线性代数线性方程组教学中的一个实用力学案例

郭空明，徐亚兰，朱应敏
（西安电子科技大学机电工程学院应用力学研究中心，陕西　西安　710071）

摘要：针对目前线性代数课程内容特别是线性方程组求解过于抽象的问题，在课堂教学中加入了一个简单而实用的力学案例。实践证明，该案例简单易懂，赋予抽象知识以物理意义，深化了学生对数学知识的理解，改善了教学效果。

关键词：线性代数；线性方程组；案例教学；力学
中图分类号：G642.0　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1674-9324（2020）09-0266-02

一、背景

线性代数课程是理工科和经管类专业的重要课程，其内容主要包括行列式、矩阵、线性方程组、向量空间等。其中核心内容是线性方程组的求解，其他内容如向量空间、特征值等，都可以认为是这部分内容的延伸。线性方程组的内容在许多后续课程，如电路分析、结构分析、通信工程、经济学等课程中均有重要应用。因此使学生掌握扎实的线性代数知识，尤其是对线性方程组的熟练掌握和深入理解，对于大学四年的学习至关重要。

线性代数课程与高等数学、概率论、复变函数等其他数学课程相比，只用到一些简单的数学知识，因此学习的难度较低。以作者的教学经验来看，这门课程的不及格率要大大低于高等数学和概率论，甚至在大学所有课程中，不及格率都是相对较低的。但是考试成绩只能代表学生对题目的熟练程度，并不能真正反映学生对知识的理解水平。许多线性代数成绩优异的学生，对许多知识点如线性方程组、特征值、二次型等几乎没有任何有深度的理解。而只是在学习了后续课程如材料力学、流体力学、有限元等之后，才真正对这些知识点及其应用有了一定的认识。因此，线性代数的主要难度在于抽象。一些教材或辅导书为了改善这一点，从几何意义方面对线性代数的一些概念进行了解释[1]。这种方法确实使得许多抽象的概念更为形象化，但几何本身也是一种抽象，它不能反映出数学概念背后潜在的物理意义。因此，为了提升教学效果，从工程或自然科学的实例引出概念和方法，也就是案例教学势在必行[2]。然而，线性代数课程一般开设于大学一年级第一学期或第二学期，学生还没有进行相关专业知识的学习，因此许多物理学领域中的案例如结构力学、电路分析等的案例都无法使用。目前课程一般采用一些简单的经济学和社会学案例[3]，这些案例与物理学中的案例相比，还是略显抽象。

为了解决这个问题，本文作者提出了一个简单的弹簧系统案例。该案例不需要任何大学课程知识就可以理解，而且该案例可以对非齐次线性方程组无解、有无穷多解、有唯一解三种情形从物理学角度进行解释，因此是一个非常实用的案例。该案例在有限元课程中被广泛采用，但有限元课程往往只考虑唯一解的情况，而且对一些问题的处理如约束的施加，与线性代数的方法不尽相同[4]。本文作者对这个案例进行了重新推导，使之较好地契合于线性代数课程的相关知识和概念。

二、案例

结构的矩阵位移法是结构分析的主流方法，该方法以结点位移为基本待求未知量，通过结点位移表示出其他的物理量。这里用一个最简单的案例来说明该方法，同时对线性方程组解的不同情形进行诠释。考虑如图1所示的弹簧系统。两个弹簧的刚度分别为k_1，k_2，三个结点的位移分别是u_1，u_2，u_3，受力为F_1，F_2，F_3。认为系统受力已知，不考虑弹簧质量，求结点的静力位移。

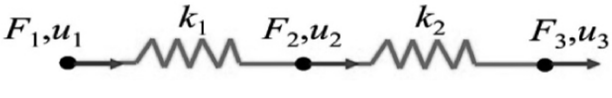

图1　弹簧案例示意图

由于各结点受力平衡，建立系统位移向量和力向

收稿日期：2019-05-01
基金项目：国家自然科学基金青年科学基金项目（11502183）和陕西省自然科学基础研究计划（2018JQ1081）资助
作者简介：郭空明（1985-），男（汉族），河南舞阳人，博士，讲师，硕士生导师，研究方向：结构分析。

量之间的方程组，便可进行分析求解。首先根据受力平衡和弹簧的胡克定律，可以列出三个结点的平衡方程：

$$\begin{aligned} &F_1+k_1(u_2-u_1)=0\\ &F_2-k_1(u_2-u_1)+k_2(u_3-u_2)=0\\ &F_3+k_2(u_3-u_2)=0 \end{aligned} \tag{1}$$

将方程(1)整理成线性代数课程中线性方程组的矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0\\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2\\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_1\\ F_2\\ F_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

问题就转化为非齐次方程组(2)的求解问题。其中的矩阵称为刚度矩阵，为了阐明其物理意义，利用分块矩阵乘法写成：

$$u_1\begin{pmatrix} k_1\\ -k_1\\ 0 \end{pmatrix}+u_2\begin{pmatrix} -k_1\\ k_1+k_2\\ -k_2 \end{pmatrix}+u_3\begin{pmatrix} 0\\ -k_2\\ k_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_1\\ F_2\\ F_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

可以看出，其第i列的物理意义是：当结点i产生单位位移，其他结点位移均为零时，需要在每个结点上施加的力。显然，该方程组的系数行列式为零，则根据克莱姆法则，位移没有唯一解。利用增广矩阵的初等变换，可得同解方程组：

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0\\ 0 & k_2 & -k_2\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_1\\ F_1+F_2\\ F_1+F_2+F_3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

可以看出：1.当$F_1+F_2+F_3=0$时，方程组有无穷多解，选u3为自由未知量，其通解为：

$$\begin{pmatrix} \dfrac{F_1}{k_1}+\dfrac{F_1+F_2}{k_2}\\ \dfrac{F_1+F_2}{k_2}\\ 0 \end{pmatrix}+C\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

2.当$F_1+F_2+F_3\neq0$时，方程组无解。

下面分析结果的物理意义，可以看出，因为系统没有固定，因此可以自由移动。当$F_1+F_2+F_3=0$时，系统受外力平衡，此时有解，各节点之间的相对位移为固定值。由于系统自由，可以做刚体运动，将每个结点位移上加一个相同位移C(刚体移动)之后，仍满足平衡条件。因此特解就对应于结点之间的相对位移，这部分是在受力时固定不变的，而导出组的通解对应于刚体位移，这部分位移不受力也会产生，这正是其对应的齐次线性方程组的解。当$F_1+F_2+F_3\neq0$时，系统无论如何都不会平衡，方程组无解。

实际工程中，结构系统都是受约束的，当约束足够时，结构的位移有且只有唯一解。现在假设结点1被固定在墙面上，那么有$u_1=0$另一方面墙面会给结点1一个约束力，该约束力是未知的，设其为Fr，则方程组(2)化为：

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0\\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2\\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_1\\ F_2\\ F_3+F_r \end{pmatrix} \tag{6}$$

根据实际的未知量将其重新整理为：

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0\\ -k_1 & k_1+k_2 & 0\\ 0 & -k_2 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ F_r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_1\\ F_2\\ F_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

由于弹簧刚度都不为零，显然此时系数矩阵行列式不为零，根据克莱姆法则，方程组有唯一解，也就是说，有唯一的位移和约束力。

三、结论

结合学科背景，将案例教学引入数学类课程的教学环节，是目前教学改革的一个重要方向。本文作者结合结构力学教学背景，在线性代数课程中提出了一个简单实用的弹簧系统案例，可以很好的解释线性方程组无解、有唯一解、有无穷多解三种情形的物理意义。希望本文的工作能为广大同行在改善教学效果方面起到抛砖引玉的作用。

参考文献：

[1]任广千.线性代数的几何意义[M].西安电子科技大学出版社,2015.

[2]文军,屈龙江,易东云.线性代数课程教学案例建设研究[J].大学数学,2016,(6):46-52.

[3]刘三阳,马建荣,杨国平.线性代数(第二版)[M].高等教育出版社,2005.

[4]李人宪.有限元法基础(第二版)[M].国防工业出版社,2004.

A Practical Case of Mechanics in the Teaching of Linear Algebraic Linear Equations

GUO Kong-ming,XU Ya-lan,ZHU Ying-min

(Research Center of Applied Mechanics,School of Mechanical-Electrical Engineering,Xidian University, Xi'an,Shaanxi 710071,China)

Abstract:Aiming at the problem that the content of linear algebra course,especially the solution of linear equations, is too abstract,a simple and practical mechanical case is added to the classroom teaching.Practice has proved that the case is simple and easy to understand,giving abstract knowledge physical meaning,deepening students' understanding of mathematical knowledge,and improving the teaching effect.

Key words: linear algebra;linear equations;case method in teaching;mechanics