

第3章 最优化计算方法

在前面几章中讨论了求解最优化问题的一些解析方法。这些方法构成了大多数最优化模型的基础。本章我们要研究一些在实际应用中出现的计算问题，并讨论一些处理它们的最常见的方法。

3.1 单变量最优化

即使是简单的单变量最优化问题，确定全局的最优值点的工作也可能是极其困难的。实际问题通常都很麻烦。即使我们讨论的函数是处处可微的，导数的计算也经常是复杂的。然而，最糟糕的部分是求解方程 $f'(x) = 0$ 。一个清楚而简单的事实就是绝大多数方程是无法解析求解的。在大多数情况下，我们所能做得最好的就是利用图像或数值方法求一个近似解。

例 3.1 再来考虑例 1.1 中的售猪问题，但现在考虑到猪的生长率不是常数的事实。假设现在猪还小，因此生长率是增加的。什么时候应该将猪售出从而获得最大的收益？

我们将采用五步方法。第一步要将我们在 1.1 节中所做的工作（汇总在图 1-1 中）修改一下。现在我们不能再假设 $w = 200 + 5t$ 。那么怎样才是对增加的生长率的一个合理的假设呢？这个问题当然有很多可能的答案。这里我们假设猪的生长率正比于它的重量。也就是说，我们假设

$$\frac{dw}{dt} = cw \quad (3-1)$$

根据 $w = 200$ 磅时 $dw/dt = 5$ 磅/天的事实，我们可得出 $c = 0.025$ 。这样我们得到了一个简单的微分方程来解出 w ，这个方程是

$$\frac{dw}{dt} = 0.025w, \quad w(0) = 200 \quad (3-2)$$

我们可以用分离变量法来求解方程(3-2)，得到

$$w = 200e^{0.025t} \quad (3-3)$$

由于我们在图 1-1 中列出的所有其他假设都不变，这样第一步就完成了。

第二步是选择一个建模方法。我们采用单变量最优化模型。单变量最优化模型的一般求解过程已经在 1.1 节中做了介绍。本节我们要探究一些可以用于实现这个一般求解过程的计算方法。在实际问题中，当计算很困难或手算很繁琐时经常要用到数值计算方法，比如我们这里要介绍的方法。

第三步是推导模型的公式。现在的问题与 1.1 节中得到的公式唯一不同的就是我们要将重量方程 $w = 200 + 5t$ 替换为方程(3-3)。这样就得到了一个新的目标函数

$$\begin{aligned}y &= f(x) \\&= (0.65 - 0.01x)(200e^{0.025x}) - 0.45x\end{aligned}\quad (3-4)$$

我们的问题是在集合 $S = \{x: x \geq 0\}$ 上求(3-4)式中的函数的最大值.

第四步是求解这个模型. 我们采用图像法. 用于个人计算机上的好的图形软件及图形计算器是很容易获得的. 我们对这个问题的图像分析从按与图 1-2 相同的尺度画出(3-4)式中的方程的图像开始. 图 1-2 中画出的是开始的目标函数. 在现在的问题中, 我们可以从目标函数的图像中看出更多的内容. 我们要说图 3-1 不是函数在集合 $S = \{0, \infty\}$ 上的完整图像。

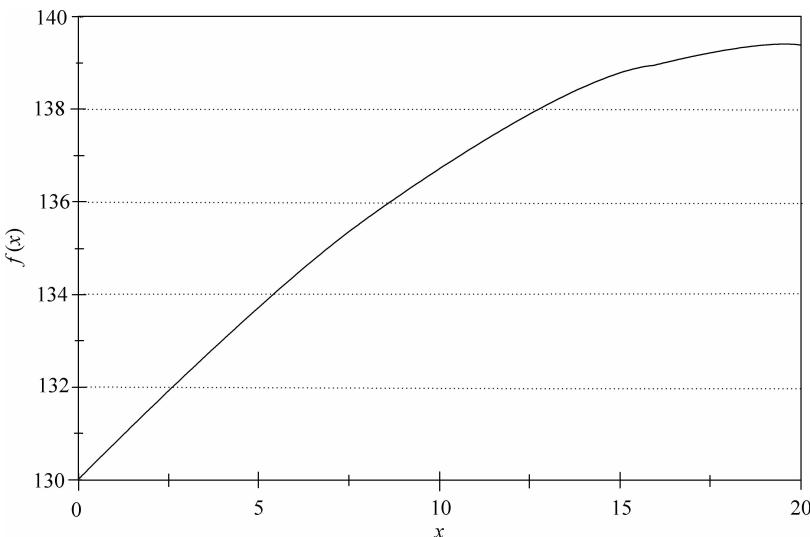


图 3-1 非线性增重模型下的售猪问题的净收益 $f(x)$ 关于售猪时间 x 的图像

图 3-2 才是完整图像, 它显示了解决这个问题所需要的所有重要特征.

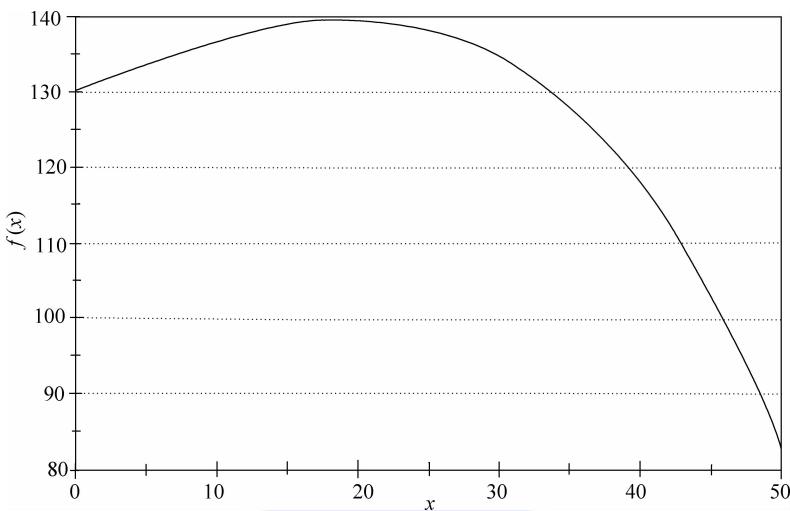
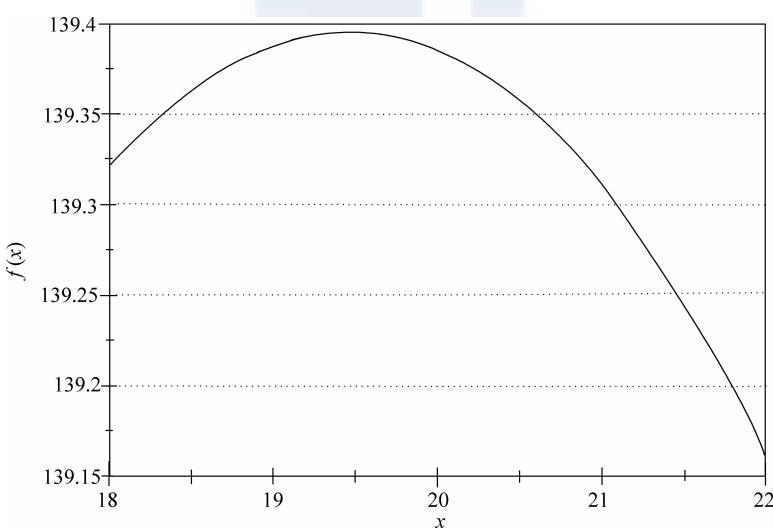
我们如何知道何时得到了一个完整图像呢? 这个问题没有一个简单的答案. 图像法是一种探索方法, 要经过实验并运用正确的判断. 这里我们当然不需要考虑取负值的 x , 但同时对 $x = 65$ 之外的点也不需要考虑. 在这个点之后猪的价格是负的, 这显然没有意义.

从图 3-2 中我们可以得出结论, 最大值发生在 $x = 20$ 附近, 此时 $y = f(x) = 140$. 为得到一个更好的估计, 我们可以把图像上的最大值附近放大来看. 图 3-3、图 3-4 为逐次放大的结果.

由图 3-4, 我们可以估计出最大值发生在

$$\begin{aligned}x &= 19.5 \\y &= f(x) = 139.395\end{aligned}\quad (3-5)$$

这里我们得到的最大值点的位置 x 有三位有效数字, 相应的最大值有六位有效数字. 由于在最大值点 $f'(x) = 0$, 函数 $f(x)$ 在这一点附近关于 x 的变化很不敏感, 因此我们可以得到比 x 有更高精确度的 $f(x)$.

图 3-2 非线性增重模型下的售猪问题的净收益 $f(x)$ 关于售猪时间 x 的完整图像图 3-3 非线性增重模型下的售猪问题的净收益 $f(x)$ 关于售猪时间 x 的第一次放大图像

第五步是回答问题。在考虑到小猪的生长率还在增加之后，我们现在建议等待 19 到 20 天再将猪卖出。这样会得到将近 140 美元的净收益。

在第四步中用图像法确定出最大值点的位置(见(3-5)式)没有很高的精确度。这对现在的问题是可以接受的，因为我们并不需要更高的精确度。虽然图像法确实可以给出高精度的结果(通过在极值点反复放大)，但这种情况下我们应该采用更有效的计算方法。我们会在后面的灵敏性分析中介绍一些方法。

现在来讨论(3-5)式中给出的最优点的坐标和最优值关于小猪的增长率 $c = 0.025$ 的灵敏度。一种方法是对几个不同的参数 c 的值重复我们前面做的图像分析的工作。但这太繁

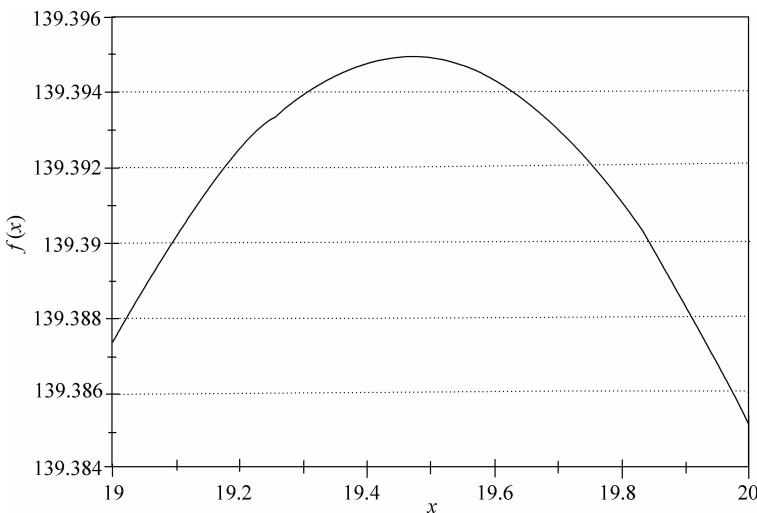


图 3-4 非线性增重模型下的售猪问题的净收益 $f(x)$ 关于售猪时间 x 的第二次放大图像

琐。我们将采用一个更有效的方法。

我们从将模型一般化开始。现在假设

$$\frac{dw}{dt} = cw, \quad w(0) = 200 \quad (3-6)$$

于是

$$w = 200e^{ct} \quad (3-7)$$

这样得到目标函数为

$$f(x) = (0.65 - 0.01x)(200e^{cx}) - 0.45x \quad (3-8)$$

根据我们的图像分析，我们知道对 $c=0.025$ ，最大值出现在 $f'(x)=0$ 的内临界点处。由于 f 是 c 的连续函数，看起来对 0.025 附近的 c 得出同样的结论是合理的。为了确定这一内临界点的位置，需要计算导函数 $f'(x)$ 并求解方程 $f'(x)=0$ 。这个过程的第一部分（计算导数）相对比较容易，可以使用计算导数的标准方法。这一方法大家在一元微积分中已经学过了。事实上，它可以应用于任意可微函数。对表达式复杂的函数，也可以利用某个计算机代数系统（Maple、Mathematica、Derive 等），或某个图形计算器（如 HP-48）。在我们的问题中，不难用手算得出

$$f'(x) = 200ce^{cx}(0.65 - 0.01x) - 2e^{cx} - 0.45 \quad (3-9)$$

整个过程的第二部分是解方程

$$200ce^{cx}(0.65 - 0.01x) - 2e^{cx} - 0.45 = 0 \quad (3-10)$$

61

你可以试着用手算求解，但你不太可能得到一个解析解。一些计算机代数系统现在可以利用专门设计用来求解这类方程的 W 函数来求解(3-10)。随着数学及数学软件的发展，我们求解方程的能力会逐渐增加，但绝大多数方程无法用代数方法求解仍是显而易见的。虽然有一般的代数方法来计算导数，但没有一般的代数方法来解方程。甚至对于多项式，我们

知道, 对于五次或高于五次的多项式是不可能使用通用的代数方法来求解的(即没有类似于二次方程那样的求根的公式). 这就是为什么常常必须要借助于数值近似方法来求解代数方程.

我们要用牛顿法解方程(3-10). 你很可能已经在一元微积分中学习过牛顿法.

给定一个可微函数 $F(x)$ 及一个 $F(x) = 0$ 的根的近似点 x_0 . 牛顿法采用线性近似. 在点 $x = x_0$ 附近用通常的切线近似, 则有 $F(x) \approx F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$.

为得到 $F(x) = 0$ 的实际根的一个更好的近似 $x = x_1$, 我们令 $F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) = 0$, 解出 $x = x_1$, 则得到 $x_1 = x_0 - F(x_0)/F'(x_0)$. 从几何上看, 点 $x = x_0$ 处对 $y = F(x)$ 的切线与 x 轴在点 $x = x_1$ 相交. 只要 x_1 离 x_0 不太远, 切线近似就相当好, 从而 x_1 就接近真正的根. 牛顿法反复用切线近似, 给出对真解的一系列精度不断提高的近似值. 一旦与根充分接近, 牛顿法每次迭代给出的近似值的准确数位都会是上一次的近似值的准确数位的两倍.

图 3-5 用我们称为伪代码的形式给出了牛顿法的算法. 这是描述一个数值算法的标准方法.

将伪代码转化为可在计算机上直接运行的高级计算机语言程序(BASIC、FORTRAN、C、PASCAL 等)是非常容易的, 也可以用电子数据表格软件来实现伪代码. 在绝大多数计算机代数系统上也能够进行编程. 对本书中介绍的数值方法, 这些方法都是可行的. 我们不推荐用手算完成这些算法.

62

```
算法: 牛顿法
变量:  $x(n) = n$  次迭代后的根的近似解
      N = 迭代次数
输入:  $x(0)$ , N
过程: 开始
      对  $n = 1$  到  $N$  循环
          开始
               $x(n) \leftarrow x(n-1) - F(x(n-1))/F'(x(n-1))$ 
          结束
      结束
输出:  $x(N)$ 
```

图 3-5 单变量牛顿法的伪代码

在我们的问题中, 我们采用牛顿法来求方程

$$F(x) = 200ce^{cx}(0.65 - 0.01x) - 2e^{cx} - 0.45 = 0 \quad (3-11)$$

的根. 对接近 0.025 的 c , 我们期望能找到在 $x = 19.5$ 附近的根. 我们将牛顿法的计算机计算结果列在表 3-1 中. 对每一个 c 值都以 $x(0) = 19.5$ 为初始点, 进行 $N = 10$ 次迭代. 为了检验计算结果的精确性, 我们又对迭代次数 $N = 15$ 的情形进行了计算.

表 3-1 非线性增重模型下的售猪问题的最佳售猪时间 x 关于生长率参数 c 的灵敏性

c	x	c	x
0.022	11.626 349	0.026	21.603 681
0.023	14.515 929	0.027	23.550 685
0.024	17.116 574	0.028	25.332 247
0.025	19.468 159		

注意解方程(3-11)的方法包括两步。第一步用某种全局方法(图像法)确定近似解，第二步用一种快速收敛的局部方法求得满足精度要求的精确解。这是数值求解的两个阶段，它在大多数常用的求解方法中是很普遍的。对单变量最优化问题，图像法是最简单、最实用的全局方法。牛顿法易于用程序实现，而且在大多数图形计算器、电子数据表格软件和计算机代数系统中都有内置的解方程工具。虽然在细节上有所不同，但这些求解工具大多数都是以牛顿法的某些变形为基础的。它们可以像牛顿法一样安全、有效地使用。求解时首先要用某个全局方法求根的近似值，大多数这类解方程工具都要求一个根的初始估计值或一个包含根的初始区间。然后利用此工具求出根，并验证结果。验证可以采用对参数的容许值进行灵敏性分析，或将求出的解代回到原始的方程中。注意：对数值求解的结果轻易地、不加鉴别地信任是危险的。对许多实际问题，包括本书中的一些练习题，不恰当地应用数值求解工具能导致很严重的误差。初始时选用一个适当的全局方法及随后对根的验证都是数值求解过程的重要部分。一些计算器、计算机代数系统及电子数据表格软件也具有数值最优化工具，通常其程序都采用变形的牛顿法，这是建立在对导数的数值逼近的基础上的。对这些程序我们也有同样的建议：首先采用一个全局方法估计最优解的近似值，然后用数值最优化工具求解，最后对参数的容许值进行灵敏性分析，以保证结果的精确度。

63

为了将灵敏性分析的结果与问题的原始数据相联系，我们在图 3-6 中画出了表示最优售猪时间的根 x 关于生长率

$$g = 200c \quad (3-12)$$

的曲线。这里初始给出的生长率为 $g = 5$ 磅/天。

为得到对灵敏性的数值估计，我们取 $c = 0.02525$ (原始 $c = 0.025$ 的 1% 的增加)再来求解一次方程(3-11)。此时求出的解为

$$x = 20.021 136$$

这表示 x 增加了 2.84%，我们由此估计出 $S(x, c) = 2.84$ 。根据

$$g = 200c$$

我们很容易说明

$$S(x, g) = S(x, c) = 2.84$$

如果令 h 为猪的初始重量(我们假设 $h = 200$ 磅)，由

$$h = \frac{5}{c}$$

我们有

$$\begin{aligned} S(x, h) &= \frac{dx}{dh} \cdot \frac{h}{x} \\ &= \left(\frac{dx/dc}{dh/dc} \right) \left(\frac{5/c}{x} \right) \\ &= -S(x, c) = -2.84 \end{aligned}$$

[64]

事实上，如果 y 正比于 z ，总有

$$S(x, y) = S(x, z) \quad (3-13)$$

而如果 y 反比于 z ，则有

$$S(x, y) = -S(x, z) \quad (3-14)$$

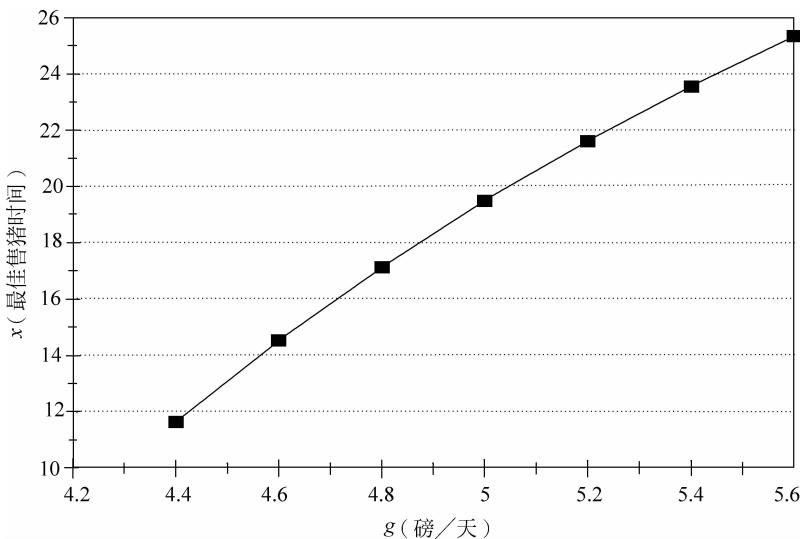


图 3-6 非线性增重模型下的售猪问题的最佳售猪时间 x 关于生长率 g 的图像

现在我们已经求出了 x 关于猪的初始重量和生长率的灵敏性。其他的灵敏性与第 1 章中讨论的原始问题是相同的，这是因为目标函数关于其中的其他参数的出现形式都没有变化。

现在得到的最优解与第 1 章中给出的解有显著的不同（现在为 19 到 20 天，而第 1 章中为 8 天），这使得对我们模型的稳健性有很大的疑问。假设

$$p = 0.65 - 0.01t$$

是否在三周的时间内一直成立也是需要认真考虑的问题。关于价格的其他模型当然也应该与一头有代表性的猪的生长过程的更复杂模型一同考虑。在本章最后的练习中涉及了一些关于稳健性的内容。我们现在能够说的就是：如果猪的生长率不下降，如果价格下降的速度不加快，我们就应当将猪再多养一个星期。到那时，我们将以新的数据为基础重新讨论。

[65]

3.2 多变量最优化

关于求一个多元函数的整体最优值点的实际问题与上一节讨论的问题在很多地方都是相似的。由于维数的增加，问题的复杂度也增加了。对维数 $n > 3$ 的情况，图像法已不再适用。对方程 $\nabla f = 0$ 的求解也由于独立变量个数的增加而变得很复杂。有约束的最优化问题由于可行域的几何形状可能很复杂，求解也更为困难。

例 3.2 一个城郊的社区计划更新他们的消防站。原来的消防站设置在历史上的市中心，城市规划人员要将新的消防站设置得更科学合理。对响应时间数据的统计分析给出：对离救火站 r 英里处打来求救电话，需要的响应时间估计为 $3.2 + 1.7r^{0.91}$ 分钟。（第 8 章的习题 16、17 涉及了推导此公式的内容。）图 3-7 中给出了从消防官员处得到的从城区的不同区域打来的求救电话频率的估计数据。其中每一格代表一平方英里[⊖]，格内的数字为每年从此区域打来的紧急求救电话的数量。求新的消防站的最佳位置。

3	0	1	4	2	1
2	1	1	2	3	2
5	3	3	0	1	2
8	5	2	1	0	0
10	6	3	1	3	1
0	2	3	1	1	1

图 3-7 城区的每一平方英里区域每年发生的紧急呼救次数地图(上北右东)

我们用 (x, y) 坐标来标记城区的地图上的位置。其中 x 为按英里到城市西部边界的距离， y 为按英里到南部边界的距离。例如， $(0, 0)$ 为地图的左下角， $(0, 6)$ 为地图的左上角。为简单起见，我们将此城区划分为 9 个 2×2 平方英里的正方形子区域，并假设每一次紧急呼救都发生在正方形的中心。如果 (x, y) 是新的消防站的位置，则对求救电话的平均响应时间为 $z = f(x, y)$ ，其中

$$\begin{aligned}
 z = & 3.2 + 1.7[6 \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2}^{0.91} \\
 & + 8 \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2}^{0.91} + 8 \sqrt{(x-5)^2 + (y-5)^2}^{0.91} \\
 & + 21 \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}^{0.91} + 6 \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}^{0.91} \\
 & + 3 \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2}^{0.91} + 18 \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}^{0.91} \\
 & + 8 \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}^{0.91} + 6 \sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2}^{0.91}] / 84
 \end{aligned} \tag{3-15}$$

问题是在区域 $0 \leq x \leq 6$, $0 \leq y \leq 6$ 上对 $z = f(x, y)$ 求最小值。

[⊖] 1 平方英里 = $2.590 \times 10^6 \text{ m}^2$.

图 3-8 为目地函数 f 在可行域上的三维图像。该图显示 f 在 $\nabla f = 0$ 的唯一内点达到最小值。图 3-9 为 f 的水平集的等值线图，显示了 $\nabla f = 0$ 发生在点 $x = 2, y = 3$ 附近。

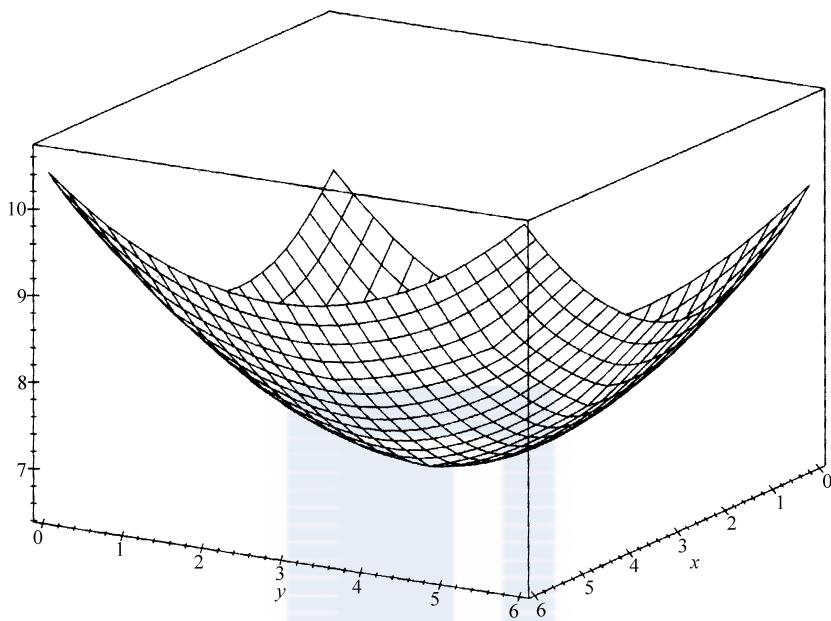


图 3-8 消防站位置问题中平均响应时间 $z=f(x, y)$ 关于地图位置 (x, y) 的三维图像

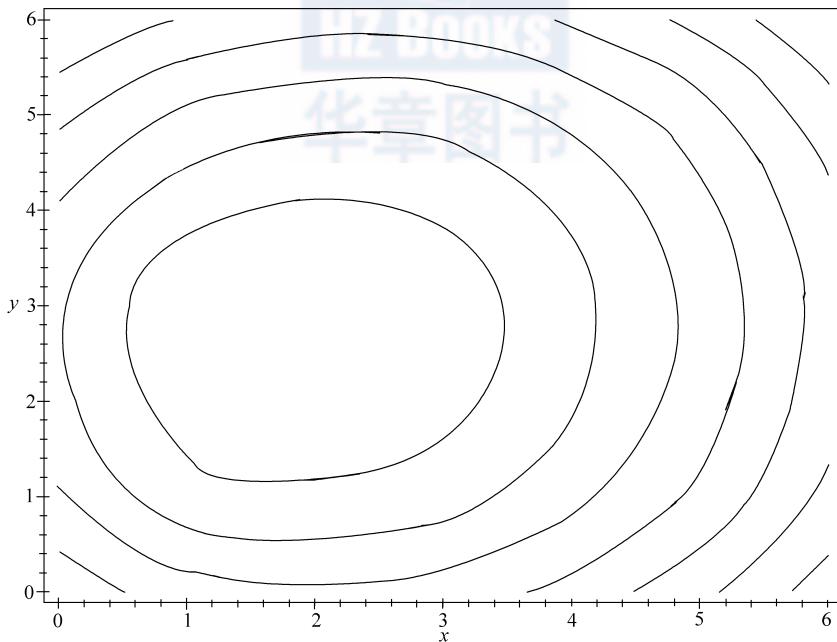


图 3-9 消防站位置问题中平均响应时间 $z=f(x, y)$ 关于地图位置 (x, y) 的等值线图

对此问题当然可以计算出 $\nabla f = 0$ ，但 $\nabla f = 0$ 无法代数求解。进一步的图像分析是可以的，但对多于一个变量的函数进行图像分析是非常麻烦的。我们这里需要的是用一个简单的全局方法对最小值点给出一个估计。

图 3-10 为随机搜索算法。这种最优化方法只是随机地在可行域上选取 N 个点，选择其中使目标函数的值达最小的点。记号随机数 $\{S\}$ 表示在集合 S 中随机选取的一个点。取 $a = 0$, $b = 6$, $c = 0$, $d = 6$ 及 $N = 1\,000$ ，对(3-15)式中的函数采用随机搜索算法，用计算机实现，得到最小值点的近似值为：

$$\begin{aligned}x \min &= 1.66 \\y \min &= 2.73 \\z \min &= 6.46\end{aligned}\tag{3-16}$$

算法：随机搜索方法
变量：
 $a = x$ 的下限
 $b = x$ 的上限
 $c = y$ 的下限
 $d = y$ 的上限
 $N =$ 迭代次数
 $x \min =$ 最小点 x 坐标的近似解
 $y \min =$ 最小点 y 坐标的近似解
 $z \min =$ 最小点 $F(x, y)$ 值的近似解
输入： a, b, c, d, N
过程：
开始
 $x \leftarrow \text{Random} \{ [a, b] \}$
 $y \leftarrow \text{Random} \{ [c, d] \}$
 $z \min \leftarrow F(x, y)$
对 $n = 1$ 到 N 循环
开始
 $x \leftarrow \text{Random} \{ [a, b] \}$
 $y \leftarrow \text{Random} \{ [c, d] \}$
 $z \leftarrow F(x, y)$
若 $z < z \min$ ，则
 $x \min \leftarrow x$
 $y \min \leftarrow y$
 $z \min \leftarrow z$
结束
结束
输出： $x \min, y \min, z \min$

图 3-10 随机搜索方法的伪代码

由于该算法采用了随机数，所以输入同样数据，再一次执行此程序可能会得到略有不同的解。随机搜索的精确程度与 N 个点在整个可行域上按均匀网格分布的情况大致相当。这样的网格应该有 32×32 个网格点 ($32^2 \approx 1\,000$)，因此在 x 和 y 方向上的精度都约为 $6/32 \approx 0.2$ 。由于在最小点有 $\nabla f = 0$ ，我们得到的 z 的精度会高很多。除了随机搜索外，另一种方

法是格点搜索(在 N 个等距节点处检查 $z = F(x, y)$). 格点搜索方法的性能基本上与随机搜索相同, 但随机搜索方法更灵活, 也更容易实现.

(3-16) 式中的最小点位置(1.7, 2.7) 及相应的平均响应时间 6.46 分钟的估计值是由在可行域中取 $N = 1000$ 个随机点对目标函数求值得到的. 增加 N 会得到更高精度的解. 但这一简单的全局方法的特性并不适于通过增加 N 来提高精度. 解每多增加一位小数的精确度, 就要求 N 扩大 100 倍. 因此这一方法只适于得到最优解的一个粗略的近似. 对我们现在的问题, 这样求出的解已经足够好了. 由于我们在前面为简化所做的假设, 消防站的位置有 1 英里的误差, 因此现在要求更高的精度是没有必要的. 可以给出一个足够近似的答案为: 消防站的位置应该在地图上的(1.7, 2.7)附近, 这样平均的响应时间约为 6.5 分钟. 准确的位置要受一些模型中没有体现的因素的影响, 如道路的位置、在最优位置所在区域的可用土地情况等. 考虑不同的“最优”位置也是合理的, 见习题 3.6.

67
69

对响应时间关于最终给出的消防站位置的灵敏性做出估计是非常重要的. 由于在最优点有 $\nabla f = 0$, 我们不期望 f 在(1.7, 2.7)附近有太大的变化. 为得到 f 关于最优点附近的 (x, y) 的灵敏性的一个具体的结果, 我们将 x, y 的范围改为 $1.5 \leq x \leq 2, 2.5 \leq y \leq 3$, f 改为 $-f$, 再一次运行随机搜索程序. 取 $N = 100$, 得到 f 在这个区域的最大值约为 6.49 分钟, 或者说大约比观察到的最优时间长 0.03 分钟. 这对在此边长半英里的正方形区域内哪一点设置消防站的实际应用不会有什么影响.

上述例子中采用的随机搜索方法虽然简单, 但较慢. 对一些要求更高精度的问题, 则不适于采用这一方法. 如果涉及的函数像例 3.2 中的目标函数一样复杂, 用这种方法很难求得精确的解. 更精确、更有效地求解多变量函数的整体最优化问题的方法绝大多数都以梯度为基础. 对我们下面讨论的例子, 由于梯度很容易计算, 用这些方法更容易处理.

例 3.3 一家草坪家具的生产厂生产两种草坪椅. 一种是木架的, 一种是铝管架的. 木架椅的生产价格为每把 18 美元, 铝管椅为每把 10 美元. 在产品出售的市场上, 可以售出的数量依赖于价格. 据估计, 若每天欲售出 x 把木架椅和 y 把铝管椅, 木架椅的出售价格不能超过 $10 + 31x^{-0.5} + 1.3y^{-0.2}$ 美元/把, 铝管椅的出售价格不能超过 $5 + 15y^{-0.4} + 0.8x^{-0.08}$ 美元/把. 求最优的生产量.

目标为在生产量的可行域 $x \geq 0, y \geq 0$ 上对利润函数 $z = f(x, y)$ (美元/天) 求最大值. 这里

$$\begin{aligned} z &= x(10 + 31x^{-0.5} + 1.3y^{-0.2}) - 18x \\ &\quad + y(5 + 15y^{-0.4} + 0.8x^{-0.08}) - 10y \end{aligned} \tag{3-17}$$

图 3-11 给出了 f 的图像. 图像显示 f 有一个唯一的达极大值的内点, 此点满足 $\nabla f = 0$. 图 3-12 画出了 f 的水平集图. 由图可见, 最大值出现在 $x = 5, y = 6$ 附近. 我们计算梯度 $\nabla f(x, y) = (\partial z / \partial x, \partial z / \partial y)$, 得到

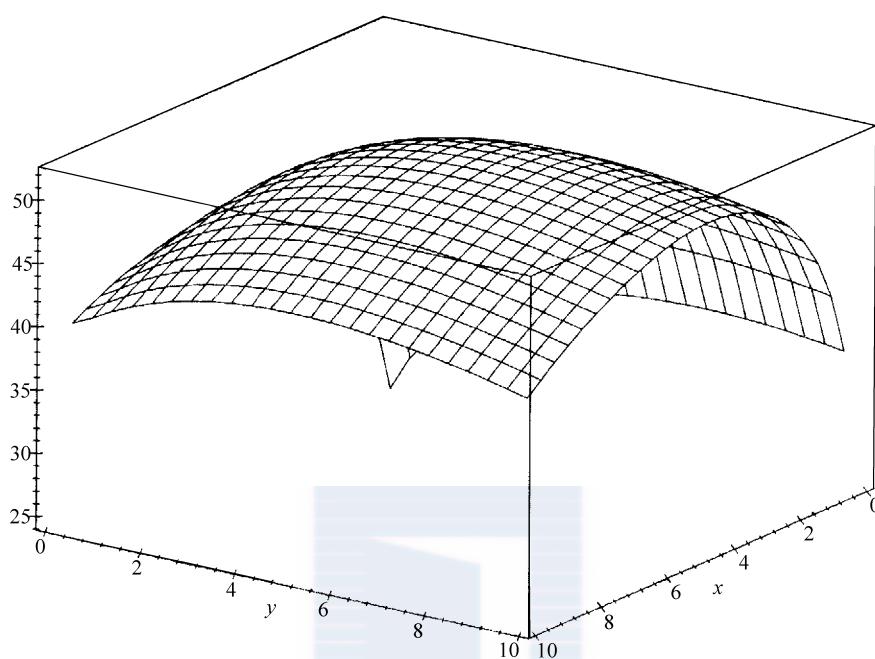


图 3-11 草坪椅问题中利润 $z=f(x, y)$ 关于每天的木架椅产量 x 和铝管椅产量 y 的三维图像

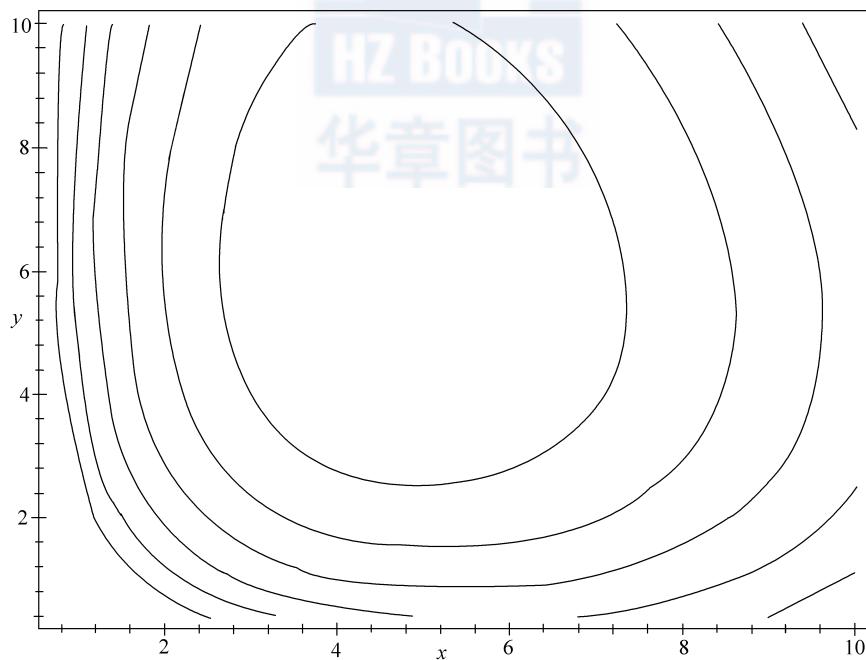


图 3-12 草坪椅问题中利润 $z=f(x, y)$ 关于每天的木架椅产量 x 和铝管椅产量 y 的等值线图

70
l
71

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 15.5x^{-0.5} - 8 + 1.3y^{-0.2} - 0.064yx^{-1.08} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 9y^{-0.4} - 5 + 0.8x^{-0.08} - 0.26xy^{-1.2}\end{aligned}\quad (3-18)$$

在区域 $0 \leq x \leq 10$, $0 \leq y \leq 10$ 上应用 $N = 1000$ 个点的随机搜索算法, 得到生产量为每天生产 $x = 4.8$, $y = 5.9$ 把椅子时可达每天 52.06 美元的最大利润. 为得到最优值点的一个更精确的数值近似解, 我们用多变量函数的牛顿法来求解梯度方程 $\nabla f = 0$. 图 3-13 给出了两个变量的牛顿法算法.

```

算法: 两个变量的牛顿法
变量:  $x(n) = n$  次迭代后  $x$  坐标的近似解
         $y(n) = n$  次迭代后  $y$  坐标的近似解
         $N =$  迭代次数
输入:  $x(0)$ ,  $y(0)$ ,  $N$ 
过程: 开始
        对  $n = 1$  到  $N$  循环
            开始
                 $q \leftarrow \partial F / \partial x(x(n-1), y(n-1))$ 
                 $r \leftarrow \partial F / \partial y(x(n-1), y(n-1))$ 
                 $s \leftarrow \partial G / \partial x(x(n-1), y(n-1))$ 
                 $t \leftarrow \partial G / \partial y(x(n-1), y(n-1))$ 
                 $u \leftarrow -F(x(n-1), y(n-1))$ 
                 $v \leftarrow -G(x(n-1), y(n-1))$ 
                 $D \leftarrow qt - rs$ 
                 $x(n) \leftarrow x(n-1) + (ut - vr) / D$ 
                 $y(n) \leftarrow y(n-1) + (qw - su) / D$ 
            结束
        结束
输出:  $x(N)$ ,  $y(N)$ 
```

图 3-13 两个变量的牛顿法的伪代码

给定一组可微函数 f_1, \dots, f_n , $(x_1(0), \dots, x_n(0))$ 为如下方程组的根的初始近似值:

$$\begin{aligned}f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= 0\end{aligned}\quad (3-19)$$

为简化叙述及说明单变量与多变量牛顿法的联系, 我们采用向量记号. 记 $x = (x_1, \dots, x_n)$, $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, 我们可以将 (3-19) 式写为 $F(x) = 0$ 的形式, $x(0)$ 为其根的初始估计. 牛顿法采用线性近似对 $F(x) = 0$ 的准确根构造一个精度不断提高的近似值序列 $x(1), x(2), x(3), \dots$ 在 $x = x(0)$ 附近, 我们有 $F(x) \approx F(x(0)) + A(x - x(0))$, 其中 A 为 $x = x(0)$ 处的偏导数矩阵:

$$A = \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{matrix}$$

这就是切线近似的多变量形式。为得到对 $F(x) = 0$ 的准确根的一个更好的估计值 $x = x(1)$ ，我们令 $F(x(0)) + A(x - x(0)) = 0$ ，解出 $x = x(1)$ ，即 $x(1) = x(0) - A^{-1}F(x(0))$ 。这与在单变量情形下得到的公式的形式是完全相同的，只是这里不能除以导数矩阵，而是要用逆矩阵。当求出的近似解与根充分接近时，每次迭代给出的近似值的准确数位都会是上一次得到的准确数位的两倍。与单变量情况一样，牛顿法得到的近似序列很快地收敛到准确根。

图 3-13 给出的两个变量的牛顿法算法的伪代码中用到了 2×2 矩阵的逆矩阵的计算公式：

$$\begin{pmatrix} q & r \\ s & t \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{qt - rs} \begin{pmatrix} t & -r \\ -s & q \end{pmatrix}$$

在一般情况下，需要用其他方法计算导数矩阵 A 的逆。有关多变量牛顿法的更多细节请查阅参考文献 [Press 等, 2002]。

在我们的问题中，有

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 15.5x^{-0.5} - 8 + 1.3y^{-0.2} - 0.064yx^{-1.08} \\ G(x, y) &= 9y^{-0.4} - 5 + 0.8x^{-0.08} - 0.26xy^{-1.2} \end{aligned} \quad (3-20)$$

从而可以计算出

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 0.06912yx^{-2.08} - 7.75x^{-1.5} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -0.064x^{-1.08} - 0.26y^{-1.2} \\ \frac{\partial G}{\partial x} &= -0.064x^{-1.08} - 0.26y^{-1.2} \\ \frac{\partial G}{\partial y} &= 0.312xy^{-2.2} - 3.6y^{-1.4} \end{aligned} \quad (3-21)$$

72
l
73

取 $x(0) = 5$, $y(0) = 5$ ，用两个变量的牛顿法的计算机程序进行 $N = 10$ 次迭代求解，得到

$$\begin{aligned} x &= 4.68959 \\ y &= 5.85199 \end{aligned} \quad (3-22)$$

作为所求根的近似值。为保证解的可靠性，再取 $N = 15$ 计算一次。将结果代入到 (3-17) 式中，得到 $z = 52.0727$ 。因此，草坪椅问题的最优解为：每天生产 4.69 把木架椅、5.85 把铝管椅，可得到每天 52.07 美元的利润。

与单变量情况相同，求方程组的数值近似解也是一个两步过程。首先要用一个全局方

法估计出根的位置。如果只有两个变量，可以采用图像法，但对大多数问题则需要采用某个数值方法（如随机搜索法）。也可以采用一些较复杂的全局算法，它们通常都适用于某类特殊的问题。下一步我们要用一个快速的局部方法来求高精确度的解，所求出的解的可靠性要通过对能够控制精度的参数进行灵敏性分析，或将数值解带回到原始的方程组中来验证。牛顿法是一个需要计算偏导数的非常快的局部方法。还有许多对偏导数做近似的改进牛顿法，可以参见参考文献[Press 等, 2002]。大多数电子数据表格软件和计算机代数系统都有多变量方程的求解工具，在大多数数值分析软件的库函数和工具包中也有相应的求解工具。它们的使用都要从用一个全局方法对根的位置做出初始估计开始，然后用求解工具求出解，并照常对解加以验证。不要仅仅输入方程组，用工具求解后就接受它给出的解，这样可能会导致严重的误差。许多电子数据表格软件、计算机代数系统及数值分析软件包都具有多变量数值最优化工具，通常其程序都采用基于对导数进行数值逼近的变形的牛顿法。对这些程序我们也有同样的建议：首先采用一个全局方法估计最优解的近似值，然后用数值最优化工具求解，最后对参数的容许值进行灵敏性分析，以保证结果的正确。

有约束的多变量最优化问题的求解更加困难。在某些情况下，最优解出现在可行域的内部，从而我们可将问题视为无约束的情况。当最优解出现在边界上时，情况会更为复杂。对这类问题没有简单的、一般有效的计算方法。现有的方法只适用于一些具有特定性质的特殊类型的问题。我们会在下一节中讨论其中最重要的问题。

3.3 线性规划

74

有约束的多变量最优化问题通常总是难以求解的。人们研究了许多计算方法来处理一些特殊类型的多变量最优化问题，但仍缺乏较好的一般性的方法，即使是非常复杂的一般性方法也不存在。讨论这类问题的新的计算方法的研究领域称为非线性规划，这是个非常活跃的领域。

最简单的一类有约束的多变量最优化问题的目标函数和约束函数都是线性的，对这类问题的计算方法的研究称为线性规划。线性规划的软件包非常普及，并且经常被应用于制造业、投资、农业、运输和政府机构。典型的大规模问题包括数千个决策变量和数千个约束。在许多有资料可查的事例中，基于线性规划模型的运筹分析节约了数百万美元的资金。详细的资料可以在运筹学和管理学的文献中找到。

例 3.4 一个家庭农场有 625 英亩[⊖]的土地可以用来种植农作物。这个家庭考虑种植的农作物有玉米、小麦和燕麦。预计可以有 1 000 英亩·英尺的灌溉用水，农场工人每周可以投入的工作时间为 300 小时。其他的数据在表 3-2 中给出。为获得最大收益，每种作物应该各种种植多少？

[⊖] 1 英亩 = 4 046. 856m².

表 3-2 例 3.4 中农场问题的有关数据

条件 (每英亩)	作物		
	玉米	小麦	燕麦
灌溉用水(英亩—英尺)	3.0	1.0	1.5
劳力(人·小时/周)	0.8	0.2	0.3
收益(美元)	400	200	250

我们采用五步方法。第一步的结果显示在图 3-14 中。第二步为选择建模方法。我们用线性规划模型来处理这一问题。

变量: x_1 = 种植玉米的英亩数
 x_2 = 种植小麦的英亩数
 x_3 = 种植燕麦的英亩数
 w = 需要的灌溉用水(英亩—英尺)
 l = 需要的劳力(人·小时/周)
 t = 种植作物的总英亩数
 y = 总收益(美元)

假设: $w = 3.0x_1 + 1.0x_2 + 1.5x_3$
 $l = 0.8x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3$
 $t = x_1 + x_2 + x_3$
 $y = 400x_1 + 200x_2 + 250x_3$

$w \leq 1000$
 $l \leq 300$
 $t \leq 625$
 $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$

目标: 求 y 的最大值

图 3-14 农场问题的第一步的结果

线性规划模型的标准形式(不等式形式)如下: 在由约束

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned} \quad (3-23)$$

及 $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ 定义的可行域上对目标函数 $y = f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$ 求最大值。这是第 2 章中讨论的有约束的多变量最优化问题的一种特殊情况。记

$$\begin{aligned} g_1(x_1, \dots, x_n) &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ &\vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) &= a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned} \quad (3-24)$$

及

$$g_{m+1}(x_1, \dots, x_n) = x_1$$

⋮

$$g_{m+n}(x_1, \dots, x_n) = x_n$$

约束可以写为 $g_1 \leq b_1, \dots, g_m \leq b_m$, 及 $g_{m+1} \geq 0, \dots, g_{m+n} \geq 0$. 满足这些约束的 (x_1, \dots, x_n) 的集合称为可行域, 表示决策变量 x_1, \dots, x_n 的所有可行的取值. 由于 $\nabla f = (c_1, \dots, c_n)$ 不可能是零, 因此函数不可能在其可行域的内部达最大值. 在边界上的最大值点上, 我们有

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \dots + \lambda_{m+n} \nabla g_{m+n} \quad (3-25)$$

这里只有第 i 个约束是关键约束时才有 $\lambda_i \neq 0$. 对 $i = 1, \dots, m$, 拉格朗日乘子 λ_i 代表了若将第 i 个约束的限制条件放松一个单位(即将第 i 个约束改为 $g_i(x_1, \dots, x_n) \leq b_i + 1$), 目标函数 $y = f(x_1, \dots, x_n)$ 最大值的可能的增加量. 线性规划问题的最优解的计算通常采用单纯形法的变形, 用计算机来完成. 这一方法的基础是最优解一定会出现在可行域的某个顶点处(你很容易验证这一点). 我们不讨论单纯形法的代数细节, 而是将重点放在介绍正确使用线性规划软件包所需要了解的内容上.

在单纯形法中, 顶点坐标的计算采用线性规划模型的另一种标准形式(等式形式): 在由约束

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} &= b_m \end{aligned} \quad (3-26)$$

及 $x_1 \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0$ 定义的集合上对 $y = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ 求最大值. 变量 x_{n+i} 称为松弛变量, 因为它代表了第 i 个约束的松弛剩余量. 当松弛变量 $x_{n+i} = 0$ 时第 i 个约束为关键约束. 一个顶点的坐标可以通过令变量 x_1, \dots, x_{m+n} 中的 n 个变量为零值后, 求解相应的 m 个未知数、 m 个方程的联立方程组得到. 如果剩下的 m 个变量(称为基变量)的值都是非负, 则这个顶点为可行的.

假设我们有一个中等规模的线性规划问题, 包含 $n = 50$ 个变量和 $m = 100$ 个约束, 则顶点的数目等于从 150 个变量(50 个决策变量加上 100 个松弛变量)中选择 50 个取为零的变量的全部可能情况的数量. 从 150 中选 50 的数量为 $(150!)/(50!)(100!)$, 约为 2×10^{40} . 一个每十亿分之一秒可以检查一个顶点的计算机程序要运行约 8×10^{30} 年才能解出这个问题. 这是一个典型的线性规划应用的例子. 单纯形法只计算从顶点中选出的一个子集(总数的非常小的一部分). 一个规模为 $n = 50, m = 100$ 的线性规划问题可以在一台大型机上很快地解出. 在我们写这本书的时候, 这样规模的问题已经达到了在个人计算机上用合理的时间求解的上

限，但在不久的将来，随着技术的进步，这一限制一定会放宽。一般地，用单纯形法求解线性规划问题的执行时间正比于 m^3 ，因此处理器速度提高一个数量级会使能用这台机器处理的线性规划问题的规模提高到两倍以上。对本书中的问题，任何好的单纯形法计算机执行程序都是适用的，建议不要用手算求解这些问题。

第三步是将线性规划模型表示为标准形式。在我们的问题中，决策变量为每种作物种植的英亩数为 x_1, x_2, x_3 。我们要在集合

$$\begin{aligned} 3.0x_1 + 1.0x_2 + 1.5x_3 &\leq 1000 \\ 0.8x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 &\leq 300 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 625 \end{aligned} \quad (3-27)$$

及 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ 上对总收益 $y = 400x_1 + 200x_2 + 250x_3$ 求最大值。

第四步为求解问题。我们用由 Linus Schrage 所写的单纯形法计算机执行程序 LINDO 来求解。第四步的结果表示在图 3-15 中。最优解为 $Z = 162500$, $x_1 = 187.5$, $x_2 = 437.5$, $x_3 = 0$ 。由于第二行与第四行的松弛变量为零，所以第一个和第三个约束为关键约束。而第三行的松弛变量等于 62.5，因此第二个约束条件不是关键的。

```
MAX      400 X1 + 200 X2 + 250 X3
SUBJECT TO
    2)  3 X1 + X2 + 1.5 X3 <= 1000
    3)  0.8 X1 + 0.2 X2 + 0.3 X3 <= 300
    4)  X1 + X2 + X3 <= 625
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

   1)  162500.000

VARIABLE          VALUE          REDUCED COST
   X1      187.500000          .0000000
   X2      437.500000          .0000000
   X3      .0000000           -.000015

ROW      SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
   2)          .000000          100.0000000
   3)          62.500000          .0000000
   4)          .000000          99.9999800

NO. ITERATIONS=      2
```

图 3-15 用线性规划软件包 LINDO 求出的农场问题的最优解

第五步为回答问题. 问题为每种作物应该各种植多少. 最优的方案为种玉米 187.5 英亩, 种小麦 437.5 英亩, 不种燕麦. 这样可以得到 162 500 美元的收益. 我们求出的最优的作物种植方案用光了 625 英亩的土地和 1 000 英亩-英尺的灌溉用水, 但在可用的每周 300 人-小时的劳力中只用掉了 237.5. 这样每周有 62.5 人-小时可以用于其他可获利的工作或空闲下来.

我们的灵敏性分析首先从考虑可用的灌溉用水量开始. 这个量会由于降水和温度而改变, 这会影响农场的蓄水池的水量. 还可能从附近的农场购买额外的灌溉用水. 图 3-16 显示了增加 1 英亩-英尺的灌溉水量对最优解的影响. 现在我们可以多种半英亩的玉米(可获利更多的作物), 而且还节约了一点劳力(每周 0.3 人-小时). 净收益增加了 100 美元.

```
MAX      400 X1 + 200 X2 + 250 X3
SUBJECT TO
    2)  3 X1 + X2 + 1.5 X3 <= 1001
    3)  0.8 X1 + 0.2 X2 + 0.3 X3 <= 300
    4)  X1 + X2 + X3 <= 625
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE
    1)  162600.000

VARIABLE      VALUE      REDUCED COST
    X1      188.000000      .000000
    X2      437.000000      .000000
    X3      .000000      -.000015

ROW      SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
    2)      .000000      100.000000
    3)      62.200000      .000000
    4)      .000000      99.999980

NO. ITERATIONS=      0
```

图 3-16 用线性规划软件包 LINDO 求出的在农场问题中增加 1 英亩-英尺的灌溉水量的最优解

这 100 美元是该资源的影子价格(灌溉用水). 农场会愿意以不超过 100 美元每英亩-英尺的价格购买额外的灌溉用水. 另一方面, 农场不会愿意以低于 100 美元每英亩-英尺的价格出让自己拥有的灌溉用水. 在图 3-15 中, 三种资源(水、劳力和土地)的影子价格称为对偶价格. 它们列在相应的松弛变量旁边. 增加 1 英亩的土地的价值为 100 美元, 额外增加劳力的价值为零, 因为劳力已经是过剩的了.

种植每种作物能够获得的每英亩的收益会随着气候和市场变化. 图 3-17 显示了玉米收益的少量提高对最优解的影响. 这不会影响决策变量 x_1 , x_2 和 x_3 (每种作物的种植数量)的最优

取值. 总的收益当然会增加, 增加量为 $50x_1 = 9\ 375$ 美元. 影子价格的改变也是值得注意的. 由于玉米的收益提高, 水的价值更高了. (虽然水和土地约束都是关键的, 但水的约束限制了我们种植更多的玉米来取代小麦.)

```

MAX      450 X1 + 200 X2 + 250 X3
SUBJECT TO
    2) 3 X1 + X2 + 1.5 X3 <= 1000
    3) 0.8 X1 + 0.2 X2 + 0.3 X3 <= 300
    4) X1 + X2 + X3 <= 625
END

LP OPTIMUM FOUND AT STEP      0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

    1) 171875.000

VARIABLE      VALUE      REDUCED COST
    X1      187.500000      .000000
    X2      437.500000      .000000
    X3      .000000      12.500000

ROW      SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
    2)      .000000      125.000000
    3)      62.500000      .000000
    4)      .000000      75.000000

NO. ITERATIONS=      0

```

图 3-17 用线性规划软件包 LINDO 求出的在农场问题中提高玉米的收益后的最优解

图 3-18 显示了如果燕麦的收益比预期的提高一些会出现什么情况. 这个参数的一个很小的变化就会对最优解有很显著的影响. 现在我们以种燕麦取代了种小麦. 玉米的种植量也有相当的减少. 显然我们的模型对这个参数很敏感. 由于这一情况, 需要对这个参数的灵敏性进行更深入的讨论.

记 c 为燕麦的收益(美元/英亩), 从而目标函数为 $f(x) = 400x_1 + 200x_2 + cx_3$. 注意 c 的值不影响可行域 S 的形状. 取不同的 c 再进行几次计算. 当 $c \leq 250$ 时最优解出现在顶点 $(187.5, 437.5, 0)$ 处, 而当 $c > 250$ 时最优解出现在相邻的顶点 $(41.66, 0, 583.33)$ 处, 这两个点都在由两个平面

$$\begin{aligned} 3.0x_1 + 1.0x_2 + 1.5x_3 &= 1000 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 625 \end{aligned} \tag{3-28}$$

相交得到的直线上. 考虑这条直线上任一点处的梯度向量 $\nabla f = (400, 200, c)$, 当 $c < 250$ 时, 梯度向量指向 $x_3 = 0$ 的顶点, 当 $c > 250$ 时, 梯度向量指向 $x_2 = 0$ 的顶点. 随着 c 的增加, 梯度向量从前一个点转向后一个点. 当 $c = 250$ 时, 梯度向量 ∇f 与通过这两点的直线垂直. 对这个 c 值, 位于这两个顶点之间的线段上的任何一个点都是最优解.

```
MAX      400 X1 + 200 X2 + 260 X3
SUBJECT TO
    2) 3 X1 + X2 + 1.5 X3 <= 1000
    3) 0.8 X1 + 0.2 X2 + 0.3 X3 <= 300
    4) X1 + X2 + X3 <= 625
END
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      1
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
   1) 168333.300
VARIABLE      VALUE      REDUCED COST
   X1      41.666670      .000000
   X2      .000000      13.333340
   X3      583.333300      .000000
ROW      SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
   2)      .000000      93.333340
   3)      91.666660      .000000
   4)      .000000      120.000000
NO. ITERATIONS=      1
```

图 3-18 用线性规划软件包 LINDO 求出的在农场问题中提高燕麦的收益后的最优解

模型对参数 c 的灵敏性的实际结果就是我们不知道应该种燕麦还是应该种小麦。收益的一个微小变化就会改变我们的最优决策。根据每英亩的收益会随着天气和市场变化的事实，最好是能给农场主多个选择。任何一种作物的混合种植方式 ($0 \leq t \leq 1$)

$$\begin{aligned}x_1 &= 187.5t + 41.66\bar{(1-t)} \\x_2 &= 437.5t + \quad 0\bar{(1-t)} \\x_3 &= \quad 0t + 583.33\bar{(1-t)}\end{aligned}\tag{3-29}$$

都会用尽现有的土地和灌溉用水资源。每英亩的收益数据有太多的不确定因素，因此无法说明哪个选择会产生最大利润。

有时灵敏性分析要根据将初始的研究结果应用于实际后得到的客户反馈来进行。假设在农场主看到我们的分析结果之后，又接到了一个新的玉米品种广告的新种子目录。这种新品种玉米较贵，但据称所需灌溉用水量少。图 3-19 为假设种玉米只需要 2.5 英亩-英尺（而不是 3.0）的灌溉用水时的灵敏性计算结果。新品种玉米可多获得 12 500 美元的收益，而在这情况下，我们当然会比以前种更多的玉米。值得注意的是，这时水的影子价格也提高了 33%。

最后假设农场主想考虑增加另一种新的作物——大麦。一英亩大麦需要 1.5 英亩-英尺的水和 0.25 人·小时的劳力，预期可获得 200 美元的收益。在我们的模型中用一个新的决策变量 x_4 = 大麦的英亩数来表示这种新的作物。图 3-20 为模型的计算结果。与我们的原问

题相比结果基本不变。玉米和小麦的混合种植方案仍是最优解，其原因也很容易看出。虽然大麦和小麦的收益是相同的，但大麦需要更多的水和劳力。

```
MAX      400 X1 + 200 X2 + 250 X3
SUBJECT TO
    2)  2.5 X1 + X2 + 1.5 X3 <= 1000
    3)  0.8 X1 + 0.2 X2 + 0.3 X3 <= 300
    4)  X1 + X2 + X3 <= 625
END
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      1
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
    1)  175000.000
VARIABLE          VALUE          REDUCED COST
    X1      250.00000          .000000
    X2      375.00000          .000000
    X3      .000000          16.666680
ROW     SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
    2)      .000000          133.333300
    3)      25.000000          .000000
    4)      .000000          66.666660
NO. ITERATIONS=      1
```

图 3-19 用线性规划软件包 LINDO 求出的在农场问题中种植低用水量的玉米时的最优解

```
MAX      400 X1 + 200 X2 + 250 X3 + 200 X4
SUBJECT TO
    2)  3 X1 + X2 + 1.5 X3 + 1.5 X4 <= 1000
    3)  0.8 X1 + 0.2 X2 + 0.3 X3 + 0.25 X4 <= 300
    4)  X1 + X2 + X3 + X4 <= 625
END
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      1
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
    1)  162500.000
VARIABLE          VALUE          REDUCED COST
    X1      187.500000          .000000
    X2      437.500000          .000000
    X3      .000000          -.000015
    X4      .000000          49.999980
ROW     SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
    2)      .000000          100.000000
    3)      62.500000          .000000
    4)      .000000          99.999980
NO. ITERATIONS=      1
```

图 3-20 用线性规划软件包 LINDO 求出的在农场问题中增加新作物大麦时的最优解

例 3.5 一家大建筑公司正在三个地点开掘。同时又在其他四个地点建筑，这里需要土方的填充。在 1、2、3 处挖掘产生的土方分别为每天 150, 400, 325 立方码[⊖]。建筑地点 A、B、C、D 处需要的填充土方分别为每天 175, 125, 225, 450 立方码。也可以从地点 4 用每立方码 5 美元的价格获得额外的填充土方。填充土方运输的费用约为一货车容量每英里 20 美元，一辆货车可以搬运 10 立方码的土方。表 3-3 给出了各地点间距离的英里数。求使公司花费最少的运输计划。

表 3-3 例 3.5 中土方问题的英里数：建筑地点间的距离

挖掘地点	接收填充土方的地点			
	A	B	C	D
1	5	2	6	10
2	4	5	7	5
3	7	6	4	4
4	9	10	6	2

我们采用五步方法。第一步的结果显示在图 3-21 中。例如，我们可以每天从地点 1 运出不超过 150 立方码的土方，而我们至少要向地点 A 运去 175 立方码的土方。由于运 10 立方码的土方每英里要花费 20 美元，从地点 $i = 1, 2, 3$ 向地点 $j = A, B, C, D$ 运 1 立方码的土方每英里需要 2 美元。如果从地点 4 运出，还要增加每立方码 5 美元的费用。假设只要我们愿意付费，从地点 4 可以获得的土方量就是不受限制的。

第二步是选择建模方法。我们用线性规划模型来处理这一问题，并用电子数据表格软件来求解。大多数电子数据表格软件都包含一个解方程工具或一个采用单纯形法的最优化工具。如果一个线性规划问题不是(3-23)或(3-26)式中定义的标准形式，可以很容易地将其转化为标准形式。例如，若对目标函数 $y = f(x_1, \dots, x_n)$ 求最小值，可以化为对 $-y$ 求最大值。很多软件都可以自动进行这些转化，从而允许问题以更自然的形式表示。对运输问题，单纯形法有一个特别的改进方法，这种运输单纯形法对大规模的问题的求解效率很高。对我们现在的问题，一般的单纯形法就足够了。

第三步是将问题表示为线性规划模型的形式。在这个问题中，决策变量为从地点 i 运往地点 j 的以立方码为单位的土方数 x_{ij} ，目标为求总运费 $y = C$ 的最小值，这里

$$\begin{aligned}
 y = & 10x_{1A} + 4x_{1B} + 12x_{1C} + 20x_{1D} \\
 & + 8x_{2A} + 10x_{2B} + 14x_{2C} + 10x_{2D} \\
 & + 14x_{3A} + 12x_{3B} + 8x_{3C} + 8x_{3D} \\
 & + 23x_{4A} + 25x_{4B} + 17x_{4C} + 9x_{4D}
 \end{aligned} \tag{3-30}$$

[⊖] 1 立方码 = 0.765 m³.

变量: x_{ij} = 从地点 i 运到地点 j 的土方量(立方码)

s_i = 从地点 i 运出的土方量(立方码)

r_j = 运到地点 j 的土方量(立方码)

c_{ij} = 从地点 i 运到地点 j 的土方运输费用(美元/立方码)

d_{ij} = 地点 i 到地点 j 的距离(英里)

C = 总运费(美元)

假设: $s_1 = x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + x_{1D}$

$s_2 = x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{2D}$

$s_3 = x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} + x_{3D}$

$s_4 = x_{4A} + x_{4B} + x_{4C} + x_{4D}$

$r_A = x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} + x_{4A}$

$r_B = x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} + x_{4B}$

$r_C = x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} + x_{4C}$

$r_D = x_{1D} + x_{2D} + x_{3D} + x_{4D}$

$s_1 \leq 150, s_2 \leq 400, s_3 \leq 325$

$r_A \geq 175, r_B \geq 125, r_C \geq 225, r_D \geq 450$

$c_{ij} = 2d_{ij}, \text{ 若 } i=1, 2, 3, \text{ 或 } c_{ij} = 2d_{ij} + 5, \text{ 若 } i=4.$

其中 d_{ij} 在表 3-3 中给出

其中:

$$\begin{aligned} C &= c_{1A}x_{1A} + c_{1B}x_{1B} + c_{1C}x_{1C} + c_{1D}x_{1D} \\ &\quad + c_{2A}x_{2A} + c_{2B}x_{2B} + c_{2C}x_{2C} + c_{2D}x_{2D} \\ &\quad + c_{3A}x_{3A} + c_{3B}x_{3B} + c_{3C}x_{3C} + c_{3D}x_{3D} \\ &\quad + c_{4A}x_{4A} + c_{4B}x_{4B} + c_{4C}x_{4C} + c_{4D}x_{4D} \\ x_{ij} &\geq 0, i=1, 2, 3, 4, j=A, B, C, D \end{aligned}$$

目标: 求 C 的最小值

图 3-21 土方问题的第一步的结果

满足约束

$$\begin{aligned} x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + x_{1D} &\leq 150 \\ x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{2D} &\leq 400 \\ x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} + x_{3D} &\leq 325 \\ x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} + x_{4A} &\geq 175 \\ x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} + x_{4B} &\geq 125 \\ x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} + x_{4C} &\geq 225 \\ x_{1D} + x_{2D} + x_{3D} + x_{4D} &\geq 450 \end{aligned} \tag{3-31}$$

及 $x_{ij} \geq 0, i=1, 2, 3, 4; j=A, B, C, D$.

图 3-22 为此问题的一个电子表格结构. 大多数单元格内都有数据. 我们在单元格 F9

到 F12, B13 到 E13 及 B15 中定义公式。比如，我们输入 $F9 = B9 + C9 + D9 + E9$, 及 $B13 = B9 + B10 + B11 + B12$, $B15 = B3 * B9 + C3 * C9 + \dots + D6 * D12 + E6 * E12$. 然后我们要告诉电子表格哪个单元格是目标、哪些单元格包含决策变量，并给出约束。具体的细节随不同的电子表格而变化。如果你对怎样使用不熟悉，可以参考你所用的电子表格软件手册或使用在线帮助工具。

A	A	B	C	D	E	F	G
1	花费						
2	地点	A	B	C	D		
3	1	10	4	12	20		
4	2	8	10	14	10		
5	3	14	12	8	8		
6	4	23	25	17	9		
7	解						
8	地点	A	B	C	D	运出量	可用量
9	1	0	0	0	0	0	150
10	2	0	0	0	0	0	400
11	3	0	0	0	0	0	325
12	4	0	0	0	0	0	
13	收到量	0	0	0	0		
14	需求量	175	125	225	450		
15	总运费	0					

85
86

图 3-22 用电子数据表格表示的土方问题

第四步是求解问题。图 3-23 显示了用电子表格的 Quattro Pro 最优化工具得到的本问题的解。注意所有的收到量约束都是关键的约束，而运出量的约束则不全是关键的。第五步为回答问题。最优解为每天从地点 1 向地点 B 运输 125 立方码的土方，从地点 2 向地点 A 运输 175 立方码，从地点 3 向地点 C 运输 225 立方码，再向地点 D 运输 100 立方码。D 所需要的剩余 350 立方码的土方从地点 4 获得。购买土方需要的额外费用由于地点 4 与 D 的距离近而抵消。这一运输方案的总费用为每天 7 650 美元。按这一方案，我们没有用掉地点 1、2 的所有挖掘出的土方，因此我们应该做其他安排来处理多余的土方。

我们首先通过检查可以由电子表格的最优化工具自动给出的一些结果报告来进行灵敏性分析。图 3-24 为关于问题的约束的灵敏性报告。注意地点 1 和 2 的约束不是关键的，分别有 25 和 225 的松弛量。这表示在最优方案中，地点 1 挖掘出的土方中有 25 立方码没有被运出，地点 2 有 225 立方码没有被运出。图 3-24 列出的对偶变量为影子价格。由于约束不是关键的，所以地点 1 和 2 的影子价格为零。地点 3 的影子价格为 -1 美元，这意味着如

果此约束的限制增加 1 立方码的土方，总运费就会增加 -1 美元。用电子表格求解的一个主要优点就是我们可以很容易地进行灵敏性分析。我们只要简单地在单元格 F12 中将 325 改为 326 再来求最优解即可。得到的最优解（没有显示出来）为 E11 变为 101，E12 变为 349，B15 变为 7 649。所有其他的决策变量的值都没有改变。换句话说，我们从地点 3 多运 1 立方码到地点 D，每天可节省 1 美元。

A	A	B	C	D	E	F	G
1	花费						
2	地点	A	B	C	D		
3	1	10	4	12	20		
4	2	8	10	14	10		
5	3	14	12	8	8		
6	4	23	25	17	9		
7	解						
8	地点	A	B	C	D	运出量	可用量
9	1	0	125	0	0	125	150
10	2	175	0	0	0	175	400
11	3	0	0	225	100	325	325
12	4	0	0	0	350	350	
13	收到量	175	125	225	450		
14	需求量	175	125	225	450		
15	总运费	7 650					

图 3-23 用电子数据表格求出的土方问题的最优运输方案

87

单元	值	约束	是否关键	松弛量	对偶值	增加量	减少量
地点 1	125	$<= 150$	否	25	0	无限制	25
地点 2	175	$<= 400$	否	225	0	无限制	225
地点 3	325	$<= 325$	是	0	-1	350	100
地点 A	175	$>= 175$	是	0	8	225	175
地点 B	125	$>= 125$	是	0	4	25	125
地点 C	225	$>= 225$	是	0	9	100	225
地点 D	450	$>= 450$	是	0	9	无限制	350

图 3-24 用电子数据表格求出的土方问题的灵敏性分析报告，给出了关于土方的可用量和需求量的变化的灵敏性

地点 A、B、C、D 的影子价格都是正的。例如，地点 C 的影子价格为 9 美元。如果我们在地点 C 多需求 10 立方码的土方，则总费用会增加 90 美元。为验证这一点，我们将 D14 从 225 改为 235，再求最优解。相应的最优解显示在图 3-25 中。我们注意到总费用增加了 90 美

元，从 7 650 美元增加到 7 740 美元。现在地点 C 从地点 3 接收了 235 立方码，地点 D 从地点 3 接收了 90 立方码，从地点 4 接收了 360 立方码，其他的运输量保持不变。

A	A	B	C	D	E	F	G
1	花费						
2	地点	A	B	C	D		
3	1	10	4	12	20		
4	2	8	10	14	10		
5	3	14	12	8	8		
6	4	23	25	17	9		
7	解						
8	地点	A	B	C	D	运出量	可用量
9	1	0	125	0	0	125	150
10	2	175	0	0	0	175	400
11	3	0	0	235	90	325	325
12	4	0	0	0	360	360	
13	收到量	175	125	235	450		
14	需求量	175	125	235	450		
15	总运费	7 740					

图 3-25 用电子数据表格求出的土方问题中地点 C 的土方需求量增加 10 立方码的解

图 3-24 中标记“增加量”与“减少量”的列给出使影子价格保持有效的各个约束条件的增加和减少量。如果我们提高地点 C 的需求量，从 225 到不超过 325，则总运费会提高每立方码 9 美元。如果 C 的需求超过了 325，则解的性质会改变。在这个例子中，我们很容易看出为什么 C 每天需求的土方超过了 325 立方码时，解的性质会改变。现在我们将地点 3 的所有土方都运到地点 C，但如果 C 的需求超过了 325，我们还要用更高的价格从其他地点运来土方。

图 3-26 显示了用电子表格给出的关于目标函数的系数的灵敏性的报告。其中的增加量和减少量表示使最优解保持不变的每一个每公里运费数据所允许的增加量和减少量。例如，现在从地点 1 到地点 B 的每公里运费为 4 美元，当减少量不超过 4 美元、增加量不超过 6 美元时最优的运输方案不变。总的运费会改变，这是因为我们每天从地点 1 到地点 B 运 125 立方码的土方。考虑单纯形法的几何性质，当我们改变目标函数的系数时，可行域根本没有改变。只有当目标函数变化较大，使得当前的最优解顶点不再保持最优时，最优解才会改变。这时最优解转到另一个顶点。我们可以通过改变单元格 C3 的值后再求最优解来验证这一点。如果我们在 C3 中输入 0 到 10 之间的某一个值，会得到与图 3-23 中完全相同的运输方案。如果我们在 C3 中输入 11，运输方案会改变，这时地点 B 每天会从地点 2 接

收 125 立方码的土方，而不从地点 1 接收土方。

变量单元	初始值	最终解	梯度	增加量	减少量
x1A	0	0	10	无限制	2
x2A	0	175	8	2	8
x3A	0	0	14	无限制	7
x4A	0	0	23	无限制	15
x1B	0	125	4	6	4
x2B	0	0	10	无限制	6
x3B	0	0	12	无限制	9
x4B	0	0	25	无限制	21
x1C	0	0	12	无限制	3
x2C	0	0	14	无限制	5
x3C	0	225	8	3	9
x4C	0	0	17	无限制	8
x1D	0	0	20	无限制	11
x2D	0	0	10	无限制	1
x3D	0	100	8	1	3
x4D	0	350	9	1	1

图 3-26 用电子数据表格求出的土方问题的灵敏性分析报告：关于运费的改变的灵敏性

最后我们来讨论模型的稳健性。图 3-23 中的最优解显示我们不应将所有挖出的土方都运到其他的建筑工地。这就给公司留下了一个问题，就是在哪里放置这些多余的土方。公司需要在某处存放这些多余的土方，这就会有额外的花费。我们没有关于这些花费的信息，但可以讨论几种可能性。假设将所有挖出的土方都运到其他建筑工地用于填充。我们知道这不是最优解，但这样会多花费多少呢？我们可以在模型中做少量的改动来求解。在第一步中，我们设 $s_1 \leq 150$, $s_2 \leq 400$, $s_3 \leq 325$ ，现在改为 $s_1 = 150$, $s_2 = 400$, $s_3 = 325$. (3-31) 式中的前三个不等式约束现在用

$$\begin{aligned}x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + x_{1D} &= 150 \\x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{2D} &= 400 \\x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} + x_{3D} &= 325\end{aligned}\tag{3-32}$$

来代替，模型中的其他部分都不变。在电子表格中改变了这三个约束后求出的最优解的结果显示在图 3-27 中。地点 B 和 C 接收的数量与以前相同，但现在地点 A 每天从地点 1 接收了 25 立方码的填充土方，地点 D 每天从地点 2 接收了 250 立方码的填充土方。根据这一运输方案，我们只需要从地点 4 购买 100 立方码。新的方案解决了 250 立方码的多余土方问

题，每天只多花费 300 美元的费用，大约为每立方码 1 美元多一点。我们不知道这两个方案哪个最好。如果公司需要将挖出的土方从工地上运走，那么他们会赞成第二个方案。如果可以在挖掘工地或其附近使用这些土方，则他们会赞成原来的方案。我们应该将两个方案都提供给公司的管理层，让他们来选择。

A	A	B	C	D	E	F	G
1	花费						
2	地点	A	B	C	D		
3	1	10	4	12	20		
4	2	8	10	14	10		
5	3	14	12	8	8		
6	4	23	25	17	9		
7	解						
8	地点	A	B	C	D	运出量	可用量
9	1	25	125	0	0	150	150
10	2	150	0	0	250	400	400
11	3	0	0	225	100	325	325
12	4	0	0	0	100	100	
13	收到量	175	125	225	450		
14	需求量	175	125	225	450		
15	总运费	7 950					

图 3-27 用电子数据表格求出的土方问题中将所有挖出的土方都运走的解

3.4 离散最优化

到现在为止，我们在本书中讨论的模型都是连续变量。在许多实际问题中，我们必须要处理离散变量，比如整数。离散数学曾被认为是比较神秘的领域，没有或几乎没有什么实际的应用。随着数字计算机的发明，离散数学变得极其重要。离散最优化对时间安排、物资存储、投资、运输、制造业、生态学和计算机科学等方面的问题都非常有用。在本书后面的内容中离散模型是非常重要的一部分，连续变量与离散变量之间的联系也是数学建模的一个主要内容。

在一些情况下，一个离散最优化问题可以简单地用列出所有可能情况的方法求解。对另一些问题，我们可以采用连续模型，然后用舍入的方法求出最接近的整数解。当连续的决策变量变为离散变量时非线性规划问题通常会难解得多。没有连续性后可行域会变得很复杂，通常用图或树结构来描述。对一些类型的问题已经开发出了有效的求解算法，对这些算法的改进是一个非常活跃的研究领域，但与连续的情形一样，迄今还没有求解离散最优化问题的普遍的有效方法。

在这一节中，我们集中讨论一种类型的离散最优化问题：整数规划。整数规划是前一

节讨论的线性规划模型的离散情形。它除了是应用最广泛的离散最优化算法之外，与线性规划的相似性也使我们易于比较离散模型和连续模型。另一个好处是大多数线性规划程序软件也可以解整数规划问题，从而我们可以将注意力集中在模型本身上，而不必去学习一个新的软件包。

例 3.6 仍考虑例 3.4 中讨论的家庭农场问题。这个家庭有 625 英亩的土地可以用来种植。有 5 块每块 120 英亩的地和另一块 25 英亩的地。这家人想在每一块地上只种一种作物：玉米、小麦或燕麦。与前面一样，有 1 000 英亩—英尺可用的灌溉用水，每周农场工人可提供 300 小时的劳力。其他的数据在表 3-2 中给出。求应该在每块地中种植哪种作物，从而使总收益达最大。

我们采用五步方法。第一步的结果显示在图 3-28 中。第二步为选择建模方法。我们用整数规划模型来处理这一问题。

88
91

变量：
 x_1 = 种植玉米的 120 英亩地块数目
 x_2 = 种植小麦的 120 英亩地块数目
 x_3 = 种植燕麦的 120 英亩地块数目
 x_4 = 种植玉米的 25 英亩地块数目
 x_5 = 种植小麦的 25 英亩地块数目
 x_6 = 种植燕麦的 25 英亩地块数目
 w = 需要的灌溉用水(英亩—英尺)
 l = 需要的劳力(人·小时/周)
 t = 种植作物的总英亩数
 y = 总收益(美元)

假设：

$$w = 120(3.0x_1 + 1.0x_2 + 1.5x_3) + 25(3.0x_4 + 1.0x_5 + 1.5x_6)$$
$$l = 120(0.8x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3) + 25(0.8x_4 + 0.2x_5 + 0.3x_6)$$
$$t = 120(x_1 + x_2 + x_3) + 25(x_4 + x_5 + x_6)$$
$$y = 120(400x_1 + 200x_2 + 250x_3) + 25(400x_4 + 200x_5 + 250x_6)$$
$$w \leq 1000$$
$$l \leq 300$$
$$t \leq 625$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$$
$$x_4 + x_5 + x_6 \leq 1$$

x_1, \dots, x_6 为非负整数

目标：求 y 的最大值

图 3-28 修改了的农场问题的第一步的结果

整数规划(IP)问题是在线性规划(LP)问题中进一步对决策变量取整数值的情形。目标函数和约束都要求是线性的。求解 IP 问题的最常用的方法是分支定界法。这一方法是通过分支反复求解来限定 IP 的解的范围的一系列 LP 问题。如果我们在给定的 IP 问题中去掉对决策变量的整数约束，就得到 LP 松弛问题。由于 LP 松弛问题的可行域大于相应的 IP 问题的可行域，所以 LP 松弛问题的决策变量为整数的最优解也就是 IP 问题的最优解。如果有些决策变量不是整数，可以将

92

其分支为两个另外的 LP 松弛问题。比如，如果 LP 松弛问题的最优解得到 $x_1 = 11/3$ ，则我们就和原问题一起考虑一个增加新约束 $x \leq 3$ 的 LP 问题，及另一个增加新约束 $x \geq 4$ 的 LP 问题。任何一个整数解一定满足这两个新约束之一。每次求出小数最优解时就继续分支，可以得到一棵 LP 松弛问题的二叉树。如果其中的某个新 LP 问题所有决策变量都是整数的最优解，则这个解可以作为原 IP 问题的最优解的一个可能选择。由于这个新 LP 问题的可行域比原问题的小，这个整数解也可以给出原 IP 问题的最优解的一个可用的下界。系统地分支将树全部分叉，并利用解的上下界，我们最终可以解出原 IP 问题。由于分支定界法需要单纯形法的多次迭代，对相同规模的问题，求解整数规划问题的时间通常比求解线性规划问题的时间要长得多。

第三步为将问题用公式表示。在我们的问题中，决策变量为种植玉米、小麦和燕麦的 120 英亩地块的数目及 25 英亩地块的数目。注意变量 x_4, x_5, x_6 为二值决策变量，取值只能是 0 或 1。我们的整数规划问题的标准形式为：在集合

$$\begin{aligned} 360x_1 + 120x_2 + 180x_3 + 75x_4 + 25x_5 + 37.5x_6 &\leq 1000 \\ 96x_1 + 24x_2 + 36x_3 + 20x_4 + 5x_5 + 7.5x_6 &\leq 300 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 5 \\ x_4 + x_5 + x_6 &\leq 1 \end{aligned} \tag{3-33}$$

上对总收益 $y = 48000x_1 + 24000x_2 + 30000x_3 + 10000x_4 + 5000x_5 + 6250x_6$ 求最大值，其中 x_1, \dots, x_6 为非负整数。

第四步为求解问题。图 3-29 为用常用的线性规划软件包 LINDO 求出的这个整数规划问题的解。命令 GIN 6 指定了前 6 个决策变量是非负整数。这个问题中其他所有的用法对 IP 与 LP 都是一致的。最优解为 $y = 162250$ ，出现在 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2, x_6 = 1$ ，其他决策变量都是 0。在达最优解时，前两个约束不是关键的，后两个约束是关键的。

第五步为回答问题。如果这个家庭不想分开独立的地块（计划 B），那么最好的方案是在一块 120 英亩的地块上种玉米，在两块 120 英亩的地块上种小麦，在两块 120 英亩的地块上种燕麦，在一块 25 英亩的地块上种燕麦，这样可以在这一季得到 162250 美元的预期收入。这比如果允许在每块地上种多于一种的作物（计划 A，最优解在例 3.4 中求出），可得到的 162500 美元的收益要少约 0.2%。计划 A 用掉了所有的可用土地、可用的灌溉水，在每周 300 人·小时的可用劳力中有 62.5 的剩余。计划 B 用掉了所有的可用土地，但在 1000 英亩·英尺的可用灌溉水中只用了其中的 997.5，在每周 300 人·小时的可用劳力中只用了其中的 223.5。我们留给这个家庭去决定哪个计划是最好的。

整数规划的灵敏性分析是非常耗时的，这是因为求解 IP 要比求解 LP 的时间长很多。这时也没有给我们以指导的影子价格，这是因为随着约束条件的改变达最优解时的目标函数不是光滑的。整数解也不一定恰好出现在约束的边界上，因此最优解也可能对非关键约束的小变化敏感。我们首先讨论可用的灌溉水量。假设有额外的 100 英亩·英尺的水可用，

```
MAX 48000 X1 + 24000 X2 + 30000 X3 + 10000 X4 + 5000 X5 + 6250 X6
SUBJECT TO
    2) 360 X1 + 120 X2 + 180 X3 + 75 X4 + 25 X5 + 37.5 X6 <= 1000
    3) 96 X1 + 24 X2 + 36 X3 + 20 X4 + 5 X5 + 7.5 X6 <= 300
    4) X1 + X2 + X3 <= 5
    5) X4 + X5 + X6 <= 1
END
GIN      6
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
    1)      162250.0
VARIABLE          VALUE          REDUCED COST
    X1      1.000000      -48000.000000
    X2      2.000000      -24000.000000
    X3      2.000000      -30000.000000
    X4      0.000000      -10000.000000
    X5      0.000000      -5000.000000
    X6      1.000000      -6250.000000
ROW    SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
    2)      2.500000      0.000000
    3)      76.500000      0.000000
    4)      0.000000      0.000000
    5)      0.000000      0.000000
NO. ITERATIONS=      95
```

图 3-29 用线性规划软件包 LINDO 求出的修改了的农场问题的最优解

从而(3-33)式中的 IP 问题中第一个约束的 1 000 由 1 100 所取代. 图 3-30 为用 LINDO 求出的这个 IP 问题的解. 现在我们要在一块 120 英亩和一块 25 英亩的地块上种玉米, 在一块 120 英亩的地块上种小麦, 在其他地块上种燕麦. 最优解对总的可用水量相当敏感, 虽然这一约束在原始的 IP 问题的解中并不是关键约束. 新的方案可以多获得 9 750 美元的预期收入.

94

图 3-29 中的最优解显示了有 2.5 英亩-英尺没有用掉的灌溉用水. 如果我们减少可用水量, 只要总水量不低于 997.5 英亩-英尺, 最优解就不会改变. 这是因为这个解仍是可行的, 而现在可行域缩小了, 因此它一定还是最优解. 图 3-31 显示了只有 950 英亩-英尺可用水时的情况. 这时 IP 问题的最优解为在每块地上都种燕麦. 我们用掉了 937.5 英亩-英尺的水, 所有的土地, 但有每周 112.5 人-小时的劳力剩余. 预期的总收益为 156 250 美元, 这仅比原来的解少了 6 000 美元. 这显示了 IP 问题的解不可预期的特点. 可用水量的 5% 的减少使得我们的种植方案从在 360 英亩的地块上种玉米和小麦变成了到处都种燕麦.

```

MAX 48000 X1 + 24000 X2 + 30000 X3 + 10000 X4 + 5000 X5 + 6250 X6
SUBJECT TO
2) 360 X1 + 120 X2 + 180 X3 + 75 X4 + 25 X5 + 37.5 X6 <= 1100
3) 96 X1 + 24 X2 + 36 X3 + 20 X4 + 5 X5 + 7.5 X6 <= 300
4) X1 + X2 + X3 <= 5
5) X4 + X5 + X6 <= 1
END
GIN 6

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 172000.0

VARIABLE      VALUE      REDUCED COST
X1           1.000000   -48000.000000
X2           1.000000   -24000.000000
X3           3.000000   -30000.000000
X4           1.000000   -10000.000000
X5           0.000000   -5000.000000
X6           0.000000   -6250.000000

ROW    SLACK OR SURPLUS    DUAL PRICES
2)      5.000000        0.000000
3)     52.000000        0.000000
4)      0.000000        0.000000
5)      0.000000        0.000000

NO. ITERATIONS= 97

```

[95]

图 3-30 修改了的农场问题中有 100 英亩-英尺的额外用水时的最优解

```

MAX 48000 X1 + 24000 X2 + 30000 X3 + 10000 X4 + 5000 X5 + 6250 X6
SUBJECT TO
2) 360 X1 + 120 X2 + 180 X3 + 75 X4 + 25 X5 + 37.5 X6 <= 950
3) 96 X1 + 24 X2 + 36 X3 + 20 X4 + 5 X5 + 7.5 X6 <= 300
4) X1 + X2 + X3 <= 5
5) X4 + X5 + X6 <= 1
END GIN 6

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 156250.0

VARIABLE      VALUE      REDUCED COST
X1           0.000000   -48000.000000
X2           0.000000   -24000.000000
X3           5.000000   -30000.000000
X4           0.000000   -10000.000000
X5           0.000000   -5000.000000
X6           1.000000   -6250.000000

ROW    SLACK OR SURPLUS    DUAL PRICES
2)     12.500000        0.000000
3)    112.500000        0.000000
4)      0.000000        0.000000
5)      0.000000        0.000000

NO. ITERATIONS= 98

```

图 3-31 修改了的农场问题中可用水量有 50 英亩-英尺减少时的最优解

表 3-4 农场问题中在不同的最小地块尺寸下的最优种植计划的比较

最小地块尺寸(英亩)	玉米(英亩)	小麦(英亩)	燕麦(英亩)	收益(美元)
0	187.5	437.5	0	162 500
1	42	1	582	162 500
2	188	436	0	162 400
5	45	10	570	162 500
10	190	430	0	162 000
20	60	40	520	162 000
50	200	400	0	160 000
100	200	400	0	160 000
125	125	250	250	162 500
150	150	300	150	157 000
200	200	400	0	160 000
250	250	250	0	150 000
300	0	0	600	150 000
500	0	0	500	125 000

主要的稳健性问题是离散和连续最优化之间的关系。我们已经看到了在大块地上种植单一作物对最优种植方案的显著影响。现在我们回到开始的农场问题，考察改变最小的地块的尺寸对解的影响。表 3-4 给出了用 LINDO 求出的在几个不同的最小地块尺寸下的解。例如，当最小地块的尺寸为 2 英亩时，我们的问题为在集合

$$\begin{aligned} 6.0x_1 + 2.0x_2 + 3.0x_3 &\leq 1000 \\ 1.6x_1 + 0.4x_2 + 0.6x_3 &\leq 300 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 312 \end{aligned} \quad (3-34)$$

上对总收益 $y = 800x_1 + 400x_2 + 500x_3$ 求最大值，其中 x_1, x_2, x_3 为非负整数，表示种植玉米、小麦和燕麦的 2 英亩的地块的数目。图 3-32 为用 LINDO 求出的最小地块尺寸为 2 英亩时的最优解。最优解为种 94 块玉米（即总数为 $2 \times 94 = 188$ 英亩），种 218 块小麦（436 英亩），不种燕麦。在这个模型中，我们在剩余的土地中不种作物，因此对最小地块尺寸为 2 英亩的情况，会有 1 英亩的土地没有种作物。表 3-4 中的最优解随着最小地块尺寸的增加变化得非常显著。回忆一下前面的连续最优化模型（LP），有两个顶点达最优解，分别为：

$(x_1, x_2, x_3) = (187.5, 437.5, 0)$ ，及 $(x_1, x_2, x_3) = (41.66, 0, 583.33)$ ，达到的最优收益为 $y = 162 500$ 。对最小地块尺寸小的情况，最优的种植方案在对这两个解的离散近似之间跳跃。对最小地块尺寸为 2、10、50 英亩的情况，解与原来的玉米-小麦种植方案相似，对最小地块尺寸为 1、5、20 英亩的情况，解与另一个玉米-燕麦种植方案相似。当最小地块尺寸变大时，最优种植方案和预期收益都有相当大的变化。大的最小地块尺寸既可能得到多的收益，也可能得到少的收益。例如，当地块尺寸为 125 英亩时得到的方案与原来的预期总收益 162 500 美元相同。注意，这时 625 英亩的可用土地可以平均地分为 5

个 125 英亩的地块，最优解 $(x_1, x_2, x_3) = (125, 250, 250)$ 落在(3-29)式给出的使原 LP 问题达最优解的线段上。但是大多数大尺寸地块情况给出了比较小的预期收益，而且种植方案变化很大。

```
MAX      800 X1 + 400 X2 + 500 X3
SUBJECT TO
    2) 6 X1 + 2 X2 + 3 X3 <= 1000
    3) 1.6 X1 + 0.4 X2 + 0.6 X3 <= 300
    4) X1 + X2 + X3 <= 312
END
GIN      3

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

    1)      162400.0

VARIABLE      VALUE      REDUCED COST
    X1      94.000000      -800.000000
    X2      218.000000      -400.000000
    X3      0.000000      -500.000000

ROW      SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
    2)      0.000000      0.000000
    3)      62.399998      0.000000
    4)      0.000000      0.000000

NO. ITERATIONS=      2
```

图 3-32 农场问题中最小地块尺寸为 2 英亩时的最优解

现在考虑 LP 问题的几何特点和其不同的 IP 近似。当我们选择了一个最小地块尺寸后，就将可行域限制成整数点的网格结构。如果地块的尺寸小，那么这样的整数格点有很多，它们可以覆盖可行域的绝大部分。从某种意义上讲，在可行域的每个点附近都有一个格点。由于目标函数是连续的，我们可以找到 IP 的一个格点解，它接近 LP 的最优解。但当格点分布的距离大时，由于在 LP 的最优解附近可能没有格点，离散化常常会显著地改变最优解。一般而言，只要格点之间的跳跃(在我们的例子中为最小地块尺寸)相对于决策变量是小比例的改变，离散造成的差别就较小。否则，IP 的解会与相应的 LP 松弛的解有很大的不同。

98

例 3.7 仍考虑例 3.5 中的土方问题。在使用 10 立方码载重量的自动倾卸卡车运输的情况下，公司已经确定了最优的运输方案。公司又有三辆更大的卡车可用于运输，载重量为 20 立方码。使用这些车辆可能会在运输中节省一些资金。载重 10 立方码的卡车平均用 20 分钟装车，5 分钟卸车，每小时平均开 20 英里，费用为每英里单位重量 20 美元；载重 20 立方码的卡车平均用 30 分钟装车，5 分钟卸车，每小时平均开 20 英里，费用为每英里单位重量 30 美元。为最大限度地节约运输费用，应如何安排车辆的使用？

我们采用五步方法。第一步为提出问题。现在的问题是哪条路上使用哪种车辆。表 3-5

中为我们在例 3.5 中求出的最优路线。一共有 5 条不同长度的路线，运输土方的总量也是不同的。我们假设在每条路线上使用 10 立方码的卡车或 20 立方码的卡车，但二者不在一条路线上同时使用。由于较大的卡车的运量是较小的两倍，而费用却不到两倍，我们希望将这些卡车安排到可以节约资金最多的路线上。我们需要对每条路线和每种类型的卡车计算出需要卡车的数量和运输的总费用，然后计算在每条路线上使用大卡车可能节约的资金数额。在最优的运输方案中，需要从地点 1 向地点 B 运 125 立方码的土方，距离为 2 英里。这样小卡车需要 20 分钟装车，5 分钟卸车，按每小时 20 英里要开 6 分钟，因此每运一次要 31 分钟。假设每个工作日是 8 小时，这样每天每辆卡车的工作时间不超过 480 分钟。为运走 125 立方码的土方，需要运 13 次，共需 $13 \times 31 = 403$ 分钟，因此对路线 1 一辆小卡车就够了。一辆小卡车在路线 1 上运输的费用为

$$13 \text{ 次} \times \frac{2 \text{ 英里}}{\text{次}} \times \frac{20 \text{ 美元}}{\text{英里}} = 520 \text{ 美元}$$

表 3-5 例 3.7 中卡车问题的运输路线数据

路 线	从	到	英里数	运量(立方码)
1	1	B	2	125
2	2	A	4	175
3	3	C	4	225
4	3	D	4	100
5	4	D	4	350

大卡车需要 30 分钟装车，5 分钟卸车，在路线 1 上要开 6 分钟，因此每运一次要 41 分钟。为运走 125 立方码的土方，需要运 7 次，共需 $7 \times 41 = 287$ 分钟，从而对路线 1 一辆大卡车就够了。一辆大卡车在路线 1 上运输的费用为

$$7 \text{ 次} \times \frac{2 \text{ 英里}}{\text{次}} \times \frac{30 \text{ 美元}}{\text{英里}} = 420 \text{ 美元}$$

在路线 1 上可以节约的费用为 100 美元。类似地算出在其他的路线上节约的费用和需要的卡车数。第一步的结果表示在图 3-33 中。

99

变量: $x_i = 1$, 如果在路线 i 上使用大卡车

$x_i = 0$, 如果在路线 i 上使用小卡车

T = 用的大卡车总数

y = 节约的总费用(美元)

假设: $T = 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 2x_5$

$y = 100x_1 + 360x_2 + 400x_3 + 200x_4 + 640x_5$

$T \leq 3$

目标: 求 y 的最大值

图 3-33 卡车问题的第一步的结果

第二步为选择建模方法。我们采用二值整数规划模型(BIP)来处理这一问题。BIP问题是决策变量为二值数码的IP问题，只可以取整数值0或1。通常用BIP问题来表现是/否决策。其典型应用包括分配问题、时间安排、设备位置及投资问题。BIP问题有比通常的IP问题算法快得多的特殊算法。对本书中的小型BIP问题，任何IP或BIP求解工具都是可以的。

第三步是将问题用标准形式表示。图3-34给出了这个问题的电子数据表格表示。D列为二值决策变量 x_i ：如果用小卡车则取0，用大卡车则取1。E列为使用的大卡车的数量，F列计算出节约的费用。比如： $E_3 = B_3 * D_3$, $F_3 = C_3 * D_3$, $E_8 = E_3 + \dots + E_7$ 。我们用电子表格的最优化工具对总节约费用 $F_8 = F_3 + \dots + F_7$ 求最大值，要求满足约束 $E_8 \leq B_8$ ， D_3 到 D_7 为二值整数。

A	A	B	C	D	E	F
1		可能			实际	
2	路线	卡车	节约	决策	卡车	节约
3	1	1	100	0	0	0
4	2	1	360	0	0	0
5	3	2	400	0	0	0
6	4	1	200	0	0	0
7	5	2	640	0	0	0
8	可用数	3		总数	0	0

图3-34 卡车问题的电子数据表格表示

第四步为求解问题。图3-35为电子表格的最优化工具求出的每条路线上所用卡车的最优安排方案。最优值 $y=1\,000$ 由取 $x_2=1$, $x_5=1$ 及 $x_i=0$ ($i=1, 3, 4$)时得到。第五步为回答问题。我们想知道如何利用20立方码的大卡车来节约运输费用。在路线2上用一辆大卡车，在路线5上用另两辆大卡车，每天就可以节省约1 000美元。

A	A	B	C	D	E	F
1		可能			实际	
2	路线	卡车	节约	决策	卡车	节约
3	1	1	100	0	0	0
4	2	1	360	1	1	360
5	3	2	400	0	0	0
6	4	1	200	0	0	0
7	5	2	640	1	2	640
8	可用数	3		总数	3	1 000

图3-35 卡车问题的电子数据表格解

灵敏性分析要讨论的第一个问题是可能节约的资金与可用的大卡车数量的关系。公司

可能有其他可以重新安排的大卡车，或可以租来另外的大卡车。也可能对自己拥有的卡车有其他在考虑中的计划，因此我们要讨论可用的大卡车数量增加或减少的影响。表 3-6 是运行灵敏性分析后的结果。对每一种情况，我们改变单元格 B8 中的约束重新求最优解。

表 3-6 卡车问题中可用的大卡车数量的灵敏性

卡 车 数	路 线	节约的费用(美元)	节约的边际费用(美元)
1	2	360	360
2	5	640	280
3	2, 5	1 000	360
4	2, 4, 5	1 200	200
5	2, 3, 5	1 400	200
6	2, 3, 4, 5	1 600	200
7	所有的路线	1 700	100

我们记录了最优的决策(在哪条路上用大卡车)和预计节约的运费。节约的边际费用也列在表中。例如：公司用四辆大卡车可以节约 1 200 美元，或用五辆大卡车可以节约 1 400 美元，因此四辆车每天可多节约 200 美元。如果公司能以每天低于 200 美元的价格获得 1 辆、2 辆或 3 辆额外的大卡车，就可以节约资金。另一方面，如果公司有另一个计划，其中大卡车可以节约的金额每天超过 360 美元，则在当前的运输方案中用较少的大卡车比较好。节约的边际费用类似于影子价格，因为它们都给出了约束每改变一个单位的可能的影响。

100
101

下面我们来讨论每条路线上可能节约的费用发生变化的影响。现在我们估计在路线 5 上使用两辆大卡车可以每天为公司节约 640 美元。从另一个角度看就是路线 5 上的每辆大卡车可以每天为公司节约 320 美元。在路线 3 和 4 上的每辆大卡车每天节约 200 美元，在路线 1 上的每辆大卡车每天节约 100 美元。在路线 5 上节约的费用的小改变不会影响我们得出的在路线 2、5 使用大卡车的最优解的结论，这一点看起来是合理的。为验证这个结论，我们改变单元格 C7 的值重新求最优解。任何一个大于 400 的值都会得到同样的最优决策，小于 400 的值会使我们将大卡车安排到路线 2 和 3 上。

在稳健性分析的部分，我们要说明二值的约束可以用来限制可能的决策。假设管理层决定大卡车不可以用在路线 2 上，因为大卡车会在路线附近造成公众关系问题。我们可以将问题重新表述，从而把这一可能排除在外，但在现在的问题中添加约束 $x_2 = 0$ 要容易得多。现在的最优解为在路线 4、5 上使用大卡车，可以节约的总额为 840 美元。这一让步耗费了公司每天 160 美元。现在再来假设，出于类似的原因，管理层决定如果在路线 4 上使用大卡车，那么在路线 3 上也一定要使用大卡车。这个政策可以通过在我们的问题中添加约束 $x_3 \geq x_4$ 或 $x_3 - x_4 \geq 0$ 来表示。如果我们只添加这一个约束，最优解不会改变，因为原来的最优决策已经满足了这个额外的约束。(我们不在它们中的任一条路线上使用大卡车。)如果要求这两个约束都满足，则最优解为在路线 3 和 4 上都使用大卡车，可以节约的总额为每天 600 美元。

3.5 习题

1. 仍考虑例 1.1 中的售猪问题，但现在假设 t 天后猪的价格为 $p = 0.65e^{-(0.01/0.65)t}$ 美元/磅。
 - (a) 说明在 $t=0$ 时猪的价格为每天下降 1 美分。当 t 增加时会有什么变化？
 - (b) 求这个售猪问题的最优解。采用五步方法和单变量最优化模型。
 - (c) 参数 0.01 代表时间 $t=0$ 时价格的下降率。对这一参数进行灵敏性分析，考虑最佳售猪时间和相应的净收益。
 - (d) 比较(b)的结果和我们在 1.1 节中得出的结果，讨论我们现在的模型的稳健性。
2. 仍考虑例 1.1 中的售猪问题，但现在假设 t 天后猪的重量为 $w = 800/(1+3e^{-t/30})$ 磅。
 - (a) 说明在 $t=0$ 时猪增重约为每天 5 磅。当 t 增加时会有什么变化？
 - (b) 求这个售猪问题的最优解。采用五步方法和单变量最优化模型。
 - (c) 参数 800 代表猪成长时的最终重量。对这一参数进行灵敏性分析，考虑最佳售猪时间和相应的净收益。
 - (d) 比较(b)的结果和我们在 1.1 节与 3.1 节中得出的结果。讨论这个模型的稳健性。我们可以得出什么一般性的结论？
3. 一个用来测定两种可选择的治疗方法的效果差异的统计算法要求在集合

$$S = \{(p_1, p_2) : p_1 - p_2 = \Delta; p_1, p_2 \in [0, 1]\}$$

上求

$$\sum_{(k_1, k_2) \in E} \binom{n_1}{k_1} p_1^{k_1} (1 - p_1)^{n_1 - k_1} \binom{n_2}{k_2} p_2^{k_2} (1 - p_2)^{n_2 - k_2}$$

的最大值。其中 E 为如下集合的一个子集：

$$E_0 = \{(k_1, k_2) : k_1 = 0, 1, 2, \dots, n_1; k_2 = 0, 1, 2, \dots, n_2\}$$

并有 $\Delta \in [-1, 1]$ 。求当 $n_1 = n_2 = 4$, $\Delta = -0.1$,

$$E = \{(0, 4), (0, 3), (0, 2), (0, 1), (1, 4), (1, 3), (2, 4)\}$$

时的最大值。[Santner and Snell (1980)]

4. 一种评估正在研制的治疗外伤和烧伤药效果的方法需要在集合

$$\{(p_i, \dots, p_n) : a_i \leq p_i \leq b_i, \quad \forall i = 1, \dots, n\}$$

上对函数

$$f(p_1, \dots, p_n) = \frac{(A - \sum_{i=1}^n p_i)}{\sqrt{B + \sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i)}}$$

[103]

求最大值。对 $n = 2$, $A = -5.92$, $B = 1.58$, $a_1 = 0.01$, $b_1 = 0.33$, $a_2 = 0.75$, $b_2 = 0.85$

求 f 的最大值。[Falk, J. et al. (1992)]

5. 仍考虑第 2 章的习题 3 中的竞争种群问题。设捕捞能力 E 船一天会导致年捕获蓝鲸 qEx 、

- 长须鲸 qEy , 其中设参数 q (可捕量)近似等于 10^{-5} . 设捕捞能力参数取常数, 且种群水平稳定在捕捞率与增长率相等的数量.
- (a) 假设捕鲸远征的费用为 250 美元/船·天, 求使捕鲸产业的长期收益达最大的捕捞能力的最优值. 采用五步方法和单变量最优化模型.
- (b) 讨论可捕量 q 的灵敏性. 考虑收益、捕捞能力、最终稳定下来的鲸鱼种群数量.
- (c) 技术的提高会增加鲸鱼的捕捞量, 这对鲸鱼种群数量和捕鲸产业有什么长期影响?
6. 仍考虑例 3.2 中的消防站位置问题, 但现在假设从点 (x_0, y_0) 到点 (x_1, y_1) 的响应时间正比于所走的路线的距离 $|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|$.
- (a) 求使平均响应时间最少的消防站位置. 采用五步方法和无约束的多变量最优化模型.
- (b) 讨论最优位置关于对每一个 2×2 英里区域估计出的紧急求救次数的灵敏性. 你是否能得出什么一般性的结论?
- (c) 讨论模型的稳健性. 与 3.2 节的分析中得到的最优位置相比较. 如果我们假设响应时间正比于两点之间的直线距离 $r = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$, 你认为会发生什么情况?
7. 仍考虑例 2.1 中的彩电问题. 但现在不用我们在第 2 章使用的解析法, 而是用数值方法.
- (a) 求使第 2 章的(2-3)式给出的目标函数 $f(x_1, x_2)$ 达最大的生产量 x_1, x_2 . 使用两个变量的牛顿法.
- (b) 与 2.1 节一样, 定义 a 为 19 英寸彩电的价格弹性系数. 在(a)中我们取 $a = 0.01$. 现在假设 a 增加 10% 到 $a = 0.011$, 再来求解(a)中的最优化问题. 用你的结果对灵敏性 $S(x_1, a), S(x_2, a), S(y, a)$ 做出数值的估计. 与 2.1 节中得到的解析结果进行比较.
- (c) 设 b 为 21 英寸彩电的价格弹性系数. 现在 $b = 0.01$. 同(b)中一样, 用数值方法估计 x_1, x_2 和 y 关于 b 的灵敏性.
- (d) 比较本练习中的数值方法和 2.1 节中所用的解析方法. 你更喜欢哪一个? 为什么?
8. 仍考虑第 2 章的习题 6 中的问题. 但现在假设管理层被说服, 同意提高广告费用的最高限额. 对我们现在讨论的广告预算在一个很大的范围内变化的情况, 关于销售额随广告预算是线性变化的假设就不够合理. 现在假设每当广告预算加倍时, 销售额提高 1 000 台.
- (a) 求使利润达最高的价格和广告预算. 采用五步方法和无约束的最优化模型.
- (b) 讨论决策变量(价格和广告预算)关于价格弹性系数(数据 50%)的灵敏性.
- (c) 讨论决策变量关于广告商估计的每当广告预算加倍时, 销售额提高 1 000 台这一数据的灵敏性.
- (d) 如果在(a)中假设广告预算和销售额是线性关系, 会发生什么错误? 为什么它在第 2 章的习题 6 中不是问题?
9. (接习题 8) 假设另一个广告支出与销售额之间关系的模型. 假设广告预算加倍时, 销售

额提高 1 000 台，但再次加倍后，销售额只提高 500 台，并一直满足这样的关系。重复习题 8 中(a)到(c)的部分。在(c)中，讨论关于第一次广告预算加倍时，销售额提高 1 000 台这一数据的敏感性。将你的结果与在习题 8 中得到的结果相比较，并讨论模型的稳健性。

10. 仍考虑第 2 章的习题 7 中的报纸问题。现在我们要对利润率(利润占收入的百分比)求最大值。假设每周的经营开支仍固定为 200 000 美元。

- (a) 求使利润率最大的报纸订阅价格和广告价格。采用五步方法和无约束的最优化模型。用随机搜索方法求一个近似解。
(b) 记 $z = f(x, y)$ 为你在(a)中得到的目标函数。用某个计算机代数系统求 $F = \partial f / \partial x$ 与 $G = \partial f / \partial y$ ，再求 $\partial F / \partial x$, $\partial F / \partial y$ 和 $\partial G / \partial x$, $\partial G / \partial y$ 。
(c) 用两个变量的牛顿法求(a)中问题的一个高精度的解。取(a)中得到的近似解为初值。算法中需要的导数已在(b)中算出。
(d) 如果你在前面没有求过第 2 章的习题 7 中(a)部分，现在来完成。可以选用任何一种方法。将结果与你在(c)中刚刚得到的解相比较。求最大利润或最大利润率是否有区别？为什么？

11. 仍考虑例 3.3 中的草坪椅问题。注意当 x 和 y 接近零时目标函数 $f(x, y)$ 趋于无穷大，而且 $f(x, y)$ 在构成可行域边界的直线 $x=0$ 和 $y=0$ 上没有定义，从而可以推测价格弹性系数的估计当外推到 $x=0$ 或 $y=0$ 时是不准确的。

- (a) 通过修改可行域来改善这个模型的缺陷。
(b) 讨论你在(a)中所做决策的稳健性。
(c) 对你修改后的模型，说明最优解出现在可行域的内部。在边界上给出任意一个 $f(x, y)$ 的局部最大值，说明在每一个这样的点， ∇f 指向可行域的内部。

12. 仍考虑第 2 章的习题 9 中的报纸问题。用计算机按线性规划模型求解。回答原问题中的(a)、(b)、(c)。

13. 仍考虑第 2 章的习题 10 中的货运问题。用计算机按线性规划模型求解。回答原问题中的(a)、(b)、(c)。

14. 仍考虑例 2.2 中的彩电问题。将条件简化为公司从每台 19 英寸彩电可获利润 80 美元，每台 21 英寸彩电可获利润 100 美元。

- (a) 求最优的生产量。采用五步方法，用计算机按线性规划模型求解。
(b) 求每个约束的影子价格，并解释它们的含义。哪些约束是最优解的关键约束？
(c) 讨论目标函数系数(每台彩电的利润)的敏感性。同时考虑利润和最优的生产量。
(d) 画出可行域的图形(见图 2-10)，并画出在最优值点的 ∇f 。从几何上描述当目标函数的一个系数变化时向量 ∇f 有什么变化。利用几何观点确定使当前的最优解仍保持最优的目标函数的每个系数的变化范围。

15. 伯明翰纺织公司在美国南部有三个纺织厂，有四个配送中心分别位于密歇根、纽约、加利福尼亚和佐治亚州。表 3-7 中列出了每个工厂的年输出量的估计值、给每个仓库的

分配量和运输费用.

- (a) 求使总运费最少的运输方案. 采用五步方法, 用计算机按线性规划模型求解.
- (b) 求每个输出约束的影子价格. 将一家纺织厂的生产量转到另一家是否有利? 公司愿意付出多少费用来促成这一生产量的转变?

表 3-7 习题 15 中的运输问题的数据: 每车的运费 (单位: 美元)

纺 织 厂	配 送 中 心				输 出
	密 歇 根	纽 约	加 利 福 尼 亚	乔 治 亚	
1	430	550	680	700	105
2	510	590	890	685	160
3	395	425	910	450	85
分配量	70	100	105	75	

16. 一家个人计算机制造厂出售三种台式机. 型号 A 的制造费用为 850 美元, 售价为 1 250 美元. 型号 B 的制造费用为 950 美元, 售价为 1 400 美元. 型号 C 的制造费用为 1 500 美元, 售价为 2 500 美元. 公司每月购买 10 000 个台式机箱, 每台计算机需要一个机箱. 型号 A 和 B 采用 15 英寸的显示器, 公司每个月能得到 5 000 台这种显示器. 型号 C 采用 17 英寸的显示器, 每个月可有 7 500 台. 其他配件供应充足. 公司每月有 20 000 小时的生产时间. 生产每台 A、B、C 型号的计算机分别需要 1 小时、1.25 小时和 1.75 小时.

- (a) 公司应该生产每种型号的计算机各多少台? 采用五步方法, 按线性规划模型求解. 107
- (b) 求每个约束的影子价格. 针对本问题解释每个影子价格的含义.
- (c) 下一个月公司计划将型号 C 的计算机按 2 199 美元的价格降价出售. 这一改变会如何影响(a)和(b)的结果?
- (d) 公司考虑生产一种新的台式机 D. 其制造费用为 1 250 美元, 售价将为 1 895 美元. 每台需要台式机箱一个、17 英寸显示器一台和 1.5 小时的生产时间. 这一改变会如何影响(a)和(b)的结果? 你是否会建议公司继续推行其引入新产品的计划?

17. 一个退休的工程师有 250 000 美元用于投资, 她每周愿意用 5 小时的时间来管理自己的投资. 市政债券每年有 6% 的收益而且不需要管理. 房地产投资预计每年可增值 8%, 每 100 000 美元的投资需要 1 小时的管理时间. 蓝筹股每年可获利 10%, 需要 1.5 小时的管理时间. 后保债券可获利 12%, 需要 2.5 小时的管理时间. 谷物期货可获利 15%, 每 100 000 美元的投资需要 5 小时的管理时间.

- (a) 这个退休工程师应如何投资以获得最高的预期收益? 采用五步方法, 按线性规划模型求解.
- (b) 求每个约束的影子价格. 针对本问题解释每个影子价格的含义.
- (c) 这个退休工程师从互联网上下载了软件, 使她可以对每 100 000 美元的期货投资每周只用 3 小时的时间有效地管理. 这个变化会对(a)和(b)的结果有什么影响?

- (d) 在经过期货市场的几次损失之后，工程师认定风险是她的投资策略的一个重要因素。一本投资自助书将市政债券、房地产投资、蓝筹股、后保债券及谷物期货的风险因子分别列为 1、4、3、6 和 10。工程师决定她投资的平均风险因子不能超过 4。这个变化会对(a)和(b)的结果有什么影响？
18. 绿色供给公司生产塑料食品袋和牛奶壶。公司每周可以分别以每 100 磅 18 美元、12 美元、10 美元的价格获得 5 000 磅的旧塑料袋、18 000 磅的旧牛奶壶和 40 000 磅的工业废塑料。公司每周有 4 000 箱的塑料袋和 80 000 个牛奶壶的订单。每箱塑料袋需要 6 磅塑料，生产费用为 5 美元，售价为 14 美元。每 100 个牛奶壶需要 14 磅塑料，生产费用为 9 美元，售价为 20 美元。由于消费者的选择，塑料袋至少要使用 25% 的再生回收塑料(用过的牛奶壶和袋子)。而为达到强度要求，牛奶壶至多使用 50% 的再生回收塑料。
[108]
(a) 求每种产品使用塑料的最优组成。采用五步方法，按线性规划模型求解。
(b) 求每个约束的影子价格。针对本问题解释每个影子价格的含义。
(c) 一家新的供货商可以按每 100 磅 8 美元的价格提供工业废塑料。这一变化如何影响(a)和(b)的结果？
(d) 一家新的客户提出按每 100 个 30 美元购买 40 000 个环保的牛奶壶。但牛奶壶至少要使用 35% 的再生回收塑料。这一改变如何影响(a)和(b)的结果？公司是否会接受这个新的客户？
19. 仍考虑例 3.5 中的土方问题。假设公司只运输整车的土方。
(a) 假设公司使用载重 10 立方码的自动倾卸卡车运输，求最优运输方案。采用五步方法，按整数规划模型求解。
(b) 假设车的载重量为 5 立方码，重复(a)的计算。
(c) 假设车的载重量为 20 立方码，重复(a)的计算。
(d) 比较(a)、(b)、(c)的结果，讨论原来线性规划模型的稳健性。例 3.5 中的运输方案是否对任一种卡车都是近似最优的？
20. (习题 14 的修正) 仍考虑例 2.2 中的彩电问题。将条件简化为公司从每台 19 英寸彩电可获利润 80 美元，每台 21 英寸彩电可获利润 100 美元。在这个问题中我们要讨论离散化对最优解的影响。
(a) 求最优的生产量。采用五步方法，用计算机按线性规划模型求解。
(b) 由于大规模生产，彩电实际上是按 30 台一批生产。求使利润最高的最优批量。用计算机按整数规划模型求解。
(c) 假设每批数量分别为 10、20、50、100、200 和 300，重复(b)的计算。对每种情况，用整数规划计算每种彩电的最优批量。
(d) 比较(a)、(b)、(c)的结果，讨论(a)中原始线性规划模型的解的稳健性。可行域的离散化是如何影响最优解的？同时考虑最优生产量和最优利润。
[109]
21. (习题 15 的修正) 伯明翰纺织公司在美国南部有三个纺织厂，有四个配送中心分别位于密歇根、纽约、加利福尼亚和佐治亚州。表 3-7 中列出了每个工厂的年输出量的估计

值、给每个仓库的分配量和运输费用.

- (a) 求使总运费最少的运输方案. 采用五步方法, 用计算机按线性规划模型求解.
- (b) 公司购买了三辆新卡车用于运输. 新卡车的燃油利用率高, 预计可以节约 50% 的运输费用. 假设一辆卡车一周可以运一次(一年 52 次), 在每一条路线上或全用旧卡车或全用新卡车. 公司应该如何利用这些新卡车从而使节约的费用达最高? 采用五步方法, 用计算机按整数规划模型求解.
- (c) 对新卡车的数量进行灵敏性分析. 对新卡车数量 n 取 4、5、6、7, 分别求最优运输方案和预计节约的费用. 如果每辆新卡车按其使用年限每年需分期付费 12 000 美元, 公司应该购买多少辆新卡车?
- (d) 由于加利福尼亚州对卡车制定了新的污染标准, 公司一定要在加州使用新卡车运输. 这一改变如何影响(b)和(c)的结果? 这一新政策会使公司付出多少费用?
22. 仍考虑习题 21 的纺织品运输问题. 但现在假设在同一条路线上, 新、旧卡车都可以使用, 再来解答前面的问题.(提示: 用一个决策变量表示一辆新卡车是否在路线 i 上使用, 再用另一个决策变量表示第二辆卡车是否使用, 其他类似.)
23. 一个计算机操作系统在硬盘上存储文件. 有五个大小分别为 18、23、12、125 和 45MB 的大文件要存储. 连续的存储块的容量分别为 25、73、38 和 156MB. 每一个文件一定要存储在一个连续的存储块中. 在这个问题中, 我们要研究一种整数规划算法, 从而将文件分配到存储块中.
- (a) 为了保留大的连续存储块以备将来使用, 我们希望将每一个文件存储在能够容纳它的最小的存储块中. 定义将文件 i 存储在块 j 上的费用为块 j 的大小. 求使总费用最少的分配方案. 采用五步方法, 按整数规划模型求解.
- (b) 假设 12MB 的文件扩大为 19MB. 这会如何影响(a)中求出的最优解? 这个 12MB 的文件可以扩大多少而最优解仍保持不变?
- (c) 假设 18MB 和 23MB 的文件由于被同一个程序所使用, 要求将它们存储在同一个存储块中. 这会如何影响(a)中求出的最优解?
- (d) 一个分配文件到存储块的“贪心”算法是将每一个文件存储到第一个可以容纳它的存储块中. 应用这一算法(手算)并与(a)的结果相比较. 在(a)中求得的整数规划问题的解是否显著地优于贪心算法的结果?
- (e) 为什么不采用对剩余的最大连续存储块的大小求最大值的方法? 这一最优化问题是否可以按整数规划求解?
24. 一个技术管理人员安排一些工程师完成几个计划的项目. 项目 A、B、C 分别需要 18、12 和 30 人·月来完成. 工程师 1、2、3 和 4 可以完成这些项目. 他们每个月的工资分别为 3 000 美元、3 500 美元、3 200 美元和 3 900 美元.
- (a) 求完成所有项目的总费用最少的分配方案(分配工程师到具体项目). 假设工程师在每 6 个月中只能被安排一个项目, 所有项目要求只能在 18 个月内完成.(提示: 用决策

变量 x_{ijk} 表示工程师 i 是否在时期 k 内完成项目 j 。)

- (b) 假设由于早期的工作安排，工程师 1 在时期 2 内没有时间。重复(a)的计算。这会如何影响最优解？多少费用会使管理人员认为应该将工程师 1 重新安排到时期 2 中？
- (c) 假设由于性格原因，工程师 2 和 3 不能一起工作。他们的个人矛盾会使公司付出多少费用？
- (d) 如果项目 A 能够在 6 个月内完成，公司会发 10 000 美元的奖金。这会如何改变最优解？

3.6 进一步阅读文献

1. Beltrami, E. (1977) *Models for Public Systems Analysis*. Academic Press, New York.
2. Dantzig, G. (1963) *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
3. Falk, J., Palocsay, S., Sacco, W., Copes, W. and Champion, H. (1992) Bounds on the Trauma Outcome Function via Optimization. *Operations Research* 40, Supp. No. 1, S86–S95.
4. Gearhart, W. and Pierce, J. *Fire Control and Land Management in the Chaparral*. UMAP module 687.
5. Hillier, F. and Lieberman, J. (1990) *Introduction to Operations Research*. McGraw-Hill, New York.
6. Maynard, J. *A Linear Programming Model for Scheduling Prison Guards*. UMAP module 272.
7. Press, W., Flannery, B., Teukolsky, S. and Vetterling, W. (2002) *Numerical Recipes in C++: The Art of Scientific Computing*. 2nd Ed., Cambridge University Press, New York. See also www.nr.com
8. Polack, E. (1971) *Computational Methods in Optimization*. Academic Press, New York.
9. Santner, T. and Snell, M. (1980) Small-sample confidence intervals for $\rho_1 - \rho_2$ and ρ_1/ρ_2 in 2×2 contingency tables. *Journal of the American Statistical Association* 75, 386–394.
10. Straffin, P. *Newton's Method and Fractal Patterns*. UMAP module 716.

[111]

[112]