Wiktor Garbarek

Pracownia nr 2 z Analizy Numerycznej
Sprawozdanie do zadania **P2.13**

Wrocław, Listopad 2017

1. O interpolacji klasycznej, jej problemach i problemie interpolacji Hermite'a.

Interpolacja jest bardzo ważnym zagadnieniem w kontekście pomiarów czy upraszczania obliczeń. W wielu dziedzinach nauki, gdy wykonujemy jakieś pomiary, to niestety możemy to zrobić tylko i wyłącznie na zbiorze dyskretnym. Często jednak znając wyniki pomiarów czy też obliczeń w dwóch punktach (gdzie zrobiliśmy to relatywnie prosto) chcielibyśmy wiedzieć co się dzieje w przedziale pomiędzy (szczególnie, jeśli przewidujemy, że zjawisko jest ciągłe). Oprócz tego, jeśli przybliżamy jakąś funkcję w danym przedziale, to chcielibyśmy wiedzieć jak duży błąd towarzyszy temu przybliżeniu oraz, oczywiście, chcielibyśmy, by ten błąd był najmniejszy z możliwych.

Wiemy doskonale, że klasyczna interpolacja dla nieodpowiedniego zestawu węzłów, abstrahując od postaci wielomianu interpolacyjnego i algorytmu wykorzystanego do znalezienia tego wielomianu, może dawać nam przybliżenia obarczone bardzo dużym błędem. Ponadto nie wykorzystuje ona wszystkich informacji, które możemy zmierzyć. Przykładowo w fizyce, próbując znaleźć funkcję przebytej drogi w określonym czasie, chcielibyśmy móc wykorzystać inne możliwe do zmierzenia wartości, takie jak prędkość i przyśpieszenie, które w naturalny sposób są odpowiednio pierwszą oraz drugą pochodną drogi po czasie. Takich fizycznych interpretacji pochodnej jest mnóstwo: m.in moc jest pochodną pracy po czasie, siła pochodną pędu po czasie, natężenie prądu elektrycznego pochodną ładunku po czasie etc. Oprócz tego możemy znaleźć też takie naturalne interpretacje pochodnej w chemii czy ekonomii.

W takim razie wartym uwagi jest do rozpatrzenia problem znalezienia wielomianu interpolacyjnego, który oprócz przyjmowania określonych wartości przez ten wielomian pewnych punktach węzłowych, pochodna tego wielomianu przyjmowałaby także określone wartości pochodnych. Być może chcielibyśmy też, by kolejne pochodne również się zgadzały. Wielomian spełniający takie warunki nazywa się wielomianem interpolacyjnym Hermite'a[1] [2]

2. Interpolacja Hermite'a - strona teoretyczna.

Gdy rozpatrujemy klasyczną interpolację, to istnienie wielomianu stopnia n przechodzącego przez $n+1$ różnych punktów (zwanych też węzłami) jest w pewien sposób intuicyjnie oczywiste - wygląda jak rozwiązanie układu n równań ze względu na n zmiennych. Gdy chcemy być nieco bardziej formalni, to wystarczy zwrócić uwagę, że pewna macierz w tym układzie jest macierzą Vandermonde'a i jej wyznacznik jest niezerowy. Sprawa robi się mniej intuicyjna dla interpolacji Hermite'a - czy na pewno możemy dostać wielomian, który nie tylko w pewnych ustalonych punktach osiąga ustalone wartości, ale też pochodne w tych punktach osiągają ustalone wartości - i to nie tylko pierwsze pochodne, ale też drugie czy dalsze!

Twierdzenie 1. *(Jednoznaczność istnienia wielomianu Hermite'a) Niech dane będą: liczba naturalna k, liczby $m_0, m_1, ..., m_k \in \mathbb{N}_+$, parami różne węzły $x_0, x_1, ..., x_k$ oraz wielkości rzeczywiste $y_i^{(i)}$ $(i = 0, 1, ..., k; j =$*

[1] Uwaga: W problemie interpolacji Hermite'a wymagamy, żeby w jakimś węźle x_i określona została wartość funkcji i ewentualnie pierwsze $m_i - 1$ wartości kolejnych pochodnych. Przykładowo, gdy chcemy, by w punkcie 0 nasz wielomian miał wartość 0, jego pochodna wartość 1, a druga pochodna wartość 42, jest problemem interpolacji Hermite'a, natomiast problem znalezienia wielomianu, którego druga pochodna w punkcie 0 dawała 1, a pierwsza pochodna w punkcie 1 dawała 0 nie jest, wedle definicji podanej w tej pracy, problemem interpolacji Hermite'a. (Chociaż oczywiście nadal pozostaje ciekawym problemem do rozważenia)

[2] Warto zauważyć, że wiele angielskich źródeł, za wielomian interpolacyjny Hermite'a uznaje taki, dla którego wartości w węzłach, oraz wartości pierwszych pochodnych się zgadzają. Uogólnienie tutaj przedstawione często jest nazywane *Osculating Interpolation*

$0, 1, ..., m_k - 1$). Przyjmijmy $n := m_0 + m_1 + ... + m_k - 1$. Wtedy istnieje dokładnie jeden wielomian H_n stopnia co najwyżej n spełniający następujące warunki:

$$H_n^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)} \tag{1}$$

dla $i = 0, 1, ..., k$ oraz $j = 0, 1, ..., m_k - 1$.

Dowód. (Istnienie rozwiązania) Okazuje się, że pomysł konstrukcji wielomianu Hermite'a oparty na postaci Newton'a klasycznego wielomianu interpolacyjnego, po pewnych uogólnieniach, jest matematycznie poprawny, tj. spełnione są równania (1).

Oznaczmy $s_i := \sum_{j=0}^{i-1} m_i$, gdzie $s_0 = 0$. Zauważmy, że każda liczba $0 \leq l \leq n$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $l = s_i + j$, gdzie $0 \leq i \leq k$ oraz $0 \leq j \leq m_i - 1$. Zdefiniujmy zatem wielomiany węzłowe następująco:

$$p_{s_i+j}(x) = (x - x_i)^j \cdot \Pi_{j=0}^{i-1}(x - x_j)^{m_j} \tag{2}$$

Wtedy łatwo zauważyć, że $p_l(x) = p_{s_i}(x) \cdot (x - x_i)^j$ Przyjmijmy teraz dwa następujące oznaczenia

$$P_l(x) = \sum_{q=0}^{l-1} b_q \cdot p_q(x) Q_l(x) = \sum_{q=l+1}^{n} b_q \cdot p_q(x) \tag{3}$$

Łatwo zauważyć następujący fakt

$$H_n(x) = P_l(x) + b_l \cdot p_l(x) + Q_l(x) \text{ dla } l = 0, 1, ..., n \tag{4}$$

gdzie przyjmujemy $P_0 \equiv Q_n \equiv 0$ W takim razie możemy zauważyć, że

$$(x - x_i)^{j+1} | Q_l(x) \Rightarrow Q_l^{(j)}(x_i) \equiv 0 \tag{5}$$

$$H_n^{(j)} = P_l^{(j)}(x_i) + j! b_l \cdot p_{s_i}(x_i) \tag{6}$$

$$b_l = \frac{y_i^{(j)} - P_l^{(j)}(x_i)}{j! \cdot p_{s_i}(x_i)} \tag{7}$$

Łatwo teraz zauważyć, że rozwiązanie tego problemu istnieje - bowiem zaczynamy dla $b_0 = y_0^{(0)}$, a późniejsze współczynniki b_l obliczamy wykorzystując wcześniej skonstruowane współczynniki $b_0, b_1, ...b_{l-1}$. □

Dowód. (Jednoznaczność rozwiązania) Chcemy dowieść, że istnieje dokładnie jeden taki wielomian Hermite'a spełniający równania (1). Przeprowadzimy dowód analogiczny dla klasycznej interpolacji. Załóżmy zatem nie wprost, że istnieją dwa takie wielomiany H_n, W_n, różne od siebie, które spełniają równania (1). Rozważając wielomian $H_n - W_n$ możemy zauważyć, że jest on stopnia co najwyżej n oraz suma krotności jego pierwiastków wynosi $n + 1$. W takim razie, wielomian $H_n - W_n \equiv 0$ na mocy zasadniczego twierdzenia algebry, a co za tym idzie $H_n \equiv W_n$, co przeczy założeniu, że wielomiany są różne. □

3. Algorytm konstrukcji wielomianu Hermite'a.

Dowód przedstawiony w poprzednim rozdziale dał nam jednocześnie dość wygodny i ogólny algorytm polegający na obliczaniu b_i jako ilorazów różnicowych. Ma on niestety swoje wady, o których powiemy za chwilę. Uwaga: każde indeksowanie tablicy zaczynamy od 1, tj. jeśli wyciągamy element o indeksie 1 z tablicy $[a_0, a_1, a_2, ...a_k]$, to otrzymamy a_0

Algorytm 1.

```
Wejście: [x_0, x_1, ..., x_k], [m_0, m_1, ..., m_k],
         [(y_0^0, y_0^1, ..., y_0^(m_0 - 1)), ...,
                             (y_k^0, y_k^1, ..., y_k^(m_k - 1))]
Wyjście: [b_0, b_1, ..., b_n]

n := m_0 + m_1 + ... + m_k
C_1 := dla i od 0 do k: m_i razy wstaw x_i do tablicy
C_2 := dla i od 0 do k: m_i razy wstaw y_i^{(0)} do tablicy
dla i od 3 do n+1:
  C_i = dla j od 1 do (n-(i-2)):
```

```
    jeśli C_1[j+i-2] - C_1[j] nie jest zerem
    to : wstaw (C_(i-1)[j+1] - C_(i-1)[j])/(C_1[j+i-2] - C_1[j])
    wpp: gdy w mianowniku występuje x_q to wstaw y_q^{i-2}/(i-2)!

B := dla i od 2 do n+1: wstaw C_i[1]
zwróć B
```

Łatwo zauważyć, że powyższy algorytm wykonuje $O(n^2)$ obliczeń. Ponadto złożoność pamięciowa także wynosi $O(n^2)$ (przechowujemy całą tablicę ilorazów różnicowych, których jest około $\frac{n^2}{2}$) Okazuje się, że złożoność pamięciową możemy zmniejszyć do $O(n)$. Oczywiście musimy zachować kolumnę C_1, w której trzymamy punkty węzłowe, zatem wszystkie operacje będziemy wykonywać na tablicy C_2.

Algorytm 2.

```
Wejście: [x_0, x_1, ..., x_k], [m_0, m_1, ..., m_k],
         [(y_0^0, y_0^1, ..., y_0^(m_0 - 1)), ...,
                           (y_k^0, y_k^1, ..., y_k^(m_k - 1))]
Wyjście: [b_0, b_1, ..., b_n]

n := m_0 + m_1 + ... + m_k
B_1 := dla i od 0 do k: m_i razy wstaw x_i do tablicy
B := dla i od 0 do k: m_i razy wstaw y_i^{(0)} do tablicy
dla i od 2 do n+1:
  dla j od n do i iterując o -1:
    jeśli B_1[j] - B_1[j-i+1] nie jest zerem
    to : B[j] := (B[j] - B[j-1])/(B_1[j] - B_1[j-i+1])
    wpp:
      znajdź takie q, że B_1[j] = x_q, wtedy
      B[j] := y_q^{i-1}/(i-1)!
zwróć B
```

Gdzie operator postfiksowy ! to zwykła silnia.

Pojawiają się jednak problemy w tych obu algorytmach - obliczanie współczynników wielomianu w postaci Newtona nie jest numerycznie poprawne, a problem pojawia się przy dużej ilości węzłów. Ogólnie, zdecydowanie lepszą pod względem własności numerycznych i poprawności jest postać barycentryczna wielomianu interpolacyjnego.

Możemy za to wykorzystać postać barycentryczną ogólnego wielomianu Hermite'a zaproponowaną przez Wernera oraz Schneidera w [4]

Twierdzenie 2. *(Schneider, Werner) Niech H będzie wielomianem interpolacyjnym Hermite'a spełniającym (1). W takim razie wyraża się on wzorem*

$$H_n(x) = \frac{\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m_i-1}\frac{\alpha_{i,j}}{(x-x_i)^{j+1}}\sum_{l=0}^{j}\frac{y_i^{(l)}}{l!}(x-x_i)^l}{\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{m_i-1}\frac{\alpha_{i,j}}{(x-x_i)^{j+1}}} \tag{8}$$

gdzie $v_i := 2w_i\sum_{j=0,j\neq i}^{k}\frac{1}{x_i-x_j}$ oraz $H_{2k+1}(x_i) = y_i$ dla $i = 0,...,k$ gdzie mamy następujące związki rekurencyjne

Algorytm 3.

```
Wejście: x = [x_0, x_1, ..., x_k], [y_0, y_1, ..., y_k], [y'_0, y'_1, ..., y'_k]
Wyjście: [w_0, w_1, ..., w_n], [v_0, v_1, ..., v_n]

a[0,0] := 1
b[0,0] := 0
dla k od 1 do n:
  a[k,0] := 0
  b[k,0] := 0
dla i od 1 do n:
  dla k od 0 do i-1:
    q[i,k] := 1/(x_k - x_i)
    a[k,i] := q[i,k]a[k,i-1]
    a[i,k+1] := a[i,k] - a[k,i]
    b[k,i] := b[k,i-1] + q[i,k]
```

```
    b[i,k+1] = b[i,k] - q[i,k]

wtedy
dla i od 0 do n:
  w[i] = a[i,n]
  v[i] = 2*w[i]b[i,n]
```

4. Porównanie interpolacji Hermite'a do interpolacji klasycznej

5. Wnioski o użyteczności interpolacji

Literatura

[1] J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 1, WNT, 1981.

[2] W. Cheney, D. Kincaid, *Analiza numeryczna*, WNT, 2006.

[3] W. Werner, *Polynomial interpolation: Lagrange versus Newton*, Mathematics of Computation 43, no. 167 (1984).

[4] C. Schneider, W. Werner *Hermite interpolation: The barycentric approach*, Computing 46: 35, Springer, 1991.