Wiktor Garbarek

Pracownia nr 2 z Analizy Numerycznej
Sprawozdanie do zadania **P2.13**

Wrocław, Listopad 2017

1. O interpolacji klasycznej i Hermite'a.

Interpolacja jest bardzo ważnym zagadnieniem w kontekście pomiarów czy upraszczania obliczeń. W wielu dziedzinach nauki, gdy wykonujemy jakieś pomiary, to niestety możemy to zrobić tylko i wyłącznie na zbiorze dyskretnym. Często jednak znając wyniki pomiarów czy też obliczeń w dwóch punktach (gdzie zrobiliśmy to relatywnie prosto) chcielibyśmy wiedzieć co się dzieje w przedziale pomiędzy (szczególnie, jeśli przewidujemy, że zjawisko jest ciągłe). Oprócz tego, jeśli przybliżamy to co się dzieje w danym przedziale, chcielibyśmy wiedzieć jak bardzo się to przybliżenie ḿogło pomylićóraz, rzecz jasna, chcielibyśmy, by ten błąd był jak najmniejszy.

2. O problemach związanych z klasyczną interpolacją i ich rozwiązaniach.

3. Interpolacja Hermite'a - strona teoretyczna.

Gdy rozpatrujemy klasyczną interpolację, to istnienie wielomianu stopnia n przechodzącego przez $n+1$ różnych punktów (zwanych też węzłami) jest w pewien sposób intuicyjnie oczywiste - wygląda jak rozwiązanie układu n równań ze względu na n zmiennych. Gdy chcemy być nieco bardziej formalni, to wystarczy zwrócić uwagę, że pewna macierz w tym układzie jest macierzą Vandermonde'a i jej wyznacznik jest niezerowy. Sprawa robi się mniej intuicyjna dla interpolacji Hermite'a - czy na pewno możemy dostać wielomian, który nie tylko w pewnych ustalonych punktach osiąga ustalone wartości, ale też pochodne w tych punktach osiągają ustalone wartości - i to nie tylko pierwsze pochodne, ale też drugie czy dalsze!

Twierdzenie 1. *(Jednoznaczność istnienia wielomianu Hermite'a) Niech dane będą: liczba naturalna k, liczby $m_0, m_1, ..., m_k \in \mathbb{N}_+$, parami różne węzły $x_0, x_1, ..., x_k$ oraz wielkości rzeczywiste $y_i^{(i)}$ $(i = 0, 1, ..., k; j = 0, 1, ..., m_k - 1)$. Przyjmijmy $n := m_0 + m_1 + ... + m_k - 1$. Wtedy istnieje dokładnie jeden wielomian H_n stopnia co najwyżej n spełniający następujące warunki:*

$$H_n^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)} \tag{1}$$

dla $i = 0, 1, ..., k$ oraz $j = 0, 1, ..., m_k - 1$.

Dowód. Okazuje się, że pomysł konstrukcji wielomianu Hermite'a oparty na postaci Newton'a klasycznego wielomianu interpolacyjnego, po pewnych ulepszeniach jest matematycznie poprawny, tj. spełnione są równania (1). Oznaczmy $s_i := \sum_{j=0}^{i-1} m_i$, gdzie $s_0 = 0$. Zauważmy, że każda liczba $0 \le l \le n$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $l = s_i + j$, gdzie $0 \le i \le k$ oraz $0 \le j \le m_i - 1$. Zdefiniujmy zatem wielomiany węzłowe następująco:

$$p_{s_i+j}(x) = (x - x_i)^j \cdot \Pi_{j=0}^{i-1}(x - x_j)^{m_j} \tag{2}$$

Wtedy

$$H_n(x) = \sum_{l=0}^{n} b_l p_l(x) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{m_{i-1}} b_{s_i+j} p_{s_i+j}(x) \tag{3}$$

gdzie dla $l = s_i + j$ to

$$b_l = \frac{y_i^j - \left(\sum_{q=0}^{l-1} b_q \cdot p_q(x)\right)^{(j)}(x_i)}{j! \cdot p_{s_i}(x_i)} \tag{4}$$

TODO. $\square$

4. Algorytm konstrukcji wielomianu Hermite'a.

5. Porównanie interpolacji Hermite'a do interpolacji klasycznej

6. Wnioski o użyteczności interpolacji

Literatura

[1] J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 1, WNT, 1981.

[2] Michelle Schatzman, *Numerical analysis: a mathematical introduction*, Clarendon Press, Oxford, 2002

[3] W. Cheney, D. Kincaid, *Analiza numeryczna*, WNT, 2006.

[4] `https://en.wikipedia.org/wiki/Approximations_of_pi` (Z dnia 10.11.2017).

[5] `https://en.wikipedia.org/wiki/Chronology_of_computation_of_pi` (Z dnia 10.11.2017).