第 2 章　概率论公理

2.1　引言

本章介绍事件的概率的概念，然后展示在某些特定情形下计算概率的方法．然而在引入概率的概念之前，我们需要学习更基本的概念，即试验的样本空间和事件．

2.2　样本空间和事件

考虑一个试验，其结果是不可肯定地预测的．当然，尽管在试验之前无法得知结果，但是假设所有可能结果的集合是已知的．所有可能的结果构成的集合，称为该试验的样本空间(sample space)，并记为 S．以下是样本空间的一些例子．

1．若试验是考察新生婴儿的性别，那么所有可能结果的集合

$$S = \{\mathrm{g}, \mathrm{b}\}$$

就是一个样本空间，其中 g 表示“女孩”，b 表示“男孩”．

2．若试验是赛马比赛，一共有 7 匹马参赛，这 7 匹马分别标以 1，2，3，4，5，6，7，那么所有可能的比赛结果的集合

$$S = \{(1,2,3,4,5,6,7)\text{ 的所有 }7!\text{ 种排列}\}$$

就是一个样本空间．如(2，3，1，6，5，4，7)就表示 2 号马跑第一，3 号马跑第二，接下来是 1 号马，等等．

3．若试验是掷两枚硬币，考察哪一面朝上，那么样本空间一共包含如下四种结果：

$$S = \{(\mathrm{H},\mathrm{H}),(\mathrm{H},\mathrm{T}),(\mathrm{T},\mathrm{H}),(\mathrm{T},\mathrm{T})\}$$ 21

其中(H，H)表示两枚硬币都是正面朝上；(H，T)表示第一枚硬币正面朝上，第二枚反面朝上；(T，H)表示第一枚硬币反面朝上，第二枚正面朝上；(T，T)表示两枚硬币都是反面朝上．

4．若试验是掷两枚骰子，考察两枚骰子的点数，那么样本空间包含 36 种结果：

$$S = \{(i,j): i,j = 1,2,3,4,5,6\}$$

其中，(i, j)表示第一个骰子的点数是 i，第二个骰子的点数是 j．

5．若试验是考察一个晶体管的寿命(小时)，那么样本空间是所有的非负实数，即

$$S = \{x: 0 \leqslant x < \infty\}$$

样本空间的任一子集 E 称为事件(event)，事件就是由试验的某些可能结果组成的一个集合．如果试验的结果包含在 E 里面，那么就称事件 E 发生了．以下是事件的一些例子．

在前面的例 1 中，令 $E=\{\mathrm{g}\}$，那么 E 就表示事件“婴儿是个女孩”，类似地，$F=\{\mathrm{b}\}$ 就表示事件“婴儿是个男孩”．

在例 2 中，如果

$$E = \{\text{所有以 3 开头的排列}\}$$

那么 E 就表示事件“3 号马获得了第一名”.

在例 3 中，如果 $E=\{(\mathrm{H},\mathrm{H}),(\mathrm{H},\mathrm{T})\}$，那么 E 就表示事件“第一枚硬币正面朝上”.

在例 4 中，如果 $E=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$，那么 E 就表示“两个骰子的点数之和为 7”这一事件.

在例 5 中，如果 $E=\{x: 0\leqslant x\leqslant 5\}$，那么 E 就表示“晶体管的寿命不超过 5 个小时”这一事件.

对于同一个样本空间 S 的任意两个事件 E 和 F，定义一个新的事件 $E\cup F$，它由以下结果组成：这些结果或在 E 中，或在 F 中，或既在 E 中也在 F 中. 也就是说，如果事件 E 或者事件 F 中有一个发生，那么 $E\cup F$ 就发生. 例如，在例 1 中，如果 $E=\{\mathrm{g}\}$表示新生儿是女孩，$F=\{\mathrm{b}\}$表示新生儿是男孩，那么

$$E \cup F = \{\mathrm{g},\mathrm{b}\}$$

即 $E\cup F$ 与整个样本空间 S 是一致的. 在例 3 中，如果 $E=\{(\mathrm{H},\mathrm{H}),(\mathrm{H},\mathrm{T})\}$表示第一枚硬币是正面朝上，$F=\{(\mathrm{T},\mathrm{H})\}$表示第一枚硬币反面朝上且第二枚硬币正面朝上，那么

$$E \cup F = \{(\mathrm{H},\mathrm{H}),(\mathrm{H},\mathrm{T}),(\mathrm{T},\mathrm{H})\}$$

因此，$E\cup F$ 意味着“至少有一枚硬币正面朝上”.

事件 $E\cup F$ 称为事件 E 和事件 F 的**并**(union).

类似地，对于任意两个事件 E 和 F，还可以定义 EF，称为 E 和 F 的**交**(intersection)，它由 E 和 F 的公共元素组成. 即事件 EF(有时也记为 $E\cap F$)发生当且仅当 E 和 F 同时发生. 比如在例 3 中，事件 $E=\{(\mathrm{H},\mathrm{H}),(\mathrm{H},\mathrm{T}),(\mathrm{T},\mathrm{H})\}$表示“至少有一枚硬币正面朝上”，而 $F=\{(\mathrm{H},\mathrm{T}),(\mathrm{T},\mathrm{H}),(\mathrm{T},\mathrm{T})\}$表示“至少有一枚硬币反面朝上”，那么

22

$$EF = \{(\mathrm{H},\mathrm{T}),(\mathrm{T},\mathrm{H})\}$$

就表示“恰好一枚硬币正面朝上和一枚硬币反面朝上”. 在例 4 中，事件 $E=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ 表示两个骰子的点数之和为 7，而 $F=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$表示两个骰子的点数之和为 6，那么 EF 不包含任何试验结果，因此它也不可能发生. 类似这样的事件，称为**不可能事件**，记为$\varnothing$(即$\varnothing$是不包含任何结果的事件). 如果 $EF=\varnothing$，则称 E 和 F 是**互不相容的**(mutually exclusive).

用类似的方式可以定义两个以上事件的并和交. 设 E_1，E_2，…是一系列事件，这些事件的并记为 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$，它表示至少包含在某一个 E_n 中的所有结果所构成的事件. 同样，这些事件的交记为 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$，它表示包含在所有 E_n 中的所有结果构成的事件.

最后，对于任意事件 E，可以定义 E 的补，记为 E^c，它表示包含在样本空间中但不包含在 E 中的所有结果构成的事件. 即 E^c 发生当且仅当 E 不发生. 在例 4 中，如果

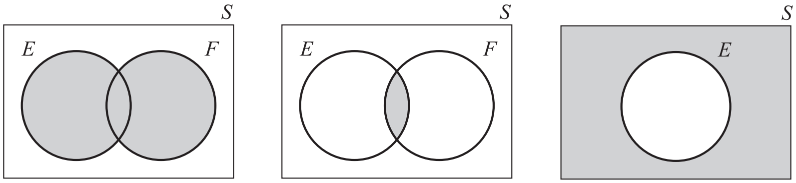
$$E = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\},$$

那么当两个骰子的点数之和不等于 7 时，E^c 发生. 注意，样本空间 S 的补 $S^c=\varnothing$.

对于任意两个事件 E 和 F，如果 E 中的所有结果都在 F 中，那么称 E **包含于** F 或者 E 是 F 的**子集**，记为 $E\subset F$(或者 $F\supset E$，有时候称 F 是 E 的一个**超集**). 因此，如果 $E\subset F$，

那么 E 发生就表示 F 也发生. 如果 $E\subset F$ 和 $F\subset E$，那么称 E 和 F 是相等的，记为 $E=F$.

维恩图(Venn Diagram)是一种用来阐述事件之间的逻辑关系的非常实用的几何表示方法. 样本空间 S 用一个大的矩形表示，意即它包含了所有可能结果，事件 E，F，G，…用包含在矩形之内的一个个小圆表示，所关心的事件可以用相应的阴影区域表示. 比如，在 23
图 2-1 的 3 个维恩图中，阴影部分分别表示 $E\cup F$，EF 和 E^c. 图 2-2 表示 $E\subset F$.



a）阴影区域：$E\cup F$ b）阴影区域：EF c）阴影区域：E^c

图 2-1 维恩图

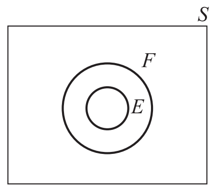


图 2-2 $E\subset F$

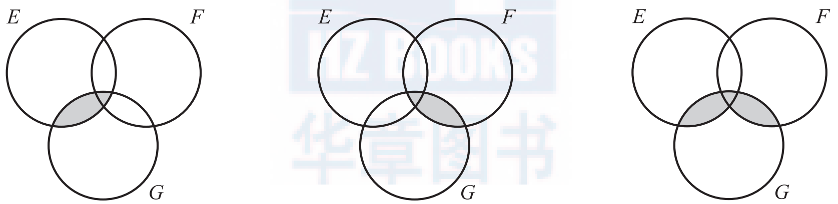
事件的并、交和补遵循类似于代数学里的一些运算法则，例如，

交换律：$E\cup F=F\cup E$ $\qquad EF=FE$

结合律：$(E\cup F)\cup G=E\cup(F\cup G)$ $\qquad (EF)G=E(FG)$

分配律：$(E\cup F)G=EG\cup FG$ $\qquad EF\cup G=(E\cup G)(F\cup G)$

上述关系可以通过以下方式来证明：先证明等式左边的事件中的任一结果必然包含于等式右边的事件中，再证明等式右边的事件中的任一结果也包含于等式左边的事件中. 另一种证明方法就是利用维恩图，比如图 2-3 就表示了分配律.



a）阴影区域：EG b）阴影区域：FG c）阴影区域：$(E\cup F)G$

图 2-3 $(E\cup F)G=EG\cup FG$ 24

下面关于事件的并、交和补这三个基本运算之间的重要的关系式称为德摩根律(De Morgan law)：

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c=\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c \qquad \left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)^c=\bigcup_{i=1}^{n} E_i^c$$

例如，对于事件 E 和 F，德摩根律表明$(E\cup F)^c=E^cF^c$ 和$(EF)^c=E^c\cup F^c$. 通过维恩图可以很容易地得到这个结果(见理论习题 7).

对于一般的 n，为了证明德摩根律，首先假设 x 是$\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c$ 里的一个元素，那么 x 不包含于 $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$，这就意味着 x 并不包含于任一个事件 $E_i(i=1, 2, \cdots, n)$，所以对任意 $i(i=1,$

2，…，n)来说，x 就包含于 E_i^c，即 x 包含于 $\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$. 另一方面，假设 x 包含于 $\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c$，那么对任一 $i(i=1,2,\cdots,n)$，x 包含于 E_i^c，这就意味着 x 不属于任何 E_i，所以 x 不包含于 $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$，即 x 包含于 $\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c$. 这样就证明了德摩根律的第一条.

现证明德摩根律的第二条，由第一条定律可知

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i^c\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} (E_i^c)^c$$

这样，由 $(E^c)^c = E$，上式等价于

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i^c\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} E_i$$

对两边取补运算，就得到所要的结果，即

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i^c = \left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)^c$$

2.3　概率论公理

一种定义事件发生概率的方法是利用事件发生的*相对频率*. 定义如下：假设有一个样
25 本空间为 S 的试验，它在相同的条件下可重复进行. 对于样本空间 S 中的事件 E，记 $n(E)$ 为 n 次重复试验中事件 E 发生的次数. 那么，该事件发生的概率 $P(E)$ 就定义如下：

$$P(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(E)}{n}$$

即定义概率 $P(E)$ 为 E 发生的次数占试验总次数的比例的极限，也即 E 发生频率的极限.

虽然上述定义很直观，而且大多读者也一直这么认为，但它却有很严重的缺陷：怎么就知道 $n(E)/n$ 会收敛到一个固定的常数，而且如果进行另一次重复试验，它也会收敛到这个相同的常数？例如，设想进行这样的试验：重复掷一枚硬币 n 次，怎么能保证在 n 次试验中正面朝上的比例会随着 n 的增大而收敛于某个常数？而且，即使它确实收敛于某个数，又如何保证，进行另一次同样的重复试验，正面朝上的比例也会趋于同样的值？

用相对频率来定义概率的支持者常常如下回答上述问题：他们认为 $n(E)/n$ 趋于某常数极限值是整个系统的一个假设，或者说一个*公理*(axiom). 但是，这个假设似乎异常复杂，因为，尽管事实上需要假定频率的极限是存在的，但是这却不是一个最基本、最简单的假设. 同时，这样的假设也不一定被所有人认同. 事实上，先假定一些更简单、更显而易见的关于概率的公理，然后去证明频率在某种意义下趋于一个常数极限不是更合情合理吗？这也正是本书采纳的现代概率论公理化方法. 特别地，我们假定对于样本空间中的任一事件 E，都存在一个值 $P(E)$(指的就是事件 E 的概率)，并假定这些概率值符合一系列公理. 读者一定会认可这些与我们对概率的直觉认识相一致的公理.

假设某个试验的样本空间为 S，对应于其中任一事件 E，定义一个数 $P(E)$，它满足如下 3 个公理.

概率的三个公理

公理 1

$$0 \leqslant P(E) \leqslant 1$$

公理 2

$$P(S) = 1$$

公理 3 对任一列互不相容的事件 E_1，E_2，…(即如果 $i \neq j$，则 $E_iE_j = \varnothing$)，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

我们把满足以上 3 条公理的 $P(E)$ 称为事件 E 的概率. 26

公理 1 说明，任何事件 E 的概率在 0 到 1 之间. 公理 2 说明，S 作为必然发生的事件，其概率定义为 1. 公理 3 说明对任意一列互不相容事件，至少有一事件发生的概率等于各事件发生的概率之和.

设 E_1，E_2，…为一特殊的事件序列，其中 $E_1 = S$，$E_i = \varnothing (i > 1)$，那么，因为各个事件互不相容，且 $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. 由公理 3 可以得到

$$P(S) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) = P(S) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\varnothing)$$

这就说明

$$P(\varnothing) = 0$$

即空事件发生的概率为 0.

注意，对于有限个互不相容事件的序列 E_1，E_2，…，E_n，有

$$P\left(\bigcup_{1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) \tag{3.1}$$

为证明这个结论，只需在公理 3 中令所有 $E_i (i > n)$ 为空事件即可. 当样本空间为有限集时，公理 3 与式(3.1)是等价的，但当样本空间是无限集时，公理 3 的推广就是必要的.

例 3a 如果试验是掷一枚硬币，记正面朝上的事件为 H，反面朝上的事件为 T. 假设两个事件是等可能的，那么

$$P(\{\mathrm{H}\}) = P(\{\mathrm{T}\}) = \frac{1}{2}$$

另外，如果这个硬币是有偏的，而且正面朝上的机会是反面朝上机会的 2 倍，那么

$$P(\{\mathrm{H}\}) = \frac{2}{3} \qquad P(\{\mathrm{T}\}) = \frac{1}{3}$$ ■

例 3b 如果掷一枚骰子，其 6 个面等可能地出现，那么，就有 $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = 1/6$. 从公理 3 可知出现偶数面朝上的概率为

$$P(\{2,4,6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{2}$$ ■

设 $P(E)$ 是定义在样本空间中的事件上的集函数，若它满足上述 3 个公理，则 $P(E)$ 就是事件 E 的概率. 这一定义是现代概率论的数学基础. 我们希望读者会认为这些公理很自然，而且与对概率的直觉概念(即概率是与机会和随机性有关的知识)很吻合. 进一步，利
27 用这些公理可以证明，随着试验的不断重复，事件 E 发生的频率以概率 1 趋近 $P(E)$. 这就是第 8 章将要介绍的强大数定律. 另外，2.7 节还将介绍概率的另一种解释，即概率可作为确信程度的度量.

技术注释　在定义中，我们假定概率 $P(E)$ 是针对样本空间中的所有事件 E 定义的，事实上，如果样本空间是不可数集，那么 $P(E)$ 仅仅针对那些所谓可测的事件进行定义. 但是，这并不是概率论的缺陷，因为现实中没有不可测事件.

2.4　几个简单命题

本节我们证明几个有关概率的简单命题. 首先注意 E 和 E^c 总是互不相容的，而且 $E\cup E^c=S$，因此由公理 2 和公理 3 可以得到

$$1=P(S)=P(E\cup E^c)=P(E)+P(E^c)$$

等价地，我们有命题 4.1.

命题 4.1

$$P(E^c)=1-P(E)$$

命题 4.1 说明，一个事件不发生的概率，等于 1 减去它发生的概率. 比如，掷一枚硬币，若正面朝上的概率是 3/8，那么反面朝上的概率一定是 $1-3/8=5/8$.

下面的命题指出了如果事件 E 包含于事件 F，那么 E 发生的概率必然不大于 F 发生概率.

命题 4.2　如果 $E\subset F$，那么 $P(E)\leqslant P(F)$.

证明　因为 $E\subset F$，所以可将 F 表示为

$$F=E\cup E^cF$$

这样，E 和 E^cF 是互不相容的，由公理 3 可得

$$P(F)=P(E)+P(E^cF)$$

由于 $P(E^cF)\geqslant 0$，因此 $P(E)\leqslant P(F)$.　□

命题 4.2 告诉我们，例如，掷一枚骰子，出现 1 的概率肯定小于等于出现奇数的概率.

下一命题借助两事件的概率给出了它们的并的概率与交的概率之间的关系.

命题 4.3

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(EF)$$

证明　首先注意 $E\cup F$ 可以表示为两个互不相容事件 E 和 E^cF 的并，因此根据公理 3 可知

28 $$P(E\cup F)=P(E\cup E^cF)=P(E)+P(E^cF)$$

另外，由于 $F=EF\cup E^cF$，再利用公理 3 也可以得到

$$P(F)=P(EF)+P(E^cF)$$

或等价地，

$$P(E^cF)=P(F)-P(EF)$$

将它代入前面关于 $P(E\cup F)$ 的表达式，就完成了证明.　□

命题 4.3 也可以利用维恩图来证明，见图 2-4.

将 $E\cup F$ 分成 3 个互不相容的部分，如图 2-5 所示. 第 Ⅰ 部分表示的是所有属于 E 但不属于 F 的点(即 EF^c)，第 Ⅱ 部分表示所有既属于 E 也属于 F 的点(即 EF)，第 Ⅲ 部分表示所有属于 F 但不属于 E 的点(即 E^cF).

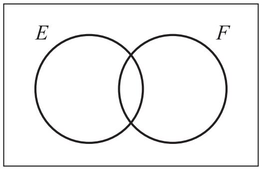


图 2-4　维恩图

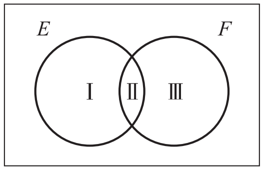


图 2-5　维恩图

从图 2-5 可以看出，

$$E\cup F=\mathrm{I}\cup\mathrm{II}\cup\mathrm{III}\qquad E=\mathrm{I}\cup\mathrm{II}\qquad F=\mathrm{II}\cup\mathrm{III}$$

由于 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ 是互不相容的，由公理 3 可得

$$P(E\cup F)=P(\mathrm{I})+P(\mathrm{II})+P(\mathrm{III})$$
$$P(E)=P(\mathrm{I})+P(\mathrm{II})$$
$$P(F)=P(\mathrm{II})+P(\mathrm{III})$$

由以上就可以得出

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(\mathrm{II})$$

又因为 $\mathrm{II}=EF$，所以命题 4.3 得以证明.

例 4a　J 在度假时随身携带了两本书. 她喜欢第一本书的概率为 0.5，喜欢另外一本的概率为 0.4，两本书都喜欢的概率为 0.3，问两本书她都不喜欢的概率是多大？ 29

解　令 B_i 表示她喜欢第 i 本书($i=1,2$)，那么她至少喜欢一本书的概率为

$$P(B_1\cup B_2)=P(B_1)+P(B_2)-P(B_1B_2)=0.5+0.4-0.3=0.6$$

因为两本书都不喜欢的对立事件是至少喜欢一本书，所以

$$P(B_1^cB_2^c)=P((B_1\cup B_2)^c)=1-P(B_1\cup B_2)=0.4$$ ■

我们还可以计算三个事件 E，F，G 之中至少有一个发生的概率，即

$$P(E\cup F\cup G)=P[(E\cup F)\cup G]$$

由命题 4.3 可知上式等于

$$P(E\cup F)+P(G)-P[(E\cup F)G]$$

由分配律可知 $(E\cup F)G=EG\cup FG$，因此由上述等式可得

$$\begin{aligned}P(E\cup F\cup G)&=P(E)+P(F)-P(EF)+P(G)-P(EG\cup FG)\\&=P(E)+P(F)-P(EF)+P(G)-P(EG)-P(FG)+P(EGFG)\\&=P(E)+P(F)+P(G)-P(EF)-P(EG)-P(FG)+P(EFG)\end{aligned}$$

下面的命题，也称为容斥恒等式(inclusion-exclusion identity)，可由数学归纳法证明.

命题 4.4

$$P(E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n)=\sum_{i=1}^{n}P(E_i)-\sum_{i_1<i_2}P(E_{i_1}E_{i_2})+\cdots+$$

$$(-1)^{r+1}\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r}P(E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_r})+\cdots+(-1)^{n+1}P(E_1E_2\cdots E_n)$$

其中，$\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r}P(E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_r})$表示对一切下标集合$\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$所对应的值求和，和项一共包含$\binom{n}{r}$项.

换言之，n个事件并的概率，等于这些事件的独自发生的概率之和，减去两个事件同时发生的概率之和，再加上三个事件同时发生的概率之和……

注释　1. 现在我们来直观解释一下命题 4.4 的含义，首先注意，如果样本空间中的某个结果不属于任意的E_i，那么等式两边都不应该有它的概率. 现在假设某个结果正好包含在m个E_i里面(其中$m>0$)，那么因为它属于$\bigcup_i E_i$，所以它的概率在$P\left(\bigcup_i E_i\right)$中只计算一次. 而且，因为这个结果也包含于形如$E_{i_1}, E_{i_2}, \cdots, E_{i_k}$这样的$\binom{m}{k}$个子集中，在命题 4.4 中等式的右边，这个结果的概率被计算了

30

$$\binom{m}{1}-\binom{m}{2}+\binom{m}{3}-\cdots\pm\binom{m}{m}$$

次. 因此，对于$m>0$，我们必须证明

$$1=\binom{m}{1}-\binom{m}{2}+\binom{m}{3}-\cdots\pm\binom{m}{m}$$

然而，因为$1=\binom{m}{0}$，上式等价于

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}(-1)^i=0$$

而这是二项式定理的结果，因为

$$0=(-1+1)^m=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}(-1)^i(1)^{m-i}$$

2. 以下式子是容斥恒等式更简明的写法：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r+1}\sum_{i_1<\cdots<i_r}P(E_{i_1}\cdots E_{i_r})$$

3. 在容斥恒等式中，右边如果只取前一项，那么得到事件并的概率的一个上界；如果取前两项，那么得到事件并的概率的一个下界；取前 3 项，得到一个上界；取前 4 项，得到一个下界，以此类推. 也就是说，对于事件$E_1, \cdots, E_n$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(E_i)\tag{4.1}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)\geqslant\sum_{i=1}^{n}P(E_i)-\sum_{j<i}P(E_iE_j)\tag{4.2}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{j<i} P(E_i E_j) + \sum_{k<j<i} P(E_i E_j E_k) \tag{4.3}$$

等等．为了证明这些不等式，先注意恒等式

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E_1 \cup E_1^c E_2 \cup E_1^c E_2^c E_3 \cup \cdots \cup E_1^c \cdots E_{n-1}^c E_n$$

即 E_i 中至少有一个发生，相当于 E_1 发生，或者 E_1 不发生但是 E_2 发生，或者 E_1 和 E_2 都不发生但 E_3 发生，等等．因为上式的右边是一系列互不相容事件的并，所以

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) &= P(E_1) + P(E_1^c E_2) + P(E_1^c E_2^c E_3) + \cdots + P(E_1^c \cdots E_{n-1}^c E_n) \\ &= P(E_1) + \sum_{i=2}^{n} P(E_1^c \cdots E_{i-1}^c E_i) \end{aligned} \tag{4.4}$$

31

令 $B_i = E_1^c \cdots E_{i-1}^c = \left(\bigcup_{j<i} E_j\right)^c$ 表示前 $i-1$ 个事件都不发生，利用恒等式

$$P(E_i) = P(B_i E_i) + P(B_i^c E_i)$$

可证明

$$P(E_i) = P(E_1^c \cdots E_{i-1}^c E_i) + P\left(E_i \bigcup_{j<i} E_j\right)$$

或等价地，

$$P(E_1^c \cdots E_{i-1}^c E_i) = P(E_i) - P\left(\bigcup_{j<i} E_i E_j\right)$$

将此代入式(4.4)可得

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_i P(E_i) - \sum_i P\left(\bigcup_{j<i} E_i E_j\right) \tag{4.5}$$

因为概率总是非负的，所以由式(4.5)便可直接得到不等式(4.1)．现在，固定 i，将不等式(4.1)应用到 $P\left(\bigcup_{j<i} E_i E_j\right)$ 可得

$$P\left(\bigcup_{j<i} E_i E_j\right) \leqslant \sum_{j<i} P(E_i E_j)$$

此式结合式(4.5)，又可得到不等式(4.2)．类似地，固定 i，将不等式(4.2)应用到 $P\left(\bigcup_{j<i} E_i E_j\right)$，可得到

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{j<i} E_i E_j\right) &\geqslant \sum_{j<i} P(E_i E_j) - \sum_{k<j<i} P(E_i E_j E_i E_k) \\ &= \sum_{j<i} P(E_i E_j) - \sum_{k<j<i} P(E_i E_j E_k) \end{aligned}$$

由上式和式(4.5)，便可得到不等式(4.3)．其他的不等式都可以通过固定 i 并将不等式(4.3)应用到 $P\left(\bigcup_{j<i} E_i E_j\right)$ 得到．

2.5 等可能结果的样本空间

在很多试验中，一个很自然的假设是，样本空间中的所有结果发生的可能性都是一样

的. 即考虑一个试验，其样本空间 S 是有限集，不妨设为 $S=\{1, 2, \cdots, N\}$，那么就经常会自然地假设

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \cdots = P(\{N\})$$

结合公理 2 和公理 3，上式意味着(为什么?)

$$P(\{i\}) = \frac{1}{N} \qquad i = 1,2,\cdots,N$$

再利用公理 3 就可以得到，对任何事件 E，

$$P(E) = \frac{E \text{ 中的结果数}}{S \text{ 中的结果数}}$$

换言之，如果假定一次试验的所有结果都是等可能发生的，那么任何事件 E 发生的概率等于 E 中所含有的结果数占样本空间中的所有结果数的比例.
32

例 5a　如果掷两枚骰子，那么朝上那一面数字之和为 7 的概率是多少?

解　我们假设所有的 36 种可能结果都是等可能地发生的，这样，就有 6 种可能的结果满足数字之和等于 7，即(1，6)，(2，5)，(3，4)，(4，3)，(5，2)，(6，1). 因此，两枚骰子点数之和为 7 的概率应该是 6/36=1/6. ■

例 5b　一个碗里面一共有 6 个白球，5 个黑球，随机地从里面取出 3 个球，那么恰好取出 1 个白球 2 个黑球的概率是多少?

解　首先考虑取球是有顺序的，样本空间一共包含 $11\times10\times9=990$ 种结果. 现在考虑事件"取出 1 个白球，2 个黑球"所包含的可能结果：第一个球是白色的，后两个球是黑色的一共有 $6\times5\times4=120$ 种；第一个球是黑色的，第二个球是白色的，第三个球又是黑色的一共有 $5\times6\times4=120$ 种；前两个球是黑色的，第三个球是白色的一共有 $5\times4\times6=120$ 种. "随机取"意味着样本空间的结果都是等可能地发生的，因此所求概率为

$$\frac{120+120+120}{990} = \frac{4}{11}$$

这个问题也可以认为取球是没有顺序的，从这个角度看，样本空间一共存在 $\binom{11}{3}=165$ 种结果. 当然，这 165 种结果也是等可能的. 与事件"1 个白球，2 个黑球"相关的结果有 $\binom{6}{1}\binom{5}{2}$ 种，因此，取出 1 个白球和 2 个黑球的概率为

$$\frac{\binom{6}{1}\binom{5}{2}}{\binom{11}{3}} = \frac{4}{11}$$

这个结果同前面的答案是一致的. ■

当一个试验是从 n 个物品的集合中随机选取 k 个物品时，我们可以灵活地认为选取物品是有顺序的也可以认为是没有顺序的. 在前一种情况下，我们假设在剩下的物品中进行新的一次选取是等可能的. 在后一种情况下，假设所有 $\binom{n}{k}$ 种 k 个物品组成集合的方法是

等可能的. 例如，随机从 10 对夫妻中选取 5 个人，求这 5 个人互相没有关系的概率$P(N)$.（即 5 人中任何两人都不是夫妻.）如果认为样本空间是 5 个被选取的人组成的集合，则共有$\binom{20}{5}$种等可能的结果. 其中任何两人都不是夫妻的结果可以认为是 6 步试验的结果：第一步是 10 对夫妻中的 5 对夫妻被选出；接下来的 5 步是这 5 对夫妻中的每一对都有一个人被 33
选出. 这样，就有$\binom{10}{5}\times 2^5$ 种可能的结果，可以得出要求的概率

$$P(N)=\frac{\binom{10}{5}\times 2^5}{\binom{20}{5}}.$$

相反，可以有顺序地选取 5 个个体. 在这种情况下，有 $20\times 19\times 18\times 17\times 16$ 种等可能的结果，其中选取 5 个互相没有关系的个体的结果有 $20\times 18\times 16\times 14\times 12$ 种，则要求的概率是

$$P(N)=\frac{20\times 18\times 16\times 14\times 12}{20\times 19\times 18\times 17\times 16}$$

上述两种方法得到的 $P(N)$是相同的，读者可以自行证明.

例 5c 需要从 6 个男人和 9 个女人中选取 5 人组成委员会，如果选取是随机的，那么委员会由 3 个男人和 2 个女人组成的概率有多大？

解 随机选取意味着所有$\binom{15}{5}$种组合的选择是等可能的，而与事件“3 男 2 女”相关的结果有$\binom{6}{3}\binom{9}{2}$种，因此所求事件的概率为

$$\frac{\binom{6}{3}\binom{9}{2}}{\binom{15}{5}}=\frac{240}{1001}$$

■

例 5d 一个坛子里共有 n 个球，其中一个做了标记. 如果依次从中随机取出 k 个球，那么做了标记的球被取出来的概率有多大？

解 从 n 个球中选取 k 个球，一共有$\binom{n}{k}$种选取方法，每一种选取方法都是等可能的. 与事件“做标记的球被取出”相关的选法共有$\binom{1}{1}\binom{n-1}{k-1}$种，因此

$$P(\{\text{做标记的球被取出}\})=\frac{\binom{1}{1}\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}=\frac{k}{n}$$

也可以这样求解：设 k 个球是顺序地被取出的，用 A_i 表示做标记的球在第 i 次被取出($i=1$，…，k). 既然所有的球在第 i 次被抽取的概率是一样的，那么 $P(A_i)=1/n$. 而这些事件是彼此互不相容的，因此，

$$P(\{\text{做标记的球被取出}\}) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) = \frac{k}{n}$$

另外，$P(A_i)=1/n$ 可以这样推导：考虑到抽球的过程是有顺序的，一共有 $n(n-1)\cdots(n-k+1)=n!/(n-k)!$ 种等可能试验结果，其中有 $(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)(1)(n-i)\cdots(n-k+1)=(n-1)!/(n-k)!$ 种试验结果表示做标记的球被第 i 次取出，因此

34

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$ ■

例 5e　假设有 $n+m$ 个球，其中 n 个红的，m 个蓝的，将它们随机排成一排，即所有 $(n+m)!$ 种排列都是等可能的．如果只记录连续排列的球的颜色，证明各种可能的结果的概率是一样的．

解　我们将 $(n+m)$ 个球的次序排列称为一组球的排列，将 $n+m$ 个球的颜色次序排列称为一组球的颜色次序排列．球的排列共有 $(n+m)!$ 种，在红球之间作任何一个位置置换，在蓝球之间作任何一个位置置换，置换的结果并不影响球的颜色次序排列．从而，一组球的颜色次序排列，对应于 $n!m!$ 个球的排列，这说明球的次序排列也是等可能的，并且每一种颜色次序出现的概率为 $n!m!/(n+m)!$．

例如，假设有 2 个红球，记为 r_1，r_2，两个蓝球，记为 b_1，b_2，这样，一共有 $4!$ 种球的排列，对于每一种颜色次序排列，对应于 $2!2!$ 个球的排列．例如，下面 4 个球的排列对应于相同的颜色次序排列：

$$r_1,b_1,r_2,b_2 \qquad r_1,b_2,r_2,b_1 \qquad r_2,b_1,r_1,b_2 \qquad r_2,b_2,r_1,b_1$$

因此，每一个颜色次序排列出现的概率都是 $4/24=1/6$． ■

例 5f　一手牌有 5 张，如果这 5 张牌是连续的，但又不是同一花色，那么称为顺子．例如，“黑桃 5，黑桃 6，黑桃 7，黑桃 8，红桃 9”就是一个顺子．那么一手牌是顺子的概率是多大？

解　假设所有 $\binom{52}{5}$ 种组合都是等可能的．先看看由“A，2，3，4，5”这 5 张牌(花色不同)能组成多少个顺子．因为，“A”有 4 种可能的花色，同样其他 4 张牌也分别有 4 种可能的花色，所以，一共有 4^5 种可能，但是，其中有 4 种可能是 5 张牌是同花色(这种情况称为同花顺)，所以一共是 4^5-4 种顺子．类似地，“10，J，Q，K，A”这种顺子也有 4^5-4 种，因此一共有 $10\times(4^5-4)$ 种顺子，于是所求概率为

$$\frac{10(4^5-4)}{\binom{52}{5}} \approx 0.0039$$ ■

例 5g　一手牌有 5 张，如果其中 3 张点数一样，另两张点数也一样(当然，与前三张的点数不同)，就称为满堂红(full house)，试问一手牌恰好是满堂红的概率是多大？

35

解　同样，我们也假设所有 $\binom{52}{5}$ 种组合都是等可能的．注意，像“2 张 10，3 张 J”这样的满堂红一共有 $\binom{4}{2}\binom{4}{3}$ 种组合，又因为一对的点数有 13 种选择，在选定一对的点数后，

剩下 12 种可能的点数用于选择 3 张一组的牌，所以所求概率为

$$\frac{13\times 12\times\binom{4}{2}\binom{4}{3}}{\binom{52}{5}}\approx 0.0014$$ ■

例 5h　桥牌比赛中，52 张牌被分给 4 位选手，求下列事件的概率：

(a) 其中有一人拿到了 13 张黑桃；

(b) 每人都拿到了 1 张 A.

解　(a) 事件 E_i 表示第 i 个选手拿到 13 张黑桃，则

$$P(E_i)=\frac{1}{\binom{52}{13}}\qquad i=1,2,3,4$$

因为事件 $E_i(i=1,2,3,4)$是互不相容的，所以 4 人中有一人拿到 13 张黑桃的概率为

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{4}E_i\right)=\sum_{i=1}^{4}P(E_i)=4\Big/\binom{52}{13}\approx 6.3\times 10^{-12}$$

(b) 现来求每个选手恰好拿一张 A 的概率，先把 4 张 A 放一边，注意，把剩下 48 张牌分给 4 个人的可能分牌方法数为$\binom{48}{12,12,12,12}$. 因为将 4 张 A 分给 4 个选手的可能分牌方法数为 4!，所以每人得到 1 张 A 的所有可能分牌方法数为 $4!\times\binom{48}{12,12,12,12}$. 而总共有$\binom{52}{13,13,13,13}$种分牌方法，从而所求概率为

$$\frac{4!\times\binom{48}{12,12,12,12}}{\binom{52}{13,13,13,13}}\approx 0.1055$$ ■

有些事件的概率是出人意料的，下面两个例子就说明这种现象. 36

例 5i　如果房间里有 n 个人，那么没有两人的生日是同一天的概率是多大？当 n 多大时，才能保证此概率小于 1/2？

解　每个人的生日都有 365 种可能，所以 n 个人一共是 365^n 种可能(此处忽略有人生日是 2 月 29 日的可能性). 假定每种结果的可能性都是一样的，那么所求事件的概率为 $365\times 364\times 363\times\cdots\times(365-n+1)/365^n$. 令人惊奇的是，一旦 $n\geqslant 23$，这个概率就比 1/2 要小. 即房间里人数如果超过 23 的话，那么至少有两人为同一天生日的概率就大于 1/2. 很多人一开始对这个结果很吃惊，因为 23 相对于一年 365 天来说太小了. 然而，对每两个人来说，生日相同的概率为$\frac{365}{(365)^2}=\frac{1}{365}$，23 个人一共可以组成$\binom{23}{2}=253$ 对，这样来看，上述结果似乎就不再令人吃惊了.

当房间里有 50 个人时，至少有两人生日在同一天的概率约为 97%，如果有 100 个人，那么两人同一天生日的优势为 3 000 000 ∶ 1.（即至少有两人生日在同一天的概率比

$\frac{3\times10^6}{3\times10^6+1}$还要大.) ■

例 5j　52 张牌混合后扣在桌子上，现在逐张翻开，直到出现一张 A 为止. 接下来再翻一张牌，问出现黑桃 A 和出现梅花 2 的概率哪个大?

解　为了计算翻到第一张 A 之后出现黑桃 A 的概率，先要计算在所有的(52)! 种可能的发牌次序中，有多少种是第一次出现 A 后紧接着就出现黑桃 A. 注意，52 张牌的每个发牌次序都可以通过先将 51 张牌(去掉黑桃 A)任意排列，然后将黑桃 A 找个位置插进去. 然而，对于(51)! 种发牌次序中的每个次序来说，只有一个位置(即第一次出现 A 以后接下来的位置)是满足要求的位置. 例如，假设其他 51 张牌的顺序为

梅花 4，红桃 6，方块 J，黑桃 5，梅花 A，方块 7，…，红桃 K

那么只有一种插入方法满足条件，即

梅花 4，红桃 6，方块 J，黑桃 5，梅花 A，黑桃 A，方块 7，…，红桃 K

因此，第一张 A 出现后，紧接着是黑桃 A 的次序一共有(51)! 种，故所求概率为：

$$P(\{\text{第一张 A 后是黑桃 A}\})=\frac{(51)!}{(52)!}=\frac{1}{52}$$

事实上，用同样的推理方法，可以得知，第一张 A 后出现梅花 2(或任何其他牌)的概率也为 1/52. 即 52 张牌中的任意一张牌(包括任意花色的 A)出现在第一张 A 后面的概率都是 1/52.

这个结果会让很多人吃惊! 事实上，一般的反应都是认为第一个 A 出现后，接着出现
37 梅花 2 的概率要大于出现黑桃 A 的概率. 因为第一张 A 就有可能是黑桃 A 本身. 这就减少了黑桃 A 紧接着第一张 A 的出现可能性，但是他忽略了第一张 A 前面可以出现梅花 2 这一事实. 这又减少了梅花 2 紧跟在第一张 A 后的可能性. 然而，因为有 1/4 的机会黑桃 A 是第一张出现的 A(因为 4 张 A 出现在第一位是等可能的)，而且，仅仅有 1/5 的机会是梅花 2 出现在第一张 A 之前(因为梅花 2 和 4 张 A 中的任一张排在最前面的可能性是相同的)，这点又好像说明了梅花 2 紧跟在第一张 A 后的可能性要大一些. 然而，事实并非如此，更深入的分析可以说明两者的可能性是一样的. ■

例 5k　一个橄榄球队有 20 名进攻球员和 20 名防守球员，现在要给他们安排宿舍，每两个人一间宿舍. 如果随机分派，没有一个宿舍既有进攻队员也有防守队员(简称“进攻防守对”)的概率是多大? 正好有 $2i(i=1,2,\cdots,10)$对“进攻防守对”的概率是多大?

解　将 40 名队员分成有序的 20 对一共有

$$\binom{40}{2,2,\cdots,2}=\frac{(40)!}{(2!)^{20}}$$

种可能. (即一共有$(40)!/2^{20}$种方法将这些选手分成第一对、第二对，等等.)因此，一共有$(40)!/[2^{20}(20)!]$种方法分成不考虑顺序的 20 对. 而且，要想不出现“进攻防守对”，只有将进攻队员之间配对，防守队员之间配成对，一共有$[(20)!/(2^{10}(10)!)]^2$种方法. 因此，没有“进攻防守对”的概率(记为 P_0)如下：

$$P_0=\frac{\left(\frac{(20)!}{2^{10}(10)!}\right)^2}{\frac{(40)!}{2^{20}(20)!}}=\frac{[(20)!]^3}{[(10)!]^2(40)!}$$

现在计算 P_{2i}，即正好有 $2i$ 对“进攻防守对”的概率．首先，一共有 $\binom{20}{2i}^2$ 种方法选取 $2i$ 个进攻队员和 $2i$ 个防守队员以便组成“进攻防守对”，这 $4i$ 个人能够组成 $(2i)!$ 种可能的“进攻防守对”(因为第一个进攻队员可以和 $2i$ 个防守队员配对，第二个进攻队员可以和 $2i-1$ 个防守队员配对，以此类推)．剩下的 $20-2i$ 个进攻队员(防守队员)只能内部配对，于是推出一共有

$$\binom{20}{2i}^2(2i)!\left[\frac{(20-2i)!}{2^{10-i}(10-i)!}\right]^2$$

种可能的方式配成 $2i$ 对“进攻防守对”．因此

$$P_{2i}=\frac{\binom{20}{2i}^2(2i)!\left[\frac{(20-2i)!}{2^{10-i}(10-i)!}\right]^2}{\frac{(40)!}{2^{20}(20)!}}\qquad i=0,1,\cdots,10$$ 38

根据上述公式就可以算出 P_{2i}，$i=0$，1，…，10．另外，利用 Stirling 公式($n!\approx n^{n+1/2}e^{-n}\sqrt{2\pi}$)还可以算出其估值．例如

$$p_0\approx 1.3403\times 10^{-6}$$
$$p_{10}\approx 0.345\,861$$
$$p_{20}\approx 7.6068\times 10^{-6}$$ ■

下面三个例子阐释了容斥恒等式(命题 4.4)的应用．在例 5l 中引入概率来迅速解决计数问题．

例 5l 一个俱乐部里有 36 人会打网球，28 人会打软式网球，18 人会打羽毛球．22 人会打网球和软式网球，12 人会打网球和羽毛球，9 人会打软式网球和羽毛球，4 人三种球都会打．至少会打一种球的有多少人？

解 记 N 为俱乐部的总人数，假设从俱乐部中随机地抽取一人．如果假设 C 为俱乐部的任一子集，那么抽到一人刚好在 C 中的概率为

$$P(C)=\frac{C\text{ 中的人数}}{N}$$

设 T，S，B 分别表示会打网球、软式网球和羽毛球的人的集合，那么利用上述公式及命题 4.4 可知

$$\begin{aligned}P(T\cup S\cup B)&=P(T)+P(S)+P(B)-P(TS)-P(TB)-P(SB)+P(TSB)\\&=\frac{36+28+18-22-12-9+4}{N}=\frac{43}{N}\end{aligned}$$

因此，至少会打一种球的人数为 43 人． ■

下面这个例子不仅答案令人吃惊，而且也有理论意义．

例 5m **配对问题**　假设有 N 位男士参加舞会，所有人都将帽子扔到房间中央混在一起，然后每人再随机拿一顶帽子．所有人都没有拿到自己帽子的概率是多少？

解　先计算至少有一人拿到自己的帽子的概率．令 $E_i(i=1,2,\cdots,N)$ 表示事件"第 i 人拿到了自己的帽子"．这样，由命题 4.4，至少有一人拿到了自己的帽子的概率为：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right)=\sum_{i=1}^{N}P(E_i)-\sum_{i_1<i_2}P(E_{i_1}E_{i_2})+\cdots$$
$$+(-1)^{n+1}\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_n}P(E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_n})$$
39
$$+\cdots+(-1)^{N+1}P(E_1E_2\cdots E_N)$$

如果把试验结果看成是一个 N 维向量，其中第 i 个元素是第 i 个人拿到的帽子编号，那么一共有 $N!$ 种可能的结果．[如结果$(1,2,3,\cdots,N)$表示每人拿到的都是自己的帽子．]进一步，$E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_n}$ 表示 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 这 n 个人拿到的是自己的帽子，这种可能的方式会有$(N-n)(N-n-1)\cdots3\cdot2\cdot1=(N-n)!$ 种，因为剩下的 $N-n$ 个人，第一个人有 $N-n$ 种选择方法，第二人有 $N-n-1$ 种选择方法，以此类推．由假定知 N 个人的 $N!$ 种选择都是等可能的，因此

$$P(E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_n})=\frac{(N-n)!}{N!}$$

又因为 $\sum\limits_{i_1<i_2<\cdots<i_n}P(E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_n})$ 一共含有 $\binom{N}{n}$ 项，所以

$$\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_n}P(E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_n})=\frac{N!(N-n)!}{(N-n)!n!N!}=\frac{1}{n!}$$

将上式代入 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i\right)$ 的公式，得

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} E_i\right)=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{N+1}\frac{1}{N!}$$

因此，没有一人拿到自己帽子的概率为

$$1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{N}\frac{1}{N!}=\sum_{i=0}^{N}(-1)^i/i!$$

当 N 足够大时，上式右端的值约等于 $e^{-1}\approx0.3679$，这可以由令等式 $e^x=\sum\limits_{i=0}^{\infty}x^i/i!$ 中 $x=-1$ 得出．即当 N 很大时，没有一个人拿到自己帽子的概率接近 0.37．(有多少读者会错误地认为随着 $N\to\infty$ 时，此概率值会趋近 1？)　■

下面的例子展示了命题 4.4 的又一个应用．

例 5n　10 对夫妇坐成一圈，计算所有的妻子都不坐在她丈夫旁边的概率．

解　令 $E_i(i=1,2,\cdots,10)$ 表示第 i 对夫妇坐在一起，因此，所求概率为 $1-P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{10}E_i\right)$．由命题 4.4，

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{10} E_i\right)=\sum_{i=1}^{10} P(E_i)-\cdots+(-1)^{n+1}\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_n} P(E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_n})+\cdots-P(E_1E_2\cdots E_{10})$$

为了计算 $P(E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_n})$，先注意到 20 个人坐成一圈，一共有 19！种可能的方式.(为什么?)对于指定的 n 对夫妇，在排位时，使这 n 对夫妇坐在一起的方法数是：先把每一对夫妇看成一个整体，这样，排位时，一共有 $20-n$ 个对象，在圆桌上一共有 $(20-n-1)!$ 种排位的方法. 当排位确定以后，这 n 对夫妇之间又有排位问题，是男左女右还是男右女左，于是一共有 $2^n(19-n)!$ 种排位方法. 因此我们得到 40

$$P(E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_n})=\frac{2^n(19-n)!}{(19)!}$$

再由命题 4.4，可以得到至少有一对夫妇是坐在一起的概率为

$$\binom{10}{1}2^1\frac{(18)!}{(19)!}-\binom{10}{2}2^2\frac{(17)!}{(19)!}+\binom{10}{3}2^3\frac{(16)!}{(19)!}-\cdots-\binom{10}{10}2^{10}\frac{9!}{(19)!}\approx 0.6605$$

这样，所有的妻子都不坐在她丈夫旁边的概率大约为 0.3395. ■

* **例 5o 游程** 假设某个赛季过后，田径队的成绩为 n 次赢 m 次输. 通过研究这个赢和输的序列，希望得到更多关于田径队的潜力的信息. 一种办法是研究赢和输的游程的规律. 所谓赢的一个游程就是指赢的连续序列. 例如，如果 $n=10$，$m=6$，这个序列为 WWLLWWWLWLLLWWWW，其中 W 为赢，L 为输，那么这里有 4 个赢的游程，第一个游程的大小为 2，第二个游程的大小为 3，第三个游程的大小为 1，第四个游程的大小为 4.

现在假定这个球队有 n 次赢，m 次输. 假定所有的 $(n+m)!/(n!m!)=\binom{n+m}{n}$ 种次序是等可能的，我们希望求出球队输赢的序列具有 r 个游程的概率. 为此，考虑满足条件 $x_1+\cdots+x_r=n$ 的正整数解 x_1，…，x_r 所组成的向量. 现在我们观察，有多少个输赢序列满足如下条件：(i)具有 r 个游程，(ii)第一个游程的大小为 x_1，…，第 r 个游程的大小为 x_r. 为此，我们令 y_1 为第一个赢的游程以前输的次数，y_2 为第一个赢的游程与第二个赢的游程之间输的次数，…，y_{r+1} 为最后一个赢的游程后面输的次数，那么这些 y_i 满足

$$y_1+y_2+\cdots+y_{r+1}=m \qquad y_1\geqslant 0, y_{r+1}\geqslant 0, y_i>0, i=2,\cdots,r$$

这些 x_i，y_i 与相应的序列可以形象地表示为

$$\underbrace{\text{LL}\cdots\text{L}}_{y_1}\ \underbrace{\text{WW}\cdots\text{W}}_{x_1}\ \underbrace{\text{L}\cdots\text{L}}_{y_2}\ \underbrace{\text{WW}\cdots\text{W}}_{x_2}\cdots\ \underbrace{\text{WW}\cdots\text{W}}_{x_r}\ \underbrace{\text{L}\cdots\text{L}}_{y_{r+1}}$$

因此，对于固定的 x_1，…，x_r，相应的输序列的个数为向量 $(y_1, \cdots, y_{r+1})$ 的个数，其中 y_1，…，y_{r+1} 满足前面所提到的约束条件. 为了进一步计算输序列的个数，令

$$\overline{y}_1=y_1+1,\qquad \overline{y}_i=y_i, i=2,\cdots,r,\qquad \overline{y}_{r+1}=y_{r+1}+1$$

输序列的个数变成满足下列条件

$$\overline{y}_1+\overline{y}_2+\cdots+\overline{y}_{r+1}=m+2$$ 41

的正整数向量 $(\overline{y}_1, \cdots, \overline{y}_{r+1})$ 的个数. 根据第 1 章的命题 6.1，这个方程的正整数解的个数为 $\binom{m+1}{r}$. 这样，具有 r 个游程的输赢序列的个数为 $\binom{m+1}{r}$ 乘以 $x_1+\cdots+x_r=n$ 的正整

数解的个数. 再次利用第1章的命题6.1，可知具有r个赢的游程的输赢序列的个数为$\binom{m+1}{r}\binom{n-1}{r-1}$. 由于我们假定$\binom{n+m}{n}$个输赢序列是等可能的，故

$$P(\{\text{赢的游程的个数为 } r\}) = \binom{m+1}{r}\binom{n-1}{r-1}\Big/\binom{m+n}{n} \qquad r \geqslant 1$$

例如，$n=8$，$m=6$，则具有7个赢的游程的概率为$\binom{7}{7}\binom{7}{6}\Big/\binom{14}{8}=1/429$，此处假设所有的$\binom{14}{8}$个输赢序列是等可能的. 现在假定这个队的输赢结果是WLWLWLWLWWLWLW，那么我们可能会认为输赢的概率会随着时间变化.（特别地，输球以后赢球的概率较大，而赢球以后输球的概率较大.）另一方面，若输赢的结果是WWWWWWWLLLLLLL，那么$P(\{\text{赢的游程的个数为 }1\})=\binom{7}{1}\binom{7}{0}\Big/\binom{14}{8}=1/429$. 在这种情况下，我们就要怀疑球队的状况在下滑. ■

*2.6　概率：连续集函数

事件序列$\{E_n, n\geqslant 1\}$如果满足

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \cdots$$

则称为递增序列，反之，如果满足

$$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \cdots$$

则称为递减序列. 如果$\{E_n, n\geqslant 1\}$是递增事件序列，那么定义一个新的事件，记为$\lim\limits_{n\to\infty} E_n$，如下：

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

类似地，如果$\{E_n, n\geqslant 1\}$是递减事件序列，那么定义$\lim\limits_{n\to\infty} E_n$，如下：

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$$

42 现在来证明命题6.1.

命题6.1　如果$\{E_n, n\geqslant 1\}$是递增或者递减事件序列，那么

$$\lim_{n\to\infty} P(E_n) = P(\lim_{n\to\infty} E_n)$$

证明　首先假设$\{E_n, n\geqslant 1\}$是递增事件序列，并且定义事件$F_n(n\geqslant 1)$如下：

$$F_1 = E_1$$

$$F_n = E_n\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right)^{c} = E_n E_{n-1}^{c} \qquad n > 1$$

此处用到了$\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} E_i = E_{n-1}$，也就是说$F_n$是由那些属于$E_n$但是不属于$E_i(i<n)$的元素组成. 显然，$F_n$是一列互不相容的事件且满足

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \qquad \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \qquad \text{对任意的 } n \geqslant 1$$

因此

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) &= P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(F_i) \qquad \text{利用公理 3} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} P(F_i) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\Big) = \lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(E_n) \end{aligned}$$

这样就证明了当$\{E_n, n\geqslant 1\}$是递增事件序列时结论成立.

如果$\{E_n, n\geqslant 1\}$是递减序列，那么$\{E_n^c, n\geqslant 1\}$是递增序列，因此，根据前面的结论可得

$$p\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c\Big) = \lim_{n\to\infty} P(E_n^c)$$

由$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c = \Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\Big)^c$，可知

$$P\Big(\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\Big)^c\Big) = \lim_{n\to\infty} P(E_n^c)$$ 43

或等价地，

$$1 - P\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \lim_{n\to\infty}[1 - P(E_n)] = 1 - \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

即

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

这样就证明了结论. □

例 6a **概率与悖论** 假设有个无限大的坛子以及无限个编了号码 1，2，3，…的球，考虑以下的试验：

在差 1 分到 12 P. M. 的时候，将 1 到 10 号球放进坛子，并把 10 号球拿出来(假设放球和拿球的时间忽略不计)；

在差 1/2 分到 12 P. M. 的时候，将 11 到 20 号球放进坛子，并把 20 号球拿出来；

在差 1/4 分到 12 P. M. 的时候，将 21 号到 30 号球放进坛子，并把 30 号球拿出来；

在差 1/8 分到 12 P. M. 的时候，……

等等.

问题：在 12 P. M. 的时候，坛子里有多少球？

答案很明显：在 12 P. M. 的时候坛子里有无限个球. 因为只要不是号码为 $10n(n\geqslant 1)$ 的球，都将在 12 P. M. 前放进坛子，并且不会被取出来. 因此，如果试验是这样进行的话，问题已得到了解决.

现在换个试验：

在差 1 分到 12 P. M. 的时候，将 1 到 10 号球放进坛子，并把 1 号球拿出来；

在差 1/2 分到 12 P. M. 的时候，将 11 到 20 号球放进坛子，并把 2 号球拿出来；

在差 1/4 分到 12 P. M. 的时候，将 21 号到 30 号球放进坛子，并把 3 号球拿出来；

在差 1/8 分到 12 P. M. 的时候，……

等等.

问题：对于新的试验，在 12 P. M. 的时候坛子里应该有多少球？

令人惊讶的是，答案为：在 12 P. M. 的时候，坛子里一个球也没有. 理由是，任何号码的球在 12 点前都将从坛子里取出，如号码为 n 的球，在差$(1/2)^{n-1}$分到 12 P. M. 的时候被取出. 因此，任意号码的球在 12 P. M. 的时候都不可能在坛子里，这样，坛子就是空的.

因为对于所有的 n，上述两个不同的实验在 n 次变换后坛子里剩下的球的个数是相同的，所以大多数人会对于两种情景过程在极限情况下不同的结果感到惊讶. 我们必须认识到上述结果不同并不是一个悖论也不违背数学原理，而是因为情景的逻辑性以及一个人最初的直觉在极限状况下并不总是正确的.（后面的说明并不令人感到惊讶. 因为在 19 世纪下半叶当极限的理论首次被数学家 Georg Cantor 提出时，当时的其他著名数学家认为他的想法是荒谬的，并且嘲讽他，因为他认为所有整数组成的集合和所有偶数组成的集合具有同样多的元素.）

44 从上述讨论可以看出，取球的方式不一样会导致结果不一样：在前一种情况下，只有号码为 $10n(n\geqslant 1)$的球会被取出来，但在后一种情况下，所有的球都将被取出来. 现在设想在取球的时候，是从当前所有球中随机取出，即：

在差 1 分到 12 P. M. 的时候，将 1 到 10 号球放进坛子，并随机取一个球出来；

等等.

这种情况下，在 12 P. M. 时，坛子里有多少个球？

解　我们将要证明，在 12 P. M. 时坛子为空的概率为 1.

首先考虑 1 号球，令 E_n 表示在“进行 n 次取球后，1 号球仍在坛子里”这一事件. 很显然，

$$P(E_n)=\frac{9\times 18\times 27\times\cdots\times(9n)}{10\times 19\times 28\times\cdots\times(9n+1)}$$

注意到在经历 n 次取球后，如果 1 号球仍在坛子里，那么第一次取球有 9 种可能，第 2 次取球有 18 种可能(第二次取球的时候坛子里有 19 个球，其中有一个是 1 号球)，等等. 这样，在 12 P. M. 时，1 号球仍在坛子里这一事件可以写为$\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$，因为$\{E_n, n\geqslant 1\}$是递减事件序列，所以由命题 6.1 可知

$$P(\{12\text{ 点时 1 号球仍在坛子里}\})=P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\lim_{n\to\infty}P(E_n)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9n}{9n+1}\right)$$

现在证明

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9n}{9n+1}\right)=0$$

因为

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9n}{9n+1}\right)=\left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9n+1}{9n}\right)\right]^{-1}$$

所以上式等价于证明：

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{9n}\right)=\infty$$ 45

对所有的 $m\geqslant1$，都有

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{9n}\right)&\geqslant\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{1}{9n}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{9}\right)\times\left(1+\frac{1}{18}\right)\times\left(1+\frac{1}{27}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{9m}\right)\\&>\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{9m}=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i}\end{aligned}$$

因此，令 $m\to\infty$ 且利用 $\sum_{i=1}^{\infty}1/i=\infty$ 可以得到

$$\prod_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{9n}\right)=\infty$$

因此，令 F_i 表示“i 号球在 12 P.M. 的时候仍在坛子里”这一事件. 前面已证明 $P(F_1)=0$，类似地，可以证明对任意 i，$P(F_i)=0$.

（例如，同样的推理可以证明对任意 $i=11$，12，…，20 有 $P(F_i)=\prod_{n=2}^{\infty}[9n/(9n+1)]=0$.）

因此，在 12 P.M. 的时候坛子非空的概率为 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\right)$，利用布尔不等式(见自检习题 14)可得

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}P(F_i)=0$$

因此，在 12 P.M. 的时候，坛子为空的概率为 1. ■

2.7 概率：确信程度的度量

我们在前面解释过，一个事件的概率，是指在重复进行某个试验的情况下，对该事件发生频率的一种度量. 然而，在其他情况下也使用术语概率. 例如，我们经常听到这样的评论：“有 90%的可能性是莎士比亚真的写了《哈姆雷特》”，“奥斯瓦德独自暗杀肯尼迪总统的可能性为 80%”，这又作何解释？

最自然又简单的解释是，概率是人们对自己的说法的确信程度的一种度量. 换句话说，前面的陈述者比较确信“奥斯瓦德是独立行动的”，而且更加确信“莎士比亚写了《哈姆雷特》”. 概率作为个体确信程度的度量经常被称为主观(subjective)概率.

假设“确信程度的度量”满足概率的所有公理是合情合理的. 例如，如果我们有 70%的把握认为《凯撒大帝》的作者是莎士比亚，而只有 10%的把握认为作者是马洛，那么我们应该有 80%的把握认为作者是莎士比亚或是马洛. 因此，无论把概率解释为确信程度的度量，还是事件发生的频率，其数学属性都没变. 46

例 7a 假设有 7 匹马参加比赛，你认为 1 号马和 2 号马各有 20%的机会获胜，3 号马和 4 号马各有 15%的机会获胜，其余 3 匹各有 10%的机会获胜. 如果进行同等赌注的押

赌，是赌“获胜者将是 1，2，3 号马之一”还是赌“获胜者将是 1，5，6，7 号马之一”更好？

解　基于对比赛结果的主观认识，赌第一种赢的概率是：0.2＋0.2＋0.15＝0.55，而赌第二种赢的概率是 0.2＋0.1＋0.1＋0.1＝0.5，因此，赌第一种更好．■

注意，主观概率也应符合概率论的公理．但实际情况并非如此．例如，我们向某人了解天气时，经常提这样的问题：

(a) 今天下雨的可能性是多少？

(b) 明天下雨的可能性是多少？

(c) 今明两天都下雨的可能性是多少？

(d) 今天或明天会下雨的可能性是多少？

这个人经过考虑，很可能会给出下面的答案：30％，40％，20％，60％．不幸的是，这样的回答(或主观概率)与概率论的公理是相矛盾的．(为什么?)我们当然希望经过指出这种错误以后，这个人会修正他的回答．(我们可以接受的一种可能修正是：30％，40％，10％，60％.)

小结

如果令 S 表示某个试验的所有可能结果的集合，那么 S 称为该试验的样本空间．一个事件就是 S 的一个子集．如果 $A_i(i=1,\cdots,n)$为一列事件，那么称 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 为这些事件的并，它表示至少包含在某一个 A_i 里的所有结果所构成的事件．类似地，$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 称为这些事件的交，有时也记为 $A_1\cdots A_n$，表示包含在所有 A_i 中的所有结果所构成的事件．

对任一事件 A，定义 A^c 由那些不包含在 A 里的所有结果所构成的事件，称 A^c 为事件 A 的补．事件 S^c 不包含任何结果，记为$\varnothing$，称为空集．如果 $AB=\varnothing$，那么称 A 和 B 为互

47 不相容的．

设对于样本空间 S 中的任一事件 A，对应于一个数 $P(A)$，若 $P(A)$满足以下条件，则称 $P(A)$为 A 的概率：

(i) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$

(ii) $P(S)=1$

(iii) 对于任意互不相容的事件 $A_i(i\geqslant 1)$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$P(A)$表示试验结果包含在 A 中的概率．

容易证明

$$P(A^c)=1-P(A)$$

一个有用的结果是

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

上式可以推广为

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}\sum P(A_iA_j) + \sum\sum_{i<j<k}\sum P(A_iA_jA_k)$$
$$+ \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cdots A_n)$$

这个结果就是著名的容斥恒等式.

如果 S 是有限集，且其中每个结果发生的概率都相等，那么

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|}$$

其中 $|E|$ 表示事件 E 所含的结果数.

$P(A)$可以理解为长期相对频率或者确信程度的度量.

习题

2.1 一个盒子里有 3 个弹珠，红、绿和蓝各一个．先从中取出一个，再放回，然后再取出一个，试描述此样本空间．如果不放回呢？

2.2 连续掷一枚骰子，直到 6 出现，试验停止，试描述此样本空间．令 E_n 表示“在试验停止时，一共掷了 n 次”，那么样本空间的哪些结果包含在 E_n 中？$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n\right)^c$ 的含义？

2.3 掷两枚骰子，令 E 表示事件“骰子的点数之和为奇数”，令 F 表示“至少有一枚骰子的点数为 1”；令 G 表示“骰子的点数之和为 5”．试描述事件 EF，$E \cup F$，FG，EF^c 和 EFG.

2.4 A，B，C 三人轮流掷硬币，第一次出现正面朝上者为胜．我们用 0 表示“正面朝下”，1 表示“正面朝上”，试验的样本空间可表示为

$$S = \begin{cases} 1, 01, 001, 0001, \cdots \\ 0000\cdots \end{cases}$$

(a) 试解释此样本空间；

(b) 用样本空间 S 表示以下事件：

(i) A 胜了(记为 A)；

(ii) B 胜了(记为 B)；

(iii) $(A \cup B)^c$.

在该试验中，假定 A 先掷，B 后掷，然后 C 掷，接着又是 A 掷，循环往复.

2.5 一个系统包含 5 个元件，每个元件或者是好的或者是坏的．如果试验是观察各个元件的状态，用向量$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$表示试验结果，其中 $x_i=1$ 表示第 i 个元件是好的，$x_i=0$ 表示第 i 个元件是坏的.

(a) 样本空间中一共有多少种结果？

(b) 如果元件 1 和 2 是好的，或者元件 3 和 4 是好的，或者元件 1，3 和 5 都是好的，那么系统工作正常．令 W 表示系统工作正常，写出 W 包含的所有结果.

(c) 令 A 表示元件 4 和 5 都是坏的，那么 A 中一共有多少种结果？

(d) 写出事件 AW 的所有结果.

2.6 医院管理系统对前来治疗的受枪伤病人进行编号，其依据为是否买了保险(如果买了保险，则记为 1，否则记为 0)以及他们的身体状况(如果良好，就记为 g，如果一般，就记为 f，如果严重，就记为 s)．试验是观察病人的编号.

(a) 给出试验的样本空间；(b) 令 A 表示“病人病情很严重”，列出 A 中的所有结果；

(c) 令 B 表示“病人没有买保险”，列出 B 中的所有结果；(d) 列出事件 $B^c \cup A$ 中的所有结果.

2.7 试验是调查一个业余足球队里15名球员的工作(是蓝领还是白领)和政治面貌(是共和党、民主党还是无党派).

(a) 样本空间中一共多少结果？(b)“至少有一个队员是蓝领”的事件中有多少结果？

(c)“队员里没有人是无党派人士”的事件中有多少结果？

2.8 设事件 A 和 B 是互不相容的，且 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.5$，求以下事件的概率：

(a) A 或者 B 发生；(b) A 发生但 B 不发生；(c) A 和 B 都发生.

2.9 某零售店既接受运通卡也接受维萨卡. 它的顾客中有24%的人持有运通卡，有61%的人持有维萨卡，11%的人持有两种卡，问至少持有一张卡的顾客百分比是多少？

48 **2.10** 某个学校有60%的学生既不戴耳环又不戴项链，有20%的学生戴耳环，有30%的学生戴项链. 如果随机挑一个学生，求符合以下条件的概率：

(a) 戴耳环或者项链；(b) 既戴耳环也戴项链.

2.11 美国男性中有28%的人抽烟，7%的人抽雪茄，5%的人既抽烟也抽雪茄.

(a) 既不抽烟也不抽雪茄的男性百分比是多少？(b) 只抽雪茄但不抽烟的男性百分比是多少？

2.12 某所小学有三个语言班：一个是西班牙语班，一个是法语班，还有一个是德语班. 这些语言班对学校里的100个学生开放. 有28人参加西班牙语班，有26人参加法语班，有16人参加德语班. 有12人既参加西班牙语班也参加法语班，有4人既参加西班牙语班也参加德语班，有6人既参加法语班也参加德语班. 另外，有2人三个班都参加.

(a) 随机选一名学生，他不参加任何班的概率是多大？

(b) 随机选一名学生，他恰好参加一个班的概率是多大？

(c) 随机选两名学生，其中至少有一人参加语言班的概率是多大？

2.13 某个人口规模为100 000的城市有三份报纸Ⅰ、Ⅱ和Ⅲ，以下是对读报人群比例的调查结果：

Ⅰ：10%；Ⅰ和Ⅱ：8%；Ⅰ、Ⅱ和Ⅲ：1%；Ⅱ：30%；Ⅰ和Ⅲ：2%；Ⅲ：5%；Ⅱ和Ⅲ：4%.

(这个结果告诉我们，例如，有8000人读报纸Ⅰ和Ⅱ.)

(a) 求仅仅读一份报纸的人数；(b) 有多少人至少读两份报纸？

(c) 如果Ⅰ和Ⅲ是早报，而Ⅱ是晚报，那么至少读一份早报和一份晚报的人数为多少？

(d) 有多少人不读报纸？(e) 有多少人仅读一份早报和一份晚报？

2.14 对某份杂志的1000名订阅者的调查给出了如下数据：关于工作、婚姻和教育状况，有312名专业人员，470名已婚人士，525名大学毕业生，42名大学毕业的专业人员，147名已婚大学毕业生，86名已婚专业人员，25名已婚且大学毕业的专业人员. 证明这些数据是不正确的.

提示：令 M，W 和 G 分别表示专业人员、已婚人士及大学毕业生的集合. 假定随机地从这1000人当中选择一人，利用命题4.4来证明：如果上述数据是正确的，那么 $P(M \cup W \cup G)>1$.

2.15 从52张牌里随机取5张，求以下事件概率：

(a) 同花(即5张牌同一花色)；

(b) 一对(5张牌为 a，a，b，c，d 形式，其中 a，b，c，d 各不相同)；

(c) 两对(5张牌为 a，a，b，b，c 形式，其中 a，b，c 各不相同)；

(d) 三张一样(5张牌为 a，a，a，b，c 形式，其中 a，b，c 各不相同)；

(e) 四张一样(5张牌为 a，a，a，a，b 形式，其中 a，b 不相同).

2.16 同时掷5枚骰子，证明：

(a) $P\{$每枚的点数都不一样$\}=0.0926$；(b) $P\{$一对的点数$\}=0.4630$；

(c) P\{两对的点数\}=0.2315；(d)P\{3 枚的点数一样\}=0.1543；

(e) P\{满堂红\}=0.0386；(f)P\{4 枚的点数一样\}=0.0193；

(g) P\{5 枚的点数一样\}=0.0008.

2.17 如果 8 个车随机地放在国际象棋棋盘上，求没有一对能互捉的概率，即求任何一行或一列至多只有一个车的概率.

2.18 从一副洗好的扑克牌里随机挑两张，恰好配成黑杰克(blackjack)的概率是多大?(所谓黑杰克，就是其中有一张 A，另一张是 10，J，Q，K 中任一张.)

2.19 两枚同样的骰子，各有两面涂成了红色，两面涂成了蓝色，一面涂成了黄色，剩下一面涂成了白色. 同时掷这两枚骰子，问出现同一种颜色的概率是多大?

2.20 假设你正在和庄家玩黑杰克，对于一副洗好的扑克牌，你和庄家都分不到黑杰克的概率是多大?

2.21 一个小型社区由 20 个家庭组成，其中只有一个小孩的家庭有 4 个，有 2 个小孩的家庭有 8 个，有 3 个小孩的家庭有 5 个，有 4 个小孩的家庭有 2 个，有 5 个小孩的家庭有 1 个. 49

(a) 如果随机选取一个家庭，它有 i 个孩子的概率是多大? $i=1, 2, 3, 4, 5$.

(b) 如果随机选取一个孩子，孩子来自有 i 个孩子的家庭的概率是多大? $i=1, 2, 3, 4, 5$.

2.22 对于 n 张扑克牌，有一种洗牌技术：对于任何一副没洗的牌，考虑第一张，掷一枚硬币，如果硬币出现的是正面，那么这张牌仍留原位，如果硬币是反面，那么将这张牌放到所有牌的最后，接着考虑第二张牌的位置变换，其规则与第一张牌相同. 硬币掷了 n 次后，就完成了一轮洗牌. 比如，设 $n=4$，牌最初的顺序为 1，2，3，4，如果硬币的顺序为正面、反面、反面、正面，那么最后牌的顺序为 1，4，2，3. 假设所掷硬币是均匀的，且 n 次投掷结果相互独立，那么经过一轮洗牌后仍保持原来次序的概率有多大?

2.23 同时掷两枚均匀骰子，问第二枚骰子的点数大于第一枚骰子的点数的概率是多大?

2.24 同时掷两枚骰子，骰子点数之和为 i 的概率是多大? 并求出 $i=2, 3, \cdots, 11, 12$ 时的值.

2.25 同时掷两枚骰子，直到骰子点数之和为 5 或 7 出现，求和为 5 先出现的概率.

提示：令 E_n 表示第 n 次掷骰子出现和为 5，但此前 $n-1$ 次当中既不出现和为 5，也不出现和为 7，计算 $P(E_n)$ 且证明 $\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$ 就是题目所求概率.

2.26 Craps 赌博规则如下：其中一人先掷两枚骰子，如果和为 2，3 或 12，那么他便输了；如果和为 7 或 11，那么他便赢了. 如果和为其他，则由他继续掷骰子，一直到第一次掷出的和数再次出现，或者出现和为 7. 若出现的是 7，则他输了，若出现的是第一次掷出的和数，则他赢了. 求他赢的概率.

提示：令 E_i 表示第一次掷骰子所得点数和为 i，且他赢了. 那么所求概率为 $\sum_{i=2}^{12} P(E_i)$. 为了计算 $P(E_i)$，定义 $E_{i,n}$ 表示事件“第一次和为 i 且他赢了”. 证明 $P(E_i) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_{i,n})$.

2.27 坛子里有 3 个红球和 7 个黑球，玩家 A 和 B 从坛子里交替拿球，直到有人拿到红球，求 A 取到了红球的概率. (假设 A 先取球，然后 B 再取，接下来又是 A 取，等等，并假设球取出来后不放回.)

2.28 一个坛子里有 5 个红球、6 个蓝球和 8 个绿球. 如果随机取 3 个球，求以下事件概率：

(a) 三个球是同一种颜色；(b) 三个球是不同的颜色.

假设取球后，记下其颜色，然后再放回坛内[这就是所谓的有放回抽样(sampling with replacement)]，重新计算以上事件的概率.

2.29 坛子里有 n 个白球和 m 个黑球，其中 n 和 m 都是正数.

(a) 随机取两个球，它们为同一种颜色的概率是多少？

(b) 如果从坛子里随机取一个球，然后放回再第二次取球，那么取出的两个球为同一种颜色的概率是多少？

(c) 证明(b)的概率始终大于(a)的概率.

2.30 两所学校的棋类俱乐部分别有 8 名和 9 名棋手，每个俱乐部各随机选 4 名参加两校间的对抗赛. 选出来的棋手随机地和另一俱乐部选出来的棋手进行两两配对下棋，假设丽贝卡和妹妹伊莉斯分别在这两所学校的棋类俱乐部，求以下事件的概率：

(a) 丽贝卡和伊莉斯正好配成一对；

(b) 丽贝卡和伊莉斯都被选出，但是她们没有配成一对；

(c) 她们俩人只有一个被选出代表学校参赛.

2.31 一个 3 人篮球队包括 1 个后卫、1 个前锋和 1 个中锋.

(a) 如果从 3 个这样的篮球队里分别选一人，正好可以组成一个新篮球队的概率是多少？

(b) 选出来的 3 人是打同一位置的概率是多大？

2.32 一个小组有 b 个男孩，g 个女孩，按随机顺序站成一排，即 $(b+g)!$ 种排列中任一种都是等可能的. 第 $i(1\leqslant i\leqslant b+g)$ 个位置站的正好是女孩的概率是多少？

2.33 树林里有 20 只麋鹿，捉住其中 5 只，贴上标签，然后再放回. 一段时间后，再捉住 4 只麋鹿. 其中有两只贴了标签的概率是多大？此处做了什么样的假设？

2.34 据报道，Yarborough 二世曾经用 1000 比 1 的赌注打赌一个桥牌手里的 13 张牌里至少有一张牌是 10 或者更大(所谓更大意味着是 10，或者 J，Q，K 和 A). 如今，一手牌里如果没有一张 9 以上的

50 牌，就称为 Yarborough. 问随机发的一手牌是 Yarborough 的概率是多大？

2.35 一个坛子里面有 12 个红球、16 个蓝球和 18 个绿球，从坛子中随机取出 7 个球，求以下事件的概率：

(a) 取出 3 个红球、2 个蓝球和 2 个绿球；(b) 取出至少 2 个红球；(c) 所有被取出的球颜色相同；(d) 取出 3 个红球或者 3 个蓝球.

2.36 从 52 张牌里随机取 2 张，求以下事件概率：

(a) 都是 A；(b) 点数相同.

2.37 老师给学生留了 10 道习题，并且告诉他们期末考试就是从中随机选择 5 道题，如果有位学生解出了其中 7 道题，求以下事件概率：

(a) 他能解出所有的 5 道考试题；(b) 至少能解出其中 4 道题.

2.38 抽屉里有 n 只袜子，其中 3 只是红的. 如果随机取两只袜子，同为红色的概率为 1/2，那么 n 的值是多少？

2.39 城镇里有 5 个旅馆，如果某天有 3 人入住旅馆，那么正好住进不同旅馆的概率是多大？其中做了什么样的假设？

2.40 城镇里有 4 人修理电视机，现在有 4 台坏电视机，正好有 $i(i=1,2,3,4)$ 人被要求参与修理的概率是多少？其中做了什么样的假设？

2.41 掷一枚骰子 4 次，至少出现一次 6 的概率是多大？

2.42 连续掷两枚骰子 n 次，计算双 6 至少出现一次的概率. 要想此概率大于或等于 1/2，n 至少要多大？

2.43 (a) 如果包含 A 和 B 在内的 N 个人随机的排成一排，那么 A 和 B 紧挨着的概率是多少？

(b) 如果是随机的排成一圈，那么这个概率是多大？

2.44 有 A，B，C，D，E 五人，站成一排，假设每种顺序都是等可能的，求以下事件概率：

(a) A 和 B 之间恰好有一个人；(b) A 和 B 之间恰好有两个人；(c) A 和 B 之间恰好有三个人.

2.45 一位女士有 n 把钥匙，其中有一把能打开房门.

(a) 她随机地用钥匙开房门，如果打不开，就换一把钥匙(钥匙不重复试用)，那么正好在第 k 次成功打开房门的概率是多大？

(b) 如果钥匙可重复试用，这时(a)中问题的概率是多大？

2.46 房间内需要多少人，才能保证其中至少有两人同一月份过生日的概率大于 1/2？假设每个月的可能性是一样的.

2.47 房间里有 12 个人，求没有两人在同一月份出生的概率.

2.48 有 20 个人，求如下事件的概率：12 个月当中，其中 4 个月每月均有 2 人过生日，而另有 4 个月每月均有 3 人过生日.

2.49 如果把 6 位男士和 6 位女士随机地分成 2 组，每组 6 人，那么两组的男士人数正好一样的概率是多少？

2.50 在桥牌比赛中，计算你有 5 张黑桃，而搭档正好有 8 张黑桃的概率.

2.51 把 n 个球随机地放到 N 个房间，设 N^n 种结果每种都是等可能的，试求第一个房间恰有 m 个球的概率.

2.52 衣柜里有 10 双鞋，随机拿 8 只，求以下事件概率：

(a) 一双鞋都没有；(b) 正好有一双鞋.

2.53 如果 4 对夫妇坐成一排，试求没有任何妻子坐在她丈夫身边的概率.

2.54 计算桥牌比赛中有一家至少缺一套花色的概率，注意此答案并不是 $\binom{4}{1}\binom{39}{13}\Big/\binom{52}{13}$.（为什么？）

提示：利用命题 4.4.

2.55 一手牌 13 张，求含有以下牌的概率：

(a) 有同一花色的 A 和 K；(b) 有同一个点数的四张.

2.56 有两人玩以下游戏：A 从图 2-6 所示的三个轮盘中选择一个，然后 B 在剩下的两个中选择一个. 接着两人分别转动各自选中的轮盘，轮盘最后所停的位置下方区域里的数字大者获胜. 假定每个轮盘停在三个区域都是等可能的. 如果是你，你会选择是 A 还是 B？并解释原因. 51

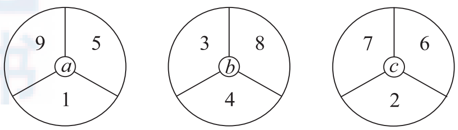


图 2-6　轮盘图

理论习题

2.1 证明：$EF \subset E \subset E \cup F$.

2.2 证明：如果 $E \subset F$，那么 $F^c \subset E^c$.

2.3 证明：$F = FE \cup FE^c$ 和 $E \cup F = E \cup E^c F$.

2.4 证明：$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) F = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i F$ 和 $\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) \cup F = \bigcap_{i=1}^{\infty} (E_i \cup F)$.

2.5 对任一事件序列 E_1，E_2，…，定义一个两两不相交的事件序列 F_1，F_2，…(即如果 $i \neq j$，则 $F_i F_j = \varnothing$)，使得对任何 $n \geqslant 1$ 有

$$\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

2.6 设 E，F，G 为三个事件，写出如下事件的表达式：

(a) 只有 E 发生；　(b) E 和 G 都发生，但 F 不发生；

(c) 至少有一个事件发生；　(d) 至少有两个事件发生；

(e) 三个事件都发生；　(f) 没有事件发生；

(g) 多一个事件发生；　(h) 最多两个事件发生；

(i) 正好两个事件发生；　(j) 最多三个事件发生.

2.7 采用维恩图

(a) 化简表达式$(E\cup F)(E\cup F^c)$；

(b) 对事件 E 和 F 证明德摩根律. [即证明$(E\cup F)^c=E^cF^c$ 和$(EF)^c=E^c\cup F^c$.]

52 **2.8** 令 S 是给定的集合，如果存在 S 的一列互斥的非空子集 S_1，S_2，…，$S_k(k>0)$，满足 $\bigcup_{i=1}^{k} S_i=S$，那么称$\{S_1$，S_2，…，$S_k\}$为 S 的一个分割(partition). 令 T_n 表示集合$\{1，2，…，n\}$的不同分割的总数，因此，$T_1=1$(表示只有一个分割 $S_1=\{1\}$)，$T_2=2$(表示有两个分割：$\{\{1，2\}\}$和$\{\{1\}，\{2\}\}$).

(a) 通过计算所有的分割，证明：$T_3=5$，$T_4=15$.

(b) 证明：

$$T_{n+1}=1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}T_k$$

并利用此公式计算 T_{10}.

提示：选择分割的一种方法是，从$(n+1)$个元素中选出一个，称为特殊元素. 对于 $k=0$，1，…，n，首先选定 k 个元素，得到 $n-k$ 个元素的子集和 k 个元素的 T_k 个分割. 分割中若含有特殊元素，这个子集称为特殊子集. 具有相同特殊子集的分割形成一子类，再将每一个子类所含分割数加起来，就得到 T_{n+1}.

2.9 假设某个试验重复 n 次，对样本空间中的任一事件 E，令 $n(E)$表示 n 次事件中 E 发生的次数，定义 $f(E)=n(E)/n$. 证明 $f(\cdot)$满足公理 1、公理 2 和公理 3.

2.10 证明：$P(E\cup F\cup G)=P(E)+P(F)+P(G)-P(E^cFG)-P(EF^cG)-P(EFG^c)-2P(EFG)$.

2.11 如果 $P(E)=0.9$，$P(F)=0.8$，证明 $P(EF)\geqslant 0.7$. 更一般地，证明 Bonferroni 不等式：

$$P(EF)\geqslant P(E)+P(F)-1$$

2.12 证明：E 和 F 恰好只有一个发生的概率为 $P(E)+P(F)-2P(EF)$.

2.13 证明：$P(EF^c)=P(E)-P(EF)$.

2.14 用数学归纳法证明本章的命题 4.4.

2.15 一个坛子里有 M 个白球和 N 个黑球，随机取 r 个，问恰好取到 k 个白球的概率是多少？

2.16 利用数学归纳法将 Bonferroni 不等式推广到 n 个事件的情形，即证明

$$P(E_1E_2\cdots E_n)\geqslant P(E_1)+\cdots+P(E_n)-(n-1)$$

2.17 考虑例 5m 中的配对问题. 令 A_N 表示 N 个人都不选自己帽子的方法数，证明

$$A_N=(N-1)(A_{N-1}+A_{N-2})$$

结合边界条件 $A_1=0$，$A_2=1$ 可以递推地求出 A_N. 最后，没有人拿到自己帽子的概率为 $A_N/N!$.

提示：在第一个人选定了一顶别人的帽子之后，剩下 $N-1$ 个人只能从剩下 $N-1$ 顶帽子中选择，且其中一人的帽子不在这 $N-1$ 顶帽子中. 现在有一个特殊的人(他已经没有自己的帽子可选)及一个特殊的帽子(第一个人的帽子)，再将剩下的 $N-1$ 人都不选自己帽子的方法分成两类，一类是特殊人选了特殊的帽子，一类是特殊人不选特殊的帽子，分别计算两类中的方法数，就可以导出所得的公式.

2.18 令 f_n 表示掷一枚硬币 n 次且从不出现连续正面的可能结果数，证明：

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geqslant 2, \text{其中 } f_0 \equiv 1, f_1 \equiv 2$$

提示：按第一次掷硬币的结果将可能的试验结果分成两类，一类是正面朝上，另一类是反面朝上，分别对两类结果计数．若 P_n 表示 n 次掷硬币的结果中不会连续出现正面的概率，在掷 n 枚硬币的各种结果为等可能情况下，找出 P_n 与 f_n 之关系，并计算 P_{10}．

2.19 一个坛子里有 n 个红球和 m 个蓝球，从中一个一个取球，一直到取了 $r(r\leqslant n)$ 个红球为止．求此时正好取出 k 个球的概率是多少？

提示：正好取出 k 个球这一事件等价于第 k 次取出红球，且前 $k-1$ 次取出 $r-1$ 个红球．

2.20 设有一个试验，其样本空间包含可数无限个结果，试证明不可能所有可能结果发生的概率都一样．有没有这样的可能性：所有的可能结果发生的概率均为正数？

* **2.21** 在例 5o 中，讨论了在 n 次赢和 m 次输的次序是随机的情况下，赢的游程的数目的概率计算问题．现在考虑全部游程的个数(赢的游程的数目加上输的游程的数目)，证明：

$$P(\{2k \text{ 个游程}\}) = 2\frac{\binom{m-1}{k-1}\binom{n-1}{k-1}}{\binom{m+n}{n}}$$

$$P(\{2k+1 \text{ 个游程}\}) = \frac{\binom{m-1}{k-1}\binom{n-1}{k} + \binom{m-1}{k}\binom{n-1}{k-1}}{\binom{m+n}{n}}$$ 53

自检习题

2.1 一个咖啡馆供应主菜、主食和甜点三类食物，可能的选择见表 2-1，客人在每个种类中选择一种．

(a) 样本空间里一共有多少种结果？

(b) 令 A 表示“选择冰淇淋”，A 中一共有多少种结果？

(c) 令 B 表示“选了鸡肉”，B 中一共有多少种结果？

(d) 列举事件 AB 中的所有结果；

(e) 令 C 表示“选了米饭”，C 中一共有多少种结果？

(f) 列举事件 ABC 所含的所有结果．

表 2-1

种类	选择
主菜	鸡肉或烤牛肉
主食	面、米饭或土豆
甜点	冰淇淋、果冻、苹果酱或桃子

2.2 时装店里来了一位顾客，已知他买西装的概率为 0.22，买衬衫的概率为 0.30，买领带的概率为 0.28，既买西装又买衬衫的概率为 0.11，既买西装又买领带的概率为 0.14，既买衬衫又买领带的概率为 0.10，三者都买的概率为 0.06．求以下事件概率：

(a) 一样都不买；(b) 正好买一样．

2.3 随机发一副牌，第 14 张是 A 的概率是多少？第 14 张才首次出现 A 的概率又是多少？

2.4 令 A 表示事件“洛杉矶的城中气温为 70°F”，令 B 表示事件“纽约的城中气温为 70°F”，再令 C 表示事件“洛杉矶和纽约的城中气温较高者为 70°F”．如果 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.4$，且 $P(C)=0.2$，求“洛杉矶和纽约的城中气温较低者为 70°F”发生的概率．

2.5 一副洗好的牌共 52 张，求最上面 4 张是以下情况的概率：

(a) 不同点数；(b) 不同花色．

2.6 坛子 A 含有 3 个红球和 3 个黑球，而坛子 B 含有 4 个红球和 6 个黑球，从两个坛子里随机各取一球，正好是同一种颜色的概率是多少？

2.7 某个州发行一种彩票，彩民要从 1 到 40 个数中选 8 个．最后，组委会也从这 40 个数中选 8 个作为中奖数字，假定$\binom{40}{8}$种结果都是等可能的，求以下事件概率：

(a) 彩民猜中了 8 个数字；(b) 彩民猜中了 7 个数字；(c) 彩民至少猜中了 6 个数字．

2.8 从 3 名一年级新生、4 名二年级学生、5 名三年级学生和 3 名毕业班学生中随机选择 4 人组成委员会，求以下事件概率：

(a) 委员会中每个年级恰好一个人；

(b) 委员会由两个二年级学生和两个三年级学生组成；

(c) 委员会仅由二年级或三年级学生组成．

2.9 对于有限集 A，令 $N(A)$表示集合 A 中元素的个数．

(a) 证明

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(AB)$$

(b) 更一般地，证明

$$N\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_i N(A_i) - \sum_{i<j}\sum N(A_iA_j) + \cdots + (-1)^{n+1}N(A_1\cdots A_n)$$

2.10 赛马比赛有 6 匹马，编为 1，2，3，4，5，6 号．样本空间由 6！种可能的比赛结果组成．令 A 表示“1 号马跑在前 3 名”，令 B 表示“2 号马跑第二名”，那么 $A\cup B$ 一共包含多少种结果？

2.11 从一副洗好的 52 张牌里取 5 张，每个花色至少有一张的概率是多大？

54 **2.12** 篮球队有 6 名前场队员和 4 名后场队员，现在要随机两两配对分宿舍，正好有两间宿舍由前场队员和后场队员合住的概率是多少？

2.13 某人从“R E S E R V E”中随机挑选一个字母，再从“V E R T I C A L”中随机选一个，求两个字母恰好相同的概率．

2.14 证明布尔不等式：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

2.15 证明：如果对所有 $i\geqslant 1$，有 $P(A_i)=1$ 成立，那么 $P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)=1$.

2.16 令 $T_k(n)$表示“集合$\{1,\cdots,n\}$分成 k 个非空子集的不同分割数”，此处 $1\leqslant k\leqslant n$(分割的定义参见理论习题 8)，证明：

$$T_k(n) = kT_k(n-1) + T_{k-1}(n-1)$$

提示：$\{1\}$是子集的分割数是多少？$\{1\}$不是子集的分割数是多少？

2.17 一个坛子里装有 5 个红球、6 个白球和 7 个蓝球，无放回地随机抽取 5 个，三种颜色的球都取到的概率是多少？

2.18 4 个红球、8 个蓝球和 5 个绿球随机排列在一条直线上．

(a) 求前 5 个球是蓝色的概率；(b) 求前 5 个球中没有蓝球的概率；

(c) 求最后 3 个球的颜色不相同的概率；(d) 求所有红球摆放在一起的概率．

2.19 由每种花色有 13 张的 4 种花色组成的 52 张牌，从中随机选取 10 张．将同花色的牌放在一堆．

(a) 求 4 堆牌的张数分别是 4，3，2，1 的概率；

(b) 求有两堆有 3 张牌，一堆有 4 张牌，一堆没有牌的概率．

55 **2.20** 一个坛子里有 20 个红球和 10 个蓝球，从坛子里依次往外取球，求所有的红球在所有的蓝球前被取出的概率．