

Riassunti di Fisica

Fisica 1 – Fisica 2 – Fisica 3

Versione 1.08.01, 22 ottobre 2008

Introduzione

Tratto dalle lezioni di Fisica 1 del prof. Antonino Pullia, durante l'anno accademico 2003/04, dalle lezioni di Fisica 2 del prof. Marcello Fontanesi, durante l'anno accademico 2004/05, dalle lezioni di Fisica 3 del prof. Baldini durante l'anno accademico 2004/05, e altre fonti nella bibliografia (lezioni: [14, 10, 3, 13, 12, 11, 4, 5, 7], libri principali: [15, 9, 2, 6, 16, 8, 1]). Composto con $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ ¹. Le immagini sono state fatte con XFig, Xypic, Inkscape o 3dstudiomax. I grafici in Matlab, Maple, Mathematica o in Gnuplot.

Ultimo aggiornamento: 22 ottobre 2008.

Se trovate errori, imprecisioni, stupidate cosmiche, per suggerimenti, per ottenere la versione elettronica o per ottenere i sorgenti \LaTeX :

giurrero@gmail.com

Disclaimer

Di questo documento puoi farne quello che vuoi, distribuirlo, fotocopiarlo, usare come carta per accendere il camino o per non sporcare per terra quando imbianchi i muri, a patto che l'autore originale e la sua email vengano riportati in modo significativo insieme a questo disclaimer nella sua forma originale. Possono essere fatte modifiche solo allo scopo di migliorare il documento. L'autore sarà felice di ricevere una copia di queste modifiche. In nessun caso questo documento o parti di esso potranno essere utilizzati come fonte di lucro. L'unico eventuale ricavo ammesso è quello relativo alle spese di distribuzione, per esempio le spese di stampa. Questo documento non è la Bibbia, esso nasce per uso personale, ed è distribuito senza garanzia sui contenuti (se prendente un brutto voto studiando su questi appunti non prendetevela con me).

Notazioni

Purtroppo nelle figure spesso al posto delle lettere greche (α , β) viene riportato il loro nome in lettere latine: alfa (alpha), beta. . . Stessa cosa per i pedici o gli apici, al posto di T_1 T_1 e al posto di z^2 z^2 . La d delle derivate è dritta a differenza della d come variabile.

¹Non sai cos'è il \LaTeX : vergonati! Documentati subito, potresti non poterne farne a meno

Chiave Pubblica²

Se fate modifiche al documento allegate la firma con la vostra chiave. Chiave DSA & ElGamal dell'autore originale:

-----BEGIN PGP PUBLIC KEY BLOCK-----

Version: GnuPG v1.2.2 (GNU/Linux)

```
mQGjBDjdHhORBADgPP1dlFra7QvzK2ltACfgCQqXaV0ab1U/xeIH8X67ahvTXHcM
DwbG96hdN5jnoyTMw5dXp0gPoKP08FD38GU4pRhUWZlBxg0J9+J6c9Tf6v4kKzbi
412UU+HAzqHszF0tbSYosjPt1kgSuGnDWYTDyALZY2+1YaqCJCA9vwNQWQCg/6aC
aKQ6Te1H/k6V421sWmqTtvUD/2pF7FfbbZxZUin0ZxvUz4YSZ6fSD95PrWGoc9fM
owt2H/JttSnju8VS9/kNxHx+u2LXepxkSr3QcG1+hGIYCADkow430DTyfspXzzLV
HviwqqUarjU4rQAa7ovxTZHEXMjdzxysdpbtEl4vTG3wCFMzEM9SIemrYdzhe1se
1CTOBADWb+KPJcMZQ+b7c2GgDyakFXAZ0BdC801mJc6/Jz0gbHzcEy5PIFGEI1mi
K1HOQ6Sm0/oo3quQdXWnCzCeKh83KkaULFUealWEahUk3Ky0oHPKiiMPy/M5Muad
gJYMCt2IEEgdWtA8Mo+Til5TBYJ97dsxGvnxEAN11E60kyWRmrQnUnVnZ2VybyBU
dXJyYSA8Z3R1cnJhMjAwMEBrYXRhbWZpC5jb20+tCdSdWdnZXJvIFR1cnJhIDxn
dHVycmEyMDAwQGthdGFtYWlsLmNvbT6IXgQTEQIAHgUCQN2VNgIbAwYLCQgHAwID
FQIDAxYCAQIeAQIXgAAKCRDRSWLT8RHAe3sAAKcWqbGv5rqBxwE+t4j60K416U44
HQCYgyqWIkH0mqfoY31PwhR+R+uV5uz65AgOEON0eGhAIAPZCV7cIfwgXcqK61q1C
8wXo+VMROU+28W65Szgg2gGnVqMU6Y9AVfPQB8bLQ6mUrfdMZIZJ+AyDvWXPf9Sh
01D49V1f3HZSTz09jdvOmeFXklnN/biudE/F/Ha8g8VHMGH0fMlm/xX5u/2RXscB
qtNbno2gpXI61Brwv0YAWCv19Ij9WE5J280gtJ3kkQc2azNs0A1FHQ98iLMcfFst
jvbzySPAQ/C1WxiNjrtVjLhdONMO/XwXV00jHRhs3jMhLLUq/zzhsS1AGBGNfISn
CnLWhsQDGCgHKXrK1QzZlp+r0ApQmwJG0wg9ZqRdQZ+cfL2JSyIZJrrol7DVeky
CzsAAgIIAjiZiDt7HGyJtHCPWjigQpY3cEAMU9cY8csP1kwAGZsIoW9YfJhY7vCq
BtTP6fb2Ine0BAaVzeYNrcnveckoiUW7aRVYqiXiQkETy80ghZE7NKyZjJiNt8xf
vqa14Dnd8f5so77qGFuM3j1FnycwGtF/XAjN8tix+/mZN2csP68rchw1Yva0P0kd
yv98gPkJLzZFuy606e4hlAd7dAYP72RqEuy11hJxi1t7+428XLUvpM4DlMn55I9R
HZDgw2b59AQcIh4QxjWirjVHwA3VJOR/M9WBnX600+nv5mWX3i+/ImkIkUQUlsdh
jJU2T90q2mc4xdpP5JxoPhhWXC3MFN+IRgQYEQIABgUCON0eGgAKCRDRSWLT8RHA
e2zeAJ4kVKTFaaJG+FT190zdUP00HHyJRQCffZBcyKZTEEXfHp5KSz6Hzlpkzgo=
=C00q
```

-----END PGP PUBLIC KEY BLOCK-----

Fingerprint: 4DC8 E630 A911 49B5 8247 117C D149 62D3 F111 C07B

²Non sai cos'è una chiave pubblica e la firma digitale? Vergognati! Documentati subito (www.pgpi.com, www.rsasecurity.com)

Indice

Introduzione	ii
Disclaimer	ii
Notazioni	ii
Chiave Pubblica	iii
I Fisica 1	1
1 Grandezze e misure	2
1.1 Grandezze	2
1.2 Unità di misura	3
1.2.1 Unità fondamentali	3
1.2.2 Prefissi	4
2 Vettori	5
2.1 Versori e coordinate	5
2.2 Individuazione vettori	6
2.2.1 Passaggio da individuazione geometrica a individuazione analitica	7
2.3 Operazioni tra i vettori	7
3 Cinematica	11
3.1 Vettore posizione	11
3.1.1 Vettore spostamento	12
3.2 Vettore velocità	12
3.3 Vettore accelerazione	12
3.4 Moto rettilineo uniforme	12
3.5 Moto uniformemente accelerato	13
3.5.1 Velocità in funzione dello spazio	13
3.6 Moto circolare uniforme	13
3.7 Moto circolare	14
3.8 Moto qualsiasi in coordinate polari	15

3.9	Moto armonico	15
3.9.1	Moto armonico smorzato	16
3.10	Trasformazioni di Galileo	17
3.10.1	Invarianza e covarianza	18
4	Dinamica	19
4.1	Forze fondamentali	19
4.2	Altre forze	19
4.2.1	Forza elastica	19
4.2.2	Resistenza del mezzo	20
4.2.3	Attrito statico	20
4.2.4	Attrito dinamico	20
4.3	Leggi di Newton	20
4.4	Forze variabili	21
4.4.1	Forze variabili nel tempo	21
4.4.2	Forze variabili nello spazio	22
4.4.3	Forze variabili nella velocità	24
4.5	Forze apparenti	25
4.5.1	Terra	26
4.5.2	Trattazione generale	27
4.6	Quantità di moto	28
4.6.1	Sistema di N punti	28
4.7	Centro di Massa	29
4.7.1	Corpo continuo	30
4.7.2	Teorema di Pappo–Guldino	32
4.8	Impulso di una forza	32
4.9	Urti	33
4.9.1	Urti elastici	33
4.9.2	Urti completamente anelastici	34
4.10	Momento d'inerzia	35
4.10.1	Calcolo Momenti di Inerzia	36
4.10.2	Teorema di Steiner o degli assi paralleli	37
4.11	Momento di una forza	38
4.12	Momento angolare o della quantità di moto	39
4.12.1	Sistema di N punti	39
4.12.2	Conservazione del momento angolare	39
4.12.3	Rotazione intorno a O' mobile	40
4.12.4	Rotazione intorno ad un asse	40
4.12.5	Corpo simmetrico rispetto all'asse di rotazione	40
4.13	Analogia tra grandezze lineari e rotazionali	41

5	Lavoro ed energia	42
5.1	Lavoro definizione	42
5.1.1	Lavoro nei moti rotatori	43
5.2	Potenza	43
5.2.1	Potenza nei moti rotatori	43
5.3	Energia Cinetica	44
5.3.1	Teorema lavoro-energia	44
5.4	Complementi – Funzioni in due variabili	44
5.4.1	Circuitazione di una forza	46
5.5	Energia Potenziale	46
5.5.1	Conservazione dell’energia meccanica	46
6	Gravitazione	50
6.1	Cenni storici	50
6.1.1	Leggi di Keplero	50
6.2	Teorema di Gauss (per la gravità)	51
6.2.1	Caso crosta sferica	51
6.2.2	Caso sfera piena	52
6.3	Interpretazione delle leggi di Keplero	53
6.3.1	Seconda legge	53
6.3.2	Terza legge	54
6.4	Accelerazione di gravità	54
6.5	Misurazione della costante di gravitazione universale	55
6.6	Massa gravitazione e massa inerziale	55
6.7	Principio di equivalenza	56
6.8	Energia associata ad un’orbita	56
7	Meccanica dei fluidi	57
7.1	Fluidostatica	57
7.1.1	Pressione e densità	57
7.1.2	Legge di Stevino	58
7.1.3	Legge dei vasi comunicanti	59
7.1.4	Esperimento di Torricelli 1664	59
7.1.5	Esperimento delle due semisfere	60
7.1.6	Principio di Pascal	61
7.1.7	Principio di Archimede	61
7.1.8	Condizione generale di equilibrio	62
7.1.9	Fluido in rotazione	63
7.2	Dinamica dei fluidi	64
7.2.1	Equazione di continuità	65
7.2.2	Equazione di Bernoulli	66

7.3	Viscosità	67
7.3.1	Legge di Poiseuille	68
8	Termodinamica	70
8.1	Principio zero della termodinamica	71
8.2	Temperatura	71
8.2.1	Termometro a gas perfetto a volume costante	72
8.3	Legge dei gas perfetti	72
8.4	Dilatazione termica	72
8.4.1	Dilatazione termica dei solidi	72
8.4.2	Dilatazione termica dei liquidi	73
8.5	Teoria cinetica del gas perfetto	73
8.5.1	Pressione	74
8.5.2	Libero cammino medio	76
8.5.3	Distribuzione delle velocità	76
8.5.4	Distribuzione dell'energia	78
8.5.5	Riassunto teoria cinetica dei gas perfetti	82
8.6	Trasferimenti di calore	82
8.6.1	Irraggiamento	82
8.6.2	Conduzione	82
8.6.3	Convezione	82
8.7	Capacità termiche	83
8.8	Energia interna	83
8.8.1	Principio di equipartizione dell'energia	84
8.8.2	Calore specifico molare dei solidi	84
8.8.3	Calore specifico dei gas	85
8.9	Primo principio della termodinamica	85
8.10	Trasformazioni di un gas	85
8.10.1	Calcolo del lavoro	86
8.10.2	Relazione di Mayer	88
8.10.3	Adiabatiche	88
8.10.4	Trasformazioni politropiche	89
8.11	Trasformazioni cicliche	90
8.11.1	Ciclo di Carnot per un gas perfetto	90
8.11.2	Frigorifero	91
8.11.3	Ciclo Otto	92
8.11.4	Diagrammi di flusso	93
8.12	Secondo principio della termodinamica	93
8.12.1	Kelvin \Leftrightarrow Clausius	94
8.12.2	Teorema di Carnot	94
8.13	Entropia	95

8.13.1	Entropia nei cicli	97
8.13.2	Entropia per qualsiasi trasformazione	99
8.13.3	Entropia e secondo principio	99
8.13.4	Interpretazione statistica dell'entropia	100
8.13.5	Grafici S/T	102
8.13.6	Generalizzazione del principio di Carnot	103
8.14	Scala termodinamica o assoluta	103
8.15	Riassunto trasformazioni	103
9	Relatività speciale	104
9.1	Esperimento di Michelson–Morley	104
9.2	Postulati di Einstein	107
9.2.1	Simultaneità	107
9.3	Trasformate di Lorentz	108
9.3.1	Trasformate di Lorentz e Galileo	111
9.4	Contrazione delle lunghezze	111
9.5	Dilatazione dei tempi	112
9.6	Composizione delle velocità	113
9.7	Massa	114
9.8	Quantità di moto	115
9.9	Energia Relativistica	116
9.9.1	Teorema lavoro–energia	116
9.9.2	Energia cinetica classica	117
9.9.3	Urti ed energia	117
9.9.4	Conservazione dell'energia	118
9.10	Quantità di moto ed energia	118
9.11	Elettronvolt	119
9.12	Forza e accelerazione	120
9.12.1	Casi Particolari	121
9.13	Spazio di Minkowski	122
9.13.1	Dilatazione dei tempi	122
9.13.2	Curve di calibrazione	124
9.14	Dubbi di Einstein	124
10	Onde	125
10.1	Onde sinusoidali	126
10.2	Corda Tesa	126
10.3	Equazione differenziale di un'onda	127
10.4	Velocità e accelerazione trasversale	128
10.5	Principio di sovrapposizione	128
10.5.1	Interferenza	128

10.6 Onde stazionarie	129
10.7 Effetto Doppler	131
10.7.1 Effetto Doppler relativistico	131
10.8 Suono	132
10.9 Grandezze caratteristiche	132
 II Fisica 2	 133
11 Campi	134
11.1 Richiami di algebra vettoriale	135
11.2 Operatori differenziali	135
11.2.1 Gradiente	135
11.2.2 Derivata direzionale	135
11.2.3 Integrale di linea	136
11.2.4 Flusso	137
11.2.5 Divergenza	138
11.2.6 Teorema della divergenza	139
11.3 Circuitazione	140
11.3.1 Teorema di Stokes	140
11.4 Coordinate	141
11.4.1 Coordinate curvilinee	141
11.4.2 Coordinate cartesiane	142
11.4.3 Coordinate cilindriche	143
11.4.4 Coordinate sferiche	144
 12 Elettrostatica	 145
12.1 Carica	146
12.2 Forza di Coulomb	146
12.2.1 Unità di misura	147
12.3 Densità di carica	148
12.3.1 Forza	149
12.4 Campo elettrico	149
12.4.1 Definizione operativa	149
12.5 Teorema di Gauss	154
12.6 Potenziale elettrostatico	158
12.6.1 Potenziale di qualsiasi distribuzione	160
12.7 Energia potenziale	160
12.7.1 Energia di un sistema di cariche	160
12.7.2 Unità di misura	161
12.8 Maxwell per l'elettrostatica	162

12.9	Dipolo	162
12.9.1	Potenziale	163
12.9.2	Campo elettrostatico	165
12.9.3	Energia potenziale	165
12.9.4	Forza	166
12.9.5	Momento	166
12.10	Sviluppo in multipoli	167
12.10.1	Distribuzione di carica	167
13	Elettrostatica nei conduttori	169
13.1	Conduttori ed isolanti	169
13.2	Carica nei conduttori	169
13.3	Induzione elettrostatica	170
13.4	Teorema di Coulomb	170
13.4.1	Pressione elettrostatica	171
13.4.2	Induzione tra conduttori	172
13.4.3	Induzione completa	172
13.5	Potere dispersivo delle punte	174
13.6	Capacità elettrica	175
13.6.1	Condensatore	176
13.6.2	Energia di un condensatore	178
13.6.3	Condensatori in serie e in parallelo	180
14	Problema generale dell'elettrostatica	182
14.1	Funzioni armoniche	183
14.1.1	Teoremi	183
14.2	Soluzione dell'equazione di Laplace	183
14.2.1	Soluzione generale	184
14.3	Caso monodimensionale	184
15	Corrente stazionaria	186
15.1	Modello del gas di elettroni liberi	187
15.2	Densità di corrente	187
15.2.1	Conservazione della carica	188
15.3	Conducibilità elettrica	189
15.3.1	Resistività	190
15.3.2	Unità di misura	190
15.4	Legge di Ohm	191
15.4.1	Temperatura	192
15.4.2	Resistori	193
15.5	Tempo di rilassamento	194

15.6	Generatori	195
15.6.1	Resistenza interna	195
15.7	Effetto Joule	197
15.7.1	Macroscopico	197
15.7.2	Microscopico	197
16	Campo induzione magnetica	199
16.1	Definizione	199
16.1.1	Definizione operativa	199
16.1.2	Unità di misura	200
16.2	Forza magnetica su una corrente	203
16.2.1	Seconda formula di Laplace	204
16.3	Momento su un circuito	205
16.4	Ago magnetico	206
16.4.1	Lamina magnetica	207
16.5	Campi magnetici generati da correnti	207
16.5.1	Legge di Biot–Savart	207
16.5.2	Prima formula di Laplace	208
16.5.3	Forze tra due circuiti	211
16.5.4	Fili rettilinei indefiniti	212
16.6	Circuitazione	213
16.6.1	Forma differenziale	213
16.7	Flusso	214
16.7.1	Forma differenziale	215
16.8	Maxwell per la magnetostatica	215
16.9	Potenziale scalare magnetico	215
16.10	Potenziale vettoriale magnetico	217
16.10.1	Dipolo magnetico	218
17	Dielettrici	220
17.1	Isolanti	220
17.2	Polarizzazione	221
17.2.1	Momento atomico	222
17.2.2	Molecole polari	222
17.2.3	Polarizzazione per orientamento	222
17.2.4	Polarizzazione per deformazione	223
17.2.5	Vettore polarizzazione elettrica	223
17.3	Campo elettrico generato da un dielettrico	223
17.3.1	Esterno	223
17.3.2	Interno	226
17.4	Teorema di Gauss	228

17.5	Suscettività e permittività	230
17.6	Maxwell per i dielettrici	231
17.7	Condizioni al contorno per \vec{E} e \vec{D}	232
17.7.1	\vec{D} ortogonale	232
17.7.2	\vec{E} tangente	233
17.8	Energia del campo elettrostatico	235
18	Magnetostatica nei mezzi materiali	236
18.1	Magnetizzazione	236
18.2	Approccio teorico	237
18.3	Correnti di magnetizzazione	238
18.3.1	Superfici di separazione	239
18.4	Correnti di magnetizzazione	240
18.5	Vettore intensità magnetica \vec{H}	241
19	Induzione elettromagnetica	243
19.1	Legge Faraday–Neumann–Lenz	244
19.1.1	Forma differenziale	244
19.2	Flusso tagliato e flusso concatenato	245
19.3	Autoinduttanza	245
19.4	Mutua induttanza	248
19.4.1	Simmetria di M	248
20	Circuiti	251
20.1	Reti resistive	251
20.2	RLC serie continua	252
20.2.1	Scarica	252
20.2.2	Carica	254
20.3	RLC serie alternata	255
20.3.1	Soluzione stazionaria	255
20.3.2	Soluzione transitoria	261
20.4	Cavi coassiali	262
20.4.1	Propagazione dell'onda	262
20.4.2	Rappresentazione a elementi concentrati	265
20.4.3	Impedenza caratteristica	265
21	Campo elettromagnetico	266
21.1	Corrente di spostamento	267
21.1.1	Calcolo correnti di spostamento	268
21.2	Equazioni di Maxwell complete	269
21.2.1	Equazione di continuità	269

21.3 Conservazione dell'energia elettromagnetica	270
21.4 Quantità di moto elettromagnetica	271
21.5 Potenziali del campo elettromagnetico	273
21.5.1 Equazioni per \vec{A} e φ	273
21.6 Equazione generale delle onde	274
22 Ottica	276
22.1 Riflessione e rifrazione	276
22.2 Ottica geometrica	278
22.2.1 Soluzione diconale	280
22.3 Dispersione	280
22.3.1 Oscillatore armonico elettronico	280
III Fisica 3	286
23 Grandezze	287
23.1 Mole	287
23.2 Unità di massa atomica	287
24 Gas	289
24.1 Legge dei gas	289
24.1.1 Gas reali	289
24.2 Distribuzione delle velocità	291
24.2.1 Distribuzioni delle componenti	291
24.2.2 Determinazione costanti	293
24.2.3 Distribuzione dei moduli	294
24.2.4 Distribuzione dell'energia	296
24.3 Effetto Doppler termico	297
24.3.1 Risoluzione	298
24.4 Libero cammino medio	298
24.5 Moto Browniano	299
24.5.1 Cammino casuale	299
24.5.2 Numero di Avogadro	300
24.6 Esperimento di Perrin	301
24.7 Viscosità	302
24.8 Conducibilità termica	303
24.9 Velocità del suono nei gas	303

25 Elettrone	305
25.1 Scariche nei gas	305
25.2 Esperimento di Thomson	306
25.3 Esperimento di Millikan	308
25.4 Isotopi	309
26 Radiazione di corpo nero	313
26.1 Radiazione termica	313
26.2 Corpo nero	314
26.2.1 Cavit�	315
26.3 Legge Stefan–Boltzmann	316
26.4 Legge di Wien	316
26.5 Wien	317
26.6 Rayleigh–Jeans	317
26.6.1 Modi di oscillare	317
26.6.2 Legge di Rayleigh–Jeans	318
26.7 Planck	319
27 Calore specifico dei solidi	321
27.1 Dulong–Petit	321
27.2 Einstein	323
27.3 Debye	324
27.3.1 Modi di vibrare in un cristallo	324
27.3.2 Approssimazione di Debye	325
28 Meccanica statistica	328
28.1 Boltzmann	328
28.2 Distribuzione Maxwell–Boltzmann	329
28.2.1 Equilibrio	331
28.3 Temperatura	334
28.4 Equilibrio termico	335
29 Calore specifico dei gas	337
29.1 Calore specifico di gas biatomici	338
29.1.1 Rotazioni	338
29.1.2 Vibrazioni	339
30 Scattering	341
30.1 Particelle α	341
30.2 Scattering di Thomson	342
30.3 Scattering di Rutherford	343

30.4	Analisi scattering	346
30.4.1	Sezione d'urto differenziale	347
30.4.2	Raggio nucleare	348
31	Atomo	349
31.1	Formula di Rydeberg–Ritz	349
31.2	Modello di Bohr	349
31.2.1	Correzione massa	352
31.2.2	Correzione relativistica	353
31.3	Regola di quantizzazione Wilson–Sommerfeld	353
31.4	Effetto Compton	354
31.5	Numeri quantici	356
31.5.1	Regole di selezione	357
31.6	Momento magnetico	357
31.6.1	Orbitale	357
31.6.2	Esperimento Stern–Gerlach	358
31.6.3	Momento angolare intrinseco	359
31.7	Momento angolare totale	360
31.7.1	Somma di momenti	362
31.8	Interazione spin–orbita	362
31.8.1	Approssimazione quantitativa	363
A	Costanti	364
A.1	Costanti matematiche	364
A.2	Costanti universali	365
A.3	Costanti elettromagnetiche	366
A.4	Costanti atomiche e nucleari	366
A.4.1	Generali	366
A.4.2	Elettrone, e^-	367
A.4.3	Muone, μ^-	367
A.4.4	Tau, τ^-	367
A.4.5	Protone, p	368
A.4.6	Neutrone, n	368
A.4.7	Particella alfa, α	368
A.5	Costanti fisico–chimiche	369
B	Dati	370
B.1	Dati astronomici	370
C	Momenti d'inerzia	371

D	Formule che nessuno ricorda mai	372
D.1	Trigonometria	372
D.2	Sviluppi in serie di potenze	373
D.3	Operatori vettoriali	373
D.3.1	Gradiente	373
D.3.2	Divergenza	374
D.3.3	Rotore	374
D.3.4	Laplaciano	374
D.3.5	Relazioni	374

Parte I

Fisica 1

Meccanica, Energia, Gravitazione, Fluidi,
Termodinamica, Relatività Speciale, Onde

*Se non si capisce è matematica
Se non funziona è fisica
Se puzza è chimica
Se è verdognolo e si muove è biologia*

1

Grandezze e misure

1.1 Grandezze

Le grandezze sono enti di cui si occupa la fisica. Esse devono essere misurabili attraverso un metodo operativo, inoltre richiedono delle unità di misura con le quali avviene il confronto.

Le grandezze si dividono in:

- grandezze scalari (numero, unità)
- grandezze vettoriali (numero, unità, direzione, verso) = (vettore, unità)
- grandezze tensoriali

Le grandezze hanno una dimensione data dall'unità di misura. Esistono grandezze adimensionali che sono dei numeri puri, o più raramente dei vettori, tensori puri. L'unità di misura deve essere definita rispetto a qualcosa di invariante e riproducibile. La lunghezza è da considerarsi scalare, mentre la posizione vettoriale.

1.2 Unità di misura¹

1.2.1 Unità fondamentali

Nel sistema internazionale (SI) sono definite 7 unità di misura fondamentali:

Grandezza	Nome	Simbolo	Definizione
lunghezza	metro	m	“...la lunghezza è la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in $1/299792458$ di secondo”
massa	kilogrammo	kg	“...questo prototipo (un particolare cilindro di platino-iridio) potrà d’ora in poi essere considerato l’unità di massa”
tempo	secondo	s	“...la durata di 9192631.770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell’atomo di cesio 133”
corrente elettrica	ampere	A	“...quella corrente costante che, passando in due conduttori paralleli rettilinei infinitamente lunghi, di sezione circolare trascurabile, posti a 1m di distanza nel vuoto produce tra i due conduttori una forza di 2×10^{-7} N per metro di lunghezza”
temperatura termodinamica	kelvin	K	“...la frazione $1/273.16$ della temperatura termodinamica del punto triplo dell’acqua”
quantità di sostanza	mole	mol	“...la quantità di sostanza di un sistema che contiene tale entità elementari quanti sono gli atomi contenuti in 0.012 kg di carbonio 12”
intensità luminosa	candela	cd	“...l’intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza 540×10^{12} Hz e la cui intensità energetica in tale direzione è di $1/683$ W/sr”

¹per dettagli vedi ?? a pag.??

1.2.2 Prefissi

Spesso si usano i seguenti prefissi:

fattore	prefisso	simbolo
10^{24}	yotta	Y
10^{21}	zetta	Z
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	kilo	k
10^2	etto	h
10^1	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a
10^{-21}	zepto	z
10^{-24}	yocto	y

Il femtometro (fm) per un puro caso ha lo stesso simbolo e valore del fermi, unità usata in fisica nucleare.

2

Vettori

Un vettore è simile a un segmento orientato, ogni vettore individua un punto. Un vettore è un ente geometrico, ovvero è indipendente dalla rappresentazione. Fissata una base, nel caso usuale una terna ortonormale, ogni vettore è rappresentato da una terna di coordinate cioè da un elemento di \mathbb{R}^3 . Un modo equivalente per rappresentare un vettore è tramite modulo, direzione e verso. Il modulo è la lunghezza del segmento, la direzione è la retta passante per il segmento, il verso indica l'orientazione del vettore. Nei libri i vettori sono in grassetto¹. \mathbf{v} è un vettore, $|\mathbf{v}|$, $\|\mathbf{v}\|$ o semplicemente v è il modulo del vettore.

I vettori sono da intendersi applicati nell'origine. Si può anche trattare di vettori non applicati nell'origine, chiamandoli vettori applicati, ma si rivelano del tutto equivalenti ai vettori usuali, infatti spesso gli si pensa come elementi di classi di equivalenza i cui rappresentati sono i vettori applicati nell'origine.

2.1 Versori e coordinate

I versori sono vettori della base ortonormale di \mathbb{R}^3 (lo spazio) considerato con il prodotto scalare canonico. In parole povere sono vettori di modulo unitario ortogonali a due a due. Solitamente si indicano con $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$ i versori applicati nell'origine, nella direzione degli assi cartesiani del sistema

¹altre notazioni sono \underline{v} , \vec{v}

di riferimento. Le loro coordinate sono²:

$$\hat{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{j}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Poiché i versori formano una base ogni vettore può essere espresso come una loro combinazione lineare, i coefficienti sono le coordinate³:

$$\mathbf{v} = v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}} + v_z \hat{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

2.2 Individuazione vettori

I vettori si possono individuare in un sistema di riferimento per via geometria o per via analitica. Individuando un vettore per via geometrica si indica il modulo, e gli angoli che il vettore forma con gli assi cartesiani. Nello spazio:

$$\left\{ \begin{array}{l} |\mathbf{v}| \\ \alpha, \beta, \gamma \end{array} \right. \quad \text{con} \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Notiamo che gli angoli α , β e γ non sono indipendenti, possiamo ricavarne uno in funzione degli altri; quindi un vettore sarà descritto da tre informazioni, per esempio $|\mathbf{v}|$, α , β .

Per via analitica invece bisogna indicare le componenti del vettore rispetto alla base $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$: $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$.

²quando si scrive che $\mathbf{v} = (a, b, c)$ l'uguaglianza significa che fissata una base il vettore è rappresentato dalle sue coordinate (a, b, c) , ma vettori e coordinate non sono la stessa cosa, per esempio se si fa un cambiamento di base il vettore non cambia, ma le sue coordinate sì.

³come già accennato i due simboli di uguaglianza hanno significati diversi, il primo è una vera uguaglianza, il secondo vuol dire che fissata una base, il vettore è rappresentato da quelle coordinate.

2.2.1 Passaggio da individuazione geometrica a individuazione analitica

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = |\mathbf{v}| \cos \alpha \\ v_y = |\mathbf{v}| \cos \beta \\ v_z = |\mathbf{v}| \cos \gamma \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} |\mathbf{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \\ \cos \alpha = \frac{v_x}{|\mathbf{v}|} \\ \cos \beta = \frac{v_y}{|\mathbf{v}|} \\ \cos \gamma = \frac{v_z}{|\mathbf{v}|} \end{array} \right.$$

2.3 Operazioni tra i vettori

Vettore inverso

Il vettore inverso ha stesso modulo del vettore, stessa direzione, ma verso opposto.

$$-\mathbf{v} = -(v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}) = -v_x \mathbf{i} - v_y \mathbf{j} - v_z \mathbf{k}$$

Naturalmente ogni vettore ha inverso e la loro somma è nulla e $-\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Somma

Per sommare due vettori per via geometrica si usa la regola del parallelogramma, per via analitica si sommano le componenti:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) + (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = \\ &= (a_x + b_x) \mathbf{i} + (a_y + b_y) \mathbf{j} + (a_z + b_z) \mathbf{k} \end{aligned}$$

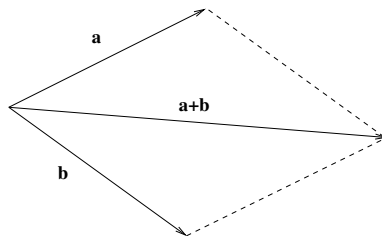


Figura 2.1: Regola del parallelogramma

Differenza

La differenza di due vettori è la somma del primo con l'inverso del secondo. Graficamente $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ è il vettore che congiunge \mathbf{b} ad \mathbf{a} .

Prodotto per uno scalare

Per via geometrica il prodotto scalare di un vettore per uno scalare corrisponde al vettore con stessa direzione, con modulo moltiplicato per il valore assoluto dello scalare e verso invertito se lo scalare è negativo.

$$\forall h \in \mathbb{R} \quad h\mathbf{a} = h(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) = ha_x\mathbf{i} + ha_y\mathbf{j} + ha_z\mathbf{k}$$

Prodotto scalare

Il prodotto scalare usato in fisica è il prodotto scalare canonico della geometria in \mathbb{R}^3 rispetto alla base canonica $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$$

$$p_s = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \alpha$$

con α l'angolo compreso tra i due vettori. Da qui si deduce che $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$, ecc., che due vettori ortogonali hanno prodotto scalare nullo e che due vettori hanno prodotto scalare massimo quando sono paralleli.

$$p_s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \cdot (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

Prodotto Vettoriale

Matematicamente il prodotto vettoriale non è facile da definire. Esso restituisce un vettore che ha direzione ortogonale al piano individuato dai due vettori, verso ricavabile dalla regola della mano destra, e modulo:

$$|\mathbf{p}_v| = ab \sin \alpha$$

con α angolo tra i due vettori⁴.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_v &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) \wedge (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) \\ &= (a_yb_z - a_zb_y)\mathbf{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\mathbf{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\mathbf{k} \end{aligned}$$

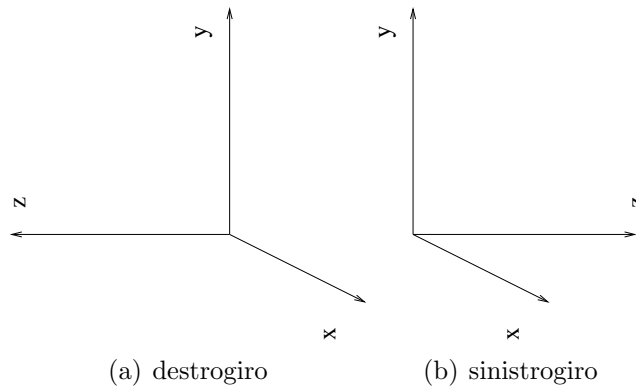
⁴è molto semplice ricordarsi la formula del prodotto vettoriale, basta ciclare sulle variabili. Per esempio la componente x del prodotto vettoriale è $a_yb_z - a_zb_y$ in cui l'ordine è x (la componente) e poi y, z , seguito dalla sottrazione al contrario (è antisimmetrico)

Il prodotto scalare può essere calcolato come determinante di una matrice 3×3 :

$$\mathbf{p}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Il prodotto vettoriale è antisimmetrico cioè $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \wedge \mathbf{a})$. Il modulo del prodotto vettoriale è l'area del parallelogramma avente come lati i due vettori.

Il prodotto vettoriale è dipendente dalla scelta del sistema di riferimento. In particolare il verso del prodotto vettoriale segue la regola della mano destra se il sistema di riferimento è destrorgio, altrimenti il verso risulta opposto. Per questo il prodotto vettoriale è chiamato pseudovettore. In natura le grandezze osservabili non devono dipendere dalla scelta dell'orientazione (chiralità) degli assi cartesiani. Per convenzione si sceglie un sistema di riferimento destrorgio.



Prodotto Misto

Il prodotto misto è definito come:

$$p_m = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$$

Esso è uguale all'area del parallelepipedo avente come spigoli i vettori \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} .

Derivata di un vettore

La derivata di un vettore è la derivata delle coordinate per i rispettivi versori, (i versori sono costanti). Per esempio la derivata della velocità rispetto al tempo è:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k}$$

Gradiente

Il gradiente di uno scalare è definito come:

$$\text{grad } V(x, y, z) = \nabla V(x, y, z) = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} +$$

dove ∇ è un operatore definito come:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

con questo operatore abbiamo il divertimento di scrivere le nostre formule per esempio in questo modo:

$$\mathbf{F} = -\nabla U$$

invece di:

$$\mathbf{F} = - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} \right)$$

3

Cinematica

3.1 Vettore posizione

Fissato un sistema di riferimento cartesiano¹ Oxy il vettore che congiunge l'origine con un punto P è il vettore posizione \mathbf{r} che individua P in quel sistema di riferimento. Poiché il punto può spostarsi nel tempo \mathbf{r} sarà funzione del tempo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ e descriverà al variare del tempo tutte le posizioni occupate da P cioè la sua traiettoria.

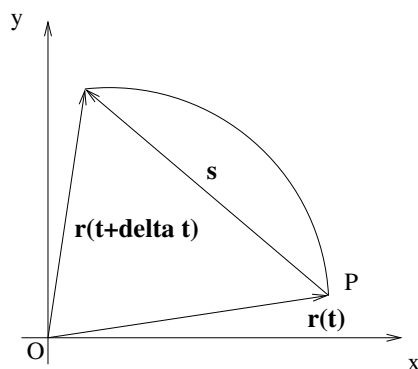


Figura 3.1: vettore posizione e spostamento

¹per semplicità quasi sempre si parlerà del piano piuttosto che dello spazio, ma i risultati sono del tutto analoghi

3.1.1 Vettore spostamento

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}(t, \Delta t) &= \Delta \mathbf{r}(t, \Delta t) \\
 &= \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = x(t + \Delta t) \mathbf{i} + y(t + \Delta t) \mathbf{j} - x(t) \mathbf{i} - y(t) \mathbf{j} \\
 &= [x(t + \Delta t) - x(t)] \mathbf{i} + [y(t + \Delta t) - y(t)] \mathbf{j} = \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j}
 \end{aligned}$$

3.2 Vettore velocità

Definizione 3.1 (Velocità Media)

$$\mathbf{v}_m(t, t + \Delta t) = \frac{\Delta \mathbf{r}(t, \Delta t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \{ \Delta x \mathbf{i} + \Delta y \mathbf{j} \} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \mathbf{j}$$

Definizione 3.2 (Velocità Istantanea)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{v}_m(t, t + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}(t) = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_t = \left. \frac{dx}{dt} \right|_t \mathbf{i} + \left. \frac{dy}{dt} \right|_t \mathbf{j} \\
 \|\mathbf{v}\| &= \left\| \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_t \right\| \neq \frac{d}{dt} \|\mathbf{r}\|
 \end{aligned}$$

Definizione 3.3 (Velocità Scalare)

$$v_s = \frac{\text{spazio totale percorso}}{\Delta t}$$

3.3 Vettore accelerazione

Definizione 3.4 (accelerazione istantanea)

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}(t)$$

3.4 Moto rettilineo uniforme²

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v} = \overrightarrow{\text{const}} \\
 d\mathbf{r} &= \mathbf{v} dt \quad \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \int_0^t \mathbf{v} dt \\
 \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 &= \mathbf{v} t \quad \mathbf{r} = \mathbf{v} t + \mathbf{r}_0
 \end{aligned}$$

²usiamo sempre condizioni iniziali implicite, del tipo $t_0 = 0$, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$

3.5 Moto uniformemente accelerato

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} = \overrightarrow{\text{const}}$$

$$\mathbf{a} dt = d\mathbf{v} \quad \int_0^t \mathbf{a} dt = \int_{\mathbf{v}_0}^{\mathbf{v}} d\mathbf{v} \quad \mathbf{a}t = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}t + \mathbf{v}_0 \quad (3.1)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}t + \mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$d\mathbf{r} = (\mathbf{a}t + \mathbf{v}_0) dt \quad \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \int_0^t (\mathbf{a}t + \mathbf{v}_0) dt \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 + \mathbf{v}_0t$$

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 + \mathbf{v}_0t + \mathbf{r}_0 \quad (3.2)$$

3.5.1 Velocità in funzione dello spazio

In certi casi può risultare molto comoda la formula relativa al moto uniformemente accelerato scritta in questo modo:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(r - r_0) \quad (3.3)$$

che vale solo nel caso unidimensionale³.

3.6 Moto circolare uniforme

Per moto circolare uniforme si intende quel moto su traiettoria circolare in cui il modulo del vettore velocità rimane costante nel tempo (mentre la sua direzione varia ed è sempre tangente alla circonferenza). Definiamo la velocità angolare: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ e l'accelerazione angolare $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$; in realtà sono dei vettori.

$$|\mathbf{v}| = \text{const}$$

$$\text{scegliamo } \mathbf{r}_0 : \begin{cases} x = R \\ y = 0 \end{cases}$$

³nel caso unidimensionale le (3.1) e la (3.2) si scrivono come:

$$v(t) = at + v_0 \quad r(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + r_0 \quad (3.4)$$

eliminiamo il tempo per trovare $v(r)$: ricaviamo t dalla prima e sostituiamolo nella seconda, semplifichiamo e otteniamo la (3.3)

$$\mathbf{r} = R \cos \theta \mathbf{i} + R \sin \theta \mathbf{j}$$

$$\theta = \frac{\text{arco}}{\text{raggio}} = \frac{vt}{R} = \omega t \quad \omega = \dot{\theta} = \frac{v}{R} = \text{const}$$

$$\mathbf{r} = R \cos(\omega t) \mathbf{i} + R \sin(\omega t) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -R\omega \sin(\omega t) \mathbf{i} + R\omega \cos(\omega t) \mathbf{j}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}|^2 &= v_x^2 + v_y^2 = R^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) + R^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) \\ &= R^2 \omega^2 (\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) = R^2 \omega^2 \end{aligned}$$

$$v = \omega R$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} \perp \mathbf{r}$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = v_x x + v_y y = -R\omega \sin(\omega t) R \cos(\omega t) + R\omega \cos(\omega t) R \sin(\omega t) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -R\omega^2 \cos(\omega t) \mathbf{i} - R\omega^2 \sin(\omega t) \mathbf{j} \\ &= -R\omega^2 (\cos(\omega t) \mathbf{i} + \sin(\omega t) \mathbf{j}) = -\omega^2 \mathbf{r} \end{aligned}$$

$$|\mathbf{a}|^2 = R^2 \omega^4 \cos^2(\omega t) + R^2 \omega^4 \sin^2(\omega t) = R^2 \omega^4$$

$$a = \omega^2 R = \omega v = \frac{v^2}{R}$$

3.7 Moto circolare

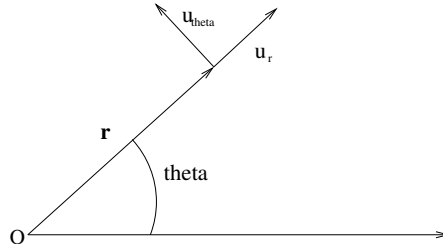


Figura 3.2: Coordinate polari

$$\mathbf{r} = R \mathbf{u}_r$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_r = \cos \theta(t) \mathbf{i} + \sin \theta(t) \mathbf{j} \\ \mathbf{u}_\theta = -\sin \theta(t) \mathbf{i} + \cos \theta(t) \mathbf{j} \end{cases}$$

$$\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \cos \theta \mathbf{i} - \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{j} = -\dot{\theta} \mathbf{u}_r$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d(R\mathbf{u}_r)}{dt} = R \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} \\ &= R \left(-\dot{\theta} \sin \theta \mathbf{i} + \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{j} \right) = R\dot{\theta} \mathbf{u}_\theta \end{aligned}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(R\dot{\theta} \mathbf{u}_\theta)}{dt} = R\ddot{\theta} \mathbf{u}_\theta + R\dot{\theta} \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = R\ddot{\theta} \mathbf{u}_\theta - R\dot{\theta}^2 \mathbf{u}_r$$

3.8 Moto qualsiasi in coordinate polari

$$\mathbf{r}(t) = r\mathbf{u}_r$$

$$\mathbf{u}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \quad \mathbf{u}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = -\dot{\theta} \sin \theta \mathbf{i} + \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{j} = \dot{\theta} (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) = \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta$$

$$\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \cos \theta \mathbf{i} - \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{j} = -\dot{\theta} (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) = -\dot{\theta} \mathbf{u}_r$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r} \mathbf{u}_r + r \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \dot{r} \mathbf{u}_r + r\dot{\theta} \mathbf{u}_\theta$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{r} \mathbf{u}_r + \dot{r} \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta + r \ddot{\theta} \mathbf{u}_\theta - r \dot{\theta}^2 \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_r (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) + \mathbf{u}_\theta (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta})$$

I vettori velocità e accelerazione vengono scomposti in due componenti:

- Velocità radiale: $v_r = \dot{r}$
- Velocità perpendicolare: $v_\theta = r\dot{\theta}$
- Accelerazione radiale: $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$
- Accelerazione perpendicolare: $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$

3.9 Moto armonico

Il moto armonico è un moto con equazione differenziale:

$$\ddot{x} = -kx$$

cioè:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x = \ddot{x}$$

$$k = \frac{1}{\omega^2} \quad x = -\frac{1}{\omega^2} \ddot{x}$$

Per esempi (pendoli, molle) vedi sezione 4.4.2 a pagina 22

3.9.1 Moto armonico smorzato

Introduciamo nel moto armonico una forza smorzatrice, per esempio una forza d'attrito che varia con la velocità:

$$F = -\gamma \frac{dx}{dt}$$

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} \quad m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$$

$\tau = \frac{m}{\gamma}$ è un tempo, la frequenza del moto armonico non smorzato è $\frac{k}{m} = \omega_0^2$

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

se $\tau = \infty$ allora il moto non è più smorzato.

Una soluzione è:

$$x(t) = e^{st}$$

$$\dot{x}(t) = sx(t) \quad \ddot{x}(t) = s^2x(t)$$

$$s^2x(t) + \frac{1}{\tau}sx(t) + \omega_0^2x(t) = 0$$

$$s_{1/2} = \frac{-\frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - \omega_0^2}$$

quindi la soluzione generale è una combinazione lineare delle soluzioni:

$$x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

a seconda che le radici del polinomio siano reali o complesse si possono distinguere due casi:

attrito forte

$$\beta = \frac{1}{4\tau^2} - \omega_0^2 > 0 \quad \tau < \frac{1}{2\omega_0} \quad \gamma > 2\sqrt{km}$$

$$s_{1/2} = -\frac{1}{2\tau} \pm \beta \quad \text{radici reali e } < 0$$

$$x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

attrito debole

$$\frac{1}{4\tau^2} - \omega_0^2 < 0 \quad \tau > \frac{1}{2\omega_0} \quad \gamma < 2\sqrt{km}$$

$$s_{1/2} = \frac{-\frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{1}{2\tau} \pm i\omega$$

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} = A_1 e^{-\frac{t}{2\tau} - i\omega t} + A_2 e^{-\frac{t}{2\tau} + i\omega t} = \\ &= e^{-\frac{t}{2\tau}} (A_1 e^{-i\omega t} + A_2 e^{i\omega t}) = A e^{-\frac{t}{2\tau}} \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

quindi è un moto armonico con frequenza $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}}$ la cui ampiezza diminuisce con un fattore frenante $e^{-\frac{t}{2\tau}}$.⁴

3.10 Trasformazioni di Galileo

Le trasformazioni di Galileo sono equazioni valide nella meccanica classica che consentono di descrivere le coordinate di un sistema rispetto alle coordinate di un altro sistema che si muove di moto rettilineo uniforme rispetto al primo. Un sistema è detto inerziale se vale la prima legge di Newton. Se in un sistema è inerziale allora un altro sistema è inerziale se e solo se si muove di moto rettilineo uniforme rispetto al primo.

Primo osservatore “fermo”: $O \quad \mathbf{r} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{a}$

Secondo osservatore in moto: $O' \quad \mathbf{r}' \quad \mathbf{v}' \quad \mathbf{a}'$

In meccanica classica si assume: $t = t'$

\mathbf{u} velocità di trascinamento: velocità di O' rispetto ad O .

Legge 3.1 $\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{(O' - O)} + \mathbf{r}' = \mathbf{u}t + \mathbf{r}'$

⁴Il caso in cui ci siano due radici coincidenti è tralasciato poiché puntiforme

Legge 3.2 (composizione delle velocità)

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{u}t + \mathbf{r}') = \frac{d}{dt}(\mathbf{u}t) + \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{u} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \mathbf{u} + \mathbf{v}'$$

velocità assoluta = velocità relativa + velocità di trascinamento

Legge 3.3 (invarianza dell'accelerazione)

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{u} + \mathbf{v}') = 0 + \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} = \mathbf{a}'$$

L'accelerazione quindi è invariante

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{u}t & \text{trasformate di Galileo} \\ \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v}' & \text{somma delle velocità} \\ \mathbf{a} = \mathbf{a}' & \text{invarianza dell'accelerazione} \\ t = t' & \text{ipotesi del tempo assoluto} \end{array} \right.$$

Esse valgono nell'ipotesi che se $t = 0 = t'$ allora $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$. Non esiste un sistema di riferimento assoluto.

3.10.1 Invarianza e covarianza

Una grandezza si dice invariante se è numericamente uguale alla sua trasformata, cioè $x = T(x) = x'$. Nelle trasformazioni di Galileo l'accelerazione è invariante rispetto alla trasformazione che trasforma le coordinate di O in quelle di O' . Nella relatività galileiana la lunghezza è invariante, nella relatività ristretta no.

Una legge si dice covariante se la sua espressione è uguale alla sua trasformata, cioè $f(x) = T(f(x))$.

4

Dinamica

4.1 Forze fondamentali

1. forza gravitazionale
2. forza elettromagnetica
3. forza nucleare debole
4. forza nucleare forte

Tutte le altre forze non sono altro che combinazioni di queste.

4.2 Altre forze

Molte forze sono descritte con leggi che approssimano il loro comportamento, consentendo un'analisi dinamica del sistema, senza dover considerare direttamente le forze fondamentali.

4.2.1 Forza elastica

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$$

con \mathbf{x} l'allungamento. Questa legge è valida per i corpi elastici e per allungamenti limitati.

4.2.2 Resistenza del mezzo

La resistenza del mezzo è quella forza che il fluido in cui è immerso un corpo in movimento esercita sul corpo. La forza è proporzionale alla velocità, ma può essere anche proporzionale al quadrato della velocità.

$$\mathbf{F} = -k\mu\mathbf{v}$$

oppure:

$$\mathbf{F} = -k\mu v\mathbf{v}$$

dove μ dipende dalla geometria del corpo, k dalla natura del mezzo.

4.2.3 Attrito statico

Le leggi sull'attrito vengono chiamate leggi di Leonardo.

Legge 4.1 (Prima legge di Leonardo) $f_s \leq \mu_s N$ con μ_s coefficiente di attrito statico

Legge 4.2 (Seconda legge di Leonardo) La forza di attrito è indipendente dalla superficie d'appoggio

4.2.4 Attrito dinamico

$$F_c = \mu_c N$$

μ_c = coefficiente di attrito dinamico. $\mu_c < \mu_s$

4.3 Leggi di Newton

Le leggi di Newton sono i principi della dinamica, legano due mondi distinti, quello del mondo esterno e quello della cinematica attraverso le forze. In quanto principi non hanno nessuna giustificazione, se non la verifica sperimentale.

Principio 4.1 (Primo principio della dinamica) Quando un corpo è sottoposto ad una forza risultante nulla è possibile individuare una classe di riferimenti rispetto ai quali la sua accelerazione è zero (e si chiama classe dei sistemi inerziali).

Principio 4.2 (Secondo principio della dinamica)

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{4.1}$$

In realtà Newton formulò questa espressione come $\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$

Principio 4.3 (Terzo principio della dinamica) *Se un corpo esercita una forza su un altro corpo, il secondo corpo esercita una forza sul primo. Queste due forze sono uguali in modulo, hanno la stessa direzione e versi opposti.*

4.4 Forze variabili

In generale la forza è una funzione del tipo:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (4.2)$$

La risoluzione dell'equazione differenziale (4.1) con la forza data dalla (4.2) è compito della meccanica. Il caso più semplice è quello in cui \mathbf{F} è una costante, vediamo degli esempi in cui non lo è.

4.4.1 Forze variabili nel tempo

Esempio 4.1 Una macchina viaggia alla velocità di 100 km/h, la forza dei freni varia nel tempo e quindi l'accelerazione impressa dai freni segue la legge $a = ct$ con $c = -3 \text{ m/s}^3$. Quanto ci mette la macchina a fermarsi?

$$v_0 = 100 \text{ km/h} \simeq 27.7 \text{ m/s}$$

$$c = -3 \text{ m/s}^3$$

$$a = ct$$

$$F = ma = mct$$

Il risultato si trova integrando le definizioni di accelerazione, velocità e spazio.

$$a = \frac{dv}{dt} = ct \quad \Rightarrow \quad dv = ct \, dt \quad \Rightarrow \quad \int_{v_0}^v dv = \int_0^t ct \, dt$$

$$v - v_0 = \frac{ct^2}{2} \quad v = \frac{ct^2}{2} + v_0$$

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \int_0^t v \, dt = \int_0^x dx \quad \int_0^t \frac{ct^2}{2} + v_0 \, dt = \int_0^x dx$$

$$\frac{ct^3}{6} + v_0 t = x \quad x = v_0 t + \frac{ct^3}{6}$$

$$v_f = 0 \quad v_f = 0 = \frac{ct^2}{2} + v_0 \quad t = \sqrt{\frac{-2v_0}{c}} \simeq 4.30 \text{ s}$$

4.4.2 Forze variabili nello spazio

Moto armonico delle molle

$$F = -kx = ma \quad (4.3)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad x = -\frac{m\ddot{x}}{k}$$

la soluzione generale è del tipo:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.4)$$

con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, da cui si può ricavare anche:

$$\dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = \omega^2 x$$

$$x = -\frac{1}{\omega^2} \ddot{x}$$

confrontando questa funzione con quella trovata prima si ha che:

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{m}{k} \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

come già accennato. L'equazione del moto è quindi:

$$x = A \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi \right) \quad (4.5)$$

le costanti A e φ sono da trovarsi con le condizioni iniziali. L'ampiezza massima è:

$$x_{\max} = A$$

e il periodo:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{k}{m}}(t+T) + \varphi &= \sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi + 2\pi \\ \sqrt{\frac{k}{m}}T &= 2\pi \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{\omega} \end{aligned}$$

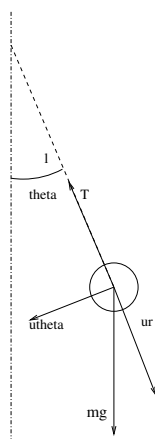


Figura 4.1: Pendolo semplice

Moto del pendolo

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} + \mathbf{T} = m\mathbf{a}$$

$$\begin{cases} a_r = -\frac{v^2}{l} = -\omega^2 l \\ a_\theta = \frac{dv}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} mg \cos \theta - T = -m\omega^2 l = -m\frac{v^2}{l} \\ mg \sin \theta = \frac{dv}{dt} m \end{cases}$$

$$\omega = \frac{v}{l} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$|v| = \omega l = l \frac{d\theta}{dt}$$

$$v = -l \frac{d\theta}{dt}$$

$$mg \sin \theta = -ml \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$g \sin \theta = -l \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

per piccole oscillazioni¹: $\sin \theta \simeq \theta$

$$g\theta = -l \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$g\theta = -l\ddot{\theta} \quad \theta = A \sin(\omega t + \varphi)$$

¹è il primo sviluppo del polinomio di Taylor

$$\theta = -\frac{l}{g} \ddot{\theta} \quad \ddot{\theta} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 \theta$$

$$\theta = -\frac{\ddot{\theta}}{\omega^2} \quad \frac{1}{\omega^2} = \frac{l}{g} \quad \omega^2 = \frac{g}{l} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\theta = A \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \varphi\right)$$

$$2\pi + \sqrt{\frac{g}{l}} t + \varphi = \sqrt{\frac{g}{l}} (t + T) + \varphi \quad \sqrt{\frac{g}{l}} T = 2\pi \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{2\pi}{\omega}$$

4.4.3 Forze variabili nella velocità

Su un corpo in caduta agisce la forza di Stokes: $F_s = -\beta v$, proporzionale alla velocità. β dipende dalla viscosità del mezzo e dalla geometria del corpo.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_s = m\mathbf{a}$$

$$mg - F_s = ma$$

$$mg - \beta v = ma = m \frac{dv}{dt}$$

$$mg - \beta v = m \frac{dv}{dt} \quad dt (mg - \beta v) = m dv$$

$$\int_0^t dt = \int_{v_0}^v \frac{m}{mg - \beta v} dv$$

$$t = \left[-\frac{m}{\beta} \ln (mg - \beta v) \right]_{v_0}^v = -\frac{m}{\beta} (\ln (mg - \beta v) - \ln (mg - \beta v_0)) =$$

$$= -\frac{m}{\beta} \ln \frac{mg - \beta v}{mg - \beta v_0} \quad -\frac{\beta t}{m} = \ln \frac{mg - \beta v}{mg - \beta v_0}$$

$$e^{-\frac{\beta t}{m}} = e^{\ln \frac{mg - \beta v}{mg - \beta v_0}} = \frac{mg - \beta v}{mg - \beta v_0}$$

$$(mg - \beta v) = (mg - \beta v_0) e^{-\frac{\beta t}{m}}$$

$$v = \frac{mg}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta t}{m}} \right) + v_0 e^{-\frac{\beta t}{m}}$$

se $t \rightarrow +\infty$ allora $v \rightarrow \frac{mg}{\beta}$

se $\beta \rightarrow 0$ allora $v \rightarrow gt + v_0$

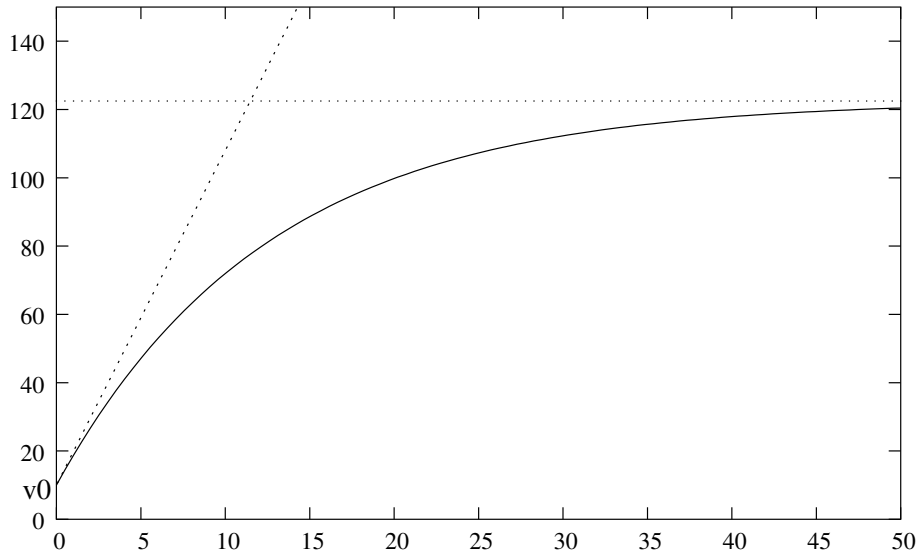
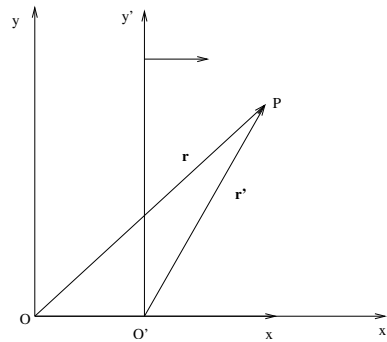


Figura 4.2: Grafico forza variabile nella velocità

4.5 Forze apparenti

Le forze apparenti non sono delle vere forze, sono degli strumenti che consentono di usare la seconda legge della dinamica anche in sistemi non inerziali. In particolare le forze apparenti non rispettano il terzo principio della dinamica. Siano O e O' due sistemi di riferimento; O' si muova verso destra con accelerazione $\mathbf{a}_{O'}$ rispetto ad O . $\mathbf{r}_{O'}$ il vettore che individua O' rispetto ad O .



$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{r}_{O'} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_{O'} \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{O'}$$

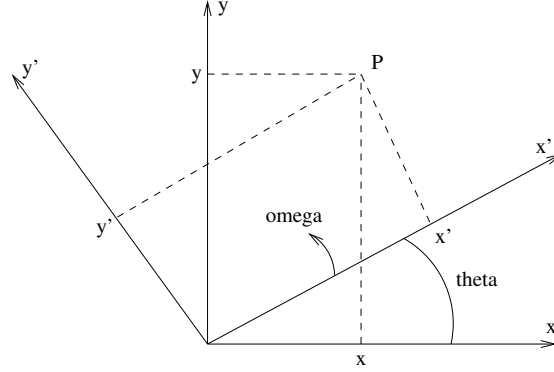
$$m\mathbf{a} = m\mathbf{a}' + m\mathbf{a}_{O'} = \mathbf{F}$$

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_{O'} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{app}}$$

$$\mathbf{F}_{\text{app}} = -m\mathbf{a}_{O'}$$

4.5.1 Terra

La Terra non è un sistema inerziale, infatti ruota intorno al Sole e ruota attorno al proprio asse. Consideriamo quest'ultimo moto:



$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = y' \cos \theta + x' \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = x'(t) \cos(\omega t) - y'(t) \sin(\omega t) \\ y(t) = y'(t) \cos(\omega t) + x'(t) \sin(\omega t) \end{cases}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v'_{x'} \cos(\omega t) - \omega x' \sin(\omega t) - v'_{y'} \sin(\omega t) - \omega y' \cos(\omega t)$$

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = a'_{x'} \cos(\omega t) - \omega v'_{x'} \sin(\omega t) - \omega v'_{x'} \sin(\omega t) - \omega^2 x' \cos(\omega t) - \\ &\quad - a'_{y'} \sin(\omega t) - \omega v'_{y'} \cos(\omega t) - \omega v'_{y'} \cos(\omega t) + \omega^2 y' \sin(\omega t) \\ &= a'_{x'} \cos(\omega t) - a'_{y'} \sin(\omega t) - \omega^2 [x' \cos(\omega t) - y' \sin(\omega t)] - \\ &\quad - 2\omega [v'_{x'} \sin(\omega t) + v'_{y'} \cos(\omega t)] \\ &= a'_x - \omega^2 x - 2\omega v'_y \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ v'_{x'} & v'_{y'} & v'_{z'} \end{vmatrix} = -\omega v'_{y'} \mathbf{i} + \omega v'_{x'} \mathbf{j}$$

$$\begin{cases} a_x = a'_x - \omega^2 x + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}')_x \\ a_y = a'_y - \omega^2 y + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}')_y \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' - \omega^2 \mathbf{r} + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}')$$

$$\begin{aligned}
m\mathbf{a} &= m\mathbf{a}' - m\omega^2\mathbf{r} + 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') = \mathbf{F} \\
m\mathbf{a}' &= \mathbf{F} + \underbrace{m\omega^2\mathbf{r}}_{\text{forza centrifuga}} - \underbrace{2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}')}_{\text{forza di Coriolis}} \\
\mathbf{F}_{\text{cent}} &= m\omega^2\mathbf{r} \quad \mathbf{F}_{\text{Cor}} = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}')
\end{aligned}$$

Esempio 4.2 (pendolo di Foucault) Se mettiamo un pendolo al polo la forza centrifuga sarà nulla perché $r = 0$, ma esiste ancora la forza di Coriolis. Sperimentalmente si osserva che il piano di rotazione del pendolo ruota a causa della non inerzialità della Terra.

4.5.2 Trattazione generale

Consideriamo due sistemi di riferimento in moto rototraslatorio relativo. Siano $\{\mathbf{e}_i\}_i^3$ e $\{\mathbf{e}'_i\}_i^3$ i versori dei due sistemi. Ogni vettore di O si scrive come combinazione lineare i cui coefficienti sono le coordinate $\{x_i\}_i^3$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$$

sia x_0 il vettore posizione di O' visto da O :

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^3 x_{0i} \mathbf{e}_i$$

nella base del sistema O' il punto individuato da \mathbf{x} rispetto al sistema O è individuato dal vettore \mathbf{x}' :

$$\mathbf{x}' = \sum_{i=1}^3 x'_i \mathbf{e}'_i$$

La relazione che li lega è:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}' \\
\mathbf{v} &= \frac{d}{dt}\mathbf{x} = \frac{d}{dt}\mathbf{x}_0 + \frac{d}{dt}\mathbf{x}' = \mathbf{v}_0 + \sum_{i=1}^3 \left(\underbrace{\frac{dx'_i}{dt}\mathbf{e}'_i}_{\mathbf{v}'} + x'_i \frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} \right)
\end{aligned}$$

A causa della rotazione il versore del sistema primato ruota, ma il suo modulo non cambia. Dopo un tempo dt avrà fatto un angolo $d\alpha = \omega dt$, quindi per la definizione di angolo $d\alpha = \|\mathbf{de}'_i\|$, ma allora $\left\|\frac{d\mathbf{e}'_i}{dt}\right\| = \omega$. In generale vale:

$$\frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_i$$

quindi:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}'$$

derivando ancora una volta

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx'_i}{dt} \mathbf{e}'_i \right) + \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{x}'}{dt} \\ &= \frac{d^2 x'_i}{dt^2} \mathbf{e}'_i + \frac{dx'_i}{dt} \frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} + \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \left(\mathbf{v}' + x'_i \frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} \right) \\ &= \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}') \\ &= \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0 + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}') - \mathbf{x}'(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) \\ &= \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0 + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - \omega^2 \mathbf{x}' \end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio si è usato $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$. Moltiplicando per m si ottiene:

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0 + m\omega^2 \mathbf{x}' - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (4.6)$$

4.6 Quantità di moto

Definizione 4.1 (quantità di moto di un punto materiale)

$$\mathbf{p} := m\mathbf{v} \quad (4.7)$$

sinonimi di quantità di moto sono: quantità di moto lineare, momento, momento lineare.

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

$$\text{Newton disse: } \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

4.6.1 Sistema di N punti

Definizione 4.2 (quantità di moto di un sistema di N punti) La quantità di moto totale di un sistema di N punti è la somma delle quantità di moto.

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i \quad (4.8)$$

Teorema 4.1 *La variazione della quantità di moto è uguale alle forze esterne*

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N \frac{d(m\mathbf{v}_i)}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i = \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{Est} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{Int} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{Est}\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il terzo principio della dinamica. Si conclude che in un sistema isolato, cioè con $\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{Est}$ vale la legge di conservazione della quantità di moto: $\mathbf{p} = \overrightarrow{const}$.

Esempio 4.3 (carrellini) Due carrellini di massa m e M si urtano frontalmente con velocità iniziali v e V .

$$P_i = P_f = 0 \quad P_f = MV + mv = 0$$

$$MV = mv \quad \frac{V}{v} = \frac{m}{M}$$

Esempio 4.4 (decadimento) L'uranio decade in questo modo:



$$\mathbf{p}_f = m_{\text{Th}} \mathbf{v}_{\text{Th}} + m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{p}_0 = 0$$

$$m_{\text{Th}} v_{\text{Th}} = m_{\alpha} v_{\alpha} \quad v_{\alpha} = 2 \times 10^7 \text{ m/s}$$

$$v_{\text{Th}} = \frac{m_{\alpha} v_{\alpha}}{m_{\text{Th}}} = 3.4 \times 10^5 \text{ m/s}$$

4.7 Centro di Massa

Definizione 4.3 (Centro di massa di N punti)

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i m_i)}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i m_i)}{M} \quad (4.9)$$

$$x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i m_i)}{M} \quad y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i m_i)}{M} \quad z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N (z_i m_i)}{M}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{CM} &= \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{r}_i)}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{v}_i)}{M} \\ M\mathbf{v}_{CM} &= \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{p} \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \frac{d}{dt} M\mathbf{v}_{CM} = M\mathbf{a}_{CM} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{Est}\end{aligned}$$

Teorema 4.2

$$M\mathbf{V}_{CM} = \mathbf{P} \quad M\mathbf{a}_{CM} = \sum \mathbf{F}_i^{Est} \quad (4.10)$$

Se il sistema è isolato $\sum \mathbf{F}^{Est} = 0$

$$M\mathbf{a}_{CM} = 0 \Rightarrow \mathbf{a}_{CM} = 0$$

allora il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme.

4.7.1 Corpo continuo

Definizione 4.4 (Centro di massa per un corpo continuo)

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\int_V \mathbf{r} dm}{M} \quad (4.11)$$

Definizione 4.5 (Densità media)

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (4.12)$$

Definizione 4.6 (Densità locale)

$$\begin{aligned}\rho(x, y, z) &= \frac{dm}{dV} \\ dm &= \rho dV \\ M &= \int_V dm = \int_V \rho dV \\ \mathbf{r}_{CM} &= \frac{\int_V \mathbf{r} dV \rho}{M} = \frac{\int_V \rho \mathbf{r} dV}{\int_V \rho dV}\end{aligned} \quad (4.14)$$

Se la densità è uguale in tutti i punti il centro di massa è solo un fattore geometrico:

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\int_V \mathbf{r} dV}{V}$$

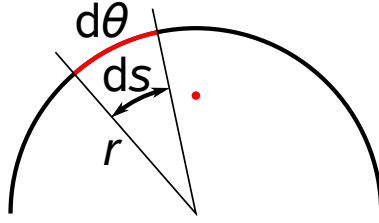


Figura 4.3: Esempio 4.5

Esempio 4.5 (semicirconferenza)

$$x_{CM} = 0 \quad \text{per simmetria}$$

$$\frac{dm}{M} = \frac{ds}{\pi r} \quad ds = r d\theta$$

$$dm = \frac{M ds}{\pi r} = \frac{M r d\theta}{\pi r} = \frac{M d\theta}{\pi}$$

$$y = r \sin \theta$$

$$y_{CM} = \frac{\int y dm}{M} = \frac{r}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = -\frac{r}{\pi} [\cos \theta]_0^\pi = -\frac{r}{\pi} (-1 - 1) = \frac{2r}{\pi}$$

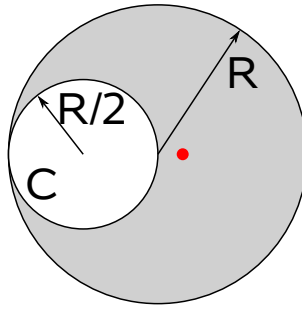


Figura 4.4: Esempio 4.6

Esempio 4.6 (cerchio bucato) Luna è il cerchio grande meno il piccolo (C) di raggio $\frac{r}{2}$ $y_{CM} = 0$ per simmetria

$$M^C = \rho \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \rho \pi \left(r^2 - \frac{r^2}{4}\right) = \frac{3}{4} \rho \pi r^2 \quad M^{\text{luna}} = \rho \left(\pi r^2 - \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2\right)$$

$$x_{CM}^{\text{pieno}} = 0 = \frac{x_{CM}^{\text{luna}} + x_{CM}^C M^C}{M^C + M^{\text{luna}}}$$

$$0 = x_{CM}^{\text{luna}} x_{CM}^C \frac{M^C}{M^{\text{luna}}} = x_{CM}^{\text{luna}} x_{CM}^C \frac{4M^C}{3\rho\pi r^2} = x_{CM}^{\text{luna}} x_{CM}^C \frac{4\rho\pi r^2}{4 \cdot 3\rho\pi r^2} = \frac{x_{CM}^{\text{luna}} x_{CM}^C}{3}$$

$$x_{CM}^{\text{luna}} = 3x_{CM}^C = \frac{R}{6}$$

4.7.2 Teorema di Pappo–Guldino

Teorema 4.3 (Pappo–Guldino) *Il volume generato dalla rotazione di una superficie è uguale all'area della superficie per la distanza percorsa dal centro di massa durante la rotazione.*

Esempio 4.7 (Semicerchio) Il volume generato dalla rotazione del semicerchio è il volume della sfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$, la distanza percorsa dal centro di massa è $2\pi y$ con y l'ordinata del centro di massa, la superficie del semicerchio è $\frac{\pi r^2}{2}$, quindi

$$2\pi y \frac{\pi r^2}{2} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$y = \frac{4}{3\pi}r$$

4.8 Impulso di una forza

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} m \mathbf{a} dt = m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt = m \int_{t_1}^{t_2} d\mathbf{v} \\ &= m [\mathbf{v}(t_2) - \mathbf{v}(t_1)] = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \Delta \mathbf{p} \end{aligned}$$

$$\mathbf{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \Delta \mathbf{p}$$

Se il sistema è isolato con due corpi si ha:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{p}_1 &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{1,2} dt & \Delta \mathbf{p}_2 &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{2,1} dt \\ \Delta \mathbf{p}_1 + \Delta \mathbf{p}_2 &= \int (\mathbf{F}_{1,2} + \mathbf{F}_{2,1}) dt = 0 = \Delta \mathbf{p}_{\text{totale}} \\ \mathbf{p}_{\text{iniziale}} &= \mathbf{p}_{\text{finale}} \end{aligned}$$

dove si è usato terzo principio della dinamica. La conservazione della quantità di moto vale in tutti i sistemi isolati.

4.9 Urti

Gli urti si classificano in elastici ed anelastici. Gli urti reali sono una via intermedia. Negli urti elastici si conserva tutta l'energia cinetica, agiscono solo forze conservative; durante l'urto l'energia cinetica si trasforma in energia potenziale, per poi tornare completamente energia cinetica. La quantità di moto si conserva sempre in quanto non agiscono forze esterne.

4.9.1 Urti elastici

Urti in 1 dimensione

$$\begin{cases} m_1 v_{i,1} + m_2 v_{i,2} = m_1 v_{f,1} + m_2 v_{f,2} & v_{1,f} = ? \\ \frac{1}{2} m_1 v_{i,1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{i,2}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{f,1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{f,2}^2 & v_{2,f} = ? \end{cases}$$

$$v_{1,f} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{i,2} - v_{i,1} \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$$

$$v_{2,f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{i,1} - v_{i,2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

casi limite

1. $m_1 = m_2$

$$v_{f,1} = v_{i,2}$$

$$v_{f,2} = v_{i,1}$$

• $v_{i,2} = 0$

$$v_{f,1} = 0$$

$$v_{f,2} = v_{i,1}$$

2. $m_2 \gg m_1$

$$\frac{m_1}{m_2} \simeq 0$$

$$v_{f,1} = -v_{i,1} + 2v_{i,2}$$

$$v_{f,2} = v_{i,2}$$

• $v_{i,2} = 0$

$$v_{f,1} = -v_{i,1}$$

$$v_{f,2} = v_{i,2} = 0$$

• $v_{i,1} = 0$

$$v_{f,1} = 2v_{i,2}$$

$$v_{f,2} = v_{i,2}$$

Urti in due dimensioni

Due corpi di massa m_1, m_2 , prima dell'urto velocità $\mathbf{v}_{i,2} = 0, \mathbf{v}_{i,1}$, il secondo corpo è fermo, dopo l'urto velocità $\mathbf{v}_{f,1}, \mathbf{v}_{f,2}$.

$$\begin{cases} m_1 \mathbf{v}_{i,1} = m_1 \mathbf{v}_{f,1} + m_2 \mathbf{v}_{f,2} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{i,1}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{f,1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{f,2}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 v_{i,1} = m_1 v_{f,1} \cos \varphi_1 + m_2 v_{f,2} \cos \varphi_2 \\ 0 = m_1 v_{f,1} \sin \varphi_1 - m_2 v_{f,2} \sin \varphi_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_{i,1}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{f,1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{f,2}^2 \end{cases}$$

Il sistema è formato da 3 equazioni, ma da 4 incognite $(\varphi_1, \varphi_2, v_{f,1}, v_{f,2})$, ha ∞^1 soluzioni.

Nel caso particolare di $m_1 = m_2$ si ha:

$$\frac{1}{2} m v_{i,1}^2 = \frac{1}{2} m v_{f,1}^2 + \frac{1}{2} m v_{f,2}^2$$

$$\begin{cases} v_{i,1}^2 = v_{f,1}^2 + v_{f,2}^2 \\ m^2 v_{i,1}^2 = m^2 v_{f,1}^2 + m^2 v_{f,2}^2 + 2m^2 v_{1,f} v_{2,f} \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{i,1}^2 = v_{f,1}^2 + v_{f,2}^2 \\ v_{i,1}^2 = v_{f,1}^2 + v_{f,2}^2 + 2v_{1,f} v_{2,f} \cos \alpha \end{cases}$$

quindi $\cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$, oppure $v_{1,f} = 0$ e $v_{2,f} = v_{1,i}$

4.9.2 Urti completamente anelastici

Negli urti anelastici il sistema perde la massima energia cinetica possibile, che non è tutta in quanto se il sistema perdesse tutta l'energia cinetica violerebbe la conservazione della quantità di moto. Si dimostra che questo caso è quello in cui dopo l'urto i due corpi rimangono attaccati.

Esempio 4.8 (pendolo balistico) Un proiettile di massa m , velocità v urta un pendolo balistico di massa $M > m$ e velocità $V = 0$. Prima dell'urto la quantità di moto totale del sistema è mv , dopo $(M + m)V$.

$$mv = (M + m)V$$

$$V = \frac{mv}{M + m}$$

Dopo l'urto il pendolo balistico, con il proiettile incorporato oscilla come un pendolo, l'energia meccanica si conserva, quindi $K_A = U(B)$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(m+M)V^2 &= (m+M)gh \\
\frac{1}{2}\left(\frac{mv}{M+m}\right)^2 &= (m+M)gh \\
\frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{M+m} &= (m+M)gh \\
v^2 &= \frac{(m+M)gh \cdot 2(m+M)}{m^2} = \frac{2(m+M)^2gh}{m^2} \\
v &= \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}
\end{aligned}$$

Consideriamo un sistema di riferimento * inerziale rispetto al CM con la stessa velocità del CM.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{\text{prima}}^* &= (m+M)\mathbf{V}_{\text{CM}}^* = 0 \\
\mathbf{P}_{\text{dopo}}^* &= 0 \quad \text{sono attaccati} \quad \mathbf{v} = 0
\end{aligned}$$

Quindi tutta l'energia cinetica è persa.

4.10 Momento d'inerzia

Corpo rigido(CR): presi due punti qualsiasi la loro distanza rimane inalterata. Servono tre punti, quindi 9 coordinate, ma le distanze rimangono fisse nel tempo, quindi il corpo ha 6 gradi di libertà. Per descrivere il moto di un corpo bisogna dare 6 coordinate in funzione del tempo. Se fissiamo un asse di rotazione si ha un solo grado di libertà. In questo caso si ha una rotazione intorno ad un asse fisso. Ogni punto del CR descrive una circonferenza. θ è comune a tutti, quindi anche ω e α

$$\begin{aligned}
ds_i &= d\theta r_i \\
v_i &= r_i\omega \quad a_t = \frac{dv_i}{dt} = \alpha r_i \\
K &= \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 \\
K &= \sum_i \frac{1}{2}m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) = \frac{1}{2}I\omega^2
\end{aligned}$$

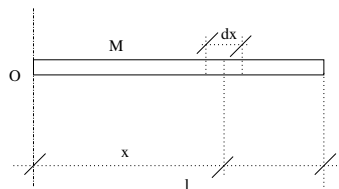
$$I = \text{momento d'inerzia} = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$$

$$\text{Nel caso di corpo continuo } \sum_{i=1}^{\infty} dm_i r_i^2 = \int_V r^2 dm$$

Essendo \mathbf{r} relativo a un punto O allora anche I sarà relativo ad O . Bisogna sempre specificare rispetto quale punto si calcola I .

4.10.1 Calcolo Momenti di Inerzia

Barra Sottile per l'estremo



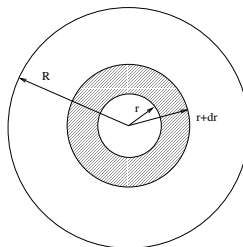
$$\frac{dm}{M} = \frac{dx}{l}$$

$$I_0 = \int_0^l \frac{M}{l} dx x^2 = \frac{M}{l} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{M}{l} \frac{l^3}{3} = \frac{M}{3} l^2$$

Barra sottile per il centro di massa

$$I_c = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{M}{l} dx x^2 = \frac{M}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{M}{3l} \left(\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8} \right) = \frac{M}{12} l^2$$

Disco



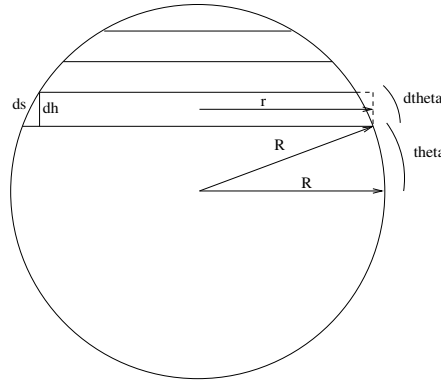
$$\frac{dm}{M} = \frac{2\pi r dr}{\pi R^2}$$

$$dm = M \frac{2dr}{R^2} r$$

$$I_O = \int_0^R \frac{M}{R^2} 2dr r^3 = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} MR^2$$

Sfera omogenea

Dividiamo la sfera in tanti dischetti:



$$r = R \cos \theta \quad ds = R d\theta \quad dh = ds \cos \theta = R d\theta \cos \theta$$

$$dm = \rho dV = \rho \pi r^2 dh = \rho \pi R^2 \cos^2 \theta R \cos \theta d\theta = R^3 \rho \pi \cos^3 \theta d\theta$$

$$I_{\text{dischetto}} = dI = \frac{1}{2} dm r^2 = \frac{1}{2} \rho \pi R^3 \cos^3 \theta d\theta R^2 \cos^2 \theta = \frac{1}{2} \rho \pi R^5 \cos^5 \theta d\theta$$

$$m = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$I_{\text{sfera}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dI = \frac{3}{4} m R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta d\theta = \frac{2}{5} m R^2$$

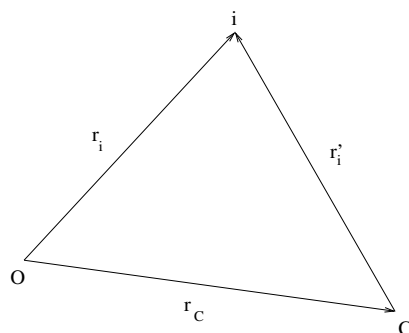
4.10.2 Teorema di Steiner o degli assi paralleli

Teorema 4.4 (Steiner o degli assi paralleli) Sia d la distanza da un asse di rotazione I_0 parallelo all'asse I_{CM} passante per il centro di massa. Allora:

$$I_0 = d^2 M + I_{CM}$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}_i'$$

$$\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i = r_i^2 = (\mathbf{r}_C + \mathbf{r}_i') \cdot (\mathbf{r}_C + \mathbf{r}_i') \Rightarrow r_i^2 = r_C^2 + r_i'^2 + 2\mathbf{r}_C \cdot \mathbf{r}_i'$$



$$\begin{aligned}
 I_0 &= \sum m_i r_i^2 = \sum r_C^2 m_i + \sum r_i'^2 m_i + \sum m_i \cdot 2\mathbf{r}_C \cdot \mathbf{r}_i' \\
 &= r_C^2 \sum m_i + I_C + 2\mathbf{r}_C \cdot \sum m_i \mathbf{r}_i' = d^2 M + I_C + 2\mathbf{r}_C \cdot \sum m_i \mathbf{r}_i'
 \end{aligned}$$

Per ipotesi C è il CM del sistema

$$I_0 = d^2 M + I_{CM} + 2\mathbf{r}_i \cdot \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i'}{M} \cdot M = d^2 M + I_{CM} + 2\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{CM}^M M = d^2 M + I_{CM}$$

Ma $Md^2 > 0$ quindi I_{CM} è il momento minimo possibile.

Esempio 4.9 Il momento d'inerzia di una circonferenza rispetto al centro di massa è $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$, per un estremo è:

$$I_0 = I_{CM} + MR^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2 > I_{CM}$$

4.11 Momento di una forza

Rispetto al polo 0 fisso: $\boldsymbol{\tau}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

$$\delta L = dK \quad d\mathbf{s} = \mathbf{r}d\theta$$

$$\delta L = Fds \cos \phi = Frd\theta \cos \phi$$

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad dK = I\omega d\omega$$

$$Fr d\theta \cos \phi = I\omega d\omega$$

$$Fr \frac{d\theta}{dt} \cos \phi = I\omega \frac{d\omega}{dt}$$

$$Fr\omega \cos \phi = I\omega\alpha$$

$$Fr \cos \phi = I\alpha$$

$$Fr \sin \beta = I\alpha$$

$$\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha} \quad \text{analoga a } \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

4.12 Momento angolare o momento della quantità di moto

$$\mathbf{l}_0 = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad \text{rispetto al polo } 0 \text{ fisso.}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{l}_0}{dt} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{dm\mathbf{v}}{dt} \\ &= \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\mathbf{a} = \mathbf{r} \times m\mathbf{a} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\tau}_0 \end{aligned}$$

$$\frac{d\mathbf{l}_0}{dt} = \boldsymbol{\tau}_0 \quad \text{analoga a} \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

4.12.1 Sistema di N punti

$$\mathbf{L}_0 = \sum_{i=1}^N \mathbf{l}_{0_i}$$

$$\frac{d\mathbf{L}_0}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{l}_{0_i}}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \times m_i \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}$$

Dimostrazione $\boldsymbol{\tau}_0^{\text{Int}} = 0$

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1}$$

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{1,2} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{2,1} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{1,2} - \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{1,2} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{1,2} = 0$$

perché $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \parallel \mathbf{F}_{1,2}$

4.12.2 Conservazione del momento angolare

Se il sistema è isolato si ha: $\mathbf{F}^{\text{Est}} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\tau}^{\text{Est}} = 0$

$$\frac{d\mathbf{L}_0}{dt} = \boldsymbol{\tau}_0 = 0 \quad \mathbf{L}_0 = \overrightarrow{\text{const}}$$

e quindi $I\omega = \text{const.}$ Tutto ciò per la simmetria per rotazioni.

4.12.3 Rotazione intorno a O' mobile

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{O'} + \mathbf{r}_i' \quad \mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{O'}$$

$$L_{O'} = \sum \mathbf{r}_i' \times m\mathbf{v}_i = \sum (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{O'}) \times m\mathbf{v}_i$$

$$\begin{aligned} \frac{dL_{O'}}{dt} &= \sum (v_i - v_{O'}) \times m\mathbf{v}_i + \mathbf{r}_i' m\mathbf{a}_i = - \sum \mathbf{v}_{O'} \times m_i\mathbf{v}_i + \sum \mathbf{r}_i' \times \mathbf{F}_i \\ &= \mathbf{v}_{O'} \times \sum m_i\mathbf{v}_i + \boldsymbol{\tau}_{O'} = -\mathbf{v}_{O'} \times \mathbf{P} + \frac{\text{Est}}{\tau_{O'}} \end{aligned}$$

$$\frac{dL_O}{dt} = -\mathbf{v}_{O'} \times \mathbf{P} + \frac{\text{Est}}{\tau_{O'}}$$

se $v_{O'} = 0$ allora $-\mathbf{v}_{O'} \times \mathbf{P} = 0$

se $O' = CM$ allora $M\mathbf{V}_{CM} = \mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{v}_{CM} \parallel \mathbf{P} \Rightarrow -\mathbf{v}_O \times \mathbf{P} = 0$

4.12.4 Rotazione intorno ad un asse

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i$$

$$l_{iz} = |\mathbf{l}_i| \sin \theta_i$$

$$|\mathbf{l}_i| = r_i m_i v_i \quad l_{iz} = r_i m_i v_i \sin \theta_i \quad \omega d_i = v_i$$

$$l_{iz} = m_i d_i \omega d_i = m d_i^2 \omega$$

$$l_{iz} = m_i \omega R_i^2$$

$$L_z = \sum l_{iz} = \sum (m_i d_i^2) \omega = I \omega$$

$$L_z = I \omega$$

$$\frac{dl_{iz}}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I \alpha \quad \frac{\text{Est}}{\tau_z} = I \alpha$$

4.12.5 Corpo simmetrico rispetto all'asse di rotazione

$$\mathbf{l}_i + \mathbf{l}_{i'} = \alpha \mathbf{k}$$

$$L = I \omega = L_z$$

4.13 Analogia tra grandezze lineari e rotazionali

Grandezze lineari		Grandezze rotazionali	
velocità	$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$	velocità angolare	$\boldsymbol{\omega} = d\phi/dt$
Accelerazione	$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$	Accelerazione angolare	$\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$
Massa	m	Momento d'inerzia	$I = \sum mr^2$
Forza	\mathbf{F}	Momento di una forza	$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
Seconda legge di Newton	$\sum \mathbf{F}^{\text{Est}} = m\mathbf{a}$	Seconda legge di Newton per moto rotatori con asse fisso	$\sum \boldsymbol{\tau}_z^{\text{Est}} = I\alpha_z$
Condizione di equilibrio	$\sum \mathbf{F}^{\text{Est}} = 0$	Condizione di equilibrio	$\sum \boldsymbol{\tau}^{\text{Est}} = 0$
quantità di moto di una particella	$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$	Momento angolare di una particella	$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$
quantità di moto di un sistema di particelle	$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{CM}$	Momento angolare di un sistema di particelle	$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$
Forma generale della seconda legge di Newton	$\sum \mathbf{F}^{\text{Est}} = d\mathbf{P}/dt$	Forma generale della seconda legge di Newton per i moti rotatori	$\sum \boldsymbol{\tau}^{\text{Est}} = d\mathbf{L}/dt$
Conservazione della quantità di moto di un sistema di particelle per il quale $\sum \mathbf{F}^{\text{Est}} = 0$	$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}_n = \text{const}$	Conservazione del momento angolare di un sistema di particelle per il quale $\sum \boldsymbol{\tau}^{\text{Est}} = 0$	$\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_n = \text{const}$

5

Lavoro ed energia

5.1 Lavoro definizione

Il lavoro è una grandezza scalare. Distinguiamo i seguenti casi particolari:

- a) Forza costante e parallela allo spostamento

$$L = F s$$

- b) Forza costante non parallela allo spostamento

$$L = F s \cos \alpha = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$$

- c) Forza parallela ma variabile

$$L = \int_A^B F(x) dx$$

- d) Forza variabile, traiettoria qualsiasi (caso generale)

$$\delta L = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

$$L = \int_A^B \delta L \text{ curvilineo}$$

Definizione 5.1 (lavoro) Definiamo lavoro L fatto dalla \mathbf{F} sul punto P lungo il percorso Γ l'integrale su Γ della forma differenziale $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$:

$$L = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (5.1)$$

Esempio 5.1 (attrito costante su traiettoria semicircolare)

$$\begin{aligned} F_A = \mu N = \mu mg \quad \delta L = \mathbf{F}_A \cdot d\mathbf{s} = -\mu mg ds \\ L = \int_A^B \delta L = \int_A^B -\mu mg ds = -\mu mg \int_A^B ds = -\mu mg \pi R \end{aligned}$$

5.1.1 Lavoro nei moti rotatori

Corpo rigido ruotante attorno ad un asse. ds lo spostamento infinitesimale corrispondete a $d\theta$, ϕ l'angolo compreso tra la forza e il vettore \mathbf{r} :

$$\begin{aligned} \delta L = (F \sin \phi) ds = (F \sin \phi)(r d\theta) = (r F \sin \phi) d\theta = \tau_z d\theta \\ L = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau_z d\theta \end{aligned}$$

Se durante la rotazione il momento torcente resta costante, il lavoro svolto da questo momento torcente è:

$$L = \tau_z \theta$$

5.2 Potenza

Definizione 5.2 (potenza)

$$P = \frac{dL}{dt}$$

La potenza si misura nell'SI in J/s cioè W(watt).

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

5.2.1 Potenza nei moti rotatori

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{\tau_z d\theta}{dt} = \tau_z \omega$$

5.3 Energia Cinetica

Definizione 5.3 (energia cinetica)

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

A volte indicata con T .

5.3.1 Teorema lavoro–energia

$$\delta L = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt} dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = m\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} dt = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = m\mathbf{v} d\mathbf{v} = mv dv$$

$$dK = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = d\left(\frac{1}{2}mvv\right) = \frac{1}{2}m(dvv + vdv) = \frac{1}{2}m2v dv = mv dv$$

$$\delta L = dK \quad \int_A^B \delta L = \int_A^B dK$$

Teorema 5.1 (lavoro–energia)

$$L = K_B - K_A = \Delta K$$

Il lavoro è allora la variazione dell'energia cinetica

5.4 Complementi – Funzioni in due variabili

$$z = f(x, y)$$

derivata parziale:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dx} \text{ considerando } y \text{ costante}$$

derivate seconde parziali:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Teorema 5.2 (Shwartz) *Sotto opportune ipotesi¹ le derivate seconde parziali incrociate sono uguali:*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Definizione 5.4 (Forma differenziale lineare)

$$\delta G = H(x, y)dx + K(x, y)dy$$

Definizione 5.5 (Differenziale totale o esatto)

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

è una forma differenziale lineare.

Teorema 5.3 *Una forma differenziale lineare è un differenziale esatto se e solo se:*

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial K}{\partial x}$$

Il lavoro elementare è una forma differenziale lineare:

$$\delta L = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_x dx + F_y dy = F_x(x, y)dx + F_y(x, y)dy$$

$$L_A^B = \int_A^B \delta L = \int_A^B F_x(x, y)dx + F_y(x, y)dy$$

$$\text{se } \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \Rightarrow \delta L = \text{differenziale totale}$$

$$\delta L = dL = dV$$

Allora si avrà, qualunque sia il cammino percorso:

$$L_A^B = \int_A^B dV = V(B) - V(A)$$

e la forza si dice conservativa.

$$F_x(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} \quad F_y(x, y) = \frac{\partial V}{\partial y}$$

In termini sintetici:

$$\mathbf{F} = \nabla V$$

Per dettagli sull'operatore gradiente vedi sezione 2.3 a pagina 10.

¹Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che le derivate parziali miste $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ esistano in un intorno $a \in \Omega$ e siano continue in a . Allora esse sono uguali in a

5.4.1 Circuitazione di una forza

È il lavoro calcolato su una traiettoria chiusa

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \text{se la forza è conservativa}$$

5.5 Energia Potenziale

$$U = -V$$

$$L_A^B = U(A) - U(B) = -\Delta U$$

Considerando l'energia potenziale in 0 nulla si ha²:

$$L_0^P = U(0) - U(P) = 0 - U(P)$$

$$U(P) = -L_0^P = - \int_0^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\mathbf{F} = -\nabla U$$

5.5.1 Conservazione dell'energia meccanica

Definizione 5.6 (Energia meccanica) L'energia meccanica è la somma di energia cinetica e energia potenziale.

Teorema 5.4 (Conservazione energia meccanica) *Considerando solo forze conservative:*

$$L_A^B = U_A - U_B \quad L_A^B = K_B - K_A$$

$$U_A + K_A = U_B + K_B$$

$$U(P) + K = E = \text{const}$$

Per verificare se una forza è conservativa:

1.

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

se sì allora è conservativa, se no non lo è

²c'è molta confusione sulle notazioni, frequentemente quello che qui è chiamato V è chiamato U e l'energia potenziale U è chiamata V

2.

$$U(0) = 0 \quad L_0^P = U(0) - U(P) = -U(P)$$

$$U(P) = - \int_0^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

3. Verifica

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -F_x \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -F_y$$

Esempio 5.2 (Forza peso $F_x = 0$ $F_y = mg$) 1. $\frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_y}{\partial x}$

$$2. U(P) = - \int_0^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^P F_x dx + F_y dy = \int_0^P mg dy = mgy$$

$$3. \frac{\partial U}{\partial x} = 0 = -F_x \quad \frac{\partial U}{\partial y} = mg = -F_y$$

Esempio 5.3 (Forza elastica $F_x = -kx$ $F_y = -ky$) 1. $\frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_y}{\partial x}$

$$2. U(P) = - \int_0^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \left(\int_0^P F_x dx + \int_0^P F_y dy \right) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 = \frac{1}{2}kr^2$$

$$3. \frac{\partial U}{\partial x} = kx = -F_x \quad \frac{\partial U}{\partial y} = ky = -F_y$$

Esempio 5.4 (Forza gravitazionale $\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}$ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) 1.

$$F_x = \frac{-GMm}{r^3} x = -GMm x (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$F_y = \frac{-GMm}{r^3} y = -GMm y (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = GmMx \frac{3}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{5}{2}} 2y = \frac{\partial F_y}{\partial x} = GmMy \frac{3}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{5}{2}} 2x$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \Rightarrow \text{è conservativa}$$

2.

$$U(\infty) = 0$$

$$U(P) = - \int_{\infty}^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_P^{\infty} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_P^{\infty} -\frac{GMm}{r^2} dr = \left[\frac{GMm}{r} \right]_r^{\infty} = -\frac{GMm}{r}$$

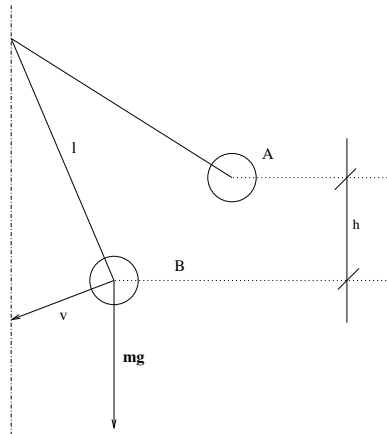
Calcolo della velocità di fugaconservazione dell'energia: $E_A = E_B$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \left(\frac{-GMm}{r}\right) = \frac{1}{2}mv_\infty^2 + 0 \geq 0$$

Caso limite all' ∞ arriva fermo $v_\infty = 0$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r} = 0$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2Rg} \simeq 11 \times 10^3 \text{ m/s} \quad \text{dalla Terra}$$

Applicazione dell'energia a pendoliAngoli non piccoli, $\mathbf{T} \perp \mathbf{v}$ $\mathbf{T} \perp d\mathbf{s}$

$$\delta L = \mathbf{T} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

$$U = mgh \quad K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$mgh + \frac{1}{2}mv^2 = E = \text{const}$$

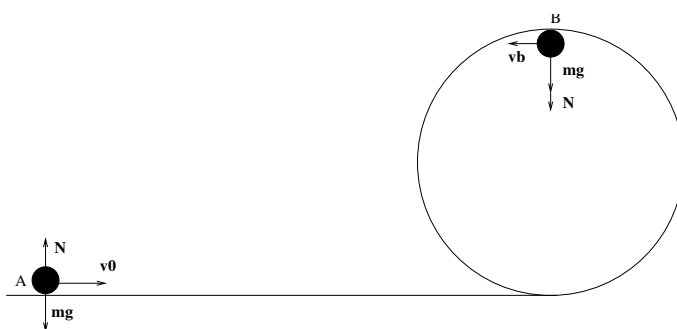
A θ_0 si trova nella posizione A $K_A = 0$

$$E_A = 0 + mgh$$

In B $K_B \neq 0$ $E_B = K + mgh_B$

$$h = l - l \cos \theta$$

$$\begin{aligned}
 E_A &= mg(l - l \cos \theta_0) \\
 E_B &= \frac{1}{2}mv^2 + mg(l - l \cos \theta) \\
 E_A &= E_B \\
 mgl(1 - \cos \theta_0) &= \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1 - \cos \theta) \\
 v^2 &= 2gl(\cos \theta - \cos \theta_0)
 \end{aligned}$$



Esempio 5.5 (arriva in alto?) La N non compie lavoro perché $\mathbf{N} \perp d\mathbf{s}$

$$\begin{aligned}
 E_A &= \frac{1}{2}mv_0^2 & E_B &= \frac{1}{2}mv_B^2 + mg2R \\
 E_A &= E_B & E_A &= \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg2R \\
 v_0^2 &= v_B^2 + 4gR
 \end{aligned}$$

Quando è in B

$$mg + N = m\frac{v_B^2}{R} \quad N = m\frac{v_B^2}{R} - mg \quad \text{per non cadere: } N \geq 0$$

$$m\frac{v_B^2}{R} \geq mg \quad v_B^2 \geq gR$$

$$v_{B\min}^2 = gR \quad v_{0\min}^2 = gR + 4gR \quad v_{0\min} = \sqrt{5gR}$$

6

Gravitazione

6.1 Cenni storici

I sistemi gravitazionali storici più celebri sono stati:

- sistema tolemaico. È un sistema geocentrico del II sec. d.C. Per ovviare ad alcuni errori, senza uscire dal dogma delle orbite circolari, Tolomeo suppose che i pianeti descrivessero degli epicili
- sistema copernicano. È un sistema eliocentrico del 1500 d.C.
- sistema ticonico di T.Brahe. È un sistema misto tra il sistema eliocentrico e geocentrico

Newton verso il 1665 teorizzò che le leggi celesti sono uguali a quelle terrestri: è una delle prime unificazioni di forze ritenute inizialmente diverse in un'unica forza.

6.1.1 Leggi di Keplero

Le leggi di Keplero sono leggi empiriche, formulate prima delle teorie di Newton:

Legge 6.1 (Prima legge di Keplero) *I pianeti descrivono intorno al Sole orbite ellittiche di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.*

Legge 6.2 (Seconda legge di Keplero) *Le aree descritte dal raggio vettore tracciato dal Sole ai pianeti sono proporzionali al periodo.*

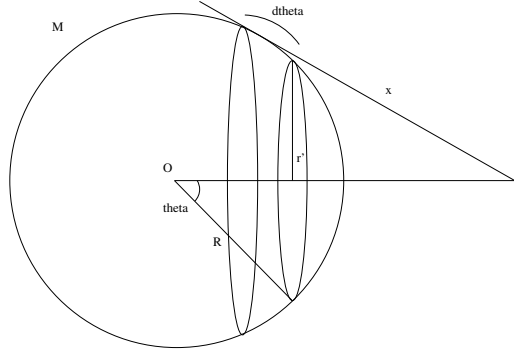
Legge 6.3 (Terza legge di Keplero) *I quadrati dei tempi impiegati dai pianeti a descrivere le proprie orbite sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle ellissi.*

6.2 Teorema di Gauss (per la gravità)

Con il teorema di Gauss si può supporre che gli effetti della gravità di un corpo su un altro, al suo esterno, siano uguali a quelli che si avrebbero se le masse fossero concentrate nel centro di massa.

6.2.1 Caso crosta sferica

dA è l'area compresa tra le due sezioni.



$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$r' = R \sin \theta \quad dA = 2\pi r' R d\theta$$

$$\frac{dm}{M} = \frac{dA}{4\pi R^2} = \frac{2\pi r' R d\theta}{4\pi R^2} = \frac{R \sin \theta d\theta}{2R} = \frac{\sin \theta d\theta}{2}$$

$$dm = \frac{M \sin \theta d\theta}{2}$$

$$U = -\frac{Gmm'}{r} \quad dU = -\frac{Gdmm'}{x}$$

$$x^2 = R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta$$

Derivando a sinistra in x e a destra in θ si ha:

$$2x \, dx = 2rR \sin \theta \, d\theta \sin \theta \, d\theta$$

$$\sin \theta \, d\theta = \frac{x \, dx}{rR}$$

$$\begin{aligned} U &= - \int_{\text{palla}} \frac{Gm'}{x} \, dm = - \int_{\text{palla}} \frac{Gm'}{x} \frac{M \sin \theta \, d\theta}{2} = - \frac{Gm'm}{2} \int_{\text{palla}} \frac{\sin \theta}{x} \, d\theta \\ &= - \frac{Gmm'}{2rR} \int \frac{x}{x} \, dx = - \frac{Gmm'}{2rR} \int_{r-R}^{r+R} dx = - \frac{Gmm'}{2rR} [r + R - r + r] \\ &= - \frac{Gmm'}{2rR} 2R = - \frac{Gmm'}{r} \end{aligned}$$

Possiamo quindi concentrare tutta la massa nel centro della palla (se P sta fuori). Se P è esterno:

$$U = - \frac{Gmm'}{r} \quad F = - \frac{dU}{dr} = \frac{Gmm'}{r^2}$$

Se P è interno vale il discorso precedente fino alla scelta degli estremi:

$$\begin{aligned} U(P) &= - \frac{Gmm'}{2rR} \int_{R-r}^{r+R} dx = - \frac{Gmm'}{2rR} [r + R - R + r] \\ &= - \frac{Gmm'}{2rR} 2r = - \frac{Gmm^2}{R} = \text{const} \\ \mathbf{F} &= - \frac{dU}{d\mathbf{r}} = 0 \end{aligned}$$

Quindi un punto all'interno del guscio non risente di alcuna forza, questo lo si può dimostrare ragionando con i coni, in quanto per ogni cono le forze sono uguali.

6.2.2 Caso sfera piena

All'esterno:

$$F = -G \frac{Mm'}{r^2}$$

Dentro:

$$F = -G \frac{M^{\text{int}} m'}{r^2}$$

$$\frac{M^{\text{int}}}{M^{\text{tot}}} = \frac{V^{\text{int}}}{V^{\text{tot}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^2 \rho}{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}$$

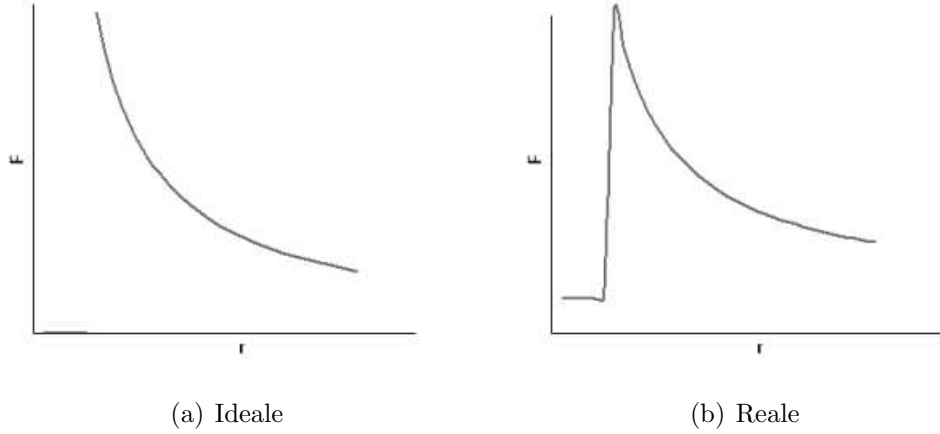


Figura 6.1: Forza in una sfera cava ideale (a) e reale (b)

$$M^{\text{int}} = \frac{r^3}{R^3} M^{\text{tot}}$$

$$F = -\frac{Gr^3 M^{\text{tot}} m'}{r^2 R^3} = -\frac{Gmm'r}{R^3} = -kr$$

ha l'espressione di una forza elastica.

Esempio 6.1 (posta pneumatica interterrestre) Immaginiamo di fare un buco che attraversa tutta la terra, passando per il centro. Un pacco lanciato al suo interno sarebbe sottoposto ad una forza del tipo:

$$F = -kr \quad k = \left(G \frac{m' M_T}{R_T^3} \right)$$

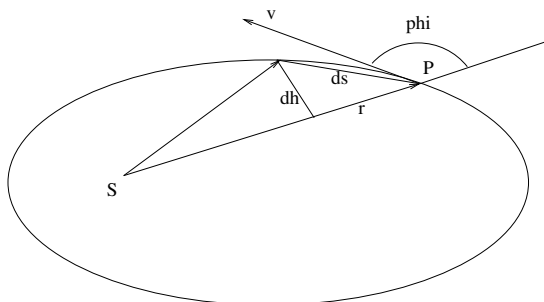
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m'}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_T^3}{GM_T}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_T}{g}} \simeq 40 \text{ min}$$

6.3 Interpretazione delle leggi di Keplero

6.3.1 Seconda legge

L'unica ipotesi che utilizziamo è che la forza sia centrale, quindi il risultato è estendibile a tutte le forze centrali. Una forza si dice centrale quando è diretta come la congiungente dei due punti che interagiscono.

$$\frac{d\mathbf{L}_S}{dt} = \boldsymbol{\tau}_S = 0 \quad \text{perché } \mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$$



$$\mathbf{L}_S = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \overrightarrow{\text{const}}$$

$$L_S = rmv \sin \phi = \text{const}$$

$$dh = ds \sin \phi$$

$$\text{velocità areolare} = \frac{dA}{dt} = \frac{r dh}{2dt} = \frac{r \sin \phi ds}{2dt} = \frac{r}{2} v \sin \phi$$

$$L_S = \frac{dA}{dt} 2m \quad \frac{dA}{dt} = \frac{L_S}{2m} = \text{const}$$

6.3.2 Terza legge

$$F = \frac{GM_S m}{R^2} = ma = \frac{mv^2}{R} = \omega^2 R m$$

$$\frac{GM_S}{R^2} = \omega^2 R \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{GM_S}{R^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} R \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_S} R^3$$

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} = \text{const}$$

6.4 Accelerazione di gravità

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

Sulla Terra:

$$g = \frac{G \frac{M_T m}{R_T^2}}{m} = \frac{GM_T}{R_T^2} \simeq 9.836 \text{ m/s}^2$$

In realtà questo valore è variabile, dall'equatore ai poli, cioè circa tra $9.78 \div 9.86$, a causa della forza centrifuga e dallo schiacciamento dei poli. Per quanto

riguarda la forza centrifuga questa è nulla ai poli e massima all'equatore quindi:

$$F_C = m\omega^2 R \quad F_N = mg_{\text{polo}}$$

$$\frac{F_C}{F_N} = \frac{\omega^2 R}{g_{\text{polo}}} = \frac{(2\pi)^2}{T^2} \frac{R}{g_{\text{polo}}}$$

6.5 Misurazione della costante di gravitazione universale

Cavendish con l'articolo "Misura della massa terrestre" nel 1798 è il primo a misurare la costante di gravitazione universale o costante di Cavendish. Cavendish si proponeva di misurare la massa terrestre e quindi indirettamente G .

La bilancia di torsione viene fatta oscillare, il momento è proporzionale all'angolo di scostamento dalla posizione di equilibrio, si genera un moto armonico.

$$\tau = -k\theta = I\alpha \quad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$-k\theta = I\ddot{\theta} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \quad I = 2mD^2$$

Da qui sperimentalmente si trova k . Avvicinando delle masse più grosse si genera un momento dovuto alla forza gravitazionale. Si impone che il momento gravitazionale sia uguale al momento dovuto alla forza elastica di richiamo.

$$\tau_{\text{Newton}} = 2\frac{GMm}{d^2}D = \tau_{\text{torsione}} = k\theta$$

$$G = \frac{k\theta d^2}{2MmD}$$

6.6 Massa gravitazione e massa inerziale

Per massa inerziale si intende quella grandezza usata in dinamica per esempio $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Per massa gravitazionale si intende quella usata nella gravitazione per esempio $F = G\frac{Mm}{r^2}$. Anche se la questione è aperta m_i è proporzionale a m_g infatti se B e C sono attratti da A si ha:

$$\frac{F_{BA}}{F_{CA}} = \frac{Gm_{Bg}m_{ag}}{Gm_{Cg}m_{ag}} = \frac{m_{Bg}}{m_{Cg}} = \frac{m_{Bi}a_b}{m_{Ci}a_c}$$

$$\text{se } a_C = a_B \Rightarrow \frac{m_{Bg}}{m_{Cg}} = \frac{m_{Bi}}{m_{Ci}} \Rightarrow m_{Bg} = \frac{m_{Cg}}{m_{Ci}} \cdot m_{Bi}$$

6.7 Principio di equivalenza

Principio 6.1 (equivalenza di Einstein) *nessun esperimento può rivelare la differenza tra un sistema di riferimento inerziale immerso in un campo gravitazionale \mathbf{j} e un sistema non inerziale con accelerazione costante $\mathbf{a} = -\mathbf{j}$*

6.8 Energia associata ad un'orbita

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r^2} = -G\frac{Mm}{2a}$$

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

$$p = \frac{L^2}{m\alpha}$$

$$\alpha = GMm$$

$$e = \text{eцентricità} = \sqrt{1 + 2\frac{EL^2}{m\alpha}}$$

$e > 1$	$E > 0$	iperbole
$e = 1$	$E = 0$	parabola
$0 < e < 1$	$E < 0$	ellisse
$e = 0$	$E < 0$	circonferenza

7

Meccanica dei fluidi

Un fluido è un liquido o un gas. La meccanica dei fluidi applica le leggi della meccanica classica ai fluidi descrivendo tutto in termini di pressione, volume, portata.

7.1 Fluidostatica

7.1.1 Pressione e densità

La pressione è la forza sull'unità di superficie: $p = \frac{d|\mathbf{F}|}{dA}$. È una grandezza scalare, infatti la forza agisce sempre perpendicolarmente alla superficie. Se avesse una componente tangenziale il fluido si muoverebbe e non parleremmo più di fluidostatica. Un'altro modo analogo usando il vettore normale è

Definizione 7.1 (pressione)

$$p = \frac{d\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}}{dA} \quad (7.1)$$

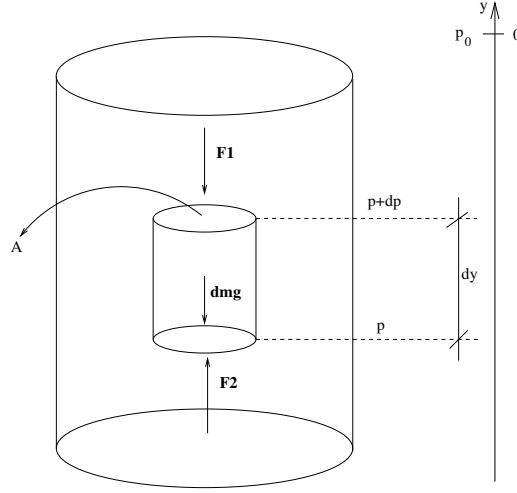
La pressione si misura in: $\text{N/m}^2 = \text{Pa}$ (pascal), che però è usualmente piccola, comuni sono anche: $\text{bar} = 10^5 \text{ Pa}$, $\text{Atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$, $\text{torr} = \text{mmHg} = 1/760 \text{ Atm}$.

Definizione 7.2 (densità (locale))

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{dm}{dV} \quad (7.2)$$

si misura in kg/m^3 .

7.1.2 Legge di Stevino



Il fluido è in equilibrio quindi $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + d\mathbf{m}\mathbf{g} = 0$. \mathbf{F}_1 è la forza dovuta alla pressione della parte superiore del fluido, \mathbf{F}_2 a quella inferiore.

$$-dmg - (p + dp)A + pA = 0 \quad -dmg - dpA = 0$$

$$dm = \rho dV = \rho A dy \quad -\rho A dy g - dpA = 0$$

$$dp = -\rho g dy$$

p_0 = pressione atmosferica

$$\text{Integrando: } \int_{p_0}^p dp = - \int_0^h \rho g dy = -\rho g \int_0^h dy$$

$$p = p_0 - \rho gh$$

che è la legge di Stevino¹, valida se considereremo la densità costante, come per esempio in un liquido, per un gas ciò non è più possibile quindi ipotizziamo che

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} \Rightarrow \rho = \rho_0 \frac{p}{p_0}$$

$$dp = -\rho_0 \frac{p}{p_0} g dy \quad \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \int_0^y -\rho_0 \frac{g}{p_0} dy$$

¹notare che h in figura è sempre negativo, quindi se invertiamo l'asse la legge diventa $p = p_0 + \rho gh$

$$\log p - \log p_0 = \log \frac{p}{p_0} = -\rho_0 \frac{g}{p_0} y$$

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} y} \quad (7.3)$$

$$p = p_0 e^{-\frac{y}{\lambda}} \quad \lambda = \frac{p_0}{\rho_0 g} \quad \text{è una lunghezza}$$

che è la legge dell'atmosfera.

7.1.3 Legge dei vasi comunicanti

Nel tubo a U (fig. 7.1) sono introdotti due liquidi non miscibili 1 e 2. Sotto ad A e B c'è solo il fluido 2. A e B sono alla stessa altezza, quindi per la legge di Stevino:

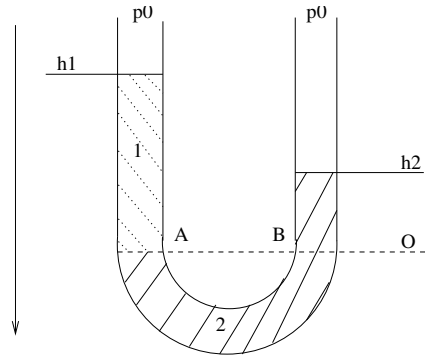


Figura 7.1: Vasi comunicanti

$$p_A = p_B \quad p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2$$

$$\text{legge dei vasi comunicanti: } \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1}$$

in particolare se $\rho_1 = \rho_2$ allora $h_1 = h_2$.

7.1.4 Esperimento di Torricelli 1664

L'esperimento (fig. 7.2) consiste nel riempire fino all'orlo un cilindro di mercurio e di rovesciarlo, senza far uscire il liquido, in una bacinella in cui c'è già del mercurio. Il livello del mercurio scende nel cilindro fino al livello di 0.76 m.

Il punto A e il punto B sono allo stesso livello, quindi: $p_A = p_B$

$$p_A = p_0 \quad p_B = \rho_{Hg} g h \quad p_0 = \rho_{Hg} g h = 1 \text{ Atm}$$

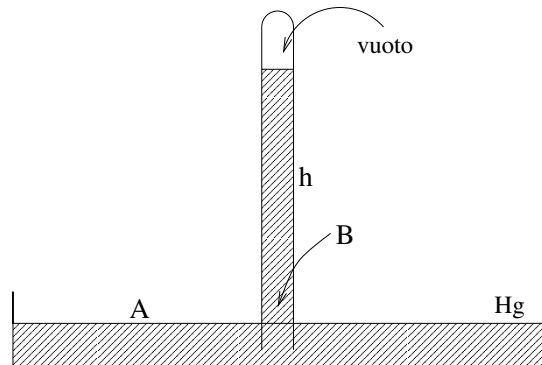


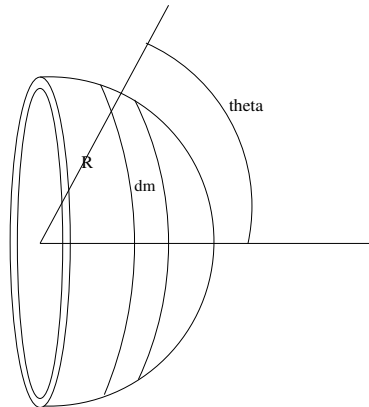
Figura 7.2: Esperimento di Torricelli

Si misura in questo modo la pressione atmosferica, in mmHg.

L'esperimento di Torricelli suscitò clamore perché Torricelli suppose che nella zona superiore del tubo ci “fosse” del vuoto.

7.1.5 Esperimento delle due semisfere

In due semisfere attaccate in modo da creare una sfera unica viene diminuita la pressione togliendo aria. In questo modo la pressione esterna è maggiore ed esercita una forza sulle pareti delle semisfere, rendendo difficile la separazione.



Consideriamo la strisciolina dm

$$F = \int dF$$

$$dA = 2\pi R \sin \theta R d\theta = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$$

$$dF_x = p_0 2\pi R^2 \sin \theta d\theta \cos \theta$$

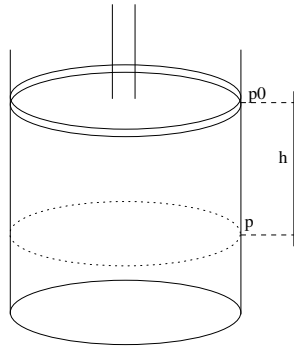
$$\frac{d \sin \theta}{d\theta} = \cos \theta \quad d \sin \theta = \cos \theta d\theta$$

$$\int_S dF_x = p_0 2\pi R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta = p_0 2\pi R^2 \int_0^1 \sin \theta d(\sin \theta) = p_0 \pi R^2$$

$$\text{se } R = 1 \text{ m} \quad F_x = 3.14 \times 10^5 \text{ N}$$

7.1.6 Principio di Pascal

Consideriamo un cilindro con un pistone che non esercita pressione.



Se applichiamo una forza sul pistone la pressione esterna, al livello del pistone, salirà da p_0 a $p_0 + p'_0$

Prima: $p = p_0 + \rho gh$

Dopo: $p = p_0 + p'_0 + \rho gh = p + p'_0$

cioè la variazione di pressione si trasmette in tutti i punti del fluido.

Paradosso di Pascal

Pascal si divertiva a rompere le botti infilandogli un tubo molto lungo, anche di sezione sottile, in quanto la sezione non conta, pieno d'acqua. La pressione faceva rompere le botti.

7.1.7 Principio di Archimede

Consideriamo un elemento di un fluido. Su di esso agisce la forza peso, perché sia in equilibrio deve agire una forza uguale e contraria: la spinta di Archimede $\mathbf{S} = -\rho V \mathbf{g}$. Essa è dovuta alla differenza di pressione Δp . Se sostituiamo l'elemento di fluido con un solido il contorno non cambia e quindi la spinta di Archimede risulta uguale. Il peso però è cambiato, quindi

in generale non è in equilibrio. Se $P > S$ cioè $\rho_{\text{solido}} > \rho_{\text{liquido}}$ sprofonda, altrimenti il corpo sale e bisogna considerare che una parte di questo emergerà e allora la spinta di Archimede diminuirà. La condizione di equilibri in questo caso è $V_{\text{immerso}} = V_t \frac{\rho_s}{\rho_l}$

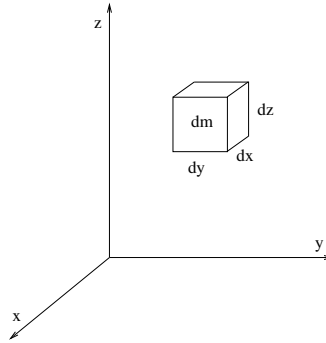
ecco quello che dico-
no i nostri matematici

Esempio 7.1 (Iceberg) Ghiaccio in acqua \implies si scioglie

$$V_{\text{totale}} - V_{\text{emergente}} = V_{\text{totale}} \frac{\rho_{\text{ghiaccio}}}{\rho_{\text{acqua}}}$$

$$V_{\text{totale}} \simeq 10V_{\text{emergente}}$$

7.1.8 Condizione generale di equilibrio



Forze di volume: proporzionali al volume

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

notare che \mathbf{f} è un'accelerazione.

Forze di superficie: dovute al liquido che lo circonda, proporzionali alla superficie

$$F = pA$$

Lungo l'asse x :

$$f_x dm + p(x) dz dy - p(x + dx) dy dz = 0$$

$$f_x \rho dx dy dz + p(x) dy dz - (p(x) + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy dz = 0$$

$$f_x \rho dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = 0$$

$$f_x \rho = \frac{\partial p}{\partial x} \quad f_y \rho = \frac{\partial p}{\partial y} \quad f_z \rho = \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\mathbf{f} \rho = \nabla p$$

Stevino

Nelle ipotesi di Stevino c'è solo il peso, quindi $\mathbf{f} = \mathbf{g}$

$$f_z \rho = \frac{dp_z}{dz} \quad g \rho dz = dp$$

Superfici isobariche

$$U_m = \frac{U}{m} \quad \rho \mathbf{f} = -\rho \nabla(U_m) = \nabla p \quad -\nabla(\rho U_m) = \nabla p$$

$$\rho U_m = -p + \text{const}$$

Segue che le superficie isobariche coincidono con le superfici equipotenziali. Nel caso agisca solo la forza peso esse sono dei piani orizzontali.

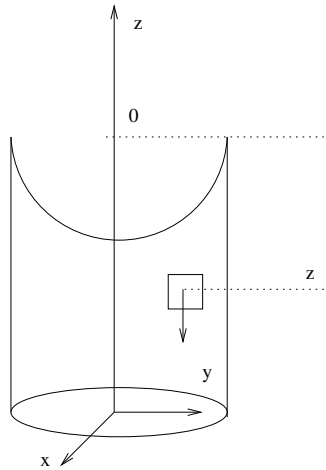
7.1.9 Fluido in rotazione

Figura 7.3: Elemento di un fluido in rotazione

Per lavorare in un sistema inerziale aggiungiamo la forza fittizia $m\omega^2 r$, r è la distanza dal centro generica, nel nostro caso R è la distanza dell'elemento dm dall'asse.

Nella direzione radiale $f_r = \omega^2 r$

$$f_r \rho = \rho \omega^2 y = \frac{dp}{dr} \quad dp = \rho \omega^2 y dr$$

$$\int_{p_{\text{asse}}}^p dp = \int_0^R \rho \omega^2 y dr$$

$$p - p_{asse} = \rho\omega^2 \frac{R^2}{2} \quad p = p_{asse} + \frac{\rho\omega^2}{2} R^2$$

$$p_{asse} = p_0 - \rho g z \quad p = p_0 - \rho g z + \frac{\rho\omega^2}{2} R^2$$

Su una superficie isobarica $p = \text{const}$, $p_0 = \text{const}$

$$\rho g z = \text{const} + \frac{\rho\omega^2}{2} R^2$$

$$z = \text{const} + \frac{\rho\omega^2}{2\rho g} R^2 = \text{const} + \frac{\omega^2}{2g} R^2 = \text{const} + \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2)$$

È un paraboloide:

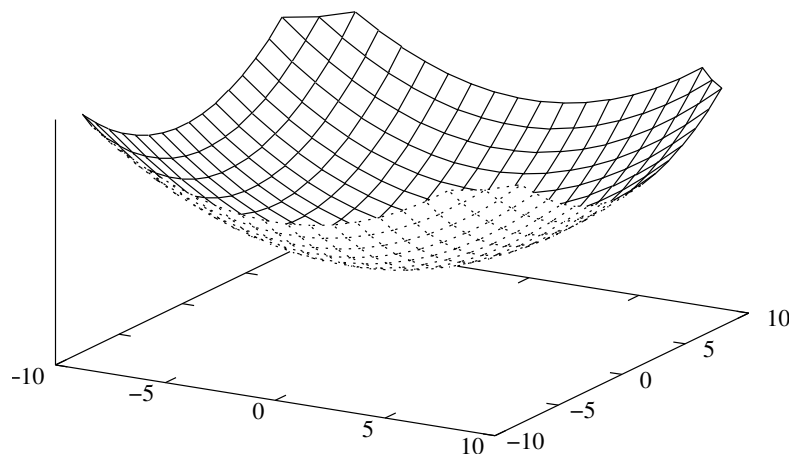


Figura 7.4: Paraboloide

Archimede per le rotazioni

se $\rho_s > \rho_f$ il corpo si muove verso l'esterno.

7.2 Dinamica dei fluidi

Approccio di Lagrange: si danno le coordinate x di un elemento di flusso in funzione del tempo, è un metodo di analisi complicato.

Approccio di Eulero: si studiano le caratteristiche del fluido in un determinato punto. Ci mettiamo in un punto dello spazio e vediamo come variano le grandezze in funzione del tempo. Per descrivere in modo completo bisogna ripetere le misurazioni in modo completo.

Vengono usate le semplificazioni:

1. fluidi:

- incompressibili ($\rho = \text{const}$)
- non viscosi (primi di attrito interno)

2. moto:

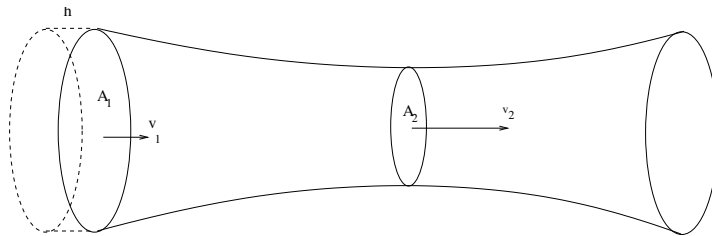
- stazionari (i fenomeni non dipendono dal tempo)
- irrotazionali (nessun vortice, non caotici), $\text{rot}(\mathbf{v}) = 0$, $\oint \mathbf{v} d\mathbf{s} = 0$

Linee di flusso: tangenti alla \mathbf{v} della particella. Ha senso se il moto è stazionario, cioè se \mathbf{v} è costante nel tempo.

Le linee di flusso danno origine al tubo di flusso. Non è possibile che vi sia fuoriuscita di fluido latente per definizione: \mathbf{v} è tangente alle linee di flusso.

7.2.1 Equazione di continuità

La portata volumica è la quantità di volume che passa nel tempo: $Q = \frac{dV}{dt}$, ma essendo in regime stazionario la velocità non varia, quindi $Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$, la portata di massa è la quantità di massa nel tempo.



Fissiamo Δt tale che $h = v_1 \Delta t$

1. fluido che entra in Δt $\rho \Delta V = \rho A_1 v_1 \Delta t$
2. fluido che esce in Δt $\rho \Delta V = \rho A_2 v_2 \Delta t$

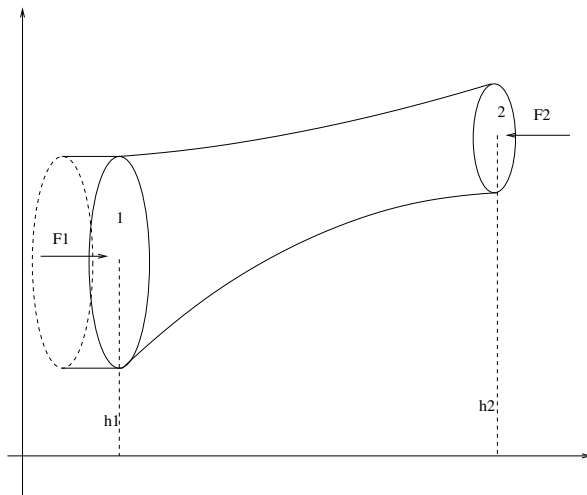
Naturalmente le masse entranti e uscenti sono uguali, quindi (legge di Leonardo):

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Portata volumica: $Q_v = Av$

Portata di massa: $Q_m = \rho Av$

7.2.2 Equazione di Bernoulli



Il lavoro è svolto dalle forze: $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{P}$ è $L = \Delta K$

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho A_1 v_1 \Delta t = \rho A_2 v_2 \Delta t$$

$$\begin{cases} L_1 = F_1 \Delta S = F_1 v_1 \Delta t = p_1 A_1 v_1 \Delta t \\ L_2 = -F_2 \Delta S = -F_2 v_2 \Delta t = -p_2 A_2 v_2 \Delta t \\ L_P = -\Delta m g (h_2 - h_1) \end{cases}$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} \Delta m (v_2^2 - v_1^2)$$

$$L_1 + L_2 + L_P = \Delta K$$

$$p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t - \Delta m g (h_2 - h_1) = \frac{1}{2} \Delta m (v_2^2 - v_1^2)$$

$$\begin{aligned} & \Delta m \left[(gh_1 - gh_2) + \frac{p_1 A_1 v_1 \Delta t}{\Delta m} - \frac{p_2 A_2 v_2 \Delta t}{\Delta m} \right] \\ &= \Delta m \left[(gh_1 - gh_2) + \frac{p_1 A_1 v_1 \Delta t}{\rho A_1 v_1 \Delta t} - \frac{p_2 A_2 v_2 \Delta t}{\rho A_2 v_2 \Delta t} \right] \\ &= \Delta m \left[gh_1 - gh_2 + \frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} \right] = L \\ &= \Delta K = \frac{1}{2} \Delta m (v_2^2 - v_1^2) \end{aligned}$$

$$gh_1 - gh_2 + \frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} = \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$

$$gh_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}v_1^2 = gh_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}v_2^2$$

Teorema di Bernoulli:

$$\rho gh + p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const}$$

L'espressione è molto simile alla conservazione dell'energia meccanica.

$$mgh + \frac{1}{2}mv^2 = \text{const}$$

Esempio 7.2 (ali di aereo) L'aria sotto le ali di un aereo è più lenta di quella che passa sopra, quindi dalla legge di Bernoulli, considerando l'altezza uguale:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const}$$

quindi se diminuisce v deve aumentare p e allora si ha una pressione dell'aria sull'ala e quindi la forza che tiene in aria l'aeroplano.

7.3 Viscosità

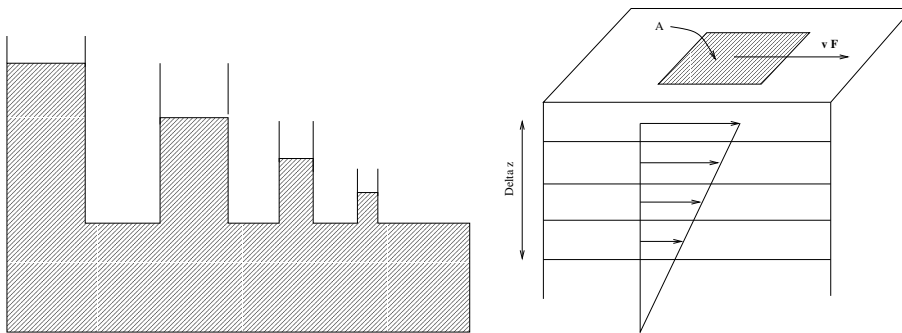
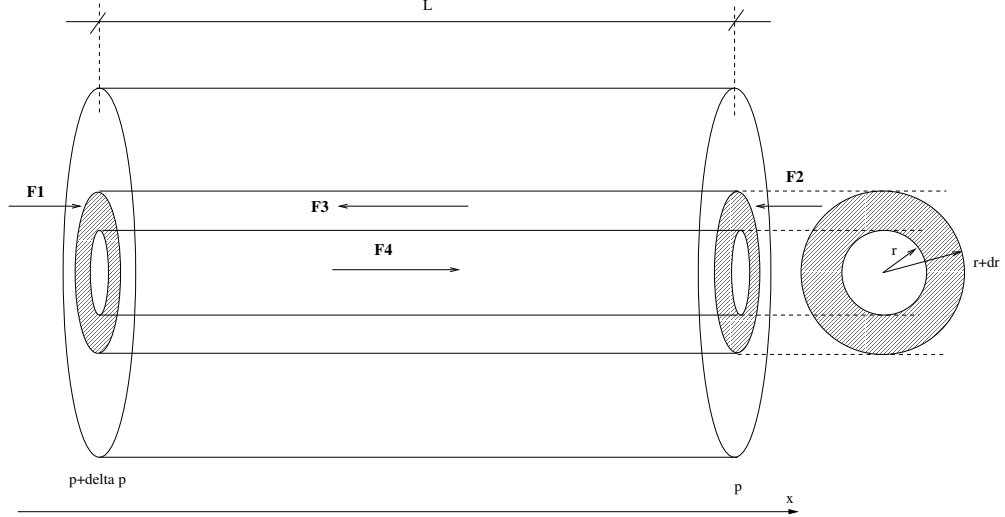


Figura 7.5: Perdita di pressione a causa della viscosità

La pressione diminuisce, si ha una perdita di carico per un fluido viscoso a causa degli attriti interni. Siamo a regime laminare (velocità basse).

$$F = \eta A \frac{dv}{dz} \quad \mathbf{F} = \eta A \nabla v \quad \eta = \text{coefficiente di viscosità}$$

7.3.1 Legge di Poiseuille



La velocità sarà massima al centro e minima ai bordi. Considero la porzione di fluido tra r e $r + dr$. Le forze F_3 e F_4 sono dovute alle porzioni di fluido più esterne (più lente) e quelle più interne (più veloci).

$$F_1 = (p + \Delta p)2\pi r dr \quad F_2 = -p2\pi r dr$$

$$F_3 = L2\pi(r + dr)\eta \left. \frac{dv}{dr} \right|_{r+dr} \quad \frac{dv}{dr} < 0$$

$$F_4 = -L2\pi r \eta \left. \frac{dv}{dr} \right|_r$$

$$0 = \sum F = (p + \Delta p)2\pi r dr - p2\pi r dr + L2\pi(r + dr)\eta \left. \frac{dv}{dr} \right|_{r+dr} - L2\pi r \eta \left. \frac{dv}{dr} \right|_r$$

$$\text{Taylor nell'intorno di } x = r: \quad \left. \frac{dv}{dr} \right|_x = \left. \frac{dv}{dr} \right|_r + \left. \frac{d^2v}{dr^2} \right|_r (x - r) + \dots$$

$$0 = \Delta p r dr + \eta L \left\{ (r + dr) \left. \frac{dv}{dr} \right|_{r+dr} - r \left. \frac{dv}{dr} \right|_r \right\} \simeq$$

$$\simeq \Delta p r dr + \eta L \left\{ (r + dr) \left[\left. \frac{dv}{dr} \right|_r + \left. \frac{d^2v}{dr^2} \right|_r dr \right] - r \left. \frac{dv}{dr} \right|_r \right\} =$$

$$= \Delta p r dr + \eta L \left\{ r \frac{dv}{dr} + r \frac{d^2v}{dr^2} dr + dr \frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2} dr^2 - r \frac{dv}{dr} \right\} \simeq$$

$$\simeq \Delta p r dr + \eta L \left[r \frac{d^2 v}{dr^2} dr + \frac{dv}{dr} dr \right] = 0$$

$$\Delta p r + \eta L \left[r \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{dv}{dr} \right] = 0$$

$$r \Delta p + \eta L \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = 0$$

$$r \Delta p = -\eta L \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right)$$

$$\int r \Delta p dr = -\eta L \int \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) dr$$

$$\Delta p \frac{1}{2} r^2 = -\eta L r \frac{dv}{dr} + c \quad c = 0$$

$$\Delta p \frac{1}{2} r = -\eta L \frac{dv}{dr}$$

$$\frac{\Delta p}{2} \int_R^r r dr = -\eta L \int_0^v dv$$

$$\frac{\Delta p}{4} [r^2 - R^2] = -\eta L v$$

$$v = -\frac{\Delta p}{4} \frac{r^2 - R^2}{\eta L} = \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2)$$

$$\begin{aligned} Q_v &= \int v dA = \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \int_0^R \frac{2\pi r \Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2) dr \\ &= \frac{1}{2} \pi \int_0^R \frac{r \Delta p}{\eta L} (R^2 - r^2) dr \\ &= \frac{\pi \Delta p}{2 \eta L} \int_0^R (r R^2 - r^3) dr = \frac{\pi \Delta p}{2 \eta L} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) \\ &= \frac{\pi \Delta p}{8 \eta L} R^4 \quad \text{Poiseuille} \end{aligned}$$

8

Termodinamica

In meccanica è utile utilizzare ipotesi nelle quali ci siano pochi gradi di libertà, per esempio con i fluidi si usa l'approccio di Eulero. In termodinamica si considerano molte particelle e quindi molti gradi di libertà.

La termodinamica si occupa di scambi di energia e di cambiamento di stato di sistemi macroscopici, descritti da un numero piccolo di variabili macroscopiche come temperatura, volume e pressione. Si tratta sempre di sostanza pure e omogenee (una sola fase).

Una variabile di stato è una variabile stazionaria (costante nel tempo), isotropa (uguale in tutte le direzioni), omogenea (uguale nello spazio).

Un sistema è la porzione di materia sotto osservazione, l'ambiente tutto il resto. L'universo termodinamico è l'unione del sistema con l'ambiente. Un sistema aperto scambia energia e materia con l'ambiente, un sistema chiuso scambia solo energia, un sistema isolato non scambia nè energia nè materia. Una parete adiabatica è una parete che non lascia passare calore, una diatermica lascia passare calore.

Le variabili di stato vanno considerate dopo un certo tempo di rilassamento del sistema. La termodinamica classica si occupa dei sistemi all'equilibrio, analizza i sistemi prima e dopo le trasformazioni. Le trasformazioni vengono considerate quasi statiche, cioè trasformazioni che passano attraverso infiniti stati di equilibrio in un tempo infinitamente lungo. Queste trasformazioni sono dette anche reversibili.

Spesso vengono considerati l'equilibrio meccanico (nessun lavoro da e

sul sistema), chimico (nessuna reazione chimica interna), termico (nessuno scambio di calore).

8.1 Principio zero della termodinamica

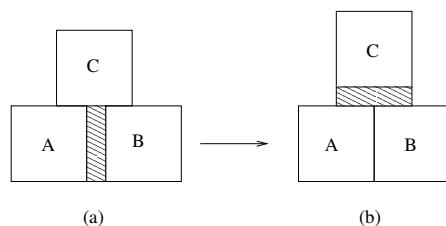


Figura 8.1: (a) A e B scambiano calore con C, raggiungono l'equilibrio. (b) A e B non scambiano calore, sono all'equilibrio

Il principio zero della termodinamica serve per definire il concetto di temperatura:

Principio 8.1 (principio zero della termodinamica) *Se due sistemi sono all'equilibrio termico con un terzo sistema allora sono all'equilibrio termico tra di loro.*

Due sistemi hanno la stessa temperatura se sono in equilibrio termico. Due sistemi sono in equilibrio termico se messi a contatto le loro proprietà non cambiano.

8.2 Temperatura

Il termometro è lo strumento per la misurazione della temperatura T . Per fare un termometro scelgo una proprietà X che varia in funzione di T . Se X varia linearmente in funzione di T allora (in kelvin):

$$T(X) = 273.16 \frac{X}{X_{\text{triplo}}} \quad (8.1)$$

X_{triplo} è la misura di X al punto triplo dell'acqua (0.01°C). In questo modo la temperatura del punto triplo dell'acqua è di 273.16 K . Solitamente X è il volume, la resistenza elettrica, la fem in una termocoppia, la pressione di un gas perfetto a volume costante... I termometri empirici hanno problemi di non linearità e possono essere usati solo in piccoli intervalli dove si ritiene che il problema della non linearità possa essere trascurabile. Questi intervalli

sono tutti intorno del punto triplo, in quanto al punto triplo dell'acqua per definizione tutti i termometri danno la stessa lettura. Il miglior termometro è quello a gas perfetto a volume costante.

8.2.1 Termometro a gas perfetto a volume costante

Il termometro a gas perfetto è formato da un bulbo contenente un gas (perfetto, vedi 8.5 a pag. 73) che viene messo a contatto con il corpo di cui si vuole misurare la temperatura. Il gas tenderà ad espandersi o a contrarsi, cioè a cambiare il suo volume ma questo è mantenuto costante da una colonna di mercurio contenuta in un manometro collegato al bulbo. In questo modo si mantiene il volume costante e si legge il valore di pressione. La pressione per mantenere il volume costante è variata alzando o abbassando il serbatoio di mercurio del manometro. La temperatura empirica sarà proporzionale alla variazione di pressione del gas.

8.3 Legge dei gas perfetti

Legge 8.1 (Avogadro(1811)) *Uguali moli di gas, alla stessa pressione e temperatura contengono lo stesso numero N_A di molecole, detto numero di Avogadro.*

Legge 8.2 (Boyle)

$$p \propto \frac{1}{V} \quad (8.2)$$

Legge 8.3 (Gay Lussac)

$$p \propto T \quad (8.3)$$

Il tutto si riassume nell'equazione dei gas perfetti:

$$pV = nRT = \frac{N}{N_A}RT = N\frac{R}{N_A}T = NkT \quad (8.4)$$

con R costante dei gas, k costante di Boltzman.

8.4 Dilatazione termica

8.4.1 Dilatazione termica dei solidi

lineare

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T \quad (8.5)$$

α dipendente dal tipo di materiale non è costante nella temperatura, ma spesso lo si può considerare tale. Altrimenti:

$$\Delta L = \int_{T_1}^{T_2} \alpha(T) L_0 dT \quad (8.6)$$

Il coefficiente α è spesso isotropo, cioè uguali in tutte le direzioni. Quindi sviluppando con Taylor:

$$\Delta V = 3\alpha V_0 \Delta T \quad (8.7)$$

8.4.2 Dilatazione termica dei liquidi

Nei liquidi non si può parlare di dilatazione lineare, quindi

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T \quad (8.8)$$

β è abbastanza indipendente dalla temperatura, nei gas no, e si ricava dall'equazione dei gas perfetti.

8.5 Teoria cinetica del gas perfetto

Un gas perfetto è una idealizzazione semplificativa, ma spesso adatta a descrivere gas reali (e non solo). Le ipotesi idealizzanti sono:

1. Il gas perfetto consiste di corpuscoli materiali, tutti uguali, in moto casuale e soggetti alle leggi del moto di Newton. Si può trattare sia di atomi singoli, sia di gruppi di atomi. In entrambi i casi li chiameremo molecole. Sono animate da moto in qualsiasi direzione e velocità comprese in un ampio intervallo.
2. Il numero totale di molecole è straordinariamente grande. In questo modo si può applicare con ottimi risultati la statistica.
3. La somma dei volumi occupati da tutte le molecole è trascurabile rispetto al volume occupato dal gas.
4. Se escludiamo gli effetti degli urti, sia tra molecole sia con le pareti, le molecole non sono soggette ad alcun'altra forza, in particolare non si considerano le forze intermolecolari.
5. Gli urti sono perfettamente elastici e di durata trascurabile, quindi l'energia cinetica del sistema è costante. La durata trascurabile impone che l'energia potenziale totale delle molecole sia trascurabile.

8.5.1 Pressione

Consideriamo N molecole di un gas perfetto in un cubo di spigolo L . Prendiamo il punto di vista di una parete A_1 . Una particella di velocità \mathbf{v} e massa m urta A_1 :

$$\Delta p_x = -2mv_x \quad (8.9)$$

è la variazione della quantità di moto nella direzione x , ortogonale ad A_1 , della particella. Il tempo per andare e tornare è:

$$\Delta t = \frac{2L}{v_x} \quad (8.10)$$

quindi ogni Δt ci sarà un urto; per l'impulso

$$F_x \frac{2L}{v_x} = F_x \Delta t = \Delta p_x = -2mv_x$$

$$F_x = -\frac{mv_x^2}{L} \quad (8.11)$$

è la forza media (nel tempo) che applica la parete del recipiente sulla particella. Per il terzo principio della dinamica la particella sulla parete esercita una forza uguale e contraria, chiamiamola ancora \mathbf{F} cambiando ora punto di vista, quello della particella:

$$F_x = \frac{mv_x^2}{L} \quad (8.12)$$

La pressione P_1 su quella parete della particella è $\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}}{A} = \frac{F_x}{A}$:

$$P_1 = \frac{mv_x^2}{L^3} = \frac{mv_x^2}{V} \quad (8.13)$$

Consideriamo ora il sistema di N particelle, con velocità \mathbf{v}_i , la media dei quadrati delle velocità lungo x è:

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_{x_i}^2 \quad (8.14)$$

analogamente per le altre componenti, che si sommano per dare $\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$. Lo spazio è isotropo, quindi

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2} \quad (8.15)$$

La pressione media (facendo la media tra tutte le particelle) esercitata da una particella sulla parete A_1 è:

$$\overline{P_{1i}} = \frac{\sum P_{1i}}{N} = \frac{\sum mv_{xi}^2}{NV} = \frac{m\overline{v_x^2}}{V}$$

Tutte le molecole eserciteranno una pressione media (facendo la media nel tempo) sulla parete A_1 :

$$\overline{P_x} = \frac{Nm\overline{v_x^2}}{V} = \frac{1}{3} \frac{Nm\overline{v^2}}{V} \quad (8.16)$$

Il numero di molecole è così straordinariamente grande che la pressione sulla nostra parete non varia nel tempo, quindi $\overline{P} = P$, allora:

$$P_x V = \frac{1}{3} Nm\overline{v^2}$$

Ma la pressione è uguale su tutte le pareti, quindi:

$$PV = \frac{1}{3} mN\overline{v^2} = \frac{1}{3} M\overline{v^2} \quad (8.17)$$

avendo introdotto $M = Nm$ la massa totale del gas. Introducendo la densità volumetrica $\rho = \frac{M}{V}$ la pressione:

$$P = \frac{1}{3} \rho \overline{v^2} \quad (8.18)$$

Usando invece l'energia cinetica del gas $K = \frac{1}{2} Nm\overline{v^2}$ la (8.17) diventa:

$$PV = \frac{2}{3} K \quad (8.19)$$

Definizione 8.1 (velocità quadratica media)

$$v_{qm} = \sqrt{\overline{v^2}} \quad (8.20)$$

Dalla (8.18) si ricava:

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}} \quad (8.21)$$

8.5.2 Libero cammino medio

Il libero cammino medio λ è lo spazio medio in cui una particella non subisce urti con altra particelle. Supponiamo di avere molecole di diametro d . Avviene una interazione solo se i due centri delle molecole si avvicinano a una distanza inferiore a d . Si può pensare anche che la molecola considerata abbia diametro $2d$ e le altre siano puntiformi. Nel tempo t la molecola spazza il volume di un cilindro di sezione πd^2 e di lunghezza $L_{cil} = vt$ con v velocità della molecola. Supponiamo che il gas sia racchiuso in un volume V e contenga N molecole. Il numero di molecole contenuto nel cilindro è quindi:

$$N_{cil} = N \frac{V_{cil}}{V} = N \frac{\pi d^2 vt}{V}$$

Questo rappresenta anche il numero medio di urti nel tempo t della molecola. Ad ogni urto la molecola cambia direzione, ma spazza sempre il volume di un cilindro analogo.

Il libero cammino medio è la distanza totale percorsa diviso il numero di urti subiti:

$$\lambda = \frac{L_{cil}}{N_{cil}} = vt \frac{V}{N \pi d^2 vt} = \frac{V}{N \pi d^2}$$

Essendo $pV = NkT \Rightarrow V/N = kT/p$

$$\lambda = \frac{kT}{\pi d^2 p}$$

L'equazione è stata ricavata pensando che le molecole siano bersagli fermi. Le velocità semplificate non sono le stesse. Quella al numeratore è \bar{v} la velocità molecolare media misurata rispetto al recipiente che contiene il gas. Quella al denominatore rappresenta la velocità relativa media v_{rel} rispetto alle altre molecole. Si può dimostrare che $v_{rel} = \bar{v}\sqrt{2}$ e quindi:

$$\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$$

Bisogna tenere anche conto che al di sotto di una certa pressione il libero cammino medio eccede le dimensioni del contenitore e il concetto stesso di libero cammino medio perde di significato.

8.5.3 Distribuzione delle velocità

Distribuzione di Maxwell delle velocità:

$$N(v) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad (8.22)$$

con m massa di una molecola, $M = N_A m$ massa molare. $N(v)dv$ = numero di molecole con velocità compresa tra v e $v + dv$, la velocità può essere solo positiva. Il numero totale di molecole:

$$N = \int_0^{\infty} N(v)dv \quad (8.23)$$

Al crescere della temperatura la velocità media delle molecole aumenta e la curva si allarga; essendo il numero delle molecole costante, anche l'area lo è e quindi la curva si appiattisce.

Velocità più probabile

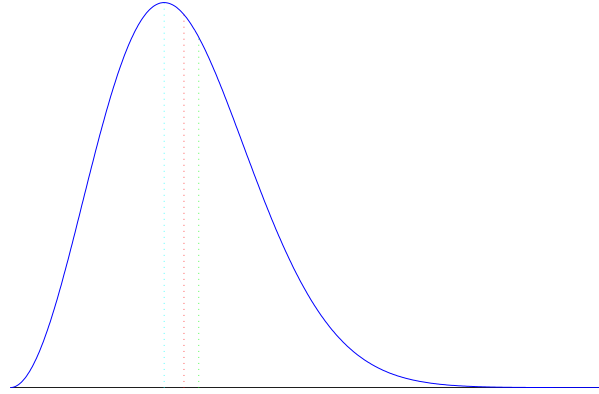


Figura 8.2: Distribuzione di Maxwell; velocità più probabile(blu), velocità media(rossa), velocità quadratica media(verde)

La velocità più probabile è quella in corrispondenza della quale la distribuzione ha un massimo, quindi:

$$\begin{aligned} 4\pi N \frac{d}{dv} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} &= 0 \\ 2ve^{-\frac{mv^2}{2kT}} - \frac{v^3 m}{kT} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} &= 0 \\ e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v \left(2 - v^2 \frac{m}{kT} \right) &= 0 \\ v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}} & \quad (8.24) \end{aligned}$$

Velocità media

$$\bar{v} = \int_0^\infty v N(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad (8.25)$$

Velocità quadratica media

$$\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 N(v) dv = \frac{3kT}{m} \quad (8.26)$$

$$v_{\text{qm}} = \sqrt{\overline{v^2}}$$

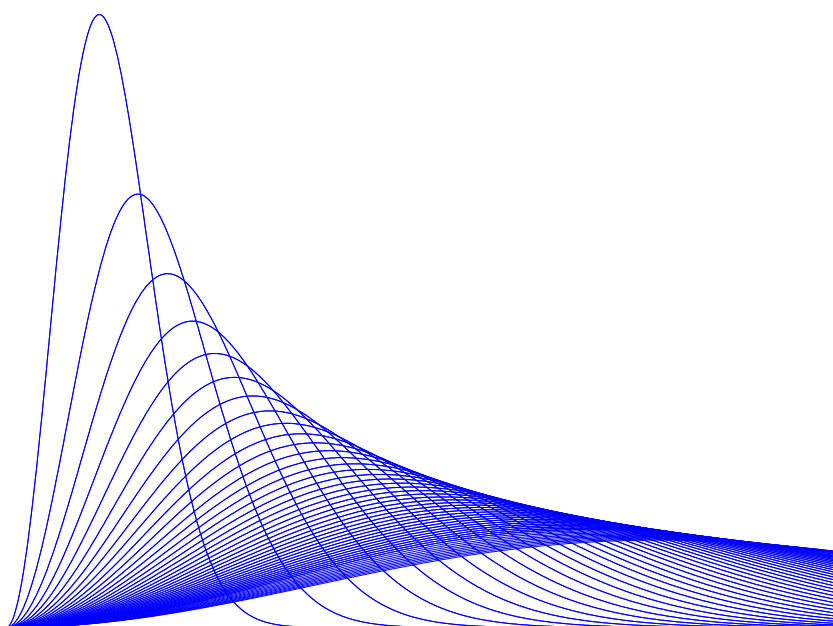


Figura 8.3: Famiglia di distribuzioni di Maxwell disegnate a intervalli costanti di temperatura

8.5.4 Distribuzione dell'energia

Una molecola monoatomica di una gas ha solo energia cinetica $E = \frac{1}{2}mv^2$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}E}$$

Il numero di molecole che ha una certa velocità è uguale al numero di molecole che ha una certa energia:

$$N(E)dE = N(v)dv$$

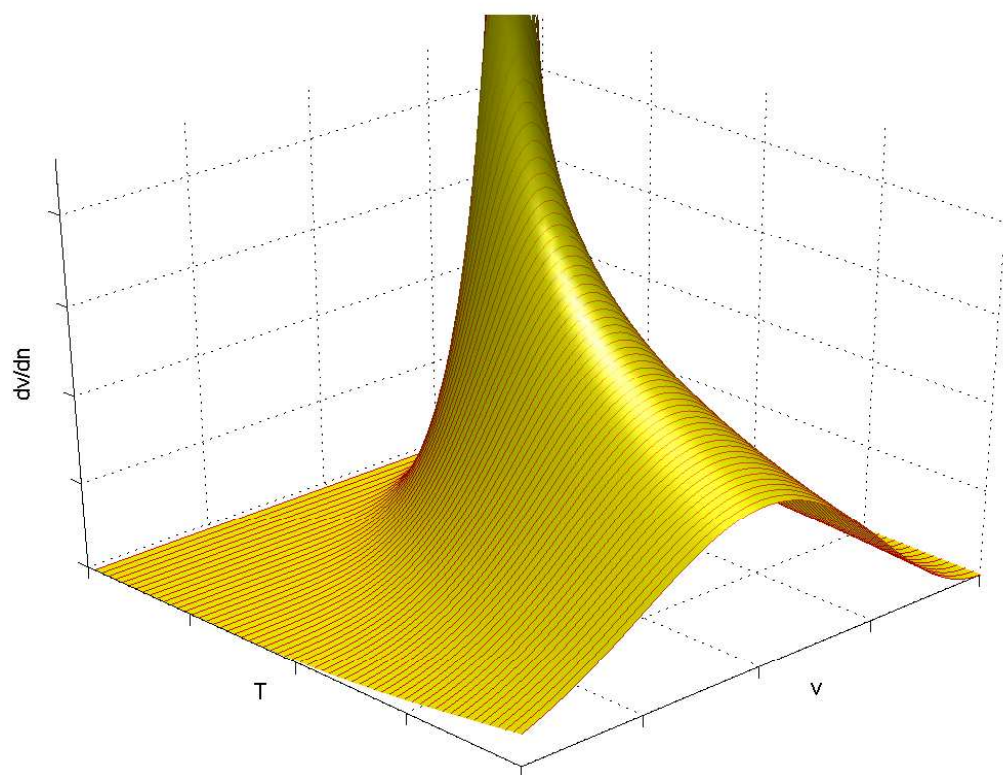


Figura 8.4: Andamento delle distribuzioni di Maxwell in funzione della temperatura

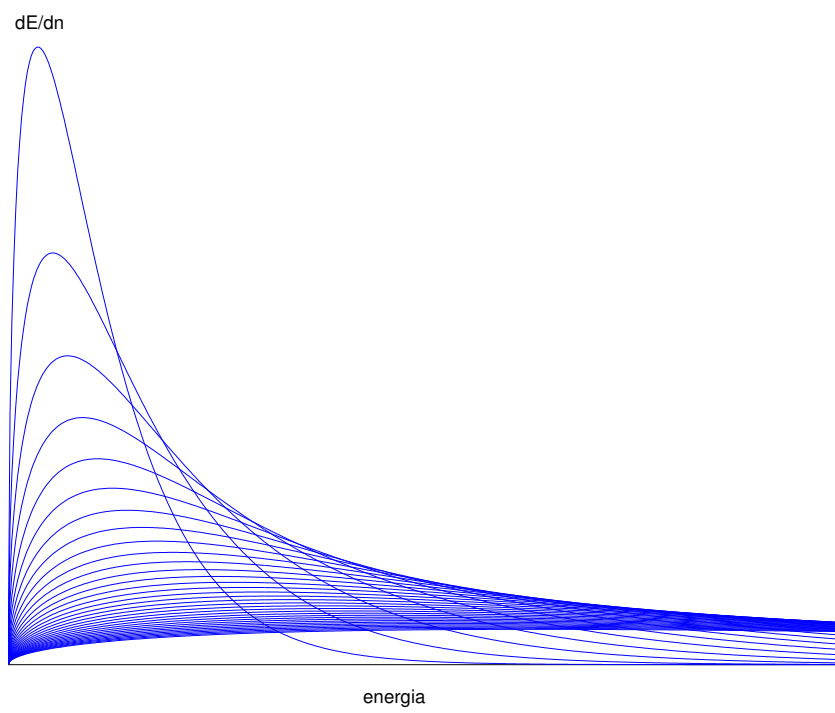


Figura 8.5: Famiglia di distribuzioni di energia disegnate a intervalli costati di temperatura

$$N(E) = N(v) \frac{dv}{dE} = N(v) \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{1}{2} E^{-\frac{1}{2}}$$

Distribuzione Maxwell–Boltzmann dell’energia:

$$N(E) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(kT)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} \quad (8.27)$$

è indipendente dalla massa delle molecole, infatti un aumento di m consegue una diminuzione di v^2 in modo che l’energia cinetica rimanga invariata.

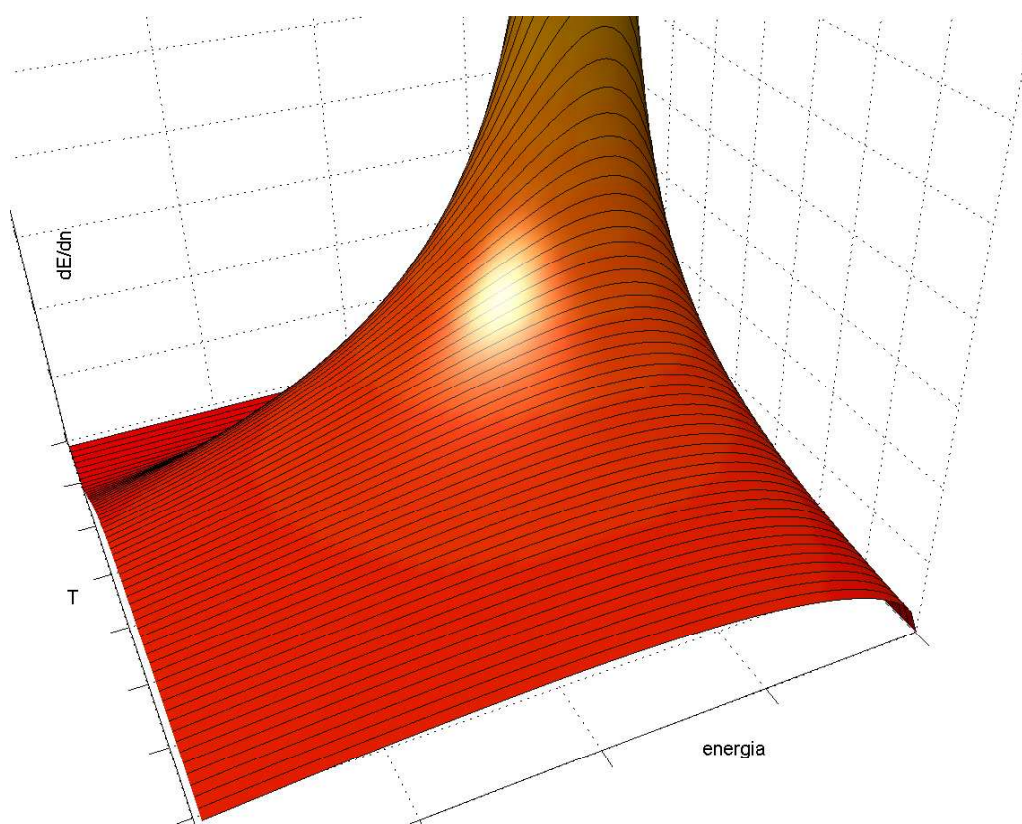


Figura 8.6: Andamento delle distribuzioni dell’energia in funzione della temperatura

Energia media

Per un gas monoatomico

$$\overline{E} = \int_0^{\infty} E N(E) dE = \frac{3}{2} kT \quad (8.28)$$

Per gli altri gas: f numero di gradi di libertà

$$\overline{E} = \frac{f}{2}kT \quad (8.29)$$

8.5.5 Riassunto teoria cinetica dei gas perfetti

massa molare	$M = N_A m$
pressione	$p = \frac{1}{3}\rho \overline{v^2}$
velocità quadratica media	$v_{\text{qm}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$
velocità più probabile	$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$
velocità media	$\overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$
libero cammino medio	$\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$
energia cinetica traslazionale per molecola monoatomica	$K = \frac{3}{2}kT$

8.6 Trasferimenti di calore

8.6.1 Irraggiamento

Ogni corpo emette radiazione elettromagnetica che dipende dalla temperatura. Leggi del corpo nero:

$$P = \sigma T^4 \quad \lambda_{\text{max}} \sim \frac{1}{T} \quad (8.30)$$

8.6.2 Conduzione

Trasporto di calore senza trasporto di materia, è caratteristico dei solidi.

$$P = \frac{Q}{\Delta t} = K \frac{A}{\Delta x} \Delta T \quad (8.31)$$

con K coefficiente di conducibilità termica, A l'area effettiva di contatto, Δx lo spessore separatore.

8.6.3 Convezione

Trasporto di calore con trasporto di materia, cioè con correnti convettive in movimento.

8.7 Capacità termiche

Definizione 8.2 (capacità termica) Definiamo la capacità termica C di un corpo la quantità di calore necessaria per far aumentare la sua temperatura di ΔT

$$C = \frac{Q}{\Delta T} \quad (8.32)$$

Definizione 8.3 (capacità termica specifica) Definiamo la capacità termica specifica di una sostanza la quantità di calore necessaria per far aumentare temperatura di ΔT di un'unità di massa.

$$c = \frac{Q}{m\Delta T} = \frac{C}{m} \quad (8.33)$$

Esse non sono costanti, dipendono spesso dalla temperatura e dal tipo di trasformazione. Quindi al posto di $Q = mc\Delta T$ bisognerebbe scrivere:

$$Q = m \int_{T_0}^{T_f} c(T) dT \quad (8.34)$$

conoscendo però come varia c in funzione di T . Essendo c variabile dal tipo di trasformazione per i gas si parla di c_V calore specifico a volume costante e c_p calore specifico a pressione costante.

Definizione 8.4 (calore specifico molare) Il calore specifico molare è definito come:

$$c^{\text{mol}} = \frac{Q}{\Delta T n} = \frac{Q}{\Delta T} \frac{M}{m} = cM \quad (8.35)$$

con $M = \frac{m}{n}$ massa molare, n numero di moli. Spesso c^{mol} è indicato semplicemente con c .

Dulong e Petit osservarono che il calore specifico molare o capacità termica molare è uguale per tutti i solidi è circa 25 J/mol K. In realtà questo è il valore limite a cui tendono i solidi per temperature alte. Per temperature tendenti allo zero assoluto la capacità termica molare dei solidi tende a zero.

8.8 Energia interna

L'energia interna di un gas perfetto è data solo dall'energia cinetica in quanto si è supposto che non ci sia energia potenziale. Per una molecola monoatomica $K = \frac{3}{2}kT$, per n moli $E = K_n = nN_A \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}nRT$. Le molecole non

puntiformi hanno anche energia cinetica rotazionale. Una molecola che possa ruotare su tutti i tre assi ha energia interna:

$$E = K = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 + \frac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_z\omega_z^2$$

La molecola ha quindi 6 gradi di libertà, 3 traslatori e 3 rotazionali. Una molecola monoatomica ha solo 3 gradi traslatori e nessuno rotazionale in quanto essendo puntiforme $I = 0$, una molecola biatomica ha 5 gradi di libertà.

8.8.1 Principio di equipartizione dell'energia

Il principio di equipartizione dell'energia di Maxwell dice che mediamente l'energia si ripartisce in modo equo tra i gradi di libertà. Ogni grado di libertà riceve $\frac{1}{2}kT$ di energia.

Principio 8.2 (equipartizione dell'energia)

$$E = \frac{f}{2}nRT \quad (8.36)$$

con f il numero di gradi di libertà delle particelle.

Si deduce che l'energia interna di un gas dipende esclusivamente dalla temperatura.

8.8.2 Calore specifico molare dei solidi

Gli atomi dei solidi sono disposti secondo strutture reticolari e possono vibrare intorno alle loro posizioni di equilibrio in tre direzioni. Ogni atomo dispone anche di energia potenziale, quindi altri tre gradi di libertà. Avendo in totale 6 gradi di libertà dall'equazione (8.36) si ha:

$$E = 3nRT$$

Se forniamo Q calore al solido esso si trasformerà tutto in energia interna non compiendo il solido alcun lavoro:

$$Q = \Delta E = 3nR\Delta T = nc\Delta T$$

$$c = \frac{3nR\Delta T}{n\Delta T} = 3R \simeq 25 \text{ J/mol K}$$

come previsto da Doulong e Petit.

8.8.3 Calore specifico dei gas

Come dimostrato più avanti in una trasformazione isocora tutto il calore si trasforma in variazione di energia interna in quanto non si compie lavoro.

$$c_V = \frac{Q}{n\Delta T} = \frac{\Delta E}{n\Delta T} = \frac{\frac{f}{2}nR\Delta T}{n\Delta T} = \frac{f}{2}R$$

$$c_p = c_V + R \quad \text{vedi relazione di Mayer } \text{8.10.2 pag.88}$$

8.9 Primo principio della termodinamica

Consideriamo positivo qualsiasi cosa aumenti l'energia interna quindi consideriamo positivo il lavoro compiuto dall'ambiente sul sistema e positivo il calore ceduto dall'ambiente al sistema.

$$\Delta E = Q + L = E_f - E_i$$

con E_f , E_i l'energia interna del sistema finale ed iniziale; ΔE dipende solo dalla situazione finale ed iniziale del sistema (per un gas solo dalla temperatura), quindi è una funzione di stato, cioè una funzione che non dipende dalla particolare trasformazione, dal cammino percorso, ma solo dalle situazioni iniziali e finali. Mentre L e Q non sono funzioni di stato, la loro somma lo è. Questo è il primo principio della termodinamica:

Principio 8.3 (primo principio della termodinamica)

$$Q + L = \Delta E \quad (8.37a)$$

considerando variazioni infinitesime diventa:

$$\delta Q + \delta L = dE \quad (8.37b)$$

dE è un differenziale esatto essendo E una funzione di stato.

8.10 Trasformazioni di un gas

Le trasformazioni le possiamo dividere in due gruppi:

- trasformazioni irreversibili: sono veloci, non sono determinate negli stati intermedi.
- trasformazioni quasistatiche: sono lente, si dà il tempo al sistema di reagire attraversando infiniti stati di equilibrio intermedi. Una trasformazione quasi statica molto lenta idealizza una trasformazione reversibile, cioè una trasformazione che può tornare allo stato di partenza.

8.10.1 Calcolo del lavoro

Caso generale

Considerando una trasformazione reversibile e un gas perfetto:

$$\delta L = -F dx = -p A dx = -p dV$$

$$L = - \int_{V_0}^{V_f} p dV \quad (8.38)$$

Il modulo del lavoro è dunque, considerando il significato geometrico dell'integrale definito, l'area sottesa dalla curva $p = p(V)$. Il meno nella formula (8.38) deriva dal fatto che considerando positivo il lavoro dell'ambiente la forza (dell'ambiente sul sistema) comprime il sistema, per esempio un contenitore con un pistone mobile, quindi lo spostamento è $-dx$, perché x diminuisce.

$$\begin{aligned} L < 0 &\Leftrightarrow \text{espansione} \\ L > 0 &\Leftrightarrow \text{compressione} \end{aligned}$$

Isobara $p = \text{const}$

$$L = - \int_{V_0}^{V_f} p dV = -p \Delta V \quad (8.39)$$

Isocora $V = \text{const}$

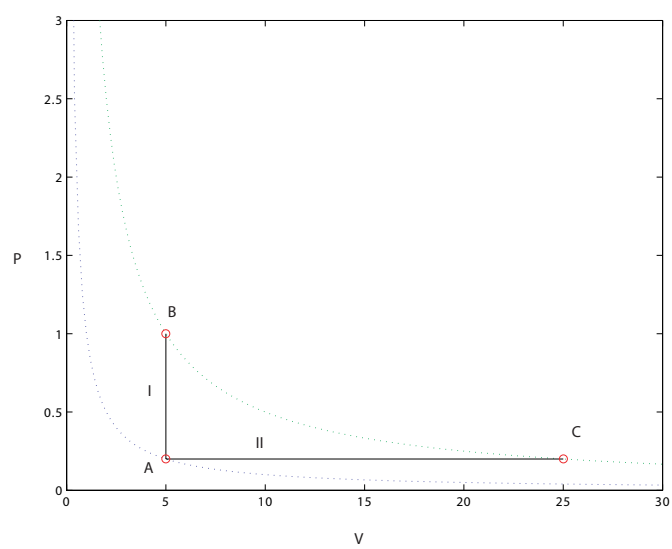
$$L = - \int_{V_0}^{V_f} p dV = 0 \quad (8.40)$$

Isoterma $T = \text{const}$

$$L = - \int_{V_0}^{V_f} p dV = - \int_{V_0}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV = -nRT \int_{V_0}^{V_f} \frac{dV}{V} = -nRT \log \frac{V_f}{V_0} \quad (8.41)$$

Adiabatica $Q = 0$

$$L = \Delta E \quad (8.42)$$



8.10.2 Relazione di Mayer

$$A \rightarrow B \quad V = \text{const} \quad \text{I}$$

$$A \rightarrow C \quad p = \text{const} \quad \text{II}$$

$$\Delta E_I = Q_I + L_I = Q_I = nc_V \Delta T$$

$$\Delta E_{II} = Q_{II} + L_{II} = nc_p \Delta T - p \Delta V$$

$E_B = E_C$ perché E dipende solo da T

$$\Delta E_I = \Delta E_{II}$$

$$nc_V \Delta T = nc_p \Delta T - p \Delta V$$

$$nc_V \Delta T = nc_p \Delta T - nR \Delta T$$

$$c_p - c_V = R \quad \text{Relazione di Mayer} \quad (8.43)$$

8.10.3 Adiabatiche

$$Q = 0 \quad dE = \delta Q + \delta L = \delta L = -pdV$$

per una isocora che lavora alle stesse temperature $dE = \delta Q = nc_V dT$

$$nc_V dT = -pdV = -\frac{nRT}{V} dV$$

$$c_V dT = -\frac{RT}{V} dV$$

$$\int_{T_i}^{T_f} \frac{c_V}{T} dT = - \int_{V_i}^{V_f} \frac{R}{V} dV$$

$$c_V \log \frac{T_f}{T_i} = -R \log \frac{V_f}{V_i}$$

$$R = c_p - c_V \quad \gamma = \frac{c_p}{c_V} > 1$$

$$\log \frac{T_f}{T_i} = \frac{c_V - c_p}{c_V} \log \frac{V_f}{V_i} = (1 - \gamma) \log \frac{V_f}{V_i}$$

$$\log \frac{T_f}{T_i} = \log \left(\frac{V_f}{V_i} \right)^{(1-\gamma)}$$

$$\frac{T_f}{T_i} = \left(\frac{V_f}{V_i} \right)^{(1-\gamma)} \quad T_f V_f^{\gamma-1} = T_i V_i^{\gamma-1}$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad PV^\gamma = \text{const}$$

$$PV^\gamma = \text{const} \quad \text{Relazione di Poisson} \quad (8.44)$$

8.10.4 Trasformazioni politropiche

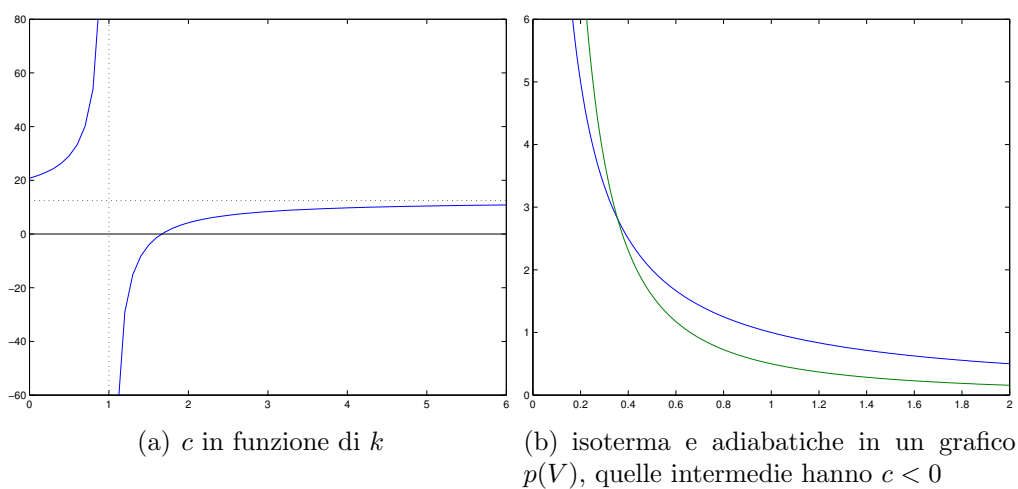
Nelle trasformazioni politropiche c è ritenuto costante.

$$\begin{aligned}
 dE &= \delta Q + \delta L = ncdT - pdV \\
 \text{per una isocora} \quad dE &= nc_V dT \\
 ncdT - pdV &= nc_V dT \\
 ncdT - \frac{nRT}{V}dV &= nc_V dT \\
 (c_V - c)dT &= -\frac{RT}{V}dV \quad \int_{T_0}^{T_f} \frac{c_V - c}{T} dT = - \int_{V_0}^{V_f} \frac{R}{V} dV \\
 (c_V - c) \int_{T_0}^{T_f} \frac{dT}{T} &= -R \int_{V_0}^{V_f} \frac{dV}{V} \\
 \int_{T_0}^{T_f} \frac{dT}{T} &= -\frac{c_p - c_V}{c_V - c} \int_{V_0}^{V_f} \frac{dV}{V} \\
 \log \frac{T_f}{T_0} &= -\frac{c_p - c_V}{c_V - c} \log \frac{V_f}{V_0} = \frac{c_p - c_V}{c_V - c} \log \frac{V_0}{V_f} \\
 (k - 1) &= \frac{c_p - c_V}{c_V - c} \\
 \log \frac{T_f}{T_0} &= \log \left[\left(\frac{V_0}{V_f} \right)^{k-1} \right] \quad \frac{T_f}{T_0} = \left(\frac{V_0}{V_f} \right)^{k-1} \\
 T_f V_f^{k-1} &= T_0 V_0^{k-1} \quad TV^{k-1} = \text{const} \\
 PV V^{k-1} &= (nR)\text{const} \quad PV^k = \text{const} \\
 k &= \frac{c_p - c}{c_V - c} \quad c = \frac{k c_V - c_p}{k - 1}
 \end{aligned}$$

Tutte le trasformazioni come politropiche

Isoterma	$pV = \text{const}$	$k = 1$	$c = \infty$
Isocora	$V = \text{const}$	$k = \infty$	$c = c_V$
Isobara	$p = \text{const}$	$k = 0$	$c = c_p$
Adiabatica	$pV^\gamma = \text{const}$	$k = \gamma > 1$	$c = 0$

	L	Q	ΔE
Isoterma	$-nRT \log \frac{V_f}{V_0}$	$nRT \log \frac{V_f}{V_0}$	$0 = nc_V \Delta T$
Isocora	0	$nc_V \Delta T$	$nc_V \Delta T$
Isobara	$-p \Delta V$	$nc_p \Delta T$	$nc_V \Delta T$
Adiabatica	$nc_V \Delta T$	0	$nc_V \Delta T$



8.11 Trasformazioni cicliche

$$\Delta E = Q + L = 0 \quad (8.45)$$

La macchine termiche trasformano il calore in lavoro. I frigoriferi trasformano il lavoro in trasferimento di calore, dalla sorgente più fredda a quella più calda.

8.11.1 Ciclo di Carnot per un gas perfetto

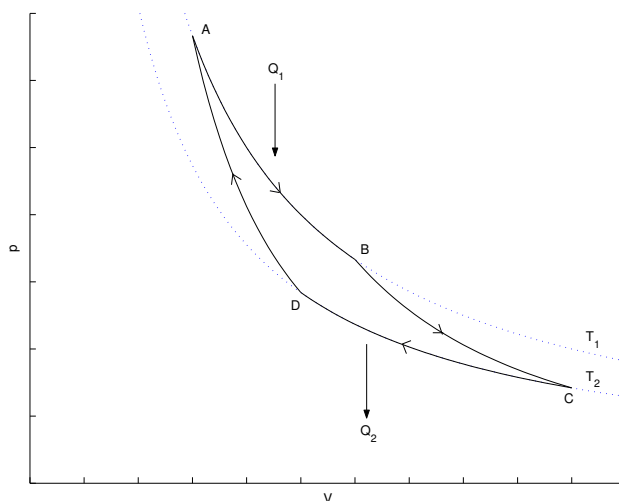


Figura 8.7: Ciclo di Carnot

1. Si porta il sistema alla temperatura T_1 immergendo in un bagno termico.
2. Il gas si espande da V_A a V_B seguendo una trasformazione isoterma.
3. Il gas si espande da V_B a V_C seguendo una trasformazione adiabatica.
4. Si porta il sistema alla temperatura T_2 immergendolo in un bagno termico.
5. Si comprime il gas da V_C a V_D seguendo una isoterma.
6. Si comprime il gas da V_D a V_A seguendo una adiabatica.

Nota: $Q_1 > 0$, $Q_2 < 0$, $L < 0$

$$Q = Q_1 - |Q_2| = -L$$

$$Q_2 = nRT \log \frac{V_D}{V_C}$$

$$T_1 V_B^{\gamma-1} = T_2 V_C^{\gamma-1}$$

$$T_1 V_A^{\gamma-1} = T_2 V_D^{\gamma-1}$$

$$\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} \quad \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

I calori stanno alle temperature.

Il rendimento η sarà maggiore quanto maggiore è il lavoro svolto dalla macchina sull'ambiente con minore scambio di calore.

$$\eta = \frac{|L|}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{nRT_2 \log \frac{V_C}{V_D}}{nRT_1 \log \frac{V_B}{V_A}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} < 1$$

La condizione migliore è quella della macchina perfetta in cui tutto il calore è trasformato in lavoro, $\eta_{\text{perfetta}} = 1$

8.11.2 Frigorifero

Si esegue il ciclo di Carnot al contrario. Si fornisce quindi lavoro e si ha un trasferimento di calore, trasferendolo dalla sorgente fredda a quella più calda. Il coefficiente di merito sarà maggiore quando è maggiore il calore trasferito e minore il lavoro necessario. Nota: $Q_1 < 0$, $Q_2 > 0$, $L > 0$

$$0 = L + Q = L + Q_2 - |Q_1|$$

$$L = |Q_1| - Q_2 \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$\eta = \frac{Q_2}{L} = \frac{Q_2}{|Q_1| - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} > 0$$

Il frigorifero perfetto trasferisce calore dalla sorgente più fredda a quella più calda senza bisogno di lavoro, quindi $\eta \rightarrow \infty$

8.11.3 Ciclo Otto

Il ciclo Otto approssima molto il ciclo di un motore a benzina a quattro tempi.

OA=aspirazione miscela

AB=compressione adiabatica

BC=accensione

CD=espansione adiabatica

DA=raffreddamento

OA=espulsione gas combusti

$$Q_{BC} = nc_V \Delta T = nc_V(T_C - T_B) > 0$$

$$Q_{DA} = nc_V \Delta T = nc_V(T_A - T_D) < 0$$

$$L + Q_{BC} - |Q_{DA}| = 0 \quad L = |Q_{DA}| - Q_{BC} < 0 \quad |L| = Q_{BC} - |Q_{DA}|$$

$$\eta = \frac{|L|}{Q_{BC}} = \frac{Q_{BC} - |Q_{DA}|}{Q_{BC}} = 1 - \frac{|Q_{DA}|}{Q_{BC}} = 1 - \frac{nc_V(T_D - T_A)}{nc_V(T_C - T_B)} = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$$

Spesso il rendimento viene espresso in funzione del rapporto di compressione $r = \frac{V_2}{V_1}$

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}$$

$$\begin{cases} T_C V_1^{\gamma-1} = T_D V_2^{\gamma-1} \\ T_B V_1^{\gamma-1} = T_A V_2^{\gamma-1} \end{cases}$$

$$(T_C - T_B) V_1^{\gamma-1} = (T_D - T_A) V_2^{\gamma-1}$$

$$\frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = 1 - \left(\frac{1}{r} \right)^{\gamma-1}$$

Più grande è r più è grande η . Se r è troppo grande ΔV è grande e nella compressione si crea troppo calore che provoca la preaccensione. Tipicamente $r = 5$, quindi $\eta = 0.55$. In realtà con questo rapporto di compressione nella macchine reali si ha $\eta = 0.3$.

8.11.4 Diagrammi di flusso

I diagrammi di flusso sono degli schemi utili per descrivere le trasformazioni cicliche. I piani orizzontali rappresentano le fonti di calore a diversa temperatura, la sezione del tubo varia a seconda dell'energia interna del sistema.

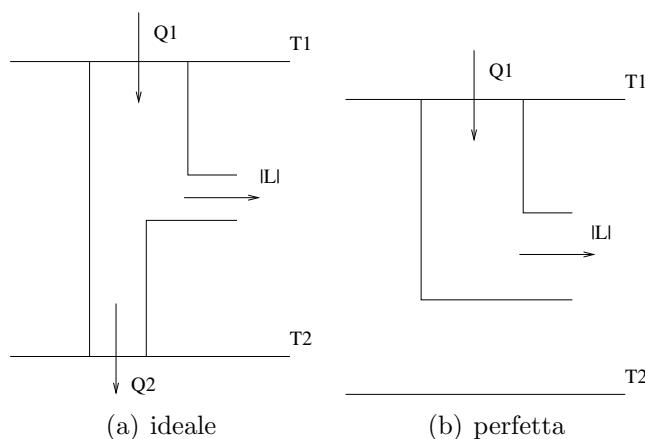


Figura 8.8: Macchina di Carnot

8.12 Secondo principio della termodinamica

Principio 8.4 (Enunciato di Kelvin) *è impossibile realizzare una trasformazione il cui unico scopo è di produrre lavoro da una sola sorgente di calore.*

Principio 8.5 (Enunciato di Clausius) *è impossibile realizzare una trasformazione il cui unico scopo sia quello di fare passare calore da una sorgente di bassa temperatura ad una più alta.*

Una isoterma sembra violare Kelvin, in realtà trasforma tutto il calore in lavoro, ma non fa solo quello, infatti espande il gas.

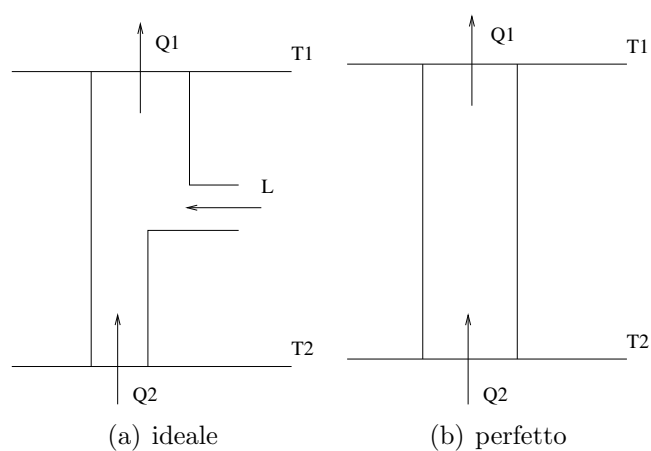


Figura 8.9: Frigorifero

8.12.1 Kelvin \Leftrightarrow Clausius

Chiamiamo \overline{K} antikelvin un ciclo che viola Kelvin e \overline{C} anticlausius un ciclo che viola Clausius. Dimostriamo che $(\exists \overline{K} \Rightarrow \exists \overline{C}) \wedge (\exists \overline{C} \Rightarrow \exists \overline{K})$. Sommiamo un antikelvin con un frigorifero e otteniamo un anticlausius (Figura 8.10). Sommiamo un anticlausius e una macchina termica e otteniamo un antikelvin (Figura 8.11).

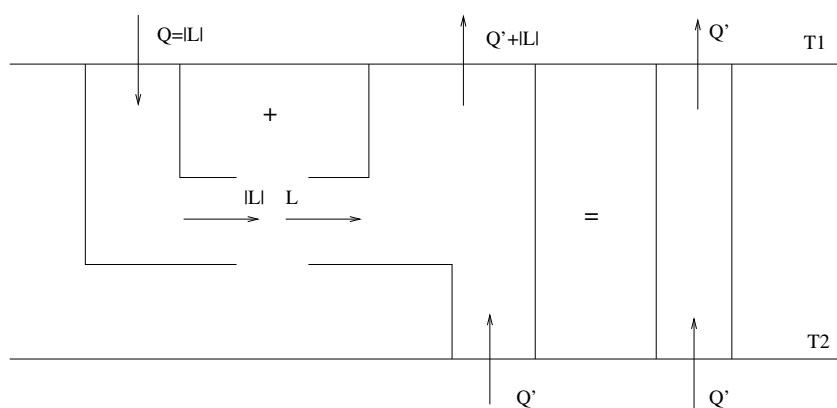


Figura 8.10: Antikelvin più un frigorifero

8.12.2 Teorema di Carnot

Teorema 8.1 (Carnot: il più bravo sono io) *a parità di temperature non esiste macchina con rendimento migliore di quella di Carnot: $\eta_M \leq \eta_C$.*

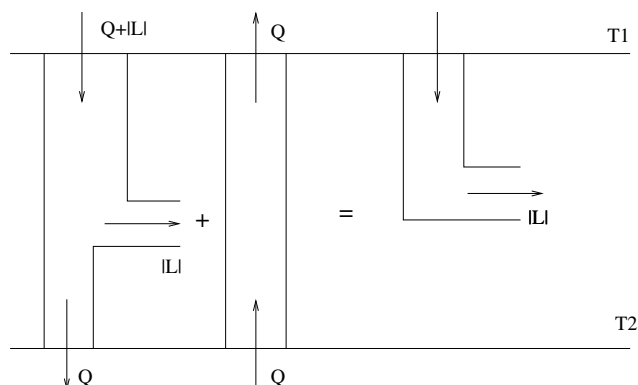


Figura 8.11: Anticlausius più una macchina termica

Dimostrazione caso con due sorgenti

Per assurdo: $\exists M : \eta_M > \eta_C$. Con la macchina di Carnot posso variare a piacimento il lavoro tenendo fisso η allungando le isoterme. Scelgo una macchina di Carnot tale che $L_C = L_M$. Le macchine lavorano alle stesse temperature per ipotesi. La macchina M avendo maggior rendimento avrà bisogno di meno calore, infatti:

$$\eta_M = \frac{|L_M|}{Q_M} > \eta_C = \frac{|L_C|}{Q_C} = \frac{|L_M|}{Q_C}$$

$$\frac{|L_M|}{Q_M} > \frac{|L_M|}{Q_C} \quad Q_M < Q_C$$

Combino la macchina M con la macchina di Carnot fatta funzionare al contrario, trovo un antikelvin. Assurdo, quindi:

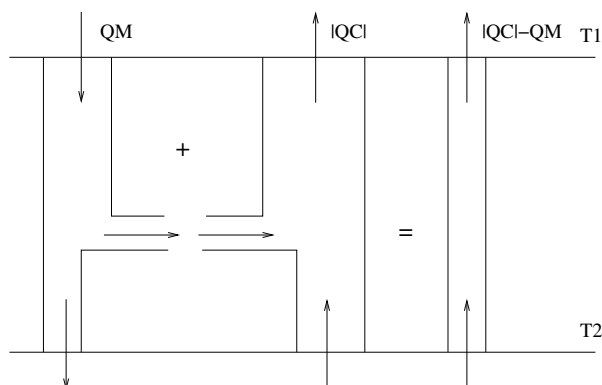
$$\eta_M \leq \eta_C$$

Corollario 8.1 *Se la macchina è reversibile $\eta_M = \eta_C$. Per assurdo $\eta_M < \eta_C$, $M^{-1} + C = \overline{C}$, assurdo $\Rightarrow \eta_M \geq \eta_C \Rightarrow \eta_M = \eta_C$*

8.13 Entropia

Consideriamo una trasformazione reversibile per un gas perfetto:

$$\delta Q + \delta L = dE \quad \delta Q - pdV = nc_V dT$$

Figura 8.12: Macchina M più la macchina di Carnot al contrario

$$\delta Q = nc_V dT + p dV$$

$$\frac{\delta Q}{T} \text{ è un differenziale esatto?}$$

Per verificarlo integriamo la quantità e vediamo se si può esprimere come differenza di funzioni che dipendono solo dallo stato iniziale e finale del sistema e non dalla particolare trasformazione. L'integrale quindi sarà una funzione di stato.

$$\begin{aligned} \int_i^f \frac{\delta Q}{T} &= \int_i^f \frac{nc_V dT + p dV}{T} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{nc_V dT}{T} + \int_{V_i}^{V_f} \frac{p dV}{T} \\ &= nc_V \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} + \int_{V_i}^{V_f} \frac{\frac{nRT}{V} dV}{T} = nc_V \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} + nR \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} \\ &= (nc_V \log T_f + nR \log V_f) - (nc_V \log T_i + nR \log V_i) = S(f) - S(i) \\ &= \Delta S \end{aligned}$$

$$S = nc_V \log T + nR \log V + \text{const} = \text{entropia}$$

$$\int_i^f \frac{\delta Q}{T} = \Delta S \quad \oint \frac{\delta Q}{T} = 0$$

L'entropia è una funzione di stato.

Isocora

$$\Delta S = nc_V \log \frac{T_f}{T_i} + nR \log \frac{V_f}{V_i} = nc_V \log \frac{T_f}{T_i}$$

Isobara

$$\frac{V_i}{V_f} = \frac{T_i}{T_f}$$

$$\begin{aligned}\Delta S &= n c_V \log \frac{T_f}{T_i} + n R \log \frac{V_f}{V_i} = n c_V \log \frac{T_f}{T_i} + n R \log \frac{T_f}{T_i} \\ &= \log \frac{T_f}{T_i} (c_V + R) = n c_p \log \frac{T_f}{T_i}\end{aligned}$$

Adiabatica

$$\delta Q = 0 \Rightarrow \Delta S = 0$$

Le adiabatiche vengono anche chiamate trasformazioni isoentropiche

Isoterma

$$\Delta S = n c_V \log \frac{T_f}{T_i} + n R \log \frac{V_f}{V_0} = n R \log \frac{V_f}{V_0} = \frac{Q}{T}$$

Espansione libera

L'espansione libera è una adiabatica irreversibile, quindi non si può concludere che $\Delta S = 0$. Lo stato iniziale e quello finale sono alla stessa temperatura, quindi si trovano sulla stessa isoterma. La trasformazione pur non essendo isoterma ha ΔS di una isoterma. Se il volume finale è il doppio di quello iniziale:

$$\Delta S = n R \log \frac{V_f}{V_i} = n R \log 2$$

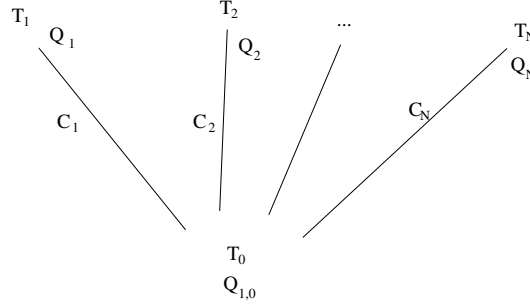
8.13.1 Entropia nei cicli

Consideriamo una macchina M generica, assorbe da N sorgenti di calore a temperature diverse T_i calore $Q_i > 0$. La sorgente 0 a temperatura T_0 non ha nulla a che fare con la macchina M .

Costruiamo delle macchine di Carnot C_i che lavorano ciascuna tra le temperature $T_i \div T_0$

$$\frac{Q_i}{Q_{i,0}} = -\frac{T_i}{T_0} \quad Q_{i,0} = -\frac{T_0 Q_i}{T_i}$$

$$H = \text{macchina infernale} = M + \sum_{i=1}^N C_i^{-1}$$



$Q_{H,0} = 0$. H usa solo la sorgente a T_0 , quindi non può produrre lavoro:

$$L_H \geq 0 \quad Q_H = -L_H \leq 0 \quad Q_{i,0} := -Q_{i,0} = \frac{T_0 Q_i}{T_i} \quad \text{perché } C^{-1}$$

$$Q_0^{C^{-1}} = \sum Q_{i,0}^{C^{-1}} = T_0 \sum \frac{Q_i}{T_i}$$

$$Q_H = Q_0^{C^{-1}} = T_0 \sum \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \quad \sum \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

passando a variabili continue:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad \text{diseguaglianza di Clausius} \quad (8.46)$$

la disequazione vale per qualsiasi gas, per qualsiasi trasformazione.

Se M reversibile costruisco $H' = M^{-1} + \sum_{i=1}^N C_i$, Q è cambiato di segno, quindi la disequaglianza diventa:

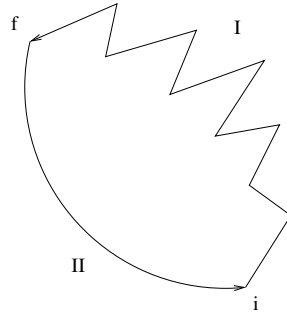
$$\oint \frac{\delta Q}{T} \geq 0$$

Confrontando questa disequaglianza con quella di Clausius (8.46) si conclude che per una macchina reversibile:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0 \quad (8.47)$$

Infatti considerando trasformazioni reversibili ΔS è una funzione di stato:

$$\int_i^f \frac{\delta Q}{T} = S(f) - S(i) \quad \oint \frac{\delta Q}{T} = \int_A^A \frac{\delta Q}{T} = S(A) - S(A) = 0$$



8.13.2 Entropia per qualsiasi trasformazione

Considerando un ciclo con trasformazioni irreversibili:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

$$\underbrace{\int_i^f \frac{\delta Q}{T}}_{\text{irreversibile}} - \underbrace{\int_i^f \frac{\delta Q}{T}}_{\text{reversibile}} \leq 0$$

$$\underbrace{\int_i^f \frac{\delta Q}{T}}_{\text{irreversibile}} \leq \underbrace{\int_i^f \frac{\delta Q}{T}}_{\text{reversibile}} = \Delta S$$

Per una trasformazione qualsiasi (anche irreversibile):

$$\Delta S \geq \int_i^f \frac{\delta Q}{T}$$

Nel caso sia reversibile vale l'uguaglianza.

8.13.3 Entropia e secondo principio

$$\Delta S \geq \int_i^f \frac{\delta Q}{T}$$

se consideriamo un sistema isolato $\delta Q = 0$ quindi

$$\Delta S \geq 0$$

Se avvengono solo trasformazioni reversibili $\Delta S = 0$ quindi l'entropia dell'universo non può diminuire. Le trasformazioni reversibili si dice che non lasciano traccia entropica. L'aumento dell'entropia è equivalente al secondo principio (enunciato di Kelvin o di Clausius):

Macchina perfetta

$$\begin{aligned}\Delta S_{\text{sistema}} &= 0 && \text{perché ciclo} \\ \Delta S_{\text{universo}} &= \Delta S_{\text{sistema}} + \Delta S_{\text{sorgente}} \\ \Delta S_{\text{universo}} &= \Delta S_{\text{sorgente}} = \frac{Q_1}{T_1} < 0 \\ \Delta S &< 0 && \text{impossibile}\end{aligned}$$

Q_1 è negativo perché lo si deve considerare dal punto di vista della sorgente per calcolare la variazione di entropia della sorgente.

Frigorifero perfetto

$$\begin{aligned}|Q_1| &= |Q_2| = Q \\ \Delta S_{\text{universo}} &= \Delta S_{\text{sistema}} + \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{|Q|}{T_1} - \frac{|Q|}{T_2} = |Q| \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) < 0 \\ \Delta S &< 0 && \text{impossibile}\end{aligned}$$

questo perché $T_1 > T_2$; se fosse $T_2 > T_1$ cioè il calore circolasse dalla sorgente calda a quella fredda $\Delta S \geq 0$ e non ci sarebbe nulla di assurdo.

Secondo principio

$$\Delta S_{\text{sistema isolato}} \geq 0$$

L'uguaglianza solo per trasformazioni reversibili.

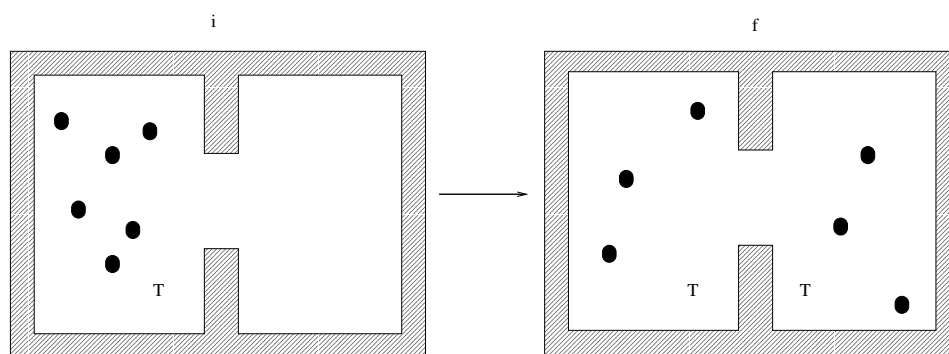
8.13.4 Interpretazione statistica dell'entropia

Figura 8.13: espansione di Joule

Nell'espansione libera (o di Joule¹) si verifica sperimentalmente che la

¹si legge giul, non giawl (è francese!)

temperatura non varia. Essa è una trasformazione irreversibile spontanea. È isolata dall'ambiente essendo le pareti adiabatiche. Le pareti sono indeformabili, non viene compiuto lavoro. $\Delta S_{\text{ambiente}} = 0$ $V_f = 2V_i$

$$\Delta S_{\text{universo}} = \Delta S_{\text{sistema}} + \Delta S_{\text{ambiente}} = nR \log \frac{V_f}{V_i} = nR \log 2 > 0$$

P = numero di microstati che danno luogo ad uno stato termodinamico

P è la probabilità che il sistema si configuri in un dato stato termodinamico a meno di un coefficiente, chiamata anche molteplicità.

S è una variabile termodinamica estensiva, quindi per calcolare l'entropia del sistema si somma S_1 della parte sinistra e S_2 della parte destra. Le variabili termodinamiche come T , p sono intensive e sommarle in questo caso non ha senso.

Legge 8.4 (legge di Boltzman) *Entropia secondo Boltzman:*

$$S = k \log P \quad (8.48)$$

Diciamo che due configurazioni sono equivalenti se presentano lo stesso numero di particelle a destra e lo stesso numero di particelle a sinistra. L'equivalenza è logica in quanto le particelle sono indistinguibili. $P = \binom{N}{n}$ per ogni classe di equivalenza, avendo $N = 6$ particelle totali:

N_S	N_D	P
6	0	1
5	1	6
4	2	15
3	3	20
2	4	15
1	5	6
0	6	1

Si nota che è più probabile osservare una configurazione in cui l'entropia è aumentata (3,3) che una dove l'entropia non è aumentata. Con questo approccio non si esclude l'ipotesi che l'entropia possa diminuire, ma è estremamente improbabile, soprattutto se si considera un numero di particelle estremamente più grande.

In generale lo stato più probabile è quello con $\frac{N}{2}$ particelle a destra e a sinistra, quindi:

$$P = \binom{N}{n} = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}\right)! \left(\frac{N}{2}\right)!} = \frac{N!}{\left[\left(\frac{N}{2}\right)!\right]^2}$$

Stearling: $\log n! \sim n \log n - n$

$$\begin{aligned}\log P &= \log N! - 2 \log \left(\frac{N}{2}! \right) \sim N \log N - N - 2 \left[\frac{N}{2} \log \frac{N}{2} - \frac{N}{2} \right] = \\ &= N \log N - N - N \log \frac{N}{2} + N = N \log N - N (\log N - \log 2) \\ &= N \log 2\end{aligned}$$

$$S_f = k \log P = kN \log 2 = nR \log 2$$

la formula è identica a quella trovata a livello macroscopico considerando la variazione di entropia dell'espansione libera come la variazione dell'entropia di una isoterma.

Esempio 8.1 (Esempio ghiaccio) Ghiaccio a $T_G = 273.15$ K di massa m in acqua a $T_A = (273.15 + \varepsilon)$ K

$$\begin{aligned}\Delta S_{\text{acqua}} &= S_{\text{acqua}} - S_{\text{ghiaccio e acqua}} \\ &= \int_{\text{ghiaccio}}^{\text{acqua}} \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T_0} \int_{\text{ghiaccio}}^{\text{acqua}} \delta Q = \frac{Q}{T_0} = \frac{\lambda m}{T_0} > 0 \\ \Delta S_{\text{ghiaccio}} &= \frac{\lambda m}{T_0} \\ \Delta S_{\text{vasca}} &= -\frac{\lambda m}{T_0} \\ \Delta S_{\text{universo}} &= 0 \quad \text{perché reversibile}\end{aligned}$$

8.13.5 Grafici S/T

L'area sottesa un grafico p/V era il lavoro svolto durante la trasformazione. In un grafico S/T sarà:

$$\int_A^B T dS = \int_A^B \delta Q = Q$$

Ciclo di Carnot

$$\eta = \frac{|L|}{Q_1} = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = \frac{\Delta S_1 T_1 - |\Delta S_2| T_2}{\Delta S_1 T_1} = \frac{\Delta S \Delta T}{\Delta S T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Nota che: $\Delta S_1 = -\Delta S_2$, ne segue che $\Delta S_{\text{macchina}} = 0$. Ma anche $\Delta S_{\text{sorgenti}} = 0$ perché $\frac{Q_1}{T_1} = -\frac{Q_2}{T_2}$, quindi $\Delta S_{\text{universo}} = 0$, infatti la trasformazione è reversibile.

L'espressione del rendimento è identica a quella trovata in precedenza.

8.13.6 Generalizzazione del principio di Carnot

Immaginiamo una macchina infernale che scambia calore con più sorgenti, con temperature comprese tra T_{\max} e T_{\min} .

$$\begin{aligned}
 \sum \frac{Q_i}{T_i} &= \sum \frac{Q_{a,i}}{T_i} - \sum \frac{|Q_{c,i}|}{T_i} \leq 0 \\
 \sum \frac{Q_{a,i}}{T_{\max}} &\leq \sum \frac{Q_{a,i}}{T_i} \leq \sum \frac{|Q_{c,i}|}{T_i} \leq \sum \frac{|Q_{c,i}|}{T_{\min}} \\
 \frac{\sum Q_{a,i}}{\sum |Q_{c,i}|} &\leq \frac{T_{\max}}{T_{\min}} \quad \frac{\sum |Q_{c,i}|}{\sum Q_{a,i}} \geq \frac{T_{\min}}{T_{\max}} \\
 L + \sum Q_{a,i} - \sum |Q_{c,i}| &= 0 \quad |L| = -L = \sum Q_{a,i} - \sum |Q_{c,i}| \\
 \eta_M = \frac{|L|}{Q_a} &= \frac{|L|}{\sum Q_{a,i}} = \frac{\sum Q_{a,i} - \sum |Q_{c,i}|}{\sum Q_{a,i}} = 1 - \frac{\sum |Q_{c,i}|}{\sum Q_{a,i}} \leq 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = \eta_C \\
 \eta_M &\leq \eta_C
 \end{aligned}$$

8.14 Scala termodinamica o assoluta

La scala di temperatura definita come quella del termometro a gas risulta limitata per temperature molto basse, al di sotto della quale (1 K) non esiste materia allo stato gassoso. Per questo motivo viene definita la scala termodinamica. Per qualsiasi macchina reversibile (anche per uno scarafaggio che gira):

$$\begin{aligned}
 \eta_{\text{rev}} = \eta_C &= 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} \\
 \frac{\theta_2}{\theta_1} &= \frac{|Q_2|}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}
 \end{aligned}$$

8.15 Riassunto trasformazioni

	L	Q	ΔE	ΔS
Isoterma	$-nRT \log \frac{V_f}{V_0}$	$nRT \log \frac{V_f}{V_0}$	$0 = nc_V \Delta T$	$nR \log \frac{V_f}{V_i} = \frac{Q}{T}$
Isocora	0	$nc_V \Delta T$	$nc_V \Delta T$	$nc_V \log \frac{T_f}{T_i}$
Isobara	$-p \Delta V$	$nc_p \Delta T$	$nc_V \Delta T$	$nc_p \log \frac{T_f}{T_i}$
Adiabatica	$nc_V \Delta T$	0	$nc_V \Delta T$	0
Espansione libera	0	0	$0 = nc_V \Delta T$	$nR \log 2$

9

Relatività speciale

La relatività ristretta modifica la meccanica classica. La differenza si nota soprattutto ad alte energie ovvero ad alte velocità. Come tutte le teorie che ampliano un'altra deve rispettare il principio di corrispondenza, cioè deve spiegare come la relatività classica possa funzionare a basse energie, cioè come possa essere interpretata come approssimazione per basse energie.

Alla fine dell'800 si sviluppa l'elettromagnetismo, mentre la meccanica di Newton era stata applicata a tutti i campi conosciuti con estremo successo.

Bisognava far convivere le equazioni di Maxwell con quelle di Newton.

Le leggi della meccanica sono le stesse per traslazioni uniformi, cioè sono invarianti per traslazioni. Variabili invarianti sono quelle che non cambiano per sistemi di riferimento inerziali, come l'accelerazione, la massa. Non si può esclusivamente con esperimenti di meccanica determinare se il sistema è fermo o in modo rettilineo uniforme, cioè non si possono distinguere i sistemi inerziali, quindi non esiste un sistema privilegiato.

9.1 Esperimento di Michelson–Morley

Maxwell dice: “ $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ ”, cioè che la velocità della luce nel vuoto è costante e non dipende dal sistema di riferimento, contrariamente a quanto si ricava dalle trasformate di Galileo. A meno di associare quel valore c ad un sistema di riferimento privilegiato si crea una spaccatura tra l'elettromagnetismo e la meccanica di Newton. Si inventa l'etere, un sistema di riferimento privilegiato

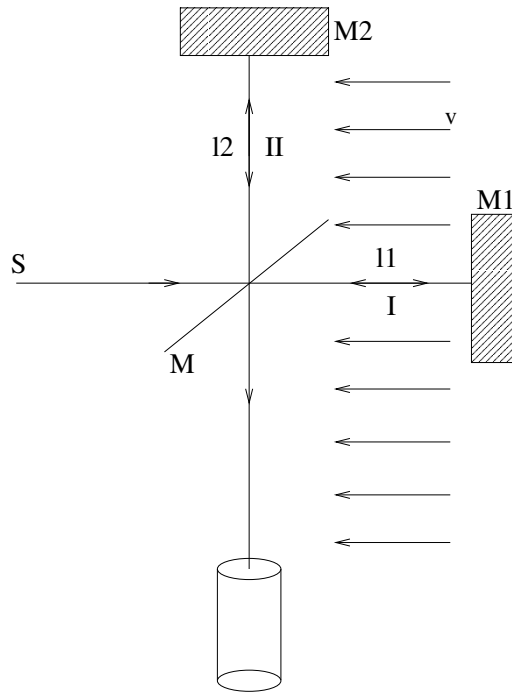


Figura 9.1: Esperimento di Michelson–Morley

che permea tutto l'universo; Michelson–Morley dimostrano che questo non può esistere.

Nell'esperimento la luce proviene da una sorgente S , viene parzialmente riflessa da uno specchio semiargentato M e contemporaneamente trasmessa. La luce quindi segue due cammini: I e II; si riflette sugli specchi M_1 e M_2 e si riunisce in un raggio unico, prima di arrivare ad un'analizzatore. Le lunghezze dei percorsi dopo lo specchio M , l_1 e l_2 sono circa uguali, ma non uguali se riferite alla lunghezza d'onda della luce, quindi nell'analizzatore si dovrebbe vedere una figura d'interferenza. Si suppone che l'etere sia il sistema di riferimento assoluto e che l'apparecchio si muova con velocità v verso destra, quindi si può supporre che sia l'etere a spostarsi verso sinistra con velocità v , il "vento d'etere". Non si considera il percorso dalla sorgente allo specchio M e dallo specchio M al rivelatore, in quanto i raggi viaggiano insieme. Il tempo per andare da M a M_1 e tornare è:

$$t_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{l_1(2c)}{c^2 - v^2} = \frac{2c}{c^2} \frac{l_1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

Il percorso II è ortogonale al vento d'etere, per semplicità si considera il punto di vista del vento d'etere:

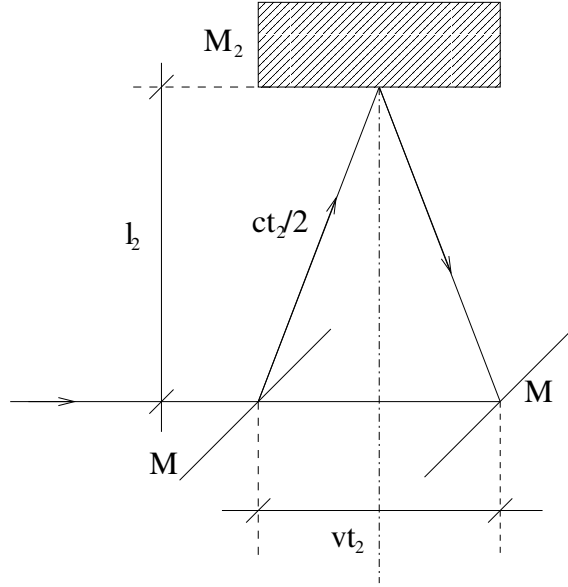


Figura 9.2: apparecchiatura vista dall'etere

$$s = 2\sqrt{l_2^2 + \left(\frac{vt_2}{2}\right)^2} = ct_2$$

$$l_2^2 + \frac{v^2 t_2^2}{4} = \frac{c^2 t_2^2}{4} \quad l_2^2 = \frac{1}{4} (c^2 - v^2) t_2^2$$

$$t_2 = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

La differenza di tempo dei due cammini è:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c} \left\{ \frac{l_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - \frac{l_1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right\}$$

si osserva quindi una figura di interferenza. Se l'apparecchiatura viene ruotata di 90° l_1 e l_2 si invertono:

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{2}{c} \left\{ \frac{l_2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - \frac{l_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right\}$$

Si dovrebbe osservare una figura di interferenza diversa:

$$\begin{aligned}\Delta = \Delta t' - \Delta t &= \frac{2}{c} \left\{ \frac{l_1 + l_2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - \frac{l_1 + l_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right\} \\ &= \frac{2}{c} (l_1 + l_2) \left\{ 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \dots - \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \right\} \\ &\simeq \frac{2}{c} (l_1 + l_2) \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{l_1 + l_2}{c} \left(\frac{v}{c}\right)^2\end{aligned}$$

Con più riflessioni si riesce ad avere $l_1 + l_2 = 20$ m, considerando il Sole come riferimento assoluto si ha $v = 30$ km/s e $\lambda = 500 \times 10^{-9}$ m. Il numero di frange che scorrono dovrebbe essere:

$$\Delta N = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{l_1 + l_2}{\lambda} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \simeq 0.4$$

La sensibilità dello strumento era $\Delta N = 0.01$. Se ci fosse stato l'etere con quella velocità sarebbe stato osservato. La ricerca dell'etere ripetuta in più mesi dell'anno, di giorno e di notte, usando luce solare, stellare ed artificiale, con dispositivi diversi, usando bracci diversi, telescopi o osservando fenomeni elettrici diede risultato negativo. Nel 1907 Nobel per Michelson.

9.2 Postulati di Einstein

Postulato 9.1 (Primo postulato della relatività ristretta) *Tutte le leggi fisiche sono invarianti per traslazioni uniformi*

Postulato 9.2 (Secondo postulato della relatività ristretta) *La velocità della luce nel vuoto è uguale in tutti i sistemi di riferimento*

I postulati di Einstein sono ampiamente verificati sperimentalmente. L'esperimento di Michelson–Morley verifica il primo postulato di Einstein. Per il secondo postulato si può considerare il seguente esperimento: il Sole ruota rispetto al suo asse, quindi la sorgente di luce si muove. Si misura la differenza di velocità dei raggi di luce provenienti da due estremi dell'equatore del sole. Le velocità misurate sono abbastanza simili da verificare il secondo postulato.

9.2.1 Simultaneità

I due pistoleri (Fig. 9.3) sparano quando la luce gli raggiunge. Essi sono in un sistema solidale con la luce e quindi vedono contemporaneamente la luce

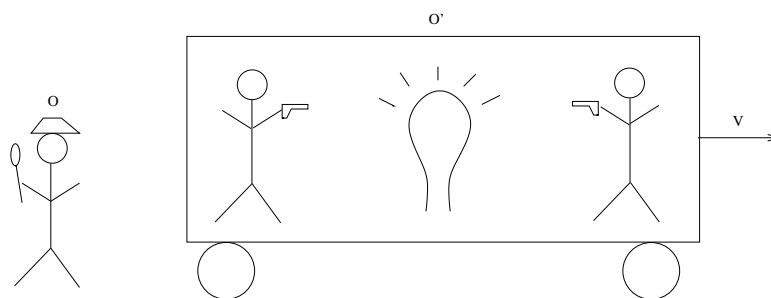


Figura 9.3: pistoleri relativistici

della lampadina. Per il capostazione “fermo” invece è il pistolero di sinistra ad essere investito per prima dalla luce, quindi il pistolero a destra muore, mentre quello di sinistra no. Gli eventi simultanei per O' non sono tali per O , bisogna rivedere il concetto di tempo assoluto.

9.3 Trasformate di Lorentz

Le trasformate di Lorentz sostituiscono le trasformate di Galileo della meccanica classica. Per velocità basse rispetto a quelle della luce le trasformate di Lorentz tendono a quelle di Galileo. La funzione che trasforma le coordinate di un sistema di riferimento a quelle di un altro deve essere lineare, in quanto lo spazio è omogeneo. Immaginiamo che l'applicazione non sia omogenea, e quindi non lineare, per esempio: $x' = kx^2$. Se mettiamo una sbarra tra 0 e 1 questa misura $\Delta x = 1 - 0 = 1$, nel nuovo sistema di riferimento misura: $k \cdot 1^2 - k \cdot 0^2 = k$. Se ora mettiamo la sbarra tra 2 e 1 nel primo sistema di riferimento misurerà ancora 1, mentre nel secondo $k(2^2 - 1^2) = 3k$ ovvero spostando la sbarra nel secondo sistema di riferimento la sua lunghezza cambia: assurdo per l'ipotesi di omogeneità dello spazio; inoltre l'applicazione deve essere anche additiva, perché la lunghezza di due sbarre affiancate deve essere la somma dell'unica sbarra avente lunghezza uguale nel primo sistema di riferimento alla somma delle lunghezze delle due sbarre nel primo sistema di riferimento. Consideriamo il sistema di riferimento Oxy fermo e $O'x'y'$ che si muove rispetto ad O di moto rettilineo uniforme con velocità di trascinamento u nella direzione dell'asse x crescente. L'applicazione è lineare, quindi (in due dimensioni spaziali), in generale:

$$\begin{cases} x' = \lambda_{11}x + \lambda_{12}y + \lambda_{14}t \\ y' = \lambda_{21}x + \lambda_{22}y + \lambda_{24}t \\ t' = \lambda_{41}x + \lambda_{42}y + \lambda_{44}t \end{cases}$$

“Solo” 9 incognite. Ipotesi aggiuntive:

- al tempo $t = t' = 0$ gli orologi coincidono e anche i sistemi di riferimento $O \equiv O'$, in particolare per $t = 0$ e $x = 0$ segue $x' = 0$ cioè

$$x' = \lambda_{11}x + \lambda_{12}y + \lambda_{14}t$$

$$0 = \lambda_{11} \cdot 0 + \lambda_{12}y + \lambda_{14} \cdot 0$$

$$\lambda_{12} = 0$$

- come sopra:

$$t' = \lambda_{41}x + \lambda_{42}y + \lambda_{44}t$$

$$0 = 0 + \lambda_{42}y + 0$$

$$\lambda_{42} = 0$$

- la traslazione del sistema in moto è orizzontale, quindi $y' = 0 \Leftrightarrow y = 0$ sempre.

$$\lambda_{21} = 0$$

$$\lambda_{24} = 0$$

Se mettiamo una sbarra verticalmente con un'estremo in O' , questo misura che la lunghezza è 1. La sbarra si muove con O' e quindi questa è la lunghezza a riposo. Questa lunghezza a riposo dovrà essere uguale anche se è osservata da O . Mettiamo la sbarra ferma rispetto ad O' , quindi O vede una lunghezza:

$$y = \frac{1}{\lambda_{22}}$$

mettiamo ora la sbarra ferma rispetto a O , O' vede una lunghezza:

$$y' = \lambda_{22}$$

Le due situazioni sono simmetriche e quindi non esistendo un sistema privilegiato le due grandezze devono essere uguali:

$$\lambda_{22} = \frac{1}{\lambda_{22}} \quad \lambda_{22}^2 = 1$$

Si scarta la soluzione negativa, in quanto si vuole che gli assi abbiano lo stesso verso.

Seguiamo il moto dell'origine del sistema O' . Qui, per ogni istante:

$$x' = 0$$

Per O lo stesso moto è descritto da:

$$x = ut \quad x - ut = 0$$

Ci si aspetta allora un'equazione del tipo

$$x' = \lambda(x - ut)$$

A $t = 0$, $O \equiv O'$, $t = t'$ scatta un'onda luminosa dalle origini, questa ha un fronte sferico con raggio R e per il secondo principio di Einstein ha velocità c uguale in tutti e due i sistemi. Il sistema O' sta arrivando da sinistra, passa in coincidenza con O , si sincronizzano gli orologi e parte il fronte d'onda. I due osservatori osservano un fronte d'onda che ha centro nei propri sistemi di riferimento, anche se non sono più coincidenti:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 = (ct)^2$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = R'^2 = (ct')^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - ct^2 = 0 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2$$

$$\begin{aligned} x^2 - c^2 t^2 &= x'^2 - c^2 t'^2 = \lambda^2 (x - ut)^2 - c^2 (\lambda_{41} x + \lambda_{44} t)^2 = \\ &= \lambda^2 x^2 + \lambda^2 u^2 t^2 - 2\lambda^2 xut - c^2 \lambda_{41}^2 x^2 - c^2 \lambda_{44}^2 t^2 - 2c^2 \lambda_{41} x \lambda_{44} t \end{aligned}$$

Risolvendo in λ^2 , λ_{41}^2 e λ_{44}^2 si ottiene un sistema di tre incognite e tre equazioni:

$$\begin{cases} 1 = \lambda^2 - c^2 \lambda_{41}^2 \\ -c^2 = \lambda^2 u^2 - c^2 \lambda_{44}^2 \\ 0 = -2\lambda^2 u - 2c^2 \lambda_{41} \lambda_{44} \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_{41}^2 = \frac{\lambda^2 - 1}{c^2} \\ \lambda_{44}^2 = \frac{c^2 + \lambda^2 u^2}{c^2} \\ -\lambda^2 u = c^2 \lambda_{41} \lambda_{44} \end{cases}$$

Ci ricordiamo dell'ultima espressione che $\lambda_{41} \lambda_{44} < 0$

$$\begin{aligned} \lambda^4 u^2 &= c^4 \lambda_{41}^2 \lambda_{44}^2 = c^4 \frac{\lambda^2 - 1}{c^2} \frac{c^2 + \lambda^2 u^2}{c^2} = \\ &= (\lambda^2 - 1)(c^2 + \lambda^2 u^2) = -c^2 - \lambda^2 u + \lambda^2 c^2 + \lambda^4 u^2 \\ 0 &= -c^2 - \lambda^2 u^2 + \lambda^2 c^2 \\ \lambda^2 &= \frac{c^2}{c^2 - u^2} = \frac{1}{1 + \frac{u^2}{c^2}} \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma$$

$$\lambda_{41}^2 = \frac{\lambda^2 - 1}{c^2} = \frac{\beta^2}{c^2(1 - \beta^2)}$$

$$\lambda_{41} = \pm \frac{\beta}{c\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\lambda_{44}^2 = \frac{c^2 + \lambda^2 u^2}{c^2} = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

$$\lambda_{44} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Diamo segno positivo a λ_{44} e negativo a λ_{41} , in quanto se consideriamo un istante molto prossimo al momento della partenza allora $x \rightarrow 0$, t' deve essere positivo (il tempo scorre nello stesso verso) e quindi $\lambda_{44} > 0$.

9.3.1 Trasformate di Lorentz e Galileo

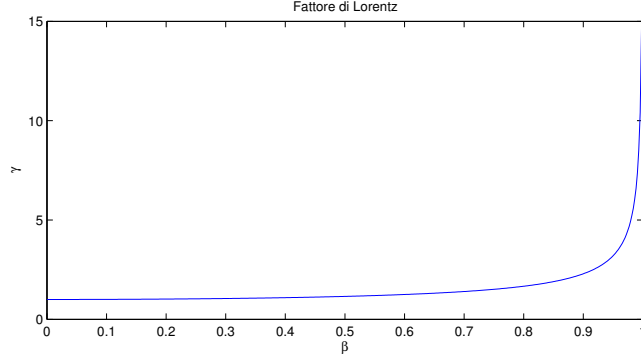
Se $u \ll c$, cioè se $\beta \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Lorentz} \rightarrow \text{"buon" Galileo}$ e il tempo assoluto.

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{array} \right. \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \left\{ \begin{array}{l} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \right.$$

9.4 Contrazione delle lunghezze

Consideriamo spazi nello stesso tempo. Posizioniamo un'asta con estremi A e B ferma rispetto ad O' , sistema di riferimento inerziale con velocità u rispetto ad O . O misura nello stesso istante le posizioni di A e di B , quindi $t_A \equiv t_B$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_A = \frac{x_A - ut_A}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ x'_B = \frac{x_B - ut_B}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{array} \right.$$

Figura 9.4: Variazione di γ in funzione di β

$$l' = x'_B - x'_A = \frac{x_B - x_A - ut_B + ut_A}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x_B - x_A - u(t_B - t_A)}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x_B - x_A}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma l$$

$$l = \frac{l'}{\gamma} \quad (9.1)$$

Considerando che $0 < \beta < 1 \Rightarrow \gamma > 1$ si ha che $l < l'$, cioè O osserva un oggetto in moto contratto.

9.5 Dilatazione dei tempi

Consideriamo eventi osservati da O' nello stesso spazio ($x'_A \equiv x'_B$) a distanza di tempo $\tau' = t'_B - t'_A$.

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\beta}{c} x \right)$$

Per simmetria posso dire direttamente che:

$$t = \gamma \left(t' + \frac{\beta}{c} x' \right)$$

$$t_A = \gamma \left(t'_A + \frac{\beta}{c} x'_A \right)$$

$$t_B = \gamma \left(t'_B + \frac{\beta}{c} x'_B \right)$$

$$\tau = t_B - t_A = \gamma \left(t'_B - t'_A + \frac{\beta}{c} (x'_B - x'_A) \right) = \gamma (t'_B - t'_A) = \gamma \tau' \quad (9.2)$$

Ancora, essendo $\gamma > 1$ si ha che $\tau > \tau'$ cioè O vede l'evento più lentamente di O' .

Esempio 9.1 (produzione e decadimento di mesoni π^+) Un protone colpisce un altro protone fermo:

$$p + p \rightarrow p + n + \pi^+$$

Il mesone decade:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$$

Un omino cavalca il mesone π^+ e osserva un tempo di vita media $\tau' = 1.88 \times 10^{-8}$ s. Il mesone ha rispetto al laboratorio $\beta = 0.99$. Il laboratorio dalla distanza percorsa dal mesone calcola una vita media diversa:

$$\tau = \gamma\tau' = \frac{\tau'}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq 7.1\tau' = 1.3 \times 10^{-7} \text{ s}$$

La distanza percorsa dal mesone, prima di decadere, osservata dal laboratorio è quindi:

$$d = \tau u = \tau\beta c \simeq 39 \text{ m}$$

9.6 Composizione delle velocità

La velocità rimane sempre la derivata del vettore posizione: $v_x = \frac{dx}{dt}$.

$$v'_{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \frac{1}{\frac{dt'}{dt}} = \gamma \left(\frac{dx}{dt} - u \right) \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{\beta}{c} \frac{dx}{dt} \right)} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{\beta}{c} v_x} \quad (9.3)$$

$$v'_{y'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dt'} = v_y \frac{1}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{v_y}{\gamma \left(1 - \frac{\beta}{c} \frac{dx}{dt} \right)} = \frac{v_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{\beta}{c} v_x} \quad (9.4)$$

Un'analoga equazione vale per $v'_{z'}$, essendo come $v'_{y'}$, una velocità trasversa rispetto ad u .

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} v'_{x'} = v_x - u \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} v'_{y'} = v_y$$

cioè la composizione delle velocità secondo Galileo.

Esempio 9.2 (decadimento π^0) π^0 decade con un decadimento elettromagnetico del tipo:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$$

Per la conservazione della quantità di moto i due fotoni devono avere velocità opposte, c misurate sia dal sistema del laboratorio (O) sia dal sistema in moto con il π^0 , O' . Supponiamo che i fotoni si propaghino secondo l'asse x e che il mesone si muovesse alla velocità u verso destra rispetto ad O . Per Einstein la velocità dei due fotoni vista da O e da O' è uguale. Per il fotone che va a destra:

$$v_x = \frac{v'_{x'} + u}{1 + \frac{\beta}{c}v'_{x'}} = \frac{c + u}{1 + \frac{u}{c^2}c} = c$$

Per l'altro:

$$v_x = \frac{-c + u}{1 - \frac{u}{c^2}(-c)} = -c$$

9.7 Massa

Dalla conservazione della quantità di moto ricaviamo la massa relativistica. Siano O e O' due osservatori dotati di due pistole identiche con proiettili identici, cioè con stesse masse a riposo. O' si muove verso destra rispetto ad O con velocità costante u . Gli assi x e x' non coincidono, sono sfasati, ma questo conta poco perché considerando le velocità, cioè derivando, il problema scompare. O' spara in direzione di O cioè nel verso delle y decrescenti. O vede il suo proiettile con velocità:

$$\dot{y}'_{O'} = -U \quad \dot{x}'_{O'} = 0$$

O vede il proiettile di O' con velocità:

$$\dot{y}_{O'} = \frac{\dot{y}'_{O'} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \frac{\beta}{c}\dot{x}'_{O'}} = -\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}U$$

O spara a O' nel verso delle y crescenti e misura la velocità del proiettile:

$$\dot{y}_O = U \quad \dot{x}_O = 0$$

e O' vede il proiettile di O con:

$$\dot{y}'_O = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}U$$

la quantità di moto si deve conservare quindi O vede:

$$m_O U + m_{O'} \dot{y}_{O'} = 0$$

tratto da [2]

$$m_{O'} = \frac{m_O U}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} U = \frac{m_O}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Considerando O fermo:

$$m_O = m_0 = \text{massa a riposo}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma m_0$$

$$\beta \rightarrow 1 \Rightarrow m \rightarrow +\infty$$

9.8 Quantità di moto

$$p = mv = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \beta c = \gamma m_0 v$$

β della particella. Con questa nuova definizione di quantità di moto essa si conserva ancora, anche in contesto relativistico.

$$\beta \rightarrow 1 \Rightarrow p \rightarrow +\infty$$

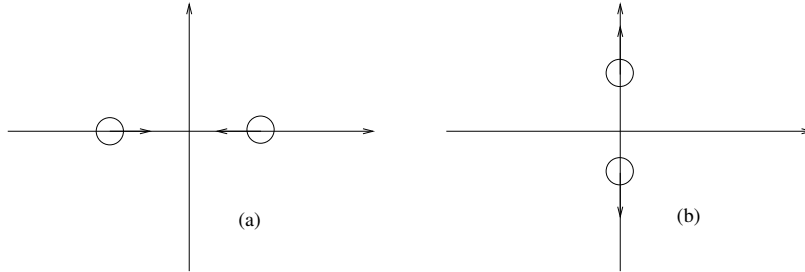


Figura 9.5: (a) prima dell'urto; (b) dopo l'urto

Esempio 9.3 (quantità di moto classica vs relativistica) Urto frontale tra due particelle con stessa massa e velocità, sull'asse x . Dopo l'urto le particelle possono andare su qualunque direzione, ipotizziamo quella verticale. La quantità di moto si conserva, infatti all'inizio:

$$p_x = mv_x - mv_x = 0 \quad p_y = mv_y - mv_y = 0$$

e dopo l'urto:

$$p_x = mv_x - mv_x = 0 \quad p_y = mv_y - mv_y = 0$$

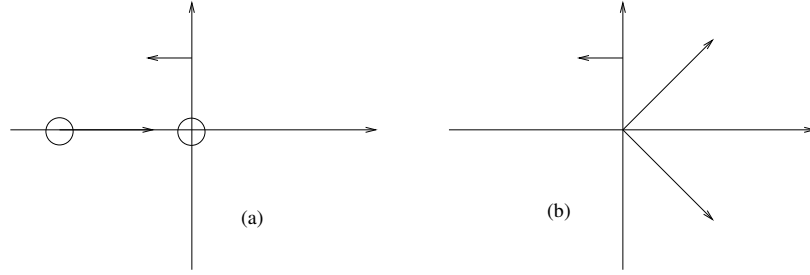


Figura 9.6: (a) prima dell'urto; (b) dopo l'urto

Quindi sembra che la conservazione della quantità di moto classica funzioni. Cambiamo sistema di riferimento, consideriamo quello solidale con la seconda particella. Essa prima dell'urto si muove con velocità $u = v$ verso sinistra. Utilizzando le composizioni delle velocità relativistiche:

$$\begin{cases} p'_{x'} = p'_{x_1} = \frac{v+v}{1+\frac{v^2}{c^2}}m = \frac{2v}{\frac{c^2+v^2}{c^2}}m = 2mu \frac{1}{1+\beta^2} \\ p'_{y'} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p'_{x'} = 2mv'_{x'} = 2mu \\ p'_{y'} = 0 \end{cases}$$

La quantità di moto fallisce. Bisogna considerare la correzione della massa.

9.9 Energia Relativistica

9.9.1 Teorema lavoro–energia

Per far funzionare il teorema $L = \Delta K$ bisogna cambiare la definizione di energia cinetica.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$m^2(1-\beta^2) = m_0^2 \quad m^2 c^2 - m^2 v^2 = m_0^2 c^2$$

$$2mc^2 dm - 2mv^2 dm - 2m^2 v dv = 0$$

$$c^2 dm = v^2 dm + m v dv$$

Considerando solo una forza diretta come l'asse x :

$$L = \int_A^B \mathbf{F} d\mathbf{x} = \int \frac{d\mathbf{p}}{dt} d\mathbf{x} = \int d\mathbf{p} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \int \mathbf{v} d\mathbf{p} = \int \mathbf{v} d(m\mathbf{v}) = \Delta K =$$

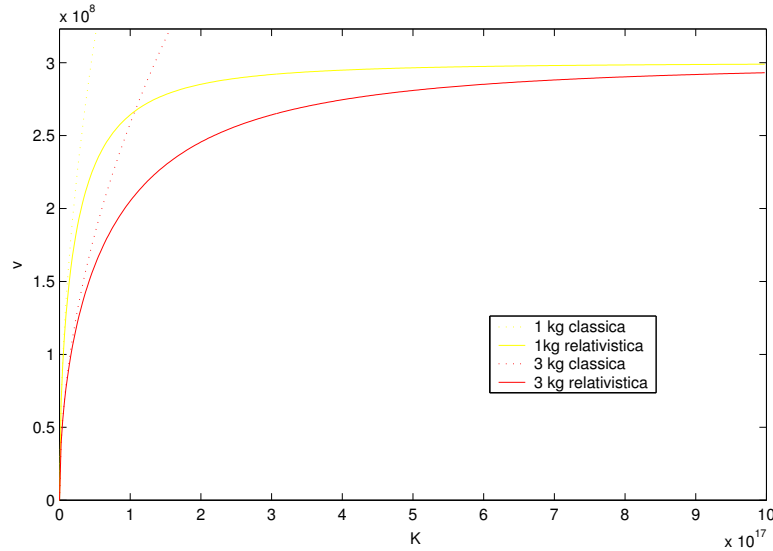


Figura 9.7: Velocità in funzione dell'energia cinetica con diverse masse

$$= \int (dm \mathbf{v} + m d\mathbf{v}) \mathbf{v} = \int (dm v^2 + m v dv) = c^2 \int_{v_A}^{v_B} dm = (m(v_B) - m(v_A)) c^2$$

Se $K(0) = 0$ in accordo con quella classica:

$$K(B) = K(B) - K(0) = \Delta K = (m_B - m_0)c^2 \quad K = mc^2 - m_0c^2$$

$$\underbrace{m_0c^2}_{\text{energia a riposo}} + \underbrace{K}_{\text{energia cinetica}} = \underbrace{mc^2}_{\text{energia totale}}$$

$$E = mc^2 \quad \Delta E = \Delta K = L$$

$$K = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0c^2 = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = m_0c^2 (\gamma - 1)$$

9.9.2 Energia cinetica classica

$$v \ll c \quad m_0c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots - 1 \right) = \frac{1}{2}m_0\beta^2c^2 = \frac{1}{2}m_0v^2$$

9.9.3 Urti ed energia

$$E = m_0c^2 + K = mc^2$$

La massa durante l'urto può aumentare, si creano nuove particelle. Non basta avere molta energia per creare nuove particelle, ma bisogna concentrarla.

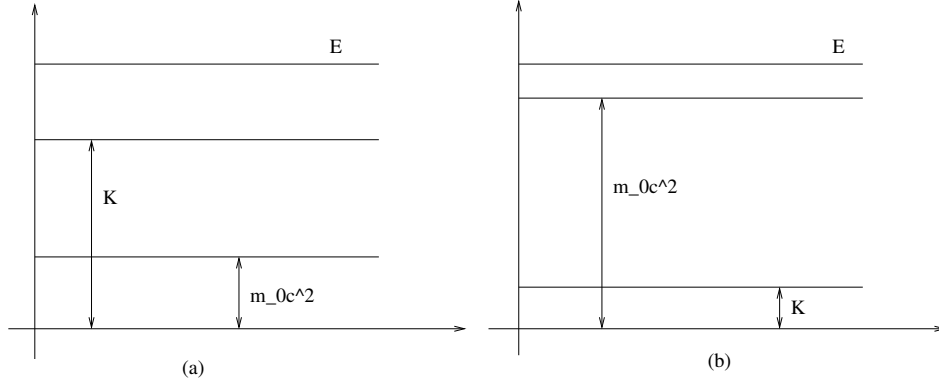


Figura 9.8: (a) prima dell'urto; (b) dopo l'urto

9.9.4 Conservazione dell'energia

In meccanica classica il teorema della conservazione dell'energia diceva che l'energia totale si conservava:

$$K + U = E = \text{const}$$

L'energia potenziale ha sempre la stessa definizione, il lavoro è definito come variazione dell'energia totale (mc^2):

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(r_1) - U(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} dK = m_{r_2}c^2 - m_{r_1}c^2$$

$$m_{r_1}c^2 + U(r_1) = m_{r_2}c^2 + U(r_2)$$

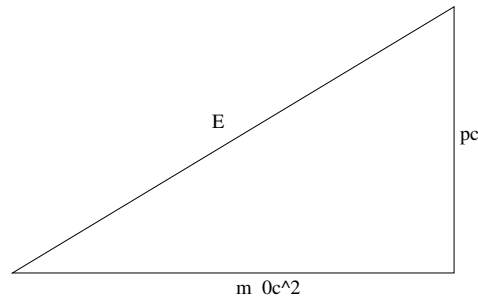
$$mc^2 + U = \text{const}$$

9.10 Quantità di moto ed energia

$$\begin{cases} E = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}c^2 \\ p = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\beta c \end{cases} \Rightarrow \frac{p}{E} = \frac{\beta}{c} \Rightarrow \beta E = pc$$

$$E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1-\beta^2} \quad E^2 - \beta^2 E^2 = m_0^2 c^4 \quad E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$$

$$E^2 = (m_0 c^2)^2 + (pc)^2$$



9.11 Elettronvolt

La carica dell'elettrone vale circa 1.6×10^{-19} C. 1 eV è quell'energia che acquista un elettrone accelerato da una ddp di 1 V

$$E = qV \quad \text{eV} = q_e(1 \text{ V}) = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Molto usati sono i multipli: keV(chév), MeV(mév), GeV(gev), TeV(tev), PeV(pev).

Anche le masse e le quantità di moto si possono esprimere in eV, combinando opportunamente con c .

$$E = mc^2$$

$$1 \text{ kg } c^2 = 1 \text{ kg}(3 \times 10^8 \text{ m/s}) = 9 \times 10^{16} \text{ J} = 5.62 \times 10^{35} \text{ eV}$$

$$1 \text{ eV}/c^2 = 1.78 \times 10^{-36} \text{ kg}$$

Esempio 9.4 (decadimento particella strana) Si vuole determinare il momento finale dei prodotti del decadimento della K_0 :

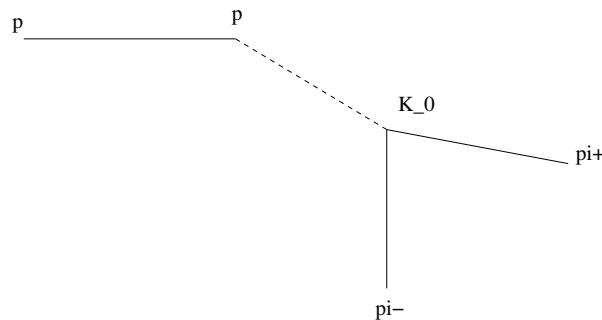


Figura 9.9: Un protone urta un protone fisso, si genera un K_0 che non è rilevabile in quanto neutro, dopo τ decade nei mesoni

$$K_0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$$

$$m_0^{K_0} = 500 \text{ MeV}/c^2 \quad m_0^{\pi^+} = 140 \text{ MeV}/c^2$$

$$\tau_{K_0} = 0.9 \times 10^{-10} \text{ s}$$

Nel sistema di K_0 l'impulso dei mesoni è:

$$\begin{array}{ccc} \text{pi-} & \text{K}_0 & \text{pi+} \\ \leftarrow & \bullet & \rightarrow \end{array}$$

$$\mathbf{p}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_f = 0 = \mathbf{p}_{\pi^+} + \mathbf{p}_{\pi^-}$$

$$m_0^{\pi^+} = m_0^{\pi^-} = m_0^\pi \quad p_{\pi^+} = p_{\pi^-} = p_\pi \quad E_0 = E_f$$

$$E_0 = m_0^{K_0} c^2 = E_f = \sqrt{(m_0^{\pi^+} c^2)^2 + p_{\pi^+}^2 c^2} + \sqrt{(m_0^{\pi^-} c^2)^2 + p_{\pi^-}^2 c^2} =$$

$$= 2\sqrt{(m_0^\pi c^2)^2 + p_\pi^2 c^2}$$

$$(m_0^{K_0})^2 c^4 = 4(m_0^\pi c^2)^2 + 4p_\pi^2 c^2$$

$$p_\pi^2 = \frac{(m_0^{K_0})^2 c^4 - 4(m_0^\pi)^2 c^4}{4c^2} = \frac{(m_0^K)^2 c^2}{4} - (m_0^\pi)^2 c^2$$

$$p_\pi = c\sqrt{\frac{(m_0^K)^2}{4} - (m_0^\pi)^2}$$

9.12 Forza e accelerazione

Newton: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

$$dK = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

$$E = mc^2 = K + m_0 c^2 \quad dm = \frac{1}{c^2} dK = \frac{1}{c^2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

partiamo da quantità che abbiamo già ben definito in relatività: p e t

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{dm}{dt}\mathbf{v} + m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{c^2}\mathbf{F}\frac{d\mathbf{s}}{dt}\mathbf{v} + m\mathbf{a} = \frac{1}{c^2}(\mathbf{F}\mathbf{v})\mathbf{v} + m\mathbf{a}$$

La direzione di \mathbf{F} e di \mathbf{a} non è la stessa (!)

9.12.1 Casi Particolari

$\mathbf{F} // \mathbf{v}$

$$F = \frac{1}{c^2} F v^2 + m a$$

$$F = \frac{m a}{1 - \beta^2} = \frac{m_0}{1 - \beta^2} (1 - \beta^2)^{-1/2} a = \underbrace{\frac{m_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}}}_{\text{massa longitudinale}} a = m_{//} a$$

$\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} = \underbrace{\frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}}_{\text{massa trasversa}} \mathbf{a} = m_{\perp} \mathbf{a}$$

Esempio 9.5 (elettrone in campo magnetico)

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Campo magnetico ortogonale alla velocità¹

$$F = q v B = m_{\perp} \frac{v^2}{r}$$

$$r = \frac{m_{\perp} v}{q B} = \frac{p}{q B}$$

$$\mathbf{F} \perp \mathbf{v} \Rightarrow L = 0 \Rightarrow v = \text{const} \Rightarrow p = \text{const} \Rightarrow r = \text{const}$$

$$B = 2 \text{ Wb/m}^2 \quad K = 10 \text{ MeV}$$

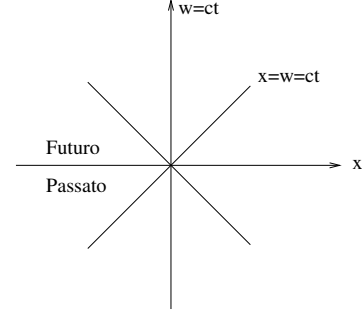
$$r = 1.8 \text{ cm} \quad \text{Relativistico}$$

$$r = 0.5 \text{ cm} \quad \text{Classico}$$

¹per una trattazione più completa vedi [16.1](#) a pag. [200](#)

9.13 Spazio di Minkowski

Lo spazio di Minkowski è utile per dare un significato geometrico alla relatività speciale. Per comodità grafiche consideriamo solo una coordinata spaziale e una temporale. Sull'asse delle ascisse rappresentiamo x e sull'asse delle ordinate il tempo moltiplicato per c , che lo rende uno spazio. La bisettrice dei quadranti è la linea di universo della luce, essa rappresenta il cammino di un raggio luminoso.



$$\frac{dw}{dx} = \frac{d(ct)}{dx} = c \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{c}{v} > 1$$

Quindi la traiettoria di ogni punto massivo nel piano di Minkowski deve avere tangente in ogni punto maggiore di uno, altrimenti andrebbe più veloce della luce. Creiamo un nuovo sistema di riferimento inerziale.

$$\begin{cases} x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ t' = \frac{t-\frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \frac{x-\beta w}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ w' = \frac{w-\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

$$w' = ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

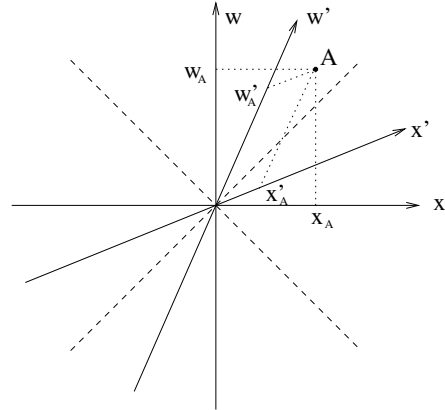
asse x' : $w' = 0$, cioè

$$w = \beta x$$

asse w' : $x' = 0$, cioè

$$w = \frac{x}{\beta}$$

Più β tende a 1 e più i due assi del nuovo sistema di riferimento tendono alla bisettrice del primo-terzo quadrante.



9.13.1 Dilatazione dei tempi

A e B sono due eventi simultanei per OXY , ma non lo sono per $OX'Y'$. Analogamente si dimostra la contrazione delle lunghezze.

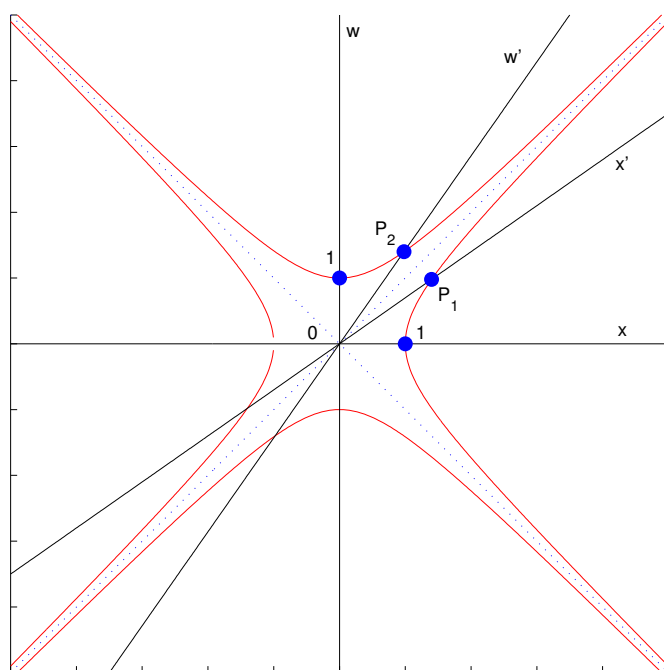
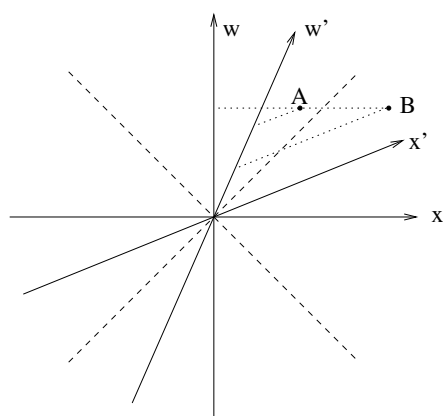


Figura 9.10: Curve di calibrazione

9.13.2 Curve di calibrazione

$$\begin{cases} w^2 - x^2 = 1 \\ x^2 - w^2 = 1 \end{cases}$$

$$P_1 \begin{cases} x^2 - w^2 = 1 \\ w' = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2(1 - \beta^2) = 1 \\ x = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases}$$

$$x' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \beta w}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \beta^2 x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = 1$$

$$\begin{array}{cc} P_1(1, 0) & P_2(0, 1) \\ \overline{OP_1} > \overline{O1} & \overline{OP_2} > \overline{O1} \end{array}$$

9.14 Dubbi di Einstein

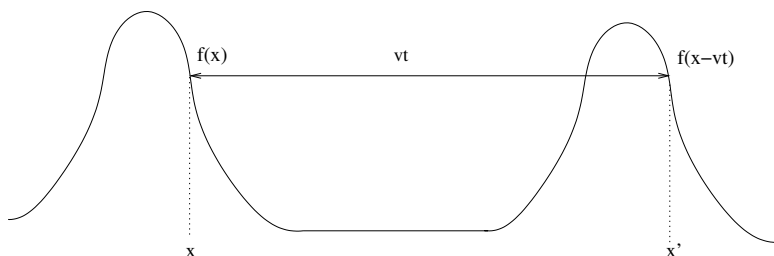
Einstein si interrogava di come le forze potessero propagarsi, in particolare quella gravitazionale. Se il Sole scomparisse per Newton la Terra istantaneamente partirebbe per la tangente. Per Einstein ciò è impossibile, perché nulla, nemmeno la forza gravitazionale, o l'informazione "il Sole non c'è più", può viaggiare più veloce della luce. Con la generale si risolve il problema, la massa incurva lo spazio.

10

Onde

Le onde sono un moto che trasporta energia, mentre generano uno spostamento netto di materia nullo. Le onde meccaniche sono quelle che hanno bisogno di un mezzo elastico per propagarsi, le onde elettromagnetiche si propagano anche nel vuoto. Le onde trasversali sono quelle in cui la direzione di propagazione dell'onda è ortogonale al moto delle particelle. Le onde longitudinali sono quelle in cui le vibrazioni sono parallele alla velocità dell'onda. Le onde possono essere monodimensionali (corda ideale vibrante), bidimensionali (sasso nell'acqua), tridimensionali (suono). Di solito quando si parla di onde si parla di treno d'onde periodico, il caso più semplice è l'onda armonica in cui tutte le particelle subiscono un moto armonico semplice. Per le onde trasversali si parla anche di polarizzazione, cioè l'orientamento del piano di vibrazione, che può essere costante (onda polarizzata) o meno.

Se mandiamo due impulsi in un mezzo elastico:



$$f(x) = f(x') = f(x - vt)$$

questo perché la forma d'onda non cambia. Questa è un'onda progressiva, cioè un'onda che si propaga nel verso positivo delle x , se fosse al contrario sarebbe un'onda regressiva e sarebbe

$$f(x) = f(x + vt)$$

10.1 Onde sinusoidali

Caso onda progressiva: $y(x, t) = f(x - vt)$ al tempo zero:

$$y(x, 0) = f(x) = y_m \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

$$\lambda = vT$$

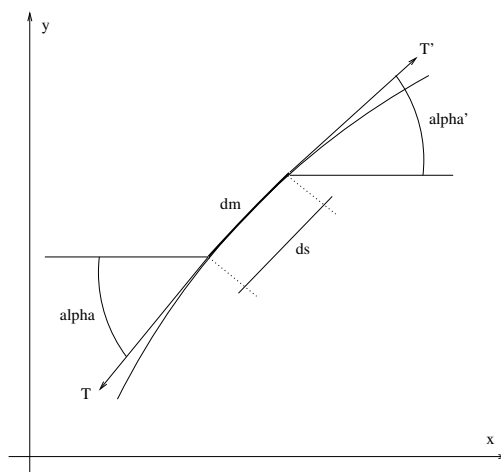
$$y(x, t) = f(x - vt) = y_m \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] = y_m \sin(kx - \omega t)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

k numero d'onda, ω pulsazione. Considerando anche la fase φ :

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

10.2 Corda Tesa



Trascuriamo il peso. Sull'elemento infinitesimo dx agiscono due tensioni:

$$\mathbf{T}' + \mathbf{T} = dm\mathbf{a}$$

$$\begin{cases} T' \cos \alpha' - T \cos \alpha = dma_x = 0 \\ T' \sin \alpha' - T \sin \alpha = dma_y \end{cases}$$

Per deformazioni piccole usiamo il primo sviluppo di Taylor:

$$\cos \alpha = 1 + \dots \quad \sin \alpha = \alpha + \dots$$

$$\begin{cases} T' = T \\ T' \alpha' - T \alpha = dma_y = dma \end{cases}$$

Ma il primo sviluppo di Taylor del seno è uguale a quello della tangente:

$$T \tan \alpha' - T \tan \alpha = dma$$

Ma la tangente è la derivata delle y nelle x :

$$T \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+dx} - T \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x = dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$T \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_x dx = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dm$$

Chiamiamo ρ la densità lineare:

$$\rho = \frac{dm}{ds} \quad dm = \rho s \quad ds \cos \alpha = dx \quad dm = \rho dx$$

$$T \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_x dx = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{equazione di D'Alembert}$$

10.3 Equazione differenziale di un'onda

Nel caso progressivo:

$$y = f(x - vt) \quad z = x - vt$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial t} \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial t}} = -\frac{1}{v} \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right) \frac{\partial t}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{v} \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{1}{-v} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \frac{1}{-v} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\
\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\
\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{10.1}$$

Nel caso della corda tesa $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$. Nella velocità ci sono sempre due termini, uno di elasticità del mezzo (in questo caso T) e uno di inerzia (in questo caso ρ).

Nel caso di onda regressiva l'equazione differenziale è uguale, anche nei segni.

10.4 Velocità e accelerazione trasversale

$$\begin{aligned}
u_y(x, t) &= \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [y_m \sin(kx - \omega t)] = -y_m \omega \cos(kx - \omega t) \\
a_y(x, t) &= \frac{\partial u_y}{\partial t} = -y_m \omega^2 \sin(kx - \omega t) = -\omega^2 y
\end{aligned}$$

10.5 Principio di sovrapposizione

Principio 10.1 (sovrapposizione) *In un mezzo in cui due onde si sovrappongono, la perturbazione è la somma delle due onde.*

10.5.1 Interferenza

L'interferenza è la sovrapposizione di due onde sinusoidali. Prendiamo due onde progressive, sinusoidali, con stessa ampiezza e frequenza, ma con diversa fase. La differenza di fase è la costante di fase.

$$y_1 = y_m \sin(kx - \omega t) \quad y_2 = y_m \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

$$\begin{aligned}
y_1 + y_2 &= y_m [\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t + \varphi)] \\
&= y_m \left[2 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \\
&= \left(2y_m \cos \frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2} \right)
\end{aligned}$$

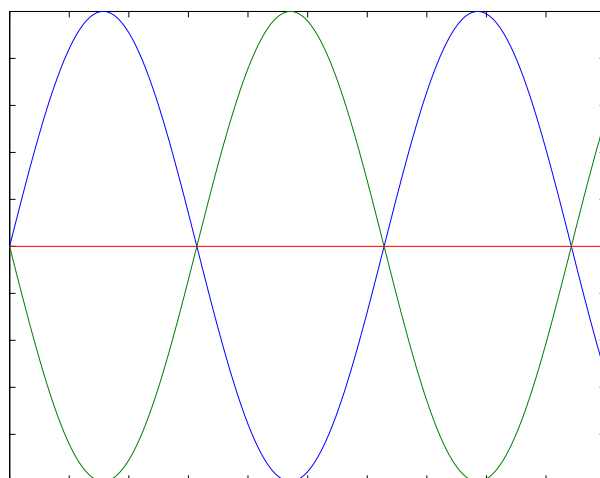


Figura 10.1: Interferenza distruttiva

L'ampiezza delle onde non è più costante, ma è una funzione armonica. Si distinguono due casi particolari:

$\varphi = 0 + 2k\pi$	$y_m \rightarrow 2y_m$	Interferenza costruttiva
$\varphi = \pi + 2k\pi$	$y_m \rightarrow 0$	Interferenza distruttiva

10.6 Onde stazionarie

Le onde stazionarie sono il frutto dell'interferenza di un'onda progressiva e una regressiva, tipicamente di un'onda con la sua riflessa.

$$y_1 = y_m \sin(kx - \omega t) \quad y_2 = y_m \sin(kx + \omega t)$$

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = y_m [\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)] \\ &= 2y_m [\sin(kx) \cos(\omega t)] \end{aligned}$$

La parte spaziale e quella temporale si separano. Se consideriamo con ampiezza $2y_m \sin(kx)$ allora ci sono dei punti dove il seno si annulla che non vibrano, sono i nodi, mentre dove la vibrazione è massima ci sono i ventri. Nodi:

$$\begin{aligned} \sin(kx) &= 0 & kx &= 0, \pi, \dots \\ n\pi &= kx & k &= \frac{2\pi}{\lambda} & x &= n \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

Le onde stazionarie non trasportano energia.

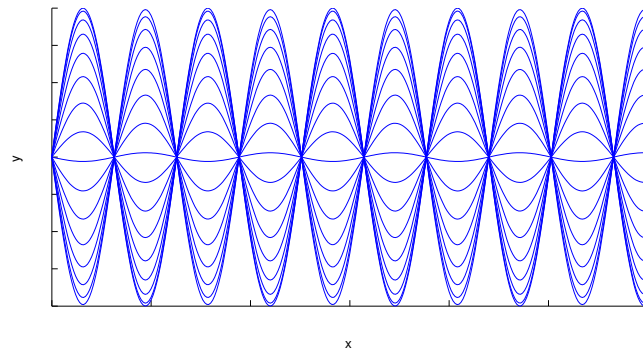


Figura 10.2: famiglia di onde stazionarie disegnate a intervalli costanti di tempo

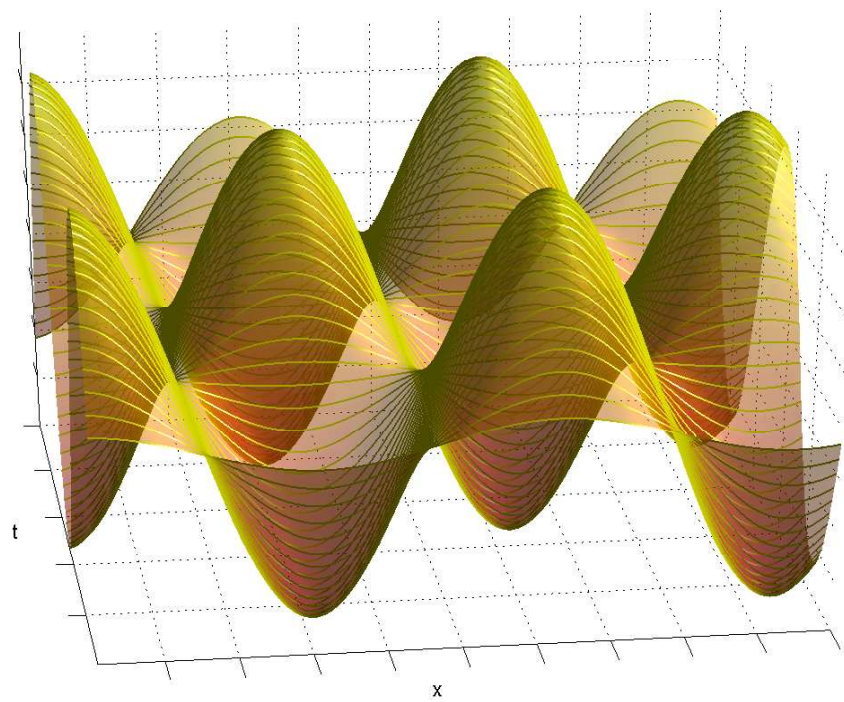


Figura 10.3: Onde stazionarie in tre dimensioni

10.7 Effetto Doppler

L'effetto Doppler si sviluppa quando la sorgente delle onde e l'osservatore sono in moto relativo. Immaginando la sorgente che emette onde con velocità di propagazione u e lunghezza d'onda λ ferma e l'osservatore in allontanamento con velocità v il numero di fronti d'onda che l'osservatore riceve nel tempo t è:

$$N = \nu t = \nu_0 t - \frac{vt}{\lambda}$$

$$\nu = \nu_0 + \frac{v}{\lambda} = \nu_0 - \frac{v}{u} \nu_0 = \nu_0 \left(1 - \frac{v}{u}\right) \quad (10.2a)$$

Nel caso inverso nel quale sia la sorgente a muoversi con velocità v bisogna scambiare ν con ν_0 :

$$\nu = \nu_0 \frac{u}{u - v} \quad (10.2b)$$

notiamo che non c'è simmetria, cioè se consideriamo sorgente ferma e osservatore in moto con velocità v non otteniamo lo stesso risultato di osservatore fermo e sorgente in moto con velocità $-v$. Questo perché esiste un sistema privilegiato che è il mezzo in cui si propaga l'onda. Questo non è vero per le onde elettromagnetiche.

10.7.1 Effetto Doppler relativistico

Consideriamo l'ultimo caso trattato in funzione del periodo anziché della frequenza nel caso di onde luminose:

$$T = T'_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

T'_0 è il periodo proprio della sorgente misurato da un osservatore che si muove con la sorgente alla velocità v , quindi dall'osservatore fermo esso viene percepito come:

$$T_0 = \frac{T'_0 + \frac{\beta}{c} x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (10.3a)$$

Se consideriamo la sorgente come origine del sistema in moto allora $x' = 0$:

$$T = \frac{T_0 (1 - \beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (10.3b)$$

10.8 Suono

Il suono è un'onda longitudinale che si propaga di solito nell'aria provocando zone con maggiore pressione e zone con minore pressione e quindi zone con maggior densità e zone di rarefazione. Il suono percepito dall'uomo è quello che ha frequenza $20 \div 20000$ Hz. Sotto ci sono gli infrasuoni, sopra gli ultrasuoni. La velocità del suono è:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (10.4)$$

B è il coefficiente di comprimibilità definito come:

$$B = \frac{-\Delta p}{\Delta V/V} \quad (10.5)$$

Se approssimiamo il comportamento dell'aria ad un gas adiabatico, supponendo quindi che il suono si propaghi più veloce del calore si ha:

$$PV^\gamma = \text{const} \quad d(PV^\gamma) + P\gamma V^{\gamma-1}dV = 0$$

$$\frac{dP}{dV/V} = -\gamma P \quad v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = 330 \text{ m/s}$$

10.9 Grandezze caratteristiche

intensità del suono $I = \text{Energia}/\text{tempo superficie}$

soglia di udibilità $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$

altezza del suono la frequenza

timbro del suono è la forma d'onda, cioè la composizione in armoniche dello sviluppo di Fourier

sensazione sonora non è lineare $10 \log_{10} I/I_0$ e si misura in decibel dB

soglia del dolore 120 dB

Parte II

Fisica 2

Elettromagnetismo nel vuoto e nella materia, onde
elettromagnetiche, ottica

*Considerate la vostra semenza:
fatti non foste a viver come bruti,
ma per seguir virtute e canoscenza.*

Inferno, canto XXVI

11

Campi

Il campo è uno stato fisico dello spazio o della materia che vi è contenuta. Le cause del campo sono le sorgenti, per esempio nel caso del campo gravitazionale le masse, in quello elettrostatico le cariche; le sorgenti possono essere descritte in modo puntiforme cioè concentrate o distribuite, quindi è come densità. Le cause del campo e il campo sono legate dalle leggi del campo. Il campo è espresso attraverso le funzioni del campo.

Le leggi del campo possono essere espresse come:

leggi locali danno il valore del campo in un punto, come esso varia in funzione delle sorgenti; sono leggi differenziali;

leggi globali danno una valutazione complessiva, su una superficie o un volume; sono leggi integrali.

Il problema generale è risolvere le leggi del campo per passare dalla conoscenza delle cause alla conoscenza del campo.

Il campo può essere:

scalare cioè una funzione che associa ad ogni punto dello spazio una grandezza scalare, per esempio la temperatura di una stanza. Dal punto di vista matematico sarà una funzione : $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$;

vettoriale cioè una funzione che associa ad ogni punto dello spazio una grandezza vettoriale, per esempio il campo gravitazionale. Dal punto di vista matematico sarà una funzione : $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Dato un campo scalare possiamo definire superficie di livello le superfici il luogo dei punti dove il campo assume un certo valore costante.

11.1 Richiami di algebra vettoriale

$$(A \times B)_x = A_y B_z - A_z B_y \quad (A \times B)_y = A_z B_x - A_x B_z \quad (A \times B)_z = A_x B_y - A_y B_x$$

$$A \cdot (A \times B) = 0$$

$$A \cdot (B \times C) = (A \times B) \cdot C = (C \times A) \cdot B$$

$$(A \times B) \times C = B(A \cdot C) - A(B \cdot C)$$

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$

11.2 Operatori differenziali

11.2.1 Gradiente

Definizione 11.1 Sia $\varphi = \varphi(x, y, z)$, definiamo il gradiente di $\varphi(x, y, z)$

$$\text{grad}(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} = \nabla \varphi$$

Da un campo scalare siamo passati ad uno vettoriale. L'operatore ∇ nabla è $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$. Possiamo anche dire, sommando i differenziali lungo le componenti che:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} \quad (11.1)$$

11.2.2 Derivata direzionale

Dall'equazione (11.1) ricaviamo:

Definizione 11.2 Derivata direzionale di φ lungo la direzione di \mathbf{v} (versore):

$$\frac{d\varphi}{d\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{x})}{t} \quad (11.2)$$

se φ è differenziabile:

$$\frac{d\varphi}{d\mathbf{v}} = \nabla \varphi \cdot \mathbf{v} \quad (11.3)$$

Il gradiente è sempre perpendicolare alle superfici di livello, infatti se $d\mathbf{l}$ è parallelo alla superficie di livello allora per definizione $d\varphi = 0$ e abbiamo:

$$\nabla\varphi \cdot d\mathbf{l} = d\varphi = 0$$

La direzione del gradiente è la direzione di massima variazione del campo. Se possiamo esprimere un campo vettoriale come gradiente di un campo scalare allora il campo vettoriale è conservativo:

Teorema 11.1

$$\exists\varphi(x, y, z) : \quad \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla\varphi(x, y, z) \Rightarrow \mathbf{F} \text{ è conservativo}$$

dal punto di vista matematico vuol dire che la forma differenziale $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ha un potenziale e quindi è esatta.

11.2.3 Integrale di linea

Definizione 11.3 Sia $\mathbf{F}(x, y, z)$ la funzione di un campo vettoriale, siano P_1 e P_2 due punti di una curva Γ . Dividiamo Γ in tanti $\Delta\mathbf{l}_i$ tra P_1 e P_2 . Sia \mathbf{F}_i il valore del campo nel punto di applicazione di $\Delta\mathbf{l}_i$, allora l'integrale di linea della funzione $\mathbf{F}(x, y, z)$ lungo la curva Γ tra P_1 e P_2 :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} = \lim_{\Delta l_i \rightarrow 0} \sum \mathbf{F}_i \cdot \Delta\mathbf{l}_i \quad (11.4)$$

Supponiamo che \mathbf{F} sia conservativo, allora (per il teorema 11.1) possiamo riscrivere l'integrale di linea (11.4) come:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Gamma} \nabla\varphi(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Gamma} d\varphi = \varphi(P_2) - \varphi(P_1) \quad (11.5)$$

cioè non è in funzione della curva. Abbiamo allora una definizione di campo conservativo data dalla (11.5)¹. Consideriamo Γ una linea chiusa, allora sempre nel caso conservativo si ha:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Gamma_1}^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Gamma_2}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (11.6)$$

per ogni Γ , che è equivalente alla (11.5). La quantità nella (11.6) è chiamata circuitazione di \mathbf{F} .

¹l'ipotesi che manca è che l'insieme su cui è definito il campo sia un aperto stellato

Campo conservativo

Abbiamo ora due modi per esprimere il concetto che $\mathbf{F}(x, y, z)$ è conservativo, uno dato dal teorema 11.1 e l'altro dalla (11.6):

forma differenziale (locale)

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \text{grad } \varphi(x, y, z)$$

forma integrale (globale)

$$\oint \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{l} = 0$$

11.2.4 Flusso

Definizione 11.4 Il flusso uscente attraverso la superficie S del campo \mathbf{F} è definito come:

$$\phi_S(\mathbf{F}) = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da$$

operativamente significa:

$$\lim_{\Delta A_k \rightarrow 0} \sum \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{n}_k \Delta A_k$$

dove ΔA_k sono le areole in cui abbiamo scomposto la superficie S , \mathbf{n}_k le loro normali e \mathbf{F}_n il valore del campo al centro delle areole. Per una superficie chiusa si parla di:

$$\phi_S(\mathbf{F}) = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da$$

normale

La normale è un vettore di modulo unitario, ortogonale alla superficie, per una superficie chiusa è orientato verso l'esterno (e infatti si parla di flusso uscente), mentre per una superficie generica dipende dall'orientamento del contorno. A volte al posto di usare il concetto di normale si preferisce usare il concetto di area orientata, che diventa un vettore ($d\mathbf{a} = \mathbf{n} \, da$):

$$\phi_S(\mathbf{F}) = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}$$

flusso netto

Se dividiamo una superficie S con un taglio la dividiamo in due superfici: S_a e S_b ; sia S_{ab} la superficie di taglio. Sia $S_1 = S_a \cup S_{ab}$ e $S_2 = S_b \cup S_{ab}$. I flussi che escono dalla superfici saranno:

$$\phi_{S_1}(\mathbf{F}) = \int_{S_a} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da + \int_{S_{ab}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1 \, da$$

$$\phi_{S_2}(\mathbf{F}) = \int_{S_b} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da + \int_{S_{ab}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 \, da$$

ma essendo la normale orientata verso l'esterno del volume:

$$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$$

Quindi il flusso è la somma dei flussi delle superfici aperte S_a e S_b :

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{S_a} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da + \int_{S_b} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da$$

Possiamo ripetere il procedimento e suddividere ulteriormente a piacimento.

Se il flusso uscente è maggiore di zero vuol dire che all'interno ci sono sorgenti positive, se minore di zero sorgenti negative. Si intende sempre somma delle sorgenti.

11.2.5 Divergenza

La divergenza non è altro che il flusso in un punto, cioè su una superficie infinitesima.

Definizione 11.5

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \lim_{V \rightarrow 0} \oint_S \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da}{V}$$

con S la superficie che racchiude V .

Possiamo dire che se la divergenza nel punto è nulla allora in quel punto non c'è accumulo, se positiva c'è una densità positiva di sorgenti, se negativa una densità negativa.

Prendiamo per esempio un parallelepipedo, allineato con gli assi cartesiani e con uno spigolo in coordinate (x, y, z) . Siano le sue dimensioni Δx , Δy ,

Δz . Conoscendo il flusso sulla faccia 1 nella direzione x con Taylor al primo ordine possiamo calcolare il flusso sulla faccia 2:

$$\mathbf{F}(2) = F_x(1) + \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta x$$

Risulta allora:

$$\phi(1) = -F_x(1) \Delta y \Delta z$$

$$\phi(2) = \left[F_x(1) + \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y \Delta z$$

$$\phi(1 \cup 2) = \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

e similmente per le altre faccie, il flusso totale è allora:

$$\int_{\text{cubo}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

Se ora facciamo $\Delta V \rightarrow 0$ che risolve tutti i problemi degli ordini trascurati nello sviluppo di Taylor abbiamo che:

$$\text{div } \mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) = \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (11.7)$$

11.2.6 Teorema della divergenza

Dall'equazione (11.7) possiamo scrivere sostituendo la definizione di divergenza:

$$\frac{d}{dV} \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

allora:

Teorema 11.2 (divergenza) *Sia S la superficie che delimita il volume V :*

$$\int_V \text{div } \mathbf{F} dv = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} da$$

Conoscendo la divergenza possiamo calcolare il flusso attraverso S . Possiamo riferirci anche a solo una direzione:

$$\int_V \frac{\partial F_x(x, y, z)}{\partial x} dv = \int_S F_x(x, y, z) \cos(n, x) da$$

Campo solenoidale

Un campo \mathbf{F} si dice solenoidale se:

legge differenziale

$$\forall x, y, z \quad \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = 0$$

legge integrale

$$\forall S \quad \phi_S(\mathbf{F}) = 0$$

11.3 Circuitazione

L'integrale di un campo vettoriale $\mathbf{C}(x, y, z)$ calcolato su una linea chiusa Γ è chiamato circuitazione. Se dividiamo il percorso in pezzetti $d\mathbf{s}$ tangenti, allora la componente del campo parallela a $d\mathbf{s}$ sarà $d\mathbf{s} \cdot \mathbf{C}$ e la circuitazione è

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} \quad (11.8)$$

Se dividiamo Γ in due cicli Γ_1 e Γ_2 appare chiaro che:

$$\oint_{\Gamma_1} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{\Gamma_2} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\Gamma} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s}$$

Possiamo continuare così fino ad ottenere dei cicli chiusi piccoli a piacere, il risultato sarebbe lo stesso in quanto le linee adiacenti si annullerebbero e rimarrebbe solo la parte esterna.

11.3.1 Teorema di Stokes

Immaginiamo un rettangolo orientato come gli assi di lati dx e dy . Sia A il vertice sinistro inferiore di coordinate (x, y) (vedi figura 11.3.1). Vogliamo calcolare la circuitazione del campo $\mathbf{C}(\mathbf{r})$ sul rettangolo. Sviluppando con Taylor al primo ordine:

$$C_x(C) = C_x(A) + \frac{\partial C_x}{\partial y} dy$$

$$[C_x(A) - C_x(C)] dx = -\frac{\partial C_x}{\partial y} dx dy$$

$$[C_y(B) - C_y(D)] dx = \frac{\partial C_y}{\partial y} dx dy$$

La circuitazione è

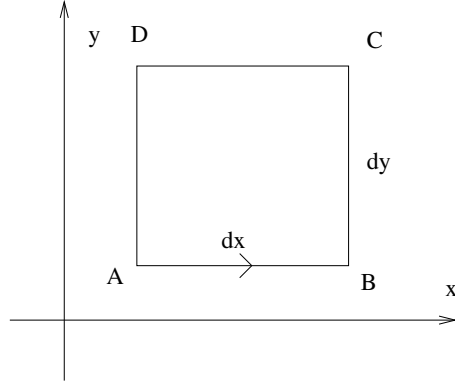


Figura 11.1: teorema di Stokes

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} &= C_x(A)dx + C_y(B)dy - C_x(C)dx - C_y(D)dy \\ &= \left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) dx dy = (\nabla \times \mathbf{C})_z da \end{aligned}$$

z in questo caso è la componente normale alla superficie. In generale:

Teorema 11.3 (Stokes)

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{C} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{n} da \quad (11.9)$$

11.4 Coordinate

Consideriamo un sistema di coordinate in \mathbb{R}^n , fissiamo una base $\{\hat{\mathbf{e}}_j\}_{j=1}^n$, ogni vettore lo possiamo scrivere univocamente nella forma:

$$\mathbf{r} = u_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \cdots + u_n \hat{\mathbf{e}}_n$$

11.4.1 Coordinate curvilinee

Definizione 11.6 (Superficie Coordinata) Una superficie coordinata è il luogo dei punti dove:

$$u_j = \text{const}$$

con j fissato.

Definizione 11.7 (Linea Coordinata) Una linea coordinata è il luogo dei punti dove:

$$\begin{cases} u_j = \text{const} \\ u_k = \text{const} \end{cases}$$

con $j \neq k$ fissati.

Definizione 11.8 (Versori delle coordinate) Il versore delle coordinate \hat{e}_j è il vettore ortogonale alle superfici coordinate $u_j = \text{const}$ e tangente alle linee coordinate $u_{\forall k \neq j} = \text{const}$.

Consideriamo ora solo \mathbb{R}^3 . Un cambiamento di coordinate è una trasformazione biunivoca, non necessariamente lineare, del tipo:

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x, y, z) \\ u_2 = u_2(x, y, z) \\ u_3 = u_3(x, y, z) \end{cases}$$

Versori

Conoscendo la trasformazione delle coordinate, il versore i -esimo delle nuove coordinate si scrive:

$$\hat{e}_i = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial u_i} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial u_i} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial u_i} \hat{k} \right)}{D_i}$$

D_i è il fattore di normalizzazione:

$$D_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i} \right)^2}$$

11.4.2 Coordinate cartesiane

Superfici coordinate

Per definizione una superficie coordinata è

$$\begin{cases} x = \text{const} \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = t \\ y = \text{const} \\ z = t \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = \text{const} \end{cases}$$

che sono tre famiglie di piani, ognuna con piani ortogonali ad un asse diverso.

Linee Coordinate

$$\begin{cases} x = \text{const} \\ y = \text{const} \\ z = t \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = t \\ y = \text{const} \\ z = \text{const} \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = \text{const} \\ y = t \\ z = \text{const} \end{cases}$$

che sono tre famiglie di rette, ognuna con rette parallele ad un asse diverso².

²const indica costanti non necessariamente uguali, quindi nella prima famiglia non è detto che $x = y$

11.4.3 Coordinate cilindriche

La trasformazione rispetto alle coordinate cartesiane è

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = w \end{cases}$$

Superfici Coordinate

Se fissiamo $\rho = \text{const}$ e facciamo variare le altre due coordinate otteniamo un cilindro; se fissiamo θ un semipiano perpendicolare al piano individuato dagli assi cartesiani xy , che ha origine sulla retta $x = y = 0$; se fissiamo w otteniamo un piano come in coordinate cartesiane.

Linee Coordinate

Se facciamo variare solo ρ otteniamo una semiretta uscente dall'origine; se facciamo variare solo θ una circonferenza che giace in un piano parallelo al piano xy ; se facciamo variare solo w otteniamo una retta parallela all'asse z .

Versori

$$D_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$$

$$D_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = \sqrt{(-\rho \sin \theta)^2 + (\rho \cos \theta)^2} = \rho$$

$$D_w = 1$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\rho = \frac{\frac{\partial x}{\partial \rho} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial \rho} \mathbf{k}}{D_\rho} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\frac{\partial x}{\partial \theta} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \mathbf{k}}{D_\theta} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_w = \mathbf{k}$$

Notare che $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ e $\hat{\mathbf{e}}_\rho$ sono ortogonali e che ogni vettore si scrive come $\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{e}}_\rho$.

11.4.4 Coordinate sferiche

La trasformazione dalla coordinate cartesiane e quella inversa sono:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

con $\rho \in (0, +\infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Superfici Coordinate

Fissando solo ρ si ottiene una sfera; fissando solo θ un cono; fissando solo φ si ottiene un semipiano.

Linee Coordinate

Variando solo ρ si ottiene una semiretta; variando solo θ una circonferenza; variando solo φ una circonferenza.

Versori

$$\begin{aligned} D_\rho &= 1 & D_\theta &= \rho & D_\varphi &= \varphi \sin \theta \\ \hat{\mathbf{e}}_\rho &= \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{j}} + \cos \theta \hat{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{e}}_\theta &= \cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{j}} - \sin \theta \hat{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{e}}_\varphi &= -\sin \varphi \hat{\mathbf{i}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

12

Elettrostatica

Tutta l'elettrodinamica nel vuoto può essere descritta con le quattro equazioni di Maxwell scritte nel sistema MKS:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (12.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (12.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (12.1c)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{J}}{\varepsilon_0} \quad (12.1d)$$

oppure nel sistema CGS:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (12.2a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (12.2b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (12.2c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (12.2d)$$

In elettrostatica si studia il campo elettrico \mathbf{E} in condizioni stazionarie, che non dipendono dal tempo, quindi le equazioni di Maxwell nel vuoto

diventano:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (12.3a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (12.3b)$$

si parla allora di campo elettrostatico.

12.1 Carica

La carica è una proprietà della materia, tanto quanto la massa. La carica può essere positiva o negativa. La più piccola è quella dell'elettrone, $-e \simeq -1.6 \times 10^{-19}$ C, tutte le altre sono multipli interi di essa.

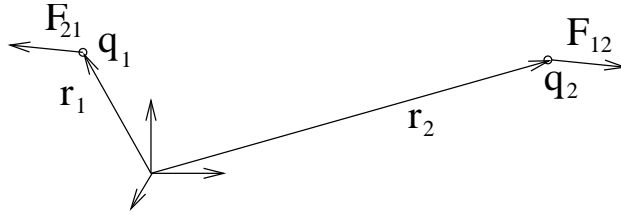
12.2 Forza di Coulomb

Partiamo da una legge sperimentale che riguarda la forza che una carica q_1 ferma esercita su una carica q_2 ferma nel vuoto:

$$\mathbf{F}_{12} = K_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad (12.4)$$

dove \mathbf{r}_{12} è il vettore che individua q_2 rispetto a q_1 e $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ è il vettore unitario orientato come \mathbf{r}_{12} :

$$\hat{\mathbf{r}}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{\|\mathbf{r}_{12}\|} \quad (12.5)$$



La (12.4) la possiamo riscrivere usando la (12.5):

$$\mathbf{F}_{12} = K_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}$$

oppure se \mathbf{r}_1 individua q_1 rispetto all'origine e \mathbf{r}_2 q_2 :

$$\mathbf{F}_{12} = K_e \frac{q_1 q_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

Naturalmente per la terza legge della dinamica:

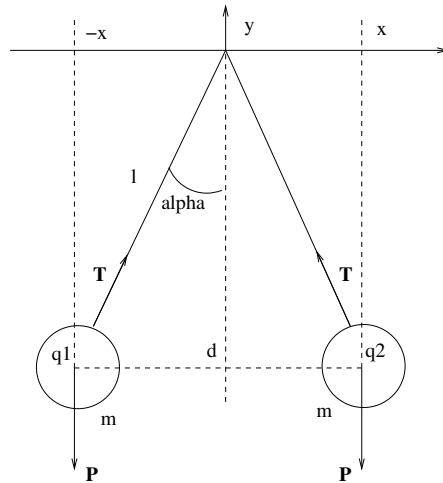
$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

12.2.1 Unità di misura

Un'idea è quella di porre $K_e = 1$ e di definire la carica unitaria quella carica che posta alla distanza unitaria da una carica unitaria produce una forza unitaria. Questo è quello che si fa nel sistema CGS Elettrostatico. Non si definisce a priori la carica, che prende il nome di u.e.s. unità elettrostatica semplice, chiamata anche stat-coulomb.

Il secondo modo è di definire a priori la carica, ed è quello che si fa nel Sistema Internazionale. Si definisce coulomb quella carica che attraversando un voltmetro al nitrato d'argento (AgNO_3) deposita sul catodo una quantità di Ag di 0.00111800 g. È una definizione provvisoria. Si ricava quindi $K_e \simeq 8.974 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2$. Nell'ambito del SI si è comodo usare il sistema razionalizzato Giorgi, nella quale $K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, $\epsilon_0 \simeq 8.8 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N m}^2$.

Il coulomb e lo stat-coulomb nonostante siano unità della stessa grandezza hanno dimensioni diverse.



Esempio 12.1 (pendolo magnetico)

Ci si chiede l'equilibrio del pendolo in figura. Se $q_1 q_2 < 0$ allora l'equilibrio è $x = 0$.

$$\mathbf{F}_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} \hat{\mathbf{e}}_{q_1, q_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4x^2} \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{P} = -mg\hat{\mathbf{j}}$$

Scomponendo sugli assi e imponendo l'equilibrio:

$$\begin{cases} T \sin \alpha \hat{\mathbf{i}} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4x^2} \hat{\mathbf{i}} = 0 \\ T \cos \alpha \hat{\mathbf{j}} - mg\hat{\mathbf{j}} = 0 \end{cases}$$

Dividendo e usando $x = l \sin \alpha$

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{q_1 q_2}{16\pi\epsilon_0 m g l^2} \frac{1}{\sin^2 \alpha} \\ \sin^2 \alpha &= 1 - \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \quad \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{1 + \tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha} \\ \tan^3 \alpha &= \frac{q_1 q_2}{16\pi\epsilon_0 m g l^2} (1 + \tan^2 \alpha)\end{aligned}$$

Ipotizziamo che $\alpha \ll 1$, allora $\tan \alpha \simeq \alpha$:

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{q_1 q_2}{16\pi\epsilon_0 m g l^2}}$$

Naturalmente se $y_1 \neq y_2$ allora le soluzioni potrebbero essere altre. Se spostiamo di poco una massa dalla posizione di equilibrio $x_0 = l\alpha$ di $\delta_x = (x - x_0)$ la forza (primo sviluppo di Taylor) risulta:

$$F(x) = F(x_0 - \delta_x) = F(x_0) + F'(x_0)\delta_x = F'(x_0)\delta_x$$

l'equazione del moto diventa:

$$m\ddot{x} = F'(x_0)\delta_x$$

12.3 Densità di carica

Al posto di immaginare la materia come un discreto con cariche puntiformi possiamo immaginarla, a livello macroscopico, come un continuo, definendo una densità di carica volumetrica. Sia V un volume, e ΔV una porzione di essa. All'interno di ΔV è contenuta la carica Δq . Definiamo densità volumetrica di carica la funzione:

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$$

La carica totale è allora:

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

Allo stesso modo possiamo definire una densità superficiale di carica $\sigma(\mathbf{r})$, o lineare $\lambda(\mathbf{r})$.

12.3.1 Forza

La forza dell'elementino dV sulla carica puntiforme esterna q è

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q dq}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$\mathbf{F} = \int_V d\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dV$$

12.4 Campo elettrico

Fino ad ora abbiamo usato il concetto di azione a distanza, cioè una carica produce direttamente (o attraverso le linee di forza) una forza su un'altra carica. L'altro modo di pensare è che una carica modifica il campo elettrostatico, il quale produce una forza su un'altra carica. Definiamo il campo elettrostatico:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}$$

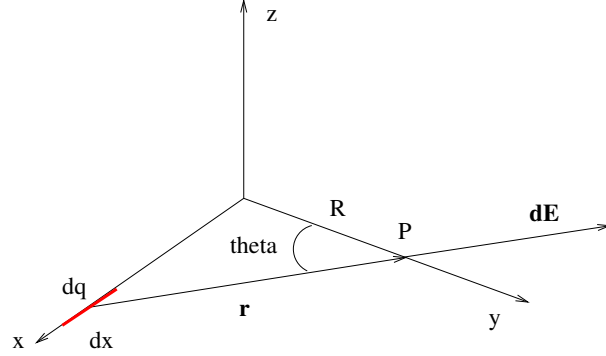
con \mathbf{F} la forza esercitata dalla carica generante il campo sulla carica esplorativa e q il valore della carica esplorativa, cioè la carica su cui agisce il campo. Può essere interpretato come la forza nell'unità di carica. Per una carica puntiforme q nell'origine abbiamo:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r} \quad (12.6)$$

12.4.1 Definizione operativa

Abbiamo definito il campo elettrostatico come la forza sulla carica di prova: è una definizione puramente matematica. Il problema dal punto di vista operativo è che se vogliamo misurare un campo elettrostatico con una carica di prova, questa modificherà la distribuzione di cariche generatrici del campo e quindi usando cariche di prova diverse troveremo campi leggermente diversi. Bisogna allora usare cariche di prova più piccole possibili, in teoria tendenti a zero. In realtà il campo non dipende dalla carica di prova, è una proprietà fisica dello spazio, ma per misurarlo abbiamo bisogno di una carica di prova. Si potrebbe definire il campo elettrostatico come $\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q}$.

Esempio 12.2 (campo elettrico di una distribuzione lineare) Immaginiamo un filo infinito in coincidenza dell'asse x sul quale sia depositata una



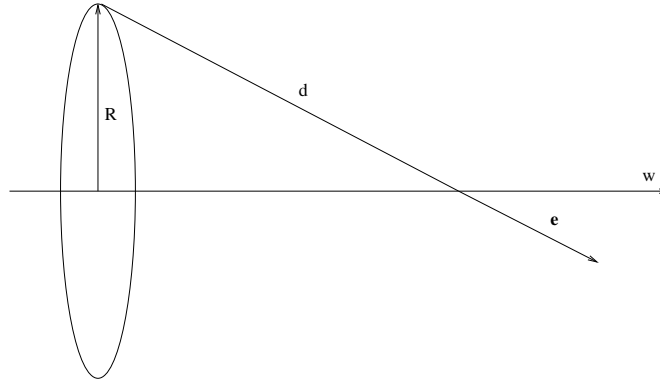
densità lineare λ uniforme. Il fatto che il filo sia di lunghezza infinita semplifica notevolmente i conti per motivi di simmetria, infatti possiamo dire in qualunque punto lungo l'asse y ci mettiamo di avere metà filo a destra e metà a sinistra. Sia P un punto sull'asse y : $P = (0, R, 0)$. Consideriamo un elementino del filo dx , esisterà un altro elementino simmetrico che annulla la componente x del campo; questo per ogni porzione del filo si consideri, in quanto infinito. L'elementino dx genera in P un campo $d\mathbf{E}$. La carica su dx è $dq = dx\lambda$, quindi:

$$\begin{aligned} d\mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^3} \mathbf{r} \\ dE_y &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^3} r \cos \theta \quad dE_x = dE_z = 0 \\ x &= R \tan \theta \quad dx = R \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \quad r = \frac{R}{\cos \theta} \\ E_y &= \int dE_y = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2} \cos \theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{r^2} \cos \theta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{R} \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{R} \hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

L'ipotesi del filo infinito fisicamente può essere interpretato come $R \ll l$ con l la lunghezza del filo.

Esempio 12.3 (Anello) Vogliamo calcolare il valore di \mathbf{E} lungo l'asse di un anello con carica totale q uniforme. Data la simmetria del problema usiamo coordinate cilindriche. Per ragioni di simmetria il campo sarà rivolto come il versore $\hat{\mathbf{e}}_w$. Ricaviamo il versore $\hat{\mathbf{e}}$:

$$\hat{\mathbf{e}} = \cos \alpha \hat{\mathbf{e}}_w + \sin \alpha \hat{\mathbf{e}}_r = \frac{w}{d} \hat{\mathbf{e}}_w + \frac{R}{d} \hat{\mathbf{e}}_r$$



Sull'elementino infinitesimo dell'anello è depositata la carica $dq = \frac{q d\theta}{2\pi}$ e $d^2 = w^2 + R^2$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(0, 0, w) &= \int_C \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 d^2} \hat{\mathbf{e}} \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{q}{2\pi} \frac{d\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2 + w^2} \hat{\mathbf{e}} \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{q}{2\pi} \frac{d\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2 + w^2} \left[\frac{w}{\sqrt{R^2 + w^2}} \hat{\mathbf{e}}_w + \frac{R}{\sqrt{R^2 + w^2}} \hat{\mathbf{e}}_r \right] \\
 &= \frac{q}{2\pi} \frac{d\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2 + w^2} \left[\frac{w}{\sqrt{R^2 + w^2}} \hat{\mathbf{e}}_w \right] \int_0^{2\pi} d\theta \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{w}{(R^2 + w^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{\mathbf{e}}_w
 \end{aligned}$$

Se $w \rightarrow +\infty$ coerentemente:

$$\mathbf{E}(0, 0, w) \rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{e}}_w}{w^2}$$

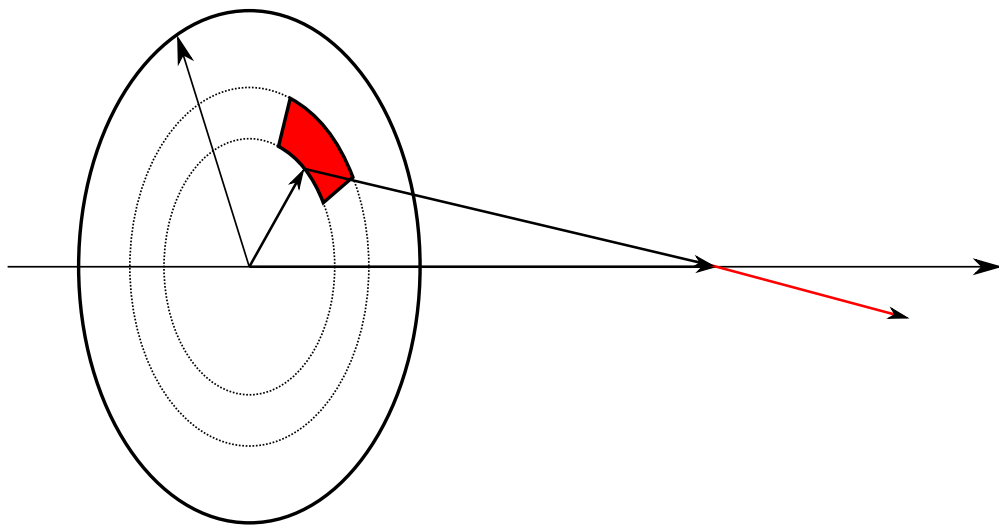
cioè come un punto.

Esempio 12.4 (Disco) Consideriamo un disco di raggio R e carica superficiale uniforme σ . Calcoliamo il campo elettrostatico sull'asse del disco z nel punto \mathbf{r} . La carica di un elementino infinesimo sarà:

$$dq' = \sigma da = \sigma r' d\varphi' dr'$$

Il campo che genera sarà:

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3}$$



calcoliamo $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} - \mathbf{r}' &= -r'\hat{\mathbf{e}}_r + z\hat{\mathbf{k}} \\ \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| &= (r'^2 + z^2)^{1/2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(0, 0, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dq' \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \sigma r' dr' d\varphi' \frac{-r'\hat{\mathbf{e}}_r + z\hat{\mathbf{k}}}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int dr' \int d\varphi' \frac{-r'^2\hat{\mathbf{e}}_r + r'z\hat{\mathbf{k}}}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R dr' \frac{zr'\hat{\mathbf{k}}}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi' \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} 2\pi z\hat{\mathbf{k}} \int_0^R \frac{r' dr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

questo risultato si può trovare usando l'esempio precedente 12.3, in cui $\mathbf{E} = \frac{\lambda 2\pi r'}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{k}}$ e $\sigma dr = \lambda$, in quando deve essere $dq = \sigma da = \lambda r d\varphi$. Usando

la sostituzione $s = r'^2 + z^2$, $ds = 2r'dr$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(0, 0, z) &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} 2\pi z \hat{\mathbf{k}} \int_{z^2}^{R^2+z^2} \frac{ds}{2s^{3/2}} \\
 &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} 2\pi z \hat{\mathbf{k}} \left. \frac{-2}{2s^{1/2}} \right|_{z^2}^{R^2+z^2} \\
 &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} 2\pi z \hat{\mathbf{k}} \left(\frac{-1}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{-1}{\sqrt{z^2}} \right) \\
 &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} \right) \hat{\mathbf{k}}
 \end{aligned}$$

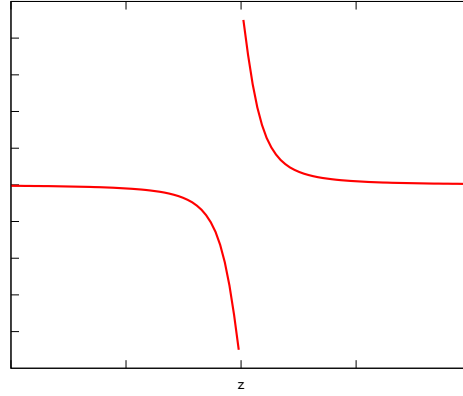


Figura 12.1: Campo elettrico del disco lungo z

Se sono molto vicino al disco:

$$\lim_{z \rightarrow 0^\pm} \mathbf{E}(0, 0, z) = \lim_{z \rightarrow 0^\pm} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} \right) \hat{\mathbf{k}} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{k}}$$

Esempio 12.5 (filo finito) Consideriamo un filo di lunghezza finita sull'asse z con densità di carica uniforme λ . Vogliamo trovare il campo elettrostatico lungo l'asse x . Un elementino infinitesimo avrà carica $dq' = \lambda dz'$. e genererà un campo:

$$d\mathbf{E}(x, 0, 0) = \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^{3/2}}$$

con $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}}$, $\mathbf{r}' = z'\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = x\hat{\mathbf{i}} - z'\hat{\mathbf{k}}$

$$\mathbf{E}(x, 0, 0) = \int d\mathbf{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{x\hat{\mathbf{i}} - z'\hat{\mathbf{k}}}{(x^2 + z'^2)^{3/2}} dz'$$

per risolvere l'integrale è utile la sostituzione $\tan \frac{z'}{x}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, 0, 0) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{x(1 + \tan^2 \gamma) d\gamma}{x^3 (1 + \tan^2 \gamma)^{3/2}} (x\hat{\mathbf{i}} - x \tan \gamma \hat{\mathbf{k}}) \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \int \frac{\hat{\mathbf{i}} - \tan \gamma \hat{\mathbf{k}}}{(1 + \tan^2 \gamma)^{1/2}} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \int (\cos \gamma \hat{\mathbf{i}} - \sin \gamma \hat{\mathbf{k}}) \end{aligned}$$

se z varia tra (z_{\min}, z_{\max}) , γ varia tra $(\gamma_{\min}, \gamma_{\max}) = (\arctan(\frac{z_{\max}}{x}, \frac{z_{\min}}{x}))$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, 0, 0) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} d\gamma (\cos \gamma \hat{\mathbf{i}} - \sin \gamma \hat{\mathbf{k}}) \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} \left[(\sin \gamma_{\max} - \sin \gamma_{\min}) \hat{\mathbf{i}} + (\cos \gamma_{\max} - \cos \gamma_{\min}) \hat{\mathbf{k}} \right] \end{aligned}$$

12.5 Teorema di Gauss

Immaginiamo una carica puntiforme contenuta in una superficie immaginaria S . Per definizione il flusso attraverso S è

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da \quad (12.7)$$

Sostituendo nella (12.7) il campo elettrico di una carica puntiforme $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \Phi_S(\mathbf{E}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} da = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{r \cos \theta}{r^3} da \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{da_0}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Infatti $da \cos \theta = da_0$ cioè l'elementino di area infinitesima orientato perpendicolarmente a \mathbf{E} , mentre $d\omega = \frac{da_0}{r^2}$ è per definizione l'angolo solido infinitesimo che sotteso dall'area infinitesima da_0 .

Questo importante risultato è indipendente dalla geometria della superficie, infatti l'integrale dell'angolo solido su qualsiasi superficie considerata nella sua interezza è 4π (qui si nota la comodità del sistema razionalizzato). Il risultato poi è valido per qualsiasi forza del tipo $\frac{1}{r^2}$ infatti mentre l'area aumenta col quadrato della distanza, il campo diminuisce col quadrato della distanza e le due cose si semplificano a vicenda.

Se la carica fosse sul bordo della superficie, l'integrale dell'angolo solido sarebbe stato 2π e quindi:

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Se la carica fosse stata presa all'esterno della superficie allora il flusso attraverso essa sarebbe stato nullo (da una parte entra, dall'altra esce in egual misura), infatti considerando un areola infinitesima da_1 o meglio la sua componente normale al campo da_{01} ne corrisponde una da_{02} dove il flusso è uscente. Il flusso netto attraverso queste due superfici è

$$d\Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} (d\omega_1 - d\omega_2) = 0$$

perché $d\omega_1 = d\omega_2$ e perché naturalmente ad ogni areola in cui il campo entra corrisponde una ed una sola areola in cui il campo esce.

Se mettiamo più di una carica puntiforme usiamo il principio di sovrapposizione sul campo, e quindi sul flusso:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \Rightarrow \Phi_S(\mathbf{E}) = \oint_S \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \right) \mathbf{n} da$$

Teorema 12.1 (Gauss per cariche puntiformi) *Sia S una superficie chiusa e $\{q_i\}_{i=1}^n$ cariche interne ad S , definiamo $Q = \sum_{i=1}^n q_i$ allora:*

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (12.8)$$

Per una distribuzione di cariche nello spazio $\rho(\mathbf{r})$ basta ricordare che $Q = \int_V \rho(\mathbf{r}) dv$, quindi:

Teorema 12.2 (Gauss) *Sia S una superficie chiusa, al suo interno vi sia una distribuzione continua di carica $\rho(\mathbf{r})$, allora:*

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dv \quad (12.9)$$

Usando il teorema della divergenza:

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dv$$

Allora dato che l'integrale vale per qualsiasi superficie e quindi volume, abbiamo:

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad (12.10)$$

che esprime il teorema di Gauss in forma differenziale. Riassumendo:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad \forall S \quad \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (12.11)$$

con Q le cariche interne ad S .

Esempio 12.6 (campo sfera piena) Sia B una sfera piena di raggio R centrata nell'origine, con densità di carica ρ uniforme. Vogliamo il campo elettrico. Data la simmetria usiamo coordinate sferiche. Dobbiamo dividere lo spazio in due semispazi, uno con $r < R$ e l'altro con $r > R$.

$$\mathbf{E}(r, \theta, \varphi) = E_r \hat{\mathbf{e}}_r + E_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + E_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi = E_r(r) \hat{\mathbf{e}}_r$$

infatti il campo è radiale e dipende solo dalla distanza dal centro per ragioni di simmetria per rotazioni. All'esterno, $r > R$, allora prendiamo una superficie S sferica passante per P :

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \oint_S E \, da = E \oint_S da = 4\pi r^2 E$$

Per il teorema di Gauss:

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{\varepsilon_0}$$

confrontando:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r = \frac{Q^{\text{tot}}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r$$

Esattamente come se tutta la carica fosse concentrata al centro. All'interno $r < R$, prendiamo una superficie gaussiana S passante per P :

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \oint_S E \, da = E \oint_S da = 4\pi r^2 E$$

Questa volta le cariche contenute nella superficie gaussiana non sono tutte le cariche:

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{\varepsilon_0}$$

confrontando:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \mathbf{e}_r$$

Il massimo si ha quando $\|\mathbf{r}\| = R$. La funzione che descrive il campo è continua (basta verificarlo per $r = R$), ma ha un punto angoloso.

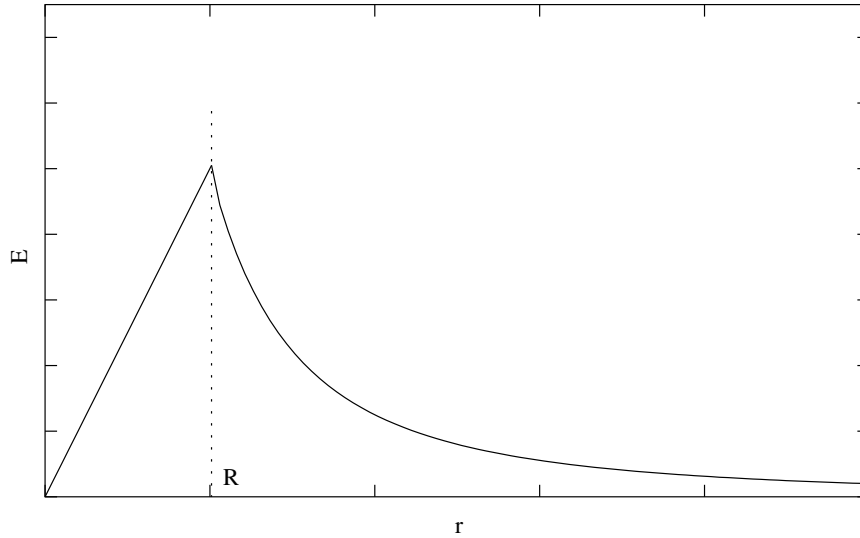


Figura 12.2: Campo di una sfera piena uniformemente carica

Esempio 12.7 (Piano) Consideriamo un piano uniformemente carico con distribuzione σ . Per ragioni di simmetria il campo è perpendicolare al piano. Costruiamo una superficie gaussiana a forma di parallelepipedo, in modo che intersechi il piano. Il flusso non è nullo solo sulle facce parallele al piano. Usando Gauss:

$$\begin{aligned}\Phi_S(\mathbf{E}) &= \Phi_{S_1}(\mathbf{E}) + \Phi_{S_2}(\mathbf{E}) = \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da + \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = 2EA \\ &= \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_A \sigma \, da = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

Allora:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Notare che non dipende dalla distanza.

Esempio 12.8 (condensatore piano) Consideriamo due lastre molto vicine, che equivale a dire due lastre infinite, parallele con distribuzione $\pm\sigma$. Usando il risultato dell'esempio precedente e del principio di sovrapposizione, ricordando che stiamo sommando quantità vettoriali, possiamo dire che il campo all'esterno è nullo ovunque, mentre tra le due armature è doppio:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

diretto dall'armatura positiva a quella negativa.

12.6 Potenziale elettrostatico

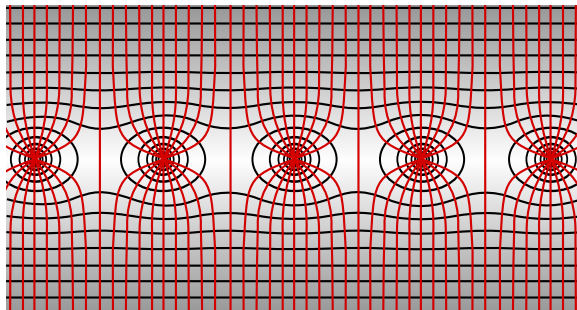
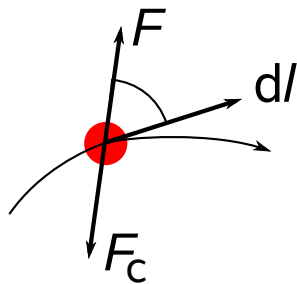


Figura 12.3: Linee equipotenziali (in nero) e linee di campo (in rosso) per una camera proporzionale a multifili (anodi al centro e catodi sopra e sotto)

Definizione 12.1 (differenza di potenziale) La differenza di potenziale tra P_1 e P_2 è il lavoro svolto per spostare una carica unitaria contro le forze del campo elettrostatico tra i due punti:

$$\Delta\varphi = \varphi(P_2) - \varphi(P_1) = \frac{L_{P_1}^{P_2}}{q} \quad (12.12)$$



Consideriamo un campo $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ e una carica $q_0 = 1$ C che si muove su una curva Γ congiungente P_1 e P_2 . Dividiamo Γ in infinitesimi pezzi $d\mathbf{l}$, il lavoro elementare compiuto dal campo è

$$\delta L_c = \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{l}$$

Il lavoro totale compiuto dal campo è l'integrale di tutti i lavori elementari:

$$L_c = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{l} = \int_{P_1}^{P_2} q_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}$$

Allora noi dovremo svolgere un lavoro $L = -L_c$ perché la nostra forza $\mathbf{F} = -\mathbf{F}_c$, dunque:

$$\frac{L}{q_0} = - \int_{P_1}^{P_2} \frac{\mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{l}}{q_0} = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}$$

Questa è la differenza di potenziale tra P_1 e P_2 se si dimostra che non dipende dal cammino, cioè da Γ .

Consideriamo il campo generato da una carica puntiforme nell'origine, allora per andare da P_1 a P_2 :

$$\begin{aligned} \frac{L}{q} &= - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{P_1}^{P_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l}}{r^3} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{P_1}^{P_2} \frac{\cos\theta \, dl}{r^2} \\ &= - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \end{aligned}$$

Dunque non dipende dal cammino percorso e possiamo dire che:

Teorema 12.3 (differenza di potenziale)

$$\Delta\varphi = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \varphi(P_2) - \varphi(P_1) \quad (12.13)$$

Possiamo prendere un riferimento P_0 e dire che $\varphi(P_0) = k$, allora $\varphi(P_1)$ sarà il lavoro per portare la carica da P_0 a P_1 e sarà la differenza di potenziale tra P_0 e P_1 ; $\varphi(P_2)$ la differenza di potenziale tra P_0 e P_2 . Allora:

$$\Delta\varphi = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{P_1}^{P_0} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{P_0}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \varphi(P_0) - \varphi(P_1) + \varphi(P_2) - \varphi(P_0)$$

Dunque è indipendente dalla scelta di P_0 . Per convenzione¹:

$$\varphi(\infty) = 0$$

Quindi per portare una carica dall'infinito:

$$\frac{L}{q_0} = - \int_{\infty}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \varphi(P)$$

Definiamo il potenziale in un punto (avendo preso come riferimento l'infinito):

¹un'altra convenzione è mettere il potenziale della Terra uguale a zero, vedi (13.4.1) a pag. 172

Definizione 12.2 (potenziale)

$$\varphi(P) = - \int_{\infty}^P \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} \quad (12.14)$$

il lavoro che devo fare per portare la carica unitaria dall'infinito al punto contro le forze del campo.

Esempio 12.9 (carica puntiforme nell'origine)

$$\varphi(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l}}{r^3} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

12.6.1 Potenziale di qualsiasi distribuzione

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\sum_i \frac{q_i}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|} + \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} da + \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dV \right]$$

12.7 Energia potenziale

Il potenziale è indipendente dalla carica di prova, l'energia potenziale no. È la stessa differenza che c'è tra la forza elettrostatica e il campo elettrostatico, quindi:

$$\Delta W = q\Delta\varphi$$

Rifacendo il discorso per il potenziale: siano A e B due punti, l'integrale è indipendente dal percorso quindi:

$$L_A^B = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q\Delta\varphi = \Delta W = W_B - W_A$$

Per il calcolo abbiamo usato la forza contro le forze del campo, non la forza del campo. Il lavoro a sinistra il lavoro contro le forze del campo, mentre l'energia potenziale a destra è relativa alle forze del campo: ecco perché non c'è il meno.

12.7.1 Energia di un sistema di cariche

Prendiamo una carica q_1 , portiamola dall'infinito alla posizione \mathbf{r}_1 : non serve compiere lavoro. Ora abbiamo un campo, con un potenziale $\varphi_1(\mathbf{r})$. Prendiamo un'altra carica q_2 e portiamola dall'infinito alla posizione \mathbf{r}_2 : dobbiamo compiere un lavoro contro le forze del campo:

$$L_{\infty}^{\mathbf{r}_2} = \int_{\infty}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -q_2 \int_{\infty}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q_2\varphi_1(\mathbf{r}_2)$$

Aggiungiamo una carica q_3 in posizione \mathbf{r}_3 , altro lavoro:

$$L_{\infty}^{\mathbf{r}_3} = q_3\varphi_1(\mathbf{r}_3) + q_3\varphi_2(\mathbf{r}_3)$$

Il lavoro che compiamo va ad accrescere l'energia potenziale del sistema W , a questo punto:

$$\begin{aligned} W &= q_2\varphi_1(\mathbf{r}_2) + q_3\varphi_1(\mathbf{r}_3) + q_3\varphi_2(\mathbf{r}_3) \\ &= \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|} + \frac{q_1q_3}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3\|} + \frac{q_2q_3}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\|} \end{aligned}$$

Notiamo che è indifferente l'ordine in cui aggiungiamo le cariche. In generale:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|} \cdot \frac{1}{2} \quad (12.15)$$

Il fattore $\frac{1}{2}$ serve perché altrimenti le coppie sarebbero contate due volte, mentre non conta l'ordine.

12.7.2 Unità di misura

Nell'SI il potenziale si misura in volt:

$$[\varphi] = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \text{V}$$

allora essendo $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ il campo lo possiamo esprimere in:

$$[\mathbf{E}] = [-\nabla\varphi] = \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$[U] = \text{J} = [q\varphi] = \text{C V}$$

Coppia stesso segno

Se il campo è generato da una sorgente positiva, allora se muoviamo $+q$ il suo potenziale vale zero all'infinito e vale infinito a zero. Stessa cosa se la sorgente è negativa e la carica esploratrice negativa.

Coppia segno opposto

È come il caso gravitazionale, essendo in questo caso la forza attrattiva. Il potenziale è massimo e nullo all'infinito, mentre è meno infinito a zero.

12.8 Maxwell per l'elettrostatica

$$\text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{l} = d\varphi = \frac{\delta L}{q} = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \Rightarrow \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi \quad (12.16)$$

Inoltre:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \oint \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{l} = \oint d\varphi = 0$$

la possiamo scrivere in forma differenziale usando la (12.16):

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\text{rot grad } \varphi = 0$$

Abbiamo allora le equazioni di Maxwell per l'elettrostatica in forma integrale:

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad (12.17a)$$

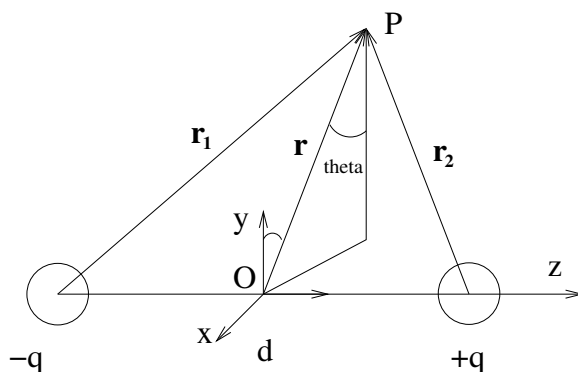
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (12.17b)$$

e in forma differenziale:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad (12.18a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (12.18b)$$

12.9 Dipolo



12.9.1 Potenziale

Consideriamo un dipolo, cioè un sistema di due cariche uguali, con segno opposto, poste ad una distanza δ . Data la simmetria cilindrica usiamo coordinate cilindriche e il potenziale nel punto P , individuato dal vettore \mathbf{r} , non dipende da θ :

$$\varphi = \varphi(\rho, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{-q}{r_1} + \frac{q}{r_2} \right\} \quad (12.19)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{-q}{\sqrt{(z + \frac{\delta}{2})^2 + \rho^2}} + \frac{q}{\sqrt{(z - \frac{\delta}{2})^2 + \rho^2}} \right\} \quad (12.20)$$

I due denominatori della (12.20) li possiamo sviluppare:

$$\left(z^2 + \rho^2 + \delta z + \frac{\delta^2}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} = (z^2 + \rho^2)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\delta z}{\rho^2 + z^2} + \frac{\delta^2}{4(\rho^2 + z^2)} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left(z^2 + \rho^2 - \delta z + \frac{\delta^2}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} = (z^2 + \rho^2)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\delta z}{\rho^2 + z^2} + \frac{\delta^2}{4(\rho^2 + z^2)} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

se vogliamo considerare \mathbf{E} a grande distanza equivale a dire che δ deve essere molto piccolo, quindi il termine δ^2 non lo consideriamo. Ricordiamo lo sviluppo binomiale:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots$$

Allora usando solo il primo ordine:

$$\left(z^2 + \rho^2 + \delta z + \frac{\delta^2}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} \simeq (z^2 + \rho^2)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta z}{\rho^2 + z^2} \right)$$

$$\left(z^2 + \rho^2 - \delta z + \frac{\delta^2}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} \simeq (z^2 + \rho^2)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta z}{\rho^2 + z^2} \right)$$

sostituendo nella (12.20):

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi(\rho, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \left\{ -q \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta z}{\rho^2 + z^2} \right) + q \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta z}{\rho^2 + z^2} \right) \right\} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta z}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

che è l'espressione del potenziale del dipolo in coordinate cilindriche. Ma $\sqrt{z^2 + \rho^2} = \|\mathbf{r}\|$, definiamo $\mathbf{p} = \pm|q|\delta\hat{\mathbf{e}}_z$, con il verso tale che sia diretto dalla carica negativa a quella positiva, momento del dipolo. Essendo $\mathbf{r} = \rho\hat{\mathbf{e}}_r + z\hat{\mathbf{e}}_z$ allora $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = q\delta z$. In funzione di \mathbf{r} :

$$\varphi = \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}$$

Dunque il potenziale decresce con r^2 . Usando $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$, lo possiamo anche scrivere come:

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \quad (12.21)$$

oppure come:

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \nabla \Phi_0 \quad (12.22)$$

con Φ_0 il potenziale sulla carica $(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r})$. Usando le coordinate cartesiane, $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{j}}$:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{py}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (12.23)$$

Altra dimostrazione

Immaginiamo una carica q nell'origine, allora il suo potenziale è $\varphi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$ spostiamo di $\Delta\mathbf{r} = \frac{\delta}{2}$ la carica, allora:

$$\varphi_+(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r} - \Delta\mathbf{r}) \simeq \varphi_0 - \nabla\varphi_0 \cdot \Delta\mathbf{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \frac{\delta}{2}$$

La stessa cosa la possiamo fare con una carica $-q$ e spostarla dall'altra parte $-\Delta\mathbf{r}$:

$$\varphi_-(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) \simeq -\varphi_0 - \nabla\varphi_0 \cdot \Delta\mathbf{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \frac{\delta}{2}$$

Essendo $\delta \ll r$ allora è una buona approssimazione. Il potenziale totale:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_+ + \varphi_- = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \delta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right)$$

12.9.2 Campo elettrostatico

Usando $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{3py}{4\pi\epsilon_0} x \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{3py}{4\pi\epsilon_0} x \frac{1}{r^5} \\ E_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{3py}{4\pi\epsilon_0} y \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{3py}{4\pi\epsilon_0} y \frac{1}{r^5} - \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \\ E_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{3py}{4\pi\epsilon_0} z \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{3py}{4\pi\epsilon_0} z \frac{1}{r^5} \end{aligned}$$

definiamo:

$$E_{\perp} = \sqrt{E_x^2 + E_z^2} = \frac{3py}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \sqrt{x^2 + z^2} = \frac{3py}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \sqrt{x^2 + z^2}$$

allora:

$$E = \sqrt{E_y^2 + E_{\perp}^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{\frac{3y^2}{r^2} + 1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}$$

in forma vettoriale:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right\}$$

Esso decresce con r^3 .

12.9.3 Energia potenziale

Mettiamo un dipolo in un campo elettrico \mathbf{E} . Assumiamo che le due cariche non si muovano. Dove c'è la carica $-q$ ci sia un potenziale φ_A , nell'altra φ_B . L'energia potenziale è la somma dell'energia potenziale delle due cariche:

$$W = W_B + W_A = q(\varphi_B - \varphi_A)$$

Calcoliamo il potenziale φ_B sviluppando φ_A nell'intorno di φ_A :

$$\varphi_B \simeq \varphi_A + \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{\delta}$$

Allora l'energia diventa:

$$W = q(\varphi_A + \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\delta} - \varphi_A) = q\boldsymbol{\delta} \cdot \nabla\varphi = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

Si deduce che la posizione di equilibrio stabile, che corrisponde all'energia minima, si ha quando $\mathbf{p} // \mathbf{E}$ cioè quando il dipolo è orientato come il campo elettrico esterno. Quando \mathbf{p} è antiparallelo al campo elettrico si ha un equilibrio instabile.

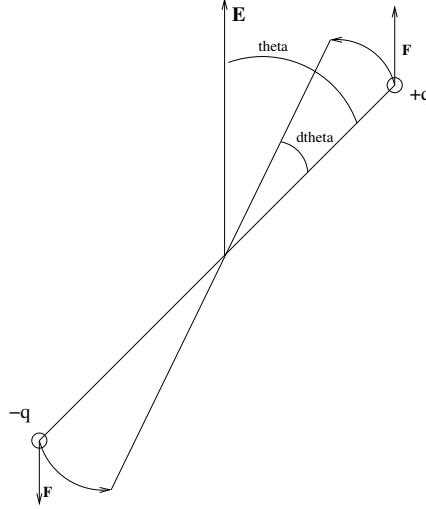
12.9.4 Forza

$$\mathbf{F} = -\nabla W = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

per esempio:

$$F_x = \left(p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \right)$$

12.9.5 Momento



Il lavoro per far ruotare il sistema di $d\theta$ è

$$\delta L = -Md\theta$$

notare che θ diminuisce, quindi la sua variazione è negativa. Essendo il sistema isolato il lavoro compiuto deve tramutarsi in variazione di energia potenziale:

$$dW = \delta L = Md\theta$$

Allora:

$$M = \frac{dW}{d\theta} = \frac{-pE \cos \theta}{d\theta} = pE \sin \theta$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

che fa ruotare il dipolo fino alla posizione di equilibrio. Questa relazione può essere calcolata semplicemente dalla definizione di momento torcente:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_+ \times \mathbf{F}_+ + \mathbf{r}_- \times \mathbf{F}_- = q(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) \times \mathbf{E} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

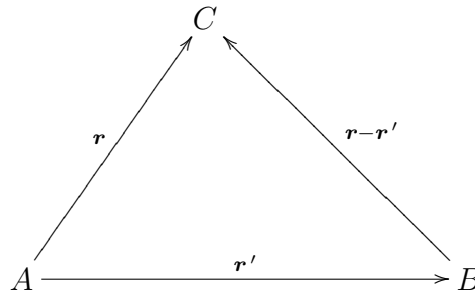
12.10 Sviluppo in multipoli

Il multipolo è un sistema formato da diverse cariche. Ci interessa sapere come si comporta φ a grande distanza. Una distribuzione di cariche può essere approssimata a grande distanza da sovrapposizione di multipoli.

12.10.1 Distribuzione di carica

Immaginiamo una distribuzione di carica nello spazio con densità $\rho(x, y, z)$. Sia l'origine all'interno della distribuzione. Il potenziale totale è

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dv}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \quad (12.24)$$



Usando il teorema dei coseni possiamo scrivere:

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} = r \sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}}$$

Ricordando che:

$$(1 + x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$$

si ha:

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^{-1} &= \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{r} \left\{ 1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^2} + \frac{3}{8} \left[\frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} - \frac{r'^2}{r^2} \right]^2 + \dots \right\} \\
 &= \left\{ \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} - \frac{1}{2} \frac{r'^2}{r^3} + \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^5} + \frac{3}{8} \frac{r'^4}{r^5} - \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') r'^2}{r^5} + \dots \right\} \\
 &\simeq \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{1}{2} \left[-\frac{r'^2}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^5} \right]
 \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo considerato che $r \gg r'$. Sostituendo l'ultimo risultato nella (12.24) si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \varphi(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} \int_V \rho(\mathbf{r}') dv + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int_V \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dv + \right. \\
 \left. + \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}') \left[\frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^5} - \frac{r'^2}{r^3} \right] dv \right\} \quad (12.25)
 \end{aligned}$$

Analizziamo i termini della (12.25). Il primo:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_V \rho(\mathbf{r}') dv = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

è il potenziale di un monopolo, cioè il potenziale di un punto in cui è accumulata tutta la carica della distribuzione. A grande distanza è un'approssimazione accettabile. Il secondo termine corregge il precedente:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int_V \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dv$$

è il potenziale di un dipolo, infatti possiamo definire:

$$\mathbf{p} = \int_V \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dv$$

momento di dipolo della distribuzione di carica. Gli altri termini sono i potenziali di quadripolo, ottupolo, ... Notare che:

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{\mathbf{p}}{|q|} = \frac{\int_V \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dv}{|q|} \quad (12.26)$$

individua il centro di carica.

13

Elettrostatica nei conduttori

13.1 Conduttori ed isolanti

Dal punto di vista elettrico i materiali possono essere divisi in due categorie:

conduttori hanno molte cariche elettriche libere, una nuvola elettronica con densità costante in condizioni standard;

isolanti hanno atomi e molecole molto legati tra di loro che atomi tendono a deformarsi sotto l'effetto di un campo elettrico;

I materiali si caratterizzano per tre costanti:

- conducibilità elettrica σ , descrive la risposta dei suoi elettroni soggetti a un campo elettrico esterno;
- costante dielettrica ε ;
- permeabilità magnetica μ ;

13.2 Carica nei conduttori

Se carichiamo un conduttore gli elettroni dopo una frazione di tempo trovano una condizione di equilibrio e quindi il campo elettrostatico all'interno del conduttore deve essere nullo. Essendo il campo il gradiente del potenziale

allora se il campo è nullo il potenziale è costante e quindi il conduttore è un corpo equipotenziale e in particolare la sua superficie è equipotenziale. Usando il teorema di Gauss, con superfici gaussiane che tendono al bordo scopriamo che all'interno non ci possono essere cariche, allora per la conservazione della carica esse sono sul bordo. Il campo elettrostatico all'esterno è ortogonale alla superficie essendo essa una superficie equipotenziale, inoltre se esso avesse una componente tangenziale le cariche al suo interno si muoverebbero.

13.3 Induzione elettrostatica

Definizione 13.1 (Induzione elettrostatica) L'induzione elettrostatica è quel fenomeno per cui in presenza di un campo elettrico esterno le cariche libere in un conduttore si ridistribuiscono.

Se mettiamo un conduttore in uno spazio in cui è presente un campo elettrico \mathbf{E}_{ext} gli elettroni al suo interno si muovono in senso opposto ad \mathbf{E}_{ext} . In questo modo creano un accumulo di cariche che a sua volta crea un campo elettrico indotto dalla carica migrata \mathbf{E}_i . In pochissimo tempo gli elettroni arrivano ad una posizione di equilibrio in cui:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_{\text{ext}} = 0$$

Possiamo allora affermare che (a parte il brevissimo istante in cui le cariche creano raggiungono l'equilibrio) il campo elettrico totale all'interno di un conduttore ideale è nullo. Anche il campo esterno risulta deformato dalla nuova distribuzione di cariche e a grande distanza torna ad essere quello in assenza di distribuzione di cariche. Se il campo elettrico all'interno è nullo le cariche devono essersi accumulate sul bordo del conduttore, infatti: consideriamo una superficie chiusa completamente compresa nel conduttore; essendo il campo interno nullo, per il teorema di Gauss, anche la carica deve essere nulla. Facciamo tendere questa superficie alla superficie del conduttore, la carica è sempre nulla. Per la conservazione della carica questa può essere solo sul bordo del conduttore.

13.4 Teorema di Coulomb

Vogliamo calcolare il campo elettrico in prossimità della superficie del conduttore. Sappiamo già che questo è perpendicolare alla superficie. Sulla superficie si è distribuita una densità superficiale di carica σ a causa del

campo elettrico esterno, tale che $\int_S \sigma da = Q$. Ipotizziamo che $Q = 0$, cioè il conduttore sia inizialmente scarico.

Consideriamo un cilindretto di basi infinitesime dA , una interna e l'altra esterna al conduttore, perpendicolare alla superficie del conduttore. Il flusso attraverso la superficie laterale è nullo in quanto $\mathbf{E} \perp \mathbf{n}$, e anche il flusso attraverso la superficie interna al conduttore è nullo perché qui il campo è nullo. Rimane solo la superficie all'esterno del conduttore, per Gauss:

$$\int_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \Delta a}{\varepsilon_0}$$

ma $\mathbf{E} // \mathbf{n}$ ed è costante: $\int_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = E \Delta S_1$:

Teorema 13.1 (Coulomb) *In prossimità di un conduttore il campo elettrico totale è*

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (13.1)$$

Potrebbe sorgere un dubbio. Se usiamo il teorema di Coulomb su un piano infinito troveremmo una contraddizione. Infatti sappiamo che il campo di un piano infinito è $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ esattamente la metà di quanto direbbe il teorema di Coulomb. Torniamo al teorema di Coulomb: consideriamo un elementino ΔS di area ΔA , vogliamo sapere il campo generato da questo elementino in prossimità del conduttore. Questo significa fare il limite del campo per la distanza che tende a zero. Se prendiamo un punto e andiamo infinitamente vicino a ΔS allora ΔA sarà vista dal punto come infinita e allora il campo varrà in prossimità $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ sia all'esterno che all'interno. Ma sappiamo che all'interno il campo deve essere nullo, allora tutti gli altri elementini $S - \Delta S$ devono generare un campo che annulli il campo interno e raddoppino quello esterno in modo tale che $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

13.4.1 Pressione elettrostatica

Consideriamo un conduttore carico. Le cariche si distribuiranno sulla superficie. Consideriamo due punti A e B in prossimità di un elementino da della superficie del conduttore. A sia esterno, B interno. Il campo su A è la somma del campo \mathbf{E}_1 generato dalle cariche appartenenti all'area da e \mathbf{E}_2 generato dalle cariche distribuite sul resto della superficie. Lo stesso per un punto B interno al conduttore. Mentre però passando da A a B il campo \mathbf{E}_2 rimane pressoché costante, \mathbf{E}_1 cambia di verso. Dunque:

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{n}$$

$$\mathbf{E}_B = -\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 0$$

Infatti B è all'interno del conduttore. Dalle precedenti ricaviamo:

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \mathbf{n}$$

Sulle cariche su da la forza è

$$d\mathbf{F} = \left(\frac{1}{2} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{n} \right) \sigma da$$

La forza sull'unità di area è detta pressione elettrostatica:

$$P = \frac{d(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})}{da} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0} \quad (13.2)$$

naturalmente con verso verso l'esterno. Le forze tendono quindi a strappare le cariche verso l'esterno. Servono campi molto intensi per far uscire le cariche dal conduttore.

Terra

La terra è considerato come un enorme conduttore, così grande che non riusciamo a modificarne le caratteristiche elettrostatiche. È l'analogo termodinamico del bagno termico. Ad essa si attribuisce il valore di potenziale zero. Allora il potenziale possiamo definirlo come il lavoro necessario per portare una carica unitaria dalla terra al punto.

13.4.2 Induzione tra conduttori

Se avviciniamo un corpo A carico a un B scarico, le cariche su B si ridistribuiscono in modo tale che il campo totale all'interno di B sia nullo. Le cariche su B si dicono indotte. Ora anche B produce un campo elettrico all'esterno che induce una distribuzione di carica su A . Il tutto fino al raggiungimento di un equilibrio. Se ora colleghiamo B con la terra, il conduttore B e la terra diventano un unico conduttore; allora le cariche si distribuiranno sulla superficie di questo unico conduttore. Se stacciamo la terra, B risulta carico.

13.4.3 Induzione completa

Consideriamo un conduttore cavo scarico. Poniamo all'interno del conduttore una carica q . Applichiamo il teorema di Gauss all'interno del conduttore. Il

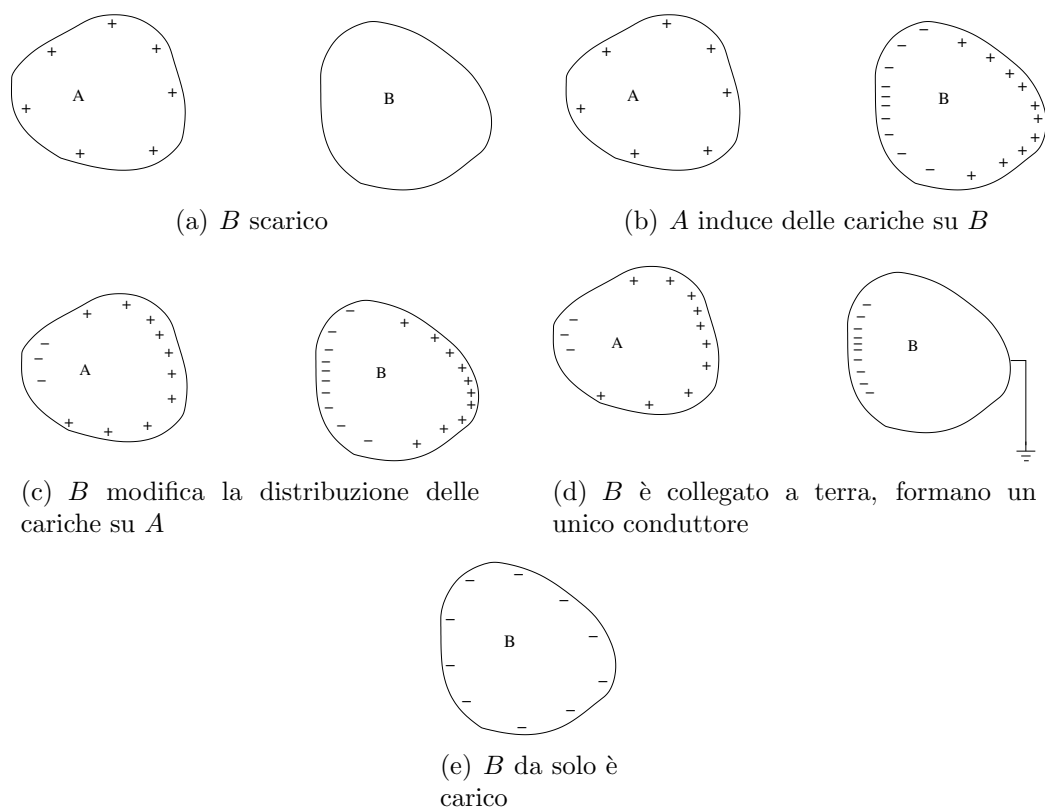


Figura 13.1: Induzione elettrostatica

campo è zero, allora la carica totale interna al condensatore è nulla. Facendo tendere la superficie gaussiana alla superficie interna si scopre che ci deve essere una carica $-q$ sulla parete interna del conduttore che bilancia la carica q interna, in modo che la carica totale interna alla superficie gaussiana sia nulla. Sulla superficie esterna invece ci deve essere una carica q in modo che il corpo sia ancora complessivamente scarico. La carica indotta è uguale alla carica inducente. Questo fenomeno avviene solo quando il corpo inducente è totalmente racchiuso dal corpo indotto.

Esempio 13.1 (schermo elettrostatico – lo smerdatore) Immaginiamo una fanciulla rinchiusa dentro un conduttore cavo. Adamo, all'esterno, ha molta voglia di sperimentare. Prova a farsi notare avvicinando una carica positiva al conduttore. Sull'esterno si accumula una carica negativa, all'interno positiva. La fanciulla non si accorge di niente essendo il campo elettrico interno invariato. La fanciulla, tutta sola, prova a farsi notare, agitando una carica positiva. Sulla parete interna si crea un accumulo di cariche positive, all'esterno negative, ma Adamo non percepisce nessuna variazione del campo elettrostatico. Il conduttore cavo funziona da schermo elettrostatico.

13.5 Potere dispersivo delle punte

In un conduttore carico la densità di carica sugli spigoli è maggiore che altrove. Consideriamo una punta carica nell'atmosfera vicino ad una candela. Si osserva che la fiamma oscilla a causa di un vento ionico. Infatti la carica sul conduttore attira ioni dell'atmosfera di segno opposto che lentamente neutralizzano la carica sul conduttore e contemporaneamente respinge gli ioni con lo stesso segno. Si crea così un movimento di cariche, in questo caso particelle cariche dell'aria che muovono la fiamma. Per spiegare il fenomeno interpretiamo gli spigoli come zone dove il raggio di curvatura è più piccolo. Consideriamo allora due sfere cariche con raggi diversi $R > r$ collegate a grande distanza (niente induzione) da un filo. Sulla prima sfera:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_1} \frac{\sigma_R da}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_1} \frac{\sigma_R da}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_R}{R} 4\pi R^2 = \frac{\sigma_R R}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\epsilon_0\pi R}$$

Sulla seconda:

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_2} \frac{\sigma_r da}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_2} \frac{\sigma_r da}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_r}{r} 4\pi r^2 = \frac{\sigma_r r}{\epsilon_0} = \frac{q}{4\epsilon_0\pi r}$$

ma $V_1 = V_2$ perché un unico conduttore, allora:

$$\frac{Q}{R} = \frac{q}{r} \quad (13.3)$$

La carica è proporzionale al raggio, la densità superficiale di carica:

$$\sigma_R = \frac{Q}{4\pi R^2} \quad \sigma_r = \frac{q}{4\pi r^2}$$

Allora il rapporto tra le densità di carica (usando la precedente e la (13.3)):

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_r} = \frac{Qr^2}{qR^2} = \frac{r}{R} < 1$$

Dunque $\sigma_R < \sigma_r$ e, per il teorema di Coulomb, in prossimità dei conduttori:

$$E_r > E_R$$

13.6 Capacità elettrica

Consideriamo un conduttore isolato. Carichiamolo con una carica q ; il conduttore raggiungerà un certo potenziale:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') d\mathbf{a}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}$$

Se aggiungiamo ancora q arrivando a $2q$ anche il potenziale raddoppia. Si definisce:

Definizione 13.2 (capacità di un conduttore)

$$C = \frac{q}{V} \quad (13.4)$$

Esso è costante, dipende solo dalla geometria del conduttore. Si misura in farad = F = $\frac{\text{coulomb}}{\text{volt}}$.

Esempio 13.2 (sfera) Calcoliamo la capacità di una sfera conduttrice di raggio R . Sapendo che la carica si distribuisce uniformemente per simmetria:

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{r}) &= \frac{Q}{4\pi R^2} = \sigma \\ \varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma(\mathbf{r}') d\mathbf{a}'}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{4\pi R^2 R} 4\pi R^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \\ C &= \frac{Q}{\varphi} = 4\pi\epsilon_0 R \end{aligned}$$

Se $R = 1$ m allora $C = 10^{-10}$ F. Il farad è un'unità generalmente grande.

13.6.1 Condensatore

Mettere troppa carica su un conduttore è difficile perché questa tende a dissiparsi nell'aria. È invece più pratico aumentare la capacità

Usiamo due conduttori, sia A carico e quindi con un certo potenziale V_0 e B scarico. A induce delle cariche su B e B modifica la distribuzione delle cariche di A . Ora il potenziale di A V_A è minore del potenziale iniziale, a causa delle cariche di segno opposto sul lato di B rivolto verso A . Quindi $V_A < V_0$ e allora se all'inizio $C = \frac{Q}{V_0}$ e ora $C' = \frac{Q}{V_A}$ e la carica Q è costante si ha che $C' > C$. Abbiamo aumentato la capacità del condensatore.

Definizione 13.3 (condensatore) Il condensatore è un sistema formato da due conduttori adiacenti, isolati, carichi, con cariche di uguale valore, ma di segno opposto e tali da subire la stessa influenza elettrostatica da parte di altri conduttori.



Figura 13.2: simbolo del condensatore

Se colleghiamo il corpo B a terra otteniamo un condensatore. I due conduttori sono chiamati piatti o armature del condensatore.

Definizione 13.4 (carica del condensatore) La carica del condensatore è il valore assoluto della carica immagazzinata da uno dei due conduttori di un condensatore.

Definizione 13.5 (capacità del condensatore)

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

con Q la carica del condensatore e ΔV la differenza di potenziale tra le due armature.

Essa dipende solo dalla geometria del condensatore.

Esempi di geometrie

Esempio 13.3 (piano) Consideriamo due lastre infinite A e B parallele, a distanza d . La carica si distribuisce uniformemente:

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

Il campo del condensatore è

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{\mathbf{i}}$$

$$\Delta V = V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \mathbf{E} \int_A^B d\mathbf{l} = - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma S}{\sigma d} \varepsilon_0 = \frac{S}{d} \varepsilon_0$$

Da questo esempio si deduce che ε_0 si può esprimere in F/m.

Esempio 13.4 (sferico) Consideriamo due sfere con raggi $a < b$ concentriche. Sia q la carica del condensatore. Il campo all'interno può essere calcolato con Gauss. Pensiamo una superficie gaussiana sferica con raggio $r : a < r < b$ concentrica al condensatore. Allora:

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r$$

diretto radialmente, il verso è dato dal segno di q . Calcoliamo la differenza di potenziale tra le due sfere scegliendo un percorso Γ radiale:

$$\Delta V = \int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Gamma} E dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q 4\pi\varepsilon_0}{q} \left(\frac{ab}{b-a} \right) = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

Esempio 13.5 (cilindrico) Consideriamo un condensatore formato da due cilindri coassiali con raggi $a < b$ e altezza h . Sia q la carica del condensatore. Per calcolare il campo serviamoci di una superficie gaussiana cilindrica coassiale di altezza h con raggio $r : a < r < b$, consideriamo il condensatore infinito:

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = E 2\pi r h = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{q}{hr} \hat{\mathbf{e}}_r$$

diretto perpendicolarmente ai due cilindri. La differenza di potenziale tra le due armature è

$$\Delta V = \int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Gamma} E dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h} \log \frac{b}{a}$$

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\log \frac{b}{a}}$$

13.6.2 Energia di un condensatore

Tra le altre cose un condensatore serve per immagazzinare energia¹. Sappiamo che l'energia potenziale di un sistema di cariche è

$$W = \frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i$$

φ_i è il potenziale delle cariche nelle loro posizioni. È anche il lavoro necessario per portare le cariche dall'infinito alla loro posizione. Se lavoriamo con distribuzioni di cariche allora:

$$W = \frac{1}{2} \int_S (\sigma(x, y, z) d\varphi(x, y, z)) + \frac{1}{2} \int_V (\rho(x, y, z) dv \varphi(x, y, z))$$

Stiamo parlando di conduttori e quindi la carica si distribuisce sulla superficie. Siano S_1, \dots, S_n le superfici:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \varphi_{S_i} \sigma_i da_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_{S_i} q_i$$

Nel caso del condensatore $N = 2$, $q_1 = -q_2 = q$:

$$W = \frac{1}{2} (|q| \varphi_A - |q| \varphi_B) = \frac{1}{2} |q| \Delta V$$

Esempio 13.6 (condensatore piano) Calcoliamo l'energia di un condensatore piano in un altro modo. L'energia può essere intesa come il lavoro necessario per carica le due armature portando le cariche dall'armatura B all'armatura A . Siano inizialmente scarichi. Se porto dq da B a A non compio lavoro, perché non c'è campo elettrico che mi ostacola. Per portare la seconda carica dq devo compiere un lavoro:

$$dW = dq \Delta V$$

Integrando:

$$W = \int_0^Q dW = \int_0^Q dq \Delta V = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} Q \Delta V$$

Usando la definizione di capacità l'energia può essere scritta in modi diversi:

$$W = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (13.5)$$

L'energia è sotto forma di campo elettrostatico.

¹per esempio nei flash delle macchine fotografiche

Esempio 13.7 (Lavoro per spostare una armatura) Sia un condensatore a facce piane e parallele di superficie S , con carica Q a distanza d_0 . Considerando il caso a carica e potenziale costante (isolato o collegato ad un generatore) vogliamo conoscere il lavoro per spostare le armature a distanza d_F , la variazione di energia e il potenziale finale.

Consideriamo il caso isolato. $Q = \text{const.}$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{inizio} & C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d_0} \quad Q = C_0 \Delta V_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d_0} \Delta V_0 \\ \text{fine} & C_F = \varepsilon_0 \frac{S}{d_F} \quad Q = C_F \Delta V_F = \varepsilon_0 \frac{S}{d_F} \Delta V_F \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta V_F = \frac{d_F}{d_0} \Delta V_0$$

Il lavoro lo possiamo calcolare come variazione di energia potenziale $L_C = -\Delta W$; ma noi vogliamo il lavoro fatto contro le forze del campo: $L = -L_C$:

$$\begin{aligned} L = W_F - W_0 &= \frac{1}{2} C_F \Delta V_F^2 - \frac{1}{2} C_0 \Delta V_0^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{S}{d_F} \frac{d_F^2}{d_0^2} \Delta V_0^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{S}{d_0} \Delta V_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{d_F}{d_0^2} - \frac{1}{d_0} \right) \Delta V_0^2 S \end{aligned}$$

Oppure lo possiamo calcolare dalla forza:

$$\delta L = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = QE dx = Q \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = Q \frac{Q}{2S\varepsilon_0} dx = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 S} dx$$

La forza la si poteva anche ricavare da $\delta F = dW$. La forza risulta costante, grazie al fatto che nell'approssimazione il campo è costante e parallelo allo spostamento.

$$L = \int_{d_0}^{d_F} \delta L = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 S} (d_F - d_0)$$

che, anche se non sembra, è uguale all'espressione trovata in precedenza. La variazione di energia potenziale è uguale al lavoro.

Consideriamo ora il caso di potenziale $\Delta V = \text{const.}$

$$\delta L = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = QE dx = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} dx = \frac{C^2 \Delta V^2}{2\varepsilon_0 S} dx = \frac{\varepsilon_0^2 S^2 \Delta V^2}{2\varepsilon_0 S x^2} dx = \frac{\varepsilon_0 S \Delta V^2}{2x^2} dx$$

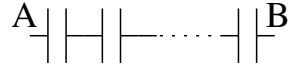
$$L = \int_{d_0}^{d_F} \delta L = \frac{\varepsilon_0 S \Delta V^2}{2} \int_{d_0}^{d_F} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{d_F} \right) \Delta V^2 S$$

Non possiamo più dire che la variazione di energia potenziale è il lavoro, perché il condensatore non è isolato, anche il generatore compie lavoro.

$$\begin{aligned}\Delta W &= W_F - W_0 = \frac{1}{2}C_F\Delta V^2 - \frac{1}{2}C_0\Delta V^2 = \frac{1}{2}V^2 \left(\varepsilon_0 \frac{S}{d_F} - \varepsilon_0 \frac{S}{d_0} \right) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{1}{d_F} - \frac{1}{d_0} \right) \Delta V^2 S\end{aligned}$$

13.6.3 Condensatori in serie e in parallelo

Serie



n condensatori sono collegati in serie quando la ΔV ai capi della combinazione è la somma delle ΔV_i . Siano all'inizio scarichi. Se poniamo una carica q sull'armatura del primo condensatore allora sulla seconda armatura del primo condensatore si crea per induzione una carica opposta $-q$ e sulla prima armatura del secondo condensatore una carica q in modo che la somma della seconda armatura del primo condensatore e la prima del secondo condensatore, che formano un unico conduttore, sia nulla. Se poi l'ultimo condensatore lo colleghiamo a terra avremo che per ogni condensatore si avrà una carica q sulla prima armatura e $-q$ sulla seconda. La carica di ogni condensatore è allora la stessa, quindi la differenza di potenziale di ogni condensatore dipenderà solo dalla propria capacità

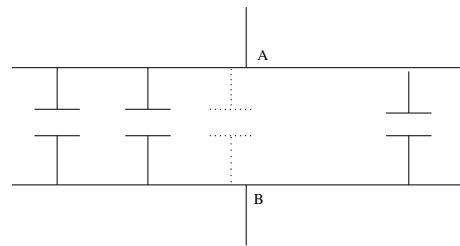
$$\Delta\varphi_i = \frac{q}{C_i}$$

Abbiamo detto che la differenza di potenziale tra i capi A e B è la somma delle differenze di potenziali:

$$\varphi_A - \varphi_B = \sum_{i=1}^N \varphi_i = \sum_{i=1}^N \frac{q}{C_i} = q \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

Il condensatore equivalente, cioè quello che sostituito al sistema in serie produce gli stessi effetti, è quello con capacità

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$



Parallelo

In parallelo la differenza di potenziale di ogni condensatore è uguale. La somma delle cariche è

$$Q = \sum_{i=1}^N q_i = \sum_{i=1}^N C_i \varphi$$

Allora il condensatore equivalente ha capacità

$$C_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^N C_i$$

14

Problema generale dell'elettrostatica

Abbiamo detto che l'elettrostatica è descritta da due leggi:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (14.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (14.2)$$

Dalla (14.2) sappiamo che deve esistere una funzione che è il potenziale di \mathbf{E} . Aggiungendo un segno meno diciamo che esiste φ tale che:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \quad (14.3)$$

Sostituendola nella (14.1) otteniamo:

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (14.4)$$

Si può anche scrivere:

$$\nabla^2\varphi = \nabla \cdot \nabla\varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

L'operatore ∇^2 è il laplaciano e l'equazione differenziale alle derivate parziali (14.4) è l'equazione di Poisson. Risolvere l'equazione di Poisson significa trovare $\varphi(\mathbf{r})$ in funzione delle condizioni del problema. Dalla conoscenza di φ $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$.

Se la sorgente del campo è data esclusivamente da cariche elettriche in un volume allora l'unica soluzione è

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dv'$$

Il problema diventa più complesso quando si inseriscono dei conduttori che subiscono l'induzione elettrostatica.

14.1 Funzioni armoniche

Se non ci sono cariche, cioè $\rho = 0$, allora l'equazione di Poisson diventa:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (14.5)$$

detta equazione di Laplace. Una funzione che rispetta la (14.5) e che abbia derivate prime continue è detta armonica. Quindi se non ci sono cariche φ è armonica. La zona di armonicità di una funzione è l'insieme dei punti dove la funzione è armonica.

14.1.1 Teoremi

Teorema 14.1 (unicità problema di Dirichlet) *Data una superficie chiusa S la funzione armonica che su S assume il valore φ_S è unica.*

φ_S non deve essere necessariamente una costante.

Teorema 14.2 (unicità problema di Neumann) *Siano φ_1 e φ_2 due funzioni armoniche definite in un volume tali che le derivate normali siano uguali, allora φ_1 e φ_2 differiscono per una costante.*

Teorema 14.3 (media) *Sia S una sfera contenuta in una zona di armonicità di φ . Allora il valor medio che φ assume sulla superficie di S è uguale al valore che φ assume nel centro della sfera.*

14.2 Soluzione dell'equazione di Laplace

Tentiamo di risolvere l'equazione di Laplace, cioè quando non ci sono cariche libere, in casi particolari.

14.2.1 Soluzione generale

Coordinate cartesiane

$$\varphi(x, y, z) = (A \sin k_x x + B \cos k_x x) (C \sin k_y y + D \cos k_y y) \left(E e^{\sqrt{-k_z^2 + k_y^2} z} + F e^{\sqrt{k_z^2 + K_y^2} z} \right) \quad (14.6)$$

Coordinate cilindriche

$$\varphi(r, \theta, z) = (A \log r + B) (C \theta + D) (E z + F) \quad (14.7)$$

Coordinate sferiche

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \sum_{l,m} (E_l r^l + F_l r^{-(l+1)}) (C_l P_l^m + D_l Q_l^m) (A \sin m\phi + B \cos m\phi) \quad (14.8)$$

14.3 Caso monodimensionale

Supponiamo che il potenziale φ dipenda solo dalla coordinata x , allora $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ e l'equazione di Laplace diventa:

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0$$

Allora:

$$\frac{d\varphi}{dx} = a \quad \varphi = ax + b$$

Esempio 14.1 (condensatore) Consideriamo due piani paralleli, tenuti a potenziali $\varphi_1 < \varphi_2$, a distanza d . Possiamo usare l'equazione di Laplace perché non ci sono cariche libere. Vogliamo il potenziale tra i due piani. Esso dipende solo dalla coordinata x e quindi è un problema monodimensionale. Sia primo piano di equazione $x = 0$. La soluzione generale è

$$\varphi(x) = ax + b$$

Le condizioni al contorno sono:

$$\varphi(0) = \varphi_1 \quad \varphi(d) = \varphi_2$$

Allora:

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d}x + \varphi_2$$

Il campo:

$$\mathbf{E}_E = -\nabla\varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}\hat{\mathbf{i}}$$

Usando il teorema di Coulomb:

$$\sigma = \varepsilon_0 E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}\varepsilon_0$$

Esempio 14.2 (sfera in condensatore) Sia una sfera conduttrice di raggio R al centro di un condensatore a faccie piane e parallele. Consideriamo un sistema di riferimento centrato nella sfera. Sia $\pm\sigma$ la densità di carica sulle facce a distanza $2d$, allora il campo elettrico esterno, cioè prodotto dal condensatore è

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{i}}$$

fissiamo il riferimento del potenziale sulla prima armatura che poniamo a terra. Il potenziale esterno:

$$\varphi_E(x) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(x + d)$$

Usiamo le coordinate polari. Sia \mathbf{R} tale che $\|\mathbf{R}\| = R$. Il potenziale esterno sulla superficie del conduttore:

$$\varphi_E(\mathbf{R}) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(R \cos \theta + d)$$

Le cariche indotte sulla sfera produrranno un campo e un potenziale indotto che si sommerà

$$\varphi_T = \varphi_E + \varphi_I$$

Il conduttore è una superficie equipotenziale e quindi φ_T deve essere costante.

$$\varphi_T(\mathbf{R}) = \varphi_E(\mathbf{R}) + \varphi_I(\mathbf{R}) = \text{const}$$

$$\begin{aligned}\varphi_I(\mathbf{R}) &= \text{const} - \varphi_E(\mathbf{R}) = \text{const} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(R \cos \theta + d) = \text{const} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}R \cos \theta \\ &= \text{const} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{i}}\end{aligned}$$

e mho?

15

Corrente stazionaria

Per definizione la corrente è un flusso ordinato di cariche elettriche, la grandezza che la caratterizza è l'intensità di corrente:

Definizione 15.1 (intensità di corrente)

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (15.1)$$

È una grandezza scalare, anche se la corrente ha un verso, quello del moto delle cariche positive e una direzione, quella del campo elettrico. Per corrente stazionaria si intende una corrente che è costante nel tempo. La corrente non ha bisogno della presenza di un conduttore. Si misura in ampere (A): C/s¹. Dall'equazione (15.1):

$$Q = \int_0^t I(t)dt \quad (15.2)$$

essendo però la corrente stazionaria $Q = It$. Il moto delle cariche ha origine da una differenza di energia potenziale e quindi da una differenza di potenziale. Tutte le particelle cariche che con il loro moto generano una corrente si chiamano portatori di cariche. Muovendo un corpo carico, per esempio trasladolo, si crea una corrente, in quanto si stanno muovendo delle cariche;

¹in realtà è il coulomb che dovrebbe essere definito come ampere secondo, vedi oltre per definizione di ampere

per differenziare queste correnti non del tutto proprie, chiameremo correnti di conduzione il moto di portatori di carica all'interno del corpo, senza movimento del corpo.

15.1 Modello del gas di elettroni liberi

Ipotizziamo che gli elettroni liberi si muovano come gli atomi di un gas classico, quindi con urti casuali, ecc... In assenza di campo elettrico gli elettroni saranno in agitazione termica con una velocità v_T di agitazione termica:

$$K = \frac{1}{2} m_e v_T^2 = \frac{f}{2} kT$$

con $f = 3$ gradi di libertà k costante di Boltzman. Alla temperatura di 300 K:

$$v_T = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \simeq 10^5 \text{ m/s}$$

Definiamo τ il tempo medio tra due urti consecutivi e l il libero cammino medio, cioè lo spazio medio che un elettrone percorre senza urti:

$$\tau = \frac{l}{v_T}$$

Se ora applichiamo un campo elettrico \mathbf{E} costante, provocheremo un altro moto dovuto alla forza elettrica con velocità v_D , velocità di deriva, che bisogna sovrapporre a quello di agitazione termica. A temperature usuali $v_D \ll v_T$ e quindi τ e l rimangono pressoché invariati.

15.2 Densità di corrente

Consideriamo un conduttore con N portatori di carica per unità di volume, tutti uguali, con carica q e velocità di deriva v_D . Nel tempo dt attraverso una sezione dA passa una quantità di carica:

$$\frac{dQ}{dt} = dI = qN (\mathbf{v}_D \cdot \mathbf{n}) da \quad (15.3)$$

Definizione 15.2 (densità di corrente) Si definisce \mathbf{J} densità di corrente:

$$\mathbf{J} = qN \mathbf{v}_D \quad (15.4)$$

Allora la (15.3) si scrive come:

$$dI = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da$$

E la corrente totale:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da \quad (15.5)$$

che è l'espressione di un flusso, precisamente il flusso di \mathbf{J} :

$$I = \Phi_S(\mathbf{j}) \quad (15.6)$$

15.2.1 Conservazione della carica

Applicando il teorema della divergenza:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV \quad (15.7)$$

il segno meno è dovuto al fatto che consideriamo positive le correnti che entrano nel volume V . Per definizione di corrente:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad (15.8)$$

Confrontando la (15.7) e la (15.8) si ottiene:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV$$

per l'arbitrarietà di V :

Legge 15.1 (conservazione della carica)

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (15.9)$$

la legge (15.1) è detta anche principio di continuità. Le sorgenti del campo \mathbf{J} sono le variazioni di densità di carica. In condizioni stazionarie $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ e dunque:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$$

e dunque \mathbf{J} è un campo solenoidale, non ha sorgenti.

15.3 Conducibilità elettrica

Indichiamo con $N(t)$ il numero di elettroni che al tempo t non hanno subito nessuna collisione. Sia N_0 il numero totale di elettroni; notare che $N(0) = N_0$. La probabilità media che un elettrone subisca un urto nel tempo dt è $\frac{dt}{\tau}$. Quindi in media il numero di elettroni che subiscono un urto nel tempo dt è $N_0(t)\frac{dt}{\tau}$. Il numero di elettroni che subiscono il primo urto $N(t)\frac{dt}{\tau}$. Allora:

$$N(t + dt) = N(t) - N(t)\frac{dt}{\tau}$$

Facendo il primo sviluppo di Taylor:

$$N(t + dt) = N(t) + \frac{dN}{dt}dt$$

Confrontando:

$$dN(t) = -N(t)\frac{dt}{\tau}$$

che rappresenta il numero di elettroni che hanno subito un urto nell'intervallo dt dopo il tempo t .

$$\frac{dN}{N} = -\frac{dt}{\tau}$$

Risolvendo:

$$\log N(t) = -\frac{t}{\tau} + c$$

$$N(t) = e^{-\frac{t}{\tau} + c} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Imponendo che $N(0) = N_0$:

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Il numero di elettroni che non hanno subito una collisione decresce molto rapidamente. La probabilità che al tempo t un elettrone non abbia subito collisioni è

$$P(t) = \frac{N(t)}{N_0} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Vogliamo ora sapere quanto ci vuole ad avere un urto qualsiasi al tempo t :

$$\bar{t} = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty t \frac{N(t)}{\tau} dt = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty \frac{t N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau} dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\infty t e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \tau$$

Quindi τ non è solo il tempo medio tra un urto di una particella e il successivo, sempre di quella particella, ma è anche il tempo medio che al tempo t bisogna

attendere per avere il primo urto tra due particelle qualsiasi. Naturalmente essendo indipendente dal tempo τ è anche il tempo medio dall'ultimo urto. Possiamo calcolare la velocità di deriva, considerando l'accelerazione data dal campo elettrico durante il tempo dall'ultimo urto:

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{a}\tau = \frac{\mathbf{F}}{m_e} = \frac{-e\tau}{m_e}\mathbf{E}$$

Usando la densità di corrente:

$$\mathbf{J} = -Ne\mathbf{v}_D = \frac{e^2\tau N}{m_e}\mathbf{E} = \sigma\mathbf{E}$$

σ è la conducibilità elettrica:

$$\sigma = \frac{e^2\tau N}{m_e} = \frac{e^2 N l}{m_e v_D}$$

La conducibilità elettrica ci dice come il conduttore risponde al campo elettrico, l'ostacolo che gli elettroni incontrano nel loro moto; alta conducibilità significa alta disposizione da parte del conduttore di mettere in moto i suoi elettroni. Se supponiamo che σ non dipenda dallo spazio, cioè il conduttore sia omogeneo, che σ non dipenda da E , cioè che il conduttore sia lineare e che non dipenda dalla direzione di \mathbf{E} cioè sia isotropo e quindi \mathbf{J} abbia la direzione di \mathbf{E} allora σ è uno scalare, altrimenti è un tensore 3×3 del second'ordine:

$$\mathbf{J} = \vec{\sigma}\mathbf{E}$$

15.3.1 Resistività

Definizione 15.3 (resistività elettrica) La resistività ρ è l'inverso della conducibilità

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

Più la resistività è alta più la risposta al campo elettrico del conduttore sarà bassa.

15.3.2 Unità di misura

$$[\sigma] = \frac{[J]}{[E]} = \frac{\text{A m}}{\text{m}^2 \text{V}} = \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$$

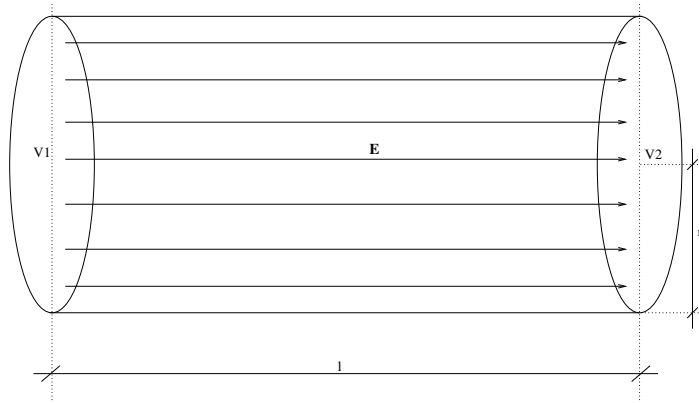
$$[\rho] = \Omega \text{ m}$$

con:

$$\Omega = \frac{V}{A} = \text{ohm}$$

$$\text{ohm}^{-1} = \text{mho} = \mathcal{U} = \text{S} = \text{siemens}$$

15.4 Legge di Ohm



Consideriamo un filo metallico lineare, isotropo, omogeneo, di lunghezza l e sezione S , con conduttività σ . Sia ΔV la differenza di potenziale mantenuta tra i due capi, con $V_1 > V_2$. Si crea allora un campo elettrico all'interno del conduttore e se $l \gg r$:

$$\Delta V = V_1 - V_2 = -(V_2 - V_1) = \int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = El \quad (15.10)$$

Con Γ una qualsiasi curva che collega le due estremità. La corrente invece:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da = JS \quad (15.11)$$

grazie al fatto che $\mathbf{J} // \mathbf{n}$ in quanto isotropo. Ricordando che $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, dalla (15.10) $E = \frac{\Delta V}{l}$ e sviluppando la (15.11):

$$I = JS = \sigma ES = \Delta V \frac{S}{l} \sigma \quad (15.12)$$

che è la legge di Ohm. Di solito si introduce la:

Definizione 15.4 (resistenza elettrica)

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

e la (15.12) diventa:

Legge 15.2 (Ohm)

$$\Delta V = IR \quad (15.13)$$

che in realtà stata introdotta come legge sperimentale. I materiali che rispettano questa legge sono detti ohmici.

15.4.1 Temperatura

La temperatura modifica ρ in quanto al crescere della temperatura i nuclei degli elettroni si muovono più velocemente e gli urti con gli elettroni diventano più probabili. L'aumento di resistività del tipo:

$$\rho(T) = \rho_0 [1 + a(T - T_0) + b(T - T_0)^2 + c(T - T_0)^3 + \dots]$$

di solito $a > b > c > \dots$ e si considera solo il primo termine:

$$\rho(T) = \rho_0 (1 + \alpha(T - T_0))$$

considerandolo come uno sviluppo di Taylor:

$$\alpha = \frac{1}{\rho_0} \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{T_0}$$

Per i semiconduttori $\alpha < 0$. Ad una certa temperatura, detta temperatura critica, la resistività crolla e si ha il fenomeno della superconduttività.

Il modello basato sul gas di elettroni non riesce a spiegare questo andamento, infatti:

$$v_T = \sqrt{3 \frac{kT}{m_e}}$$

cioè $\rho \propto v_T \propto \sqrt{T}$ invece che $\rho \propto T$. Inoltre non riesce a spiegare la diversità di ρ tra i diversi materiali, sia conduttori che non, infatti

$$\rho = \frac{m_e}{e^2 N \tau} = \frac{m_e}{e N} \frac{v_T}{l}$$

dice solo che la variazione tra i diversi materiali è data da N , che in realtà non varia di molto da conduttore a conduttore. Nella realtà ρ è influenzato da numerosi fattori tra cui le impurezze cioè il disordine del reticolo.

15.4.2 Resistori

Definizione 15.5 (resistore) Un resistore è un conduttore caratterizzato dal valore della resistenza².

Definizione 15.6 (rete resistiva) Una rete resistiva è un insieme di resistori collegati insieme.

Definizione 15.7 (circuito elettrico) Un circuito è una successione chiusa di resistori e generatori di forza elettromotrice, più eventuali altri elementi.

Resistori in serie e in parallelo

Serie I resistori si dicono collegati in serie quando sono attraversati tutti dalla stessa corrente. Applicando la legge di Ohm:

$$V_1 - V_2 = IR_1 \quad \cdots \quad V_{n-1} - V_n = IR_n$$

Sommando tutte le espressioni si ottiene che la caduta di tensione ai capi della rete è

$$V_1 - V_n = I \sum_{i=1}^N R_i$$

Quindi la resistenza equivalente, la resistenza di quel resistore che produce gli stessi effetti dei resistori in serie, è la somma delle resistenze.

Parallelo I resistori si dicono collegati in parallelo quando ai capi di ogni resistore è applicata la stessa differenza di potenziale. Applicando ancora la legge di Ohm:

$$\frac{V_1 - V_2}{R_1} \quad \cdots \quad \frac{V_1 - V_2}{R_n} = I_n$$

Sommando si ottiene che il reciproco del resistore equivalente è la somma dei reciproci dei resistori in parallelo.

Esempio 15.1 (resistenza corpo esteso) Consideriamo il corpo in figura (15.1). Vogliamo calcolare la resistenza tra i capi A e B . Scomponiamo la geometria in tanti elementini di altezza dz , essi risultano in parallelo. La loro resistenza:

$$dR = \rho \frac{l}{A} = \rho \frac{y}{h dz}$$

²La resistenza è una grandezza, non è un conduttore

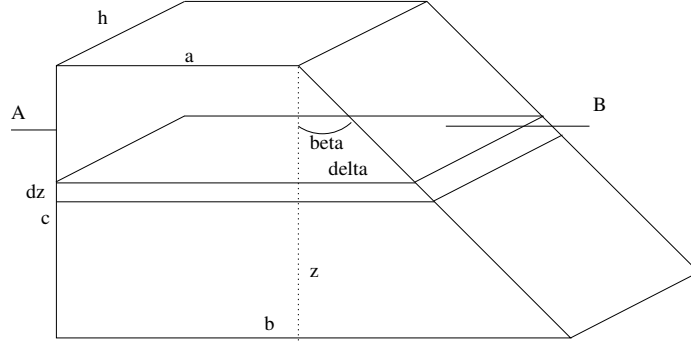


Figura 15.1: resistenza di un corpo esteso

con y che varia tra a e b . Troviamo δ :

$$c \tan \beta = b - a \quad (c - z) \tan \beta = \delta \quad \delta = (c - z) \frac{b - a}{c}$$

Allora y :

$$y = a + \delta = a + \frac{(c - z)(b - a)}{c} = b + \frac{z}{c}(a - b) \quad dy = \frac{a - b}{c} dz$$

$$\frac{1}{R} = \int_0^c \frac{1}{dR} = \int_0^c \frac{h dz}{\rho y} = \frac{hc}{\rho(a - b)} \int_b^a \frac{dy}{y} = \frac{hc}{\rho(a - b)} \log \frac{a}{b}$$

$$R = \frac{\rho(a - b)}{hc \log \frac{a}{b}}$$

15.5 Tempo di rilassamento

Vogliamo sapere quanto è il tempo necessario per un conduttore per eliminare un eccesso di carica. Consideriamo un conduttore isotropo, omogeneo, lineare, con conducibilità σ , con un eccesso di carica al tempo zero $\rho_0(\mathbf{r})$ in una regione limitata di spazio. Si creerà un campo elettrico e quindi una densità di corrente $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. Vogliamo studiare l'evolversi di $\rho(\mathbf{r}, t)$. Sappiamo:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0} \quad \operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

Essendo $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$:

$$\sigma \operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Sostituendo:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \rho = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Risolvendo:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} dt \quad \log \rho = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} t + c \quad \rho = Ae^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} t} = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} t}$$

Chiamando $\tau = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ tempo caratteristico, o tempo di rilassamento:

$$\rho = \rho_0 e^{-\tau t}$$

Il tempo caratteristico è quel tempo dopo il quale la densità di carica si è ridotta di $\frac{1}{e}$. Dopo qualche τ possiamo considerare tutto l'eccesso di carica eliminato.

15.6 Generatori

Con un campo elettrostatico si possono creare correnti, come visto nel paragrafo precedente, ma non mantenerle in quanto il fenomeno si esaurisce in pochissimo tempo. I generatori possono mantenere una differenza di potenziale costante tra i poli o morsetti o variarla secondo una funzione, tipicamente sinusoidale. Nel primo caso si parla di pile o batterie. In un circuito chiuso:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Essendo $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$:

$$\oint_C \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = \sigma \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

È assurdo perché non ci sarebbe corrente. Dobbiamo supporre ci siano alte forze, non conservative, che non sono svolte dal campo elettrostatico, essendo il suo lavoro nullo. Tali forze sono localizzate nel generatore. Consideriamo allora un altro campo \mathbf{E}_i , il campo elettrico impresso o elettromotore che si somma al campo elettrostatico:

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{E} + \mathbf{E}_i \quad \mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_i)$$

Il campo impresso nasce quando si è in presenza di una disomogeneità come ad esempio all'interno della pila.

15.6.1 Resistenza interna

Ogni generatore reale è caratterizzato da una resistenza interna r e da una forza elettromotrice ε . Se gli colleghiamo un resistore con resistenza R la

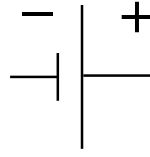


Figura 15.2: simbolo della pila

circuitazione del campo elettrostatico deve essere nulla e quindi anche la variazione di potenziale. Allora se ai capi del generatore ideale c'è una differenza di potenziale ε la caduta di tensione attraverso R e r deve essere uguale e contraria a ε . La differenza di tensione del generatore reale è minore di quella del generatore ideale e in particolare:

$$V_2 - V_1 = \varepsilon - Ir$$

Se in un ramo di circuito con estremi A e B ci sono dei resistori in serie e un generatore vale:

Legge 15.3 (Ohm generalizzata)

$$V_A - V_B + \varepsilon = IR \quad (15.14)$$

con $R = \sum R_i + r$.

Potenza massima

Vogliamo sapere quando un circuito assorbe la potenza massima. Riassumiamo tutto il circuito con un resistore con resistenza R , che rappresenta il carico cioè tutte le resistenze collegate al generatore reale, un generatore ideale e una resistenza interna r . Sappiamo che la potenza è

$$P = RI^2 = R \left(\frac{\varepsilon}{R + r} \right)^2$$

Vogliamo sapere qual è l' R ottimale per cui viene dissipata la potenza maggiore su R . Deriviamo in R :

$$\frac{dP}{dR} = \varepsilon^2 \left[\frac{1}{(R + r)^2} - \frac{2R}{(R + r)^3} \right]$$

che ha uno zero per $r = R$.

Se r è molto diverso da R gran parte dell'energia viene dispersa su r , cioè all'interno del generatore.

15.7 Effetto Joule

L'effetto Joule può essere spiegato sia da un punto di vista macroscopico che microscopico utilizzando il modello del gas di elettroni liberi. L'effetto Joule avviene ogni qualvolta la corrente passa attraverso un resistore.

15.7.1 Macroscopico

Quando una carica dq passa da un potenziale V_B a un potenziale V_A ci sarà una variazione di energia potenziale; per definizione:

$$dW = dq(V_B - V_A)$$

ma $dq = I(t)dt$, sostituendo:

Legge 15.4 (Joule)

$$dW = I(t)(V_B - V_A)dt \quad (15.15)$$

corrente stazionaria

Nel caso stazionario $I(t) = I$:

$$W = \int_0^t I(V_B - V_A)dt = I(V_B - V_A)t$$

se il conduttore è ohmico $I = \frac{\Delta V}{R}$:

$$W = RI^2t$$

e la potenza:

$$P = \frac{dW}{dt} = I\Delta V = RI^2 = \frac{\Delta V^2}{R}$$

15.7.2 Microscopico

Consideriamo un conduttore con N portatori di carica nell'unità di volume. Il singolo elettrone ha in media τ^{-1} collisioni nell'unità di tempo. Quindi nell'elementino di volume dv nel tempo dt avvengono $N\frac{dv}{\tau}dt$ collisioni. Tra un urto e un altro un elettrone viene accelerato con una forza $-eE$ parallela al campo elettrico. Lo spostamento sarà $v_D\tau$. Allora il lavoro sarà

$$dL_e = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = -eEv_D\tau$$

considerando tutti gli elettroni nel volume dv , la potenza:

$$dP = -\frac{Ndv}{\tau} eEv_D\tau$$

Ricordando che:

$$v_D = -\frac{eE}{m\tau} \quad \sigma = \frac{e^2N}{m}\tau$$

$$dP = \frac{e^2NE^2}{m}\tau dv = \sigma E^2 dv$$

Se consideriamo un filo conduttore questo avrà una lunghezza l e una sezione S e una differenza di potenziale $V_A - V_B = El$.

$$P = \int_V dP = \sigma E^2 \int_V dv = \sigma E^2 (Sl) = \sigma \frac{\Delta V^2}{l^2} Sl = \sigma \frac{S}{l} \Delta V^2 = \frac{\Delta V^2}{R}$$

16

Campo induzione magnetica

16.1 Definizione

Ogni punto dello spazio è caratterizzato oltre che da un campo \mathbf{E} anche da un vettore di induzione magnetica \mathbf{B} . Su una carica q con velocità \mathbf{v} immersa in un campo magnetico \mathbf{B} si esercita una forza:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (16.1)$$

chiamata forza di Lorentz. Essa è diretta perpendicolarmente alla velocità e quindi allo spostamento, ne deriva che non compie lavoro; è massima quando la velocità è perpendicolare a \mathbf{B} e nulla quando gli è parallela. Considerando anche un campo elettrostatico la forza totale risulta:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (16.2)$$

16.1.1 Definizione operativa

Per misurare il campo elettrico è sufficiente effettuare una misura, per quello magnetico no. Ricaviamo dalla (16.1) il campo magnetico, moltiplichiamo vettorialmente per \mathbf{v} :

$$\frac{\mathbf{F} \times \mathbf{v}}{q} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{v} = \mathbf{v}B^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{v}$$

Allora¹:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{v}}{qv^2} + c\mathbf{v}$$

Facciamo due misure usando q e due velocità ortogonali $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{F}_1 \times \mathbf{v}_1}{qv_1^2} + c_1\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{F}_2 \times \mathbf{v}_2}{qv_1^2} + c_2\mathbf{v}_2$$

Moltiplichiamole scalarmente per v_1 :

$$\frac{(\mathbf{F}_1 \times \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_1}{qv_1^2} + c_1v_1^2 = \frac{(\mathbf{F}_2 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_1}{qv_1^2} + c_2 \underbrace{(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1)}_0$$

$$c_1 = \frac{(\mathbf{F}_2 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_1}{qv_1^2v_2^2}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{F}_1 \times \mathbf{v}_1}{qv_1^2} + \frac{(\mathbf{F}_2 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_1}{qv_1^2v_2^2} \mathbf{v}_1$$

16.1.2 Unità di misura

$$[B] = [mlq^{-1}t^{-1}] = \frac{\text{N s}}{\text{C m}} = \frac{\text{V s}}{\text{m}^2} = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = T = 10^4 \text{ G} = 10^4 \text{ gauss}$$

Dove Wb = weber = V s, T = tesla = $\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$.

Esempio 16.1 (elettrone in campo magnetico) Spriamo un elettrone in un campo magnetico \mathbf{B} con velocità $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$. Per semplicità scegliamo un sistema di riferimento in modo che $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}}$ e che $\mathbf{r}(0) = 0$. Ad ogni istante sull'elettrone agisce la forza di Lorentz:

$$\mathbf{F}(t) = -e\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}$$

Scomponiamo le componenti:

$$\begin{cases} ma_x = F_x = -e(v_y B_z - v_z B_y) = -ev_y B \\ ma_y = F_y = e(v_x B_z - v_z B_x) = ev_x B \\ ma_z = F_z = -e(v_x B_y - v_y B_x) = 0 \end{cases}$$

riassumendo:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{eB}{m}\dot{y} \\ \ddot{y} = \frac{eB}{m}\dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

¹??!!

che è un sistema di equazioni differenziali del second'ordine accoppiate. Operiamo la sostituzione $\frac{d}{dt}\mathbf{r} = \mathbf{v}$:

$$\begin{cases} \dot{v}_x = -\omega v_y \\ \dot{v}_y = \omega v_x \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases}$$

con $\omega = \frac{eB}{m}$. L'ultima ha naturalmente soluzione:

$$z = v_{z0}t$$

Deriviamo la prima:

$$\ddot{v}_x = -\omega \dot{v}_y = -\omega^2 v_x$$

e la seconda:

$$\ddot{v}_y = \omega \dot{v}_x = -\omega^2 v_y$$

Abbiamo disaccoppiato le equazioni. Una soluzione generale della prima è

$$v_x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Sostituendo troviamo anche la seconda:

$$v_y = -A \cos(\omega t + \varphi)$$

La forza di Lorentz non compie lavoro, quindi si deve conservare l'energia cinetica essendo v_z costante si deve conservare la quantità

$$v_x^2 + v_y^2 = v_{x0}^2 + v_{y0}^2 = v_{\perp}^2$$

Allora $A = v_{\perp}$. Manca da ricavare φ :

$$\begin{cases} v_x = v_{\perp} \sin(\omega t + \varphi) \\ v_y = -v_{\perp} \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Imponendo che $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$:

$$\begin{cases} v_x(0) = v_{\perp} \sin(\varphi) = v_{x0} \\ v_y(0) = -v_{\perp} \cos(\varphi) = v_{y0} \end{cases}$$

Dividendo:

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{v_{x0}}{v_{y0}}\right)$$

Per trovare x , y basta integrare, si trova:

$$\begin{cases} x = -\frac{v_{\perp}}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) \\ y = -\frac{v_{\perp}}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) \\ z = v_{z0} t \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} v_{\perp} &= \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2} \\ \omega &= \frac{eB}{m} \\ \varphi &= \arctan\left(-\frac{v_{x0}}{v_{y0}}\right) \end{aligned}$$

È l'equazione di un elica con asse parallelo a \mathbf{B} . Se si considera solo la proiezione sul piano xy si trova una circonferenza con raggio:

$$r_L = \frac{v_{\perp}}{\omega}$$

chiamato raggio di Larmor.

Esempio 16.2 (spettrometro di massa) Lo spettrometro di massa è uno strumento che consente di determinare con alta precisione la massa di particelle cariche, per esempio ioni. La prima parte è detta separatore di velocità.

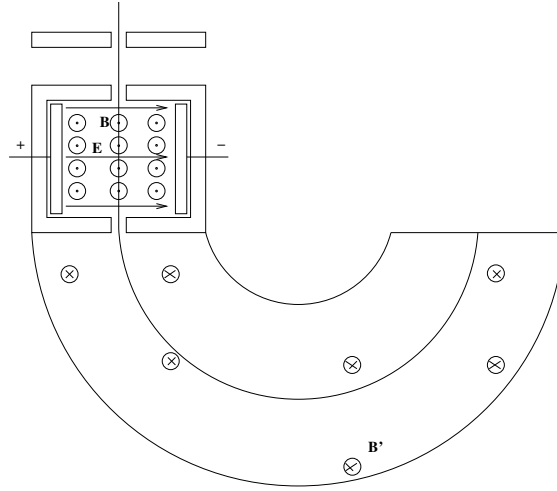


Figura 16.1: spettrometro di massa

Le particelle focalizzate da fenditure entrano con velocità casuale e vengono sottoposte a un campo magnetico \mathbf{B} e uno elettrico \mathbf{E} ortogonali. La forza risultante è

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

essendo $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$. Solo le particelle che hanno una certa velocità e cioè

$$v = \frac{E}{B}$$

non sono deviate dai campi e quindi riescono a uscire dal separatore di velocità. Nella seconda parte le particelle cariche subiscono una deviazione dovuta al campo magnetico \mathbf{B}' . Misurando dove le particelle colpiranno lo schermo si può dedurre il raggio di Larmor e ricavare la massa:

$$m = \frac{qB'B}{E}r_L$$

16.2 Forza magnetica su una corrente

Sperimentalmente si trova che su un filo di lunghezza l , sezione S percorso dalla corrente stazionaria I , immerso in un campo magnetico uniforme \mathbf{B} agisce una forza:

$$\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (16.3)$$

\mathbf{l} è il vettore con modulo l e verso e direzione quello della corrente positiva. La cosa può essere dimostrata partendo dalla (16.1). Su ogni elettrone agisce una forza di Lorentz:

$$\mathbf{F}_e = -e\mathbf{v}_D \times \mathbf{B} \quad (16.4)$$

Quindi la forza sul filo è la somma delle forze (16.4) su tutti gli elettroni. Se N è il numero di elettroni nell'unità di volume e il volume $V = Sl$:

$$\mathbf{F} = -NSl e\mathbf{v}_D \times \mathbf{B} \quad (16.5)$$

L'espressione (16.5) può essere semplificata ricordando che per definizione la densità di corrente è

$$\mathbf{J} = -Ne\mathbf{v}_D$$

$$\mathbf{F} = -NSl e\mathbf{v}_D \times \mathbf{B} = Sl\mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (16.6)$$

L'intensità di corrente è

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da = JS = Ne\mathbf{v}_D S$$

Dunque la forza per unità di volume è $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$. Ora possiamo definire \mathbf{l} con modulo l e direzione e verso quelli di \mathbf{J} , dunque:

$$\mathbf{F} = S\mathbf{J}l \times \mathbf{B} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (16.7)$$

che è proprio la (16.3) e può essere usata come definizione di \mathbf{B} . Potremmo anche definire un vettore $\mathbf{I} = S\mathbf{J}$ e la forza per unità di lunghezza sarebbe $\mathbf{I} \times \mathbf{B}$.

16.2.1 Seconda formula di Laplace

Per passare dalla (16.4) alla (16.5) bisogna supporre che \mathbf{B} sia uniforme e quindi F_e è uguale per ogni elettrone. Nel caso più generale, la forza che si esercita su un elemento infinitesimo $d\mathbf{l}$ è

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (16.8)$$

La seconda formula di Laplace non è semplicemente il differenziale della forza (16.7). Allora:

$$\mathbf{F} = \oint_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (16.9)$$

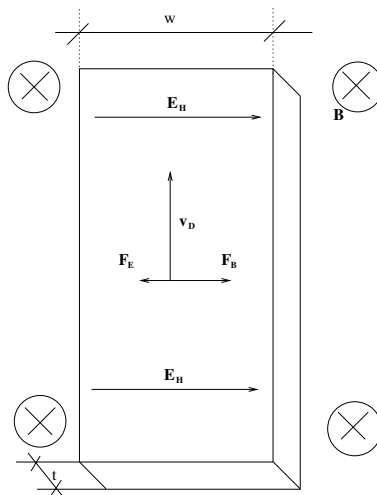
è la forza su tutto il circuito C . Dato che $I d\mathbf{l} = \mathbf{J} S d\mathbf{l} = \mathbf{J} d\mathbf{v}$ la (16.9) diventa:

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{J} \times \mathbf{B} d\mathbf{v} \quad (16.10)$$

Esempio 16.3 (effetto Hall) L'effetto Hall avviene nei conduttori percorsi da corrente in un campo magnetico \mathbf{B} . Immaginiamo una lastra conduttrice di larghezza w e altezza t . Sia v_D la velocità di deriva degli elettroni. Essi saranno deviati con una forza:

$$\mathbf{F} = -e v_D \times \mathbf{B}$$

Si crea allora un accumulo di cariche da un lato e del segno opposto sull'altro:



si crea un campo elettrico \mathbf{E}_H ortogonale alla direzione della corrente. Tra i

due lati della lastra di è formata una differenza di potenziale $\Delta V_H = E_H w$. Il sistema raggiunge l'equilibrio quando la forza sugli elettroni:

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{v}_D \times \mathbf{B} - e\mathbf{E}_H$$

è nulla cioè quando la forza del campo elettrico è uguale e contraria alla forza di Lorentz. Ricordando che la velocità è ortogonale al campo magnetico e al campo elettrico:

$$E_H = v_D B$$

Ricordando l'espressione di v_D :

$$v_D = \frac{J}{Ne} = \frac{I}{SNe} = \frac{I}{wtNe}$$

$$\Delta V_H = E_H w = \frac{I}{tNe} B$$

16.3 Momento su un circuito

Sia C un circuito piano chiuso attraversato da una corrente stazionaria I immerso in un campo magnetico \mathbf{B} uniforme. Dalla (16.9) deduciamo che sulla spira agisce una forza nulla:

$$\mathbf{F} = \oint_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I \oint_C d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I \left(\oint_C d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{B} = 0$$

in quanto $0 = \oint_C d\mathbf{l} \neq \oint_C dl$. Scegliamo un sistema di riferimento xyz in modo che il piano xy contenga C e la proiezione di \mathbf{B} sia parallela all'asse x ; sia θ l'angolo che \mathbf{B} forma con z . Allora:

$$B_z = B \cos \theta \quad B_x = B \sin \theta$$

Suddividiamo il circuito in tante strisce infinitesime. Se la corrente di C gira in verso antiorario, anche quella nelle strisce; in questo modo i lati adiacenti si cancellano. Ogni spira a causa del campo magnetico è soggetta ad una forza:

$$d\mathbf{F} = Id\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$$\|d\mathbf{F}\| = IdlB_x \sin \alpha = dyB \sin \theta I$$

Dunque la forza è massima quando la spira è perpendicolare al campo magnetico.

$$d\mathbf{M} = IlBdy \sin \theta \mathbf{n} = IdaB\mathbf{n}$$

$$dm = I d\mathbf{a}\mathbf{n}$$

$$d\mathbf{M} = d\mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{M} = \iint_S d\mathbf{m} \times \mathbf{B} = \iint_S I d\mathbf{a}\mathbf{n} \times \mathbf{B} = I\mathbf{n} \left(\iint_S da \right) \times \mathbf{B} = IS\mathbf{n} \times \mathbf{B}$$

Definiamo il momento di dipolo magnetico:

$$\mathbf{m} = IS\mathbf{n}$$

allora:

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

16.4 Ago magnetico

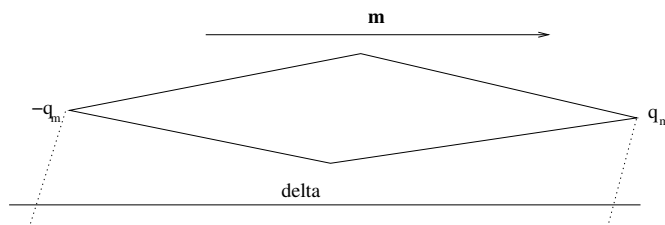
Un ago magnetico immerso in un campo magnetico costante \mathbf{B} si comporta come un circuito, cioè subisce un momento che lo fa disporre parallelamente alle linee del campo:

$$\mathbf{M} = \mathbf{K} \times \mathbf{B}$$

con \mathbf{K} è un vettore che dipende dalle caratteristiche dell'ago, ed è orientato secondo la linea polo sud, polo nord dell'ago.

Il suo comportamento è analogo a quello del dipolo elettrico, con momento di dipolo $\mathbf{p} = q\delta$. Possiamo immaginare l'ago magnetico come costituito da due cariche magnetiche di segno opposto q_m , una al polo nord e l'altra al polo sud. Definiamo \mathbf{m} momento magnetico dell'ago in modo tale che:

$$\mathbf{K} = \mathbf{m} = q_m\delta$$



16.4.1 Lamina magnetica

Suddividiamo una spira di area S in infinitesime spire di area da . Ogni spira avrà un momento magnetico $d\mathbf{m} = Id\mathbf{a}\mathbf{n}$. Per analogia con il dipolo possiamo anche dire che $d\mathbf{m} = \sigma_m da\delta$ e allora:

$$\sigma_m = \frac{I}{\delta}$$

rappresenta la densità di carica magnetica sulle faccie di una lamina magnetica con lamine a distanza δ , che a grande distanza è equivalente alla spira iniziale.

16.5 Campi magnetici generati da correnti

Una corrente crea un campo magnetico. Al posto di usare una carica di prova per esplorare il campo, si può usare un aghetto magnetico di prova. Si scopre che un filo rettilineo crea un campo magnetico le cui linee di forza si chiudono su se stesso.

16.5.1 Legge di Biot–Savart

Per quanto riguarda un filo indefinito vale la:

Legge 16.1 (Biot–Savart)

$$B = k \frac{I}{r} \quad (16.11)$$

con k una costante che dipende dalle unità di misura. Il primo modo è porre $k = 1$, in realtà si pone:

$$k = \frac{\mu_0}{2\pi}$$

con μ_0 la permeabilità magnetica del vuoto:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

Quanto detto vale per il modulo, essendo il campo magnetico attorno al filo, allora:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\hat{\mathbf{s}} \times \mathbf{r}}{r^2} I$$

con $\hat{\mathbf{s}}$ è un versore orientato come il verso della corrente, mentre \mathbf{r} è il vettore che individua il punto rispetto al filo, ha quindi il modulo della distanza tra il filo e il punto.

unità di misura

$$[\mu_0] = \frac{\text{weber}}{\text{metro} \cdot \text{ampere}} = \frac{\text{V s}}{\text{m A}} = \frac{\Omega \text{ s}}{\text{m}} = \frac{\text{H}}{\text{m}}$$

con:

$$\text{H} = \text{ohm} \cdot \text{secondo} = \text{henry}$$

16.5.2 Prima formula di Laplace

La prima legge di Laplace stabilisce che un elemento $d\mathbf{l}$ di circuito percorso da una corrente I produce in un punto P distate \mathbf{r} da esso un vettore di induzione magnetica:

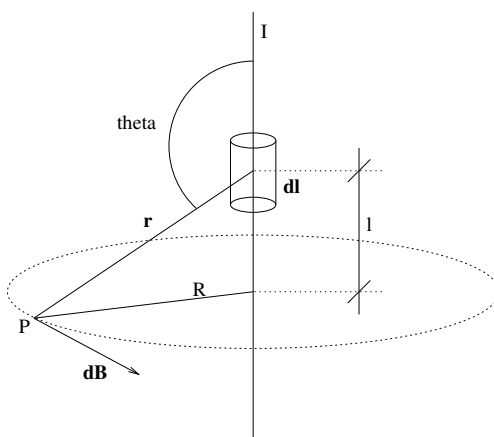
$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} I \quad (16.12)$$

Per un circuito generico possiamo usare il principio di sovrapposizione con tutti gli elementini $d\mathbf{l}$ del circuito:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \quad (16.13)$$

Essendo $I d\mathbf{l} = \mathbf{J} dv$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dv' \quad (16.14)$$



Esempio 16.4 (filo infinito) Ricaviamo la legge di Biot-Savart. Chiamiamo \mathbf{r} la distanza di P dall'elementino $d\mathbf{l}$ e R la distanza dal filo. Allora:

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} \quad d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl \sin \theta}{r^2}$$

ma:

$$r = \frac{R}{\sin \theta} \quad l = \frac{R}{\tan(\pi - \theta)} = -\frac{R}{\tan \theta} \quad dl = \frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$\begin{aligned} B(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \theta}{r^2} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^\pi \frac{\sin \theta \sin^2 \theta}{R^2} \frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} \end{aligned}$$

in forma vettoriale:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\|\mathbf{r}\|} \hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \quad (16.15)$$

Esempio 16.5 (spira circolare) Consideriamo un circuito di forma circolare, con raggio R . Vogliamo il campo magnetico lungo l'asse. Per ragioni di simmetria il campo magnetico risultante è ortogonalmente al piano della spira. Usiamo le coordinate cilindriche. P avrà coordinate $(0, 0, w)$, individuato dal vettore $\mathbf{r} = w\hat{\mathbf{e}}_w$, mentre l'elementino dl della spira sarà individuato dal vettore $\mathbf{r}' = r'\hat{\mathbf{e}}_r$. L'elementino $d\mathbf{l} = R d\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta$.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{I d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{IR d\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta \times (w\hat{\mathbf{w}}_z - R\hat{\mathbf{e}}_r)}{(R^2 + w^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Ricordando che:

$$\hat{\mathbf{e}}_\theta \times \hat{\mathbf{e}}_w = \hat{\mathbf{e}}_r \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta \times \hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_w \quad \int_0^{2\pi} d\theta \hat{\mathbf{e}}_r = \int_0^{2\pi} (\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}) d\theta = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(w) &= \frac{\mu_0 IR}{4\pi (R^2 + w^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} (w\hat{\mathbf{e}}_r + R\hat{\mathbf{e}}_w) d\theta = \frac{\mu_0 IR}{4\pi (R^2 + w^2)^{\frac{3}{2}}} R\hat{\mathbf{e}}_w 2\pi \\ &= \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + w^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{\mathbf{e}}_w \end{aligned}$$

Nel caso particolare $w = 0$ si ha:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R} \hat{\mathbf{e}}_w$$

Esempio 16.6 (solenoid) Immaginiamo il solenoide come l'insieme di tante spire affiancate e usiamo il principio di sovrapposizione. Sia N il numero

di spire per unità di lunghezza, l la sua lunghezza. Il campo magnetico generato da una spira che non si trovi nell'origine, ma ad una distanza w' sull'asse è

$$\mathbf{B}_S(w) = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + (w - w')^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{\mathbf{e}}_w$$

Essendo Ndw il numero di spire in dw :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(w) &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} B_S N dw \hat{\mathbf{e}}_w = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\mu_0}{2} \frac{INR^2 dw}{(R^2 + (w - w')^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{\mathbf{e}}_w \\ &= \frac{\mu_0 INR^2}{2} \hat{\mathbf{e}}_w \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dw}{(R^2 + (w - w')^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Occupiamoci dell'integrale, usiamo la sostituzione $u = w - w'$ quindi $du = dw$:

$$\int \frac{dw}{(R^2 + (w - w')^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{du}{(R^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Sostituendo ora $u = R \sinh t$, $du = R \cosh t dt$:

$$\int \frac{du}{(R^2 + u^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{R \cosh t}{R^3 (1 + \sinh^2 t)^{\frac{3}{2}}} dt = \int \frac{dt}{R^2 \cosh^2 t} = \frac{1}{R^2} \tanh t$$

Risostituiamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} \tanh t &= \frac{1}{R^2} \frac{\sinh \operatorname{arcsinh} \frac{u}{R}}{\cosh \operatorname{arcsinh} \frac{u}{R}} = \frac{u}{R^3} \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 \operatorname{arcsinh} \frac{u}{R}}} \\ &= \frac{u}{R^3} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{u}{R}\right)^2}} = \frac{1}{R^3} \frac{w - w'}{\sqrt{1 + \left(\frac{w - w'}{R}\right)^2}} \end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(w) &= \frac{\mu_0 N I R^2}{2} \hat{\mathbf{e}}_w \left[\frac{1}{R^3} \frac{w - w'}{\sqrt{1 + \left(\frac{w - w'}{R}\right)^2}} \right]_{w=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \\ &= \frac{\mu_0 N I}{2R} \hat{\mathbf{e}}_w \left(\frac{\frac{l}{2} - w'}{\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{l}{2} - w'}{R}\right)^2}} + \frac{\frac{l}{2} + w'}{\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{l}{2} + w'}{R}\right)^2}} \right) \end{aligned}$$

che rappresenta il campo magnetico generato da un solenoide di lunghezza l , se $l \rightarrow \infty$:

$$\mathbf{B} = \mu_0 I N$$

Infatti per esempio, usando al primo passaggio Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\frac{l}{2} - w'}{\sqrt{1 + \left(\frac{\frac{l}{2} - w'}{R}\right)^2}} &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\frac{l}{2} - w'}{R}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\frac{l}{2} - w'}{R}\right)} \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\left[\left(\frac{\frac{l}{2} - w'}{R}\right)^2 \left(\frac{R^2}{\left(\frac{l}{2} - w'\right)^2} + 1\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\frac{l}{2} - w'}{R}\right)} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{R^2}{\left(\frac{l}{2} - w'\right)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}} = 1 \end{aligned}$$

16.5.3 Forze tra due circuiti

Prendiamo due circuiti generici C_1 e C_2 percorsi da correnti stazionarie I_1 e I_2 . Usando la prima formula di Laplace possiamo dire che la forza che l'elementino $d\mathbf{l}_2$ del secondo circuito risente del campo magnetico del primo è

$$d\mathbf{F} = I_2 (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1(\mathbf{r})) \quad (16.16)$$

$$d\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \quad (16.17)$$

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \quad (16.18)$$

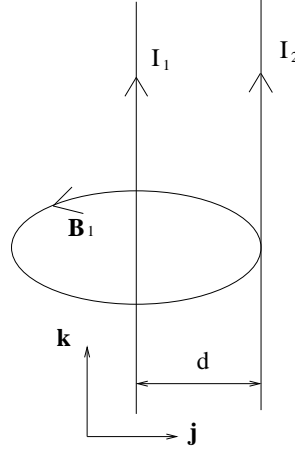
Sostituendo l'ultima espressione nella (16.16):

$$d\mathbf{F} = I_2 \left(d\mathbf{l}_2 \times \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \right) \quad (16.19)$$

Integrando:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_2} d\mathbf{l}_2 \times \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \quad (16.20)$$

Naturalmente per il terzo principio della dinamica $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$.



16.5.4 Fili rettilinei indefiniti

Siano due fili indefiniti paralleli, a distanza d percorsi dalle correnti concordi I_1 e I_2 .

Usiamo Biot–Savart, il campo generato dal primo filo a distanza d :

$$\mathbf{B}(d) = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 \frac{\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}}}{d^2} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{d} \hat{\mathbf{i}} \quad (16.21)$$

La forza sul secondo:

$$d\mathbf{F} = I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}(d) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{d} I_2 d\mathbf{l}_2 (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}}) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} d\mathbf{l}_2 \hat{\mathbf{j}} \quad (16.22)$$

Integrando:

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} l \hat{\mathbf{j}}$$

Se la corrente fosse stata di verso opposto allora la forza sarebbe stata repulsiva.

Definizione di ampere

Dalla (16.22) possiamo dire:

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} \quad (16.23)$$

e definire l'ampere usando solo quantità meccaniche come la forza e la distanza:

Definizione 16.1 (ampere) l'ampere è quella corrente che passando tra due fili distanti 1 m produce una forza per unità di lunghezza pari a 2×10^{-7} N.

16.6 Circuitazione

Prendiamo un filo rettilineo, calcoliamo la circuitazione di \mathbf{B} lungo una linea di forza:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint B dl = \oint \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} dl = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} 2\pi R = \mu_0 I$$

Questo risultato vale per qualsiasi percorso purché concateni una corrente I . Consideriamo un circuito che non concatena nessuna corrente:

$$\begin{aligned} \int_1 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= 0 & \int_3 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= 0 \\ \int_2 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r_2} (r_2 \theta) & \int_4 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r_1} (r_1 \theta) \end{aligned}$$

Sommando si ottiene che la circuitazione è nulla. Generalizzando si arriva al teorema di Ampere:

Teorema 16.1 (Ampere) *Sia I la corrente totale che il percorso C concatena:*

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (16.24)$$

se la corrente viene concatenata n volte va contata n volte. La corrente va contata con segno, dipendente dal verso di concatenamento, positiva se in senso antiorario.

La circuitazione dipende dal cammino della circuitazione, infatti \mathbf{B} non è un campo conservativo.

16.6.1 Forma differenziale

Essendo:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da$$

sostituendola nella (16.24) si ha:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da$$

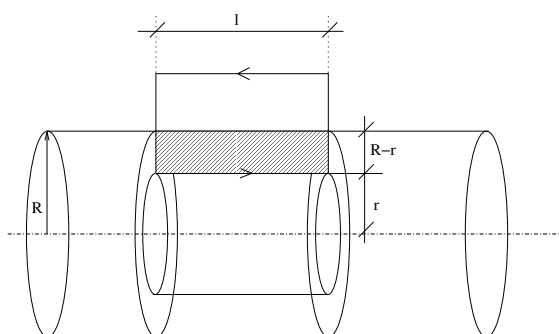
Usando il teorema del rotore:

$$\int_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da$$

Essendo S qualsiasi:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (16.25)$$

Esempio 16.7 (cilindro rotante) Sia un cilindro rotante lungo l'asse con periodo T , all'interno del quale ci sia una distribuzione di carica uniforme ρ . Vogliamo conoscere il campo magnetico generato. Per la simmetria il campo è coassiale. Creiamo un percorso che concatena parzialmente il cilindro.



$$I = \frac{Q}{T} = \frac{\int_V \rho \, dv}{T} = \frac{\rho l \pi (R^2 - r^2)}{T}$$

Per il teorema di Ampere:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = Bl = \mu_0 I = \mu_0 \frac{\rho l \pi (R^2 - r^2)}{T}$$

$$B = \mu_0 \frac{\rho \pi (R^2 - r^2)}{T}$$

16.7 Flusso

Sappiamo che le linee del campo di \mathbf{B} sono linee chiuse o infinite, non esistono sorgenti. Se prendiamo una superficie qualsiasi ci accorgiamo che tante linee di forza entrano, tante ne escono, quindi:

$$\Phi_S(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da = 0 \quad (16.26)$$

16.7.1 Forma differenziale

In forma differenziale:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (16.27)$$

Questa espressione poteva essere ricavata calcolando:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dv' \right\} = 0$$

16.8 Maxwell per la magnetostatica

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (16.28)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (16.29)$$

o in forma integrale:

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = 0 \quad (16.30)$$

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad (16.31)$$

16.9 Potenziale scalare magnetico

Supponiamo di poter scrivere:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \operatorname{grad} \varphi_m(\mathbf{r}) \quad (16.32)$$

Consideriamo una spira C piana percorsa da corrente I . La (16.13) ci fornisce il campo magnetico in P :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \quad (16.33)$$

Se da P ci spostiamo di uno spostamento infinitesimo $d\mathbf{s}$ allora il potenziale in P varia di:

$$d\varphi_m = \operatorname{grad} \varphi_m \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (16.34)$$

avendo usato la (16.32). Sostituendo l'espressione del campo magnetico (16.33):

$$d\varphi_m = -\frac{I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{s} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{r})}{r^3} \quad (16.35)$$

dove abbiamo battezzato $\mathbf{r} := (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ che quindi indica il vettore che individua P rispetto a $d\mathbf{l}$. L'ultima relazione la possiamo anche scrivere come:

$$d\varphi_m = -\frac{I}{4\pi} \oint_C \frac{\mathbf{r} \cdot (d\mathbf{s} \times d\mathbf{l})}{r^3} \quad (16.36)$$

Tutto ciò lo possiamo ottenere mantenendo P fermo e spostando la spira di $-d\mathbf{s}$ e la variazione del campo magnetico sarebbe ancora (16.36). Durante questo spostamento i vettori $d\mathbf{l}$ e $d\mathbf{s}$ descrivono un'area $d\mathbf{a} = -d\mathbf{s} \times d\mathbf{l}$ che compare nella (16.36) e punta nel semispazio di P . Vogliamo dimostrare che l'integrale:

$$-\oint_C \frac{\mathbf{r} \cdot (d\mathbf{s} \times d\mathbf{l})}{r^3}$$

è uguale a $d\omega$, la variazione di ω , l'angolo solido con cui P vede C , durante lo spostamento $d\mathbf{s}$. $d\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = da_0 r$ area perpendicolare a \mathbf{r} :

$$\frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{a}}{r^3} = \frac{r da_0}{r^3} = \frac{da_0}{r^2} = dd\omega$$

integrando si trova $d\omega$. Allora:

$$d\varphi_m = \frac{I}{4\pi} d\omega \quad (16.37)$$

e quindi:

$$\varphi_m = \frac{I\omega}{4\pi} \quad (16.38)$$

Suddividiamo la superficie S delimitata da C in tante spire di area da percorse da corrente I . Per il solito discorso sommando tutte le da si torna alla spira C . Il verso della corrente determina l'orientamento delle spire. Essendo:

$$\omega = \int_S \frac{d\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

possiamo scrivere la (16.38) come:

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{I d\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (16.39)$$

essendo il momento della spira elementare $d\mathbf{m} = I d\mathbf{a} \mathbf{n} = I d\mathbf{a}$ lo possiamo introdurre nella (16.39):

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{d\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (16.40)$$

Sviluppando a grande distanza il potenziale è approssimato da:

$$\varphi_m(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (16.41)$$

con $\mathbf{m} = IS\mathbf{n}$. Tornando alla notazione iniziale:

$$\varphi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} = -\frac{1}{\mu_0} \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (16.42)$$

16.10 Potenziale vettoriale magnetico

Essendo la divergenza del vettore \mathbf{B} nulla, cioè essendo \mathbf{B} un campo vettoriale solenoidale si può dimostrare che:

$$\exists \mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (16.43)$$

in questo caso \mathbf{A} è detto potenziale vettore magnetico, e non è univocamente determinato, per esempio se scegliamo un certo \mathbf{A} potenziale vettore allora anche $\mathbf{A} + \text{grad } \psi$ soddisfa la condizione (16.43):

$$\text{rot } (\mathbf{A} + \text{grad } \psi) = \text{rot } \mathbf{A}$$

in quando il rotore di un gradiente è sempre nullo. Tra le tante possibili scelte di \mathbf{A} scegliamo (per la magnetostatica) \mathbf{A} tale che:

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (16.44)$$

Sappiamo dalla circuitazione di Ampere che:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (16.45)$$

Sostituendo la (16.43):

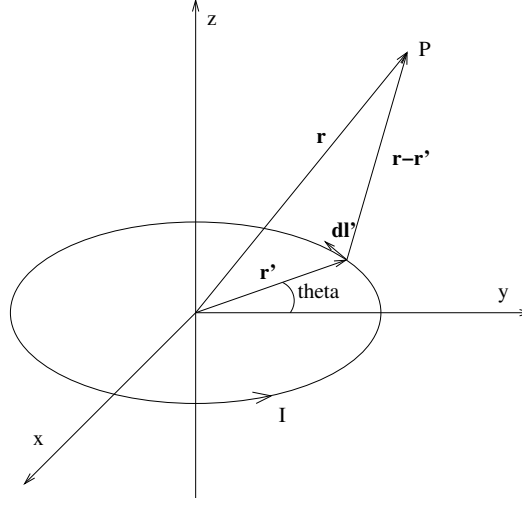
$$\text{rot } \mathbf{B} = \text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (16.46)$$

e per la condizione per la magnetostatica (16.44):

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (16.47)$$

da confrontare con la (14.4) per l'elettrostatica $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$, che però è un'equazione scalare. La soluzione della (16.44) è

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dv' \quad (16.48)$$



16.10.1 Dipolo magnetico

Calcoliamo il potenziale vettoriale generato da una spira circolare di raggio r' percorsa da corrente stazionaria I . Dalla (16.48):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\mathbf{l}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \quad (16.49)$$

essendo $\mathbf{J} dv' = I d\mathbf{l}'$. Se la spira giace nel piano xy allora la componente \mathbf{A}_z è nulla essendo $d\mathbf{l}'$ nel piano xy . Introducendo il momento magnetico della spira:

$$\mathbf{m} = I A \mathbf{n} \quad (16.50)$$

con A l'area della superficie racchiusa dalla spira, possiamo descrivere la spira come un dipolo magnetico mediante il potenziale vettoriale, sviluppando la (16.49). Sappiamo già che se usassimo il potenziale scalare magnetico potremmo scrivere:

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (16.51)$$

sviluppiamo la quantità $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^{-1}$ che compare nella (16.49):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| &= \left[(x - r' \sin \theta)^2 + (y - r' \cos \theta)^2 + z^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{2xr'}{r^2} \sin \theta - \frac{2yr' \cos \theta}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

con θ l'angolo tra \mathbf{r}' e l'asse y . Consideriamo $r \gg r'$, consideriamo solo i termini del primo ordine dello sviluppo di potenze:

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r'y \cos \theta + r'x \sin \theta}{r^2} + \dots \right] \quad (16.52)$$

Tenendo conto che:

$$d\mathbf{l}' = -(r'd\theta \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + r'd\theta \sin \theta \hat{\mathbf{j}}) \quad (16.53)$$

Allora la (16.49) si scrive come:

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} -r'd\theta \cos \theta \left(\frac{1}{r} + \frac{r'y \cos \theta + r'x \sin \theta}{r^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left(\frac{r'^2 \pi y}{r^3} \right) \quad (16.54a)$$

$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} -r'd\theta \sin \theta \left(\frac{1}{r} + \frac{r'y \cos \theta + r'x \sin \theta}{r^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left(\frac{r'^2 \pi x}{r^3} \right) \quad (16.54b)$$

$$A_z = 0 \quad (16.54c)$$

che si riassume, tenendo conto che l'area è $A = \pi r'^2$:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (16.55)$$

17

Dielettrici

17.1 Isolanti

A differenza che nei conduttori negli isolanti o dielettrici gli elettroni sono fortemente legati ai nuclei e non si possono allontanare. Su di essi però agisce una forza $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}_0$ se sottoposti ad un campo elettrico esterno \mathbf{E}_0 . Non si parla di moto di cariche, ma di spostamento. Gli elettroni spostandosi dalla loro posizione originaria fanno sì che il centro di carica positiva e negativa non coincidano più. Il dielettrico si dice polarizzato e il fenomeno è chiamato polarizzazione. In questo modo si crea un campo elettrico di polarizzazione \mathbf{E}_P ; il campo elettrico totale:

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_P \quad (17.1)$$

ma $\mathbf{E}_P = \mathbf{E}_P(\mathbf{E}_T)$.

Consideriamo un approccio fenomenologico. Consideriamo un condensatore a facce piane e parallele. La sua capacità è $C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$. Se sulle armature depositiamo una carica q si creerà una differenza di potenziale $\Delta V_0 = E_0 d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$. Inseriamo un dielettrico tra le armature, si nota che la capacità è aumentata di un fattore $\varepsilon_r > 1$:

$$C = \varepsilon_r C_0$$

ε_r è caratteristica del dielettrico. ΔV è diminuita:

$$\Delta V = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{\varepsilon_r C_0} = \frac{\Delta V_0}{\varepsilon_r}$$

anche il campo è diminuito:

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{\Delta V_0}{\varepsilon_r d} = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

allora la forza:

$$F = qE = \frac{qE_0}{\varepsilon_r}$$

La legge di Coulomb nei dielettrici diventa:

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \quad (17.2)$$

Per usarla anche nel vuoto $\varepsilon_r = 1$ nel vuoto. Mentre la circuitazione è sempre nulla il teorema di Gauss diventa:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \quad (17.3a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \quad (17.3b)$$

17.2 Polarizzazione

Ogni molecola del dielettrico è considerata neutra. Il termine successivo dello sviluppo in multipoli è quello del dipolo:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dv' \quad (17.4)$$

e lo scriviamo come:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (17.5)$$

con

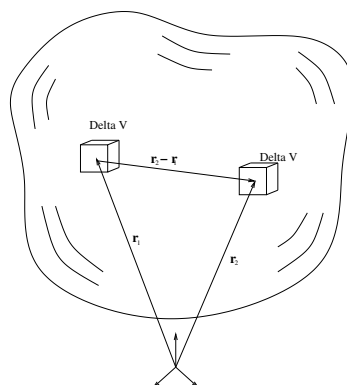
$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dv \quad (17.6)$$

momento di dipolo. Se invece prendiamo un'origine generica, non al centro del dipolo:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \quad (17.7)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^5} - \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \right] \quad (17.8)$$

Consideriamo le nostre molecole polarizzate come dei dipoli, e il dielettrico come somma di tanti dipoli. Possiamo vedere anche il dielettrico come un unico dipolo, risultante dalla somma, è come se concentrassimo della carica Δq in un volumetto ΔV e della carica $-\Delta q$ in un altro volumetto uguale a distanza δ tale che $\mathbf{p} = |\Delta q|\delta$.



17.2.1 Momento atomico

Il modello atomico più semplice è quello di Bohr. Consideriamo l'atomo di idrogeno. Al centro troviamo un nucleo positivo e un elettrone negativo che gira attorno a distanza $a \simeq 0.5 \text{ \AA}$. L'atomo è un momento di dipolo $\mathbf{p} = e\mathbf{a}$ che ruota. Mediamente esso è nullo.

Se consideriamo la meccanica quantistica attorno al nucleo l'elettrone assomiglia a una distribuzione negativa di raggio a . Essendo la distribuzione a simmetria sferica, tutti gli atomi non sottoposti a campi elettrici non hanno momento di dipolo essendo i centri di cariche positive e negative coincidenti.

17.2.2 Molecole polari

A seconda della composizione e anche della geometria che ne deriva le molecole possono essere polari o apolari. Per esempio O_2 , H_2 , CO_2 sono apolari, mentre H_2O , HCl , NaCl presentano un momento di dipolo.

Se consideriamo un campione abbastanza numeroso di molecole polari la media dei momenti di dipolo sarà nulla, essendo l'orientazione dei singoli dipoli casuale.

17.2.3 Polarizzazione per orientamento

Un campo elettrico su una molecola polare tenderà ad orientare il suo momento di dipolo parallelamente al campo. Questo non vuol dire che tutte le molecole sono orientate siano orientate parallelamente al campo elettrico, in quanto il movimento che prevale è quello di agitazione termica, che mediamente è nullo. Se lo eliminiamo vedremo i momenti di dipolo che oscillano attorno alla direzione parallela al campo elettrico esterno. In generale si noterà che ogni singolo dipolo avrà mediamente una componente non nulla nella direzione del campo elettrico. La molecola è polarizzata per orientamento.

17.2.4 Polarizzazione per deformazione

Se mettiamo un atomo, o una molecola apolare, in un campo elettrico risulterà deformato: il centro di carica positiva e negativa non coincideranno più, si è creato un momento di dipolo indotto, il dielettrico è polarizzato per deformazione. Anche le molecole polari subiscono questo effetto, ma è di gran lunga inferiore alla polarizzazione per orientamento.

17.2.5 Vettore polarizzazione elettrica

Consideriamo un elemento ΔV di un dielettrico polarizzato. Questo presenterà un momento di dipolo:

$$\Delta \mathbf{p} = \int_{\Delta V} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dv = \int_{\Delta V} \mathbf{r} dq$$

Definizione 17.1 (vettore polarizzazione elettrica)

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{\Delta \mathbf{p}(\mathbf{r})}{\Delta V} \quad (17.9)$$

con ΔV si intende un elemento di volume sufficientemente piccolo da un punto di vista macroscopico in modo che \mathbf{P} possa essere assunto uniforme all'interno di ΔV , da un punto di vista macroscopico abbastanza grande per contenere abbastanza atomi da variare con continuità

\mathbf{P} è dato dalla somma di tutti i momenti di dipolo delle singole molecole:

$$\mathbf{P} = \frac{\sum \mathbf{p}_m}{\Delta V} \quad (17.10)$$

Se non c'è un campo elettrico esterno allora $\mathbf{P} = 0$ anche se $\mathbf{p}_m \neq 0$ nelle molecole polari, in quanto sono orientate in modo casuale. In realtà esistono materiali, detti elettretti che mantengono \mathbf{P} anche dopo una polarizzazione in assenza di campo elettrico.

Anche nei conduttori avviene l'effetto di polarizzazione, ma è trascurabile.

17.3 Campo elettrico generato da un dielettrico

17.3.1 Esterno

Consideriamo un dielettrico polarizzato, vogliamo calcolare il campo elettrico da esso generato all'esterno del dielettrico conoscendo il vettore $\mathbf{P}(\mathbf{r})$.

Consideriamo un elementino dv' individuato dal vettore \mathbf{r}' . Esso presenta un momento di dipolo $\mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{r}')dv'$ per la (17.9). Segue dall'espressione del potenziale del dipolo (17.7) che l'elementino dv' genera un potenziale:

$$d\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dv' \quad (17.11)$$

Il potenziale generato da tutto il dielettrico di volume V sarà

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V d\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dv' \quad (17.12)$$

Possiamo introdurre il gradiente, rispetto alle coordinate primarie, usando la relazione:

$$\nabla' \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \quad (17.13)$$

Possiamo allora riscrivere l'ultima equazione (17.12):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dv' \quad (17.14)$$

Usando la relazione:

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f \quad (17.15)$$

con f una funzione scalare e \mathbf{F} una vettoriale. Considerando $\mathbf{F} = \mathbf{P}(\mathbf{r}')$ e $f = \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}$ si ha:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = \nabla' \cdot \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} - \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \quad (17.16)$$

La (17.14) diventa:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_V \nabla' \cdot \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dv' - \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dv' \right] \quad (17.17)$$

Usando il teorema della divergenza:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} da' + \int_V \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dv' \right] \quad (17.18)$$

$\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ ha le dimensioni di una distribuzione superficiale di carica, mentre $-\nabla' \cdot \mathbf{P}$ ha le dimensioni di una distribuzione di carica volumetrica.

$$\sigma_p(\mathbf{r}') = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} \quad (17.19a)$$

$$\rho_p(\mathbf{r}') = -\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}') \quad (17.19b)$$

chiamate densità superficiale e densità volumetrica delle cariche di polarizzazione o legate.

In definitiva abbiamo dimostrato che il potenziale generato da un dielettrico polarizzato in un punto esterno ad esso è uguale al potenziale generato da una distribuzione di cariche superficiale σ_p lungo il bordo e una distribuzione di cariche volumetrica ρ_p all'interno del volume del dielettrico. Condizione sufficiente affinché $\rho_p = 0$ è che \mathbf{P} sia uniforme, infatti la divergenza si annulla¹.

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_S \frac{\sigma_p(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} da' + \int_V \frac{\rho_p(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dv' \right] \quad (17.20)$$

Il dielettrico rimane sempre neutro per la conservazione della carica, infatti la carica totale di polarizzazione è

$$\begin{aligned} Q_P &= \int_S \sigma_p da + \int_V \rho_P dv = \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da + \int_V -\nabla \cdot \mathbf{P} dv \\ &= \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da - \int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da = 0 \end{aligned} \quad (17.21)$$

Calcoliamo il campo esterno generato da un dielettrico polarizzato dall'espressione del potenziale (17.20):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S -\nabla \left(\frac{\sigma_p(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V -\nabla \left(\frac{\rho_p(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) dv' \quad (17.22)$$

Usando:

$$\nabla \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) = -\nabla' \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_p(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_p(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dv' \quad (17.23)$$

che è proprio il campo generato dalle distribuzioni σ_p e ρ_p .

¹ Non è necessaria, infatti se \mathbf{P} è proporzionale a $\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ le derivate non sono nulle:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} = \frac{r^3 - 3xr^2 \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} 2x}{r^6} = \frac{1}{r^3} - 3\frac{x^2}{r^5}$$

ma la divergenza si annulla:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 3\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} - 3\frac{y^2}{r^5} - \frac{3z^2}{r^5} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0$$

17.3.2 Interno

All'interno di un dielettrico il campo elettrico varia da punto a punto in modo complesso, bisognerebbe tenere conto di tutti gli atomi, di come sono orientati ad un certo istante. . . Siamo invece interessati a una quantità macroscopica, cioè alla media del campo elettrico microscopico in un volume abbastanza grande per contenere un numero grande di molecole in modo che vari con continuità ma abbastanza piccolo perché vari. I procedimenti per arrivare alla definizione di campo elettrico interno sono equivalenti e sono per esempio:

1. Si prende il valore medio nel tempo e nello spazio del campo elettrico effettivamente esistente definito come la forza su una carica di prova e la sua carica;
2. Si considera la media del campo elettrico generato da tutte le molecole polarizzate e dalle cariche libere su una singola molecola interna al dielettrico, in parole povere $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{ext}} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$;
3. Si immagina una cavità aghiforme all'interno del dielettrico in cui ci sia il vuoto. Il campo elettrico nel dielettrico sarà il campo elettrico nella cavità aghiforme;

Anche all'interno del dielettrico deve valere:

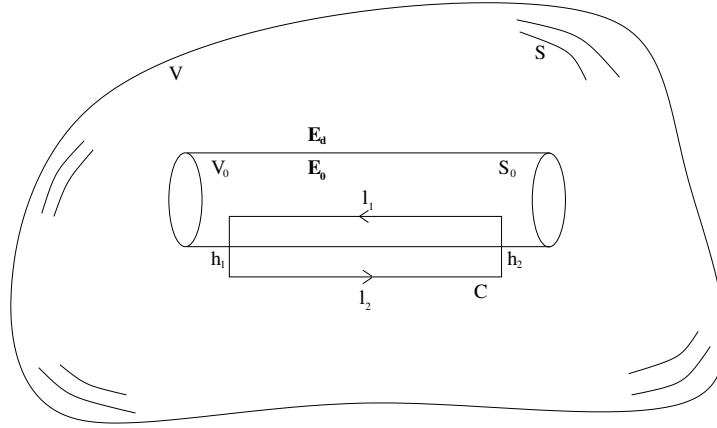
$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

infatti il dielettrico può essere visto come un insieme di cariche nel vuoto ferme. Scaviamo una cavità cilindrica molto sottile, aghiforme di volume V_0 e superficie S_0 all'interno del nostro dielettrico di volume V e superficie S polarizzato con vettore di polarizzazione $\mathbf{P}(\mathbf{r})$. All'interno della cavità ci sia il vuoto e la sua presenza non alteri la polarizzazione del dielettrico. Calcoliamo la circuitazione del campo elettrico lungo un circuito rettangolare con i lati maggiori paralleli all'asse del cilindro, uno all'interno della cavità l'altro fuori. Il campo all'interno della cavità sia \mathbf{E}_0 , nel dielettrico \mathbf{E}_d :

$$\int_{\Delta l_1} \mathbf{E}_0 \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Delta l_2} \mathbf{E}_d \cdot d\mathbf{l} + \int_{h_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{h_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (17.24)$$

Facciamo tendere Δh_1 e Δh_2 a zero, gli ultimi due integrali diventano nulli. Essendo $d\mathbf{l}$ parallelo all'asse del cilindro svolgiamo il prodotto scalare:

$$\int_{\Delta l_1} E_{0\text{tan}} dl - \int_{\Delta l_2} E_{d\text{tan}} dl = 0 \quad (17.25)$$



Essendo Δl_1 uguale a Δl_2 :

$$E_{0\text{tan}} = E_{d\text{tan}} \quad (17.26)$$

Cioà la componente parallela alla superficie del cilindro del campo elettrico interno ed esterno alla cavità in prossimità della superficie sono uguali, quindi la componente parallela varia con continuità. Se ora scegliamo una cavità cilindrica con asse parallela al campo elettrico nel dielettrico otteniamo che $E_d = E_{d\text{tan}}$. Consideriamo anche un materiale isotropo, allora la polarizzazione è parallela al campo elettrico esterno. Concludiamo che $E_d = E_{0\text{tan}}$. Si può dimostrare che con tutte queste ipotesi:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_d \quad (17.27)$$

Allora tutto il campo elettrico varia con continuità ed essendo la cavità una regione esterna al dielettrico e vuota possiamo usare la formula per il campo elettrico esterno generato da un dielettrico polarizzato (17.23):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma_p(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_p(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dv' \quad (17.28)$$

Bisogna fare attenzione a capire cosa sia S e V in quest'ultima equazione. Infatti il volume del dielettrico è diminuito, quindi anche le cariche in esso contenuto, mentre è aumentata la superficie e quindi le cariche superficiali:

$$S = S_{\text{cavità}} + S_{\text{dielettrico}} \quad (17.29a)$$

$$V = V_{\text{dielettrico}} - V_{\text{cavità}} \quad (17.29b)$$

Dove $S_{\text{dielettrico}}$ e $V_{\text{dielettrico}}$ sono la superficie e il volume del dielettrico senza la cavità. Se però scegliamo la cavità cilindrica con asse parallelo al campo

nel dielettrico isotropo sulla superficie laterale sarà parallelo e quindi le cariche superficiali di polarizzazione $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ si disporranno solo sulle basi del cilindro, ma queste tendono a zero. Allora le cariche di polarizzazione si dispongono solo sulla superficie esterna del dielettrico, il contributo delle cariche di polarizzazione sulla superficie della cavità è nullo, allora nell'integrale potremo usare $S_{\text{dielettrico}}$. Per le densità volumetriche di polarizzazione basta considerare che il volume della cavità tende a zero e quindi sono trascurabili, $V_{\text{dielettrico}}$ può essere usato nell'integrale. Allora l'espressione per il campo elettrico all'interno del dielettrico è uguale all'espressione per il campo esterno (17.23) nell'ipotesi di cavità aghiforme orientata come il campo nel dielettrico e dielettrico isotropo.

In tutto il ragionamento c'è un grosso problema che ci costringerà a introdurre delle relazioni che tengono conto della natura del materiale: le cariche di polarizzazione che compaiono nell'espressione per il campo elettrico interno o esterno al dielettrico (17.23) sono in funzione del vettore di polarizzazione $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ il quale dipende oltre che dal campo elettrico esterno che causa la polarizzazione, ma anche dal campo elettrico creato dalla polarizzazione stessa. Il problema è ciclico:

$$\mathbf{E}_{\text{pol}}(\sigma_p(\mathbf{P}(\mathbf{E}_{\text{pol}}, \mathbf{E}_{\text{ext}}), \rho_p(\mathbf{P}(\mathbf{E}_{\text{pol}}, \mathbf{E}_{\text{ext}})))$$

17.4 Teorema di Gauss

Cerchiamo una forma generale del teorema di Gauss che valga anche in presenza di dielettrici. Come visto nella sezione 12.5 a pag. 154 il teorema di Gauss:

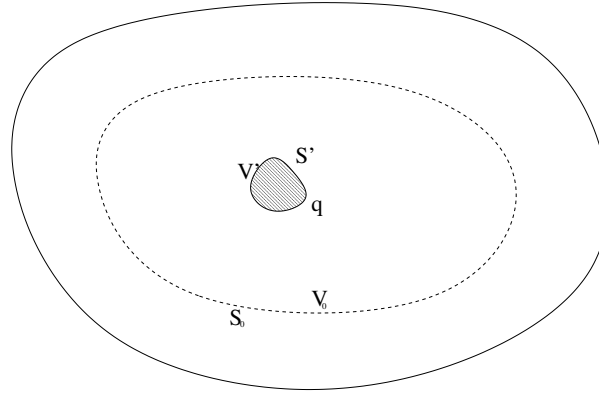
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (17.30)$$

oppure in forma differenziale:

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (17.31)$$

Consideriamo a proposito un dielettrico con una carica libera q su un conduttore di volume V' e superficie S' . Consideriamo una superficie immaginaria S_0 racchiudente un volume V_0 di dielettrico e la carica libera. Il teorema di Gauss (17.30), quanto quello della circuitazione nel paragrafo precedente, deve valere anche ora considerando tutte le cariche, consideriamo cioè il dielettrico e la carica di polarizzazione come tante cariche nel vuoto:

$$\int_{S_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{1}{\varepsilon_0} (q + q_p) \quad (17.32)$$



con q_p le cariche di polarizzazione. Vogliamo passare in forma differenziale. D'istintito diremmo $\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho + \rho_p)$. Ma le σ_p che fine fanno? Le cariche di polarizzazione q_p sono:

$$\begin{aligned} q_p &= \oint_{S'} \sigma_p da + \int_{V_0-V'} \rho_p dv = \oint_{S'} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da + \oint_{V_0-V'} -\text{div } \mathbf{P} dv \\ &= \oint_{S'} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da - \oint_{S_0+S'} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da = - \oint_{S_0} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da \end{aligned} \quad (17.33)$$

Nel primo passaggio abbiamo usato $\rho_p = -\text{div } \mathbf{P}$ e $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$, nel secondo il teorema della divergenza.

$$\epsilon_0 \oint_{S_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = q - \oint_{S_0} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} da \quad (17.34)$$

usando il teorema della divergenza:

$$\epsilon_0 \int_{V_0} \text{div } \mathbf{E} dv = \int_{V_0} \rho dv - \int_V \text{div } \mathbf{P} dv = \int_{V_0} (\rho + \rho_p) dv \quad (17.35)$$

quindi:

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_p) \quad (17.36)$$

Vettore induzione elettrica

Se sostituiamo l'espressione di q_p data dalla (17.33) nel teorema di Gauss informa integrale per i dielettrici (17.32) si ottiene:

$$\int_{S_0} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n} da = q \quad (17.37)$$

Stiamo ottenendo un teorema di gauss che tiene conto solo delle cariche libere q . Introduciamo un nuovo vettore:

Definizione 17.2 (vettore induzione elettrica)

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (17.38)$$

chiamato anche vettore spostamento elettrico. Per l'equazione (17.37) il suo flusso è

$$\Phi(\mathbf{D}) = q \quad (17.39)$$

con q cariche libere. In forma differenziale, usando il teorema della divergenza, diventa:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (17.40)$$

con ρ densità di volumetrica di cariche libere.

$$[\mathbf{D}] = \text{Cm}^{-2}$$

17.5 Suscettività e permittività

Per chiudere il problema, cioè determinare il campo elettrico serve una nuova equazione, in quanto il campo elettrico è funzione delle cariche di polarizzazione, le quali sono funzione del vettore polarizzazione elettrica il quale è funzione del campo elettrico. Leghiamo direttamente il vettore polarizzazione elettrica con il campo esterno:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (17.41)$$

Dove χ_e è la suscettività del dielettrico.

$$[\chi_e] = \text{Fm}^{-1}$$

Per dielettrici anisotropi è un tensore del second'ordine e quindi \mathbf{P} e \mathbf{E} non hanno la stessa direzione. Per dielettrici non lineari (quasi sempre con alti campi elettrici) è una funzione di \mathbf{E} . Per dielettrici omogenei è uno scalare, per i disomogenei una funzione del punto. χ_e è sempre maggiore di zero, nel vuoto è nullo.

Se sostituiamo nel vettore induzione elettrica (17.38) l'ultima espressione introdotta:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \mathbf{E} = (\varepsilon_0 + \chi_e) \mathbf{E} \quad (17.42)$$

Definizione 17.3 (costante dielettrica)

$$\varepsilon = (\varepsilon_0 + \chi_e) \quad (17.43)$$

chiamata anche permittività dielettrica usando questa definizione la (17.42) diventa:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (17.44)$$

Definizione 17.4 (costante dielettrica relativa)

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \left(1 + \frac{\chi_e}{\varepsilon_0}\right) \quad (17.45)$$

chiamata anche permittività dielettrica relativa del mezzo rispetto al vuoto. È uno scalare adimensionale e per il vuoto $\varepsilon_r = 1$, per i materiali è maggiore di 1. Si ha allora:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad (17.46)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \frac{\varepsilon}{\chi_e} \mathbf{P} \quad (17.47)$$

Se il mezzo è isotropo i tre vettori \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{P} sono paralleli.

La relazione che lega \mathbf{P} a \mathbf{E} oppure equivalentemente \mathbf{D} a \mathbf{E} è la relazione costitutiva dei materiali per quanto riguarda il comportamento dielettrico.

Altre convenzioni

In passato χ_e era definito come

$$\chi_e^* = \frac{\chi_e}{\varepsilon_0} \quad (17.48)$$

che è adimensionale, quindi le equazioni erano scritte come:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e^* \mathbf{E} \quad \varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e^*) \quad \varepsilon_r = 1 + \chi_e^*$$

17.6 Maxwell per i dielettrici

Nel caso statico siamo in grado di scrivere le equazioni che descrivono totalmente il campo elettrico. Innanzitutto dobbiamo includere la relazione costitutiva:

$$\mathbf{D} = \vec{\varepsilon} \mathbf{E} \quad (17.49)$$

In forma integrale sono:

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, da = Q \quad (17.50)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (17.51)$$

In forma differenziale:

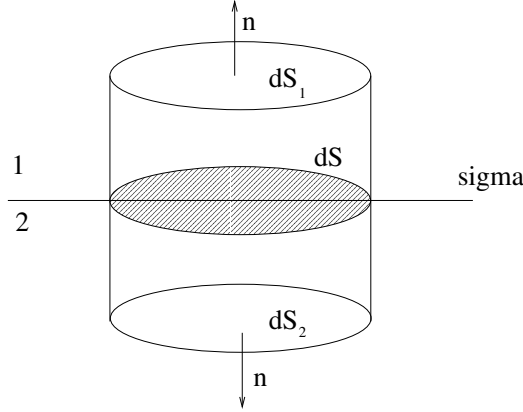
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (17.52)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (17.53)$$

Le equazioni sono 7 (tre dalla (17.49), tre dalla (17.53), una dalla (17.52)), le incognite 7 ($\rho, \mathbf{E}, \mathbf{D}$).

17.7 Condizioni al contorno per \vec{E} e \vec{D}

17.7.1 \vec{D} ortogonale



Vogliamo sapere cosa succede ai vettori \mathbf{E} e \mathbf{D} quando si passa da un mezzo ad un altro, sia dielettrico che conduttore. Ipotizziamo che sulla superficie separatrice ci possa essere una distribuzione di carica libera $\sigma(\mathbf{r})$. Consideriamo due mezzi omogenei, lineari, isotropi. La superficie di separazione può essere di qualsiasi forma. Prendiamo un cilindro infinitesimo di basi nei due mezzi aventi area dA e altezza dh con asse perpendicolare alla superficie di separazione; la superficie di separazione intercettata dal questo risulta piana. Sappiamo che il flusso attraverso tutta la superficie del cilindro:

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da = \sigma dS \quad (17.54)$$

Questa può essere scomposta:

$$\int_{dS_1} \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} da + \int_{dS_2} \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n} da + \int_{dS_l} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da = \sigma dS \quad (17.55)$$

dove dS_1 e dS_2 sono le superfici di base del cilindro, dS_l è la superficie laterale. Se facciamo tendere $dh \rightarrow 0$ allora l'ultimo integrale si annulla². Facciamo già il prodotto scalare: $\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} = D_{1n}$, $\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n} = -D_{2n}$; queste due componenti sono nella direzione ortogonale alla superficie di separazione e il verso positivo è quello di n nel primo mezzo (in figura verso l'alto):

$$\int_{dS_1} D_{1n} da - \int_{dS_2} D_{2n} da = \sigma dA \quad (17.56)$$

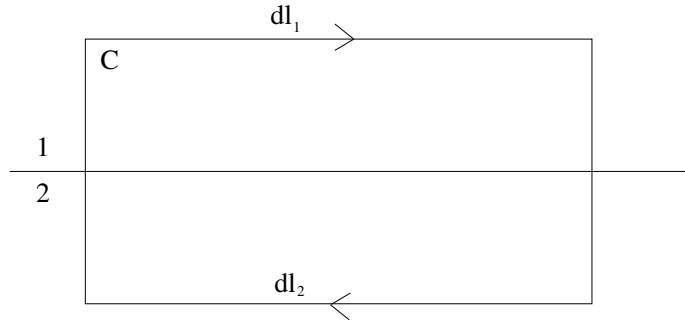
dS_1 , dS_2 sono infinitesimi, quindi D_{1n} e D_{2n} sono³ uniformi sulle superfici, possiamo svolgere l'integrale:

$$D_{1n}dA_1 - D_{2n}dA_2 = \sigma dA \quad (17.57)$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma \quad (17.58)$$

Se non c'è carica sulla superficie di separazione allora le due componenti normali sono uguali e D_n varia con continuità

17.7.2 \vec{E} tangente



Calcoliamo la circuitazione su C , un rettangolo con lati dl_1 e dl_2 paralleli alla superficie di separazione, altezze dh_1 e dh_2 , in modo tale che la sua superficie contenga la separazione tra i due mezzi. Il rettangolo è infinitesimo e quindi la superficie di separazione di qualsiasi forma è vista da

²può sorgere un problema: come fa $dh \rightarrow 0$ se il cilindro è già infinitesimo? Bisogna considerare la superficie laterale di ordine d'infinitesimo maggiore dell'ordine di infinitesimo dell'area delle basi

³usare \mathbf{D}_1 e \mathbf{D}_2 serve solo per distinguere dove è calcolato \mathbf{D} , ma è sempre e solo \mathbf{D} che stiamo calcolando

C come un piano. Sappiamo che la circuitazione di \mathbf{E} deve essere nulla, o equivalentemente che il rotore di \mathbf{E} è zero:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (17.59)$$

Lo spezziamo:

$$\int_{dl_1} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 + \int_{dl_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}_2 + \int_{dh_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{dh_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (17.60)$$

facciamo⁴ $dh \rightarrow 0$ e il prodotto scalare considerando che $d\mathbf{l}_1 = -d\mathbf{l}_2$:

$$\int_{dl_1} E_{1\text{tan}} dl_1 - \int_{dl_2} E_{2\text{tan}} dl_2 = 0 \quad (17.61)$$

Essendo dl_1, dl_2 infinitesimi \mathbf{E} si mantiene costante su di essi e possiamo svolgere l'integrale:

$$\mathbf{E}_{1\text{tan}} = \mathbf{E}_{2\text{tan}} \quad (17.62)$$

essendo $dl_1 = dl_2$. La componente tangente varia con continuità

Riprendiamo l'equazione sulla componente normale di \mathbf{D} (17.58) nell'ipotesi che sulla superficie non ci sia carica libera:

$$D_{1n} = D_{2n} \quad (17.63)$$

cioè la componente di \mathbf{D} normale alla superficie di separazione varia con continuità Usando:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \quad (17.64)$$

$$\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E_{1n} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E_{2n} \quad (17.65)$$

quindi la componente normale di \mathbf{E} non varia con continuità

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} \quad (17.66)$$

In modo analogo si può mostrare che anche la componente di \mathbf{D} tangente subisce discontinuità

$$\frac{D_{1\text{tan}}}{D_{2\text{tan}}} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} \quad (17.67)$$

⁴ancora: dh deve essere di ordine di infinitesimo maggiore di dl

17.8 Energia del campo elettrostatico

Consideriamo N conduttori con superfici $S_i, i = 1 \dots N$. Partiamo dall'equazione (12.15) che descrive l'energia per un sistema di cariche puntiformi:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 \|r_i - r_j\|} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi \quad (17.68)$$

Nel nostro caso le cariche sono date dalle distribuzioni $\sigma(\mathbf{r})$ sulle superfici e $\rho(\mathbf{r})$ all'esterno dei conduttori (nei conduttori la carica si distribuisce solo sulla superficie). Sia $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$ e V il volume esterno ai conduttori:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho \, dv + \frac{1}{2} \int_S \varphi \sigma \, da = \frac{1}{2} \int_V \varphi \operatorname{div} \mathbf{D} \, dv + \frac{1}{2} \int_S \varphi \sigma \, da \\ &= \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div}(\varphi \mathbf{D}) \, dv - \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \operatorname{grad} \varphi \, dv + \frac{1}{2} \int_S \varphi \sigma \, da \\ &= \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div}(\varphi \mathbf{D}) \, dv + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \int_S \varphi \sigma \, da \\ &= \frac{1}{2} \int_{S_V} \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, da + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \int_S \varphi \sigma \, da \end{aligned} \quad (17.69)$$

dove S_V è la superficie che delimita il volume V (il volume esterno alle superfici S_i , in quanto all'interno dei conduttori $\rho = 0$). S_V è composta da una superficie limite all'infinito S_∞ e dalle superfici dei conduttori.

$$W = \frac{1}{2} \int_{S_\infty} \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, da + \frac{1}{2} \int_S \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, da + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \int_S \varphi \sigma \, da \quad (17.70)$$

Sappiamo che φ varia come $\frac{1}{r}$, \mathbf{D} come $\frac{1}{r^2}$ e da come r^2 , quindi il primo integrando va come $\frac{1}{r}$ e l'integrale si annulla.

$$W = \frac{1}{2} \int_S \varphi \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, da + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \int_S \varphi \sigma \, da \quad (17.71)$$

ma $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = -\sigma$ in quanto le normali sono dirette verso l'interno delle superfici conduttrici:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, dv = \frac{1}{2} \epsilon \int_V E^2 \, dv \quad (17.72)$$

e la densità di energia w :

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (17.73)$$

18

Magnetostatica nei mezzi materiali

18.1 Magnetizzazione

Ogni atomo è assimilabile ad una spira che ha un certo momento magnetico, chiamato momento di dipolo orbitale magnetico, per esempio per l'atomo di idrogeno:

$$\mathbf{m} = -\frac{e}{T} S \mathbf{n}$$

a questo va aggiunto il momento magnetico di dipolo intrinseco o di spin dovuto alla rotazione dell'elettrone. In realtà anche i protoni e i neutroni contribuiscono al momento magnetico totale \mathbf{m} . Riconduciamo il fenomeno della magnetizzazione alle correnti atomiche, come aveva intuito Ampere. Possiamo immaginare che il momento di dipolo magnetico sia dovuto alla presenza di cariche magnetiche q_m :

$$\mathbf{m} = q_m \boldsymbol{\delta} \quad (18.1)$$

Definizione 18.1 (intensità di magnetizzazione)

$$\mathbf{M} = \frac{\sum_i \mathbf{m}_i}{\Delta V} \quad (18.2)$$

usando sempre la convenzione di ΔV piccolo dal punto di vista macroscopico e grande dal punto di vista microscopico. Il vettore intensità di magnetizzazione è anche detto semplicemente magnetizzazione.

Se non applichiamo un campo magnetico esterno mediante \mathbf{M} è nullo in quanto \mathbf{m} è orientato casualmente nello spazio. Per alcuni materiali questo non è del tutto vero. Quando applichiamo un campo magnetico esterno questo crea una coppia di forze sui dipoli che tende a farli disporre secondo un orientamento, allora \mathbf{M} è diverso da zero e il materiale è magnetizzato. Il momento che si crea:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

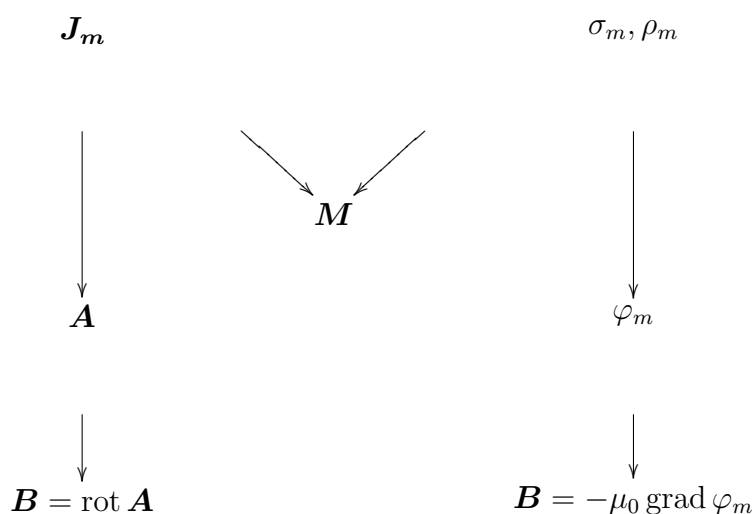
I materiali paramagnetici aumentano il campo magnetico in quanto i dipoli magnetici si orientano come il campo esterno. Nei materiali diamagnetici invece \mathbf{M} è opposto a \mathbf{B} e quindi il campo magnetico diminuisce.

unità

$$[m] = \text{Am}^2 \quad [q_m] = \text{Am} \quad [M] = \text{A/m}$$

18.2 Approccio teorico

Un materiale magnetizzato può essere studiato facendo ricorso alle correnti di magnetizzazione oppure usando i dipoli magnetici. Usando il secondo approccio non si fa altro che rifare quello che è stato fatto per i dielettrici, cioè trovare delle densità di carica fittizie che interpretino i fenomeni. Usando i dipoli si userà il potenziale scalare magnetico, mentre usando le correnti di magnetizzazione il potenziale scalare magnetico.



18.3 Correnti di magnetizzazione

Se consideriamo un materiale magnetico caratterizzato da un vettore magnetizzazione $\mathbf{M} \neq 0$ lo possiamo vedere come formato da spire elementari, tutte percorse da una corrente nello stesso verso, dato dal vettore \mathbf{M} . Se \mathbf{M} è uniforme allora si ha che le correnti di spire adiacenti si annullano, quello che rimane sono delle correnti che percorrono la superficie del materiale. La densità di corrente che si genera è massima sulle superfici parallele a \mathbf{M} e nulla sulle superfici ortogonali a \mathbf{M} . Deve essere:

$$\mathbf{J} \propto \mathbf{M} \times \mathbf{n}$$

Consideriamo una magnetizzazione non uniforme. In questo caso le correnti elementari adiacenti non si annullano totalmente, la risultante è una corrente macroscopica all'interno del materiale, oltre alla corrente superficiale.

Consideriamo il caso generale di un materiale non uniformemente magnetizzato. Consideriamo due parallelepipedi infinitesimi di volume dV_1 e dV_2 , di lati dx , dy , dz , adiacenti lungo la direzione y . Se nel primo volumetto c'è una magnetizzazione $\mathbf{M}(x, y, z)$ nel secondo sarà

$$\mathbf{M}(x, y + dy, z) = \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} dy \quad (18.3)$$

consideriamo la componente x . Dalla (18.2) possiamo dire che la componente x del momento magnetico sia:

$$dm_x = M_x dV = dm_x dx dy dz \quad (18.4)$$

ma sappiamo anche che $d\mathbf{m} = IdS\mathbf{n}$, quindi nel nostro caso dobbiamo considerare la corrente che si avvolge nel piano perpendicolare a M_x :

$$dm_x = I_{m1} dS = I_{m1} dy dz \quad (18.5)$$

dove I_{m1} è la corrente di magnetizzazione ortogonale a M_x nel primo volume. Dal confronto delle ultime due equazioni:

$$I_{m1} = M_x dx \quad (18.6)$$

Per il secondo volume invece:

$$I_{m2} = \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial y} dy \right) dx \quad (18.7)$$

Sommando le due correnti di magnetizzazione (col segno) troviamo la corrente che passa nel tratto verticale in comune:

$$I'_{mz} = I_{m1} - I_{m2} = M_x dx - \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial y} dy \right) dx = -\frac{\partial M_x}{\partial y} dx dy \quad (18.8)$$

e quindi una densità di corrente:

$$J'_{mz} = -\frac{\partial M_x}{\partial y} \quad (18.9)$$

Se ora i volumetti li cambiamo di posizione e li mettiamo adiacenti lungo l'asse x al posto che adiacenti lungo l'asse y otterremmo che lungo la superficie di separazione scorre una corrente:

$$I''_{mz} = \frac{\partial M_y}{\partial x} dx dy \quad (18.10)$$

La corrente totale lungo z vale allora:

$$I_z = I'_{mz} + I''_{mz} = \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) dx dy \quad (18.11)$$

e la densità di corrente:

$$J_{mz} = \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) \quad (18.12)$$

Usando lo stesso procedimento per le altre componenti si arriva a:

$$\mathbf{J}_m = \text{rot } \mathbf{M} \quad (18.13)$$

18.3.1 Superfici di separazione

L'espressione (18.13) ci dice che se la magnetizzazione di un materiale è uniforme non troveremo correnti al suo interno, ma solo sulla superficie dove è presente una discontinuità

Supponiamo un cilindro con asse lungo z , quindi $\mathbf{M} = M_z \hat{\mathbf{i}}$. Dalla (18.13):

$$\begin{cases} J_{mx} = \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial x} \right) = \frac{\partial M}{\partial y} \\ J_{my} = \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right) = -\frac{\partial M}{\partial x} \\ J_{mz} = \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (18.14)$$

All'interno del cilindro M è costante, mentre sulla superficie passa dal valore M al valore 0.

Consideriamo la superficie di separazione e consideriamo un percorso C che attraversi la superficie di separazione passando dal materiale al vuoto. Il flusso della densità di corrente lungo la superficie S racchiusa da C è

$$\phi_S(\mathbf{J}_m) = \int_S \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{n} \, da = \int_S \text{rot } \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} \, da = \oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \quad (18.15)$$

Facendo tendere a zero il tratto Δl ortogonale alla superficie di separazione e supponendo \mathbf{M} uniforme lungo il tratto Δl la circuitazione risulta:

$$\oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{M} \cdot \Delta \mathbf{l} = M_{tg} \Delta l \quad (18.16)$$

dove M_{tg} è la componente tangente alla superficie.

$$J_{sm} = M_t \quad (18.17)$$

$$\mathbf{J}_{sm} = \mathbf{M} \times \mathbf{n} \quad (18.18)$$

18.4 Correnti di magnetizzazione

Il vettore potenziale magnetico di una spira è

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \quad (18.19)$$

con $\mathbf{m} = SI\mathbf{n}$. Ad ogni elemento di volume infinitesimo dv' possiamo associare un momento magnetico infinitesimo:

$$d\mathbf{m} = \mathbf{M}(\mathbf{r}') dv' \quad (18.20)$$

che genera un potenziale vettore infinitesimo:

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{m} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dv' \quad (18.21)$$

Sommando tutti i contributi il potenziale vettore totale:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_V d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} dv' \quad (18.22)$$

ricordando che $\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|^3}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \text{grad}' \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dv' \quad (18.23)$$

usando la relazione $\text{rot}'(\varphi \mathbf{F}) = \varphi \text{rot}' \mathbf{F} - \mathbf{F} \times \text{grad}' \varphi$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot}' \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \text{rot}' \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right] dv' \quad (18.24)$$

Consideriamo solo la componente x del secondo integrale:

$$\begin{aligned} \int_V \text{rot}' \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right] dv' \cdot \hat{\mathbf{i}} &= \int_V \frac{\partial}{\partial y'} \left[\frac{M_z(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right] - \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{M_y(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right] dv' \\ &= \int_S \left[\frac{M_z}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \cos(n, y) - \frac{M_y}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \cos(n, z) \right] da' = \int_S - \frac{[\mathbf{M} \times \mathbf{n}]_x}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} da' \end{aligned} \quad (18.25)$$

nel quale abbiamo usato la formula:

$$\int_V \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} dv = \int_S f(x, y, z) \cos(n, x) da \quad (18.26)$$

tornando al vettore potenziale:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot}' \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{n}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} da' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}_m}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{J}_{sm}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} da' \end{aligned} \quad (18.27)$$

avendo usato la (18.18) e la (18.13). Da qui si potrebbe trovare \mathbf{B} con la relazione $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$.

18.5 Vettore intensità magnetica \vec{H}

Dal teorema di Ampere avevamo che:

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (18.28)$$

che vale nel vuoto. Se vogliamo usare la stessa legge per i materiali magnetizzati dobbiamo tenere conto delle correnti di magnetizzazione \mathbf{J}_m :

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_m) = \mu_0 (\mathbf{J} + \text{rot} \mathbf{M}) = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \text{rot} \mathbf{M} \quad (18.29)$$

portando tutto in un unico rotore (il rotore è un operatore lineare):

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J} \quad (18.30)$$

Definizione 18.2 (vettore intensità magnetica)

$$\mathbf{H} = \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \quad (18.31)$$

si misura in A/m. Usando questa nuova definizione, sostituendo nella (18.30):

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (18.32)$$

Che in forma integrale diventa:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da = I \quad (18.33)$$

mentre se vogliamo usare \mathbf{B} con i materiali magnetizzati:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (18.34)$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I + I_m) \quad (18.35)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_m) \quad (18.36)$$

19

Induzione elettromagnetica

Sappiamo come una corrente possa indurre campi magnetici. Vale anche l'opposto, cioè una variazione di flusso del campo magnetico induce una corrente.

Per esempio se avviciniamo un magnete ad una spira ferma nella spira si genera una corrente indotta fig.19.1. Avvicinando una spira percorsa da

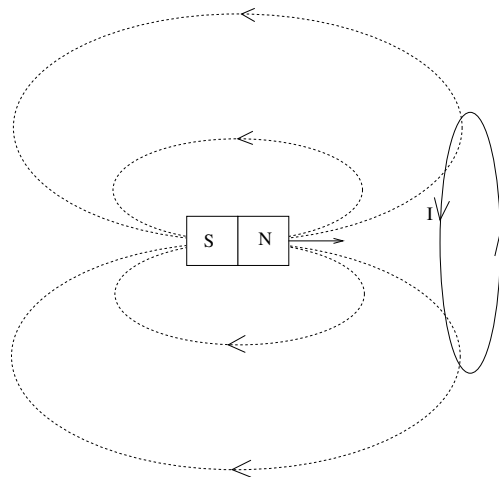


Figura 19.1: magnete in movimento – spira ferma

corrente ad una ferma si genera in quest'ultima una corrente indotta. In generale quando si modifica il flusso del campo magnetico si genera una cor-

rente indotta. La corrente indotta e la relativa fem indotta a sua volta genera un campo magnetico opposto a quello esterno, che si oppone al cambiamento del flusso del campo magnetico.

19.1 Legge Faraday–Neumann–Lenz

Legge 19.1 (Faraday–Neumann) *Quando il flusso del vettore induzione magnetica \mathbf{B} concatenato con un circuito varia nel tempo, nel circuito si induce una forza elettromotrice proporzionale alla variazione del flusso*

Legge 19.2 (Lenz) *In un sistema magnetico ogni variazione produce un'azione che tende ad opporsi alla variazione stessa*

Riassumendo la forza elettromotrice indotta:

Legge 19.3 (Faraday–Neumann–Lenz)

$$\text{fem} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \quad (19.1)$$

dove il meno tiene conto della legge di Lenz, cioè la corrente indotta $I = \frac{\text{fem}}{R}$ è tale da generare un campo magnetico che annulla la variazione del flusso magnetico totale.

Notare che la fem esiste anche indipendentemente dalla presenza del circuito, o di un conduttore.

19.1.1 Forma differenziale

Sappiamo che:

$$\text{fem} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (19.2)$$

Allora:

$$\text{fem} = -\frac{d}{dt}\Phi\mathbf{B} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (19.3)$$

Se il circuito è indeformabile possiamo portare la deriva sotto il segno di integrale e usando il teorema di Stokes:

$$-\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (19.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (19.5)$$

Se il campo magnetico è variabile nel tempo allora $\text{rot } \mathbf{E} \neq 0$, segue che \mathbf{E} non è più conservativo.

19.2 Flusso tagliato e flusso concatenato

La legge di Faraday–Neumann–Lenz è una legge sperimentale, non deducibile da altre leggi, tranne in un caso, il flusso tagliato, ovvero quando c'è un moto relativo tra un circuito e una sorgente di campo magnetico.

Consideriamo un circuito rettangolare, in cui un lato sia mobile, in cui ci sia un generatore di corrente continua. Ci sia un campo magnetico perpendicolare alla superficie del circuito. Sulla sbarra mobile agisce una forza di Lorentz:

$$F = IBl \quad (19.6)$$

La potenza del generatore $V_0 I$ in parte è dissipata per effetto Joule RI^2 e in parte per spostare la sbarra Fv :

$$V_0 I = RI^2 + Fv \quad (19.7)$$

Se la sbarra fosse fissa l'ultimo addendo sarebbe nullo e l'intensità della corrente sarebbe $\frac{V_0}{R} = I_0$, ora invece:

$$\frac{V_0}{R} = I_0 = I + \frac{Fv}{I} \frac{1}{R} \quad (19.8)$$

La corrente che circola è inferiore a I_0 di:

$$I_0 - I = \frac{Fv}{I} \frac{1}{R} \quad (19.9)$$

à come se nel circuito oltre che alla forze elettromotrice V_0 agisse una forza elettromotrice V in senso opposto:

$$V = -\frac{Fv}{I} = -lBv = -lB \frac{ds}{dt} = -\frac{d\phi(\mathbf{B})}{dt} \quad (19.10)$$

che è la legge di Faraday–Neumann–Lenz.

Nel caso di flusso concatenato invece sia il circuito in cui si induce la corrente sia il circuito sorgente del campo magnetico sono fissi e la variazione del flusso è dovuto a variazioni di corrente nel tempo. Questo caso non è descrivibile con la forza di Lorentz, ma è un caso nuovo.

19.3 Autoinduttanza

In un circuito isolato il campo magnetico generato dal circuito è funzione della corrente:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(I) \quad (19.11)$$

quindi il flusso del campo magnetico:

$$\Phi(\mathbf{B}) = \Phi(\mathbf{B})(I) \quad (19.12)$$

cioè anch'esso è funzione della corrente la quale è funzione del tempo: $I = I(t)$, allora, in questo caso cioè se la variazione di flusso è data esclusivamente da variazioni di corrente (per esempio il circuito è indeformabile), la legge dell'induzione la possiamo scrivere:

$$\text{fem} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dI} \frac{dI}{dt} \quad (19.13)$$

Definizione 19.1 (autoinduttanza di un circuito)

$$L = \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dI} \quad (19.14)$$

che è una caratteristica della geometria circuito, infatti:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C I \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}$$

in generale; il flusso:

$$\Phi(\mathbf{B}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S I \int_C \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \cdot \mathbf{n} \, da$$

e la derivata nella corrente $\frac{d}{dI}$:

$$\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dI} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \int_C \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \cdot \mathbf{n} \, da$$

che dipende solo dalla geometria. La legge di Faraday–Neumann–Lenz in questo caso si scrive:

$$\text{fem} = -L \frac{dI}{dt} \quad (19.15)$$

L'autoinduttanza si misura in henry:

$$H = \frac{Wb}{A} = \frac{Vs}{A} = \Omega \, s$$

Esempio 19.1 (autoinduttanza di un solenoide) Vogliamo calcolare l'autoinduttanza di un solenoide di lunghezza l , raggio R e con N spire per unità di lunghezza. Il campo magnetico, nell'approssimazione di solenoide infinito sarà

$$B = \begin{cases} 0 & r > R \\ \mu_0 N I & r < R \end{cases} \quad (19.16)$$

Il flusso concatenato con una singola spira circolare risulta:

$$\Phi_{\text{spira}} = \pi R^2 \mu_0 N I \quad (19.17)$$

il flusso concatenato con tutto il solenoide, cioè con Nl spire:

$$\Phi = Nl\Phi_{\text{spira}} = \mu_0 N^2 \pi R^2 I \quad (19.18)$$

usando la definizione:

$$L = \frac{d\Phi}{dI} = Nl\Phi_{\text{spira}} = \mu_0 N^2 l \pi R^2 = \mu_0 N^2 V \quad (19.19)$$

che in realtà vale anche nel caso la sezione non sia circolare essendo il campo magnetico uniforme.

Esempio 19.2 (cavo coassiale) Consideriamo un cavo coassiale, cioè due conduttori cilindrici coassiali con raggi $a < b$. I due conduttori sono percorsi da correnti uguali ed opposte. Calcoliamo il campo magnetico all'interno, tra i due cilindri. Consideriamo un cammino chiuso C circolare coassiale coi cilindri di raggio $r : a < r < b$. Allora:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu I \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (19.20)$$

all'esterno del cavo invece la corrente concatenata totale è zero, $B(r > b) = 0$. Consideriamo una superficie S rettangolare di larghezza Δl con la base inferiore che poggia sul $r = a$ e la base superiore su $r = b$. Il flusso di \mathbf{B} :

$$\Phi_S(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da \quad (19.21)$$

ma $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{e}}_r$ quindi è ortogonale a \mathbf{n} :

$$\Phi_S(\mathbf{B}) = \int_a^b \int_{\Delta l} B dr dz = \Delta l \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I \Delta l}{2\pi} \log \frac{b}{a} \quad (19.22)$$

$$L = \frac{d\Phi}{dI} = \frac{\mu_0}{2\pi} \Delta l \log \frac{b}{a} \quad (19.23)$$

l'autoinduttanza per unità di lunghezza è

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \log \frac{b}{a} \quad (19.24)$$

19.4 Mutua induttanza

Consideriamo n circuiti separati percorsi da correnti. Il circuito j produrrà un campo magnetico \mathbf{B}_j il quale concatenerà il circuito i creando un flusso: Φ_{ij} cioè il flusso sul circuito i -esimo creato dal circuito j -esimo. Il flusso totale sul circuito i sarà

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^n \Phi_{ij} \quad (19.25)$$

e la forza elettromotrice sul circuito i :

$$\text{fem}_i = - \sum_{j=1}^n \frac{d\Phi_{ij}}{dt} = - \sum_{j=1}^n \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} \frac{dI_j}{dt} = - \sum_{j=1}^n M_{ij} \frac{dI_j}{dt} \quad (19.26)$$

nel caso i circuiti siano indeformabili, cioè se le variazioni di flusso siano dovute solo da variazioni di corrente nel tempo.

Definizione 19.2 (coefficiente di mutua induttanza)

$$M_{ij} = \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} \quad (19.27)$$

Naturalmente

$$M_{ii} = L_i \quad (19.28)$$

19.4.1 Simmetria di M

La matrice $M = M_{ij}$ è simmetrica. Dobbiamo dimostrare che $M_{ij} = M_{ji}$. Limitiamoci a considerare due circuiti e dimostriamo $M_{21} = M_{12}$. Il primo circuito genererà un flusso sul secondo:

$$\Phi_2(\mathbf{B}_1) = \int_{S_2} \int_{C_1} I_1 \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} \cdot \mathbf{n}_2 da_2 \quad (19.29)$$

$$M_{21} = \frac{d\Phi_2}{dI_1} = \int_{S_2} \int_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} \cdot \mathbf{n}_2 da_2 \quad (19.30)$$

Usiamo la relazione:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} \quad (19.31)$$

$$M_{21} = \int_{S_2} \int_{C_1} \left(\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} \times \mathbf{n}_2 \right) \cdot d\mathbf{l}_1 da_2 \quad (19.32)$$

Usando il teorema del rotore: $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 da$:

$$M_{21} = \int_{S_2} \int_{S_1} \text{rot}_1 \left(\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} \times \mathbf{n}_2 \right) \cdot \mathbf{n}_1 da_1 da_2 \quad (19.33)$$

Usiamo la relazione:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C} \quad (19.34)$$

usando $\mathbf{A} = \nabla$:

$$\begin{aligned} M_{21} &= \int_{S_2} \int_{S_1} \left[(\text{div}_1 \mathbf{n}_2) \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} - \left(\text{div}_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} \right) \mathbf{n}_2 \right] \cdot \mathbf{n}_1 da_1 da_2 \\ &= \int_{S_2} \int_{S_1} - \left(\text{div}_1 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} \right) \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_1 da_1 da_2 \\ &= \int_{S_2} \int_{S_1} \left(\text{div}_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} \right) \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_1 da_1 da_2 \\ &= \int_{S_2} \int_{S_1} \left[(\text{div}_2 \mathbf{n}_2) \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} + \left(\text{div}_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} \right) \mathbf{n}_2 \right] \cdot \mathbf{n}_1 da_1 da_2 \\ &= \int_{S_2} \int_{S_1} \text{rot}_2 \left(\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} \times \mathbf{n}_2 \right) \cdot \mathbf{n}_1 da_1 da_2 \\ &= \int_{S_1} \int_{C_2} d\mathbf{l}_2 \times \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} \cdot \mathbf{n}_1 = M_{21} \end{aligned} \quad (19.35)$$

Esempio 19.3 (trasformatore) Consideriamo due bobine di lunghezza l e sezione S avvolte su un unico materiale ferromagnetico percorse da correnti I_1 e I_2 . Il campo magnetico \mathbf{B} che le attraversa è uguale in modulo. Le due bobine abbiano N_1 e N_2 spire per unità di lunghezza.

$$B_1 = \mu_0 N_1 I_1 \quad B_2 = \mu_0 N_2 I_2 \quad (19.36)$$

Il campo magnetico totale:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \quad (19.37)$$

Supponiamo che le due bobine siano messe in modo tale che i due campi siano paralleli:

$$B = B_1 + B_2 \quad (19.38)$$

$$L_1 = \mu_0 N_1^2 l S \quad L_2 = \mu_0 N_2^2 l S \quad (19.39)$$

$$M_{12} = \frac{d\Phi_2(\mathbf{B}_1)}{dI_1} = \frac{d(\mu_0 N_1 N_2 I_1 S l)}{dI_1} = \mu_0 N_1 N_2 S l \quad (19.40)$$

$$\begin{aligned} \text{fem}_1 &= -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)}{dt} = -\frac{d(\Phi(\mathbf{B}_1) + \Phi(\mathbf{B}_2))}{dt} \\ &= -\frac{d\Phi(\mathbf{B}_1)}{dt} - \frac{d\Phi(\mathbf{B}_2)}{dt} = \frac{d\Phi(\mathbf{B}_1)}{dI_1} \frac{dI_1}{dt} - \frac{d\Phi(\mathbf{B}_2)}{dI_2} \frac{dI_2}{dt} \\ &= -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M_{12} \frac{dI_2}{dt} \end{aligned} \quad (19.41)$$

analogamente:

$$\text{fem}_2 = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M_{21} \frac{dI_1}{dt} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M_{12} \frac{dI_1}{dt} \quad (19.42)$$

$$\frac{\text{fem}_1}{\text{fem}_2} = -\frac{L_1 \dot{I}_1 + M_{12} \dot{I}_2}{L_2 \dot{I}_2 + M_{12} \dot{I}_1} = \frac{\mu_0 N_1^2 l S \dot{I}_1 + \mu_0 N_1 N_2 S l \dot{I}_2}{\mu_0 N_2^2 l S \dot{I}_2 + \mu_0 N_1 N_2 S l \dot{I}_1} = \frac{N_1^2 \dot{I}_1 + N_1 N_2 \dot{I}_2}{N_2^2 \dot{I}_2 + N_1 N_2 \dot{I}_1} = \frac{N_1}{N_2} \quad (19.43)$$

20

Circuiti

Definizione 20.1 (circuito elettrico) Una rete o circuito elettrico è un insieme di conduttori e generatori di forze elettromotrici collegati tra loro

20.1 Reti resistive

Una rete resistiva è una rete per la quale compaiono solo componenti passivi resistivi.

Definizione 20.2 (nodo) Un nodo è un punto di connessione tra tre o più elementi della rete

Definizione 20.3 (ramo) Un ramo è l'insieme degli elementi collegati in serie posti tra due nodi

Definizione 20.4 (maglia) Una maglia è un percorso chiuso formato da elementi della rete

Nel risolvere i circuiti, cioè determinare i valori delle correnti che attraversano i componenti o nel determinare la caduta di potenziale su di essi, si usano le leggi di Kirchhoff:

Legge 20.1 (legge dei nodi) *La somma delle intensità delle correnti entranti in un nodo è uguale alla somma delle intensità delle correnti uscenti*

Legge 20.2 (legge delle maglie) *La somma col segno delle forze elettromotrici in un maglia è uguale alla somma delle cadute di tensione di tutti gli elementi della maglia*

La prima legge esprime l'equazione di continuità la seconda la circuitazione del campo elettrostatico.

20.2 RLC serie continua

20.2.1 Scarica

Immaginiamo di aver caricato il condensatore con una carica q_0 , cui corrisponde una differenza di potenziale tra le armature ΔV_0 e di chiudere il circuito al tempo $t = 0$. Per la legge delle maglie:

$$RI(t) + L \frac{dI(t)}{dt} = \Delta V(t) \quad (20.1)$$

essendo $\Delta V = \frac{q}{C}$:

$$RI + L \frac{dI}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \quad (20.2)$$

derivando e tenendo conto che $I = -\frac{dq}{dt}$ poichè la corrente positiva si genera per diminuzione di q sul condensatore:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \quad (20.3)$$

che è una semplice equazione differenziale omogenea:

$$L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0$$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Introduciamo la costante di smorzamento:

$$\gamma = \frac{R}{2L} \quad (20.4)$$

e

$$\beta = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad (20.5)$$

la soluzione generale si scrive come

$$I(t) = I_1 e^{-(\gamma-\beta)t} + I_2 e^{-(\gamma+\beta)t} \quad (20.6)$$

a seconda che β sia reale, immaginario o nullo si hanno tre casi notevoli:

- $\beta = 0$, criticamente smorzato. Questo avviene quando:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \quad (20.7)$$

ω_0 è la frequenza caratteristica del circuito. La soluzione diventa:

$$I(t) = (I_1 + I_2 t) e^{-\gamma t} \quad (20.8)$$

imponendo $I(0) = 0$:

$$I(0) = I_1 = 0$$

$$I(t) = I_2 t e^{-\gamma t} \quad (20.9)$$

per imporre $q(0) = q_0$ dobbiamo andare a considerare l'equazione (20.2) dove compare ancora q_0 prima di derivare. Calcolandola per $t = 0$ e considerando $I(0) = 0$:

$$L \left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} = \frac{q_0}{C} \quad (20.10)$$

andando a sostituire la nostra soluzione generale (20.9):

$$L I_2 (e^{-\gamma t} - \gamma t e^{-\gamma t}) \big|_{t=0} = \frac{q_0}{C} \quad I_2 = \frac{q_0}{LC} = q_0 \omega_0^2 \quad (20.11)$$

che porta alla soluzione particolare:

$$I(t) = q_0 \omega_0^2 t e^{-\gamma t} \quad (20.12)$$

- $\beta > 0$ questo avviene quando:

$$\gamma > \omega_0 \quad (20.13)$$

e si parla di sottosmorzamento. Imponendo $I(0) = 0$ si trova ancora $I_1 = -I_2$ quindi:

$$I(t) = I_2 (e^{-(\gamma+\beta)t} - e^{-(\gamma-\beta)t}) \quad (20.14)$$

considerando che deve valere ancora la (20.10), sostituendo la soluzione trovata (20.14):

$$I_2 = -\frac{q_0}{LC} = -\frac{q_0 \omega_0^2}{2\beta} \quad (20.15)$$

e la soluzione:

$$I(t) = \frac{q_0 \omega_0^2}{2\beta} e^{-\gamma t} (e^{\beta t} - e^{-\beta t}) \quad (20.16)$$

- $\beta \in \mathbb{C}$ che si verifica quando:

$$\gamma < \omega_0 \quad (20.17)$$

e si parla di sottosmorzamento. La soluzione generale (20.6) in questo caso diventa:

$$I(t) = I_1 e^{-(\gamma-j\omega)t} + I_2 e^{-(\gamma+j\omega)t} \quad (20.18)$$

con $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$. Imponiamo $I(0) = 0$ che ci fornirà $I_1 = -I_2$ e la soluzione diventa:

$$I(t) = I_2 (e^{-(\gamma+j\omega)t} - e^{-(\gamma-j\omega)t}) \quad (20.19)$$

considerando ancora la (20.10)

$$I_2 = -\frac{q_0}{2Cj\omega L} = \frac{q_0}{2CL\omega} j = \frac{q_0\omega_0^2}{2\omega} j \quad (20.20)$$

e la soluzione

$$I(t) = \frac{q_0\omega_0^2}{2\omega} j (e^{-(\gamma+j\omega)t} - e^{-(\gamma-j\omega)t}) = \frac{q_0\omega_0^2}{2\omega} j (e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}) e^{-\gamma t} \quad (20.21)$$

poichè

$$\begin{aligned} j [e^{-j\omega t} - e^{j\omega t}] &= j [(\cos(-\omega t) + j \sin(-\omega t)) - (\cos(\omega t) + j \sin(\omega t))] \\ &= 2 \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (20.22)$$

$$I(t) = \frac{q_0\omega_0^2}{\omega} e^{-\gamma t} \sin(\omega t) \quad (20.23)$$

l'ampiezza delle oscillazioni sinusoidali è smorzata dal termine $e^{-\gamma t}$. Tutta l'energia all'infinito è dissipata per effetto Joule. Il tempo caratteristico dello smorzamento è

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{2L}{R} \quad (20.24)$$

20.2.2 Carica

Per quanto riguarda la carica dalla legge delle maglie:

$$L\dot{I} + RI + \frac{Q}{C} = V_0 \quad (20.25)$$

la trattazione è del tutto analoga a quella per la scarica:

$\gamma = \omega_0$ smorzamento critico:

$$I(t) = q_0 \gamma^2 t e^{-\gamma t} \quad (20.26)$$

$\gamma > \omega_0$ sovrasmorzamento:

$$I(t) = q_0 \frac{\omega_0^2}{2\beta} (e^{-(\gamma-\beta)t} - e^{-(\gamma+\beta)t}) \quad (20.27)$$

$\gamma < \omega_0$ sottosmorzamento:

$$I(t) = q_0 e^{-\gamma t} (\gamma \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)) \quad (20.28)$$

20.3 RLC serie alternata

Consideriamo un circuito RLC in alternata. Il generatore fornirà ai suoi capi una tensione:

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t) = \Re(V_0 e^{j\omega t}) \quad (20.29)$$

20.3.1 Soluzione stazionaria

Calcoliamo la soluzione stazionaria, per esempio per $t \rightarrow \infty$. Calcoliamo l'impedenza del circuito:

$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R - j \frac{1}{\omega C} + j\omega L = R + jX \quad (20.30)$$

il cui modulo è

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (20.31)$$

usando i numeri complessi si scrive come:

$$Z = |Z| e^{j\varphi} \quad (20.32)$$

con:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{X}{R}\right) = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) \quad (20.33)$$

la corrente che circola nella serie:

$$I(t) = \Re\left(\frac{V(t)}{Z}\right) = \Re\left(\frac{V_0 e^{j\omega t}}{|Z| e^{j\varphi}}\right) = \Re\left(\frac{V_0}{|Z|} e^{j(\omega t - \varphi)}\right) = \frac{V_0}{|Z|} \cos(\omega t - \varphi) \quad (20.34)$$

quindi ai capi del resistore avremo una caduta di potenziale:

$$V_R(t) = RI(t) = R \frac{V_0}{|Z|} \cos(\omega t - \varphi) = V_{0R} \cos(\omega t - \varphi) \quad (20.35)$$

con V_{0R} l'ampiezza, pari a:

$$V_{0R} = R \frac{V_0}{|Z|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} V_0 \quad (20.36)$$

ai capi dell'induttanza (con $Z_L = j\omega L$) una caduta di potenziale:

$$\begin{aligned} V_L(t) &= \Re(Z_L I(t)) = \Re\left(j\omega L \frac{V_0}{|Z|} \cos(\omega t - \varphi)\right) = \Re\left(\omega L e^{j\frac{\pi}{2}} \frac{V_0}{|Z|} e^{j(\omega t - \varphi)}\right) \\ &= \Re\left(\frac{\omega L}{|Z|} V_0 e^{j(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2})}\right) = V_{0L} \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (20.37)$$

con:

$$V_{0L} = \frac{\omega L}{|Z|} V_0 = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} V_0 \quad (20.38)$$

mentre ai capi del condensatore ($Z_C = -\frac{j}{\omega C}$):

$$\begin{aligned} V_C(t) &= \Re(Z_C I(t)) = \Re\left(-\frac{j}{\omega C} \frac{V_0}{|Z|} \cos(\omega t - \varphi)\right) = \Re\left(\frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} \frac{V_0}{|Z|} e^{j(\omega t - \varphi)}\right) \\ &= \Re\left(\frac{1}{|Z|\omega C} V_0 e^{j(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2})}\right) = V_{0C} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (20.39)$$

con:

$$V_{0C} = \frac{1}{|Z|\omega C} V_0 = \frac{1}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} V_0 \quad (20.40)$$

Occupiamoci delle ampiezze. Riassumiamo:

$$V_{0R} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} V_0 \quad (20.41a)$$

$$V_{0L} = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} V_0 \quad (20.41b)$$

$$V_{0C} = \frac{1}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} V_0 \quad (20.41c)$$

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (20.41d)$$

Vogliamo trovare qual è quella frequenza ν_0 che rende massima la corrente:

$$\left. \frac{d}{d\omega} I_0 \right|_{\omega=\omega_0} = 0 \quad \left(R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \left(L + \frac{1}{\omega^2 C} \right) = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (20.42)$$

che è effettivamente un massimo (la derivata seconda in ω_0 vale $-\frac{4L^2}{R^2}$). Quando $\omega = \omega_0$ si parla di risonanza del circuito. Possiamo anche valutare quando abbiamo i massimi per V_{0L} e V_{0C} :

$$\omega_{0C} = \frac{\sqrt{-2C(R^2C - 2L)}}{2CL} \quad (20.43)$$

$$\omega_{0L} = \frac{2}{\sqrt{-2R^2C^2 + 4CL}} \quad (20.44)$$

Il valore massimo per l'ampiezza del potenziale nell'induttanza è uguale a quello per il capacitore:

$$V_{0L}(\omega_{0L}) = V_{0C}(\omega_{0C}) = \frac{2L}{\sqrt{C}\sqrt{-CR^2 + 2LR}\sqrt{\frac{4L-CR^2}{-CR^2+2L}}} V_0 \quad (20.45)$$

mentre naturalmente il valore massimo che assume V_{0R} è

$$V_{0R}(\omega_0) = V_0 \quad (20.46)$$

quando $\omega = \omega_0$ V_{0L} e V_{0C} sono uguali:

$$V_{0L}(\omega_0) = V_{0C}(\omega_0) = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{C}R} V_0 \quad (20.47)$$

per quanto riguarda i limiti:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} V_{0R} = 0 \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} V_{0R} = 0 \quad (20.48a)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} V_{0L} = 0 \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} V_{0L} = V_0 \quad (20.48b)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} V_{0C} = V_0 \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} V_{0C} = 0 \quad (20.48c)$$

Per quanto riguarda le differenze di fase dei potenziali rispetto al potenziale del generatore:

$$\phi_R = \varphi = \arctan \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) \quad (20.49a)$$

$$\phi_L = \varphi - \frac{\pi}{2} = \arctan \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) - \frac{\pi}{2} \quad (20.49b)$$

$$\phi_C = \varphi + \frac{\pi}{2} = \arctan \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) + \frac{\pi}{2} \quad (20.49c)$$

Cerchiamo il caso in cui non si ha sfasamento ai capi del resistore rispetto al generatore:

$$0 = \phi_R = \arctan \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right)$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \quad (20.50)$$

quindi solo alla frequenza di risonanza non si ha sfasamento sul resistore. I limiti:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \phi_R = -\frac{\pi}{2} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi_R = \frac{\pi}{2} \quad (20.51a)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \phi_L = -\pi \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi_L = 0 \quad (20.51b)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \phi_C = 0 \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi_C = \pi \quad (20.51c)$$

Introduciamo la grandezza coefficiente di smorzamento γ :

$$\gamma = \frac{R}{2L} \quad (20.52)$$

e il fattore di merito o di qualità Q_0 :

$$Q_0 = \omega_0 LR = \frac{\omega_0}{2\gamma} \quad (20.53)$$

Dividiamo in tre casi notevoli:

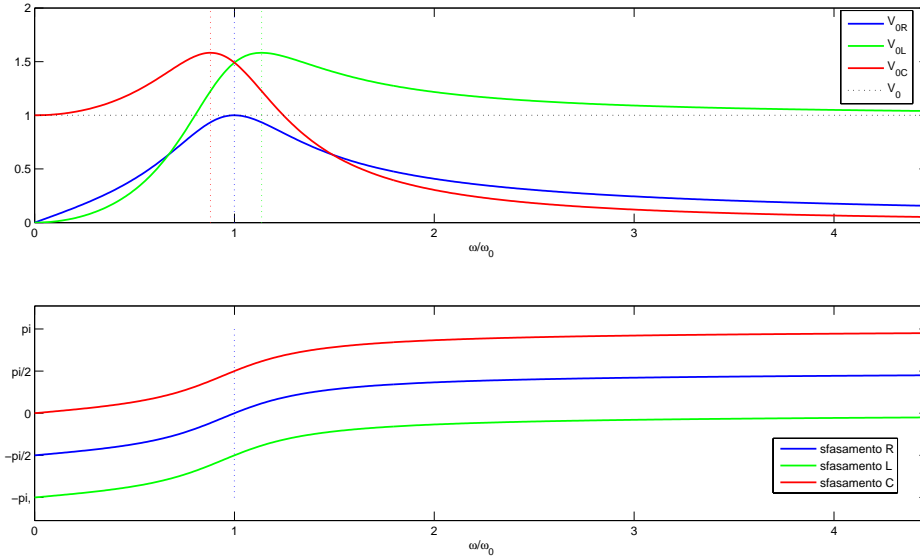


Figura 20.1: Andamento delle ampiezze in funzione della frequenza e differenze di fase in funzione delle frequenza

$$\omega = \omega_0$$

$$Z = \left[R - j \frac{1}{\omega C} + j \omega L \right]_{\omega=\omega_0} = R \quad (20.54)$$

$$\varphi = \left[\arctan \left(\frac{X}{R} \right) \right]_{X=0} = 0 \quad (20.55)$$

$$I = \frac{V_0}{|Z|} \cos(\omega t - \varphi) = \frac{V_0}{R} \cos(\omega t) = I_0 \cos(\omega t) \quad (20.56)$$

$$V_{0R} = V_0 \quad (20.57)$$

$$V_{0L} = I_0 |Z_L| = \frac{V_0}{R} \omega_0 L = \frac{\omega_0}{2\gamma} V_0 = Q_0 V_0 \quad (20.58)$$

$$V_{0C} = I_0 |Z_C| = \frac{V_0}{R} \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{\omega_0}{2\gamma} V_0 = Q_0 V_0 \quad (20.59)$$

$\omega \ll \omega_0$

$$Z = R - j\frac{1}{\omega C} + j\omega L \simeq -\frac{1}{\omega C}j \quad (20.60)$$

$$\varphi \simeq \left[\arctan\left(\frac{X}{R}\right) \right]_{R=0^+, X<0} = -\frac{\pi}{2} \quad (20.61)$$

$$I_0 = \frac{V_0}{|Z|} = \omega C V_0 \quad (20.62)$$

$$V_{0R} \simeq I_0 R = R\omega C V_0 = \frac{\omega}{\omega_0} \frac{V_0}{Q_0} \quad (20.63)$$

$$V_{0L} \simeq I_0 |Z_L| = \omega^2 L C V_0 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} V_0 \quad (20.64)$$

$$V_{0C} \simeq I_0 |Z_C| = \omega C V_0 \frac{1}{\omega C} = V_0 \quad (20.65)$$

$\omega \gg \omega_0$

$$Z = R - j\frac{1}{\omega C} + j\omega L \simeq j\omega L \quad (20.66)$$

$$\varphi \simeq \left[\arctan\left(\frac{X}{R}\right) \right]_{R=0^+, X>0} = +\frac{\pi}{2} \quad (20.67)$$

$$I_0 = \frac{V_0}{|Z|} = \frac{V_0}{\omega L} \quad (20.68)$$

$$V_{0R} \simeq I_0 R = \frac{R}{\omega L} V_0 = \frac{2\gamma}{\omega} V_0 = \frac{\omega_0}{\omega} \frac{V_0}{Q} \quad (20.69)$$

$$V_{0L} \simeq I_0 |Z_L| = \frac{V_0}{\omega L} \omega L = V_0 \quad (20.70)$$

$$V_{0C} \simeq I_0 |Z_C| = \frac{V_0}{\omega L} \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega^2 L C} V_0 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} V_0 \quad (20.71)$$

Ampiezza di banda

La frequenza ω_0 è un punto, che essendo un punto è impossibile da raggiungere. Quello che vogliamo è che il massimo della caduta di potenziale sulla resistenza sia “largo” in modo tale che se la nostra frequenza non è precisamente ω_0 abbiamo lo stesso risonanza. Scriviamo l'intensità di corrente in funzione di $Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R}$:

$$I_0 = \frac{V_0}{|Z|} = \frac{\frac{V_0}{R}}{\sqrt{1 + Q_0^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \omega_0} \right)^2}} \quad (20.72)$$

mentre l'ampiezza della caduta sul resistore:

$$V_{0R} = I_0 R = \frac{V_0}{|Z|} R = \frac{R}{|Z|} V_0 \quad (20.73)$$

interessante è il rapporto:

$$\frac{R}{|Z|} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_0^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \omega_0} \right)^2}} \quad (20.74)$$

Indichiamo con ω_1 e ω_2 i punti di potenza dimezzata, cioè quei valori per cui il valore del rapporto $\frac{R}{|Z|}$ diventa $\frac{1}{\sqrt{2}}$ del suo massimo. Il massimo si ha quando $\omega = \omega_0$ e il valore massimo vale 1. Quindi la condizione si ha quando:

$$Q_0^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \omega_0} \right)^2 = 1 \quad (20.75)$$

le soluzioni positive sono:

$$\omega_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{\omega_0^2 + 4Q_0^2 \omega_0^2}}{2Q_0} \quad (20.76)$$

quindi l'ampiezza di banda $\Delta\omega$:

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{\omega_0}{Q_0} \quad (20.77)$$

inversamente proporzionale a Q_0 ¹.

20.3.2 Soluzione transitoria

Supponiamo che il generatore venga acceso all'istante $t = 0$. Per la seconda legge di Kirchhoff:

$$\varepsilon = RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} \quad (20.78)$$

derivando:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = R \frac{dI}{dt} + L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I}{C} \quad (20.79)$$

¹ Q_0 è chiamato fattore di merito perché nelle applicazioni è utile avere un'ampiezza di banda stretta e quindi un Q_0 alto; spesso i resistori nei circuiti RLC non sono presenti e la resistenza è data dall'avvolgimento dell'induttanza e quindi Q_0 diventa un parametro relativo all'induttanza

20.4 Cavi coassiali

Il cavo coassiale è costituito da filo conduttore coassiale con un conduttore cilindrico cavo. Tra i due conduttori è posto del dielettrico.

20.4.1 Propagazione dell'onda

Sia a il raggio del conduttore interno, b quello del dielettrico con permeabilità magnetica trascurabile ($\mu_r \simeq 1$) e permittività dielettrica relativa ϵ_r . Lavoriamo con l'approssimazione di cavo infinito e orientiamo il cavo in modo che abbia l'asse z coassiale. Consideriamo:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (20.80)$$

e una superficie cilindrica S coassiale, con basi di raggio r e di coordinate z e $z + \Delta z$ (Fig. 20.2) Calcoliamo \mathbf{D} , che per simmetria è radiale. Con Gauss

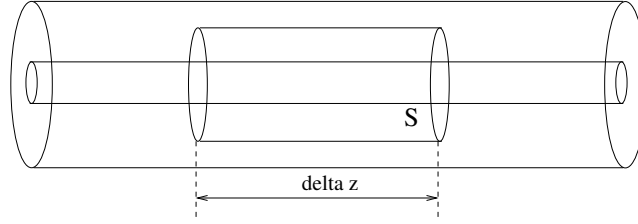


Figura 20.2: cavo coassiale

$$D 2\pi r \Delta z = q = \lambda \Delta z$$

$$\mathbf{D}(z, t) = \frac{\lambda(z, t)}{2\pi r} \quad (20.81)$$

con λ densità lineare di carica.

Usiamo ora l'equazione:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (20.82)$$

e consideriamo un cammino circolare di raggio r coassiale, perpendicolare a z e la superficie S che lo delimita 20.3.

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \, da = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r H \quad (20.83)$$

ma $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = 0$ perché $\mathbf{D} = D \hat{\mathbf{e}}_r$ e $\int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da = I$. Allora:

$$H(z, t) = \frac{I(z, t)}{2\pi r} \quad (20.84)$$

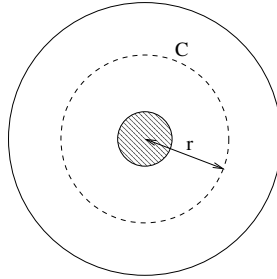


Figura 20.3: sezione di cavo coassiale

con I la corrente che scorre nel cavo interno.

Consideriamo ora un circuito rettangolare posto nel piano radiale di lati Δr e Δz (fig. 20.4). Usiamo l'equazione:

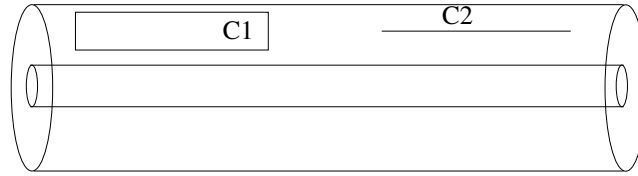


Figura 20.4: percorsi

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (20.85)$$

Facendo il flusso e applicando Stokes:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da \quad (20.86)$$

ovvero (approssimando $\mathbf{E}(z + \Delta z) = \mathbf{E}(z) + \frac{\partial \mathbf{E}(z)}{\partial z} \Delta z$):

$$\left[E(z, t) + \frac{\partial E}{\partial z} \Delta z \right] \Delta r - E(z, t) \Delta r = -\frac{\partial B}{\partial t} \Delta z \Delta t \quad (20.87)$$

Semplificando:

$$\frac{\partial E}{\partial z} - \frac{\partial B}{\partial t} \quad (20.88)$$

Se ora usiamo il circuito C_2 posto in un piano perpendicolare alla direzione radiale e usiamo

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (20.89)$$

Facendo attenzione ai segni e alle direzioni delle normali e notando che \mathbf{J} è parallelo alla superficie:

$$H(z)\Delta r - \left[H(z) - \frac{\partial H}{\partial z} \Delta z \right] \Delta r = \frac{\partial D}{\partial t} \Delta r \Delta z \quad (20.90)$$

ovvero:

$$\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial D}{\partial t} \quad (20.91)$$

Derivando la (20.88) rispetto a z , usando la (20.91), e $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ e $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H}{\partial z} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right) = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (20.92)$$

se invece facciamo la stessa cosa partendo dalla (20.91):

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial D}{\partial t} \right) = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial E}{\partial z} \right) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right) = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \quad (20.93)$$

Che è l'equazione di un'onda con velocità

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (20.94)$$

Usando la (20.81): $D(z, t) = \frac{\lambda(z, t)}{2\pi r}$:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} \quad (20.95)$$

e la soluzione è del tipo:

$$\lambda(z, t) = \psi(z \pm vt) \quad (20.96)$$

Ipotizziamo che all'estremità del cavo sia applicata una differenza di potenziale V :

$$V = \varphi(t) \quad (20.97)$$

fissando z la differenza di potenziale tra il conduttore esterno e quello interno vale:

$$V(z, t) = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \frac{\lambda(z, t)}{2\varepsilon\pi r} dr = \frac{\lambda(z, t)}{2\pi\varepsilon} \log \frac{b}{a} \quad (20.98)$$

la quantità $\frac{2\pi\varepsilon}{\log \frac{b}{a}}$ è la capacità C per unità di lunghezza di un condensatore cilindrico, come in questo caso.

$$V(z, t) = \frac{\lambda(z, t)}{C} \quad (20.99)$$

quindi anche la differenza di potenziale è un'onda. Inoltre anche la corrente I rispetta l'equazione delle onde.

20.4.2 Rappresentazione a elementi concentrati

Si può dimostrare che un cavo coassiale si comporta come un circuito formato dal ripetersi di una certa combinazione di elementi concentrati.

La resistenza R per unità di lunghezza tiene conto della perdita di tensione sul cavo. La capacità C per unità di lunghezza è quella del cilindro, usata nel paragrafo precedente. La conduttanza G tiene conto delle perdite sul condensatore attraverso il dielettrico.

20.4.3 Impedenza caratteristica

L'impedenza caratteristica Z_0 è quell'impedenza tale che inserita come carico risulta uguale all'impedenza della linea.

$$Z_0 = \frac{Z_1}{2} + \left[\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{\frac{Z_1}{2} + Z_0} \right]^{-1} \quad (20.100)$$

$$Z_0 = \sqrt{\left(\frac{Z_1}{2}\right)^2 + Z_2 Z_1} \quad (20.101)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C} + (R + j\omega L)^2 \frac{(\Delta x)^2}{4}} \quad (20.102)$$

ma gli elementi sono concentrati, quindi $\Delta x \rightarrow 0$:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (20.103)$$

Una linea non dissipativa è tale che $R = 0$ e $G = 0$, quindi:

$$Z_{0\text{non dissipativa}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (20.104)$$

in questo caso l'impedenza è reale. Un altro caso in cui l'impedenza è reale è il caso di linea bilanciata:

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} \quad (20.105)$$

$$Z_{0\text{bilanciata}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (20.106)$$

21

Campo elettromagnetico

Riassumiamo i risultati finora ottenuti. Le relazioni costitutive della materia descrivono ogni materiali dal punto di vista di conduttore, dielettrico e magnetico:

$$\mathbf{J} = \vec{\sigma} \mathbf{E} \quad (21.1a)$$

$$\mathbf{D} = \vec{\varepsilon} \mathbf{E} \quad (21.1b)$$

$$\mathbf{B} = \vec{\mu} \mathbf{H} \quad (21.1c)$$

A queste vanno aggiunte le equazioni di Maxwell fin'ora ricavate:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (21.2a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (21.2b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (21.2c)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (21.2d)$$

Hanno una struttura asimmetrica, soprattutto nei rotori, se il rotore di \mathbf{E} è influenzato dalla variazione di \mathbf{B} nel tempo ci si aspetterebbe che anche il rotore di \mathbf{B} sia influenzato dalla variazione di \mathbf{E} nel tempo. Sappiamo dall'equazione di continuità

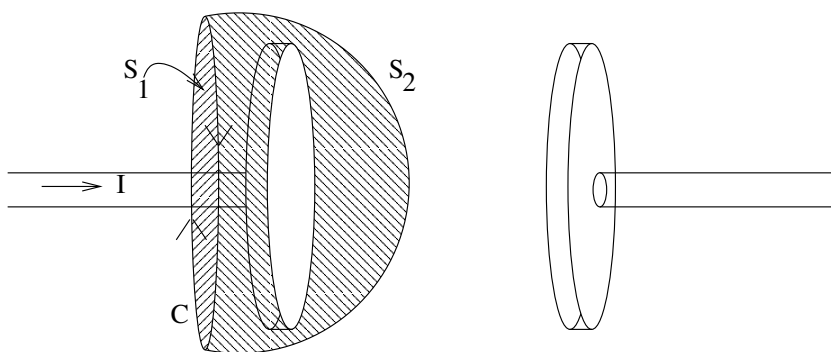
$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (21.3)$$

vediamo se è compatibile con le equazioni di Maxwell.

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 \neq -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (21.4)$$

perché la divergenza di un rotore è sempre nulla. L'equazione di continuità non è compatibile con le nostre equazioni. È compatibile se e solo se $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$ cioè se $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ovvero se la corrente è stazionaria. Concludiamo che le relazioni fino ad ora esposte valgono solo nel caso stazionario.

21.1 Corrente di spostamento



Facciamo il ragionamento di Faraday. Come è possibile che la corrente passi in un condensatore essendoci tra le due lastre un dielettrico non conduttore, al limite il vuoto? Immaginiamo un condensatore. Sia S_1 una superficie piana, ortogonale al verso della corrente entrante che la concatena. Sia S_2 invece una superficie che poggia su S_1 e che concatena la regione tra le armature. Calcoliamo le circuitazioni di \mathbf{H} lungo i bordi della superfici (che coincidono) con il teorema di amperè:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da = I \quad (21.5)$$

perché concatena la corrente I , usando l'altra superficie:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} da = 0 \quad (21.6)$$

C'è una contraddizione. Faraday introduce le correnti di spostamento \mathbf{J}_s che chiudono il circuito. Essendo $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$ allora in questo caso, all'interno del condensatore:

$$\mathbf{D} = \sigma(t)$$

con σ la densità di carica sulle armature del condensatore. Il flusso all'interno del condensatore:

$$\phi(\mathbf{D}) = S\sigma(t) = q(t)$$

Derivando nel tempo:

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{D})}{\partial t} = \frac{dq}{dt}(t) = I(t)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}_S$$

21.1.1 Calcolo correnti di spostamento

Partiamo dall'equazione di continuità che sicuramente è giusta:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{D} = -\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (21.7)$$

Portando tutto in un'unica divergenza:

$$\operatorname{div} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (21.8)$$

Il termine in più che è comparso è la corrente di spostamento:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}_S \quad (21.9)$$

L'equazione di Ampere diventa allora:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (21.10)$$

che soddisfa anche il caso stazionario, perché $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$ e ci si riconduce all'equazione precedente.

21.2 Equazioni di Maxwell complete

Le equazioni di Maxwell che descrivono tutto l'elettromagnetismo sono diventate:¹

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (21.11a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (21.11b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (21.11c)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (21.11d)$$

considerando anche le relazioni costitutive abbiamo 16 incognite e 17 equazioni, le equazioni non sono indipendenti; possiamo considerare indipendenti quelle che contengono le sorgenti ρ , \mathbf{J} :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (21.12)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (21.13)$$

L'ultima può essere riscritta tenendo conte che $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (21.14)$$

Si notano tre densità di correnti, una di cariche libere \mathbf{J} , mentre la corrente di spostamento è divisa in $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ e $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ che è presente solo nei dielettrici.

21.2.1 Equazione di continuità

L'equazione di continuità è già contenuta nelle equazioni di Maxwell:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{div} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (21.15)$$

¹nel sistema CGS doppio simmetrico di Gauss le stesse equazioni si scrivono come:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

21.3 Conservazione dell'energia elettromagnetica

Consideriamo un volume V contenuto nella superficie S all'interno del quale ci sia un campo elettrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e un campo magnetico $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ variabili nel tempo. Sia N il numero di cariche q per unità di volume con velocità \mathbf{v} , la forza nell'unità di volume sulle cariche è

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dV} = Nq(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (21.16)$$

La potenza nel volume:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} &= \frac{dP_j}{dV} = Nq(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = Nq\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} + Nq\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &= Nq\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (21.17)$$

Come doveva essere il campo magnetico non compie lavoro. La potenza dissipata per effetto Joule la ricaviamo integrando:

$$P_j = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv \quad (21.18)$$

Essendo $\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ e usando:

$$\text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} \quad (21.19)$$

$$\begin{aligned} P_j &= \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv = \int_V \left(\mathbf{E} \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dv \\ &= - \int_V \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dv + \int_V \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{E} dv - \int_V \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dv \\ &= - \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} da - \int_V \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dv \\ &= - \int_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} da - \int_V \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) + \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \right) \right) dv \end{aligned} \quad (21.20)$$

Avendo usato il teorema della divergenza, definito il vettore di Poynting:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (21.21)$$

che si misura in W/m². Nell'ultimo passaggio abbiamo usato:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon E^2) = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (21.22)$$

e analogamente:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (21.23)$$

Essendo $w_e = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ l'energia elettrica e $w_h = \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$ quella magnetica si ha:

$$P_j = - \int_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \, da - \int_V \frac{\partial}{\partial t} w_{em} \, dv = - \int_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \, da - \frac{\partial}{\partial t} W_{em} \, dv \quad (21.24)$$

con $w_{em} = w_e + w_h$ la densità di energia elettromagnetica. Si ottiene infine:

$$\frac{\partial W_{em}}{\partial t} = P_j + \int_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (21.25)$$

dove W_{em} è l'energia elettromagnetica. Si deduce che la potenza è dissipata per due fattori: l'effetto Joule P_j e l'irraggiamento attraverso la superficie.

21.4 Quantità di moto elettromagnetica

In un sistema meccanico isolato la quantità di moto \mathbf{G}^M è una costante del moto e vale:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{G}^M}{dt} \quad (21.26)$$

in un sistema elettromagnetico la quantità di moto delle particelle cariche non è una costante del moto.

Consideriamo un volume V in cui agiscono i campi \mathbf{B} e \mathbf{E} su una distribuzione di carica $\rho(\mathbf{r})$. La densità di forza:

$$\mathbf{f} = \rho (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (21.27)$$

vogliamo calcolare la forza totale:

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{f} \, dv \quad (21.28)$$

usando:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (21.29)$$

$$\mathbf{J} = Nq\mathbf{v} = \rho\mathbf{v} = \rho\mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (21.30)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (21.31)$$

l'equazione (21.27) diventa:

$$\mathbf{f} = \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} + \operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} \quad (21.32)$$

a questa espressione possiamo aggiungere $\mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ e sostituire:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \times \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) - \operatorname{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{D} \quad (21.33)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} + \underbrace{\mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{B}}_0 + \operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{B} + \operatorname{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{D} - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \quad (21.34)$$

se indichiamo con $\Sigma = \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} + \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{B} + \operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{B} + \operatorname{rot} \mathbf{E} \times \mathbf{D}$ la forza si scrive come:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial}{\partial t} \int (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \, dv + \int_V \Sigma \, dv \quad (21.35)$$

si può dimostrare che il secondo integrale si annulla:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \, dv \quad (21.36)$$

Dato che vale:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{G}^M}{\partial t} \quad (21.37)$$

$$\mathbf{G}^M + \int_V (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \, dv = \text{const} \quad (21.38)$$

che è dunque costante del moto. Definiamo:

Definizione 21.1 (quantità di moto elettromagnetica)

$$\mathbf{G}^{em} = \int_V (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \, dv \quad (21.39)$$

detta anche impulso elettromagnetico.

possiamo definire anche una densità di quantità di moto elettromagnetica:

$$\mathbf{g} = (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = \varepsilon \mu (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \varepsilon \mu \mathbf{S} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \quad (21.40)$$

21.5 Potenziali del campo elettromagnetico

Poichè la divergenza di \mathbf{B} è nulla esiste un vettore \mathbf{A} detto potenziale magnetico tale che:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (21.41)$$

e allora l'equazione di Maxwell per il rotore di \mathbf{E} diventa:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial (\text{rot } \mathbf{A})}{\partial t} = -\text{rot } \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (21.42)$$

portando tutto in un unico rotore:

$$\text{rot} \left(\mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (21.43)$$

scopriamo che il campo $\mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ è irrotazionale e quindi ammette potenziale scalare, cioè esiste ψ scalare tale che:

$$\mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \text{grad } \psi = -\text{grad } \varphi \quad (21.44)$$

φ lo chiamiamo potenziale scalare o potenziale elettrico. In questo modo i potenziali \mathbf{A} e φ non sono completamente determinati. È utile introdurre la condizione di Lorentz

$$\text{div } \mathbf{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (21.45)$$

21.5.1 Equazioni per \vec{A} e φ

Usando la (21.44) nel teorema di Gauss:

$$\rho = \text{div } \mathbf{D} = \varepsilon \text{div } \mathbf{E} = \varepsilon \left(\text{div} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) - \text{div grad } \varphi \right) \quad (21.46)$$

$$-\text{div} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) - \nabla^2 \varphi = -\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{A} - \nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (21.47)$$

usando la condizione di Lorentz (21.45) ($\text{div } \mathbf{A} = -\varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}$):

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (21.48)$$

Si può dimostrare una cosa analoga anche per \mathbf{A} partendo dal rotore di \mathbf{H} :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot rot } \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi \right) + \mathbf{J} \quad (21.49)$$

avendo usato le (21.44) e (21.41). Poichà

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (21.50)$$

si ottiene:

$$\text{grad} \left(\text{div} \mathbf{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \mu \mathbf{J} \quad (21.51)$$

e usando la condizione di Lorentz (21.45):

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \quad (21.52)$$

Le due equazioni trovate si possono scrivere usando l'operatore dalembertiano \square :

$$\square = \nabla^2 - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (21.53)$$

$$\square \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (21.54)$$

$$\square \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (21.55)$$

Le soluzioni di queste equazioni sono:

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{[\rho]_{t-\frac{r}{v}}}{r} dv \quad (21.56)$$

$$\mathbf{A}(r, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{[\mathbf{J}]_{t-\frac{r}{v}}}{r} dv \quad (21.57)$$

$$(21.58)$$

con $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ e $[\]_{t-\frac{r}{v}}$ indica il valore della funzione tra parentesi al tempo $t - \frac{r}{v}$. Questo sta a significare che una perturbazione elettromagnetica si propaga nello spazio a velocità finita v . Gli effetti dei potenziali si fanno sentire con un certo ritardo, e φ e \mathbf{A} si dicono potenziali ritardati.

21.6 Equazione generale delle onde

Consideriamo l'equazione di Maxwell:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

applichiamo il rotore:

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{J} + \text{rot } \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \sigma \text{rot } \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{E}$$

avendo sostituito $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ e $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. Sostituendo il rotore di \mathbf{E} :

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

avendo usato l'equazione di Maxwell e la relazione $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$.

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = -\sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

Usando $\text{rot rot } \mathbf{H} = \text{grad div } \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H}$:

$$\text{grad div } \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H} = -\sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (21.59)$$

Consideriamo un mezzo omogeneo, quindi $\text{div } \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{div } \mathbf{B} = 0$ allora:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \quad (21.60)$$

Se applichiamo lo stesso procedimento al campo \mathbf{E} e supponiamo che $\rho = 0$ allora:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (21.61)$$

Le ultime due equazioni rappresentano le equazioni delle onde elettromagnetiche in propagazione libera $\rho = 0$ in un mezzo omogeneo conduttore. Se supponiamo che il mezzo non sia conduttore, cioè $\sigma = 0$ le ultime due equazioni si scrivono come:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (21.62)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (21.63)$$

oppure:

$$\square \mathbf{H} = 0 \quad (21.64)$$

$$\square \mathbf{E} = 0 \quad (21.65)$$

$$(21.66)$$

22

Ottica

22.1 Riflessione e rifrazione

Usiamo le condizioni al contorno per ricavare l'espressione delle onde riflesse e trasmesse tra due dielettrici. Il piano di separazione sia il piano xy . Sia $\mathbf{E}^{(i)}$ il vettore campo elettrico associato all'onda incidente. Sia la direzione di propagazione individuata dal vettore $\mathbf{k} = \frac{\omega}{v_1} \hat{\mathbf{u}}$. Sia θ l'angolo di incidenza, cioè quello tra la normale e il vettore \mathbf{k} . Sia yz il piano di incidenza, cioè il piano contenente la normale e la direzione di propagazione. I coseni direttori di $\hat{\mathbf{u}}$ sono:

$$\alpha_x = 0 \quad \alpha_y = \sin \theta \quad \alpha_z = \cos \theta \quad (22.1a)$$

$$\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{u}} = k(\alpha_x \hat{\mathbf{i}} + \alpha_y \hat{\mathbf{j}} + \alpha_z \hat{\mathbf{k}}) \quad (22.1b)$$

il campo elettrico è allora:

$$\mathbf{E}^{(i)} = \mathbf{E}_0^{(i)} e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = \mathbf{E}_0^{(i)} e^{j(\omega t - k(y \sin \theta + z \cos \theta))} \quad (22.2)$$

le componenti:

$$E_x^{(i)} = E_{0x}^{(i)} e^{j(\omega t - k(y \sin \theta + z \cos \theta))} \quad (22.3a)$$

$$E_y^{(i)} = E_{0y}^{(i)} e^{j(\omega t - k(y \sin \theta + z \cos \theta))} \quad (22.3b)$$

$$E_z^{(i)} = E_{0z}^{(i)} e^{j(\omega t - k(y \sin \theta + z \cos \theta))} \quad (22.3c)$$

Dell'onda riflessa $\mathbf{E}^{(r)}$ non conosco nulla, so solamente che è un'onda monocromatica e che viaggia nel mezzo dell'onda incidente. Analogo discorso per l'onda trasmessa $\mathbf{E}^{(t)}$:

$$\mathbf{E}^{(r)} = \mathbf{E}_0^{(r)} e^{j(\omega^{(r)}t - k^{(r)}(x\alpha_x^{(r)} + y\alpha_y^{(r)} + z\alpha_z^{(r)}))} \quad (22.4a)$$

$$\mathbf{E}^{(t)} = \mathbf{E}_0^{(t)} e^{j(\omega^{(t)}t - k^{(t)}(x\alpha_x^{(t)} + y\alpha_y^{(t)} + z\alpha_z^{(t)}))} \quad (22.4b)$$

La condizione al contorno per il campo elettrico è

$$E_{1tg} = E_{2tg} \quad (22.5)$$

cioè la componente tangenziale deve variare con continuità nel nostro caso significa che le componenti tangenziali dell'onda incidente più quella riflessa devono essere uguali alla componente tangenziale dell'onda trasmessa. Le componenti tangenziali sono le componenti x e y :

$$E_x^{(i)}(x, y, 0) + E_x^{(r)}(x, y, 0) = E_x^{(t)}(x, y, 0) \quad (22.6a)$$

$$E_y^{(i)}(x, y, 0) + E_y^{(r)}(x, y, 0) = E_y^{(t)}(x, y, 0) \quad (22.6b)$$

ovvero:

$$E_{0x}^{(i)} e^{j[\omega t - k(y\alpha_y)]} + E_{0x}^{(r)} e^{j[\omega^{(r)}t - k^{(r)}(x\alpha_x^{(r)} + y\alpha_y^{(r)})]} = E_{0x}^{(t)} e^{j[\omega^{(t)}t - k^{(t)}(x\alpha_x^{(t)} + y\alpha_y^{(t)})]} \quad (22.7a)$$

$$E_{0y}^{(i)} e^{j[\omega t - k(y\alpha_y)]} + E_{0y}^{(r)} e^{j[\omega^{(r)}t - k^{(r)}(x\alpha_x^{(r)} + y\alpha_y^{(r)})]} = E_{0y}^{(t)} e^{j[\omega^{(t)}t - k^{(t)}(x\alpha_x^{(t)} + y\alpha_y^{(t)})]} \quad (22.7b)$$

questa relazione deve valere $\forall t, x, y$ segue che:

$$\omega = \omega^{(r)} = \omega^{(t)} \quad (22.8a)$$

$$k\alpha_x = k^{(r)}\alpha_x^{(r)} = k^{(t)}\alpha_x^{(t)} = 0 \quad (22.8b)$$

$$k\alpha_y = k^{(r)}\alpha_y^{(r)} = k^{(t)}\alpha_y^{(t)} \quad (22.8c)$$

L'equazione (22.8a) dice che le frequenze delle onde non cambiano, la (22.8b) che i raggi giacciono tutti nello stesso piano (cioè che $\alpha_x = \alpha_x^{(r)} = \alpha_x^{(t)} = 0$). Usando l'ultima equazione, l'onda riflessa:

$$k = \frac{\omega}{v_1} = k^{(r)} \frac{\omega}{v_1}$$

quindi $k = k^{(r)}$ e allora:

$$\alpha_y = \alpha_y^{(r)}$$

che, unita al fatto che i raggi giacciono nello stesso piano, è la legge di Snell:

$$\theta = \theta^{(r)} \quad (22.9)$$

Per l'onda rifratta:

$$\frac{\omega}{v_1} \alpha_y = \frac{\omega}{v_2} \alpha_y^{(t)} \quad \frac{1}{v_1} \sin \theta = \frac{1}{v_2} \sin \theta^{(t)}$$

usando $v = \frac{c}{n}$ troviamo la legge di Snell (chiamiamo l'onda trasmessa onda 2):

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12} \quad (22.10)$$

rimarrebbe solo da determinare le ampiezze delle onde.

22.2 Ottica geometrica

L'ottica geometrica è l'approssimazione all'ordine zero. Consideriamo il caso generale di un mezzo disomogeneo:

$$n = n(\mathbf{r}) \quad (22.11)$$

L'equazione differenziale per una componente di un'onda $f(\mathbf{r}, t)$:

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}, t) - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 f(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (22.12)$$

Scriviamo f come:

$$f(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}) e^{-j\omega t} \quad (22.13)$$

sostituendo nell'equazione differenziale:

$$e^{-j\omega t} \nabla^2 u(\mathbf{r}) + \frac{1}{v^2(\mathbf{r})} \omega^2 e^{-j\omega t} u(\mathbf{r}) = 0 \quad (22.14)$$

semplificando:

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) + \frac{1}{v^2(\mathbf{r})} u(\mathbf{r}) \omega^2 = 0 \quad (22.15)$$

considerando che:

$$\frac{\omega^2}{v^2} = k^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 = \left(\frac{2\pi n}{\lambda_0} \right)^2 = k_0^2 n^2 \quad (22.16)$$

cioè che:

$$\omega^2 = k_0^2 n^2 v^2 \quad (22.17)$$

l'equazione differenziale diventa:

$$\nabla^2 u = k_0^2 n^2 u \quad (22.18)$$

con u e n funzioni del punto. Ipotizziamo che u sia del tipo:

$$u(\mathbf{r}) = A e^{jk_0 L(\mathbf{r})} \quad (22.19)$$

con L il cammino ottico. Calcoliamo le derivate del laplaciano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} u &= A \frac{\partial L}{\partial x} j k_0 e^{jk_0 L} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} u &= A k_0 j \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} e^{jk_0 L} - A k_0^2 \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)^2 e^{jk_0 L} \\ \frac{\partial}{\partial y} u &= A \frac{\partial L}{\partial y} j k_0 e^{jk_0 L} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} u &= A k_0 j \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} e^{jk_0 L} - A k_0^2 \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right)^2 e^{jk_0 L} \\ \frac{\partial}{\partial z} u &= A \frac{\partial L}{\partial z} j k_0 e^{jk_0 L} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} u &= A k_0 j \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} e^{jk_0 L} - A k_0^2 \left(\frac{\partial L}{\partial z} \right)^2 e^{jk_0 L} \end{aligned}$$

sostituendo nella (22.18) otteniamo:

$$\begin{aligned} A k_0 e^{jk_0 L} \left\{ j \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \left(k_0 \frac{\partial L}{\partial x} \right)^2 + j \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} - \left(k_0 \frac{\partial L}{\partial y} \right)^2 + j \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} - \left(k_0 \frac{\partial L}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ = k_0^2 n^2 A e^{jk_0 L} \quad (22.20) \end{aligned}$$

semplificando:

$$\left\{ j \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \right) - k_0 \left[\left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} = k_0 n^2 \quad (22.21)$$

che diventa:

$$j \nabla^2 L - k_0 \|\text{grad } L\|^2 = k_0 n^2 \quad (22.22)$$

se ora dividiamo ancora per k_0 :

$$\frac{1}{k_0} j \nabla^2 L - \|\text{grad } L\|^2 = n^2 \quad (22.23)$$

e consideriamo l'approssimazione per $\lambda_0 \rightarrow 0$, equivalente a $k_0 \rightarrow \infty$, cioè trascuriamo gli effetti di diffrazione, il primo termine non lo consideriamo:

$$\|\text{grad } L\| = n \quad (22.24)$$

che prende il nome di equazione diconale.

22.2.1 Soluzione diconale

La soluzione dell'equazione diconale è

$$L(\mathbf{r}) = \min_{\gamma} \int_A^B n(\mathbf{r}) \, ds \quad (22.25)$$

Mezzo omogeneo

se il mezzo è omogeneo:

$$L(\mathbf{r}) = \min_{\gamma} n \int_A^B ds \quad (22.26)$$

la curva che minimizza l'integrale è la retta e L è la lunghezza della retta moltiplicato per l'indice di rifrazione costante. Quindi in un mezzo omogeneo nell'approssimazione dell'ottica geometrica la luce viaggia in linea retta.

Equazione dell'onda

La componente f di un'onda si scrive come:

$$f(\mathbf{r}, t) = A^{j(k_0 L(\mathbf{r}) - \omega t)} = A^{j(k_0 \min_{\gamma} \int_A^B n(\mathbf{r}) \, ds - \omega t)} \quad (22.27)$$

22.3 Dispersione

Il fenomeno della dispersione è dovuto alla variazione di n in funzione della frequenza. Il primo modello che approssima l'andamento del visibile è quello di Cauchy:

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^3} + \dots \quad (22.28)$$

Un'altro modello, più preciso, è quello di Sir Mayer:

$$n = 1 + \frac{A\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_0} \quad (22.29)$$

in cui si associa ad ogni mezzo una lunghezza d'onda propria λ_0 .

22.3.1 Oscillatore armonico elettronico

Immaginiamo ogni atomo con un singolo elettrone. Ogni elettrone lo possiamo vedere come un oscillatore intorno al nucleo, che si muove nella direzione

z . Il nucleo lo assumiamo fermo. Ci sono anche degli altri oscillatore associati al moto delle componenti positive e negative delle molecole, ma le trascuriamo.

Immaginiamo l'elettrone immerso in una distribuzione uniforme sferica di raggio a positiva (modello di Rutherford) e . Il problema di Cauchy è

$$\begin{cases} m\ddot{z} = -eE_z \\ \dot{z}(0) = 0 \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (22.30)$$

E_z è il campo della sfera positiva in cui è immerso l'elettrone. La densità di carica della sfera è

$$\rho = \frac{3e}{4\pi a^3}$$

Con Gauss:

$$E_z 4\pi z^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{4}{3} z^3 \rho = \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{e}{\varepsilon_0} \frac{3}{4\pi a^3}$$

$$E_z = \frac{e}{4\pi \varepsilon_0} \frac{z}{a^3} \quad (22.31)$$

l'equazione differenziale diventa:

$$\ddot{z} = -\frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 a^3 m} z = \frac{k}{m} z$$

avendo definito:

$$k = \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 a^3} \quad (22.32)$$

costante elastica. La soluzione particolare è

$$z(t) = z_0 \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t \right)$$

definiamo la pulsazione caratteristica:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (22.33)$$

e allora il moto sarà

$$z(t) = z_0 \cos(\omega_0 t) \quad (22.34)$$

oscillazioni forzate

Quando arriva un'onda elettromagnetica sul nostro elettrone oscillante gli imprime una forza, una forzante:

$$\mathbf{F} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -e(\mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{H}) \quad (22.35)$$

ma in un'onda elettromagnetica vale: $\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E}$. Prendiamo $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{i}}$ cioè ipotizziamo che la nostra onda propaghi lungo l'asse x .

$$\mathbf{F} = -e \left(\mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{v} \times \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{E} \right) = -e \left(\mathbf{E} + \frac{v}{c} \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} \right) \quad (22.36)$$

Consideriamo un'onda polarizzata lungo l'asse z :

$$\mathbf{F} = -eE_z \left(\hat{\mathbf{k}} - \frac{v}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} \right) = -eE_z \left(\hat{\mathbf{k}} - \frac{v}{c} \hat{\mathbf{i}} \right) \quad (22.37)$$

L'ultimo termine è proporzionale a $\frac{v}{c}$, che solitamente è molto piccolo, quindi trascurabile. L'equazione dell'onda sarà

$$\mathbf{E} = E_z \hat{\mathbf{k}} = E_{0z} e^{j(\omega t - kx)} \hat{\mathbf{k}} \quad (22.38)$$

poichè le dimensioni atomiche sono molto piccole, la variazione di x sarà molto piccola rispetto alla variazione temporale, quindi trascuriamo la fase spaziale, quindi la nostra onda diventerà

$$E_z = E_{0z} e^{j\omega t} \quad (22.39)$$

Introducendo un attrito l'equazione del moto diventa:

$$m\ddot{z} = -kz - (h_r + h_c) \dot{z} - eE_z \quad (22.40)$$

h_r tiene conto delle perdite per radiazione, h_c per le collisioni. Siamo interessati ad una soluzione stazionaria del tipo:

$$z(t) = z_0 e^{j\omega t} \quad (22.41)$$

Sostituendo nell'equazione differenziale:

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= -\frac{k}{m}z - (h_r + h_c) \frac{\dot{z}}{m} - \frac{e}{m}E_z \\ &= -\omega_0^2 z - \gamma \dot{z} - \frac{e}{m}E_{0z} e^{j\omega t} \end{aligned}$$

avendo definito:

$$\gamma = \frac{h_r + h_c}{m} \quad (22.42)$$

$$-\omega^2 z_0 e^{j\omega t} = -\omega_0^2 z_0 e^{j\omega t} - j\omega\gamma z_0 e^{j\omega t} - \frac{e}{m} E_{0z} e^{j\omega t}$$

$$z_0 = -\frac{e}{m} E_{0z} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega\gamma} = -\frac{e}{m} E_{0z} \frac{(\omega_0 - \omega)^2 - j\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

la cui parte reale è

$$|z_0| = \frac{e}{m} E_{0z} \frac{1}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

la fase invece:

$$\tan \varphi = \frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (22.43)$$

Allora in forma esponenziale:

$$z_0 = |z_0| e^{-j\varphi} \quad (22.44)$$

e

$$z = z_0 e^{j\omega t} = |z_0| e^{-j\varphi} e^{j\omega t} = |z_0| e^{j(\omega t - \varphi)} \quad (22.45)$$

quindi l'oscillazione dell'elettrone non è in fase con l'onda incidente, ma ha una fase pari a φ .

dipoli oscillanti

All'elettrone oscillante e alla carica positiva (il nucleo fermo) è associato un momento di dipolo elettrico:

$$\mathbf{p} = -ez\hat{\mathbf{k}} \quad (22.46)$$

variabile nel tempo:

$$p(t) = -ez_0 e^{j\omega t} = \frac{e^2}{m} E_{0z} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - j\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega_0^2\gamma^2} e^{j\omega t} \quad (22.47)$$

se assumiamo tutti i dipoli uguali, come abbiamo fatto scegliendo come carica quello di un elettrone, la polarizzazione:

$$P = Np = N \frac{e^2}{m} E_{0z} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - j\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega_0^2\gamma^2} e^{j\omega t} \quad (22.48)$$

con N il numero di dipoli per unità di volume. Ma $\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}$ con \mathbf{E} il campo totale nel punto, cioè il campo molecolare. Se consideriamo un gas possiamo

approssimare il campo totale con il campo esterno, cioè quello dell'onda incidente \mathbf{E}_z . Allora:

$$\chi_e = \frac{P}{E_z} = \frac{P}{E_{0z} e^{j\omega t}} = N \frac{e^2}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - j\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega_0^2 \gamma^2} \quad (22.49)$$

troviamo la costante dielettrica relativa tramite $\chi_e = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)$:

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - j\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad (22.50)$$

possiamo facilmente trovare n , infatti trascurando $\mu_r \simeq 1$:

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - j\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \quad (22.51)$$

n allora è un numero complesso.

assorbimento

Consideriamo un'onda piana che si propaga in direzione x in un mezzo con indice di rifrazione complesso $n = n_r - jn_i$. Il vettore d'onda sarà

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{j}} = \frac{2\pi}{v\nu} \hat{\mathbf{j}} = \frac{2n\pi}{c\nu} \hat{\mathbf{j}} = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \hat{\mathbf{j}} = \mathbf{k}_0 n \quad (22.52)$$

con λ_0 la lunghezza d'onda della perturbazione nel vuoto e \mathbf{k}_0 il relativo vettore d'onda. Allora l'onda nel mezzo si scrive come:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = \mathbf{E}_0 e^{j(\omega t - k_0 n x)} = \mathbf{E}_0 e^{j(\omega t - k_0 n_r x)} e^{-n_i k_0 x} \quad (22.53)$$

quindi l'ampiezza diminuisce all'aumentare di x e l'attenuazione è data da $n_i = -\Im(n)$. In realtà ciò che abbiamo detto è vero solo se l'onda incidente è polarizzata lungo l'asse z .

assorbimento anomalo

Se proviamo a risolvere il sistema derivante dalla (22.51) per trovare n_r e n_i troviamo:

$$n_i = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ -1 + \frac{e^2 N (\omega^2 - \omega_0^2)}{\gamma^2 \omega^2 + m \varepsilon_0 (\omega_0 - \omega)^2 (\omega_0 + \omega)^2} \right. \\ \left. \pm \frac{1}{[\gamma^2 \omega^2 + m \varepsilon_0 (\omega_0 - \omega)^2 (\omega_0 + \omega)^2]^2} \right. \\ \left. \left[(\gamma^2 \omega^2 + m \varepsilon_0 (\omega_0 - \omega)^2 (\omega_0 + \omega)^2)^2 (e^4 N^2 (\omega_0^4 - 2\omega_0^2 \omega^2 + \gamma^2 \omega^2 \omega^4) + \right. \right. \\ \left. \left. 2e^2 N (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)(\gamma^2 \omega^2 + m \varepsilon_0 (\omega_0 - \omega)^2 (\omega_0 + \omega)^2 + (\gamma^2 \omega^2 + m \varepsilon_0 (\omega_0 - \omega)^2 (\omega_0 + \omega)^2)^2) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (22.54)$$

questa funzione ha un massimo per $\omega = \omega_0$ molto ripido. Questa zona è una banda di assorbimento. Delle quattro soluzioni solo due sono accettabili, una per l'onda incidente, l'altra per quella riflessa.

Sir Mayer

Se trascuriamo l'assorbimento, cioè $\gamma \rightarrow 0$, dalla (22.51):

$$n = \sqrt{1 + \frac{N e^2}{m \varepsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)}} \quad (22.55)$$

se siamo molto lontano dalla risonza, cioè ω è molto diverso da ω_0 allora il secondo addendo è molto piccolo e possiamo approssimare al primo ordine:

$$n = 1 + \frac{1}{2} \frac{N e^2}{m \varepsilon_0} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)} = 1 + \frac{1}{2} \frac{N e^2}{m \varepsilon_0} \frac{1}{4\pi c^2 \left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right)} \\ = 1 + \frac{N e^2}{2m \varepsilon_0} \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\lambda^2 \lambda_0^2}{\lambda^2 - \lambda_0^2} = 1 + \frac{A \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_0^2} \quad (22.56)$$

che è la legge di Sir Mayer (22.29).

Parte III

Fisica 3

gas, radiazione di corpo nero, calori specifici dei solidi,
calori specifici dei gas

*‘Per me si va ne la città dolente,
per me si va ne l’eterno dolore,
per me si va tra la perduta gente.*

...

*Dinanzi a me non fuor cose create
se non eterne, e io eterno duro.
Lasciate ogni speranza, voi ch’intrate’.*

Inferno, canto III

23

Grandezze

23.1 Mole

Definizione 23.1 (mole) Una mole è definita come la quantità di materia che contiene un numero di elementi uguale al numero di atomi che ci sono in 12 g di ^{12}C . Usando la mole deve essere specificato il tipo di elementi (atomi, molecole, ...).

Segue che una mole di ^{12}C corrisponde a 12 g, ma una mole di C corrisponde a poco più di 12 g perché in un campione naturale di C sono contenuti anche isotopi più pesanti.

Definizione 23.2 (numero di Avogadro) Il numero di Avogadro è il numero di atomi in 12 g di ^{12}C

Quindi una mole di una data sostanza corrisponde a un numero di Avogadro di molecole o atomi di quella sostanza.

23.2 Unità di massa atomica

Nel 1815 Proust propose di introdurre la massa atomica relativa, riferita alla massa dell'idrogeno uguale a 1. Le masse atomiche degli altri elementi risultano essere molto vicine a numeri interi. Un altro metodo era quello di

riferire la massa atomica al sedicesimo delle massa dell'atomo di ossigeno. Oggi ci si riferisce al ^{12}C :

Definizione 23.3 (unità di massa atomica) Una massa atomica (1 u) è pari al dodicesimo della massa del ^{12}C .

Una mole di ^{12}C corrisponde per definizione a 12 g di carbonio 12 e in essa sono contenuti N_A atomi, quindi la massa di un atomo di ^{12}C è $12 \text{ g}/N_A$, quindi il dodicesimo:

$$1 \text{ u} = \frac{\text{g mol}^{-1}}{N_A} = \frac{\text{g mol}^{-1}}{6.022 \dots \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}} \simeq 1.6605402 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

24

Gas

24.1 Legge dei gas

Utilizzando la teoria del gas perfetto (vedi 8.5 a pag.73) si dimostra che il prodotto PV è costante:

$$PV = \frac{2}{3}U \quad (24.1)$$

con U l'energia interna totale di N particelle, legata all'energia cinetica K . Essendo il gas perfetto $K = U$. Confrontando la (24.1) con l'equazione (fenomenologica) dei gas perfetti

$$PV = nRT \quad (24.2)$$

si scopre che:

$$U = \frac{3}{2}nRT \quad (24.3)$$

Siamo allora indotti a formulare il principio di equipartizione dell'energia, cioè ad assegnare ad ogni grado di libertà un'energia pari a $\frac{1}{2}NkT$.

24.1.1 Gas reali

Un gas reale è approssimato da un gas ideale tanto più è bassa la sua densità. In questa condizione le ipotesi sul gas ideale sono approssimativamente vere.

Sviluppo del viriale

$$pV = nRT \left[1 + B_1 \frac{n}{V} + B_2 \left(\frac{n}{V} \right)^2 + \dots \right] = nRT \sum_{j=0}^{\infty} B_j \left(\frac{n}{V} \right)^j \quad (24.4)$$

$B_0 = 1$, B_1 , B_2 , ... sono detti coefficienti del viriale. Essi sono funzione della temperatura e diventano più piccoli al progredire della serie. Se $\frac{n}{V} \rightarrow 0$ come per un gas rarefatto si ritrova la legge del gas perfetto.

Equazione di stato di van der Waals

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2} \right) (V - nb) = nRT \quad (24.5)$$

è uguale all'equazione di stato considerando un volume ridotto e una pressione aumentata. Nel gas perfetto si assume che il volume occupato dalle molecole sia trascurabile, questo non è del tutto vero e quindi il volume che consideriamo nell'equazione dei gas perfetti è sovrastimato, va quindi diminuito. In altre parole il volume libero per il movimento delle molecole è più piccolo. Consideriamo due molecole di diametro d . Possiamo schematizzarle come una molecola puntiforme e una di diametro $2d$ o raggio d . Quindi il volume a disposizione della molecola puntiforme è ridotto di $\frac{4}{3}\pi d^3$. Essendo le molecole due per ogni molecola è sottratto un volume pari a:

$$\frac{4}{3}\pi \frac{d^3}{2} = 4 \left[\frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2} \right)^3 \right] \quad (24.6)$$

cioè 4 volte il volume della molecola. Per una mole, cioè un numero di Avogadro di molecole, il volume sottratto al movimento, cioè il covolume b , è:

$$b = 4N_A \left[\frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2} \right)^3 \right] \quad (24.7)$$

In realtà per alte pressioni le molecole sono molto più vicine e il 4 che compare nell'espressione (24.7) può ridursi notevolmente. Per quanto riguarda la pressione per il gas perfetto si assume che non ci siano forze intermolecolari. Su una molecola mediamente il contributo di queste forze sarà nullo, tranne per quelle che si trovano sul bordo, su di queste agirà una forza netta verso l'interno, la pressione quindi va diminuita rispetto a quella del gas ideale. La forza è proporzionale al numero di molecole presenti nell'emisfero di raggio R i cui ha efficacia la forza attrattiva, a sua volta proporzionale alla densità molecolare e quindi alla densità molare $\frac{n}{V}$. L'effetto sommato per tutte le molecole è anch'esso proporzionale alla densità molecolare e quindi a $\frac{n}{V}$. La riduzione di pressione complessiva è quindi proporzionale a $\left(\frac{n}{V} \right)^2$.

24.2 Distribuzione delle velocità

24.2.1 Distribuzioni delle componenti

Consideriamo un gas ideale chiuso in un recipiente, mantenuto ad una temperatura T . Vogliamo sapere quante molecole hanno una certa velocità compresa tra v_x e $v_x + dv_x$ lungo un asse, per esempio l'asse x . Indichiamo con f_x la funzione densità di probabilità della variabile casuale v_x che ha dominio \mathbb{R} . Ipotesi iniziali:

1. lo spazio è isotropo;
2. la distribuzione delle velocità lungo un asse non è influenzata dalle componenti sugli altri assi;
3. la velocità quadratica media è $v_{qm} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$;

L'ipotesi 1 deriva dal fatto che il moto delle molecole è casuale, la 3 deriva dall'energia di un gas ideale $U = \frac{3}{2}kT = \langle \frac{1}{2}mv^2 \rangle = \frac{1}{2}m \langle v^2 \rangle$. La prima ipotesi significa che:

$$f_x(v_x, v_y, v_z) = f_y(v_x, v_y, v_z) = f_z(v_x, v_y, v_z) \quad (24.8)$$

ma anche che:

$$f_x(-v_x, v_y, v_z) = f_x(v_x, v_y, v_z) \quad (24.9)$$

o più in generale che ogni distribuzione è una funzione pari per ogni argomento. La seconda ipotesi si traduce in:

$$f_x = f_x(v_x) \quad (24.10)$$

e analogamente per le altre.

Essendo le tre distribuzioni delle componenti uguali:

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle \quad (24.11)$$

quindi:

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle \quad (24.12)$$

e allora:

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{m} \quad (24.13)$$

Se f_x è la densità di probabilità allora è normalizzata a 1 Nf_x è normalizzata ad N numero di molecole. Possiamo scrivere:

$$dP(v_x) = f(v_x) dv_x$$

oppure

$$dN(v_x) = N f(v_x) dv_x$$

Allora:

$$N \int_{v_{x_1}}^{v_{x_2}} f(v_x) dv_x \quad (24.14)$$

sarà il numero di molecole con velocità lungo l'asse x compresa tra v_{x_1} e v_{x_2} .

La funzione distribuzione di probabilità di \mathbf{v} utilizzando la probabilità composta sarà:

$$F(\mathbf{v}) = F(v_x, v_y, v_z) = f_x(v_x) f_y(v_y) f_z(v_z) \quad (24.15)$$

facciamo il differenziale del logaritmo della (24.15):

$$\begin{aligned} d \log F &= d(\log f_x(v_x) + \log f_y(v_y) + \log f_z(v_z)) \\ &= \frac{f'_x(v_x)}{f_x(v_x)} dv_x + \frac{f'_y(v_y)}{f_y(v_y)} dv_y + \frac{f'_z(v_z)}{f_z(v_z)} dv_z \end{aligned} \quad (24.16)$$

usando i moltiplicatori di Lagrange con il vincolo su v^2 e quindi¹:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial v_x} = \frac{f'_x(v_x)}{f_x(v_x)} = \lambda \frac{\partial(v^2)}{\partial v_x} = 2\lambda v_x \\ \frac{\partial F}{\partial v_y} = \frac{f'_y(v_y)}{f_y(v_y)} = \lambda \frac{\partial(v^2)}{\partial v_y} = 2\lambda v_y \\ \frac{\partial F}{\partial v_z} = \frac{f'_z(v_z)}{f_z(v_z)} = \lambda \frac{\partial(v^2)}{\partial v_z} = 2\lambda v_z \end{cases} \quad (24.18)$$

preoccupiamoci solo della prima, abbiamo già dimostrato che $f_x = f_y = f_z$:

$$\frac{f'_x(v_x)}{f_x(v_x)} = -2\lambda v_x \quad (24.19)$$

risolvendo l'equazione differenziale e scrivendo λ al posto di 2λ :

$$\log f_x = -\lambda v_x^2 + c \quad (24.20)$$

ovvero:

$$f_x(v_x) = f_{0x} e^{-\lambda v_x^2} \quad (24.21)$$

con f_{0x} e λ costanti da determinare dal vincolo.

¹più precisamente il vincolo è la funzione:

$$G(v_x, v_y, v_z) = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - \frac{3kT}{m} = 0 \quad (24.17)$$

24.2.2 Determinazione costanti

Integrali di Gauss

Calcoliamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-A^2 x^2} dx \quad (24.22)$$

di questo integrale non esiste primitiva analitica, definiamo I_0 l'integrale, calcoliamo:

$$\begin{aligned} I_0^2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-A^2 x^2} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-A^2 y^2} dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-A^2(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-A^2 \rho^2} \rho d\rho d\theta = 2\pi \int_0^\infty e^{-A^2 \rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{A^2} \end{aligned} \quad (24.23)$$

quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-A^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{A} \quad (24.24)$$

Definiamo:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-A^2 x^2} dx \quad (24.25)$$

e in modo analogo I_4, I_6, \dots Notiamo che $I_2 = -\frac{\partial I_0}{\partial A^2}$, infatti:

$$-\frac{\partial}{\partial A^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-A^2 x^2} dx = - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial A^2} e^{-A^2 x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-A^2 x^2} dx = I_2 \quad (24.26)$$

Allora:

$$I_2 = -\frac{\partial}{\partial A^2} I_0 = \frac{\partial}{\partial A^2} \frac{\sqrt{\pi}}{A} = \frac{\sqrt{\pi}}{2A^3} \quad (24.27)$$

si può dimostrare che:

$$I_n = -\frac{\partial I_{n-2}}{\partial A^2} \quad (24.28)$$

con n pari. Per quelli dispari² banalmente:

$$I_1 = \int_0^\infty x e^{-A^2 x^2} dx = \frac{1}{2A^2} \quad (24.29)$$

si nota che:

$$\begin{aligned} I_3 &= -\frac{\partial I_1}{\partial A^2} = -\frac{\partial}{\partial A^2} \int_0^\infty x e^{-A^2 x^2} dx = \int_0^\infty -\frac{\partial}{\partial A^2} (x e^{-A^2 x^2}) dx \\ &= \int_0^\infty x^3 e^{-A^2 x^2} dx \end{aligned} \quad (24.30)$$

²vengono definiti su \mathbb{R}^+ , perché essendo funzioni dispari l'integrale su \mathbb{R} è nullo

quindi:

$$I_3 = -\frac{\partial I_1}{\partial A^2} = \frac{1}{2A^4} \quad (24.31)$$

Determinazione costanti

Imponiamo la normalizzazione e la velocità quadrata media:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x) dv_x = 1 \quad \langle v_x^2 \rangle = \frac{kT}{m} \quad (24.32)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0 e^{-A^2 v_x^2} dv_x = f_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-A^2 v_x^2} dv_x = \frac{\sqrt{\pi}}{A} = 1 \quad (24.33)$$

si ricava:

$$f_0 = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \quad (24.34)$$

siamo arrivati a:

$$f(v_x) = \frac{A}{\sqrt{\pi}} e^{-A^2 v_x^2} \quad (24.35)$$

Imponiamo la velocità quadrata media:

$$\int_{\mathbb{R}} v_x^2 \frac{A}{\sqrt{\pi}} e^{-A^2 v_x^2} dv_x = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2A^3} = \frac{1}{2A^2} = \frac{kT}{m} \quad (24.36)$$

si ricava:

$$A = \sqrt{\frac{m}{2kT}} \quad (24.37)$$

La distribuzione delle componenti risulta allora:

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} \quad (24.38)$$

e analogamente per le altre componenti.

24.2.3 Distribuzione dei moduli

Dati v_x , v_y , v_z siamo in grado di dare la distribuzione di probabilità:

$$f(v_x)f(v_y)f(v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad (24.39)$$

questa non è la distribuzione che stiamo cercando, infatti fissato v ci sono infiniti vettori \mathbf{v} tali che $\|\mathbf{v}\| = v$. Questi vettori stanno su una superficie sferica. Dobbiamo integrare sulla superficie sferica, ma siamo fortunati perché la (24.39) ha simmetria sferica:

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 \quad (24.40)$$

velocità più probabile

$$\frac{df}{dv} = \left(\dots\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \left[2v_p \left(e^{-\frac{mv_p^2}{2kT}} \right) + v_p^2 e^{-\frac{mv_p^2}{2kT}} \left(-\frac{2v_p m}{2kT} \right) \right] = 0 \quad (24.41)$$

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (24.42)$$

che è effettivamente un massimo.

velocità media

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \int_{\mathbb{R}^+} v f(v) dv = \int_{\mathbb{R}^+} 4\pi v^3 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \\ &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{4k^2 T^2}{2m^2}\right) \\ &= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \end{aligned} \quad (24.43)$$

avendo usato la (24.31).

velocità quadratica media

sappiamo già che la velocità quadrata media è $\frac{3kT}{m}$, ma calcoliamolo:

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= \int_{\mathbb{R}^+} v^2 f(v) dv = \int_{\mathbb{R}^+} 4\pi v^4 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} 4\pi v^4 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv = 2\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} v^4 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \quad (24.44) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{3}{4} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{3kT}{m} \end{aligned}$$

in quanto $I_4 = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} A^5$, la velocità quadratica media:

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad (24.45)$$

esaminando i coefficienti ($\frac{8}{\pi} \simeq 2.5$) risulta:

$$v_p < \bar{v} < v_{qm} \quad (24.46)$$

24.2.4 Distribuzione dell'energia

Avendo fissato la massa di una particella la relazione che lega il modulo della velocità all'energia della particella è biunivoca³:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad (24.47)$$

possiamo passare dalla distribuzione dei moduli delle velocità alla distribuzione dell'energia. Partendo dalla distribuzione dei moduli:

$$f(v) = \frac{dP}{dv} = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad (24.48)$$

$$dP = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \quad (24.49)$$

dalla (24.47) possiamo ricavare $v(E)$ e $dv(dE)$:

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad dv = \frac{dE}{mv} = \sqrt{\frac{1}{2Em}} dE \quad (24.50)$$

sostituendo nella (24.49) e semplificando:

$$g(E) = \frac{dP}{dE} = 2\sqrt{E} \sqrt{\frac{1}{\pi k^3 T^3}} e^{-\frac{E}{kT}} \quad (24.51)$$

Energia più probabile

$$\frac{d}{dE}g(E_p) = 0 \quad E_p = \frac{3}{2}kT \quad (24.52)$$

Energia media

$$\langle E \rangle = \int_{\mathbb{R}^+} E g(E) dE = \frac{3}{2}kT \quad (24.53)$$

³non farsi ingannare dal quadrato: la velocità può essere solo positiva $E : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$

Energia quadratica media

$$E_{qm} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^+} E^2 g(E) dE} = \sqrt{\frac{15}{4}} kT \quad (24.54)$$

24.3 Effetto Doppler termico

L'effetto Doppler non trasversale di una sorgente in movimento con velocità v verso l'osservatore fermo è:

$$\nu = \nu_0 \frac{(1 + \beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (24.55)$$

con ν la frequenza apparente e ν_0 la frequenza propria della sorgente, $\beta = \frac{v}{c}$. Se consideriamo $v \ll c$ allora:

$$\nu \sim \nu_0(1 + \beta) \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right) = \nu_0 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \beta + \frac{1}{2}\beta^3\right) \quad (24.56)$$

trascurando gli infinitesimi di ordine superiore:

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad (24.57)$$

Consideriamo ora un forno con una finestra di quarzo molto piccola dal quale esca della radiazione emessa dalle molecole all'interno con distribuzione delle velocità:

$$dN = N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x \quad (24.58)$$

ipotizzando che noi possiamo vedere solo la radiazione emessa da molecole con velocità nella direzione x . Passiamo dalla distribuzione delle velocità alla distribuzione in frequenza usando la relazione (24.57) con $v = v_x$:

$$v_x = \left(\frac{\nu}{\nu_0} - 1\right) c \quad dv_x = c \frac{d\nu}{\nu_0} \quad (24.59)$$

sostituendo nella (24.58):

$$dN = N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m\left(\frac{\nu}{\nu_0} - 1\right)^2 c^2}{2kT}} c \frac{d\nu}{\nu_0} = N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mc^2(\nu - \nu_0)^2}{2kT\nu_0^2}} \frac{c}{\nu_0} d\nu \quad (24.60)$$

essendo l'intensità proporzionale a n analizzando lo spettro di emissione di un gas non si ottengono delle righe infinitamente sottili, ma delle gaussiane:

$$I(\nu) \propto \frac{dN}{d\nu} = N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mc^2(\nu - \nu_0)^2}{2kT\nu_0^2}} \frac{c}{\nu_0} \quad (24.61)$$

24.3.1 Risoluzione

Calcoliamo il massimo della gaussiana (l'altezza):

$$I_{\max}(\nu) \propto N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{c}{\nu_0} \quad (24.62)$$

La larghezza a metà altezza:

$$I = \frac{I_{\max}}{2} \quad N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-mc^2(\nu-\nu_0)^2}{2kT\nu_0^2}} \frac{c}{\nu_0} = \frac{1}{2} N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{c}{\nu_0}$$

$$e^{\frac{-mc^2(\nu-\nu_0)^2}{2kT\nu_0^2}} = \frac{1}{2} \quad \frac{mc^2(\nu-\nu_0)^2}{2kT\nu_0^2} = \log 2$$

quindi:

$$\nu_{1/2} = \nu_0 \pm \sqrt{\frac{2kT\nu_0^2 \log 2}{mc^2}} = \nu_0 \pm \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2kT \log 2}{m}} \quad (24.63)$$

quindi l'ampiezza della campana a metà altezza è:

$$\Delta\nu_{1/2} = 2\frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2kT \log 2}{m}} \quad (24.64)$$

la risoluzione:

$$\frac{\Delta\nu_{1/2}}{\nu_0} = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{2kT \log 2}{m}} \quad (24.65)$$

che va come $\sqrt{\frac{T}{m}}$.

24.4 Libero cammino medio

Sappiamo⁴ che se consideriamo tutte le molecole ferme e solo una in moto, il libero cammino di questa è:

$$L = \frac{1}{n\pi d^2} = \frac{1}{n\sigma} \quad (24.66)$$

con n il numero di molecole per volume, d il diametro molecolare, $\sigma = \pi d^2$ la sezione d'urto. Se le altre molecole si muovono dobbiamo considerare la velocità relativa. Rifacendo tutto il ragionamento: la molecola spazza in un tempo infinitesimo dt un cilindro di lunghezza vdt e quindi volume $\pi d^2 vdt$. Il numero di urti sarà uguale al numero di particelle all'interno del cilindro. Se consideriamo la velocità relativa è più corretto:

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma} \quad (24.67)$$

⁴vedi 8.5.2 a pag.76

24.5 Moto Browniano

24.5.1 Cammino casuale

Consideriamo il moto di una particella in un gas. Questa subirà un certo numero di urti e tra uno e l'altro percorrerà mediamente un certo spostamento, il libero cammino medio l . Per descrivere questo spostamento definiamo \mathbf{L} un vettore casuale avente aspettazione di modulo l libero cammino medio e direzione casuale uniforme. La domanda è: “Dopo un certo numero di urti dove sarà la particella?”. Sappiamo che:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad x = y = z \quad \langle \|\mathbf{L}\| \rangle = \left\langle \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right\rangle = \sqrt{3} \langle |x| \rangle = l$$

quindi:

$$\langle |x| \rangle = \langle |y| \rangle = \langle |z| \rangle = \frac{l}{\sqrt{3}} \quad (24.68)$$

e naturalmente:

$$\langle x \rangle = \langle y \rangle = \langle z \rangle = 0 \quad (24.69)$$

In coordinate polari:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L \\ \theta_L \\ \varphi_L \end{pmatrix} \quad \langle L \rangle = l \quad \langle \theta_L \rangle = \pi \quad \langle \varphi_L \rangle = \frac{\pi}{2} \quad (24.70)$$

Se la particella parte dall'origine, al primo scontro mediamente la sua posizione sarà $\langle \mathbf{l}_1 \rangle = \langle \mathbf{L} + \mathbf{0} \rangle$. Naturalmente $\langle l_1^2 \rangle = \langle L^2 \rangle$. Al secondo urto la sua posizione sarà:

$$\begin{aligned} \langle l_2^2 \rangle &= \langle (\mathbf{l}_1 + \mathbf{L})^2 \rangle = \langle \|\mathbf{l}_1\|^2 + \|\mathbf{L}\|^2 + 2\|\mathbf{L}\|\|\mathbf{l}_1\|\cos\theta \rangle \\ &= \langle l_1^2 \rangle + \langle L^2 \rangle + 2\langle Ll_1 \cos\theta \rangle = 2\langle L^2 \rangle = 2l^2 \end{aligned} \quad (24.71)$$

con θ l'angolo compreso tra i due vettori. Senza fare i conti è ovvio che θ è una variabile casuale uniforme che varia tra $[0, 2\pi)$. Quindi $\langle \theta \rangle = \frac{\pi}{2}$ e allora:

$$\langle Ll_1 \cos\theta \rangle = 0$$

In generale sarà:

$$\langle l_N^2 \rangle = Nl^2 \quad (24.72)$$

con N il numero di urti. Definiamo lo spostamento quadratico medio l_{qm}^* :

$$l_{qm}^* = \sqrt{\langle l_N^2 \rangle} = \sqrt{N}l \quad (24.73)$$

Ma la velocità scalare media sarà:

$$\langle v \rangle = \left\langle \frac{NL}{t} \right\rangle = \frac{Nl}{t} \quad (24.74)$$

con t il tempo totale dal primo all'ultimo urto. Sostituendo N :

$$l_{qm}^* = \left(\frac{\langle v \rangle t}{l} \right)^{\frac{1}{2}} l = \sqrt{\langle v \rangle lt} \quad (24.75)$$

24.5.2 Numero di Avogadro

Supponendo che tra un urto e l'altro si muova di moto rettilineo uniforme. L'energia cinetica media $\langle E \rangle$ della particella è:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m \left\langle \frac{r^2}{t^2} \right\rangle = \frac{1}{2} m \frac{\langle r^2 \rangle}{t^2} \quad (24.76)$$

Il teorema dell'impulso dice:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \Delta \mathbf{Q} = m (\mathbf{v}(t_2) - \mathbf{v}(t_1))$$

vogliamo calcolare la forza media dall'istante iniziale $t_1 = 0$, in cui la particella è nell'origine ferma ($\mathbf{v}(0) = 0$), ad un istante generico t :

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1=0}^{t_2=t} \mathbf{F} dt = \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{F} dt = \frac{m (\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(0))}{t} = m \frac{\mathbf{v}(t)}{t} \quad (24.77)$$

che assomiglia⁵ ad $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Sostituiamo la massa dalla (24.77) nella (24.76):

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} \frac{\langle F \rangle}{\langle v \rangle} t \frac{\langle r^2 \rangle}{t^2} = \frac{1}{2} \frac{\langle F \rangle}{\langle v \rangle} \frac{\langle r^2 \rangle}{t} \quad (24.78)$$

Dalla teoria cinetica possiamo dire che essendo i gradi di libertà 2 (moto piano di una particella):

$$\langle E \rangle = kT = \frac{R}{N_A} T \quad (24.79)$$

⁵era facile:

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \langle m\mathbf{a} \rangle = m \langle \mathbf{a} \rangle = \frac{m}{t} \int_0^t \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt = m \frac{\mathbf{v}(t)}{t}$$

assumendo come istante iniziale lo zero e come velocità iniziale zero

Imponendo che la forza sia:

$$\langle F \rangle = 6\pi a \langle v \rangle \quad (24.80)$$

con a il raggio della particella. Sostituendo tutto nella (24.76) ricaviamo:

$$N_A = \frac{RTt}{3\pi a \langle r^2 \rangle} \quad (24.81)$$

Quello che bisogna fare è osservare con un microscopio r , lo spostamento dalla posizione iniziale, al variare del tempo t , misurare la temperatura T e il raggio a . R lo si conosce già dall'esperienze macroscopiche sui gas.

24.6 Esperimento di Perrin

Perrin nel 1908 trovò sperimentalmente N_A dalla sedimentazione di particelle in soluzione a temperatura omogenea. Calcoliamo come varia il numero di particelle per unità di volume del soluto. Conoscendo la legge dell'atmosfera (7.3)⁶:

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} y} \quad (24.82)$$

possiamo passare a quantità microscopiche:

$$p = nKT \quad p_0 = n_0KT \quad \rho_0 = n_0m$$

con $n = \frac{N}{V}$ numero di particelle nell'unità di volume e m massa di una particella di soluto. Allora:

$$n = n_0 e^{-\frac{mgy}{KT}} = n_0 e^{-\frac{N_A mgy}{RT}} \quad (24.83)$$

Notiamo come al numeratore dell'esponenziale ci sia l'energia totale. In questo modo possiamo trovare N_A conoscendo R dalla teoria dei gas. Se ora al posto delle molecole di soluto sostituiamo delle particelle di densità ρ_p il loro peso sarà diminuito della spinta di Archimede:

$$S_A = g\rho V = gm \frac{\rho}{\rho_p}$$

$$n = n_0 e^{-\frac{N_A mg(\rho_p - \rho)h}{\rho_p RT}} \quad (24.84)$$

⁶vedi 7.1.2 a pag.58

24.7 Viscosità

Immaginiamo un gas compreso tra due lastre di area A , quella superiore mantenuta alla velocità $\mathbf{u} = u\hat{\mathbf{i}}$ e quella inferiore ferma. Servirà una forza $\mathbf{F} = -F\hat{\mathbf{i}}$ per mantenere la lastra superiore a velocità costante. Possiamo studiare la viscosità di un gas schematizzandolo come formato da diversi strati paralleli che si muovono a velocità nette diverse. Lo strato superiore si muoverà con la lastra superiore a velocità u e quello inferiore a velocità dello strato inferiore, cioè zero. La forza risulta⁷:

$$F = \eta A \frac{du}{dz} \quad (24.85)$$

in direzione opposta al movimento. Se consideriamo i nostri strati paralleli allora l'incremento di velocità è costante e la derivata diventa il rapporto.

Le molecole di ogni strato sono caratterizzate dal moto caotico dovuto alla temperatura a cui si sovrappone il moto di trascinamento. Questo significa che le molecole possono passare da uno strato all'altro. Alcune molecole dello strato più veloce andranno a finire nello strato più lento, portando un contributo addizionale alla quantità di moto nella direzione del flusso aumentando così la velocità. Allo stesso modo alcune molecole dello strato più lento raggiungeranno lo strato più veloce e tenderanno a farlo rallentare. In generale si osserva un'attenuazione delle differenze nella velocità di flusso. Consideriamo due strati adiacenti di area A la cui distanza sia pari al libero cammino medio. Questo significa che in media una molecola che lascia uno strato arriverà nello strato adiacente senza subire urti e solo qui urterà delle altre molecole trasferendo quantità di moto. La velocità dello strato più in alto sia u_1 quella di quello più in basso u_2 nella direzione x . Quindi la velocità di ogni molecola sarà la velocità di agitazione termica più questa velocità che contribuirà solo nella componente nella direzione del movimento netto; la componente verticale delle velocità medie delle molecole risulta uguale, quindi il numero di molecole che passa dallo strato inferiore a quello superiore è uguale al numero di molecole che fa il percorso opposto. Quindi ci sarà un trasferimento netto di quantità di moto dallo strato più veloce a quello più lento, cioè dall'alto verso il basso. La variazione di quantità di moto sarà uguale alla forza di viscosità:

$$\frac{dm \langle v \rangle}{dt} = \eta A \frac{du}{dz} \quad (24.86)$$

$$\eta = \frac{1}{2} N m \langle v \rangle L = \frac{m \langle v \rangle}{2\sqrt{2}\pi d^2} \quad (24.87)$$

⁷vedi 7.3 a pag.67

con d il diametro della particella, m la massa di una molecola.

24.8 Conducibilità termica

$$\frac{\Delta Q}{A \Delta t} = K \frac{dT}{dz} \quad (24.88)$$

$$K = \frac{1}{3} \frac{n \langle v \rangle l c_v}{n_A} \quad (24.89)$$

24.9 Velocità del suono nei gas

Il suono è un'onda longitudinale di spostamento. Consideriamo un tubo di sezione costante A riempito con un gas omogeneo alla pressione p_0 . Se A è piccolo possiamo parlare di onde monodimensionali che si propagano nella direzione del tubo. Consideriamo un volumetto V_0 di lunghezza dx e sezione A nella posizione tale che il suo estremo sinistro sia nella posizione x . Esso è investito dall'onda $\Delta p(x, t)$, quindi su di esso agisce a sinistra la pressione $p_0 + \Delta p(x, t)$ e a destra la pressione $p_0 + \Delta p(x + dt, t)$. La pressione totale netta:

$$\Delta p(x + dx, t) - \Delta p(x, t) = \frac{\partial(\Delta p)}{\partial x} dx \quad (24.90)$$

La forza:

$$F = A \frac{\partial(\Delta p)}{\partial x} dx = ma = -\rho(x, t) V \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\rho(x, t) A dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (24.91)$$

$$\frac{\partial(\Delta p)}{\partial x} = -\rho(x, t) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (24.92)$$

Per far diventare questa equazione l'equazione di un'onda dobbiamo esprimere $\frac{\partial(\Delta p)}{\partial x}$ in funzione di $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$. In questo modo $\xi(x, t)$ sarà lo spostamento dal punto di equilibrio delle particelle del gas. Introduciamo il modulo di compressibilità, specifico per ogni gas:

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} \quad (24.93)$$

il segno negativo è introdotto in modo che B sia una quantità positiva, infatti se aumento la pressione il volume si riduce, cioè $\Delta V < 0$.

$$B = -\frac{\Delta p}{dV/V} = -\frac{V}{dV} \Delta p = -\frac{A dx}{A d\xi} \Delta p = -\frac{dx}{d\xi} \Delta p \quad (24.94)$$

invertendo:

$$\Delta p = -B \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (24.95)$$

inserendo:

$$\frac{\partial(-B \frac{\partial \xi}{\partial x})}{\partial x} = -B \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\rho(x, t) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (24.96)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{B} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (24.97)$$

che è l'equazione dell'onda cercata, da qui si deduce che la velocità del suono è:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (24.98)$$

l'espressione può essere scritta in funzione di quantità termodinamiche, in particolare possiamo lavorare su B : assumendo che il suono si propaghi molto più velocemente del calore possiamo approssimare il comportamento del gas come quello di una trasformazione adiabatica:

$$PV^\gamma = \text{const} \quad (24.99)$$

differenziando:

$$dPV^\gamma + P\gamma V^{\gamma-1}dV = 0 \quad (24.100)$$

$$dP = -\gamma PV^{-1}dV \quad (24.101)$$

Sostituendo in B

$$B = -\frac{dP}{dV/V} = -\frac{dPV}{dV} = \gamma P \quad (24.102)$$

e la velocità del suono:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma NKT}{V\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma NKT}{m}} = \sqrt{\frac{\gamma KT}{\mathcal{M}}} \quad (24.103)$$

con \mathcal{M} massa di una molecola e m massa del gas.

25

Elettrone

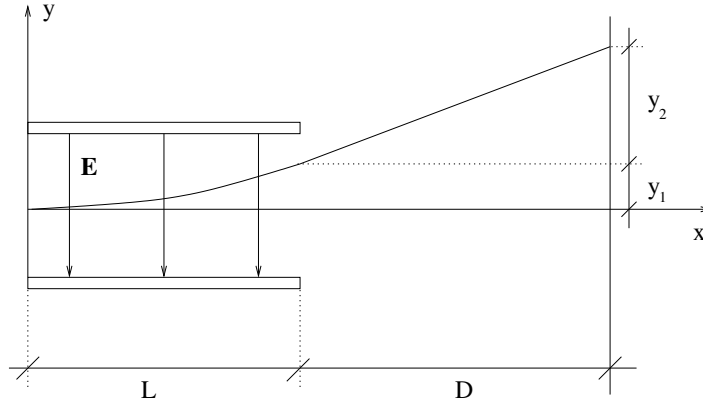
25.1 Scariche nei gas

Lo studio delle scariche nei gas e in particolare dei raggi catodici ha portato all'ipotesi che l'elettricità non fosse altro che il trasporto di particelle cariche. Per produrre una scarica in un gas tra un catodo (negativo) e un anodo (positivo) alla pressione atmosferica serve un'altissima differenza di potenziale, come quella che si verifica durante un fulmine. Usando invece basse pressioni le scariche diventano molto più facili da produrre; abbassando troppo la pressione si arriva ad un punto di inversione. Diminuendo la pressione o cambiando il gas il carattere delle scariche cambia, per esempio con l'aria le scintille abbassando la pressione diventano un bagliore viola riempiente tutto il tubo, col neon rosso. Abbassando ulteriormente la pressione il bagliore diminuisce, mentre il vetro contenente il gas inizia a illuminarsi. Si può provare che i raggi sono provenienti dal catodo (raggi catodici): infatti ponendo un oggetto di forma particolare (per esempio una croce) tra l'anodo e il catodo si osserva un'ombra dalla parte dell'anodo. Provando ad usare campi elettrici o magnetici si può verificare che effettivamente questi raggi sono carichi negativamente.

25.2 Esperimento di Thomson

Thomson usò un tubo di vetro per lo studio dei raggi catodici, accelerati tra un catodo e un anodo. L'anodo aveva un piccolo foro, in modo tale che i raggi potessero proseguire, incontrare un altro anodo con una fenditura più piccola e arrivare tra due lastre piane di un condensatore, all'interno del quale poteva essere applicato un campo magnetico perpendicolare, e finire sulla fine del tubo, dove venivano rilevati come un puntino fluorescente.

Se applichiamo un campo elettrico uniforme tra le armature i raggi catodici descrivono un'orbita parabolica all'interno del condensatore per poi continuare la traiettoria in modo rettilineo fino alla fine del tubo. Tutte le grandezze geometriche dello strumento sono note. Il grosso problema di questo esperimento sono gli effetti al bordo del condensatore, che fanno sì che la traiettoria all'esterno delle armature è solo asintoticamente rettilinea. Applicando solo il campo elettrico:



$$\mathbf{r} = \frac{qE}{2m}t^2 + \mathbf{v}_0 t \quad (25.1)$$

essendo

$$\mathbf{E} = -E\hat{\mathbf{j}} \quad \mathbf{v}_0 = v_0\hat{\mathbf{i}}$$

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = -\frac{qE}{2m}t^2 \end{cases} \quad (25.2)$$

eliminando il tempo:

$$y_1 = y(L) = -\frac{qE}{2m} \frac{x^2}{v_0^2} \Big|_{x=L} = -\frac{qE}{2m} \frac{L^2}{v_0^2} \quad (25.3)$$

le velocità invece:

$$\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = -\frac{qE}{m}t \end{cases} \quad (25.4)$$

eliminando il tempo:

$$v_y(L) = -\frac{qE}{m} \frac{x}{v_0} \Big|_{x=L} = -\frac{qE}{m} \frac{L}{v_0} \quad (25.5)$$

Dopo il condensatore si muove di moto rettilineo uniforme:

$$\begin{cases} x = L + v_x t = L + v_0 t \\ y = y_2 + v_y t = y_2 - \frac{qE}{m} \frac{L}{v_0} t \end{cases} \quad (25.6)$$

eliminando il tempo:

$$y = y_2 - \frac{qE}{m} \frac{L}{v_0} \left(\frac{x-L}{v_0} \right) \Big|_{L+D} = -\frac{qE}{2m} \frac{L^2}{v_0^2} - \frac{qE}{m} \frac{DL}{v_0^2} = -\frac{qEL}{mv_0^2} \left(\frac{L}{2} + D \right) \quad (25.7)$$

In questo modo si potrebbe conoscere $\frac{q}{m}$ per inversione. Il problema è che non si conosce v_0 . Questa grandezza potrebbe essere calcolata sapendo la differenza di potenziale tra il catodo e l'anodo e la loro distanza. Infatti la forza d'accelerazione impressa è pari al potenziale per la distanza per la carica. Thomson invece usò il metodo del separatore di velocità (vedi esempio 16.2 a pag. 202): si usa un campo magnetico $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}}$ ortogonale al campo elettrico e si regola l'intensità fino a quando il campo magnetico annulla l'effetto del campo elettrico e i raggi non vengono deviati. In queste condizioni:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}^* + q\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}^* = q(E^* + v_0 B^*)\hat{\mathbf{i}} = 0 \quad (25.8)$$

cioè:

$$v_0 = \frac{E^*}{B^*} \quad (25.9)$$

L'esperimento è diviso in due parti, nella prima si determina la velocità \mathbf{v}_0 delle particelle dei raggi catodici usando un campo elettrico \mathbf{E}^* e uno magnetico \mathbf{B}^* . Nella seconda parte si applica solo un campo elettrico \mathbf{E} e si misura lo spostamento verticale y . Sostituendo la (25.9) nella (25.7) si ottiene:

$$\frac{q}{m} = -\frac{y}{EL(L+2D)} \left(\frac{E^*}{B^*} \right)^2 \quad (25.10)$$

spesso si usa $E = E^*$, quindi:

$$\frac{q}{m} = -\frac{y}{L(L+2D)} \frac{E}{(B^*)^2} \quad (25.11)$$

che corrisponde a circa -1.758 Ckg^{-1} .

25.3 Esperimento di Millikan

L'esperimenti do Millikan dimostra che la carica è quantizzata e ne trova il valore minimo. Si consideri la caduta di una goccia d'olio supposta sferica nell'aria. Le forze agenti sono la gravità, la spinta di Archimede e la forza di Stokes:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} - \rho_{\text{aria}}V\mathbf{g} - \beta\mathbf{v} \quad (25.12)$$

con m la massa della goccia, ρ_{aria} la densità dell'aria, β il coefficiente della forza di Stokes. Prendiamo come positivo l'asse verticale verso il basso. Per una sfera:

$$\beta = 6\pi\eta r \quad (25.13)$$

con η il coefficiente di viscosità dell'aria e r il raggio della goccia, η è conosciuto. Innanzitutto vogliamo conoscere β e quindi il raggio r . La velocità di regime v_a si raggiunge quando la somma delle forze è nulla:

$$v_a = \frac{m - V\rho_{\text{aria}}}{\beta}g \quad (25.14)$$

questa può essere misurata, infatti dopo qualche costante di tempo $\tau = \frac{m}{\beta}$ si può considerare che la velocità raggiunta sia quella di regime¹. Sostituendo nella (25.12) l'espressioni della massa in funzione del volume e l'espressione di β e usando la velocità di regime:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{olio}}g - \rho_{\text{aria}}\frac{4}{3}\pi r^3g - 6\pi\eta r v_a = 0 \quad (25.15)$$

possiamo trovare r :

$$r = 3\sqrt{\frac{\eta v_a}{2g(\rho_{\text{olio}} - \rho_{\text{aria}})}} \quad (25.16)$$

tornando a β

$$\beta = 6\pi\eta r = 18\pi\sqrt{\frac{\eta^3 v_a}{2g(\rho_{\text{olio}} - \rho_{\text{aria}})}} \quad (25.17)$$

Il procedimento un po' contorto è la prima parte dell'esperimento che ci consente di trovare β a partire da grandezze direttamente misurabili.

¹risolvendo l'equazione differenziale (25.12) in funzione della velocità si trova:

$$v(t) = \frac{m - V\rho_{\text{aria}}}{\beta}g \left(1 - e^{-\frac{\beta t}{m}}\right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} v_a$$

e allora:

$$\frac{v(5\tau) - v_a}{v_a} = -e^{-5} \simeq -0,67\%$$

La goccia d'olio continuando a cadere entra in un condensatore a faccie piane e parallele all'interno del quale è presente un campo elettrico uniforme verticale. La goccia si carica elettricamente per sfregamento con l'aria, con l'ugello, o con una sorgente radioattiva posta nelle sue vicinanze. Assumendo che la goccia sia carica negativamente (potrebbe essere anche carica positivamente) e che il campo elettrico sia tale da imprimere una forza verso il basso si ha:

$$F = mg - \beta v - \rho_{\text{aria}} V g + qE \quad (25.18)$$

si arriverà ad una velocità di regime $v_e \neq v_a$:

$$\beta v_e = mg - \rho_{\text{aria}} V g + qE \quad (25.19)$$

il termine $mg - \rho_{\text{aria}} V g$ lo possiamo ricavare dalla (25.14)²:

$$\beta v_e = v_a \beta + qE \quad (25.20)$$

essendo E noto, possiamo ricavare la carica della goccia d'olio:

$$q = \frac{\beta}{E}(v_e - v_a) = -\frac{18}{\pi} \sqrt{\frac{\eta^3 v_a}{2g(\rho_{\text{olio}} - \rho_{\text{aria}})}} (v_a - v_e) \quad (25.21)$$

Naturalmente il tutto può essere fatto usando il campo elettrico al contrario o usando gocce di altro materiale, come mercurio³. Osservando le gocce con un microscopio quello che si trova è che la carica delle gocce d'olio è quantizzata e il valore tra le cariche è costante e si suppone essere quello della carica dell'elettrone. Il valore di Millikan era leggermente sbagliato perché usava una sottostima di η per l'aria.

25.4 Isotopi

Dopo la scoperta dell'elettrone ci si chiedeva se poteva esistere un flusso di cariche positive che generasse una corrente. La ricerca di queste particelle fu condotta usando un apparato simile a quello per lo studio dei raggi catodici. Goldstein osservò che se nel catodo di un tubo con gas rarefatto aveva una sottile fenditura apparivano raggi luminosi nel gas dalla parte opposta dell'anodo. Questi raggi furono chiamati "raggi positivi".

Thomson misurò il rapporto $\frac{q}{m}$. La scarica avveniva in un grande bulbo mantenuto a bassa pressione tra un anodo e un catodo. Il catodo aveva

²più lineare, ma più lungo sarebbe stato sostituire il valore di β in funzione di v_a e m in funzione del raggio r e quest'ultimo in funzione di v_a

³il problema principale è l'evaporazione

una fenditura, in modo tale che alcuni raggi potevano attraversarlo. Al di là del catodo si trovavano i poli di un elettromagnete che generavano un campo magnetico \mathbf{B} , allo stesso tempo era generato un campo elettrico \mathbf{E} antiparallelo a \mathbf{B} . Dopo questa regione di lunghezza L si trova uno spazio di lunghezza D in cui i raggi proseguono in linea retta, prima di arrivare su uno schermo rivelatore.

I raggi arrivano nella regione dei campi con una velocità $\mathbf{v}_0 = v_{0x}\hat{\mathbf{i}}$, in quanto la fenditura fa sì che solo la componente x sopravviva. Il campo elettrico sia orientato verso il basso: $\mathbf{E} = -E\hat{\mathbf{j}}$ e il campo magnetico verso l'alto: $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{j}}$. Le forze che agiscono sui raggi supposti come flusso di particelle cariche sono:

$$\mathbf{F}_E = q\mathbf{E} = -qE\hat{\mathbf{j}} \quad (25.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_B &= q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = qB\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{j}} \\ &= qB \left((v_y 0 - v_z 1)\hat{\mathbf{i}} + (v_z 0 - v_x 0)\hat{\mathbf{j}} + (v_x 1 - v_y 0)\hat{\mathbf{k}} \right) \\ &= qB \left(-v_z\hat{\mathbf{i}} + v_x\hat{\mathbf{k}} \right) \end{aligned} \quad (25.23)$$

Notiamo che la forza elettrica modifica solo la v_y che non influenza la \mathbf{F}_B , quindi potremmo usare semplicemente i procedimenti fatti precedentemente. Impostando il problema di Cauchy usando il formalismo newtoniano $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -qB\dot{z} \\ m\ddot{y} = -qE \\ m\ddot{z} = qB\dot{x} \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_{0x} \\ \dot{y}(0) = 0 \\ \dot{z}(0) = 0 \end{cases} \quad (25.24)$$

La seconda equazione è disaccoppiata dalle altre ed è facilmente integrabile:

$$y(t) = -\frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 \quad (25.25)$$

Per disaccoppiare le rimanenti possiamo derivarle ulteriormente:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -qB\ddot{z} \\ m\ddot{z} = qB\ddot{x} \end{cases} \quad (25.26)$$

Partiamo dalla seconda, sostituendo \ddot{x} :

$$\ddot{z} = \left(\frac{qB}{m} \right) \ddot{x} = - \left(\frac{qB}{m} \right)^2 \dot{z} \quad (25.27)$$

che è autonoma, facile da risolvere:

$$\lambda^3 + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 \lambda = 0 \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_{2/3} = \pm \frac{qB}{m}i$$

Allora la soluzione generale è:

$$z(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} = C_1 + C_2 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + C_3 \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \quad (25.28)$$

Troviamo la soluzione generale anche per $x(t)$:

$$\ddot{x} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 x = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 z \quad (25.29)$$

che è esattamente la (25.27), quindi la soluzione deve essere del tipo (25.28):

$$x(t) = C_4 + C_5 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + C_6 \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \quad (25.30)$$

Iniziamo ad imporre le condizioni iniziali $z(0) = 0$:

$$0 = z(0) = C_1 + C_2 \quad C_2 = -C_1 \quad (25.31)$$

e anche per x : $C_5 = -C_4$. Per le velocità $\dot{z}(0) = 0$:

$$0 = \dot{z}(0) = C_3 \frac{qB}{m} \Rightarrow C_3 = 0 \quad (25.32)$$

mentre per x :

$$v_{0x} = \dot{x}(0) = C_6 \frac{qB}{m} \Rightarrow C_6 = v_{0x} \frac{m}{qB} \quad (25.33)$$

Non siamo riusciti a determinare tutte le costanti perché abbiamo solo due condizioni iniziali, mentre stiamo resolvendo un'equazione del terzo ordine, le informazioni aggiuntive saranno ricavate dal modo in cui le equazioni differenziali per x e per z sono accoppiate; riassumiamo quello che abbiamo trovato:

$$z(t) = C_1 - C_1 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) \quad (25.34)$$

$$x(t) = C_4 - C_4 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + v_{0x} \frac{m}{qB} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \quad (25.35)$$

Usiamo le condizioni di accoppiamento:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{qB}{m}\dot{z} \\ \ddot{z} = \frac{qB}{m}\dot{x} \end{cases} \quad (25.36)$$

facendo le derivate:

$$\begin{cases} C_4 \frac{qB}{m} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - v_{0x} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) = -C_1 \frac{qB}{m} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \\ C_1 \frac{qB}{m} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) = C_4 \frac{qB}{m} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + v_{0x} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) \end{cases} \quad (25.37)$$

Riscriviamo in questo modo:

$$\begin{cases} qBC_4 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + (qBC_1 - v_{0x}m) \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) = 0 \\ (C_1qB + v_{0x}m) \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - C_4qB \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) = 0 \end{cases} \quad (25.38)$$

Dividendo:

$$\frac{qBC_4}{C_1qB + v_{0x}m} = \frac{qBC_1 - v_{0x}m}{C_4qB} \quad (25.39)$$

ovvero:

$$(C_1qB + v_{0x}m)^2 = -(qBC_4)^2 \quad (25.40)$$

che è vera se :

$$qBC_4 = 0 \quad (25.41)$$

cioè $C_4 = 0$. Oppure se

$$C_1qB + v_{0x}m = 0 \quad (25.42)$$

cioè $C_1 = \frac{v_{0x}m}{qB}$ Eguagliando e raccogliendo le equazioni del sistema (25.38):

$$(qBC_4 - C_1qB + v_{0x}m) \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + (qBC_1 - v_{0x}m + C_4qB) \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) = 0 \quad (25.43)$$

e sostituendo $C_4 = 0$ si ottiene $C_1 = \frac{v_{0x}m}{qB}$. Allo stesso modo sostituendo $C_1 = \frac{v_{0x}m}{qB}$ si ottiene $C_4 = 0$. Dopo tutti questi conti le equazioni del moto e le velocità delle particelle all'interno del campo magnetico ed elettrico sono:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{m}{qB}v_{0x} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \\ y(t) = -\frac{1}{2} \frac{qE}{m}t^2 \\ z(t) = \frac{m}{qB}v_x - \frac{m}{qB}v_x \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) \end{cases} \quad \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) \\ v_y(t) = \frac{qE}{m}t \\ v_z(t) = v_{0x} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \end{cases} \quad (25.44)$$

26

Radiazione di corpo nero

26.1 Radiazione termica

Un corpo emette della radiazione visibile se è caldo abbastanza. Possiamo scomporre questa radiazione con un prisma ed analizzarne le componenti, per esempio potremmo mettere in relazione l'emittanza monocromatica $R(\lambda) = \frac{dW}{d\lambda}$, cioè la potenza irradiata per unità di superficie per la lunghezza d'onda compresa tra λ e $\lambda+d\lambda$, con λ . Si osserva che ogni corpo ha la sua curva $R(\lambda)$. Facendo l'involuppo di tutte le funzioni $R(\lambda)$ variando il tipo di materiale e usando la stessa temperatura si ottiene una curva, quella della radiazione di corpo nero.

Ogni corpo emettere dell'energia per irraggiamento, cioè radiazione, questo fa sì che si crei un equilibrio termico tra vari corpi anche senza un contatto. Infatti se il corpo A è più caldo del corpo B , ci sarà un flusso netto di radiazione da A a B fino a quando B assorbendo la radiazione di A convertendola in energia interna non avrà la stessa temperatura di A che contemporaneamente si è raffreddato per perdita di energia interna sotto forma di radiazione verso B . Aumentando la temperatura di un corpo aumenta la potenza da esso irradiata.

Consideriamo un intervallo di lunghezze d'onda infinitesimo dello spettro di emissione di vari corpi opachi in equilibrio termico tra loro e l'ambiente. Poiché i corpi sono opachi non possono trasmettere la radiazione, parte di essa sarà assorbita e parte riflessa. Sia E l'energia che arriva su un corpo.

La parte di energia riflessa sarà aE , quella riflessa rE . a è il coefficiente di assorbimento, r di riflessione. Naturalmente essendo tutta la radiazione o riflessa o assorbita:

$$E = aE + rE = (a + r)E \quad \Rightarrow \quad (a + r) = 1 \quad (26.1)$$

per tutti i corpi $a_1 + r_1 = 1 \dots a_n + r_n = 1$. Poiché i corpi sono in equilibrio termico tra di loro e con l'ambiente (li possiamo considerare nel vuoto) l'energia irradiata dal primo corpo in un certo Δt deve essere uguale all'energia assorbita:

$$W_1 \Delta A_1 \Delta t = a_1 I \Delta A_1 \Delta t \quad (26.2)$$

con W_1 l'emittanza, ΔA_1 l'area della superficie e I l'intensità ricevuta dagli altri corpi. Questo vale per tutti i corpi:

$$W_2 \Delta A_2 \Delta t = a_2 I \Delta A_2 \Delta t \quad (26.3)$$

Dividendo membro a membro la (26.2) e la (26.3):

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{a_1}{a_2} \quad (26.4)$$

o meglio:

$$\frac{W_1}{a_1} = \frac{W_2}{a_2} \quad (26.5)$$

cioè il rapporto $\frac{W}{a}$ è costante per qualsiasi corpo (dipenderà dalla lunghezza d'onda e dalla temperatura). Quindi se un corpo ha un W alto, cioè è un buon emettitore allora avrà un alto valore di a cioè sarà un buon assorbente.

26.2 Corpo nero

Un corpo nero è un perfetto emettitore, o equivalentemente un perfetto assorbente. Per un corpo nero $a = 1$. Il modo pratico per costruire un corpo nero è quello di usare una cavità con un piccolo foro. Ritornando all'equazione (26.5):

Legge 26.1 (Kirchhoff) *Ad una data temperatura*

$$\frac{W_1}{a_1} = \frac{W_2}{a_2} = \frac{W_b}{1} = W_b \quad (26.6)$$

con W_b l'emittanza del corpo nero.

Quindi il rapporto tra l'emittanza e il coefficiente di assorbimento è pari all'emittanza del corpo nero.

26.2.1 Cavità

Dimostriamo che una cavità con un piccolo foro si comporta come un corpo nero, ciò vorrà dire che è solo la geometria che importa. Consideriamo due pareti, una di fronte all'altra, contenute in un contenitore che le isola dall'esterno. Su una delle due pareti sia praticato un foro molto piccolo rispetto all'area della parete. Consideriamo un'intervallo di tempo Δt . La parete A emette una certa energia per unità di area pari a $W_A \Delta t$ (anche in assenza della seconda parete), questa arriva sulla seconda parete, ed è riflessa parzialmente, esattamente $r_B W_A \Delta t = (1 - a_B) W_A \Delta t$, quest'energia arriva sulla parete indietro che riflette $(1 - a_A)(1 - a_B) W_A \Delta t$, eccetera. Lo stesso discorso si può fare per l'energia che parte dalla parete B . Riassumiamo:

$$\begin{array}{lcl}
 \rightarrow & W_A \Delta t & \leftarrow W_B \Delta t \\
 \leftarrow & (1 - a_B) W_A \Delta t & \rightarrow (1 - a_A) W_B \Delta t \\
 \rightarrow & (1 - a_A)(1 - a_B) W_A \Delta t & \leftarrow (1 - a_A)(1 - a_B) W_B \Delta t \\
 \leftarrow & (1 - a_A)(1 - a_B)^2 W_A \Delta t & \rightarrow (1 - a_A)^2(1 - a_B) W_B \Delta t \\
 \rightarrow & (1 - a_A)^2(1 - a_B)^2 W_A \Delta t & \leftarrow (1 - a_A)^2(1 - a_B)^2 W_B \Delta t \\
 \leftarrow & (1 - a_A)^2(1 - a_B)^3 W_A \Delta t & \rightarrow (1 - a_A)^3(1 - a_B)^2 W_B \Delta t \\
 \dots & \dots & \dots \dots
 \end{array} \quad (26.7)$$

Supponiamo che il nostro piccolo foro sia praticato nella parete di destra, quindi l'energia per area W_r che uscirà sarà la somma di tutte le riflessioni verso destra \rightarrow :

$$\begin{aligned}
 W_r \Delta t = & W_A \Delta t + (1 - a_A)(1 - a_B) W_A \Delta t + (1 - a_A)^2(1 - a_B)^2 W_A \Delta t + \dots + \\
 & + (1 - a_A) W_B \Delta t + (1 - a_A)^2(1 - a_B) W_B \Delta t + (1 - a_A)^3(1 - a_B)^2 W_B \Delta t + \dots
 \end{aligned} \quad (26.8)$$

che è la somma di due serie geometriche:

$$\begin{aligned}
 W_r &= W_A \sum_{n=0}^{\infty} [(1 - a_A)(1 - a_B)]^n + W_B(1 - a_A) \sum_{n=0}^{\infty} [(1 - a_A)(1 - a_B)]^n \\
 &= (W_A + W_B(1 - a_A)) \sum_{n=0}^{\infty} [(1 - a_A)(1 - a_B)]^n \\
 &= (W_A + W_B(1 - a_A)) \frac{1}{1 - (1 - a_A)(1 - a_B)} \\
 &= (a_A W_b + a_B W_b(1 - a_A)) \frac{1}{a_A + a_B - a_A a_B} \\
 &= W_b \frac{a_A + a_B + a_A a_B}{a_A + a_B + a_A a_B} = W_b
 \end{aligned} \quad (26.9)$$

avendo ricordato che

$$W_A = a_A W_b \quad W_B = a_B W_b \quad (26.10)$$

con W_b la radiazione del corpo nero e una nota relazione algebrica¹. Abbiamo allora dimostrato che la radianza che esce dalla fenditura nella cavità è proprio quella del corpo nero.

26.3 Legge Stefan–Boltzmann

La potenza per unità di area emessa dal corpo nero è data dall'integrale della curva $R(\lambda)$ su \mathbb{R}^+ . Stefan trovò empiricamente:

Legge 26.2 (Stefan–Boltzmann)

$$W_b = \sigma T^4 \quad (26.12)$$

con σ costante di Stefan–Boltzmann. La legge empirica di Stefan era stata derivata teoricamente da Boltzmann. Per un corpo generico possiamo dire:

$$W = aW_b = a\sigma T^4 \quad (26.13)$$

26.4 Legge di Wien

Cambiando temperatura la funzione $R(\lambda)$ cambia e in particolare cambia il massimo. Si nota che rimane costante:

Legge 26.3 (legge di Wien)

$$\lambda_{max} T = \text{const} \quad (26.14)$$

1

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} x^k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x} ((1-x) + (1-x)x + (1-x)x^2 + (1-x)x^3 + \dots + (1-x)x^n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & x \neq 1 \\ n+1 & x = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & |x| < 1 \\ +\infty & x \geq 1 \\ \nexists & x \leq -1 \end{cases} \end{aligned} \quad (26.11)$$

Nel nostro caso $x = (1 - a_A)(1 - a_B)$ $0 < x < 1$

26.5 Wien

Wien notò la somiglianza della curva $R(\lambda)$ che descrive la potenza per unità di area per una lunghezza d'onda compresa tra $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ con la distribuzione di Maxwell per le velocità. Usando questo tipo di funzione e cercando i coefficienti che interpolassero i dati ottenne:

$$R(\lambda) = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}}} \quad (26.15)$$

c_1 e c_2 sono chiamati prima e seconda costante di radiazione.

26.6 Rayleigh–Jeans

Un modo rigoroso è quello intrapreso da Lord Rayleigh. Egli suppone che nella cavità le onde stazionarie abbiano l'energia kT somma dell'energia cinetica su un grado di libertà e di quella potenziale. Ogni onda stazionaria ha un certo numero di modi di oscillare, ognuno dei quali ha energia kT .

26.6.1 Modi di oscillare

Un'onda monodimensionale stazionaria è tale che:

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad (26.16)$$

con n naturale. Consideriamo $\lambda \ll L$. Differenziando:

$$dn = -\frac{2}{\lambda^2} L d\lambda \quad (26.17)$$

Esempio 26.1 (numero di modi di oscillare) Se una corda è lunga $L = 1$ m e l'intervallo di lunghezze d'onda è $(\lambda, \lambda + \Delta\lambda) = (1 \text{ cm}, 1.1 \text{ cm})$ allora ci sono:

$$\Delta n = \frac{2L}{\lambda^2} \Delta\lambda = \frac{2 \cdot 1 \text{ m}}{(0.01 \text{ m})^2} 0.001 \text{ m} = 20$$

modi di oscillare.

Se avessimo fatto un conto esatto allora:

$$\Delta n = n_2 - n_1 = 2L \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \simeq 18.1$$

quindi contanto anche gli estremi ci sono 19 modi di oscillare.

Passiamo al problema tridimensionale. Ipotizziamo che la cavità sia cubica di lato L . L'onda stazionaria che si propaga sarà del tipo:

$$E_x = E_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \sin \omega t \quad (26.18)$$

e così per le altre componenti. La condizione al contorno che deve rispettare è che le componenti parallele a ogni superficie devono essere nulle sulla superficie (la stessa cosa avveniva per il caso monodimensionale). Per esempio consideriamo la parete $y = L$, qui deve valere:

$$\begin{cases} E_x(x, L, z) = E_0 \cos(k_x x) \sin(k_y L) \sin(k_z z) \sin \omega t = 0 \\ E_z(x, L, z) = E_0 \cos(k_z z) \sin(k_y L) \sin(k_x x) \sin \omega t = 0 \end{cases} \quad k_y L = n_y \pi \quad (26.19)$$

e così via con $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}$.

$$\omega = \|\mathbf{k}\| c = \frac{\pi c}{L} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{\frac{1}{2}} \quad (26.20)$$

fissato ω il vettore \mathbf{n} ha modulo:

$$\|\mathbf{n}\| = \frac{\omega L}{\pi c} \quad (26.21)$$

Vogliamo sapere quanti modi di oscillare con pulsazione minore di ω . Per ogni scelta di \mathbf{n} ci sono 2 modi di oscillare dati dalla polarizzazione. Quindi il numero di modi di oscillare è:

$$2 \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\omega L}{\pi c} \right)^3 = \frac{\omega^3 V}{3\pi^2 c^3} = \frac{8\pi V}{3\lambda^3} \quad (26.22)$$

Il 2 deriva dal fatto che per ogni scelta di \mathbf{n} ci sono 2 polarizzazioni, mentre l'ottavo deriva dal fatto che le componenti di \mathbf{n} possono essere solo positive. Differenziando come prima possiamo sapere quanti modi di oscillare ci sono per lunghezze d'onda comprese tra $(\lambda, \lambda + d\lambda)$:

$$dN = \frac{8\pi V}{\lambda^4} d\lambda \quad (26.23)$$

26.6.2 Legge di Rayleigh–Jeans

Dall'equazione (26.23) divisa per V otteniamo la densità di modi. Associando ad ogni modo l'energia kT si ottiene:

$$R(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} \quad (26.24)$$

Che è la potenza monocromatica per unità di area secondo Rayleigh–Jean. Questa funzione per $\lambda \rightarrow 0$ tende a $+\infty$, che è ovviamente impossibile, la cosiddetta catastrofe ultravioletta. Dalla legge di Rayleigh–Jeans si deduce che la fisica classica non è capace di descrivere lo spettro del corpo nero.

26.7 Planck

Planck postula che l'energia degli oscillatori sia discreta, multipla intera di ϵ . Il numero di oscillatori aventi l'energia $m\epsilon$ con $m \in \mathbb{N}$ è:

$$n_m = n_0 e^{-\frac{m\epsilon}{kT}} \quad (26.25)$$

e la loro energia totale:

$$E_{m\epsilon} = n_m(m\epsilon) = m\epsilon n_0 e^{-\frac{m\epsilon}{kT}} \quad (26.26)$$

il numero totale di particelle:

$$N = \sum_{m=0}^{\infty} n_m = \sum_{m=0}^{\infty} n_0 e^{-\frac{m\epsilon}{kT}} = n_0 \sum_{m=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{\epsilon}{kT}}\right)^m = n_0 \frac{1}{1 - e^{-\frac{\epsilon}{kT}}} \quad (26.27)$$

essendo una serie geometrica di ragione $0 < e^{-\frac{\epsilon}{kT}} < 1$. L'energia media sarà² allora:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{E_{m\epsilon}}{N} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m\epsilon n_0 e^{-\frac{m\epsilon}{kT}}}{n_0 \frac{1}{1 - e^{-\frac{\epsilon}{kT}}}} = \epsilon \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \left(e^{-\frac{\epsilon}{kT}}\right)^m}{\frac{1}{1 - e^{-\frac{\epsilon}{kT}}}} \\ &= \epsilon e^{-\frac{\epsilon}{kT}} \frac{\sum_{m=1}^{\infty} m \left(e^{-\frac{\epsilon}{kT}}\right)^{m-1}}{\left(1 - e^{-\frac{\epsilon}{kT}}\right)^{-1}} = \epsilon e^{-\frac{\epsilon}{kT}} \frac{\left(1 - e^{-\frac{\epsilon}{kT}}\right)^{-2}}{\left(1 - e^{-\frac{\epsilon}{kT}}\right)^{-1}} = \epsilon e^{-\frac{\epsilon}{kT}} \frac{1}{1 - e^{-\frac{\epsilon}{kT}}} = \frac{\epsilon}{e^{\frac{\epsilon}{kT}} - 1} \end{aligned} \quad (26.28)$$

La densità di modi di oscillare è data dalla (26.23) divisa per il volume, quindi la potenza per unità di area totale, associando ad ogni modi di oscillare la (26.28), è:

$$R(\lambda) = \frac{8\pi}{\lambda^4} \frac{\epsilon}{e^{\frac{\epsilon}{kT}} - 1} \quad (26.29)$$

per tornare al caso classico dobbiamo ammettere che l'energia non sia quantizzata, cioè $\epsilon \rightarrow 0$

$$\langle E_{\text{classico}} \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle E \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{e^{\frac{\epsilon}{kT}} - 1} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\frac{\epsilon}{kT}} = kT \quad (26.30)$$

²ricordiamo lo sviluppo in serie di $(1 - x)^{-2}$:

$$(1 - x)^{-2} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)x^m = \sum_{m=1}^{\infty} mx^{m-1}$$

l'energia ϵ non è costante ma varia con la frequenza:

$$\epsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad (26.31)$$

con h costante di Planck. La distribuzione della radianza diventa:

$$R(\lambda) = \frac{8\pi}{\lambda^5} \frac{hc}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad (26.32)$$

questa distribuzione si adegua bene ai dati sperimentali, evitando la catastrofe ultravioletta ad alte frequenze, infatti ad alte frequenze ϵ è molto grande e la probabilità che un modo di oscillare con quella frequenza esista è molto bassa.

Il fatto che l'energia è quantizzata significa anche che l'emissione di energia da parte del corpo nero è quantizzata, cioè sotto forma di quanti o fotoni, ognuno dei quali trasporta energia $h\nu$.

27

Calore specifico dei solidi

Consideriamo trasformazioni a volume costante, queste trasformazioni hanno il vantaggio di compiere lavoro nullo, infatti $\delta L = -pdV$; per il primo principio della termodinamica:

$$dU = \delta Q + \delta L \quad (27.1)$$

con U l'energia interna di un sistema che diventa

$$dU = \delta Q \quad (27.2)$$

il calore in relazione al calore specifico molare, in questo caso a volume costante è:

$$\delta Q = nc_V dT \quad (27.3)$$

ma per la (27.2):

$$c_v = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} \quad (27.4)$$

spesso lavoreremo considerando un solo atomo o una sola mole.

27.1 Doulong–Petit

Se la temperatura di un gas è una misura diretta dell'energia cinetica traslazionale delle sue molecole la temperatura di un solido è la misura dell'energia cinetica degli atomi che vibrano attorno alle loro posizione di equilibrio nel

reticolo. Se un solido e un gas sono in equilibrio termico significa che hanno la stessa temperatura e quindi la stessa energia cinetica media $\frac{3}{2}kT$ per atomo. Se immaginiamo ogni atomo come un oscillatore armonico, l'energia potenziale sarà:

$$V = \frac{1}{2}\beta x^2 \quad (27.5)$$

dato che l'equazione del moto armonico, considerando come condizioni iniziali $x = 0$ e velocità massima:

$$x(t) = A \sin \left(\sqrt{\frac{\beta}{m}} t \right) \quad (27.6)$$

$$\dot{x}(t) = A \sqrt{\frac{\beta}{m}} \cos^2 \left(\sqrt{\frac{\beta}{m}} t \right) \quad (27.7)$$

possiamo ricavare come variano E_C e U :

$$E_C(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}A^2\beta \cos^2 \left(\sqrt{\frac{\beta}{m}} t \right) \quad (27.8)$$

$$U(t) = \frac{1}{2}\beta x^2 = \frac{1}{2}A^2\beta \sin^2 \left(\sqrt{\frac{\beta}{m}} t \right) \quad (27.9)$$

calcoliamo i valori medi:

$$\langle E_C \rangle = \frac{1}{\pi \sqrt{\frac{m}{\beta}}} \int_0^{\pi \sqrt{\frac{m}{\beta}}} E_C(t) dt = \frac{A^2\beta}{4} \quad (27.10)$$

$$\langle U \rangle = \frac{1}{\pi \sqrt{\frac{m}{\beta}}} \int_0^{\pi \sqrt{\frac{m}{\beta}}} U(t) dt = \frac{A^2\beta}{4} \quad (27.11)$$

il calcolo non era necessario in quanto $U(t)$ e $E_C(t)$ sono due funzioni uguali, ma sfasate, quindi in un periodo l'area sottesa sottesa deve essere uguale. Concludiamo che l'energia cinetica media per atomo e l'energia potenziale cinetica per atomo sono uguali. Sommando l'energia cinetica ($\frac{3}{2}kT$) e quella potenziale l'energia media per atomo diventa:

$$E_{\text{atomo}} = 3kT \quad (27.12)$$

e per una mole:

$$E = 3kN_A T = 3RT \quad (27.13)$$

Allora possiamo calcolare il calore specifico a volume costante:

$$c_v = \frac{dE}{dT} = 3R \simeq 24.94 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad (27.14)$$

che è la legge di Doulon–Petit. Nella semplice derivazione non abbiamo tenuto conto dei possibili cambiamenti della struttura cristallina e dell'energia associata agli elettroni liberi (nei metalli). I dati sperimentali mostrano che la legge di Doulon–Petit funziona solo per temperature molto alte e vale per tutti i materiali solidi. Il teorema di equipartizione dell'energia fallisce.

27.2 Einstein

Nel 1906 Einstein derivò il calore specifico dei solidi assumendo ipotesi simili a quelle di Planck per la radiazione di corpo nero. Assumiamo che il nostro solido contenga N atomi, e possa essere rappresentato come $3N$ oscillatori. Il modello di Einstein si caratterizza per associare ad ogni oscillatore la stessa frequenza ν uguale per tutti. In accordo con Planck l'energia di un oscillatore può essere¹:

$$\epsilon_n = nh\nu \quad n \in \mathbb{N} \quad (27.15)$$

L'energia media risulta allora:

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon e^{-\frac{\epsilon}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\epsilon}{kT}}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nh\nu}{kT}}} \quad (27.16)$$

per valutare questa serie possiamo usare lo stesso procedimento che abbiamo usato per Planck, nell'equazione (26.28). Infatti il denominatore è una serie geometrica di ragione $e^{-\frac{h\nu}{kT}}$; il numeratore invece dopo gli opportuni raccogliamenti è lo sviluppo in serie di $\frac{1}{(1-e^{-\frac{h\nu}{kT}})^2}$:

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (27.17)$$

che contempla il risultato classico, per alte temperature:

$$\langle \epsilon_{\text{classico}} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \epsilon \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{h\nu}{\frac{h\nu}{kT}} = kT \quad (27.18)$$

¹in realtà sarebbe più corretto

$$\epsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu$$

L'energia di tutto il solido:

$$E = 3N \langle \epsilon \rangle = 3N \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (27.19)$$

e il calore specifico:

$$\begin{aligned} c_V &= \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial T} E = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial T} 3N \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{3N}{n} \frac{(h\nu)^2}{kT^2} \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^2} \\ &= 3R \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^2} \end{aligned} \quad (27.20)$$

Tanto quanto l'energia media $\langle \epsilon \rangle$ tende a quella classica per $T \rightarrow \infty$ anche il calore specifico di Einstein tende al calore specifico di Doulong-Petit:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c_V = \lim_{T \rightarrow \infty} 3R \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^2} = 3R \quad (27.21)$$

Introduciamo la temperatura di Einstein Θ_E :

$$\Theta_E = \frac{h\nu}{k} \quad (27.22)$$

che ha proprio le dimensioni di una temperatura. Il calore specifico (27.20) si può scrivere:

$$c_v = 3R \left(\frac{\Theta_E}{T}\right)^2 \frac{e^{\frac{\Theta_E}{T}}}{\left(e^{\frac{\Theta_E}{T}} - 1\right)^2} \quad (27.23)$$

questa espressione va a zero come $e^{-\frac{\Theta_E}{T}}$. Sperimentalmente si nota invece che i calori specifici vanno a zero come T^3 . In pratica il calore specifico diminuisce troppo rapidamente a basse temperature.

27.3 Debye

27.3.1 Modi di vibrare in un cristallo

Ripartiamo da quello che avevamo detto per la cavità. La condizione al contorno che l'onda stazionaria tridimensionale deve soddisfare è la (26.21):

$$\|\mathbf{n}\| = \frac{\omega L}{\pi c_S} = \frac{2\pi\nu L}{\pi c_S} = \frac{2\nu L}{c_S} \quad (27.24)$$

dove c è stato sostituito con c_S essendo ora non più onde elettromagnetiche, ma onde meccaniche. I modi di vibrare compresi tra n e $n + dn$ sono:

$$dN = \frac{1}{8} 4\pi n^2 dn = 2\pi \frac{\nu^2 L^2}{c_S^2} d\nu \quad (27.25)$$

che è il volume di una crosta sferica di spessore infinitesimo di raggio n . Si considera un ottante perché le componenti di n sono positive. Vogliamo il numero di modi di vibrare in funzione della frequenza, troviamo dn differenziando la (27.24):

$$dn = \frac{2L}{c_S} d\nu \quad (27.26)$$

e sostituiamola nella (27.25):

$$dN = 4\pi \frac{\nu^2 L^3}{c_S^3} d\nu = \frac{4\pi V}{c_S^3} \nu^2 d\nu \quad (27.27)$$

con $L^3 = V$. In realtà l'equazione va corretta perché nel nostro mezzo si propagano sia onde longitudinali con velocità c_L e onde trasversali con velocità c_T con due polarizzazioni diverse:

$$dN = 4\pi V \left(\frac{2}{c_T^3} + \frac{1}{c_L^3} \right) \nu^2 d\nu \quad (27.28)$$

27.3.2 Approssimazione di Debye

La lunghezza d'onda è grande rispetto alle distanze tra gli atomi, quindi l'onda vede il cristallo come un continuo. Se gli atomi sono N il numero massimo di modi di vibrare sono $3N$ che corrisponde ad una frequenza ν_D . Il numero di modi di oscillare con frequenza compresa tra 0 e ν_D è:

$$\int_0^{\nu_D} dN = \int_0^{\nu_D} 4\pi V \left(\frac{2}{c_T^3} + \frac{1}{c_L^3} \right) \nu^2 d\nu = \frac{4}{3} \pi V \left(\frac{2}{c_T^3} + \frac{1}{c_L^3} \right) \nu_D^3 = 3N \quad (27.29)$$

allora invertendo:

$$\nu_D = \sqrt[3]{\frac{9N}{4\pi V} \left(\frac{2}{c_T^3} + \frac{1}{c_L^3} \right)^{-1}} \quad (27.30)$$

facendo un conto approssimativo² si arriva ad una lunghezza d'onda dell'ordine della distanza tra gli atomi. Questo è in netto contrasto con l'ipotesi iniziale soprattutto per le alte frequenze. Possiamo inserire l'equazione (27.30) nella (27.28):

$$\left(\frac{2}{c_T^3} + \frac{1}{c_L^3}\right) = \frac{9N}{4\pi V} \frac{1}{\nu_D^3} \Rightarrow dN = \frac{9N}{\nu_D^3} \nu^2 d\nu \quad (27.31)$$

Associando ad ogni modo di vibrare l'energia di un oscillatore secondo Planck si ottiene l'energia totale:

$$E = \int_0^{\nu_D} dN \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \int_0^{\nu_D} \frac{9N}{\nu_D^3} \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu = \frac{9Nh}{\nu_D^3} \int_0^{\nu_D} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu \quad (27.32)$$

Definiamo una temperatura di Debye Θ_D :

$$\Theta_D = \frac{h\nu_D}{k} \quad (27.33)$$

e calcoliamo il calore specifico:

$$\begin{aligned} c_V &= \frac{1}{n} \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{N_A}{N} \frac{9Nh}{\nu_D^3} \int_0^{\nu_D} \frac{\partial}{\partial T} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu = \frac{N_A}{N} \frac{9Nh}{\nu_D^3} \int_0^{\nu_D} \frac{\partial}{\partial T} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu \\ &= \frac{9N_A h^2}{\nu_D^3 k T^2} \int_0^{\nu_D} \frac{\nu^4 e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right)^2} d\nu \end{aligned} \quad (27.34)$$

questo integrale non ha primitiva analitica, possiamo semplificarlo introducendo:

$$x = \frac{h\nu}{kT} \quad \nu = x \frac{kT}{h} \quad d\nu = \frac{kT}{h} dx \quad (27.35)$$

mentre gli estremi di integrazione:

$$x_1 = \frac{h\nu}{kT} \Big|_{\nu=0} = 0 \quad x_2 = \frac{h\nu}{kT} \Big|_{\nu=\nu_D} = \frac{h\nu_D}{kT} \quad (27.36)$$

2

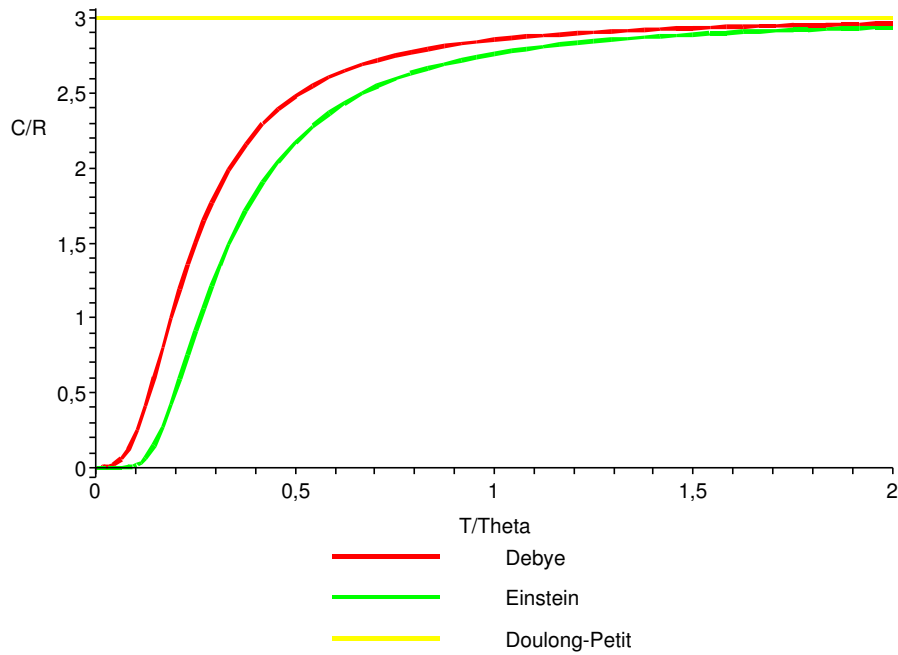
$$\frac{N}{V} = 10^{28} \text{ m}^{-3} \quad c_S = c_{\text{suono}} = 10^3 \text{ m/s}$$

$$\nu_D = \sqrt[3]{\frac{9N}{4\pi V} \left(\frac{1}{c_S^3}\right)^{-1}} \simeq 2 \times 10^{12} \text{ Hz} \quad \lambda_D = c_S \nu_D \simeq 5 \times 10^{-10} \text{ m} = 5 \text{ \AA}$$

sostituendo:

$$\begin{aligned}
 c_V &= \frac{9N_A h^2}{\nu_D^3 k T^2} \int_0^{\frac{h\nu_D}{kT}} \frac{\left(x \frac{kT}{h}\right)^4 e^{\frac{hx \frac{kT}{h}}{kT}}}{\left(e^{\frac{hx \frac{kT}{h}}{kT}} - 1\right)^2} \frac{kT}{h} dx \\
 &= \frac{9N_A h^2}{\nu_D^3 k T^2} \left(\frac{kT}{h}\right)^5 \int_0^{\frac{h\nu_D}{kT}} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx = 9N_A k \left(\frac{kT}{h\nu_D}\right)^3 \int_0^{\frac{\Theta_D}{T}} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx \\
 &= 9R \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3 \int_0^{\frac{\Theta_D}{T}} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx
 \end{aligned} \tag{27.37}$$

per basse temperature tende a zero come T^3 , mentre all'infinito vale $3R$.



28

Meccanica statistica

28.1 Boltzmann

Consideriamo un sistema in equilibrio ad una certa temperatura T . Qual è la probabilità di trovare il sistema in equilibrio, isolato dall'ambiente, con energia E ? Sperimentalmente posso misurare ad intervalli di tempo ravvicinati l'energia interna. Oppure posso prendere diversi sistemi, che comunicano solo con scambi di calore e valutare le loro energie interne. È la stessa cosa.

Consideriamo due sistemi 1 e 2 a contatto identici in equilibrio termico. La distribuzione di probabilità del primo corpo è uguale a quella del secondo: $P_1 = P_2$, perché la probabilità di trovare il primo sistema ad energia E è la stessa di trovare il secondo corpo ad energia E . Questa probabilità sarà proporzionale alla temperatura. La probabilità che i due corpi abbiano energia E_1 e E_2 rispettivamente è $P(E_1)P(E_2)$. Consideriamo i due sistemi come un unico sistema. Definiamo P' la densità di probabilità di trovare il sistema globale all'energia $E' = E_1 + E_2$ e il sistema 1 all'energia E_1 e il sistema 2 all'energia E_2 :

$$P'(E' = E_1 + E_2) = P(E_1)P(E_2) \quad (28.1)$$

Ma P e P' sono uguali a meno di un coefficiente in quanto il sistema globale è alla stessa temperatura dei due corpi ed è in equilibrio. Appare chiaro che la funzione cercata è un esponenziale.

Scegliamo $E_1 = 0$ e $E_2 = E$ allora:

$$P'(E) = P(0)P(E) = P(E_1)P(E_2)$$

usando $E = E_1 + E_2$:

$$P'(E_1 + E_2) = P(E_1)P(E_2) = P(0)P(E_1 + E_2)$$

vale per ogni E_1, E_2 :

$$P(E_1 + E_2)P(0) = P(E)P(E_2)$$

se $E_1 = E$ e $E_2 = dE$:

$$P(E + dE) = \frac{1}{P(0)}P(E)P(dE)$$

$$\frac{P(E + dE) - P(E)}{dE} = \frac{\left(\frac{1}{P(0)}P(E)P(dE)\right) - P(E)}{dE} = \frac{P(E)}{P(0)} \frac{P(dE) - P(0)}{dE}$$

$$\frac{dP(E)}{dE} = \frac{P(E)}{P(0)} \frac{dP(E=0)}{dE}$$

$$\frac{\frac{dP(E)}{dE}}{P(E)} = \frac{1}{P(0)} \frac{dP(E=0)}{dE} = -\beta$$

con β indipendente da E

$$\int_{P(0)}^{P(E)} \frac{dP}{P(E)} = \int_0^E -\beta dE$$

$$P(E) = P(0)e^{-\beta E} \quad (28.2)$$

28.2 Distribuzione Maxwell-Boltzmann

Consideriamo un sistema con vari livelli energetici E_1, E_2, \dots cioè con energia quantizzata. Consideriamo N particelle identiche ma inizialmente distinguibili. Una partizione è una configurazione del sistema, cioè ogni partizione avrà un certo numero di particelle n_1 nel livello E_1 , n_2 nel livello E_2 ... in modo che $\sum n_i = N$. Consideriamo che i livelli energetici siano egualmente accessibili, cioè che tutti gli stati energetici hanno la stessa probabilità di essere occupati. Prendiamo una particolare partizione, quindi fissiamo

n_1, n_2, \dots . Vogliamo sapere qual è la probabilità della partizione. Riempiamo il primo livello. Posso scegliere tra N particelle. Ne scelgo una. Per la scelta della successiva ho $N - 1$ particelle e così via. Quindi ho:

$$N(N-1)(N-2)\cdots(N-n_1+1) = \frac{N!}{(N-n_1)!} \quad (28.3)$$

possibilità¹. In realtà ci sono $n_1!$ ordini possibili per riempire il livello, ma l'ordine nel nostro caso non conta, quindi dobbiamo dividere per $n_1!$ per far diminuire il numero di scelte:

$$\frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} \quad (28.4)$$

conoscendo il calcolo combinatorio quello che si sta cercando è il numero di combinazioni di N oggetti in n_1 posti che sono $\binom{N}{n_1}$, che è esattamente la (28.4). Quando passo a riempire il secondo livello con energia E_2 partiamo con un numero di particelle ridotto, cioè $N - n_1$. Il numero di combinazioni per riempire E_2 è:

$$\frac{(N-n_1)!}{n_2!(N-n_1-n_2)!} \quad (28.5)$$

Se moltiplichiamo il numero di modi per riempire il primo livello con il numero di modi per riempire il secondo livello troviamo il numero di modi per riempire il primo e il secondo livello:

$$\frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} \frac{(N-n_1)!}{n_2!(N-n_1-n_2)!} = \frac{N!}{n_1!n_2!(N-n_1-n_2)!} \quad (28.6)$$

se continuassimo così per tutti i livelli il numero di modi per riempire tutta la partizione sarebbe:

$$P = \frac{N!}{n_1!n_2!n_3!\cdots} \quad (28.7)$$

probabilità intrinseca

Se ora non consideriamo più i livelli energetici equiprobabili, ma gli assegniamo una probabilità intrinseca g_i la probabilità sarà diversa dalla (28.7). Se la probabilità di trovare una particella nel livello E_i è g_i la probabilità di trovare n_i particelle è $g_i^{n_i}$. Quindi la probabilità di una data partizione è:

$$P = \frac{N!g_1^{n_1}g_2^{n_2}g_3^{n_3}\cdots}{n_1!n_2!n_3!\cdots} \quad (28.8)$$

1

$N! = N(N-1)(N-2)\cdots(N-n_1+1)\cdot(N-n_1)!$

indistinguibilità

Rimoviamo l'ipotesi che le particelle siano distinguibili (in contrasto con l'ipotesi che le particelle siano identiche). Ci sono $N!$ permutazioni di particelle che danno la stessa partizione². Allora la probabilità:

$$P = \frac{g_1^{n_1} g_2^{n_2} g_3^{n_3} \cdots}{n_1! n_2! n_3! \cdots} = \prod_{i=1}^N \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \quad (28.9)$$

La (28.9) esprime la probabilità di una distribuzione Maxwell-Boltzmann.

28.2.1 Equilibrio

Troviamo lo stato di equilibrio che corrisponde alla partizione più probabile. Dobbiamo gli n_i che massimizzano P . Si tratta di un problema di massimi vincolati. I vincoli sono:

$$\sum_i n_i = N \quad (28.10)$$

$$U = \sum_i n_i E_i \quad (28.11)$$

con U l'energia totale. Esprimiamo il logaritmo di P e massimizziamo questa funzione (il logaritmo è monotono crescente):

$$\log P = n_1 \log g_1 + n_2 \log g_2 + n_3 \log g_3 + \cdots - \log n_1! - \log n_2! - \log n_3! \cdots \quad (28.12)$$

usando Stirling:

$$\log x! \sim x \log x - x \quad (28.13)$$

considerando che gli n_i sono grandi.

$$\begin{aligned} \log P &= n_1 \log g_1 + n_2 \log g_2 + n_3 \log g_3 + \cdots \\ &\quad - (n_1 \log n_1 - n_1) - (n_2 \log n_2 - n_2) - (n_3 \log n_3 - n_3) - \cdots \\ &= -n_1 \log \frac{n_1}{g_1} - n_2 \log \frac{n_2}{g_2} - \cdots + (n_1 + n_2 + \cdots) \\ &= N - \sum_i n_i \log \frac{n_i}{g_i} \end{aligned} \quad (28.14)$$

²Per esempio posso spostare la particella 1 con la particella 2, o con la tre, ..., o con la N -esima. Quindi ho $N - 1$ possibilità. Poi posso scambiare la seconda particella in $N - 2$ modi, così via. Il procedimento non necessariamente doveva iniziare scambiando la particella 1, ma poteva iniziare con N modi diversi.

differenziando:

$$\begin{aligned}
 d(\log P) &= - \sum_i (dn_i) \log \frac{n_i}{g_i} - \sum_i n_i d \left(\log \frac{n_i}{g_i} \right) \\
 &= - \sum_i (dn_i) \log \frac{n_i}{g_i} - \sum_i n_i \frac{(dn_i)}{n_i} \\
 &= - \sum_i (dn_i) \log \frac{n_i}{g_i} - \sum_i dn_i
 \end{aligned} \tag{28.15}$$

ma dal primo vincolo:

$$N = \sum_i n_i \quad 0 = \sum_i dn_i \tag{28.16}$$

sostituendo e ponendo uguale a zero:

$$d(\log P) = \sum_i \log \frac{n_i}{g_i} dn_i = 0 \tag{28.17}$$

dal secondo vincolo:

$$U = \sum_i n_i E_i \quad 0 = \sum_i dn_i E_i \tag{28.18}$$

Usando due moltiplicatore di Lagrange α e β per minimizzare la funzione implicita:

$$\sum_i \left(\log \frac{n_i}{g_i} \alpha + \beta E_i \right) dn_i = 0 \tag{28.19}$$

quindi:

$$\log \frac{n_i}{g_i} + \alpha + \beta E_i = 0$$

invertendo:

$$n_i = g_i e^{-\alpha - \beta E_i} \tag{28.20}$$

funzione partizione

Il numero totale di particelle:

$$N = \sum_i n_i = \sum_i g_i e^{-\alpha - \beta E_i} = e^{-\alpha} \left(\sum_i g_i e^{-\beta E_i} \right) = e^{-\alpha} Z \tag{28.21}$$

con Z la funzione di partizione:

$$Z = \sum_i g_i e^{-\beta E_i} \tag{28.22}$$

quindi:

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\beta E_i} \quad (28.23)$$

che è la legge delle distribuzione di Maxwell-Boltzmann.

energia media

L'energia media di un sistema in equilibrio sarà data:

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_i n_i E_i}{N} = \frac{\sum_i \frac{N}{Z} g_i e^{-\beta E_i} E_i}{N} = \frac{1}{Z} \sum_i g_i E_i e^{-\beta E_i} \quad (28.24)$$

o sostituendo Z :

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_i g_i E_i e^{-\beta E_i}}{\sum_i g_i e^{-\beta E_i}} \quad (28.25)$$

possiamo anche esprimerla come:

$$\langle E \rangle = -\frac{d}{d\beta} (\log Z) \quad (28.26)$$

energia totale

L'energia totale:

$$U = N \langle E \rangle = \frac{N}{Z} \sum_i g_i E_i e^{-\beta E_i} \quad (28.27)$$

o sostituendo Z :

$$U = N \frac{\sum_i g_i E_i e^{-\beta E_i}}{\sum_i g_i e^{-\beta E_i}} \quad (28.28)$$

o anche come:

$$U = -N \frac{d}{d\beta} (\log Z) \quad (28.29)$$

Esempio 28.1 (sistema a due stati equiprobabili) consideriamo un sistema con due stati con energia $E_1 = \epsilon$ e $E_2 = -\epsilon$, equiprobabili, cioè tali che $g_1 = g_2 = 1$. La funzione di partizione:

$$Z = \sum_i g_i e^{-\beta E_i} = e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_2} = e^{-\beta \epsilon} + e^{\beta \epsilon} = 2 \cosh(\beta \epsilon)$$

all'equilibrio i livelli avranno:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{N}{Z} g_1 e^{-\beta E_1} = \frac{N}{2 \cosh(\beta \epsilon)} e^{-\beta \epsilon} \\ n_2 &= \frac{N}{Z} g_1 e^{-\beta E_2} = \frac{N}{2 \cosh(\beta \epsilon)} e^{\beta \epsilon} \end{aligned}$$

e l'energia media:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{Z} \sum_i g_i E_i e^{-\beta E_i} = \frac{1}{2 \cosh(\beta \epsilon)} (\epsilon e^{-\beta \epsilon} - \epsilon e^{\beta \epsilon}) = -\epsilon \tanh(\beta \epsilon)$$

28.3 Temperatura

Il parametro β ha le dimensioni dell'inverso di un energia. La distribuzione dell'energia in un gas perfetto:

$$dn = A \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} dE \quad (28.30)$$

dalla (28.23) ricaviamo che:

$$\beta = \frac{1}{kT} \quad (28.31)$$

La definizione di temperatura che ne deriva, cioè come funzione dell'energia interna di un sistema, è valida solo nel caso di particelle in equilibrio termico. Se il nostro sistema non è in equilibrio termico si può dividere il sistema in tanti sottosistemi più piccoli in equilibrio termico. L'energia media la possiamo scrivere come:

$$\langle E \rangle = kT^2 \frac{d}{dT} (\log Z) \quad (28.32)$$

e l'energia totale:

$$U = NkT^2 \frac{d}{dT} (\log Z) \quad (28.33)$$

La distribuzione di Maxwell-Boltzmann diventa:

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\frac{E_i}{kT}} \quad (28.34)$$

Se tralasciamo il fattore g_i e fissiamo la temperatura abbiamo un'esponenziale decrescente, quindi avremo molte particelle in stati con energia piccola, minore della media, e poche particelle in stati con energia grande. I livelli energetici più popolati sono quelli con minore energia. All'aumentare della

temperatura gli stati con energia maggiore aumentano la loro popolazione e quelli che bassa energia la diminuiscono.

Se consideriamo due livelli con energia E_i e E_j il rapporto delle loro popolazioni è:

$$\frac{n_j}{n_i} = \frac{\frac{N}{Z} g_j e^{-\frac{E_j}{kT}}}{\frac{N}{Z} g_i e^{-\frac{E_i}{kT}}} = \frac{g_j}{g_i} e^{-\frac{\Delta E}{kT}} \quad (28.35)$$

28.4 Equilibrio termico

Consideriamo due diversi sottosistemi di particelle che possono scambiare calore tra di loro. Il numero di particelle per ogni sistema rimanga costante. Il primo sistema abbia N particelle, il secondo N' . I due sistemi sono isolati dall'esterno, quindi la somma delle loro energie rimane costante:

$$N = \sum_i n_i = \text{const} \quad (28.36)$$

$$N' = \sum_j n'_j = \text{const} \quad (28.37)$$

$$U = \sum_i n_i E_i + \sum_j n'_j E'_j = \text{const} \quad (28.38)$$

la probabilità di una particolare partizione di tutto il sistema comprendente i due sottosistemi è:

$$P = \prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!} \cdot \prod_j \frac{g_j^{n'_j}}{n'_j!} \quad (28.39)$$

per trovare la configurazione all'equilibrio dobbiamo trovare la partizione più probabile. Seguiamo lo stesso procedimento per un sistema singolo. Dalle equazioni (28.36), (28.37), (28.38) differenziando:

$$\sum_i dn_i = 0 \quad (28.40)$$

$$\sum_j dn'_j = 0 \quad (28.41)$$

$$\sum_i E_i dn_i + \sum_j E'_j dn'_j = 0 \quad (28.42)$$

scriviamo il differenziale del logaritmo (ci permette di passare dai prodotti alle somme) della probabilità e poniamo uguale a zero:

$$-d(\log P) = \sum_i \log \frac{n_i}{g_i} dn_i + \sum_j \log \frac{n'_j}{g'_j} dn'_j = 0 \quad (28.43)$$

usando i moltiplicatori di Lagrange α , α' e β :

$$\sum_i \left(\log \frac{n_i}{g_i} + \alpha + \beta E_i \right) dn_i + \sum_j \left(\log \frac{n'_j}{g'_j} + \alpha' + \beta E'_j \right) dn'_j = 0 \quad (28.44)$$

quindi:

$$\log \frac{n_i}{g_i} + \alpha + \beta E_i = 0 \quad \log \frac{n'_j}{g'_j} + \alpha' + \beta E'_j = 0 \quad (28.45)$$

cioè:

$$n_i = g_i e^{\alpha - \beta E_i} \quad n'_j = g'_j e^{\alpha' - \beta E'_j} \quad (28.46)$$

e usando le (28.36) e (28.37):

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\beta E_i} \quad n'_j = \frac{N'}{Z'} g'_j e^{-\beta E'_j} \quad (28.47)$$

i due sottosistemi hanno lo stesso β poiché la somma delle energie rimane costante. Sostituendo β :

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\frac{E_i}{kT}} \quad n'_j = \frac{N'}{Z'} g'_j e^{-\frac{E'_j}{kT}} \quad (28.48)$$

Concludiamo che due differenti sistemi di particelle in equilibrio statistico devono avere la stessa temperatura, che è il principio zero della termodinamica. All'equilibrio termico ogni sistema raggiunge la stessa configurazione che avrebbe raggiunto all'equilibrio nel caso fosse isolato alla stessa temperatura.

29

Calore specifico dei gas

Per un gas monoatomico l'energia interna è $E = \frac{3}{2}NkT$, quindi il suo calore specifico $c_v = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial T} E = \frac{3}{2}R$. Per i gas poliatomici bisogna considerare anche l'energia dovuta alle rotazioni e alle vibrazioni. Il problema è che questi gradi di libertà in più si attivano al variare della temperatura.

Ignoriamo l'energia legata agli elettroni. Questi per essere eccitati hanno bisogno di energie dell'ordine di 1 eV, cioè di una temperatura di circa 10^4 K. A questa temperatura il gas ha subito dei cambiamenti tali che il nostro modello non è più valido. Dopo il grado di libertà traslazionale, che è sempre attivo, si attiva il grado rotazionale. L'energia rotazionale è dell'ordine di 10^{-4} eV. L'energia vibrazionale invece è maggiore, dell'ordine di $(10^{-3} \div 10^{-1})$ eV e quindi necessitano una temperatura maggiore per essere attivati. A temperature molto alte tutti i gradi di libertà sono attivati, quindi per una molecola biatomica sono 7 (3 traslazionali, 2 rotazionali e 2 vibrazionali, considerando l'energia potenziale come grado di libertà)¹. Quindi l'energia totale in accordo con il principio di equipartizione:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E = \frac{7}{2}NkT \quad (29.1)$$

e il calore specifico:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c_v = \frac{7}{2}R \quad (29.2)$$

¹problema a due corpi: 6 gradi di libertà più uno potenziale

29.1 Calore specifico di gas biatomici

L'energia totale di ogni molecola è la somma delle energie traslazionali, rotazionali e vibrazionali:

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{tr}} + E_{\text{rot}} + E_{\text{vib}} \quad (29.3)$$

Stiamo ignorando l'energia legata al moto degli elettroni in quanto per eccitare questo grado di libertà servono temperature talmente alte da alterare la struttura del gas.

Traslazioni

Le traslazioni non sono quantizzate, quindi:

$$U_{\text{tr}} = \frac{3}{2}nRT \quad (29.4)$$

dal principio di equipartizione.

29.1.1 Rotazioni

Il momento angolare è quantizzato e può avere $2l + 1$ possibili orientazioni. L'energia legata alla rotazione è anch'essa quantizzata:

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2I} \quad l \in \mathbb{N} \quad (29.5)$$

con I il momento di inerzia della molecola relativa all'asse di rotazione per il centro di massa:

$$I = \mu r_0^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r_0^2 \quad (29.6)$$

con μ la massa ridotta e m_1 e m_2 le masse degli atomi e r_0 la loro distanza. La probabilità intrinseca è uguale per tutti i livelli: $g_i = 2l + 1$. La funzione di partizione:

$$Z_{\text{rot}} = \sum_i g_i e^{-\frac{E_i}{kT}} = \sum_l (2l+1) e^{-l(l+1)\frac{\Theta_r}{T}} \quad (29.7)$$

con:

$$\Theta_r = \frac{\hbar^2}{2Ik} \quad (29.8)$$

la temperatura caratteristica rotazionale. Il numero di particelle in un particolare stato rotazionale caratterizzato dal numero l :

$$n_{\text{rot}} = \frac{N}{Z_{\text{rot}}} (2l+1) e^{-l(l+1)\frac{\Theta_r}{T}} \quad (29.9)$$

più cresce la temperatura e più molecole si troveranno in stati con l elevato. L'energia totale delle rotazioni:

$$U_{\text{rot}} = kNT^2 \frac{d}{dT} (\log Z_{\text{rot}}) \quad (29.10)$$

si osserva graficamente che questa funzione passa dal valore di circa $\frac{3}{2}nRT$ al valore $\frac{5}{2}nRT$ in corrispondenza della temperatura caratteristica di rotazione Θ_r .

approssimazione $T \gg \Theta_r$

Consideriamo $T \gg \Theta_r$ in modo che l'intervallo tra due livelli rotazionali sia piccolo. Possiamo valutare Z_{rot} sostituendo la sommatoria con un integrale. Approssimiamo $2l + 1 \sim 2l$ e $l(l + 1) \sim l^2$:

$$Z = \int_0^\infty 2l e^{-\frac{\Theta_r}{T} l^2} dl = \frac{T}{\Theta_r} \quad (29.11)$$

e l'energia:

$$U_{\text{rot}} = kNT^2 \frac{d}{dT} (\log Z_{\text{rot}}) = kNT^2 \frac{d}{dT} (\log T - \log \Theta_r) = kNT = nRT \quad (29.12)$$

con n numero di moli. Quindi, sempre nel caso $T \gg \Theta_r$:

$$U = U_{\text{tr}} + U_{\text{rot}} = \frac{5}{2}nRT \quad (29.13)$$

e il calore specifico:

$$c_v = \frac{1}{n} \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{5}{2}R \quad (29.14)$$

come vuole la teoria classica.

29.1.2 Vibrazioni

L'energia delle vibrazioni è quantizzata come quella di un oscillatore armonico:

$$E_{\text{vib}} = (v + \frac{1}{2})\hbar\omega \quad (29.15)$$

e con $g_i = 1$. La funzione di partizione:

$$\begin{aligned} Z_{\text{vib}} &= \sum_i g_i e^{-\frac{E_i}{kT}} = \sum_v e^{-\frac{(-v+\frac{1}{2})\hbar\omega}{kT}} = \sum_v e^{-\frac{(-v+\frac{1}{2})\Theta_v}{T}} = e^{-\frac{\Theta_v}{2T}} \left(\sum_v e^{-v\frac{\Theta_v}{T}} \right) \\ &= \frac{e^{-\frac{\Theta_v}{2T}}}{1 - e^{-\frac{\Theta_v}{T}}} \end{aligned} \quad (29.16)$$

avendo notato che: $|e^{-\frac{\Theta_v}{T}}| < 1$ e avendo introdotto la temperatura caratteristica per le vibrazioni: $\Theta_v = \frac{\hbar\omega}{k}$. La temperatura vibrazionale è più alta di quella rotazionale. Il numero di molecole in un certo stato vibrazionale:

$$n_{\text{vib}} = \frac{N}{Z_{\text{vib}}} e^{-(v+\frac{1}{2})\frac{\Theta_v}{T}} \quad (29.17)$$

L'energia legata alle vibrazioni:

$$\begin{aligned} U_{\text{vib}} &= kNT^2 \frac{d}{dT} (\log Z_{\text{vib}}) = kNT^2 \frac{d}{dT} \left(\log \frac{e^{-\frac{\Theta_v}{2T}}}{1 - e^{-\frac{\Theta_v}{T}}} \right) \\ &= kNT^2 \frac{d}{dT} \left(-\frac{\Theta_v}{2T} - \log \left(1 - e^{-\frac{\Theta_v}{T}} \right) \right) \\ &= kNT^2 \left(\frac{\Theta_v}{2T^2} + \frac{\frac{\Theta_v}{T^2}}{e^{\frac{\Theta_v}{T}} - 1} \right) = \frac{1}{2}kN\Theta_v + \frac{kN\Theta_v}{e^{\frac{\Theta_v}{T}} - 1} \end{aligned} \quad (29.18)$$

il primo addendo $\frac{1}{2}k\Theta_v$ è l'energia vibrazionale di punto zero del gas.

approssimazione $T \gg \Theta_{\text{vib}}$

Il termine al denominatore dell'energia è asintotico per $\frac{\Theta_v}{T}$ piccolo a $\frac{\Theta_v}{T}$, quindi l'energia per alte temperature diventa:

$$U_{\text{vib}} = \frac{1}{2}kN\Theta_v + kNT = kNT \left(1 + \frac{\Theta_v}{2T} \right) \simeq KNT = nRT \quad (29.19)$$

e l'energia totale:

$$U = U_{\text{tr}} + U_{\text{rot}} + U_{\text{vib}} = \frac{3}{2}nRT + nRT + nRT = \frac{7}{2}nRT \quad (29.20)$$

e il calore specifico:

$$c_V = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial T} U = \frac{7}{2}R \quad (29.21)$$

calore specifico vibrazionale

$$\begin{aligned} c_V^{\text{vib}} &= \frac{1}{n} \frac{d}{dT} U_{\text{vib}} = \frac{1}{n} \frac{d}{dT} \left(\frac{1}{2}kN\Theta_v + \frac{kN\Theta_v}{e^{\frac{\Theta_v}{T}} - 1} \right) \\ &= R \left(\frac{\Theta_v}{T} \right)^2 \frac{e^{\frac{\Theta_v}{T}}}{\left(e^{\frac{\Theta_v}{T}} - 1 \right)^2} \end{aligned} \quad (29.22)$$

praticamente identico (a parte il fattore 3) al calore specifico dei solidi secondo Einstein.

30

Scattering

30.1 Particelle α

Osservando il decadimento di uranio osservò due tipi di radiazioni α e β . Con un esperimento simile a quello di Thomson per il rapporto carica–massa dell’elettrone misurò il rapporto carica–massa delle particelle α arrivando ad un valore che era metà di quello del protone. Analizzando lo spettro di emissione delle particelle α concluse che le particelle α altro non erano che He^{2+} . Infatti¹ :

$$\frac{q_{\text{He}^{2+}}}{m_{\text{He}^{2+}}} = \frac{2q_{\text{p}^+}}{4m_{\text{p}^+}} = \frac{1}{2} \frac{q_{\text{p}^+}}{m_{\text{p}^+}}$$

Thomson usò queste particelle per i suoi esperimenti sfruttando la loro grande massa ed energia.

¹Dai dati sperimentali nella sezione risulta

$$0.503448683 \pm 3.47 \times 10^{-7}$$

30.2 Scattering di Thomson

modello di Thomson

Il modello di Thomson descrive il nucleo come una densità di carica positiva che contiene gran parte della massa atomica in cui sono immersi gli elettroni, in modo che all'esterno l'atomo risulti neutro. Questo modello viene escluso dagli esperimenti di scattering di Rutherford. Gli esperimenti di scattering avvenivano su vari metalli: un fascio collimato di particelle α colpiva nel vuoto una sottile lamina metallica. Le particelle che passavano colpivano uno schermo che si illuminava quando veniva colpito. In questo modo era possibile misurare gli angoli di scattering. Gran parte delle particelle erano deviate di angoli molto piccoli, dell'ordine di 1° . Tuttavia in modo inaspettato alcune particelle erano deviate di 90° o più. Se assumiamo il modello di Thomson per avere una deflessione della traiettoria la particella α deve entrare nell'atomo, cioè nella densità di carica positiva, perché all'esterno la particella α vede l'atomo neutro.

Consideriamo la collisione di una particella α con un elettrone. Essendo la massa della particella α circa 7294 volte la massa dell'elettrone possiamo dire $m_\alpha \gg m_e$. Dalla teoria sugli urti, imponendo la conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica, considerando il caso monodimensionale e considerando il caso limite² $m_\alpha \gg m_e$ con l'elettrone inizialmente fermo si ha che dopo l'urto la particella α prosegue con la velocità che aveva prima dell'urto, mentre l'elettrone acquista una velocità pari a due volte quella della particella α . Se vogliamo una deviazione della traiettoria della particella α dobbiamo far sì che l'urto avvenga di striscio. Ipotizzando il caso di deviazione massima, cioè quando $\Delta \mathbf{p}_\alpha$ è ortogonale a \mathbf{p}_α abbiamo che $\frac{\Delta p_\alpha}{p_\alpha} = \tan \theta \sim \theta$. Facendo i conti a caso, dicendo che Δp_α è uguale a $-\Delta p_e = 2m_e v_\alpha \simeq 2m_\alpha v_\alpha / 7294$ si ottiene che $\theta \sim 0.01^\circ$.

Consideriamo l'effetto della carica positiva. Una sfera di raggio R uniformemente carica con carica totale Q produce una forza su una particella α a distanza r dal centro:

$$F = \begin{cases} \frac{Qq_\alpha}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^2} & r \leq R \\ \frac{Qq_\alpha}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} & r \geq R \end{cases} \quad (30.1)$$

il massimo della forza si ha per $r = R$. Assumiamo che la forza agisca solo quando la particella α è all'interno della distribuzione di carica, cioè per un tempo $\Delta t \sim \frac{2R}{v}$. Supponiamo che la forza sia sempre quella massima. La

²vedi 4.9.1 a pag.33

variazione di quantità di moto:

$$\Delta p \sim F \Delta t = \frac{q_\alpha Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \frac{2R}{v}$$

ipotizzando il caso di deviazione massima, cioè quando $\Delta \mathbf{p} \perp \mathbf{p}$ si ha:

$$\tan \theta = \frac{\Delta p}{p} \sim \frac{q_\alpha Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \frac{2R}{m_\alpha v^2} = \frac{q_\alpha Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R \left(\frac{1}{2}m_\alpha v^2\right)}$$

se assumiamo $q_\alpha = 2e$ con un'energia di 5 MeV, incidente su una lastra di oro con $Q = 79e$ e $R = 1 \text{ \AA}$ abbiamo:

$$\theta \sim \tan \theta = 0.026^\circ$$

Secondo questo calcolo pedestre la maggior parte delle particelle dovrebbe essere scatterata con un angolo di 1° . Si può dimostrare che la frazione di particelle scatterate con un angolo maggiore di θ è $e^{-(\theta/\langle\theta\rangle)^2}$. Se assumiamo $\langle\theta\rangle = 1^\circ$ allora la frazione scatterata con angolo maggiore di 90° è $e^{-(90/1)^2} \simeq 10^{-3500}$. La frazione osservata da Rutherford era di $\frac{1}{8000}$, in disaccordo col modello di Thomson. L'atomo di Thomson non è in grado di deflettere abbastanza le particelle α .

Se ora proviamo a calcolare quale deve essere il raggio dell'atomo (prima avevamo assunto 1 \AA) per avere uno scattering di 1° :

$$R = \frac{q_\alpha Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\frac{1}{2}m_\alpha v^2} = 4.6 \times 10^{-4} \text{ \AA}$$

Rutherford concluse che per avere angoli di scattering come quelli osservati la carica positiva doveva avere un volume molto piccolo rispetto al volume dell'atomo.

30.3 Scattering di Rutherford

Assumiamo che la carica del nucleo scatteratore sia concentrata nel nucleo, molto piccolo, posto nell'origine delle coordinate. Definiamo il parametro di impatto b la distanza tra l'asintoto della traiettoria della particella α per $t \rightarrow -\infty$ e il nucleo scatteratore. Vogliamo sapere l'angolo θ tra la direzione dell'asintoto per $t \rightarrow -\infty$ e la direzione dell'asintoto per $t \rightarrow \infty$.

Distanza di minimo avvicinamento

L'energia meccanica è una costante del moto:

$$E = K + V = \text{const} \quad (30.2)$$

all'infinito l'energia potenziale è nulla e l'energia è tutta energia cinetica; al contrario alla distanza di minimo avvicinamento Δ l'energia è tutta potenziale:

$$\begin{aligned} E &= K(\infty) + V(\infty) = K(\infty) = \frac{1}{2}mv_0^2 = \\ &= E = K(\Delta) + V(\Delta) = V(\Delta) = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0\Delta} \end{aligned} \quad (30.3)$$

con Z il numero di protoni nel nucleo, ognuno di carica e , z il numero di protoni della particella α (2). Allora:

$$\Delta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{E} \quad (30.4)$$

Orbita

Calcoliamo l'orbita della particella α nel campo di forze centrale. Lavoriamo in coordinate polari. Il moto è piano e il momento angolare \mathbf{L} è costante del moto:

$$L = mvr = mr \frac{d\varphi}{dt} r = mr^2 \dot{\varphi} = L(t = -\infty) = mvb \quad (30.5)$$

quindi la variabile angolare:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2} \quad (30.6)$$

essendo $\dot{\varphi} \geq 0$ allora sarà una funzione monotona. L'accelerazione centripeta:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \quad (30.7)$$

e la forza centripeta è uguale alla forza coulombiana:

$$ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{r^2} \quad (30.8)$$

cambiamo variabile e ricalcoliamo le derivate per poi sostituirle nella (30.8):

$$u = \frac{1}{r} \quad (30.9a)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{m}u^2 \quad (30.9b)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \frac{L}{m} u^2 = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\varphi} \quad (30.9c)$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dr}{dt} \right) \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{L}{m} \frac{d^2u}{d\varphi^2} \frac{L}{m} u^2 \quad (30.9d)$$

$$(30.9e)$$

sostituendo nella (30.8):

$$m \left(-\frac{L^2}{m^2} u^2 \frac{d^2u}{d\varphi^2} - \frac{1}{u} \frac{L^2}{m^2} u^4 \right) = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} u^2 \quad (30.10)$$

dividento per $-\frac{L^2}{m}u^2$:

$$\ddot{u} + u = -\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{m}{L^2} \quad (30.11)$$

Ricordando:

$$\Delta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{\frac{1}{2}mv_0^2}$$

$$L^2 = m^2v_0^2b^2$$

$$\ddot{u} + u = -\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{m}{L^2} = -\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{m}{m^2v_0^2b^2} = -\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{m}{m^2v_0^2b^2} = -\frac{\Delta}{2b^2} \quad (30.12)$$

Per risolvere l'equazione differenziale. Omogenea associata:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \lambda = \pm i \quad u(\varphi) = A \sin \varphi + B \cos \varphi$$

quindi l'equazione differenziale ha soluzione generale:

$$u(\varphi) = A \sin \varphi + B \cos \varphi - \frac{\Delta}{2b^2} \quad (30.13)$$

imponendo le condizioni iniziali:

$$\{r \rightarrow -\infty \Leftrightarrow u \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi \rightarrow 0\} \Leftrightarrow u(0) = 0 \quad (30.14)$$

$$u(0) = B - \frac{\Delta}{2b^2} = 0 \Rightarrow B = \frac{\Delta}{2b^2} \quad (30.15)$$

e

$$\left\{ v(\varphi = 0) = \dot{r}(t = -\infty) = \frac{L}{m} \frac{du}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} = v_0 = \frac{L}{mb} \right\} \Leftrightarrow \frac{du}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} = \frac{1}{b} \quad (30.16)$$

$$\frac{du}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} = A = \frac{1}{b} \quad (30.17)$$

In definitiva l'equazione del moto:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b} \sin \varphi - \frac{\Delta}{2b^2} (1 - \cos \varphi) \quad (30.18)$$

angolo di scattering

Calcoliamo gli asintoti dell'orbita per $r \rightarrow \pm\infty$ in funzione dell'angolo di scattering $\theta = \pi - \varphi$:

$$0 = \frac{1}{b} \sin \theta - \frac{\Delta}{2b^2} (1 + \cos \theta)$$

ricordando che $\sin \theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$ e che $\cos \theta = 2 \cos^2(\theta/2) - 1$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{b} \left(2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - \frac{\Delta}{2b} 2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \\ \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) - \frac{\Delta}{2b} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

da cui si ricava la legge dello scattering coulombiano:

$$b = \frac{\Delta}{2} \cot \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (30.19)$$

30.4 Analisi scattering

Consideriamo lastre molto sottili, quindi escludiamo la possibilità che le particelle α subiscano più scattering. Il numero n di nuclei scatteratori si può ricavare dalla densità ρ del bersaglio, lo spessore δ e la sua area A , infatti:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{n\mathcal{M}}{N_A \delta A}$$

con \mathcal{M} la massa molare. Invertendo:

$$n = \frac{\rho N_A}{\mathcal{M}} \delta A \quad (30.20)$$

L'intensità del fascio è il numero N_α di particelle α per unità di tempo e unità di area, quindi nell'unità di tempo

$$N_\alpha = I_0 A \quad (30.21)$$

Se voglio conoscere le particelle con angolo di scattering $\theta > \theta_0$ allora essendo la cotangente una funzione decrescente saranno quelle particelle con un parametro $b < b_0 = \frac{\Delta}{2} \cot\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$. Il numero di queste particelle per unità di tempo è il numero di particelle contenute nella circonferenza di raggio b_0 moltiplicato per l'intensità: $\pi b_0^2 I_0$. La quantità πb_0^2 è la sezione d'urto per angoli maggiori di θ_0 . La sezione d'urto è definita come il numero di particelle scatterate con una certa proprietà diviso l'intensità del fascio. Considerando che ci sono n scatteratori allora il numero di particelle scatterate con angolo maggiore di θ_0 è $\pi b^2 I_0 \frac{\rho N_A}{\mathcal{M}} \delta A$. Se vogliamo la frazione di particelle dobbiamo dividere per il numero di particelle α totali $I_0 A$ e quindi la frazione risulta:

$$\chi = \pi b^2 \frac{\rho N_A}{\mathcal{M}} \delta \quad (30.22)$$

30.4.1 Sezione d'urto differenziale

Vogliamo calcolare quante particelle vengono scatterate con angolo compreso tra θ e $\theta + d\theta$. Esse sono quelle particelle scatterate sull'angolo solido $d\Omega$:

$$dS = 2\pi R \sin\theta (R d\theta) \quad d\Omega = \frac{dS}{R^2} = 2\pi \sin\theta d\theta \quad (30.23)$$

Il numero di particelle nell'unità di tempo dN con parametro compreso tra b e $b + db$ sono quelle che verranno scatterate con angolo tra θ e $\theta + d\theta$. Esse sono:

$$dN = I_0 n 2\pi b db \quad (30.24)$$

con n il numero di scatteratori. Definiamo la sezione d'urto differenziale:

$$d\sigma = \frac{dN}{n I_0} = 2\pi b db \quad (30.25)$$

che è proprio l'area da dove provengono le particelle che ci interessano, cioè quelle scatterate sull'angolo solido $d\Omega$. Calcoliamo db essendo $b = \frac{\Delta}{2} \cot\theta/2$:

$$db = \frac{\Delta}{2} \frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \frac{1}{2} d\theta = -\frac{\Delta}{4} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta \quad (30.26)$$

sostituendo:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{dN}{nI_0} = 2\pi b db = 2\frac{\Delta}{2} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{\Delta}{4} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta = \frac{\pi\Delta^2}{4} \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{\pi\Delta^2}{4} \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\pi\Delta^2}{8} \frac{\sin\theta}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta = \frac{\Delta^2}{16} \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\Omega \end{aligned} \quad (30.27)$$

30.4.2 Raggio nucleare

Per stimare il raggio nucleare: sia A il numero di nucleoni $r_{\text{nucleone}} \simeq 1.4 \times 10^{-15}$ m il raggio di un nucleone, allora il volume di tutto il nucleo:

$$A \frac{4}{3} \pi r_{\text{nucleone}}^3 = \frac{4}{3} \pi r_{\text{nucleo}}^3$$

invertendo:

$$r_{\text{nucleo}} \simeq r_{\text{nucleone}} A^{\frac{1}{3}} \quad (30.28)$$

31

Atomo

31.1 Formula di Rydeberg–Ritz

Un gas eccitato da una scarica elettrica emette una radiazione discreta, a bande, ognuna caratterizzata da una lunghezza d'onda. Per lo spettro di emissione dell'idrogeno Balmer scoprì che seguivano un'andamento:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n, m \in \mathbb{N} \quad n > m \quad (31.1)$$

R è la costante di Rydberg che varia in modo regolare da elemento a elemento e tende a R_∞ per elementi pesanti.

31.2 Modello di Bohr

Come Rutherford Bohr assunse che gli elettroni di un atomo si muovessero su orbite intorno al nucleo positivo. Il modello non è stabile, perché gli elettroni in moto accelerato irradiano e quindi perdono energia. In questo modo l'orbita dell'elettrone dovrebbe diventare sempre più piccola. Poiché la frequenza emessa da un elettrone in orbita circolare intorno al nucleo è la frequenza del moto si avrebbe uno spettro continuo.

Bohr postulò che un elettrone si può muovere su certe orbite senza ir-radiare. Chiamò queste orbite stati stazionari. In questo modo le orbite sono quantizzate. Ogni modello quantizzato deve rispettare il principio di

corrispondenza cioè quando consideriamo il limite di grandi orbite o grandi energie, molto più grandi del quanto, la teoria quantistica deve contemplare il risultato classico.

Durante il passaggio da uno stato stazionario ad energia E_i ad un altro con energia E_f l'elettrone irradia onde elettromagnetiche con frequenza tale che:

$$-\Delta E = E_i - E_f = h\nu \quad (31.2)$$

questo tiene conto della conservazione dell'energia. Infatti se inizialmente l'elettrone aveva energia E_i alla fine ha energia E_f ma ha emesso un fotone con energia $h\nu$:

$$E_i = E_f + h\nu \quad (31.3)$$

Dalla teoria di Bohr e dal principio di corrispondenza segue che il momento angolare l deve essere quantizzato:

$$l = n\hbar \quad n \in \mathbb{N} \quad (31.4)$$

Consideriamo un atomo con numero atomico Z e un elettrone. La velocità in funzione del raggio:

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} \quad v^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{m_e r} \quad (31.5)$$

L'energia dell'orbita dell'elettrone è:

$$E = \frac{1}{2}m_e v^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{1}{2}m_e \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{m_e r} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \quad (31.6)$$

Il momento angolare è quantizzato:

$$l = m_e v r = n\hbar \quad v = \frac{n\hbar}{m_e r} \quad (31.7)$$

confrontandola con la (31.5):

$$v^2 = \frac{n^2 \hbar^2}{m_e^2 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{m_e r} \quad (31.8)$$

trovando r :

$$r = n^2 \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m_e Ze^2} = n^2 \frac{a_0}{Z} \quad (31.9)$$

con $a_0 = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2} \simeq 0.529 \text{ \AA}$ il primo raggio di Bohr. Al variare di $n \in \mathbb{N}$ la (31.9) rappresenta il raggio di tutte le orbite stabili.

Per la velocità sostituiamo nell'espressione (31.7) ricavata dalla quantizzazione del momento angolare il valore del raggio per le orbite stabili (31.9):

$$v = \frac{n\hbar}{m_e r} = \frac{n\hbar Z}{m_e n^2 a_0} = \frac{\hbar Z}{n m_e a_0} = \frac{\hbar Z m_e e^2}{n m_e 4\pi\epsilon_0 \hbar^2} = \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \frac{1}{n} = \frac{Z}{n} \alpha c \quad (31.10)$$

La velocità dell'elettrone nella prima orbita dell'atomo di idrogeno ($Z = 1$):

$$v_1 = v(n = 1) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \quad (31.11)$$

definiamo la costante di struttura fine:

$$\alpha = \frac{v_1}{c} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{e^2}{2\epsilon_0 \hbar c} \simeq \frac{1}{137} \quad (31.12)$$

Sostituendo la (31.9) nell'espressione dell'energia (31.6) troviamo l'energia quantizzata:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z e^2}{r} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z e^2}{n^2 \frac{a_0}{Z}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_0} Z^2 \frac{1}{n^2} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \frac{Z^2}{n^2} \\ &= -\frac{Z^2 e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} \\ &= -\frac{Z^2 R_\infty \hbar c}{n^2} = -Z^2 \frac{E_0}{n^2} \end{aligned} \quad (31.13)$$

con

$$R_\infty = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^3 c} = \frac{\alpha^2 m_e c}{2\hbar} \simeq 1.0974 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \quad (31.14)$$

$$E_0 = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{m_e e^4}{2\hbar^2} = \frac{\alpha^2}{2} m_e c^2 = R_\infty \hbar c \simeq 13.6 \text{ eV} \quad (31.15)$$

l'energia della prima orbita che corrisponde quindi all'energia che devo fornire ad un atomo per strappare l'elettrone sul livello più basso, che è l'energia di ionizzazione. Il salto energetico di un elettrone che passa da $n = n_1$ a $n = n_2$:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -Z^2 R_\infty \hbar c \left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1} \right) \quad (31.16)$$

La frequenza del fotone emesso quando un elettrone passa da E_1 a E_2 :

$$\nu = \frac{-\Delta E}{h} = Z^2 R_\infty c \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \quad (31.17)$$

Possiamo vedere se è coerente con la formula di Ryedberg–Ritz (31.1) calcolando:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = Z^2 R_\infty \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \quad (31.18)$$

naturalmente la formula di Ryedberg–Ritz prende in considerazione solo l'idrogeno, quindi $Z = 1$.

31.2.1 Correzione massa

Abbiamo assunto che il nucleo sia fermo, oppure che abbia massa infinita: abbiamo considerato il problema ad un corpo. Poiché le forze in gioco sono classiche per considerare il problema a due corpi basta sostituire alla massa dell'elettrone la massa ridotta μ del sistema elettrone–nucleo:

$$\mu = \frac{m_e Z m_p}{m_e + Z m_p} \quad (31.19)$$

con m_p la massa del protone. Definiamo:

$$R = \frac{\mu e^2}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} = R_\infty \frac{\mu}{m_e} \xrightarrow{Z \rightarrow \infty} R_\infty \quad (31.20)$$

Esempio 31.1 (Riga H_α) La riga H_α è quella corrispondente alla transizione $n = 3 \rightarrow 2$ nell'idrogeno. Calcoliamo il numero d'onda

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= R \left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1} \right) = R_\infty \frac{\mu}{m_e} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{5}{36} R_\infty \frac{Z m_p}{Z m_p + m_e} \\ &= \frac{5}{36} R_\infty \frac{1}{1 + \frac{m_e}{m_p}} \simeq 1.523 \times 10^6 \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

avendo usato $n_1 = 3$, $n_2 = 2$ e $Z = 1$. La lunghezza d'onda:

$$\lambda \simeq 6.565 \times 10^{-7} \text{ m}$$

Se avessimo usato R_∞ al posto di R sarebbe risultato: $\lambda \simeq 6.561 \times 10^{-7} \text{ m}$. Infatti la correzione per l'idrogeno della massa ridotta:

$$\mu_H = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} = \frac{1}{1 + \frac{m_e}{m_p}} m_e \simeq 1.0005 \times m_e$$

31.2.2 Correzione relativistica

Un'estensione del modello di Bohr potrebbe essere quella di usare orbite ellittiche al posto che circolari. In questo caso l'energia dell'orbita dipenderebbe solamente dall'asse maggiore dell'ellisse e non dall'eccentricità.

Sommerfeld analizzò gli effetti della relatività ristretta sul modello di Bohr. Un'orbita molto eccentrica avrà una correzione relativistica più grande essendo il fattore β grande. Per orbite circolari:

$$v = \frac{Z}{n} \alpha c \quad (31.21)$$

quindi:

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{Z}{n} \alpha \quad (31.22)$$

Se si analizzano molto in dettaglio delle linee spettrali dell'idrogeno si nota che esse consistono in diverse righe molto vicine. Nella teoria di Sommerfeld è spiegato dicendo che per ogni orbita circolare di raggio r_n e energia E_n esiste un insieme di n orbite ellittiche con stessi assi maggiori, ma diverse eccentricità e quindi energie lievemente diverse. Quindi, l'energia radiata quando un elettrone cambia orbita dipende leggermente dalle eccentricità delle orbite iniziali e finali come pure dagli assi maggiori.

31.3 Regola di quantizzazione Wilson-Sommerfeld

È sorprendente come Bohr abbia trovato come spiegare le linee spettrali dell'idrogeno postulando la quantizzazione del momento angolare $L = n\hbar$ e come allo stesso modo Einstein e Plack abbiano postulato la quantizzazione dell'energia di un oscillatore armonico $E = nh\nu$ per spiegare il calore specifico dei solidi e lo spettro del corpo nero.

Wilson e Sommerfeld proposero una regola per la quantizzazione di sistemi periodici:

$$\oint p dq = nh \quad (31.23)$$

dove p è una componente della quantità di moto e q una coordinata oppure p è una componente del momento angolare e q un angolo.

Esempio 31.2 (particella in un campo centrale su orbita circolare)

Applichiamo la regola di quantizzazione alla componente ortogonale al piano

dell'orbita:

$$\oint L \, d\phi = L \oint d\phi = L2\pi = nh \quad L = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar$$

poiché L è una costante del moto.

Esempio 31.3 (moto armonico) L'equazione del moto armonico:

$$x = A \sin \omega t$$

con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e k la costante elastica. L'energia totale, somma della cinetica e potenziale:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

la quantità di moto nella direzione del moto:

$$p = mv = m\omega A \cos(\omega t)$$

mentre dx :

$$dx = \omega A \cos(\omega t) \, dt$$

usando la regola di Wilson–Sommerfeld:

$$\begin{aligned} nh &= \oint p \, dx = \oint m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t) \, dt = 2E \oint \cos^2(\omega t) \, dt \\ &= 2E \int_0^T \cos^2(\theta) \frac{d\theta}{\omega} = \frac{2E}{\omega} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{2E}{\omega} \pi \end{aligned}$$

invertendo:

$$E = \frac{nh\omega}{2\pi} = nh\nu = n\hbar\omega$$

31.4 Effetto Compton

Consideriamo un fotone di frequenza ν incidente su un elettrone a riposo rispetto al nostro sistema di riferimento. Si osserva che il fotone viene scatterato con un angolo θ rispetto alla direzione iniziale e con frequenza diversa $\nu' \neq \nu$. Consideriamo un urto relativistico, imponendo la conservazione dell'energia e della quantità di moto, ricordando che:

$$E^2 = (m_0c^2)^2 + (pc)^2 = E_0^2 + (pc)^2 \quad (31.24)$$

con $E_0 = m_0c^2$ l'energia a riposo. Conservazione dell'energia:

$$E_e + E_\gamma = E = E' = E'_e + E'_\gamma \quad (31.25)$$

l'energia del fotone dalla (31.24):

$$E_\gamma = p_\gamma c = h\nu \quad p_\gamma = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (31.26)$$

quindi la conservazione dell'energia si scrive come:

$$E_0 + p_\gamma c = \sqrt{E_0^2 + (p'_e c)^2} + p'_\gamma c \quad (31.27)$$

che può essere scritta come:

$$E_0 + c(p_\gamma - p'_\gamma) = \sqrt{E_0^2 + (p'_e c)^2}$$

elevando al quadrato:

$$E_0^2 + c^2(p_\gamma^2 + p'^2_\gamma - 2p_\gamma p'_\gamma) + 2E_0 c(p_\gamma - p'_\gamma) = E_0^2 + (p'_e c)^2$$

$$c^2(p_\gamma^2 + p'^2_\gamma - 2p_\gamma p'_\gamma) + 2E_0 c(p_\gamma - p'_\gamma) = (p'_e c)^2 \quad (31.28)$$

la conservazione della quantità di moto:

$$\mathbf{p}_\gamma = \mathbf{p} = \mathbf{p}' = \mathbf{p}'_\gamma + \mathbf{p}'_e \quad (31.29)$$

passando ai moduli:

$$p_e'^2 = p_\gamma^2 + p'^2_\gamma - 2p_\gamma p'_\gamma \cos \theta \quad (31.30)$$

ricavando dalla (31.28) $p_e'^2$:

$$p_e'^2 = p_\gamma^2 + p'^2_\gamma - 2p_\gamma p'_\gamma + 2\frac{E_0}{c}(p_\gamma - p'_\gamma) \quad (31.31)$$

il sistema di due equazioni ha 4 incognite (p_e , p_γ , p'_γ e θ). Sottraendo le ultime due equazioni:

$$-2p_\gamma p'_\gamma \cos \theta = -2p_\gamma p'_\gamma + 2\frac{E_0}{c}(p_\gamma - p'_\gamma) \quad (31.32)$$

semplificando:

$$p_\gamma p'_\gamma (1 - \cos \theta) = \frac{E_0}{c}(p_\gamma - p'_\gamma) \quad (31.33)$$

sostituendo $p_\gamma = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ e analogamente per p'_γ :

$$\frac{h}{\lambda} \frac{h}{\lambda'} (1 - \cos \theta) = \frac{E_0}{c} \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \right) \quad (31.34)$$

sostituendo $E_0 = m_e c^2$ con m_e la massa a riposo dell'elettrone:

$$\frac{h^2}{\lambda\lambda'}(1 - \cos\theta) = m_e c h \left(\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'} \right) \quad (31.35)$$

si trova:

$$\lambda - \lambda' = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta) = \lambda_c (1 - \cos\theta) \quad (31.36)$$

che ha $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni. La quantità:

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 2\pi\alpha a_0 \quad (31.37)$$

è chiamata lunghezza d'onda di Compton per l'elettrone.

31.5 Numeri quantici

n è il numero quantico principale, nell'atomo di idrogeno di Bohr è l'unico numero quantico, ed è legato all'energia dell'orbita.

l è il numero quantico angolare, infatti:

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar \quad (31.38)$$

con L il modulo del momento angolare totale dell'elettrone. Esso può variare tra:

$$0 \leq l \leq n-1 \quad (31.39)$$

ad $l = 0$ corrisponde un'oscillazione armonica centrata sul nucleo. Più l è grande e più l'orbita è circolare. In spettroscopia gli stati corrispondenti a diversi l hanno un nome: $l = 0$ *S* (sharp), $l = 1$ *P* (principal), $l = 2$ *D* (diffuse), $l = 3$ *F* (fundamental). Per $l > 3$ si segue l'ordine alfabetico.

m è legato a:

$$L_z = m\hbar \quad (31.40)$$

con L_z la componente z del momento angolare dell'elettrone. Fissato l m può variare:

$$-l \leq m \leq l \quad (31.41)$$

ci sono quindi $2l + 1$ possibili orientazioni per il momento angolare. Il momento angolare non può mai avere direzione z , quindi $L_z < L$.

31.5.1 Regole di selezione

Ogniqualevolta un elettrone cambia orbitale deve rispettare le regole di selezione:

$$\Delta m = 0, \pm 1 \quad (31.42a)$$

$$\Delta l = \pm 1 \quad (31.42b)$$

31.6 Momento magnetico

31.6.1 Orbitale

Consideriamo un elettrone in un atomo di idrogeno. Con il suo moto circolare produce un campo dipolo magnetico:

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{S} \mathbf{n} = \pi r^2 \frac{qv}{2\pi r} \mathbf{n} = -\frac{1}{2} e v r \mathbf{n} \quad (31.43)$$

mentre il momento angolare:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m \mathbf{v} = m_e v r \mathbf{n} \quad (31.44)$$

quindi hanno la stessa direzione e in particolare:

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{L} \quad (31.45)$$

poiché il modulo del momento angolare è quantizzato:

$$\mu = \frac{e}{2m_e} L = \frac{e\hbar}{2m_e} \sqrt{l(l+1)} = \sqrt{l(l+1)} \mu_B \quad (31.46)$$

con μ_B un magnetone di Bohr:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \quad (31.47)$$

mentre la componente z :

$$\mu_z = -\frac{q}{2m_e} L_z = -\frac{e\hbar}{2m_e} m = -m \mu_B \quad (31.48)$$

31.6.2 Esperimento Stern–Gerlach

Nell'esperimento Stern–Gerlach si mostra l'esistenza di un altro momento magnetico, quello intrinseco o di spin. Un fascio di molecole collimate vengono fatte passare in una regione in cui il campo magnetico diretto come l'asse z ha un gradiente lungo l'asse z . In generale la forza su un dipolo è¹:

$$\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (31.49)$$

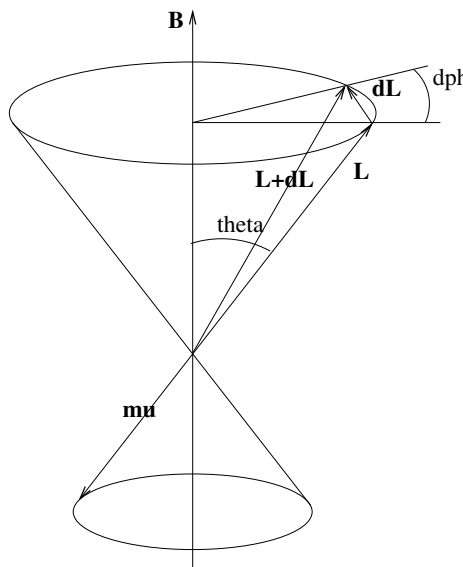
essendo il gradiente diretto nella direzione z ed essendo $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}}$:

$$\mathbf{F} = \left(\mu_x \frac{\partial}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial}{\partial y} + \mu_z \frac{\partial}{\partial z} \right) B\hat{\mathbf{k}} = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \quad (31.50)$$

sull'atomo viene anche esercitato un momento:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \quad (31.51)$$

che tende ad orientare il momento magnetico nella direzione del campo, cioè la direzione z . Poiché l'atomo ha anche un $\mathbf{L} \neq 0$ allora \mathbf{L} precessa intorno alla direzione z sotto l'azione del campo magnetico. geometricamente:



$$dL = L \sin \theta d\phi \quad (31.52)$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{L} \times \mathbf{B} \quad (31.53)$$

¹vedi 12.9.4 a pag.166

La variazione di \mathbf{L} nel tempo è perpendicolare a \mathbf{L} . Per i moduli:

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{e}{2m_e}LB \sin \theta \quad (31.54)$$

Si definisce pulsazione di Larmor la pulsazione della rotazione di $\mathbf{L} \neq 0$:

$$\omega_L = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{dL}{L \sin \theta} = \frac{d}{dt} \left(\frac{eLB \sin \theta}{2m_e L \sin \theta} \right) = \frac{eB}{2m_e} \quad (31.55)$$

Gli atomi infine collidono su uno schermo dove vengono rilevati. L'energia potenziale di un dipolo magnetico nel campo esterno:

$$W = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\mu_z B_z = m_l \mu_B B_z = m_l \frac{e\hbar}{2m_e} B_z = \hbar \omega_L m_l \quad (31.56)$$

che rappresenta anche la variazione di energia ΔE rispetto ad un elettrone che non è in un campo magnetico.

Classicamente, senza la quantizzazione, ci si aspetterebbe un continuo di possibili traiettorie. Per ogni possibile valore di μ_z si avrebbe una traiettoria diversa. Considerando la quantizzazione $\mu_z = -m\mu_B$ ci si aspetterebbe delle righe. Potendo m assumere i valori $-l \leq m \leq l$ ci si aspettano $(2l+1)$ righe. Usando idrogeno nello stato fondamentale $n=1, l=0$ ci si aspetta una sola riga, con $l=1$ tre righe corrispondenti ai possibili valori $m = -1, 0, 1$. Nell'esperimento usando idrogeno nello stato fondamentale si osservarono 2 linee al posto della singola aspettata. Infatti questo stato $\mu_z = -m\mu_B = 0$, cioè non c'è momento orbitale. Bisogna ipotizzare che ci sia un altro momento responsabile della presenza di due linee, lo spin $\mu_s = \pm \frac{1}{2}\hbar$.

31.6.3 Momento angolare intrinseco

Per interpretare l'esperimento di Stern–Gerlach si aggiunge un momento angolare intrinseco all'elettrone, usando un nuovo numero quantico, il numero quantico del momento angolare intrinseco:

$$s = \frac{1}{2} \quad (31.57)$$

che ha (in analogia con l e $m = m_l$):

$$2s + 1 = 2 \quad (31.58)$$

stati possibili. Il momento angolare intrinseco vale in modulo:

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar \quad (31.59)$$

come $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$. La componente z :

$$S_z = m_s \hbar \quad (31.60)$$

con $m_s = \pm 1/2$ in analogia con $L_z = m_l \hbar$. Corrispondente al momento angolare intrinseco esiste un momento magnetico intrinseco:

$$\boldsymbol{\mu}_s = -\frac{e}{2m_e} g \mathbf{S} \simeq -\frac{e}{m_e} \mathbf{S} \quad (31.61)$$

diversamente dal momento orbitale $g \neq 1$, ma è circa 2. La componente z del momento magnetico intrinseco:

$$\mu_{sz} = -\frac{e}{2m_e} g S_z = -\frac{e}{2m_e} g m_s \hbar \simeq -\frac{e}{m_e} m_s \hbar \quad (31.62)$$

Il momento magnetico totale dell'elettrone in un atomo:

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_L + \boldsymbol{\mu}_s = -\frac{e}{2m_e} (\mathbf{L} + g \mathbf{S}) \simeq -\frac{e}{2m_e} (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) \quad (31.63)$$

interpretazione esperimento Stern–Gerlac

Nell'esperimento Stern–Gerlac $l = 0$, quindi $\mathbf{L} = \sqrt{l(l+1)}\hbar = 0$ e poiché $m_l = 0$ $\mu_L = -m_l \mu_B = 0$ allora il momento magnetico totale:

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_s = -\frac{e}{2m_e} g \mathbf{S} \simeq -\frac{e}{m_e} \mathbf{S} \quad (31.64)$$

è dato solo dal momento magnetico di spin. Il modulo sarà:

$$\mu = \frac{e}{m_e} S = \frac{\sqrt{3}e}{2m_e} \hbar \quad (31.65)$$

mentre la componente z :

$$\mu_z = \mu_{sz} = -\frac{e}{m_e} m_s \hbar = \pm \frac{e\hbar}{2m_e} = \pm \mu_B \quad (31.66)$$

Essendoci due possibili stati si osserveranno due righe distinte.

31.7 Momento angolare totale

Il momento angolare totale \mathbf{J} è la somma dei momenti angolari orbitale e intrinseco:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \quad (31.67)$$

\mathbf{J} si conserva durante le interazioni. Il suo modulo è quantizzato mediante:

$$J = \sqrt{j(j+1)}\hbar \quad (31.68)$$

con:

$$j = |l-s|, |l-s|+1, \dots, |l+s| \quad (31.69)$$

mentre la componente z :

$$J_z = m_j \hbar \quad (31.70)$$

con

$$m_j = -j, -j+1, \dots, j \quad (31.71)$$

Nella notazione spettroscopica spesso il numero quantico j viene riportato in pedice alla lettera rappresentante l'orbitale.

Esempio 31.4 (2p) Lo stato $2p$ cioè $n=2$, $l=1$ dell'idrogeno ha j che può assumere i valori secondo l'equazione (31.69): $j = |l-s| = |1-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ o $j = |l+s| = |1+\frac{1}{2}| = \frac{3}{2}$. Quindi la notazione spettroscopica sarà: $2p_{1/2}$ (per $l=\frac{1}{2}$) o $2p_{3/2}$ (per $l=\frac{3}{2}$).

Esempio 31.5 (stato fondamentale dell'idrogeno) Calcoliamo quanto vale J e J_z per lo stato fondamentale dell'idrogeno. In questo stato $l=0$. j può valere solo

$$j = |l-s| = |l+s| = \frac{1}{2}$$

mentre m_j può valere $\pm\frac{1}{2}$. Quindi:

$$J = \sqrt{j(j+1)}\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar \quad J_z = m_s \hbar = \pm\frac{\hbar}{2}$$

Esempio 31.6 (stato p) Calcoliamo quanto vale J per lo stato p dell'idrogeno $l=1$. Quindi j può assumere i valori:

$$j = |1-\frac{1}{2}|, \dots, |1+\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

e allora:

$$J = \sqrt{j(j+1)}\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar, \frac{\sqrt{15}}{2}\hbar$$

se $j = \frac{1}{2}$ allora $m_j = \pm\frac{1}{2}$ e $J_z = \pm\frac{1}{2}\hbar$; se $j = \frac{3}{2}$ allora $m_j = \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$ e $J_z = \pm\frac{3}{2}\hbar$ o $J_z = \pm\frac{1}{2}\hbar$.

31.7.1 Somma di momenti

Sia \mathbf{J}_1 un momento (orbitale, intrinseco o una combinazione) e \mathbf{J}_2 un altro. Il vettore risultante sarà $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$. Il suo modulo sarà:

$$J = \sqrt{j(j+1)}\hbar \quad (31.72)$$

con j che può assumere i valori:

$$j = |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \dots, |j_1 + j_2| \quad (31.73)$$

Esempio 31.7 (somma di spin) Sommiamo il momento intrinseco di due elettroni S_1 e S_2 . Essendo $S_1 = \sqrt{s(s+1)}\hbar$ usando la notazione dell'equazione (31.73) $j_1 = \frac{1}{2}$ e analogamente $j_2 = \frac{1}{2}$. Allora:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 \quad S = \sqrt{j(j+1)}\hbar$$

con $j = 0, 1$, che corrisponde allo spin antiparallelo e parallelo.

31.8 Interazione spin-orbita

Stati atomici con gli stessi numeri quantici n e l , ma diversi j hanno una lieve differenza di energia a causa dell'interazione dello spin dell'elettrone con il momento orbitale. Il risultato è una leggera separazione delle linee spettrali, chiamata separazione di struttura fine.

Se $l \neq 0$ allora il moto dell'elettrone crea un campo magnetico interno \mathbf{B}_{int} (se $l = 0$ allora $L = 0$). Consideriamo il sistema di riferimento dell'elettrone in cui vediamo il nucleo con un momento angolare \mathbf{L} . Il campo magnetico interno è orientato nella stessa direzione del momento angolare orbitale. Il momento magnetico intrinseco $\boldsymbol{\mu}_s$ dovuto al momento angolare intrinseco \mathbf{S} interagisce con il campo interno \mathbf{B}_{int} , causando una differenza di energia dello stato ΔE :

$$\Delta E = -\boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{B}_{\text{int}} = \frac{e}{2m_e} g \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}_{\text{int}} = C \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \quad (31.74)$$

con C una costante positiva. ΔE dipende dall'orientazione di \mathbf{S} rispetto a \mathbf{L} . Se \mathbf{S} è parallelo con \mathbf{L} allora l'incremento è positivo, quando invece \mathbf{S} è antiparallelo con \mathbf{L} è negativo.

Considerando l'orbitale $2p$ questo viene diviso in due livelli energetici: $2P_{\frac{3}{2}}$ con energia maggiore e $2P_{\frac{1}{2}}$ con energia minore. Quindi la riga singola in realtà appare come una doppia linea.

31.8.1 Approssimazione quantitativa

Consideriamo l'orbita 2p. Il campo magnetico generato da una spira al centro è:

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{r} = \frac{\mu_0}{2} \frac{ev}{4\pi r^2} \quad (31.75)$$

lungo l'asse z . Il momento angolare intrinseco lungo l'asse z :

$$S_z = m_s \hbar = \pm \frac{1}{2} \hbar \quad (31.76)$$

L'energia di interazione:

$$\Delta W = -\boldsymbol{\mu}_S \cdot \mathbf{B} = \frac{e}{2m_e} g \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \simeq \pm \frac{e}{2m_e} 2 \frac{\hbar \mu_0 ev}{2 \cdot 8\pi r^2} \quad (31.77)$$

ricordando che $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$ e usando $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$:

$$\Delta W = \frac{e^2 \hbar \mu_0 v}{16m_e \pi r^2} = \pm \frac{e^2 \hbar v}{16m_e c^2 \pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\hbar^2 v \alpha}{4m_e r^2 c} \quad (31.78)$$

dalla (31.22) $\frac{v}{c} = \frac{Z}{n} \alpha$ e $Z = 1$, $n = 2$:

$$\frac{v}{c} = \frac{\alpha}{2} \quad (31.79)$$

sostituendo:

$$\Delta W = \frac{\hbar^2}{4m_e r^2} \frac{\alpha^2}{2} \quad (31.80)$$

il raggio:

$$r = n^2 a_0 = 4 \frac{\hbar}{\alpha m_e c} \quad (31.81)$$

sostituendo:

$$\Delta W = \frac{\hbar^2 \alpha^2 m_e^2 c^2}{4m_e 16\hbar^2} \frac{\alpha^2}{2} = \frac{\alpha^4 m_e c^2}{128} \quad (31.82)$$

questo è la differenza di energia tra i livelli $P_{\frac{1}{2}}$ e $P_{\frac{3}{2}}$ dell'idrogeno rispetto al $2P$ senza considerare l'interazione spin orbita. La differenza di energia tra i due stati sarà quindi il doppio:

$$\Delta W' \simeq \frac{\alpha^4 m_e c^2}{64} \quad (31.83)$$



Costanti¹

A.1 Costanti matematiche

Simbolo	Valore
π	3.141 592 653 591 403 978 482 542 414 219 279 663 919 893 234 825 ...
π^2	9.869 604 401 089 358 618 834 490 999 876 151 135 313 699 407 240 ...
$\sqrt{\pi}$	1.772 453 850 905 516 027 298 167 483 341 145 182 797 549 456 122 ...
e	2.718 281 828 458 563 411 277 850 606 202 642 376 785 584 483 618 ...
e^2	7.389 056 098 930 650 227 230 427 460 575 007 813 180 315 570 551 ...
\sqrt{e}	1.648 721 270 700 128 146 848 650 787 814 163 571 653 776 100 710 ...
π/e	1.155 727 349 791 723 336 742 691 256 256 860 982 838 416 464 162 ...
e/π	0.865 255 979 431 664 940 921 802 827 901 482 365 570 974 166 378 ...
$4\pi \times 10^{-7}$	1.256 637 061 435 917 295 385 057 353 311 801 153 678 867 ... $\times 10^{-6}$

¹Tratto da [?], sorgente: physics.nist.gov/constants

A.2 Costanti universali

costante	simbolo	valore	unità	errore rel
velocità della luce nel vuoto	c, c_0	299 792 458	m s^{-1}	esatto
Permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} = 12.566\,370\,614 \dots \times 10^{-7}$	N A^{-2}	esatto
Costante dielettrica del vuoto $1/\mu_0 c^2$	ε_0	$8.854\,187\,817 \dots \times 10^{-12}$	F m^{-1}	esatto
Impedenza del vuoto $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = \mu_0 c$	Z_0	376.730 313 461 ...	Ω	esatto
Costante di gravita- zione universale	G	$6.6742(10) \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$	1.5×10^{-3}
Costante di Planck	$G/\hbar c$	$6.707(10) \times 10^{-39}$	$(\text{GeV}/c^2)^{-2}$	1.5×10^{-3}
	h	$6.626\,069\,3(11) \times 10^{-34}$	J s	7.8×10^{-7}
		$4.135\,667\,27(16) \times 10^{15}$	eV s	3.9×10^{-8}
	$h/2\pi$	$1.054\,571\,68(18) \times 10^{-34}$	J s	7.8×10^{-7}
Massa di Planck $(\hbar c/G)^{1/2}$		$6.582\,119\,89(26) \times 10^{-16}$	eV s	3.9×10^{-8}
	m_P	$2.176\,7(16) \times 10^{-8}$	kg	7.5×10^{-4}
Lunghezza di Planck $\hbar/m_P c = (\hbar G/c^3)^{1/2}$	l_P	$1.616\,0(12) \times 10^{-35}$	m	7.5×10^{-4}
Tempo di Planck $l_P/c = (\hbar G/c^5)^{1/2}$	t_P	$5.390\,6(40) \times 10^{-44}$	s	7.5×10^{-4}

A.3 Costanti elettromagnetiche

costante	simbolo	valore	unità	errore rel
Carica elementare	e	$1.602\,176\,487(40) \times 10^{-19}$	C	2.5×10^{-8}
	e/h	$2.417\,989\,454(60) \times 10^{14}$	A J ⁻¹	2.5×10^{-8}
Flusso magnetico quantico $h/2e$	Φ_0	$2.067\,833\,72(18) \times 10^{-15}$	Wb	8.5×10^{-8}
Conduttanza quantica $2e^2/h$	G_0	$7.748\,091\,696(28) \times 10^{-5}$	s	3.7×10^{-9}
Inverso della conduttanza quantica	G_0^{-1}	$12\,906.403\,786(47)$	Ω	3.7×10^{-9}
Costante di Josephson $2e/h$	K_J	$483\,597.898(19) \times 10^9$	Hz V ⁻¹	3.9×10^{-8}
Costante di von Klitzing $h/e^2 = \mu_0 c/2\alpha$	R_K	$25\,814.807\,572(95)$	Ω	3.7×10^{-9}
Magnetone di Bohr $e\hbar/2m_e$	μ_B	$927.400\,899(37) \times 10^{-26}$	J T ⁻¹	4.0×10^{-8}
		$5.788\,381\,749(43) \times 10^{-5}$	eV T ⁻¹	7.3×10^{-9}
	μ_B/h	$13.996\,246\,24(56) \times 10^9$	Hz T ⁻¹	4.0×10^{-8}
	μ_B/hc	$46.686\,452\,4(19)$	m ⁻¹ T ⁻¹	4.0×10^{-8}
	μ_b/k	$0.471\,713\,1(12)$	K T ⁻¹	1.7×10^{-6}

A.4 Costanti atomiche e nucleari

A.4.1 Generali

costante	simbolo	valore	unità	errore rel
Costante di struttura fine $e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$	α	$7.297\,352\,533(27) \times 10^{-3}$		3.7×10^{-9}
Inverso della costante di struttura fine	α^{-1}	$137.035\,999\,76(50)$		3.7×10^{-9}
Costante di Rydberg $\alpha^2 m_e c/2h$	R_∞	$10\,973\,731.568\,549(83)$	m ⁻¹	7.6×10^{-12}
	$R_\infty c$	$3.289\,841\,960\,368(25) \times 10^{15}$	Hz	7.6×10^{-12}
	$R_\infty hc$	$2.179\,871\,90(17) \times 10^{-18}$	J	7.8×10^{-8}
	$R_\infty hc$	$13.605\,691\,72(53)$	eV	3.9×10^{-8}

A.4.2 Elettrone, e^-

costante	simbolo	valore	unità	errore rel
massa elettrone	m_e	$9.109\,381\,88(72) \times 10^{-31}$	kg	7.9×10^{-8}
		$5.485\,799\,110(12) \times 10^{-4}$	u	2.1×10^{-9}
energia equivalente	$m_e c^2$	$8.187\,104\,14(64) \times 10^{-14}$	J	7.9×10^{-8}
		0.510 998 902(21)	MeV	4.0×10^{-8}
rapporto massa elettrone muone	m_e/m_μ	$4.836\,332\,10(15) \times 10^{-3}$		3.0×10^{-8}
rapporto massa elettrone tau	m_e/m_τ	$2.87555(47) \times 10^{-4}$		1.6×10^{-4}
rapporto massa elettrone protone	m_e/m_p	$5.446\,170\,232(12) \times 10^{-4}$		2.1×10^{-9}
rapporto massa elettrone neutrone	m_e/m_n	$5.438\,673\,462(12) \times 10^{-4}$		2.2×10^{-9}
rapporto massa elettrone deuterone	m_e/m_d	$2.724\,437\,117\,0(58) \times 10^{-4}$		2.1×10^{-9}
rapporto massa elettrone particella alfa	m_e/m_α	$1.370\,933\,561\,1(29) \times 10^{-4}$		2.1×10^{-9}
rapporto carica massa	e/m_e	$-1.758\,820\,174(71) \times 10^{11}$	C kg $^{-1}$	4.0×10^{-8}
massa molare $N_A m_e$	$M(e), M_e$	$5.485\,799\,110(12) \times 10^{-7}$	kg mol $^{-1}$	2.1×10^{-9}
lunghezza d'onda di Compton $h/m_e c$	λ_C	$2.426310215(18) \times 10^{-12}$	m	7.3×10^{-9}
$\lambda_C/2\pi = \alpha a_0 = \alpha^2/4\pi R_\infty$		$386.159\,264\,2(28) \times 10^{-15}$	m	7.3×10^{-9}
raggio classico dell'elettrone	r_e	$2.817\,940\,285(31) \times 10^{-15}$	m	1.1×10^{-8}

A.4.3 Muone, μ^-

costante	simbolo	valore	unità	errore rel
massa	m_μ	$1.883\,531\,09(16) \times 10^{-28}$	kg	8.4×10^{-8}
		0.113 428 916 8(34)	u	3.0×10^{-8}
energia equivalente	$m_\mu c^2$	$1.692\,833\,32(14) \times 10^{-11}$	u	8.4×10^{-8}
		105.658 356 8(52)	MeV	4.9×10^{-8}

A.4.4 Tau, τ^-

costante	simbolo	valore	unità	errore rel
massa	m_τ	$3.167\,88(52) \times 10^{-27}$	kg	1.6×10^{-4}

A.4.5 Protone, p

costante		simbolo	valore	unità	errore rel
massa		m_p	$1.672\,621\,58(13) \times 10^{-27}$	kg	7.9×10^{-8}
rapporto	massa	m_p/m_e	1 836.152 6675(39)		2.1×10^{-9}
protone–elettrone					
rapporto	massa	m_p/n	0.998 623 478 55(58)		5.8×10^{-10}
protone–neutrone					
rapporto		e/m_p	$9.578\,834\,08(38) \times 10^7$	C kg ⁻¹	4.0×10^{-8}
carica–massa					

A.4.6 Neutrone, n

costante		simbolo	valore	unità	errore rel
massa		m_n	$1.674\,972\,16(13) \times 10^{-27}$	kg	7.9×10^{-8}

A.4.7 Particella alfa, α

costante		simbolo	valore	unità	errore rel
massa		m_α	$6.644\,655\,98(52) \times 10^{-27}$	kg	7.9×10^{-8}
rapporto	mas-	m_α/m_e	7 294.299 508(16)		2.1×10^{-9}
sa	particella				
alpha–elettrone					

A.5 Costanti fisico-chimiche

costante	simbolo	valore	unità	errore rel
Numero di Avogadro	N_A, L	$6.022\,141\,99(47) \times 10^{23}$	mol^{-1}	7.9×10^{-8}
Costante di massa atomica $m_u = \frac{1}{12}m_{12\text{C}} = 1\text{u} = 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}/N_A$	m_u	$1.660\,538\,73(13) \times 10^{-27}$	kg	7.9×10^{-8}
energia equivalente dell'unità di massa atomica	$m_u c^2$	$1.492\,417\,78(12) \times 10^{-10}$	J	7.9×10^{-8}
		931.494 013(37)	MeV	4.0×10^{-8}
Costante di Faraday $N_A e$	F	964 853 415(39)	C mol $^{-1}$	4.0×10^{-8}
Mole di Plank	$N_A h$	$3.990\,312\,689(30) \times 10^{-10}$	J s mol $^{-1}$	7.6×10^{-9}
	$N_A h c$	0.119 626 564 92(91)	J m mol $^{-1}$	7.6×10^{-9}
Costante dei gas	R	8.314 472(15)	J mol $^{-1}$ K $^{-1}$	1.7×10^{-6}
Costante di Boltzmann R/N_A	k	$1.380\,650\,3(24) \times 10^{-23}$	J K $^{-1}$	1.7×10^{-6}
		$8.617\,342(15) \times 10^{-5}$	eV K $^{-1}$	1.7×10^{-6}

B

Dati

B.1 Dati astronomici

Proprietà	Sole	Terra	Luna
Massa (kg)	1.99×10^{30}	5.98×10^{24}	7.36×10^{22}
Raggio medio (m)	6.96×10^8	6.37×10^6	1.74×10^6
Massa volumica media (kg/m ³)	1410	5520	3340
Accelerazione gravitazionale alla superficie (m/s ²)	274	9.81	1.67
velocità di fuga (km/s)	618	11.2	2.38
Periodo di rotazione (d)	$26 \div 37$	0.997	27.3
Raggio medio dell'orbita (km)	2.6×10^{17}	1.50×10^8	3.82×10^5
Periodo di rivoluzione	2.4×10^8 y	1.00 y	27.3 d



Momenti d'inerzia

Geometria	Momento d'inerzia
Anello rispetto al suo asse di simmetria	MR^2
Guscio cilindrico rispetto all'asse del cilindro	$\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
Cilindro pieno (o disco) rispetto all'asse del cilindro	$\frac{1}{2}MR^2$
Cilindro pieno (o disco) rispetto a un asse diametrico passante per il centro di massa	$\frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$
Sbarretta sottile rispetto a un asse ortogonale passante per il centro di massa	$\frac{1}{12}ML^2$
Sbarretta sottile rispetto a un asse ortogonale passante per un estremo	$\frac{1}{3}ML^2$
Sfera piena rispetto a un asse diametrico	$\frac{2}{5}MR^2$
Guscio sferico sottile rispetto a un asse diametrico	$\frac{2}{3}MR^2$
Anello rispetto a un asse diametrico	$\frac{1}{2}MR^2$
Lamina rettangolare rispetto a un asse ortogonale passante per il centro	$\frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$

D

Formule che nessuno ricorda mai

D.1 Trigonometria

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos \alpha$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \quad \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \quad \sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)]$$

$$\sin \delta + \sin \gamma = 2 \sin \frac{\delta + \gamma}{2} \cos \frac{\delta - \gamma}{2}$$

$$\sin \delta - \sin \gamma = 2 \cos \frac{\delta + \gamma}{2} \sin \frac{\delta - \gamma}{2}$$

$$\cos \delta - \cos \gamma = 2 \cos \frac{\delta + \gamma}{2} \sin \frac{\delta - \gamma}{2}$$

$$\cos \delta + \cos \gamma = 2 \cos \frac{\delta + \gamma}{2} \cos \frac{\delta - \gamma}{2}$$

$$\cos \delta - \cos \gamma = 2 \sin \frac{\delta + \gamma}{2} \sin \frac{\delta - \gamma}{2}$$

D.2 Sviluppi in serie di potenze

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \binom{\alpha}{4} x^4 + \dots^1$$

D.3 Operatori vettoriali

D.3.1 Gradiente

Coordinate Cartesiane

$$\nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

Coordinate Cilindriche

$$(\nabla \varphi)_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (\nabla \varphi)_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \quad (\nabla \varphi)_w = \frac{\partial \varphi}{\partial w}$$

Coordinate Sferiche

$$(\nabla \varphi)_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (\nabla \varphi)_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad (\nabla \varphi)_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi}$$

1

$$\binom{\alpha}{y} = \frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-y+1)}^{y \text{ volte}}}{y!}$$

D.3.2 Divergenza**D.3.3 Rotore****D.3.4 Laplaciano**

$$\nabla^2 \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$$

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F}$$

D.3.5 Relazioni

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - \nabla^2 \mathbf{F}$$

Bibliografia

- [1] Marcello Alons and Edward J. Finn. *Quantum and statistical physics*.
- [2] Neil Ashby and Stanley C. Miller. *Principles of Modern Physics*. Holden-Day series in physics. San Francisco, 1970. Bibliography: p. 505.
- [3] Baldini. Lezioni. Per tutta fisica 3.
- [4] Monica Ballerini. Lezioni. Per molti esempi di fisica 2, effetto Hall.
- [5] Ruggero Barni. Lezioni. per molti esempi di fisica 2, sistemi di coordinate, multipoli, induzione elettromagnetica.
- [6] Pietro Caldirola, Marcello Fontanesi, and Elio Sindoni. *Elettromagnetismo – parte I e II*. Collana di fisica pura e applicata.
- [7] Maddalena Collini. Lezioni. per molti esempi di fisica 3, effetto Doppler termico.
- [8] Enge, Wehr, and Richards.
- [9] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, and Matthew Sands. *The Feynman Lectures on Physics*.
- [10] Fontanesi. Lezioni. Per tutta fisica 2.
- [11] Franzoni. Lezioni. per la parte sull'effetto Doppler.
- [12] Lucchini. Lezioni. Per la parte sui moti armonici, sull'energia delle orbite e su ottica geometrica.
- [13] Paganoni. Lezioni. Per la parte sulla teoria cinetica dei gas perfetti.
- [14] Antonino Pullia. Lezioni. Per tutta fisica 1.
- [15] Resnick, Halliday, and Krane. *Fisica 1*. 5 edition, 2003.
- [16] Bruno Rossi. *Ottica*.

Indice analitico

- accelerazione, 12
 - angolare, 13
 - di gravità, 54
 - perpendicolare, 15
 - radiale, 15
 - relativistica, 120
- ago magnetico, 206
- α , *vedi* accelerazione angolare
- altezza
 - del suono, 132
- ambiente, 70
- ampere, 3, 212
- anodo, 305
- attrito
 - dinamico, 20
 - statico, 20
- autoinduttanza, 245–247
 - di un cavo coassiale, 247
 - di un solenoide, 247
- azione a distanza, 149
- batteria, 195
- bilancia
 - di torsione, 55
- Biot, 207
- Bohr, 222
- Boltzman, 101
- Boyle, 72
- calore specifico, 83
 - dei gas, 85, 337
 - dei solidi, 84, 321–327
- cammino
 - casuale, 299
- campi magnetici
 - generati da correnti, 207
- campo, 134–135
 - conservativo, 136, 137
 - elettrico, 149
 - di un dielettrico, 223
 - impresso, 195
- elettromotore, 195
- elettrostatico, 149
 - del dipolo, 165
- induzione magnetica, 199
- scalare, 134
- solenoidale, 140
- vettoriale, 134
- candela, 3
- capacità
 - termica, 83
 - dei gas, 85
 - dei solidi, 84
 - molare, 83
 - specifica, 83
- capacità elettrica, 175
- carica elettrica, 146
- Carnot, 90
- catodo, 305
- Cauchy, 280
- cavo
 - coassiale, 262
- cavo coassiale, 247
- centro
 - di carica, 168
- centro di massa, 29
- CGS elettrostatico, 147

- ciclo
 - di Carnot, 90, 102
 - Otto, 92
- circuitazione, 136, 140
 - del campo magnetico, 213
 - di una forza, 46
- circuiti, 251
- circuito
 - elettrico, 193
- Clausius, 93
- coefficienti
 - del viriale, 290
- composizione delle velocità, 18
 - relativistiche, 113
- condensatore
 - piano, 157
- condizione
 - di Lorentz, 273
- conducibilità elettrica, 189
- conduttori, 169
- conduzione, 82
- conservazione
 - dell'energia meccanica, 46
 - della carica, 188
- contrazione delle lunghezze, 111
- convezione, 82
- coordinate, 5, 141–144
 - cartesiane, 142
 - cilindriche, 143
 - polari, 14
 - sferiche, 144
- corda tesa, 126
- Coriolis, 27
- corpo nero, 313
- corrente
 - elettrica, 3
 - stazionaria, 186
- costante
 - di Planck, 320
 - dielettrica, 230
- Coulomb, 170
- coulomb, 147
- covarianza, 18
- curve
 - di calibrazione, 124
- dalembertiano, 274
- Debye, 324
- densità, 57
- densità di carica, 148
 - lineare, 148
 - superficiale, 148
 - volumetrica, 148
- densità di corrente, 187
- densità superficiale
 - delle cariche di polarizzazione, 225
 - delle cariche legate, 225
- densità volumetrica
 - delle cariche di polarizzazione, 225
 - delle cariche legate, 225
- derivata
 - di un vettore, 9
 - direzionale, 135
 - parziale, 44
- dielettrici, 220
- differenziale
 - esatto, 45
 - totale, 45
- dilatazione dei tempi, 112, 122
- dilatazione termica, 72
- dinamica
 - dei fluidi, 64
- dipolo, 162–167
- dispersione, 280–285
- distribuzione
 - dell'energia, 78
 - delle velocità, 76, 291
 - Maxwell–Boltzmann, 331
- distribuzione delle energie, 296
- divergenza, 138
 - teorema, 139
- Doppler, 131

- Dulong, 83, 84, 323
- effetto
- Compton, 354–356
 - Doppler, 131
 - relativistico, 131
 - Joule, 197
- Einstein, 323
- postulati di, 107
- elettreti, 223
- elettrone, 305
- elettronvolt, 119
- elettrostatica, 145
- nei conduttori, 169
- energia
- cinetica, 44
 - relativistica, 116
 - di un sistema di cariche, 160
 - di un'orbita, 56
 - interna, 83
 - media, 81
 - potenziale, 46
 - del dipolo, 165
 - elettrostatica, 160
 - relativistica, 116, 118
- entropia, 95
- per qualsiasi trasformazione, 99
 - nei cicli, 97
 - secondo Boltzman, 101
- equazione
- dei gas perfetti, 72
 - di Bernoulli, 66
 - di continuità, 65
 - di Laplace, 183
 - di Poisson, 182
 - diconale, 279
 - differenziale di un'onda, 127
- equazione di stato
- di van der Waals, 290
- equazioni
- dei potenziali ritardati, 274
 - di Maxwell, 145
- equilibrio
- chimico, 71
 - meccanico, 70
 - termico, 71
- esperimento
- delle due semisfere, 60
 - di Michelson–Morley, 104–107
 - di Millikan, 308
 - di Thomson, 306
 - di Torricelli, 59
 - Stern–Gerlach, 358
- etere, 105
- Eulero, 64
- Faraday, 267
- filo infinito, 208
- fluidostatica, 57
- flusso, 137
- del campo magnetico, 214
 - netto, 138
- Focault, 27
- forma differenziale
- lineare, 45
- forza
- apparente, 25
 - centrifuga, 27
 - conservativa, 45, 46
 - di Coriolis, 27
 - di Coulomb, 146
 - di Lorentz, 199
 - elastica, 19
 - fondamentale, 19
 - magnetica
 - su corrente, 203
 - relativistica, 120
 - sul dipolo, 166
 - tra circuiti, 211
 - tra fili, 212
 - variabile, 21
 - nel tempo, 21

- nella velocità, 24
 - nello spazio, 22
- fotoni, 320
- frigorifero, 91
 - perfetto, 100
- funzione
 - armonica, 183
 - del campo, 134
 - di stato, 85
- gas, 289
- Gauss, 154, 293
- gauss, 200
- Gay Lussac, 72
- generatori, 195
- Gerlach, 358
- Giorgi, 147
- gradiente, 10, 135
- grandezze, 2
 - scalari, 2
 - tensoriali, 2
 - vettoriali, 2
- gravitazione, 50
- henry, 246
- impulso di una forza, 32
- induzione elettrostatica, 170
 - completa, 172
- integrale
 - di linea, 136
- integrali
 - di Gauss, 293
- intensità
 - del suono, 132
 - luminosa, 3
- intensità di corrente, 186
- interferenza, 128
 - distruttiva, 129
- invarianza, 18
- irraggiamento, 82
- isolanti, 169, 220
- Joule, 197
- Kelvin, 93
- kelvin, 3
- Keplero, 50
- kilogrammo, 3
- Kirchhoff, 251, 314
- Lagrange, 64
- lamina
 - magnetica, 207
- Laplace, 183, 204, 208
- laplaciano, 182
- Larmor, 202
- lavoro, 42
 - su un gas, 86
- legge
 - dei gas, 289
 - dei gas perfetti, 72
 - dei vasi comunicanti, 59
 - di Biot–Savart, 207
 - di Boltzman, 101
 - di Boyle, 72
 - di Gay Lussac, 72
 - di Joule, 197
 - di Kirchhoff, 314
 - di Leonardo, 65
 - di Ohm, 191
 - generalizzata, 196
 - di Stevino, 58
 - Dulong–Petit, 323
- leggi
 - del campo, 134
 - di Keplero, 50
 - di Leonardo, 20
 - globali, 134
 - locali, 134
- Leonardo, 20, 65
- libero cammino medio, 76
- linea
 - coordinata, 141

- linee
 - di flusso, 65
- Lorentz, 108, 199, 273
- lunghezza, 3
- macchina
 - di Carnot, 90
 - frigorifera, 91
 - perfetta, 91, 100
- maglia, 251
- magnetone
 - di Bohr, 357
- massa, 3
 - longitudinale, 121
 - molare, 83
 - relativistica, 114
 - trasversa, 121
- Maxwell, 76, 84, 104, 145
- Mayer, 88
- meccanica dei fluidi, 57–69
- metro, 3
- mho, 191
- Michelson, 104
- Millikan, 308
- Minkowski, 122
- modello
 - di Bohr, 222
- modello del gas di elettroni liberi, 187
- mole, 3, 287
- molecole
 - apolari, 222
 - polari, 222
- momento
 - atomico, 222
 - d'inerzia, 35
 - di dipolo
 - indotto, 223
 - di dipolo magnetico, 206
 - di una forza, 38
 - su un circuito, 205
 - sul dipolo, 166
- Morley, 104
- moto
 - armonico, 15
 - smorzato, 16
 - Browniano, 299
 - circolare, 14
 - di un fluido, 63
 - uniforme, 13
 - del pendolo, 23
 - in coordinate polari, 15
 - rettilineo uniforme, 12
 - uniformemente accelerato, 13
- multipoli, 167–168
- mutua induttanza, 247–250
- nabla, 135
- ∇ , *vedi* nabla
- nodi, 129
- nodo, 251
- normale, 137
- numero
 - di Avogadro, 287, 300
- ohm, 191
- ω , *vedi* velocità angolare
- onda
 - armonica, 125
 - bidimensionale, 125
 - elettromagnetica, 125
 - longitudinale, 125
 - meccanica, 125
 - monodimensionale, 125
 - progressiva, 126
 - regressiva, 126
 - stazionaria, 129
 - su corda tesa, 126
 - trasversale, 125
 - tridimensionale, 125
- onde, 125
- operatore
 - dalembertiano, 274

- parete
 - adiabatica, 70
 - diatermica, 70
- pendolo, 23, 48
 - balistico, 34
 - di Focault, 27
- permittività elettrica, 231
- Petit, 83, 84, 323
- piano
 - di incidenza, 276
- pila, 195
- Planck, 319
- Poisson, 182
- polarizzazione, 125, 220, 221
 - per deformazione, 223
 - per orientamento, 222
- portata
 - di massa, 65
 - volumica, 65
- posizione, 11
- postulato
 - di Einstein, 107
- potenza, 43
- potenziale
 - elettrico, 273
 - elettrostatico, 158
 - del dipolo, 164
 - scalare, 273
 - vettoriale
 - magnetico, 217
- potenziali
 - ritardati, 274
- potere dissipativo delle punte, 174
- Poynting, 270
- pressione, 57, 74
 - atmosferica, 60
 - elettrostatica, 171
- prima formula di Laplace, 208
- primo principio della termodinamica, 85
- principi della dinamica, 20
- principio
 - di continuità, 188
 - di Archimede, 61
 - di Carnot, 103
 - di corrispondenza, 104
 - di equipartizione dell'energia, 84
 - di equivalenza, 56
 - di Pascal, 61
 - di sovrapposizione, 128
 - primo della termodinamica, 85
 - secondo della termodinamica, 93, 100
 - zero della termodinamica, 71, 336
- prodotto
 - misto, 9
 - scalare, 8
 - vettoriale, 8
- Proust, 287
- quanti, 320
- quantità di moto, 28
 - relativistica, 115, 118
- quantità di sostanza, 3
- radiazione
 - di corpo nero, 313
- raggi
 - catodici, 305
- raggio
 - di Bohr, 350
 - di Larmor, 202
- ramo, 251
- regola
 - di Wilson–Sommerfeld, 353
- relatività
 - ristretta, *vedi* speciale
 - speciale, 104–124
- relazione
 - di Mayer, 88
- resistenza

- del mezzo, 20
- elettrica, 192
- resistività, 190
- resistore, 193
- resistori
 - in parallelo, 193
 - in serie, 193
- rete
 - resistiva, 193
- Savart, 207
- scala assoluta, 103
- scala termodinamica, 103
- scariche
 - nei gas, 305
- schermo elettrostatico, 174
- seconda formula di Laplace, 204
- secondo, 3
- secondo principio della termodinamica, 93, 100
- semiconduttori, 192
- sensazione sonora, 132
- separatore
 - di velocità, 202
- siemens, 191
- Sir Mayer, 280, 285
- sistema, 70
 - aperto, 70
 - chiuso, 70
 - copernicano, 50
 - di riferimento, 141
 - inerziale, 26
 - isolato, 70
 - razionalizzato Giorgi, 147
 - ticonico, 50
 - tolemaico, 50
- smorzamento critico, 253
- soglia
 - del dolore, 132
 - di udibilità, 132
- solenoido, 209
- Sommerfeld, 353
- sorgenti
 - del campo, 134
- spazio
 - di Minkowski, 122
- spettrometro
 - di massa, 202
- spira, 209
- stat-coulomb, 147
- Stern, 358
- suono, 132
- superconduttività, 192
- superconduttori, 192
- superficie
 - di livello, 135
 - coordinata, 141
 - isobarica, 63
- suscettivitàdielettrica, 230
- sviluppo
 - del viriale, 290
 - in multipoli, 167–168
- temperatura, 71
 - critica, 192
- temperatura termodinamica, 3
- tempo, 3
 - caratteristico, 195
 - di rilassamento
 - di un conduttore, 194
- teorema
 - degli assi paralleli, 37
 - della divergenza, 139
 - di Ampere, 213
 - di Carnot, 94
 - di Coulomb, 170
 - di Gauss, 154
 - nei dielettrici, 221, 228
 - per la gravità, 51
 - di Pappo–Guldino, 32
 - di Steiner, 37
 - di Stokes, 140

- lavoro–energia, 44
 - relativistico, 116
- teoria cinetica del gas perfetto, 73
- termodinamica, 70–103
- termometro, 71
 - a gas perfetto, 72
- terra, 172
- timbro, 132
- Torricelli, 59
- trasferimento di calore, 82
- trasformate
 - di Lorentz, 108–111
- trasformatore, 249
- trasformazioni
 - cicliche, 90
 - di Galileo, 17
 - di Lorentz, 108–111
 - di un gas, 85
 - irreversibili, 85
 - politropiche, 89
 - quasistatiche, 70, 85
 - reversibili, 70, 85
- treno d'onde, 125
- tubo
 - di flusso, 65
- unità di massa atomica, 287
- unità di misura, 3
 - fondamentali, 3
 - prefissi, 4
- unità elettrostatica semplice, 147
- universo
 - termodinamico, 70
- urti, 33
 - anelastici, 34
 - elastici, 33
- van der Waals, 290
- variabile
 - di stato, 70
- velocità, 12
 - angolare, 13
 - del suono, 132
 - di fuga, 48
 - di trascinamento, 18
 - istantanea, 12
 - media, 12, 78, 295
 - perpendicolare, 15
 - più probabile, 77, 295
 - quadratica media, 78, 295
 - radiale, 15
 - relativa, 17
 - scalare, 12
- ventri, 129
- versore, 5, 142
- vettore, 5
 - di Poyning, 270
- induzione
 - elettrica, 230
- intensità magnetica, 242
- normale, 137
- polarizzazione
 - elettrica, 223
- spostamento
 - elettrico, 230
- viscosità, 67, 302
- volt, 161
- vuoto, 60
- weber, 200, 208
- Wilson, 353