\boldsymbol{b}=[8\quad -8\quad -8\quad 8\quad 8\quad -8\quad -8\quad 8]'$$

并考虑方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$. 该方程组应为相容的. 通过 $U=\text{rref}([A\quad \boldsymbol{b}])$ 加以验证. 对五个自由变量的任一组取值，我们都应可以找到一组解. 事实上，令 $\boldsymbol{x}2=\text{floor}(10*\text{rand}(5,1))$. 若 $\boldsymbol{x}2$ 表示方程组解的最后五个坐标，则我们由 $\boldsymbol{x}2$ 求得 $\boldsymbol{x}1=(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$. 要这样做，只需令 $U=\text{rref}([A\quad \boldsymbol{b}])$. U 的非零行对应于分块形式的线性方程组

$$[I\quad V]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}1\\ \boldsymbol{x}2\end{bmatrix}=\boldsymbol{c} \tag{1}$$

为解方程(1)，令

$$V=U(1:3,4:8),\quad \boldsymbol{c}=U(1:3,9)$$

并利用 MATLAB，根据项 $\boldsymbol{x}2$，$\boldsymbol{c}$ 和 V 计算 $\boldsymbol{x}1$. 令 $\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{x}1;\ \boldsymbol{x}2]$，验证 $\boldsymbol{x}$ 是方程组的解.

10. 令

$$B=[-1,-1;1,1]\quad 和\quad A=[\text{zeros}(2),\text{eye}(2);\text{eye}(2),B]$$

验证 $B^2=O$.

(a)用 MATLAB 计算 A^2，A^4，A^6 和 A^8. 猜想用子矩阵 I，O 和 B 如何表示分块形式的 A^{2k}. 用数学归纳法证明你的猜想对任何正整数 k 都是成立的.

(b)用 MATLAB 计算 A^3，A^5，A^7 和 A^9. 猜想用子矩阵 I，O 和 B 如何表示分块形式的 A^{2k-1}. 用数学归纳法证明你的猜想对任何正整数 k 都是成立的.

11. (a)MATLAB 命令

$$A=\text{floor}(10*\text{rand}(6)),\quad B=A'*A$$

将得到元素为整数的对称矩阵. 为什么？试说明. 用这种方法计算 B 来验证结论. 然后，将 B 划分为四个3×3子矩阵. 在 MATLAB 中求子矩阵，令

$$B11=B(1:3,1:3),\quad B12=B(1:3,4:6)$$

并用 B 的第 4 行到第 6 行类似定义 $B21$ 和 $B22$.

(b)令 $C=\text{inv}(B11)$. 应有 $C^{\mathrm{T}}=C$ 和 $B21^{\mathrm{T}}=B12$. 为什么？试说明. 用 MATLAB 运算符′计算转置，并验证结论. 然后，令

$$E=B21*C\quad 和\quad F=B22-B21*C*B21'$$

利用 MATLAB 函数 eye 和 zeros 构造

$$L=\begin{bmatrix}I & O\\ E & I\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}B11 & O\\ O & F\end{bmatrix}$$

计算 $H=L*D*L'$，并通过计算 $H-B$ 与 B 进行比较. 证明：若用算术运算精确计算 LDL^{T}，它应准确等于 B.

测试题 A——判断正误

本章测试包含 15 道判断题. 当命题总是成立时回答真(true)，否则回答假(false). 如果命题为真，说明或证明你的结论. 如果命题为假，举例说明命题不总是成立. 例如，对 $n\times n$ 矩阵 A 和 B 考虑如下命题.

(i)$A+B=B+A$.

(ii) $AB=BA$.

命题(i)的答案为真. 解释：矩阵 $A+B$ 的(i, j)元素为 $a_{ij}+b_{ij}$，且矩阵 $B+A$ 的(i, j)元素为 $b_{ij}+a_{ij}$. 因为对任意的 i 和 j，$a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$，由此有 $A+B=B+A$.

命题(ii)的答案是假. 尽管该命题在某些情况下是成立的，但它不总是成立的. 为说明它，我们只需举出一个实例，使得等式不成立即可. 例如，设 84

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 1\end{bmatrix}$$

那么

$$AB=\begin{bmatrix}4 & 5\\7 & 10\end{bmatrix},\quad BA=\begin{bmatrix}11 & 7\\4 & 3\end{bmatrix}$$

这就证明了命题(ii)为假.

1. 若 A 的行阶梯形中含有自由变量，则方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 将有无穷多解.
2. 齐次线性方程组总是相容的.
3. 一个 $n\times n$ 矩阵 A 为非奇异的，当且仅当 A 的行最简形为 I(单位矩阵).
4. 设 A 和 B 为非奇异的 $n\times n$ 矩阵，则 $A+B$ 也是非奇异的，且$(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$.
5. 设 A 和 B 为非奇异的 $n\times n$ 矩阵，则 AB 也是非奇异的，且$(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$.
6. 若 $A=A^{-1}$，则 A 必等于 I 或 $-I$.
7. 设 A 和 B 为 $n\times n$ 矩阵，则$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$.
8. 若 $AB=AC$，且 $A\neq O$(零矩阵)，则 $B=C$.
9. 若 $AB=O$，则 $BA=O$.
10. 若 A 为 3×3 矩阵且 $\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3=0$，则 A 必为奇异的.
11. 若 A 为 4×3 矩阵且 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_3$，则方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 必相容.
12. 令 A 为 4×3 矩阵，其中 $\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_3$. 若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$，则方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 将有无穷多解.
13. 若 E 是初等矩阵，则 E^{T} 也是初等矩阵.
14. 两个初等矩阵的乘积还是初等矩阵.
15. 设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的非零向量且 $A=\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$，则 A 的行最简形将仅包含一个非零行.

测试题 B

1. 求如下线性方程组的所有解：

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 1\\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= -2\\ 2x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 7x_4 &= 1 \end{aligned}$$

2. (a)两个变量的线性方程对应于平面上的一条直线. 对有 3 个变量的线性方程给出类似的几何表示.

   (b)给定一个 2 个方程 3 个变量的线性方程组，它可能有多少解？给出你的答案的一个几何解释.

   (c)给定一个 2 个方程 3 个变量的齐次线性方程组，它可能有多少解？试说明.

3. 令 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 为一 n 个方程 n 个变量的方程组，并假设 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 均为它的解，且 $\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{x}_2$.

   (a)该方程组有多少解？试说明.

   (b)矩阵 A 是否为非奇异的？试说明.

4. 令 A 为一矩阵

$$A=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\2\alpha & 2\beta\end{bmatrix}$$

其中 α 和 β 为给定的非零标量.

(a)说明为什么方程组

$$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$$

必为不相容的.

(b)如何选择一个非零向量 $\boldsymbol{b}$，使得方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 为相容的？试说明.

5. 给定

$$A=\begin{bmatrix}2&1&3\\4&2&7\\1&3&5\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2&1&3\\1&3&5\\4&2&7\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}0&1&3\\0&2&7\\-5&3&5\end{bmatrix}$$

(a)求初等矩阵 E，使得 $EA=B$.

(b)求初等矩阵 F，使得 $AF=C$.

6. 令 A 为一 3×3 矩阵，且令

$$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+4\boldsymbol{a}_3$$

方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 是否相容？试说明.

7. 令 A 为一 3×3 矩阵，并假设

$$\boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}\text{(零向量)}$$

85 A 是否为非奇异的？试说明.

8. 给定向量

$$\boldsymbol{x}_0=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

能否求得一 2×2 矩阵 A 和 B，使得 $A\neq B$ 且 $A\boldsymbol{x}_0=B\boldsymbol{x}_0$？试说明.

9. 令 A 和 B 为 $n\times n$ 对称矩阵，且 $C=AB$. C 是否为对称的？试说明.

10. 令 E 和 F 为 $n\times n$ 初等矩阵，且 $C=EF$. C 是否为非奇异的？试说明.

11. 给定

$$A=\begin{bmatrix}I&O&O\\O&I&O\\O&B&I\end{bmatrix}$$

其中所有的子矩阵为 $n\times n$ 的，求分块形式的 A^{-1}.

12. 令 A 和 B 为 10×10 矩阵，并按照如下的方式分块：

$$A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}$$

(a)若 A_{11} 为 6×5 矩阵，且 B_{11} 为 $k\times r$ 矩阵，那么当 k 和 r 满足什么条件时，A 和 B 的分块乘法可以进行？

86 (b)假设分块乘法可以进行，乘积中(2，2)块矩阵如何求得？