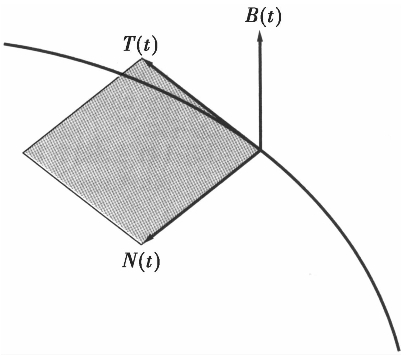
第 2 章 行列式



每一个方形矩阵可以和一个称为矩阵行列式的实数相对应．这个数值将告诉我们矩阵是否是奇异的．

在 2.1 节中，给出矩阵的行列式的定义．2.2 节中我们学习行列式的性质及一种求行列式的消元法．对 $n\times n$ 矩阵，当 $n>3$ 时，消元法通常是求行列式的最简单方法．2.3 节中我们将看到在求 $n\times n$ 线性方程组时如何使用行列式，以及如何使用行列式计算矩阵的逆．2.3 节中还介绍了一个密码学中的应用．行列式的进一步应用在第 3 和 6 章中给出．

2.1 矩阵的行列式

对每一 $n\times n$ 矩阵 A，均可对应一个标量 $\det(A)$，它的值将告诉我们矩阵是否为非奇异的．在引入一般定义之前，我们考虑如下的情形．

情形 1：1×1 矩阵

如果 $A=(a)$ 为一 1×1 矩阵，则当且仅当 $a\neq 0$ 时，A 存在乘法逆元．因此，如果定义

$$\det(A)=a$$

则当且仅当 $\det(A)\neq 0$ 时，A 为非奇异的．

情形 2：2×2 矩阵

令

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

由定理 1.5.2，A 是非奇异的充要条件为它行等价于 I．因此，若 $a_{11}\neq 0$，可以利用如下的运算检测 A 是否行等价于 I．

1. 将 A 的第 2 行乘以 a_{11}：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} \end{bmatrix}$$

2. 从新的第二行中减去 a_{21} 乘以第一行：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} \end{bmatrix}$$

因为 $a_{11}\neq 0$，结果矩阵行等价于 I 的充要条件为

$$a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0 \tag{1}$$

若 $a_{11}=0$，我们可以交换 A 的两行. 结果矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{12} \end{bmatrix}$$

行等价于 I 的充要条件为 $a_{21}\ a_{12}\neq 0$. 当 $a_{11}=0$ 时，这个条件等价于条件(1). 因此，若 A 为任意 2×2 矩阵，且定义

$$\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

当且仅当 $\det(A)\neq 0$ 时，A 是非奇异的.

记号 我们用两条竖线间包括的阵列表示给定矩阵的行列式. 例如，若

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

表示 A 的行列式.

情形 3：3×3 矩阵

我们也可通过对一个 3×3 矩阵进行行运算，并观察它是否行等价于单位矩阵 I，来检验该矩阵是否为非奇异的. 对任意一个 3×3 矩阵，为实现消去第一列的过程，首先假设 $a_{11}\neq 0$. 消元过程即可通过从第二行中减去 a_{21}/a_{11} 乘以第一行，并从第三行中减去 a_{31}/a_{11} 乘以第一行进行.

88

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \dfrac{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}{a_{11}} & \dfrac{a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13}}{a_{11}} \\ 0 & \dfrac{a_{11}a_{32}-a_{31}a_{12}}{a_{11}} & \dfrac{a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

右侧的矩阵行等价于 I 的充要条件为

$$a_{11}\begin{vmatrix} \dfrac{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}{a_{11}} & \dfrac{a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13}}{a_{11}} \\ \dfrac{a_{11}a_{32}-a_{31}a_{12}}{a_{11}} & \dfrac{a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13}}{a_{11}} \end{vmatrix}\neq 0$$

尽管代数形式有些复杂，这个条件可以化简为

$$a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{31}a_{23}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{31}a_{22}\neq 0 \tag{2}$$

因此，如果我们定义

$$\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$+a_{12}a_{31}a_{23}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{31}a_{22} \qquad (3)$$

则当 $a_{11}\neq 0$ 时，矩阵是非奇异的充要条件为 $\det(A)\neq 0$.

$a_{11}=0$ 时，情况又怎样呢？考虑如下的可能性：

(i) $a_{11}=0$，$a_{21}\neq 0$

(ii) $a_{11}=a_{21}=0$，$a_{31}\neq 0$

(iii) $a_{11}=a_{21}=a_{31}=0$

对情形(i)，容易证明 A 行等价于 I 的充要条件为

$$-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{31}a_{23}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{31}a_{22}\neq 0$$

这个条件与条件(2)在 $a_{11}=0$ 时是相同的. 情形(i)的细节留给读者作为练习(见练习 7).

对情形(ii)，可以推出

$$A=\begin{bmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

行等价于 I 的充要条件为

$$a_{31}(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})\neq 0$$

它又对应于条件(2)中 $a_{11}=a_{21}=0$ 的特殊情形.

显然，对情形(iii)，矩阵 A 不行等价于 I，因此它是奇异的. 此时，如果令方程(3)中的 a_{11}，a_{21} 和 a_{31} 等于 0，则结果为 $\det(A)=0$.

一般来说，公式(2)给出了一个 3×3 矩阵 A 非奇异的充要条件(无论 a_{11} 取何值).

我们现在希望定义一个 $n\times n$ 矩阵的行列式. 为看清如何这样做，注意到 2×2 矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$ 89

的行列式可以用两个 1×1 矩阵定义：

$$M_{11}=(a_{22}) \quad 和 \quad M_{12}=(a_{21})$$

矩阵 M_{11} 为 A 删除第一行第一列得到的，M_{12} 为 A 删除第一行第二列得到的.

A 的行列式可表示为如下的形式：

$$\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}\det(M_{11})-a_{12}\det(M_{12}) \qquad (4)$$

对 3×3 矩阵 A，可将方程(3)改写为

$$\det(A)=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})$$

对 $j=1, 2, 3$，用 M_{1j} 表示删除 A 的第一行和第 j 列得到的 2×2 矩阵，则 A 的行列式可表示为

$$\det(A)=a_{11}\det(M_{11})-a_{12}\det(M_{12})+a_{13}\det(M_{13}) \qquad (5)$$

其中

$$M_{11}=\begin{bmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{bmatrix},\quad M_{12}=\begin{bmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{bmatrix},\quad M_{13}=\begin{bmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}$$

为得到 $n>3$ 时的一般情况，我们引入如下的定义.

定义 令 $A=(a_{ij})$ 为一 $n\times n$ 矩阵，并用 M_{ij} 表示删除 A 中包含 a_{ij} 的行和列得到的

$(n-1)\times(n-1)$ 矩阵．矩阵 M_{ij} 的行列式称为 a_{ij} 的**子式**(minor)．定义 a_{ij} 的**余子式**(cofactor) A_{ij} 为

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\det(M_{ij})$$

考虑到这个定义，对 2×2 矩阵 A，方程(4)可改写为

$$\det(A)=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}\quad(n=2)\tag{6}$$

方程(6)称为 $\det(A)$ 按 A 的第一行的余子式展开(cofactor expansion)．注意，也可写为

$$\det(A)=a_{21}(-a_{12})+a_{22}a_{11}=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}\tag{7}$$

公式(7)将 $\det(A)$ 表示为 A 的第二行元素及其余子式的形式．事实上，没有必要必须按照矩阵的行进行展开；行列式也可按照矩阵的某一列进行余子式展开．

$$\begin{aligned}\det(A)&=a_{11}a_{22}+a_{21}(-a_{12})\\&=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}\qquad(\text{第一列})\\\det(A)&=a_{12}(-a_{21})+a_{22}a_{11}\\&=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}\qquad(\text{第二列})\end{aligned}$$

90

对一个 3×3 矩阵 A，我们有

$$\det(A)=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}\tag{8}$$

因此 3×3 矩阵的行列式可用矩阵的第一行及其相应的余子式的形式定义．

▶**例 1** 设

$$A=\begin{bmatrix}2&5&4\\3&1&2\\5&4&6\end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned}\det(A)&=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}\\&=(-1)^2a_{11}\det(M_{11})+(-1)^3a_{12}\det(M_{12})+(-1)^4a_{13}\det(M_{13})\\&=2\begin{vmatrix}1&2\\4&6\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}3&2\\5&6\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}3&1\\5&4\end{vmatrix}\\&=2(6-8)-5(18-10)+4(12-5)\\&=-16\end{aligned}$$

◀

类似于 2×2 矩阵情形，3×3 矩阵的行列式可以用矩阵的任何一行或列的余子式展开来表示．例如，方程(3)可写为

$$\begin{aligned}\det(A)&=a_{12}a_{31}a_{23}-a_{13}a_{31}a_{22}-a_{11}a_{32}a_{23}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{11}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{21}a_{33}\\&=a_{31}(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})-a_{32}(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})+a_{33}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\\&=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}\end{aligned}$$

这个余子式展开是沿着 A 的第三行进行的．

▶**例 2** 令 A 为例 1 中的矩阵．则 $\det(A)$ 按照第二列的余子式展开为

$$\begin{aligned}\det(A)&=-5\begin{vmatrix}3&2\\5&6\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2&4\\5&6\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}2&4\\3&2\end{vmatrix}\\&=-5(18-10)+1(12-20)-4(4-12)=-16\end{aligned}$$

◀

4×4 矩阵的行列式可以定义为沿任何一行或一列的余子式展开．为计算 4×4 的行列式，我们需要计算四个 3×3 行列式． 91

定义　一个 $n\times n$ 矩阵 A 的**行列式**(determinant)，记为 $\det(A)$，是一个与矩阵 A 对应的标量，它可如下递归定义：

$$\det(A)=\begin{cases} a_{11} & \text{当 } n=1 \text{ 时} \\ a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} & \text{当 } n>1 \text{ 时} \end{cases}$$

其中

$$A_{1j}=(-1)^{1+j}\det(M_{1j}),\quad j=1,\cdots,n$$

为 A 第一行元素对应的余子式．

正如我们已经看到的，并不需要限制在使用第一行的余子式展开．我们不加证明地给出如下定理．

定理 2.1.1　设 A 为一 $n\times n$ 矩阵，其中 $n\geqslant 2$，则 $\det(A)$ 可表示为 A 的任何行或列的余子式展开，即

$$\begin{aligned}\det(A)&=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\\&=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\end{aligned}$$

其中 $i=1,\cdots,n$，且 $j=1,\cdots,n$．

一个 4×4 的行列式的余子式展开会包含四个 3×3 的行列式．我们通常使用零元素最多的行或列展开以减少工作量．例如，计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

可以沿第一列向下展开．前三项可以省去，剩下的是

$$-2\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-2\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=12$$

对 $n\leqslant 3$，我们已经看到一个 $n\times n$ 矩阵 A 是非奇异的充要条件为 $\det(A)\neq 0$．下一节还会看到，这个结论对 n 的任何取值都是成立的．下一节中还会看到行运算对行列式值的影响，并将使用行运算得到一个计算行列式值的更为高效的方法．

在本节的最后，给出根据余子式展开的定义容易得到的三个定理．后两个定理的证明留给读者(见练习 8、9 和 10)．

定理 2.1.2　设 A 为一 $n\times n$ 矩阵，则 $\det(A^{\mathrm{T}})=\det(A)$． 92

证　对 n 采用数学归纳法证明．显然，因为 1×1 矩阵是对称的，该结论对 $n=1$ 是成立的．假设这个结论对所有 $k\times k$ 矩阵也是成立的．对 $(k+1)\times(k+1)$ 矩阵 A，将 $\det(A)$ 按照 A 的第一行展开，我们有

$$\det(A)=a_{11}\det(M_{11})-a_{12}\det(M_{12})+-\cdots\pm a_{1,k+1}\det(M_{1,k+1})$$

由于 M_{ij} 均为 $k\times k$ 矩阵，由归纳假设有

$$\det(A)=a_{11}\det(M_{11}^{\mathrm{T}})-a_{12}\det(M_{12}^{\mathrm{T}})+-\cdots\pm a_{1,k+1}\det(M_{1,k+1}^{\mathrm{T}}) \tag{9}$$

(9)的右端恰是 $\det(A^{\mathrm{T}})$按照 A^{T} 的第一列的余子式展开．因此

$$\det(A^{\mathrm{T}})=\det(A)$$ ■

定理 2.1.3 设 A 为一 $n\times n$ 三角形矩阵，则 A 的行列式等于 A 的对角元素的乘积.

证 根据定理 2.1.2，只需证明结论对下三角形矩阵成立．利用余子式展开和对 n 的归纳法，容易证明这个结论．详细证明留给读者(见练习 8). ■

定理 2.1.4 令 A 为一 $n\times n$ 矩阵.

(i)若 A 有一行或一列包含的元素全为零，则 $\det(A)=0$.

(ii)若 A 有两行或两列相等，则 $\det(A)=0$.

这些结论容易利用余子式展开加以证明．证明留给读者(见练习 9 和 10). ■

下一节我们将看到行运算对行列式值的影响．这将使得我们可以利用定理 2.1.3 得到一个计算行列式值的更为高效的方法.

2.1 节练习

1. 给定

$$A=\begin{bmatrix}3&2&4\\1&-2&3\\2&3&2\end{bmatrix}$$

(a)求 $\det(M_{21})$，$\det(M_{22})$和 $\det(M_{23})$的值.

(b)求 A_{21}，A_{22} 和 A_{23} 的值.

(c)用(b)中的结论计算 $\det(A)$.

2. 用行列式判断下列 2×2 矩阵是否非奇异.

(a) $\begin{bmatrix}3&5\\2&4\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}3&6\\2&4\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}3&-6\\2&4\end{bmatrix}$

3. 计算下列行列式.

93

(a) $\begin{vmatrix}3&5\\-2&-3\end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix}5&-2\\-8&4\end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix}3&1&2\\2&4&5\\2&4&5\end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix}4&3&0\\3&1&2\\5&-1&-4\end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix}1&3&2\\4&1&-2\\2&1&3\end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix}2&-1&2\\1&3&2\\5&1&6\end{vmatrix}$ (g) $\begin{vmatrix}2&0&0&1\\0&1&0&0\\1&6&2&0\\1&1&-2&3\end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix}2&1&2&1\\3&0&1&1\\-1&2&-2&1\\-3&2&3&1\end{vmatrix}$

4. 用观察法估计下列行列式的值.

(a) $\begin{vmatrix}3&5\\2&4\end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix}2&0&0\\4&1&0\\7&3&-2\end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix}3&0&0\\2&1&1\\1&2&2\end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix}4&0&2&1\\5&0&4&2\\2&0&3&4\\1&0&2&3\end{vmatrix}$

5. 计算下列行列式，并将结果写为 x 的多项式.

$$\begin{vmatrix}a-x&b&c\\1&-x&0\\0&1&-x\end{vmatrix}$$

6. 求使得下列行列式等于 0 的所有 λ 值.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

7. 令 A 为一 3×3 矩阵，其中 $a_{11}=0$，且 $a_{21}\neq0$. 证明 A 行等价于 I 的充要条件为

$$-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{31}a_{23}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{31}a_{22}\neq0$$

8. 给出定理 2.1.3 的详细证明.
9. 证明：如果一 $n\times n$ 矩阵 A 有一行或一列含有全为零的元素，则 $\det(A)=0$.
10. 使用数学归纳法证明：如果一个 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵 A 有两行相等，则 $\det(A)=0$.
11. 令 A 和 B 为 2×2 矩阵.
    (a)是否 $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$？
    (b)是否 $\det(AB)=\det(A)\det(B)$？
    (c)是否 $\det(AB)=\det(BA)$？
    证明你的答案.
12. 令 A 和 B 为 2×2 矩阵，且令

$$C=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$$

    (a)证明 $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)+\det(C)+\det(D)$.
    (b)证明：如果 $B=EA$，则 $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$.
13. 令 A 为对称三角形矩阵(A 为对称的，且当 $|i-j|>1$ 时 $a_{ij}=0$). 令 B 为 A 删除前两行和两列构成的矩阵. 证明

$$\det(A)=a_{11}\det(M_{11})-a_{12}^2\det(B)$$

2.2 行列式的性质

本节我们考虑行运算对矩阵行列式的作用. 一旦确定了这些作用，我们将证明矩阵 A 是奇异的当且仅当其行列式为零，并且利用行运算得到计算行列式的方法. 同时，还将讨论关于两个矩阵乘积的行列式的重要定理. 我们从下面的引理开始.

引理 2.2.1 令 A 为一 $n\times n$ 矩阵. 若 A_{jk} 表示 a_{jk} 的余子式，其中 $k=1,\cdots,n$，则

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}\det(A) & \text{当 } i=j \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } i\neq j \text{ 时}\end{cases} \tag{1}$$ 94

证 若 $i=j$，(1)恰为 $\det(A)$按照 A 的第 i 行的余子式展开. 为证明 $i\neq j$ 时的(1)式，令 A^* 是将 A 的第 j 行替换为 A 的第 i 行得到的矩阵.

$$A^*=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

因为 A^* 的两行相同，因此它的行列式必为零．将 $\det(A^*)$ 按照第 j 行进行余子式展开，有

$$\begin{aligned}0=\det(A^*)&=a_{i1}A_{j1}^*+a_{i2}A_{j2}^*+\cdots+a_{in}A_{jn}^*\\&=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}\end{aligned}$$ ■

现在我们考虑三种行运算中每一种运算对行列式值的作用．

行运算Ⅰ： 交换 A 的两行

若 A 为一 2×2 的矩阵，且

$$E=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

则

$$\det(EA)=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{11}&a_{12}\end{vmatrix}=a_{21}a_{12}-a_{22}a_{11}=-\det(A)$$

对 $n>2$，令 E_{ij} 为交换 A 的第 i 和 j 行得到的初等矩阵．容易使用归纳法证明 $\det(E_{ij}A)=-\det(A)$．我们对 $n=3$ 来说明证明背后的思想．假设一个 3×3 矩阵 A 的第一行和第三行进行了交换．按照第二行展开 $\det(E_{13}A)$，并利用 2×2 矩阵的结果，我们有

$$\begin{aligned}\det(E_{13}A)&=\begin{vmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{vmatrix}\\&=-a_{21}\begin{vmatrix}a_{32}&a_{33}\\a_{12}&a_{13}\end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix}a_{31}&a_{33}\\a_{11}&a_{13}\end{vmatrix}-a_{23}\begin{vmatrix}a_{31}&a_{32}\\a_{11}&a_{12}\end{vmatrix}\\&=a_{21}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{22}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{23}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}\\&=-\det(A)\end{aligned}$$

95

一般地，如果 A 为一 $n\times n$ 的矩阵，且 E_{ij} 是交换 I 的第 i 和 j 行得到的 $n\times n$ 的初等矩阵，则

$$\det(E_{ij}A)=-\det(A)$$

特别地，

$$\det(E_{ij})=\det(E_{ij}I)=-\det(I)=-1$$

因此，对任意第Ⅰ类初等矩阵 E，

$$\det(EA)=-\det(A)=\det(E)\det(A)$$

行运算Ⅱ： A 的某一行乘以一个非零常数

令 E 为第Ⅱ类初等矩阵，它由 I 的第 i 行乘以一个非零常数 α 得到．如果将 $\det(EA)$ 按第 i 行进行余子式展开，则

$$\begin{aligned}\det(EA)&=\alpha a_{i1}A_{i1}+\alpha a_{i2}A_{i2}+\cdots+\alpha a_{in}A_{in}\\&=\alpha(a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in})=\alpha\det(A)\end{aligned}$$

特别地，

$$\det(E)=\det(EI)=\alpha\det(I)=\alpha$$

由此

$$\det(EA)=\alpha\det(A)=\det(E)\det(A)$$

行运算Ⅲ：某一行的倍数加到其他行

令 E 为第Ⅲ类初等矩阵，它由 I 的第 i 行的 c 倍加到第 j 行得到．因为 E 是三角形的，且它的对角线元素均为 1，因此 $\det(E)=1$．我们将证明

$$\det(EA)=\det(A)=\det(E)\det(A)$$

如果 $\det(EA)$ 按第 j 行进行余子式展开，由引理 2.2.1，有

$$\begin{aligned}\det(EA)&=(a_{j1}+ca_{i1})A_{j1}+(a_{j2}+ca_{i2})A_{j2}+\cdots+(a_{jn}+ca_{in})A_{jn}\\&=(a_{j1}A_{j1}+\cdots+a_{jn}A_{jn})+c(a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn})\\&=\det(A)\end{aligned}$$

因此，

$$\det(EA)=\det(A)=\det(E)\det(A)$$ 96

总结

综上所述，若 E 为一初等矩阵，则

$$\det(EA)=\det(E)\det(A)$$

其中

$$\det(E)=\begin{cases}-1 & \text{若 } E \text{ 为第 Ⅰ 类初等矩阵}\\ \alpha\neq 0 & \text{若 } E \text{ 为第 Ⅱ 类初等矩阵}\\ 1 & \text{若 } E \text{ 为第 Ⅲ 类初等矩阵}\end{cases}\tag{2}$$

类似的结论对列运算也是成立的．事实上，如果 E 为一初等矩阵，则 E^{T} 也是初等矩阵(见练习 8)，且

$$\begin{aligned}\det(AE)&=\det((AE)^{\mathrm{T}})=\det(E^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}})\\&=\det(E^{\mathrm{T}})\det(A^{\mathrm{T}})=\det(E)\det(A)\end{aligned}$$

因此，行或列运算对行列式值的作用总结如下：

Ⅰ．交换矩阵的两行(或列)改变行列式的符号．

Ⅱ．矩阵的某行或列乘以一个标量的作用是将行列式乘以这个标量．

Ⅲ．将某行(或列)的倍数加到其他行(或列)上不改变行列式的值．

注　作为结论Ⅲ的一个推论，如果矩阵的某行(或列)为另一行(或列)的倍数，则矩阵的行列式必为零．

主要结论

我们现在可以利用行运算对行列式值的作用来证明两个主要的定理，并建立一个计算行列式的较简单的方法．由(2)可知，所有初等矩阵均有非零的行列式．这个发现可用于证明如下的定理．

定理 2.2.2　一个 $n\times n$ 矩阵 A 是奇异的充要条件为

$$\det(A)=0$$

证 矩阵 A 可通过有限次行运算化为行阶梯形式．因此

97 $$U=E_kE_{k-1}\cdots E_1A$$

其中 U 为行阶梯形矩阵，且 E_i 均为初等矩阵．因此有

$$\begin{aligned}\det(U)&=\det(E_kE_{k-1}\cdots E_1A)\\&=\det(E_k)\det(E_{k-1})\cdots\det(E_1)\det(A)\end{aligned}$$

由于 E_i 的行列式均非零，所以 $\det(A)=0$ 的充要条件为 $\det(U)=0$．如果 A 为奇异的，则 U 有一行元素全部为零，且 $\det(U)=0$．如果 A 非奇异，则 U 为三角形矩阵，且对角线元素均为 1，因此 $\det(U)=1$． ■

由定理 2.2.2 的证明，我们可以得到一个计算 $\det(A)$ 的方法．将 A 化简为行阶梯形．

$$U=E_kE_{k-1}\cdots E_1A$$

如果 U 的最后一行包含的元素全为零，则 A 为奇异的，且 $\det(A)=0$．否则，A 为非奇异的，且

$$\det(A)=[\det(E_k)\det(E_{k-1})\cdots\det(E_1)]^{-1}$$

事实上，如果 A 为非奇异的，容易将 A 化简为三角形的．这可仅利用行运算 Ⅰ 和 Ⅲ 实现．因此

$$T=E_mE_{m-1}\cdots E_1A$$

且

$$\det(A)=\pm\det(T)=\pm t_{11}t_{22}\cdots t_{nn}$$

其中 t_{ii} 为 T 的对角元素．如果行运算 Ⅰ 使用了偶数次，则符号将为正，否则为负．

▶**例 1** 计算

$$\begin{vmatrix}2&1&3\\4&2&1\\6&-3&4\end{vmatrix}$$

解

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}2&1&3\\4&2&1\\6&-3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&3\\0&0&-5\\0&-6&-5\end{vmatrix}&=(-1)\begin{vmatrix}2&1&3\\0&-6&-5\\0&0&-5\end{vmatrix}\\&=(-1)(2)(-6)(-5)\\&=-60\end{aligned}$$

◀

现在，我们有两种方法计算 $n\times n$ 矩阵 A 的行列式．如果 $n>3$，且 A 有非零元素，则消元法是最高效的方法，因为它包含的算术运算较少．表 1 给出了每一种方法在 $n=$
98 2，3，4，5，10 时包含的算术运算次数．容易给出在一般情况下每一种方法包含运算次数的公式(见练习 20 和 21)．

表 1

n	余子式		消元	
	加法	乘法	加法	乘法和除法
2	1	2	1	3
3	5	9	5	10
4	23	40	14	23
5	119	205	30	44
10	3 628 799	6 235 300	285	339

我们已经看到，对任意初等矩阵 E，

$$\det(EA)=\det(E)\det(A)=\det(AE)$$

这是下面定理的一个特殊情况.

定理 2.2.3 *若 A 和 B 均为 $n\times n$ 矩阵，则*

$$\det(AB)=\det(A)\det(B)$$

证 若 B 为奇异的，则由定理 1.5.2 知 AB 也是奇异的(见 1.5 节练习 14)，因此

$$\det(AB)=0=\det(A)\det(B)$$

若 B 为非奇异的，则 B 可写为初等矩阵的乘积. 我们已经看到上述结论对初等矩阵是成立的. 因此

$$\begin{aligned}\det(AB)&=\det(AE_kE_{k-1}\cdots E_1)\\&=\det(A)\det(E_k)\det(E_{k-1})\cdots\det(E_1)\\&=\det(A)\det(E_kE_{k-1}\cdots E_1)\\&=\det(A)\det(B)\end{aligned}$$ ■

若 A 为奇异的，则采用精确算术方法计算 $\det(A)$的值必为 0. 然而，利用计算机计算得到的结果却并非如此. 这是因为计算机使用有限数字系统，舍入误差总是不能避免的. 因此，计算的 $\det(A)$通常总是比较接近 0. 由于存在舍入误差，故不可能完全用计算方法确定矩阵确实是奇异的. 在计算机应用中，更有意义的是问一个矩阵是否是“接近”奇异的. 一般地，$\det(A)$的值并不是一个很好的接近奇异的判断标准. 我们将在 6.5 节中讨论怎样判断一个矩阵是否接近奇异. 99

2.2 节练习

1. 用观察法求下列行列式的值.

(a) $\begin{vmatrix}0&0&3\\0&4&1\\2&3&1\end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix}1&1&1&3\\0&3&1&1\\0&0&2&2\\-1&-1&-1&2\end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{vmatrix}$

2. 令

$$A=\begin{bmatrix}0&1&2&3\\1&1&1&1\\-2&-2&3&3\\1&2&-2&-3\end{bmatrix}$$

(a)利用消元法计算 $\det(A)$.

(b)利用 $\det(A)$的值计算

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

3. 对下列矩阵，计算它们的行列式，并说明矩阵是奇异的还是非奇异的.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{bmatrix}$

4. 求使得下列矩阵奇异的所有可能的 c.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & c \\ 1 & c & 3 \end{bmatrix}$$

5. 令 A 为一 $n\times n$ 矩阵，α 为一标量. 证明

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$

6. 令 A 为一非奇异矩阵. 证明

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

7. 令 A 和 B 为 3×3 矩阵，且 $\det(A)=4$，$\det(B)=5$. 求下列各值：

(a) $\det(AB)$ (b) $\det(3A)$ (c) $\det(2AB)$ (d) $\det(A^{-1}B)$

8. 证明：若 E 为一初等矩阵，则 E^{T} 为与 E 同类型的初等矩阵.

9. 令 E_1，E_2，E_3 分别为第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ类 3×3 初等矩阵，并令 A 为一 3×3 矩阵，且 $\det(A)=6$. 此外，假设 E_2 为将 I 的第二行乘以 3 得到的矩阵. 求下列各值.

(a) $\det(E_1A)$ (b) $\det(E_2A)$ (c) $\det(E_3A)$

(d) $\det(AE_1)$ (e) $\det(E_1^2)$ (f) $\det(E_1E_2E_3)$

10. 令 A 和 B 为行等价矩阵，并假设 B 可由 A 仅通过行运算Ⅰ和Ⅲ得到. 比较 $\det(A)$和 $\det(B)$的值会有什么结论？如果 B 可由 A 仅通过行运算Ⅲ得到，比较它们的行列式的值会有什么结论？解释你的答案.

11. 令 A 为一 $n\times n$ 矩阵. 当 n 为奇数时，是否可使 $A^2+I=O$？当 n 为偶数时，回答相同的问题.

12. 考虑 3×3 范德蒙德矩阵

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}$$

(a)证明 $\det(V)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$. [提示：利用行运算Ⅲ.]

100 (b)标量 x_1，x_2，x_3需满足什么条件，才能使 V 为非奇异的？

13. 设一 3×3 矩阵 A 分解为如下的乘积：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

计算 $\det(A)$的值.

14. 令 A 和 B 为 $n\times n$ 矩阵. 证明乘积 AB 是非奇异的充要条件为 A 和 B 是非奇异的.
15. 令 A 和 B 为 $n\times n$ 矩阵. 证明：若 $AB=I$，则 $BA=I$. 这个结果在定义非奇异矩阵中有什么重要作用?
16. 若矩阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}=-A$，则称其为反对称的(skew symmetric). 例如，

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

为反对称的，因为

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=-A$$

若 A 为一 $n\times n$ 反对称矩阵，且 n 为奇数，证明 A 必为奇异的.

17. 设 A 为一非奇异 $n\times n$ 矩阵，且有非零余子式 A_{nn}，并令

$$c=\frac{\det(A)}{A_{nn}}$$

证明：如果我们从 a_{nn} 中减去常数 c，则结果矩阵为奇异的.

18. 令 A 为 $k\times k$ 矩阵，B 为$(n-k)\times(n-k)$矩阵. 设 $E=\begin{bmatrix} I_k & O \\ O & B \end{bmatrix}$，$F=\begin{bmatrix} A & O \\ O & I_{n-k} \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$，其中 I_k 和 I_{n-k}分别为 $k\times k$ 单位矩阵和$(n-k)\times(n-k)$单位矩阵.
(a)证明 $\det(E)=\det(B)$.
(b)证明 $\det(F)=\det(A)$.
(c)证明 $\det(C)=\det(A)\det(B)$.
19. 设 A 和 B 为 $k\times k$ 矩阵，

$$M=\begin{bmatrix} O & B \\ A & O \end{bmatrix}$$

证明

$$\det(M)=(-1)^k\det(A)\det(B)$$

20. 证明用余子式计算 $n\times n$ 矩阵的行列式用到$(n!-1)$个加法和 $\sum_{k=1}^{n-1} n!/k!$个乘法.
21. 证明计算 $n\times n$ 矩阵的行列式值的消元法含有$[n(n-1)(2n-1)]/6$ 个加法和$[(n-1)(n^2+n+3)]/3$ 个乘除法. [提示：第 i 步化简过程需要 $n-i$ 次除法，计算主元下面其他行要减去第 i 行的倍数. 在计算第 $i+1$ 行到第 n 行、第 $i+1$ 列到第 n 列的新值时，必须计算$(n-i)^2$ 项的新值.]

2.3 附加主题和应用

本节我们学习利用非奇异矩阵 A 的行列式来计算矩阵的逆以及如何使用行列式求解线性方程组. 这两种方法均依赖于引理 2.2.1. 我们还说明如何用行列式定义两个向量的向量积. 向量积在涉及三维空间中粒子运动的物理应用中非常有用.

矩阵的伴随

令 A 为一 $n\times n$ 矩阵. 我们定义一个新矩阵，称为矩阵 A 的伴随(adjoint)，

$$\operatorname{adj} A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}$$

101

因此，要构造伴随矩阵，只需将原矩阵的元素用它们的余子式替换，然后将结果矩阵转置．由引理 2.2.1，有

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}\det(A) & \text{当 } i=j \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } i\neq j \text{ 时}\end{cases}$$

并由此

$$A(\operatorname{adj} A)=\det(A)I$$

若 A 为非奇异的，则 $\det(A)$为非零标量，且可以记

$$A\left(\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj} A\right)=I$$

因此

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj} A\text{ ，其中 } \det(A)\neq 0}$$

▶例 1 对一 2×2 矩阵

$$\operatorname{adj} A=\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$$

若 A 为非奇异的，则

$$A^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$$ ◀

▶例 2 令

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

求 $\operatorname{adj}A$ 和 A^{-1}.

解

$$\operatorname{adj} A=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\ -7 & 4 & 2\\ 4 & -3 & 1\end{bmatrix}$$

102

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}A=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\ -7 & 4 & 2\\ 4 & -3 & 1\end{bmatrix}$$ ◀

利用公式

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}A$$

可以得到用行列式表示的方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解.

克拉默法则

定理 2.3.1（克拉默法则） 令 A 为一 $n\times n$ 非奇异矩阵，并令 $\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^n$. 令 A_i 为将矩阵 A 中的第 i 列用 $\boldsymbol{b}$ 替换得到的矩阵. 若 $\boldsymbol{x}$ 为方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的唯一解，则

$$x_i=\frac{\det(A_i)}{\det(A)},\quad i=1,2,\cdots,n$$

证 由于

$$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}=\frac{1}{\det(A)}(\operatorname{adj}A)\boldsymbol{b}$$

因此得到

$$\begin{aligned}x_i&=\frac{b_1A_{1i}+b_2A_{2i}+\cdots+b_nA_{ni}}{\det(A)}\\&=\frac{\det(A_i)}{\det(A)}\end{aligned}$$

■

▶**例 3** 用克拉默法则解

$$\begin{aligned}x_1+2x_2+x_3&=5\\2x_1+2x_2+x_3&=6\\x_1+2x_2+3x_3&=9\end{aligned}$$

解

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&2&1\\1&2&3\end{vmatrix}=-4\qquad\det(A_1)=\begin{vmatrix}5&2&1\\6&2&1\\9&2&3\end{vmatrix}=-4$$

$$\det(A_2)=\begin{vmatrix}1&5&1\\2&6&1\\1&9&3\end{vmatrix}=-4\qquad\det(A_3)=\begin{vmatrix}1&2&5\\2&2&6\\1&2&9\end{vmatrix}=-8$$

103

因此

$$x_1=\frac{-4}{-4}=1,\quad x_2=\frac{-4}{-4}=1,\quad x_3=\frac{-8}{-4}=2$$

◀

克拉默法则给出了一个将 $n\times n$ 的线性方程组的解用行列式表示的便利方法. 然而，要计算结果，我们需计算 $n+1$ 个 n 阶行列式. 即使计算两个这样的行列式，通常也要用多于高斯消元法的计算量.

应用 1：信息编码

一个通用的传递信息的方法是，将每一个字母与一个整数相对应，然后传输一串整数. 例如，信息

SEND MONEY

可以编码为

5，8，10，21，7，2，10，8，3

其中 S 表示为 5，E 表示为 8，等等．但是，这种编码很容易破译．在一段较长的信息中，我们可以根据数字出现的相对频率猜测每一数字表示的字母．例如，若 8 为编码信息中最常出现的数字，则它最有可能表示字母 E，即英文中最常出现的字母．

我们可以用矩阵乘法对信息进行进一步的伪装．设 A 是所有元素均为整数的矩阵，且其行列式为 ±1，由于 $A^{-1}=\pm\operatorname{adj}A$，则 A^{-1} 的元素也是整数．我们可以用这个矩阵对信息进行变换．变换后的信息将很难破译．为演示这个技术，令

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&5&3\\2&3&2\end{bmatrix}$$

需要编码的信息放置在三行矩阵 B 的各个列上．

$$B=\begin{bmatrix}5&21&10\\8&7&8\\10&2&3\end{bmatrix}$$

乘积

$$AB=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&5&3\\2&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&21&10\\8&7&8\\10&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}31&37&29\\80&83&69\\54&67&50\end{bmatrix}$$

给出了用于传输的编码信息：

104 31,80,54,37,83,67,29,69,50

接收到信息的人可通过乘以 A^{-1} 进行译码．

$$\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&0&-1\\-4&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}31&37&29\\80&83&69\\54&67&50\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&21&10\\8&7&8\\10&2&3\end{bmatrix}$$

为构造编码矩阵 A，我们可以从单位矩阵 I 开始，利用行运算Ⅲ，仔细地将它的某一行的整数倍数加到其他行上．也可使用行运算Ⅰ．结果矩阵 A 将仅有整数元，且由于

$$\det(A)=\pm\det(I)=\pm1$$

因此 A^{-1} 也将有整数元．

参考文献

1. Hansen, Robert, *Two-Year College Mathematics Journal*, 13(1), 1982.

向量积

给定 $\mathbf{R}^3$ 中的两个向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$，可以定义第三个向量，即向量积，记为 $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$：

$$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}x_2y_3-y_2x_3\\y_1x_3-x_1y_3\\x_1y_2-y_1x_2\end{bmatrix}\qquad(1)$$

若 C 为任意形如

$$C=\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

的矩阵，则

$$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}=C_{11}\boldsymbol{e}_1+C_{12}\boldsymbol{e}_2+C_{13}\boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{13} \end{bmatrix}$$

沿第一行用公因子展开 $\det(C)$，可以看到

$$\det(C)=w_1C_{11}+w_2C_{12}+w_3C_{13}=\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})$$

特别地，若选择 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{x}$ 或 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{y}$，则矩阵 C 将有两个相同的行，因此它的行列式为 0．于是有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})=0 \tag{2}$$

在微积分教材中，一般使用行向量

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\ \text{和}\ \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)$$ 105

并定义向量积为行向量

$$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}=(x_2y_3-y_2x_3)\boldsymbol{i}-(x_1y_3-y_1x_3)\boldsymbol{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\boldsymbol{k}$$

其中 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 是 3×3 单位矩阵的行向量．若在矩阵 M 的第一行分别用 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 代替 w_1，w_2 和 w_3，则向量积可以写为行列式：

$$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

在线性代数课程中，通常将 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ 看作列向量．此时，可以用矩阵的行列式表示向量积，其第一行是 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_3$，即 3×3 单位矩阵的列向量：

$$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

方程(2)中给出的关系已经被应用于牛顿力学中．特别地，向量积可以用于定义副法线方向，牛顿用它来导出 3 维空间质点的运动定律．

应用 2：牛顿力学

若 $\boldsymbol{x}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 或 $\mathbf{R}^3$ 中的一个向量，则 $\boldsymbol{x}$ 的长度记为 $\|\boldsymbol{x}\|$，定义为

$$\|\boldsymbol{x}\|=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}$$

若 $\|\boldsymbol{x}\|=1$，则向量 $\boldsymbol{x}$ 称为单位向量．牛顿用单位向量导出了平面或 3 维空间中质点的运动定律．若 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbf{R}^2$ 中的非零向量，则向量间的夹角 θ 是按顺时针方向旋转两个向

量之一使得它与另一个向量方向相同所必需的最小角度(如图 2.3.1 所示).

在平面上移动的质点在平面上的轨迹是一条曲线. 在任一时刻 t 质点的位置可用一向量($x_1(t)$, $x_2(t)$)表示. 在描述质点的运动时, 牛顿发现将向量在时刻 t 的位置表示为向量 $\boldsymbol{T}(t)$ 和 $\boldsymbol{N}(t)$ 的线性组合会很方便, 其中 $\boldsymbol{T}(t)$ 是曲线在点($x_1(t)$, $x_2(t)$)的切线方向上的单位向量, $\boldsymbol{N}(t)$ 是曲线在给定点的法线(与切线重直的直线)方向上的单位向量(如图 2.3.2 所示).

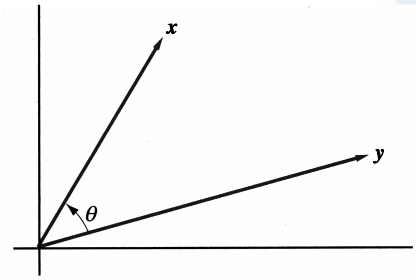


图 2.3.1

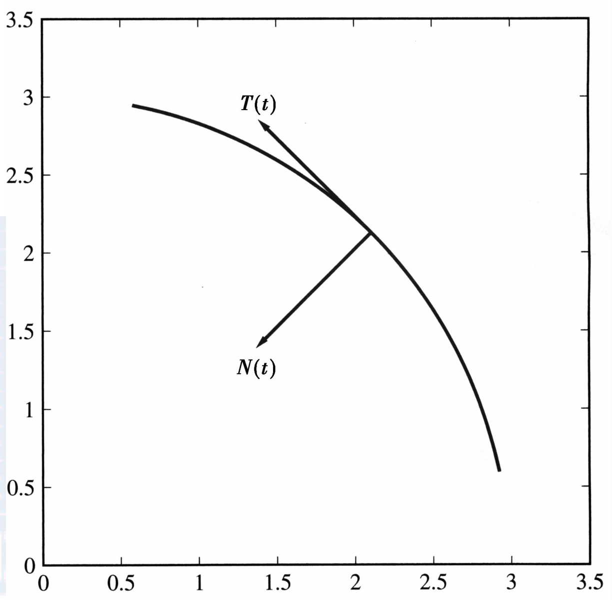


图 2.3.2

在第 5 章, 我们将证明若 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是非零向量且向量间的夹角为 θ, 则

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\| \cos\theta \tag{3}$$

106 该方程也可以用于定义 $\mathbf{R}^3$ 中非零向量间的夹角. 由(3)可得当且仅当 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=0$ 时, 向量间的夹角为直角. 此时, 我们说向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是正交的. 特别地, 由于 $\boldsymbol{T}(t)$ 和 $\boldsymbol{N}(t)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的单位正交向量, 我们有 $\|\boldsymbol{T}(t)\| = \|\boldsymbol{N}(t)\| = 1$, 且向量间的夹角为 $\frac{\pi}{2}$. 由(3)可得

$$\boldsymbol{T}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}(t) = 0$$

在第 5 章, 我们也将证明若 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的向量, 且 θ 为向量间的夹角, 则

$$\|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\| \sin\theta \tag{4}$$

在 3 维空间中移动的质点的轨迹为 3 维空间中的一条曲线. 此时, 在时刻 t, 曲线在点($x_1(t)$, $x_2(t)$)的切线和法线确定 3 维空间的一个平面. 然而, 在 3 维空间中的运动并不局限在一个平面上. 为得到描述运动的定律, 牛顿需要运用另外一个向量, 即由 $\boldsymbol{T}(t)$ 和 $\boldsymbol{N}(t)$ 确定的平面的法线方向上的向量. 若 $\boldsymbol{z}$ 是该平面法线方向上的任一非零向量, 则

向量 $\boldsymbol{z}$ 与 $\boldsymbol{T}(t)$ 间的夹角以及 $\boldsymbol{z}$ 与 $\boldsymbol{N}(t)$ 间的夹角均应为直角. 如果令

$$\boldsymbol{B}(t)=\boldsymbol{T}(t)\times\boldsymbol{N}(t) \tag{5}$$

则由(2)可得 $\boldsymbol{B}(t)$ 与 $\boldsymbol{T}(t)$ 和 $\boldsymbol{N}(t)$ 均垂直，因此它在法线方向上. 而且 $\boldsymbol{B}(t)$ 为单位向量，这是因为由(4)可得

$$\|\boldsymbol{B}(t)\|=\|\boldsymbol{T}(t)\times\boldsymbol{N}(t)\|=\|\boldsymbol{T}(t)\|\,\|\boldsymbol{N}(t)\|\sin\frac{\pi}{2}=1$$ 107

由(5)定义的向量 $\boldsymbol{B}(t)$ 称为**副法线向量**(如图 2.3.3 所示).

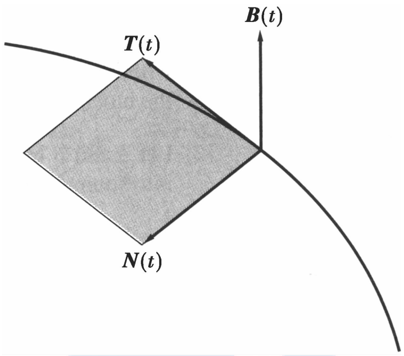


图 2.3.3

2.3 节练习

1. 对下列各种情况，计算(i)det(A)，(ii)adj A ，(iii)A^{-1}.

(a)$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\end{bmatrix}$ (b)$A=\begin{bmatrix}3&1\\2&4\end{bmatrix}$ (c)$A=\begin{bmatrix}1&3&1\\2&1&1\\-2&2&-1\end{bmatrix}$ (d)$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

2. 利用克拉默法则解下列方程组.

(a) $\begin{aligned}x_1+2x_2&=3\\3x_1-x_2&=1\end{aligned}$ (b) $\begin{aligned}2x_1+3x_2&=2\\3x_1+2x_2&=5\end{aligned}$ (c) $\begin{aligned}2x_1+x_2-3x_3&=0\\4x_1+5x_2+x_3&=8\\-2x_1-x_2+4x_3&=2\end{aligned}$

(d) $\begin{aligned}x_1+3x_2+x_3&=1\\2x_1+x_2+x_3&=5\\-2x_1+2x_2-x_3&=-8\end{aligned}$ (e) $\begin{aligned}x_1+x_2\qquad\qquad&=0\\x_2+x_3-2x_4&=1\\x_1\qquad+2x_3+x_4&=0\\x_1+x_2\qquad+x_4&=0\end{aligned}$

3. 给定

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&4&3\\1&2&2\end{bmatrix}$$

用两个行列式的商计算 A^{-1} 的(2，3)元素.

4. 令 A 为练习 3 中的矩阵. 利用克拉默法则解方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}_3$ 来计算 A^{-1} 的第三列.

5. 给定

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix}$$

(a)计算 A 的行列式. A 是非奇异的吗?

(b)计算 adj A 及乘积 $A\operatorname{adj} A$.

108 6. 若 A 为奇异的，对乘积 $A\operatorname{adj} A$ 会有什么结论?

7. 用 B_j 表示将单位矩阵的第 j 列替换为向量 $\boldsymbol{b}=(b_1,\ \cdots,\ b_2)^{\mathrm{T}}$ 得到的矩阵. 利用克拉默法则证明

$$b_j=\det(B_j),\quad \text{其中 } j=1,\cdots,n$$

8. 令 A 为一非奇异的 $n\times n$ 矩阵，其中 $n>1$. 证明

$$\det(\operatorname{adj} A)=(\det(A))^{n-1}$$

9. 令 A 为一 4×4 的矩阵. 若

$$\operatorname{adj} A=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&1&0\\0&4&3&2\\0&-2&-1&2\end{bmatrix}$$

(a)求 $\det(\operatorname{adj} A)$. $\det(A)$的值应是什么?[提示：利用练习 8 中的结论.]

(b)求 A.

10. 证明：若 A 为非奇异的，则 adj A 为非奇异的，且

$$(\operatorname{adj} A)^{-1}=\det(A^{-1})A=\operatorname{adj} A^{-1}$$

11. 证明：若 A 为奇异的，那么 adj A 也为奇异的.

12. 证明：若 $\det(A)=1$，则

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A)=A$$

13. 设 Q 为一矩阵，它有性质 $Q^{-1}=Q^{\mathrm{T}}$. 证明

$$q_{ij}=\frac{Q_{ij}}{\det(Q)}$$

14. 在信息编码中，空格用 0 表示，A 用 1 表示，B 用 2 表示，C 用 3 表示，等等. 使用矩阵

$$A=\begin{bmatrix}-1&-1&2&0\\1&1&-1&0\\0&0&-1&1\\1&0&0&-1\end{bmatrix}$$

进行信息变换，并传输

$$-19,19,25,-21,0,18,-18,15,3,10,-8,3,-2,20,-7,12$$

该信息是什么?

15. 设 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中的向量. 证明下面的结论.

(a)$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

(b)$\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{x}=-(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})$

(c)$\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{z})$

(d)$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})=\begin{vmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\z_1&z_2&z_3\end{vmatrix}$

16. 设 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中的向量，反对称矩阵 A_x 定义为

$$A_x = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a)证明 $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}=A_x\boldsymbol{y}$.

(b)证明 $\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{x}=A_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$.

第 2 章练习

MATLAB 练习

前面的四个练习使用整数矩阵，并演示一些本章讨论的行列式的性质. 最后两个练习演示我们使用浮点运算计算行列式时出现的不同.

理论上讲，行列式的值应告诉我们矩阵是否是非奇异的. 然而，如果矩阵是奇异的，且计算其行列式采用有限位精度运算，那么由于舍入误差，计算出的行列式的值也许不是零. 一个计算得到的行列式的值很接近零，并不能说明矩阵是奇异的甚至是接近奇异的. 此外，一个接近奇异的矩阵，它的行列式值也可能不接近零(见练习 6).

1. 采用如下方法随机生成整数元素的 5×5 矩阵：

$$A = \mathrm{round}(10 * \mathrm{rand}(5)) \quad 和 \quad B = \mathrm{round}(20 * \mathrm{rand}(5)) - 10$$ 109

用 MATLAB 计算下列每对数. 在每种情况下比较第一个是否等于第二个.

(a) $\det(A)$	$\det(A^{\mathrm{T}})$	(b) $\det(A+B)$	$\det(A)+\det(B)$
(c) $\det(AB)$	$\det(A)\det(B)$	(d) $\det(A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}})$	$\det(A^{\mathrm{T}})\det(B^{\mathrm{T}})$
(e) $\det(A^{-1})$	$1/\det(A)$	(f) $\det(AB^{-1})$	$\det(A)/\det(B)$

2. $n\times n$ 的幻方是否非奇异？用 MATLAB 命令 det(magic(n))计算 $n=3$，4，…，10 时的幻方矩阵的行列式. 看起来发生了什么？检验当 $n=24$ 和 25 时，结论是否仍然成立.

3. 令 $A=\mathrm{round}(10*\mathrm{rand}(6))$. 下列每种情形下，用 MATLAB 计算给出的另一个矩阵. 说明第二个矩阵和矩阵 A 之间的关系，并计算两个矩阵的行列式. 这些行列式之间有什么关联？

(a) $B=A$； $B(2,:)=A(1,:)$； $B(1,:)=A(2,:)$

(b) $C=A$； $C(3,:)=4*A(3,:)$

(c) $D=A$； $D(5,:)=A(5,:)+2*A(4,:)$

4. 我们可通过如下方法随机生成一个全部元素为 0 和 1 的 6×6 矩阵 A：

$$A = \mathrm{round}(\mathrm{rand}(6))$$

(a)这些 0-1 矩阵奇异的百分比是多少？可以用 MATLAB 命令估计这个百分比：

```
y = zeros(1,100);
```

然后生成 100 个测试矩阵，并且若第 j 个矩阵是奇异的，令 $y(j)=1$，否则为 0. 这可通过 MATLAB 中的 for 循环容易地实现. 循环如下：

```
for  j = 1 : 100
     A = round(rand(6));
     y(j) = (det(A) == 0);
end
```

(注：在一行的后面加上一个分号用于抑制输出. 建议在 for 循环中用于计算的每一行后面均添加分号.)为确定生成了多少奇异矩阵，使用 MATLAB 命令 sum($\boldsymbol{y}$). 生成的矩阵中奇异矩阵的百分比是多少？

(b)对任意正整数 n，可以通过下面命令随机生成元素为从 0～n 的整数的矩阵 A：

$$A = \mathtt{round}(n * \mathtt{rand}(6))$$

若 $n=3$，采用这种方法生成的矩阵中奇异矩阵的百分比是多少？$n=6$ 呢？$n=10$ 呢？我们可采用 MATLAB 对这些问题进行估计. 对每种情况，生成 100 个测试矩阵，并确定其中多少矩阵是奇异的.

5. 若一个矩阵对舍入误差敏感，则计算得到的行列式将会与真实值有极大的不同. 作为这个问题的例子，令

$$U = \mathtt{round}(100 * \mathtt{rand}(10)); \qquad U = \mathtt{triu}(U,1) + 0.1 * \mathtt{eye}(10)$$

理论上，

$$\det(U) = \det(U^{\mathrm{T}}) = 10^{-10}$$

且

$$\det(UU^{\mathrm{T}}) = \det(U)\det(U^{\mathrm{T}}) = 10^{-20}$$

用 MATLAB 计算 $\det(U)$，$\det(U')$和 $\det(U * U')$. 计算结果和理论值是否相同？

6. 用 MATLAB 构造矩阵 A：

$$A = \mathtt{vander}(1:6); \qquad A = A - \mathtt{diag}(\mathtt{sum}(A'))$$

(a)由构造，A 的每一行所有元素的和均为零. 为检测结论，令 $\boldsymbol{x}=\mathtt{ones}(6,1)$，并用 MATLAB 计算乘积 $A\boldsymbol{x}$. 矩阵 A 应为奇异的. 为什么？试说明理由. 用 MATLAB 函数 det 和 inv 计算 $\det(A)$和 A^{-1}. 哪一个 MATLAB 函数作为奇异性的指示函数更可靠？

(b)用 MATLAB 计算 $\det(A^{\mathrm{T}})$. 计算得到的 $\det(A)$和 $\det(A^{\mathrm{T}})$是否相等？另一种检测矩阵是否奇异的方法是计算它的行最简形. 用 MATLAB 计算 A 和 A^{T} 的行最简形.

(c)为看清问题在哪里，知道利用 MATLAB 如何计算行列式是很有帮助的. MATLAB 计算行列式的方法是，首先将矩阵进行 LU 分解. 矩阵 L 的行列式为±1，正负号依赖于在计算过程中进行
110 了奇数或偶数次行交换. A 的行列式的计算值是 U 的对角线元素的乘积乘以 $\det(L)=\pm 1$ 得到. 特别地，如果初始矩阵的元素为整数，则行列式的准确值应为整数. 此时 MATLAB 将把它计算的结果舍入到最接近的整数. 为看出对初始矩阵做了什么，使用下列命令进行计算，并显示因子 U.

```
format short e
[L,U] = lu(A);U
```

在精确算术运算时 U 应为奇异的. 计算得到的 U 是奇异的吗？如果不是，哪里有问题？使用如下命令观察计算 $d=\det(A)$的余下过程.

```
format  short
d = prod(diag(U))
```

测试题 A——判断正误

对下列各题，当命题总是成立时回答真(true)，否则回答假(false). 如果命题为真，说明或证明你的结论. 如果命题为假，举例说明该命题并不总是成立的. 对下列每种情况，假设所有矩阵为 $n\times n$ 的.

1. $\det(AB)=\det(BA)$
2. $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$
3. $\det(cA)=c\det(A)$
4. $\det((AB)^{\mathrm{T}})=\det(A)\det(B)$
5. $\det(A)=\det(B)$可推出 $A=B$.

6. $\det(A^k)=\det(A)^k$
7. 一个三角形矩阵是非奇异的当且仅当它的对角线上的元素全不为零.
8. 若 $\boldsymbol{x}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的非零向量，且 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，则 $\det(A)=0$.
9. 若 A 和 B 为行等价矩阵，则它们的行列式相等.
10. 若 $A\neq O$，但 $A^k=O$(其中 O 为零矩阵)对某正整数 k 成立，则 A 必为奇异的.

测试题 B

1. 令 A 和 B 为 3×3 矩阵，且 $\det(A)=4$，$\det(B)=6$，令 E 为第Ⅰ类初等矩阵. 计算下列各值：

   (a) $\det\left(\frac{1}{2}A\right)$

   (b) $\det(B^{-1}A^{\mathrm{T}})$

   (c) $\det(EA^2)$

2. 令

$$A=\begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & -1 \\ -1 & -1 & x \end{bmatrix}$$

   (a)计算 $\det(A)$的值(答案应表示为 x 的函数).

   (b) x 取何值时，矩阵为奇异的？试说明.

3. 给定矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix}$$

   (a)求 A 的 LU 分解.

   (b)利用 LU 分解求 $\det(A)$的值.

4. 若 A 为一 $n\times n$ 非奇异矩阵，证明 $A^{\mathrm{T}}A$ 为非奇异的，且 $\det(A^{\mathrm{T}}A)>0$.
5. 令 A 为一 $n\times n$ 矩阵. 证明：若对某非奇异矩阵 S 有 $B=S^{-1}AS$，则 $\det(B)=\det(A)$.
6. 令 A 和 B 为 $n\times n$ 矩阵，并令 $C=AB$. 用行列式证明：如果 A 或 B 为奇异的，则 C 必为奇异的.
7. 令 A 为一 $n\times n$ 矩阵，并令 λ 为一标量. 证明

$$\det(A-\lambda I)=0$$

   的充要条件为

$$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x},\quad \text{对某 } \boldsymbol{x}\neq\mathbf{0} \text{ 成立}$$

8. 令 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的向量，其中 $n>1$. 证明：若 $A=\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$，则 $\det(A)=0$.
9. 令 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中不相同的向量(即 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$)，并令 A 为一 $n\times n$ 矩阵，满足性质 $A\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{y}$. 证明 $\det(A)=0$.
10. 令 A 为一元素是整数的矩阵. 若 $|\det(A)|=1$，则你能否知道 A^{-1} 的元素是什么类型的？试说明. 111