

DerivX

2023-12-06

关于雪球交易日和自然日

在敲出观察日的设定上，交易日可以和自然日得到对应。

在 `CalcPresentValue` 中，因为需要对每一天每一个价格点计算 `payoff`，每一天即每一次价格变动是以交易日来锚定的，计算出的每个路径的收支根据点位距离到期或敲出的天数即剩余交易日数进行贴现，但并不能根据剩余交易日数推算得出剩余自然日数，故在根据条件判断得到每个路径的收支并贴现的计算中，无法使用自然日，同样在将每个路径的保证金利息作为收益并贴现的计算中，也无法使用自然日。

在 `CalcCouponValue` 中，因为只对初始点位进行收支贴现，每个路径的贴现天数只有到期天数和发生敲出天数两种，到期天数用交易日数或自然日数都可以，敲出观察日上交易日和自然日可以在入参时得到对应，故可以使用自然日。

使用交易日和使用自然日，在定价时所得的票息上，差异大概是万六到千一左右（粉丝测算），因为使用交易日（比如 $61 / 244$ 或 $250 = 0.25$ 或 0.244 ）与使用自然日（ $90 / 360$ 或 $365 = 0.25$ 或 0.246575 ）差别不大，考虑定价时所用基差和波动率等估算值对票息影响更大，以及计算任意交易日的希腊值所用 `CalcPresentValue` 无法使用自然日，在入参中提供产品存续自然日数和自然日形式的敲出观察日列表，意义不是很大。

但实际交易中是根据自然日天数来支付票息的，故会考虑在 `CalcCouponValue` 中使用自然日参数和计算，如只想用交易日来定价，则将自然日数和自然日的观察日列表设成和交易日的一致即可，或者将这两个参数作为可选参数只在需要使用时才传入。

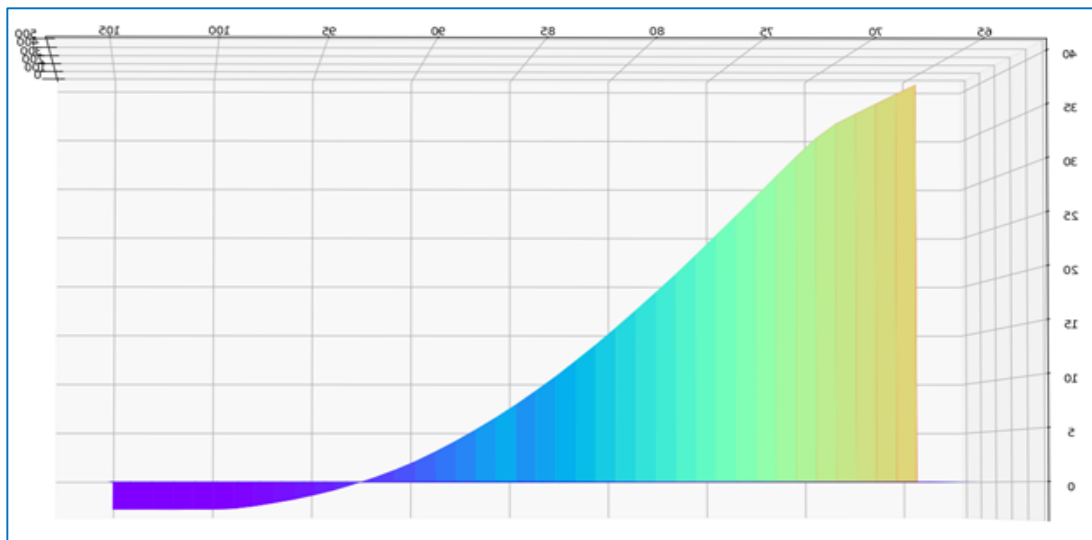
对于 `autocall` 模型中的 `booster`、`phoenix`、`snowball` 结构均是如此。

对于 `barrier` 模型中的 `sharkfin` 结构，欧式只在到期日才观察是否敲出，故可以使用自然日来计算价格、现值、希腊值，美式需要每个交易日都进行敲出观察，很难提供一一对应的交易日和自然日序列，故不能使用自然日来计算价格、现值、希腊值。目前欧式和美式的 `sharkfin` 结构都只能传入交易日相关参数进行定价计算。

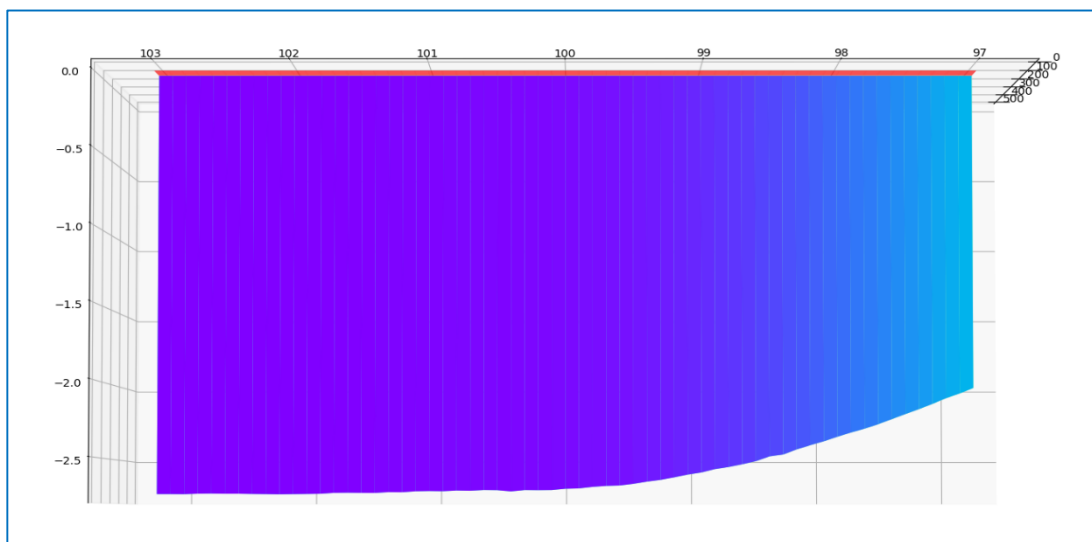
感谢 Mozixia 提出此问题！

目前在 `autocall` 和 `barrier` 等模型计算参数中传入 `runs_step_n`、`year_days_n`、`knock_o_days_n`、`trading_days_n` 等参数值，就可以按照自然日来计算价格、现值、希腊值。

关于雪球 Delta 在敲出价位没有立即变零



观察日当天 Payoff 整体图形



观察日当天 Payoff 敲出价格附近局部图形

从以上两图可见，观察日当天，在超过敲出价格时，Payoff 确实没有立即变直线。

原因是，取随机路径的时候，第[0]位的点是初始价格，第[1]位的是过一天后的价格，目前判断是否敲出，是取[1]位的价格去比较的，如果直接取[0]位的价格，Payoff 就会在超过敲出价时立即变成相等，那么 Delta 也就立即变成零。

```

98: -209532, -397755, 362537, -542.773, 100000
98.1: -206839, -397380, 354956, -529.419, 100000
98.2: -203564, -396844, 349050, -528.16, 100000
98.3: -199864, -396555, 342201, -500.795, 100000
98.4: -196667, -396060, 336060, -499.593, 100000
98.5: -193314, -395582, 330174, -485.56, 100000
98.6: -190385, -395165, 324006, -511.706, 100000
98.7: -186779, -395116, 317018, -507.535, 100000
98.8: -183346, -394525, 310451, -492.39, 100000
98.9: -180433, -394048, 304105, -452.28, 100000
99: -177568, -393511, 298166, -441.906, 100000
99.1: -174245, -392843, 292994, -441.906, 100000
99.2: -171694, -391912, 287111, -430.332, 100000
99.3: -168640, -391133, 281862, -446.078, 100000
99.4: -165191, -390494, 275534, -449.035, 100000
99.5: -162168, -390003, 269686, -431.498, 100000
99.6: -159082, -389165, 264246, -399.437, 100000
99.7: -155917, -388322, 258806, -398.858, 100000
99.8: -152689, -387698, 253571, -398.858, 100000
99.9: -149099, -387150, 248279, -370.3, 100000
100: -145745, -386526, 243204, -354.554, 100000
100.1: 0, -273737, 0, 0, 100000
100.2: 0, -273737, 0, 0, 100000
100.3: 0, -273737, 0, 0, 100000
100.4: 0, -273737, 0, 0, 100000
100.5: 0, -273737, 0, 0, 100000
100.6: 0, -273737, 0, 0, 100000
100.7: 0, -273737, 0, 0, 100000
100.8: 0, -273737, 0, 0, 100000
100.9: 0, -273737, 0, 0, 100000
101: 0, -273737, 0, 0, 100000
101.1: 0, -273737, 0, 0, 100000
101.2: 0, -273737, 0, 0, 100000
101.3: 0, -273737, 0, 0, 100000
101.4: 0, -273737, 0, 0, 100000
101.5: 0, -273737, 0, 0, 100000
101.6: 0, -273737, 0, 0, 100000
101.7: 0, -273737, 0, 0, 100000
101.8: 0, -273737, 0, 0, 100000
101.9: 0, -273737, 0, 0, 100000
102: 0, -273737, 0, 0, 100000
102.1: 0, -273737, 0, 0, 100000

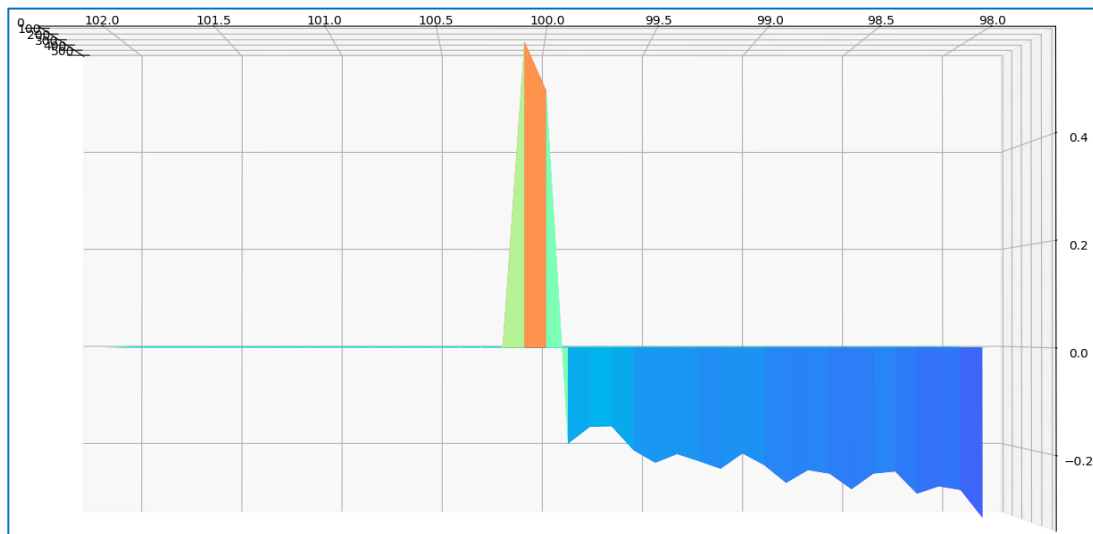
```

直接取[0]位的价格 Payoff 在超过敲出价时立即变成相等

第一列价格，第二到五列分别是无敲入无敲出、无敲入有敲出、有敲入无敲出、有敲入有敲出四种状态的 Payoff 量，最后是路径数量。上面这个符合 Payoff 在超过敲出价时立即变为相等。

但是我考虑了一下，在每天的对冲交易中，即使是在观察日当天，收盘前其实还是有很多路径会使标的价格在收盘时回到敲出价以下的，这样观察日当天也是取[1]位的路径价格去评估盘中的 Delta 更好些，而不是直接拿[0]位的确定已敲出的价格去计算。

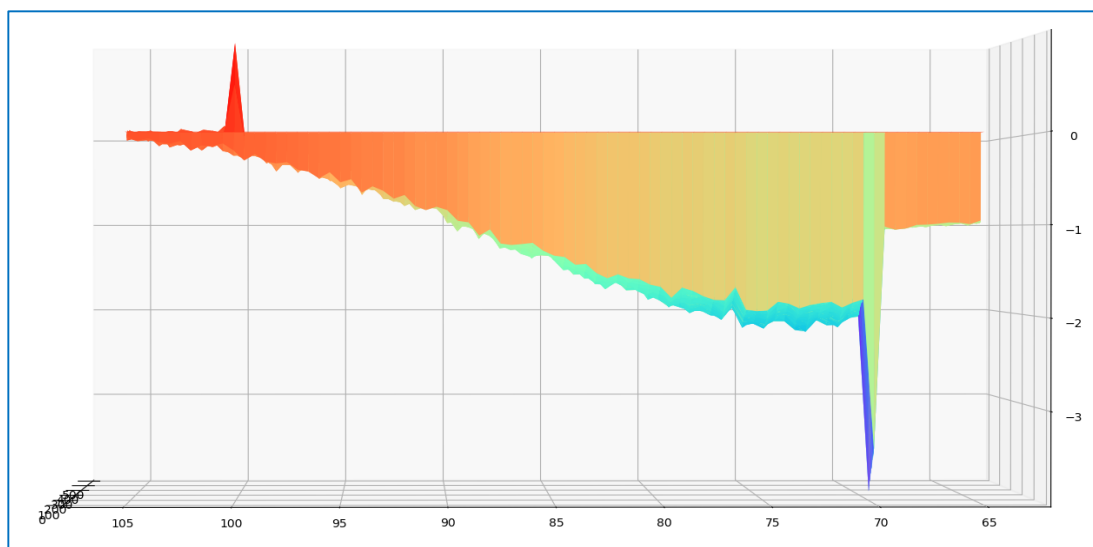
如果只是纯粹的要个定价，是否应该完全按照敲出即 Payoff 不变去计算？测试了一下，判断是否敲出时，如果只把当天是观察日的价格时点往前移一位，定出来的票息没有变化。（如果把判断是否敲出的价格时点都往前移一位，票息定价上会有降低大概万分之一的区别。）



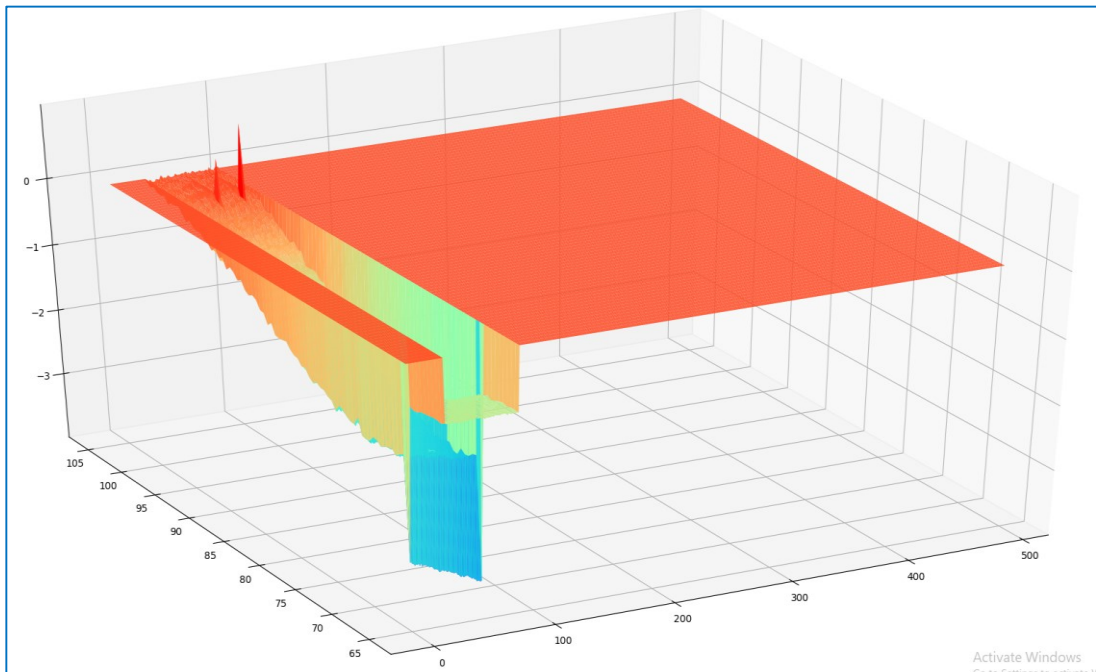
敲出价位置的 Delta 大头针风险

为体现小区间的 Payoff 变化，将 Delta 计算时的价格偏移量由 0.01 改为 0.001，因为敲出价以上 Payoff 不再变化 Delta 立刻变零，敲出价位置的 Delta 大头针风险得以体现。

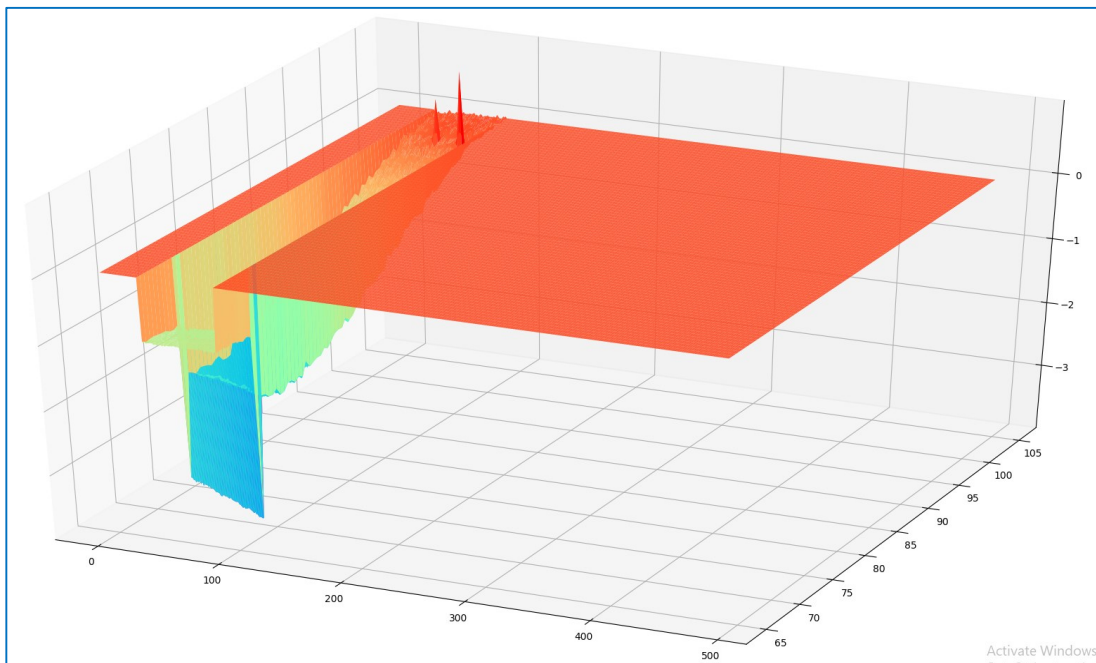
所以，观察日当天计算 Delta 等值时，敲出比较价格取[0]位还是取[1]位，以及计算时使用的价格偏移量数量级，还是根据实际应用场景来定吧。主要区别其实可能就是，是站在收盘之前，还是收盘之后，当天的价格还会不会变，来计算的。



两个观察期的 Delta 曲面前正视图图形

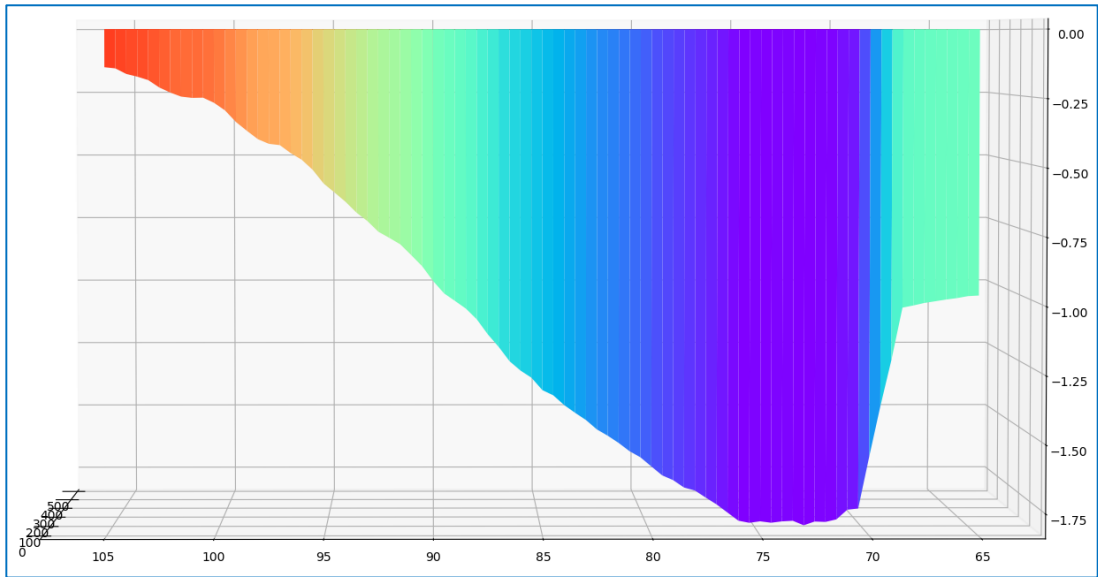


两个观察期的 Delta 曲面左斜视图图形

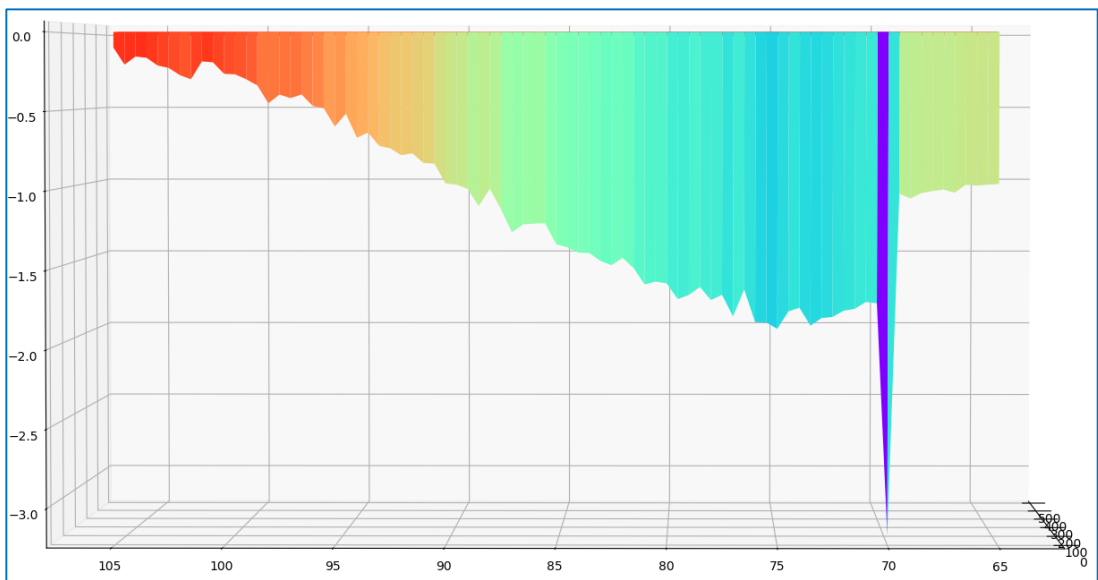


两个观察期的 Delta 曲面右斜视图图形

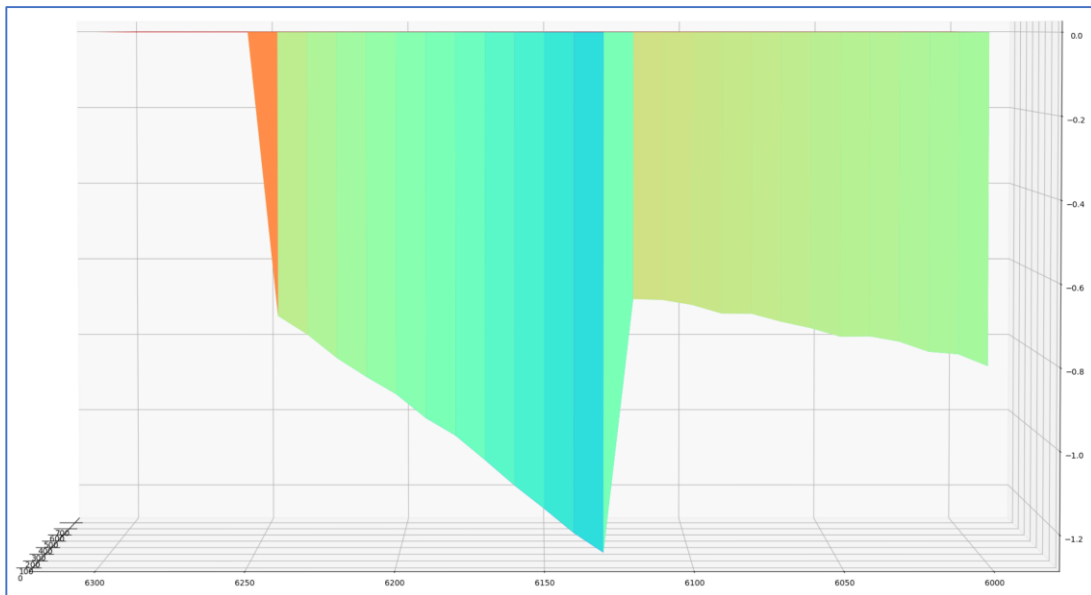
以上三个视图所展示的两个观察期的雪球 Delta 曲面来得更真实一些。



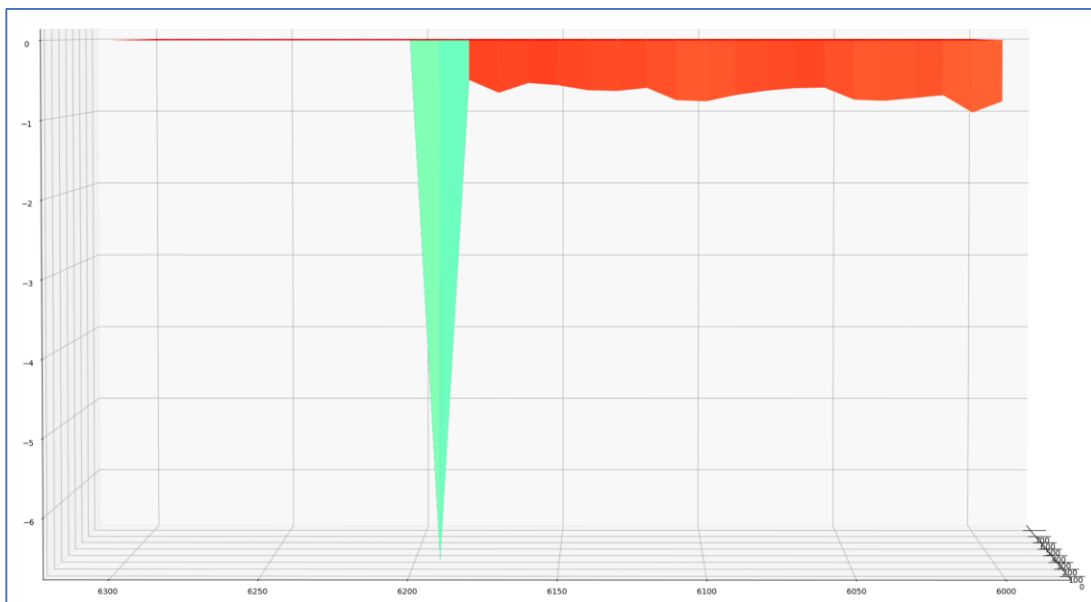
价格偏移量为 0.01 所得 Delta 曲线



价格偏移量为 0.001 所得 Delta 曲线



价格偏移量为 0.01 所得 Delta 曲线（初始价格 6186.57 雪球观察日敲出位置）



价格偏移量为 0.001 所得 Delta 曲线（初始价格 6186.57 雪球观察日敲出位置）

计算 Delta 时使用的价格偏移量数量级越小则越敏感越不平滑。

感谢 Mozixia 提出此问题！

关于路径依赖模型的贴现

在目前已实现的几种路径依赖模型中，booster、phoenix、snowball 结构以支付保证金为主，保本类型的也存在支付期权费的形式，sharkfin 结构以支付期权费为主。

主要分以下三种示例情况，期限设为一年：

- 1、给保证金，不给期权费，保证金利息收益年化 3%；
- 2、给期权费，不给保证金，期权费费率年化 3%，期权费利率年化 3%，期权费先付；
- 3、给期权费，不给保证金，期权费费率年化 3%，期权费利率年化 3%，期权费后付。

假设期限为 1 年，即 $r * t = 0.03 * 1.0 = 0.03$ ，保证金为 10000.00 元或期权费对应名义本金为 10000.00 元，则当前时刻获得的资金收益为：

- 1、 $\exp(-0.03) * (\exp(0.03) * 10000.00 - 10000.00) = 295.5446645149184$
- 2、 $10000.00 * 0.03 = 300.00$
- 3、 $\exp(-0.03) * 10000.00 * 0.03 = 291.13366006455246$

第一种可以理解为：现在客户给 100%保证金一共 10000.00 元，拿去存银行一年后 $10000.00 * e^{(0.03 * 1.0)} = 10000.00 * 1.030454533953517 = 10304.55$ 元，拿出 10000.00 元归还客户保证金，304.55 元是在未来的收益，贴现回现在就是 $304.55 * e^{(-0.03 * 1.0)} = 304.55 * 0.9704455335485082 = 295.54$ 元。

第一种可以化简为： $10000.00 - \exp(-0.03) * 10000.00$ ，即现在客户给 100%保证金一共 10000.00 元，3%年化贴现系数 $e^{(-0.03 * 1.0)} = 0.9704455335485082$ ，相乘就是 9704.46 元，拿去存银行一年到期本息共 10000.00 元，到时可以用来归还客户的保证金，那么现在就有多出来的 $10000.00 - 9704.46 = 295.54$ 元作为自己的收益。

第二种是现在就得到 300.00 元期权费。在计算未来某日的数值时，这笔资金会变成 $300.00 * e^{(0.03 * t)}$ 元。

第三种是到期时得到 300.00 元期权费，贴现回现在就是 $300.00 * e^{(-0.03 * 1.0)} = 291.13$ 元。

在 booster、phoenix、snowball 结构中，由 margin_rate、margin_interest 和 use_option_fee、option_fee、option_fee_interest、back_end_load 参数配置；在 sharkfin 结构中，由 option_fee、option_fee_interest、back_end_load 参数配置。

初始资金：1000.00、存续年数：1.000、无风险利率：0.030、资金收益率：0.150

保证金收益 单利：150.000000

保证金收益 单利 无风险利率 贴现：145.566830

保证金收益 单利 拆分：

用于投资的资金 期初：869.565217

用于投资的资金 期末：1000.000000

存入银行的资金 期初：130.434783

存入银行的资金 期末 无风险利率 复利：134.407113

存入银行的资金 期末 资金收益率 单利：150.000000

保证金收益 复利：161.834243

保证金收益 复利 资金收益率 贴现：139.292024

保证金收益 复利 无风险利率 贴现：157.051318

保证金收益 复利 拆分：

用于投资的资金 期初：860.707976

用于投资的资金 期末：1000.000000

存入银行的资金 期初：139.292024

存入银行的资金 期末 无风险利率 复利：143.534097

存入银行的资金 期末 资金收益率 复利：161.834243

关于路径依赖模型的对冲资金耗损

一般定价的时候，只考虑收支，不考虑具体的对冲资金消耗，是按照纯的收支计算一个期权费或某条件下的票息，对于收取的期权费或保证金，收支中是包含其（期权费）自身和由其（期权费或保证金）产生的利息的。

如果确实需要在定价的时候考虑对冲资金耗损对保证金或票息的影响，则可以参考以下方法进行定价修正。

普通雪球可以在定价的时候，给保证金打个折扣，用以表示实际对冲交易时的资金占用，占用部分的保证金不产生利息收益。

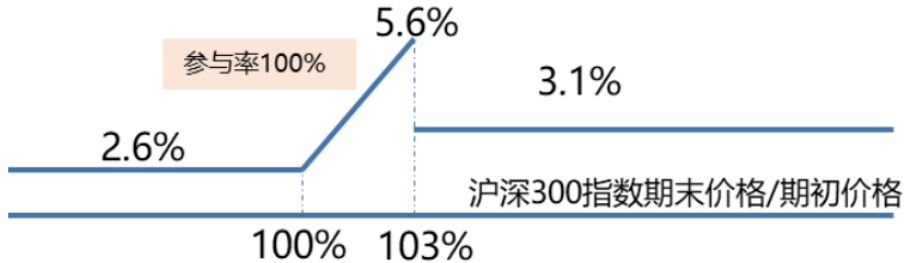
对于像保本类雪球，如果支付的是期权费，要指明一部分期权费被对冲交易占用，即不产生利息收益，可以通过降低期权费利率实现，要指明一部分期权费被对冲交易损耗，即无本金收入也无利息收益，可以通过降低期权费费率实现。

对于鲨鱼鳍，因为一般定价就是计算期权费而不是票息，在入参中增加了 `consumed_option_fee_rate` 和 `occupied_option_fee_rate` 两个参数分别表示 对冲交易占用期权费比率 和 对冲交易损耗期权费比率，比如期权费中有 20%资金占用和 30%资金损耗，则参数值可分别设为 0.2 和 0.3，期权费是先付还是后付对计算结果会有不同影响，计算时期权费损耗占比应小于 100%。

如果期权费后付，对冲交易资金通过垫资获得，目前没有计算垫资资金成本，同时也没有计算对冲交易所得收益。因此，一般不建议使用上述方法对定价进行修正，只在确实要考量对冲交易资金耗损或在定价时进行一定压价操作才使用。

目前 `booster`、`phoenix`、`snowball` 等最常用的是保证金，先付或后付期权费的很少。`sharkfin` 最常用的是先付期权费，后付的也比较少。

关于鲨鱼鳍模型的保底收益和敲出期权费



很多鲨鱼鳍结构如上图（看涨鲨鱼鳍）所示有一个保底收益，比如图示中的 2.6%，即使标的价格没有超过行权价格，也可以获得最低 2.6% 的年化收益。

一种是自己发行内嵌鲨鱼鳍结构的理财产品，实际操作中是从募集资金挪出很小一部分作为期权费，剩下的大部分资金去做固收理财然后支付保底收益，募集资金和保底收益不对定价模型产生影响，只在产品说明书中体现保底收益。

另一种是交易对手方单独将产品内嵌的鲨鱼鳍结构拎出来询价，一般都会指定保底收益为零，对年化期权费进行定价，如果产品本身有保底收益，则是交易对手方使用募集资金自己去实现。

因此一般只对单纯的保底收益为零的鲨鱼鳍结构进行期权费定价。

国内目前流行的都是敲出后仍到期才结算的鲨鱼鳍结构，鲜有敲出就结算的类型，但在模型定价计算中需要考虑这一分支情况，插件 `derivx_barrier_sharkfin` 中是将所定期权费按敲出时点的年化比率来收的，即未到期提前敲出时只获得对应产品已存续时长的部分期权费。（在 `booster`、`phoenix`、`snowball` 结构中，对支付期权费的情形，未到期提前敲出也是类似的计算方法。）

从 Mozixia 提供的一些信息得知，有过一笔保本雪球，前付期权费，根据敲出情况按年化返还部分期权费。因此插件 `derivx_barrier_sharkfin` 中的计算方法也有了一定的实际产品操作依据。

关于雪球等的希腊值计算差分区取值

$$\text{Delta} \approx \frac{V_p(s_0 + \delta s, \sigma, t, r) - V_p(s_0 - \delta s, \sigma, t, r)}{2\delta s} \quad (1)$$

$$\text{Gamma} \approx \frac{V_p(s_0 + \delta s, \sigma, t, r) + V_p(s_0 - \delta s, \sigma, t, r) - 2V_p(s_0, \sigma, t, r)}{\delta s^2} \quad (2)$$

$$\text{Vega} \approx \frac{V_p(s_0, \sigma + \delta \sigma, t, r) - V_p(s_0, \sigma - \delta \sigma, t, r)}{2\delta \sigma} \quad (3)$$

$$\text{Theta} \approx \frac{V_p(s_0, \sigma, t - \delta t, r) - V_p(s_0, \sigma, t + \delta t, r)}{2\delta t} \quad (4)$$

$$\text{Theta} \approx V_p(s_0, \sigma, t + 1, r) - V_p(s_0, \sigma, t, r) \quad (5)$$

$$\text{Rho} \approx \frac{V_p(s_0, \sigma, t, r + \delta r) - V_p(s_0, \sigma, t, r - \delta r)}{2\delta r} \quad (6)$$

有文档表示， δs 通常取 $0.005s_0$ ， $\delta \sigma$ 通常取 0.01σ ， δr 通常取 $0.01r$ 。

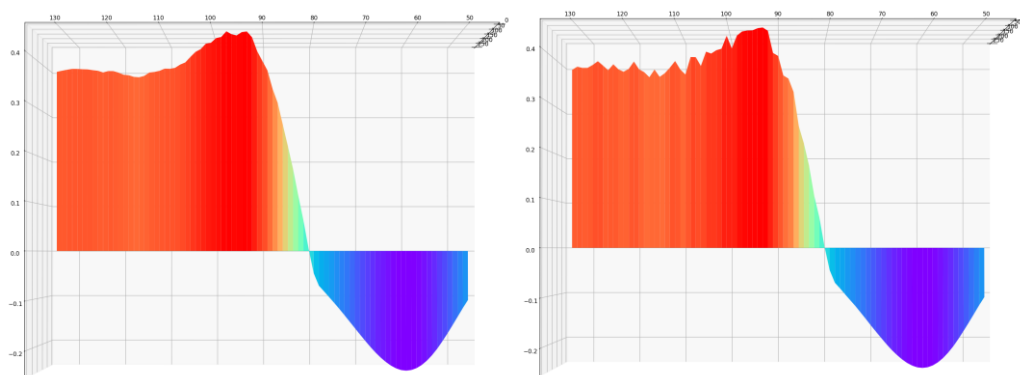
类似于在一条曲线上取两个间隔小距离的点并取其均值，使用的间隔小距离不同，得到的均值就会不同，所以即使相同参数计算得到的 V_p 完全一致，也会因为所取间隔小距离不同，而使计算得到的希腊值存在一些差异。

对于 Delta 和 Gamma 其变量都是标的价格，标的价格一般以相对的百分比发生变动，而不是以绝对的价格差发生变动，所以 δs 适用类似 $0.01s_0$ 这样作为区间取值。

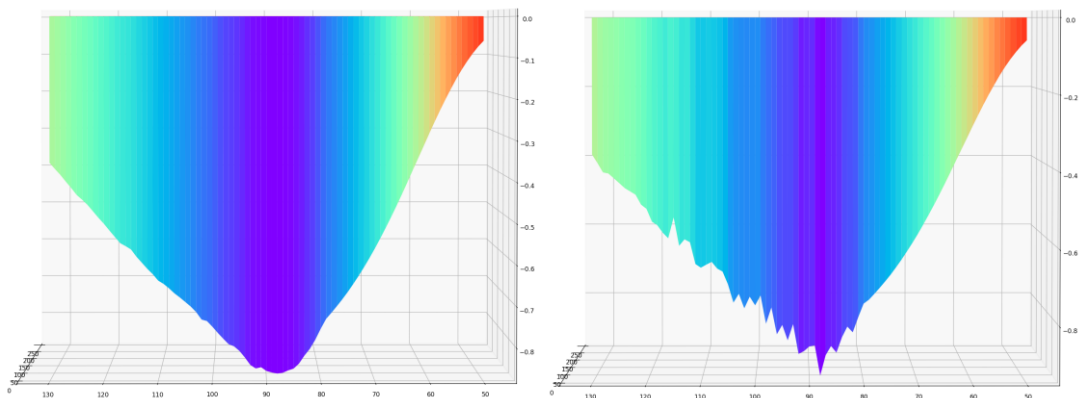
对于 Vega 和 Rho 其变量本身就是一个百分比率，而且变动范围不是很大，所以 $\delta \sigma$ 和 δr 使用类似 0.01 这样的绝对差值可能会比使用 0.01σ 和 $0.01r$ 来得均衡一些。

对于 Theta 有两种计算方式，式(4)中的 δt 一般取 $1/365$ ，主要用在欧式和美式香草的二叉树定价方法中，式(5)中的 $t+1$ 表示时间后移 1 天，一般用在雪球等路径依赖的蒙特卡洛定价方法中。

绘制希腊值曲线或曲面可以看到，差分区取值缩小会使结果毛糙离散，差分区取值扩大会使结果平滑连续。计算 Vega 和 Rho 时的区间取值方法也可从这方面进行考量。



某参数下 Airbag 结构 Vega 曲线，10 万路径， $\delta\sigma$ 取 0.01（左）和 0.01σ （右）



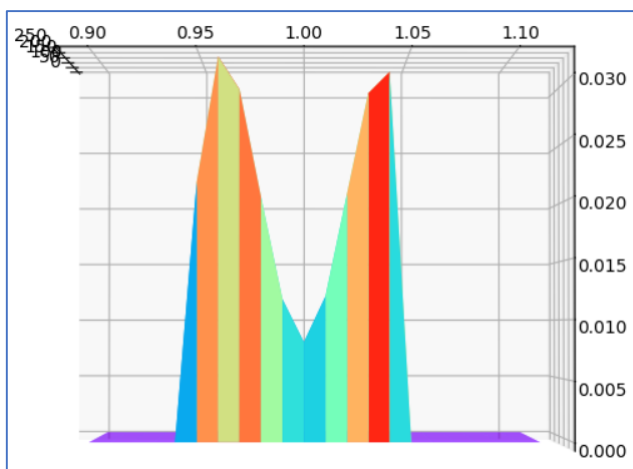
某参数下 Airbag 结构 Rho 曲线，10 万路径， δr 取 0.01（左）和 $0.01r$ （右）

关于鲨鱼鳍期末边界精度影响

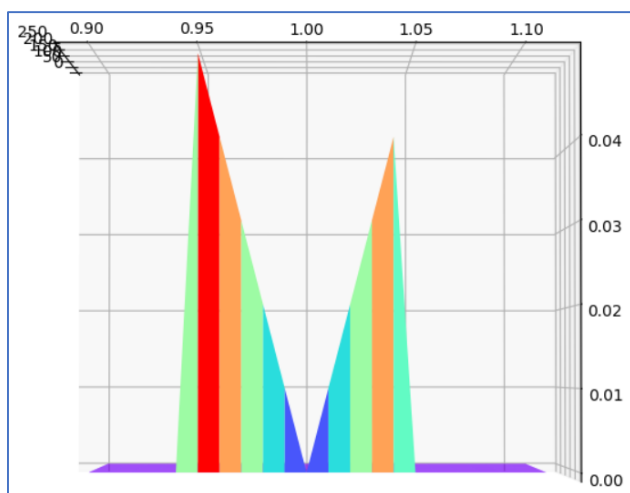
使用蒙特卡洛方法计算鲨鱼鳍结构定价时，因为最后一两天路径价格只变动一两次，就会在边界数值比较时体现精度问题。

比如初始价格在 1.0，向下敲出 0.95，向上敲出 1.05 的结构，在期末最后一天，尤其是将计算模式设为收盘后，这样参与边界值比较计算的价格就是给定的价格序列，1.05 可能因为精度问题取不到，需要设为类似 1.0501 才能与下边界 0.95 在判断上达到一致。

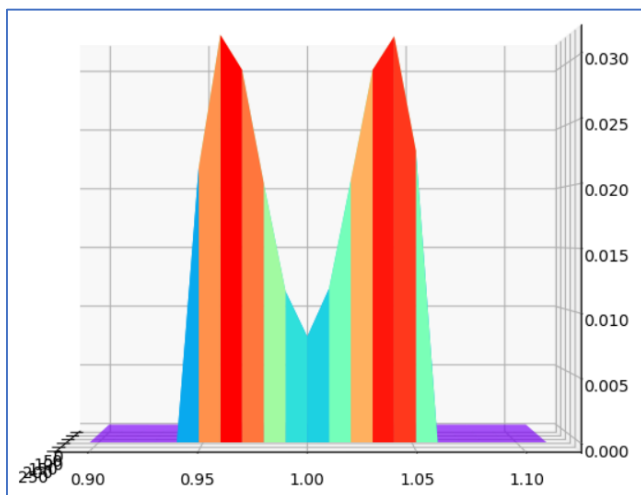
$s=1.0$, $h_l=0.95$, $h_h=1.05$, $k_l=1.0$, $k_h=1.0$, $x_l=0.0$, $x_h=0.0$



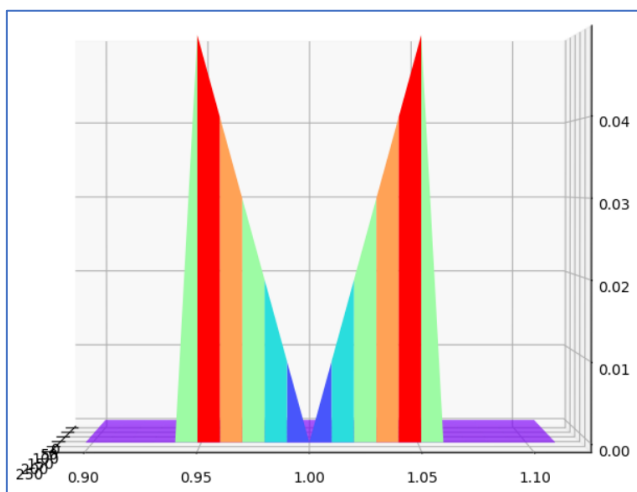
精度导致上下边界判断不一致 payoff 值出现差异（次末日，已收盘）



精度导致上下边界判断不一致 payoff 值出现差异（末日，已收盘）

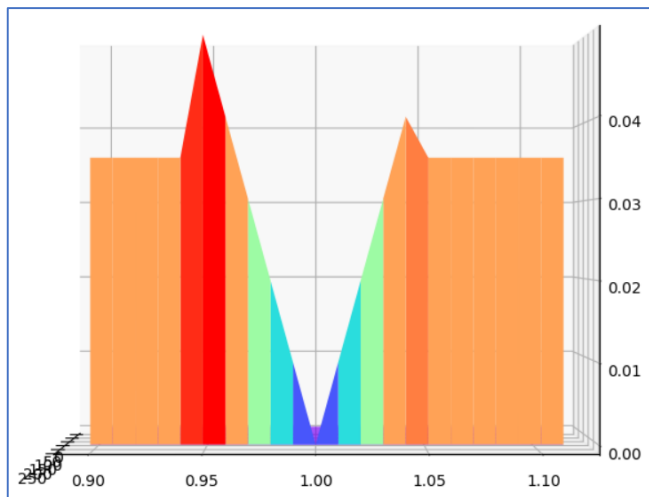


价格序列间隔 0.01，上下边界调整为 0.95-1.051（次末日，已收盘）

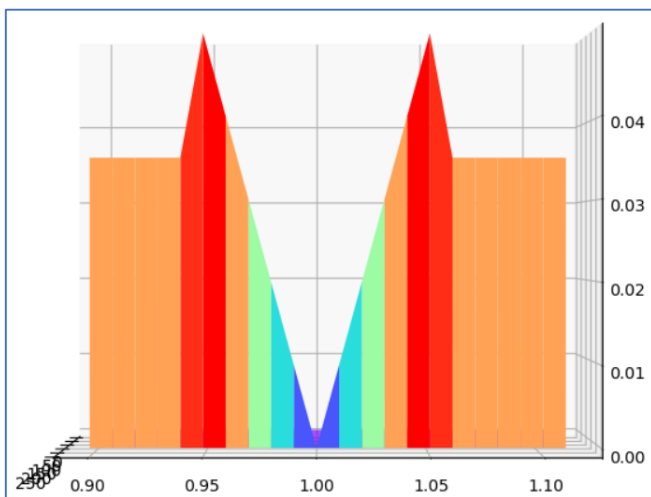


价格序列间隔 0.01，上下边界调整为 0.95-1.051（末日，已收盘）

$s=1.0$, $h_l=0.95$, $h_h=1.05$, $k_l=1.0$, $k_h=1.0$, $x_l=0.035$, $x_h=0.035$



精度导致上下边界判断不一致 payoff 值出现差异（末日，已收盘）



价格序列间隔 0.01，上下边界调整为 0.95-1.051（末日，已收盘）

看涨与看跌的不对等，在期权费上也有体现，应该是同样的价差，百分比上，上涨再上涨所需比率小更容易，下跌再上涨所需所需比率大更困难，导致的，这样也使得同样价差的看跌鲨鱼鳍要比看涨鲨鱼鳍来得贵。涨跌比率即收益率是正态分布，但价格就不是正态分布了。

d_out	d_end	u_end	u_out
49171	612	578	49152
49396	653	630	48796
49120	687	631	49049
49290	671	591	48919
49387	700	624	48761

确实是看跌的更容易被行权或敲出。

关于鲨鱼鳍期权费对希腊值的影响

由希腊值的计算方法决定，类似鲨鱼鳍的奇异期权结构，其期权费对希腊值计算的影响在计算过程中会因相减而抵消，只有 Theta 值会体现一些不同期权费的影响。

比如某看涨鲨鱼鳍结构，在价格 90.0、91.0、92.0 时的 Payoff 值如下：

期权费 0.017: 0.0337817297、-0.0481971627、-0.1231267441

Payoff 值之差: 0.0819788924、0.0749295814

期权费 0.013: -0.3691800009、-0.4511588933、-0.5260884747

Payoff 值之差: 0.0819788924、0.0749295814

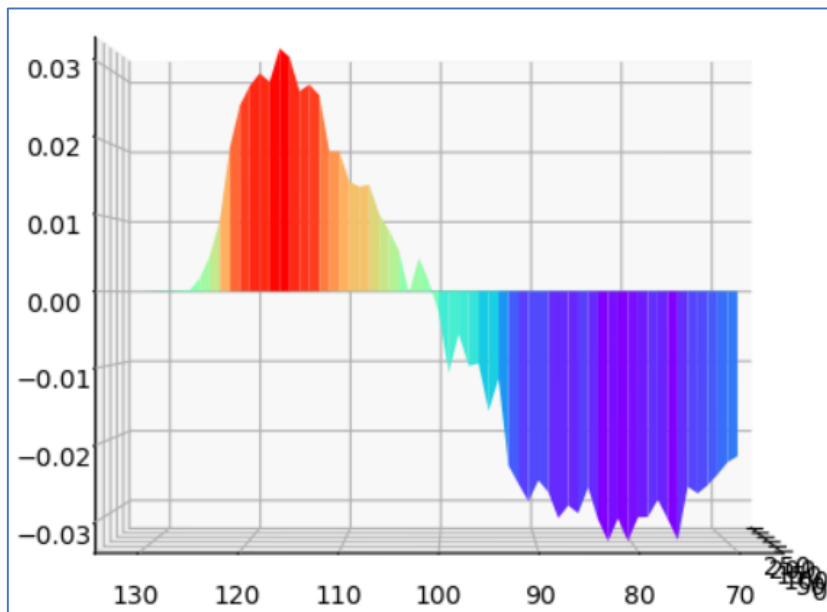
期权费 0.000: -1.6806189532、-1.7625978458、-1.8375274272

Payoff 值之差: 0.0819788924、0.0749295814

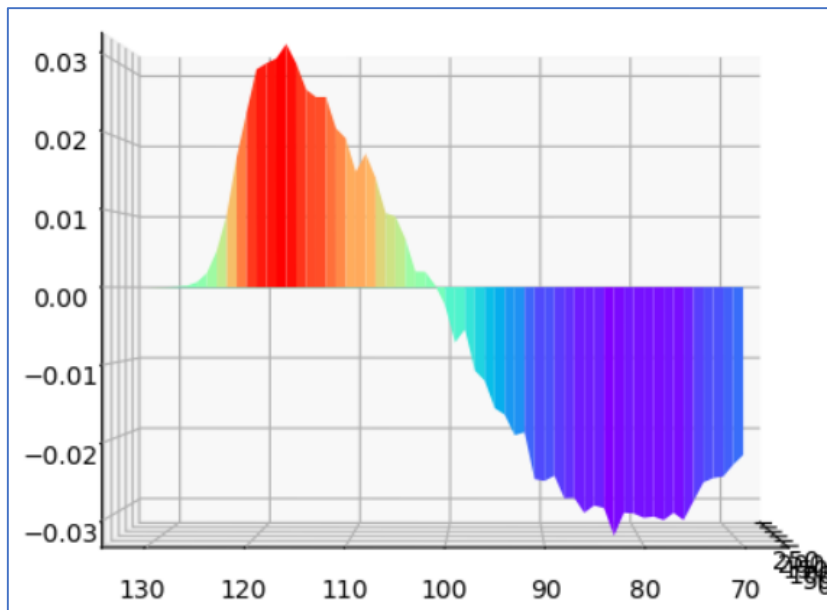
同一日相同价格点不同期权费下的 Payoff 值不同，但价格点之间的 Payoff 差在 10 位小数的精度下完全相同。不同日的 Payoff 会因贴现体现期权费差异而影响 Theta 值。

鲨鱼鳍 Delta 曲线与差分单位

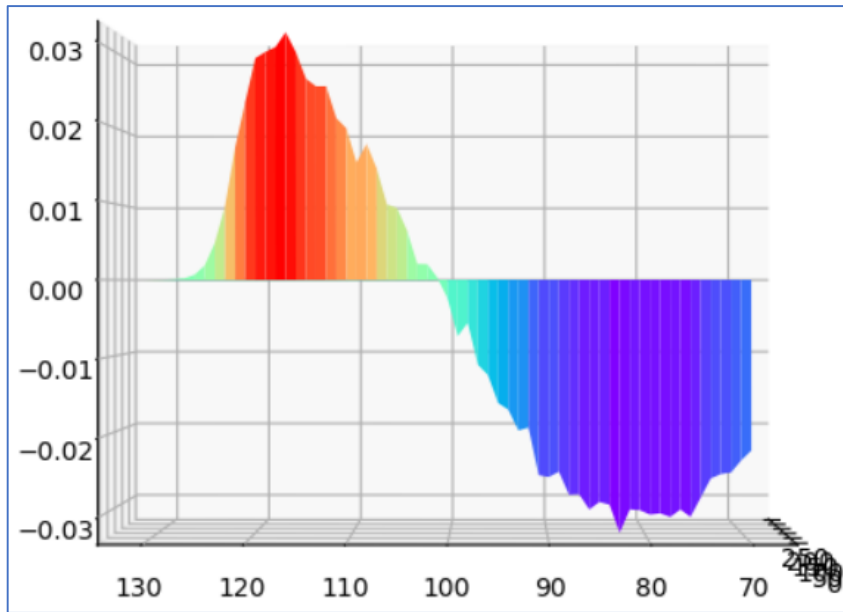
看涨单鲨-0531-100-120-0.5%-25.0%-7.0%-3.0%-12M-美式到期支付



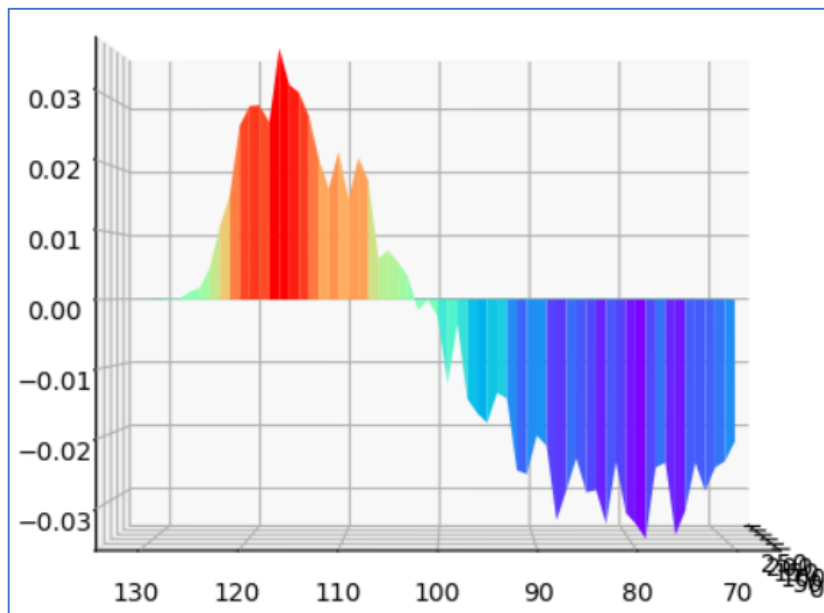
Delta: 路径 100 万条, 变动 0.001



Delta: 路径 100 万条, 变动 0.005

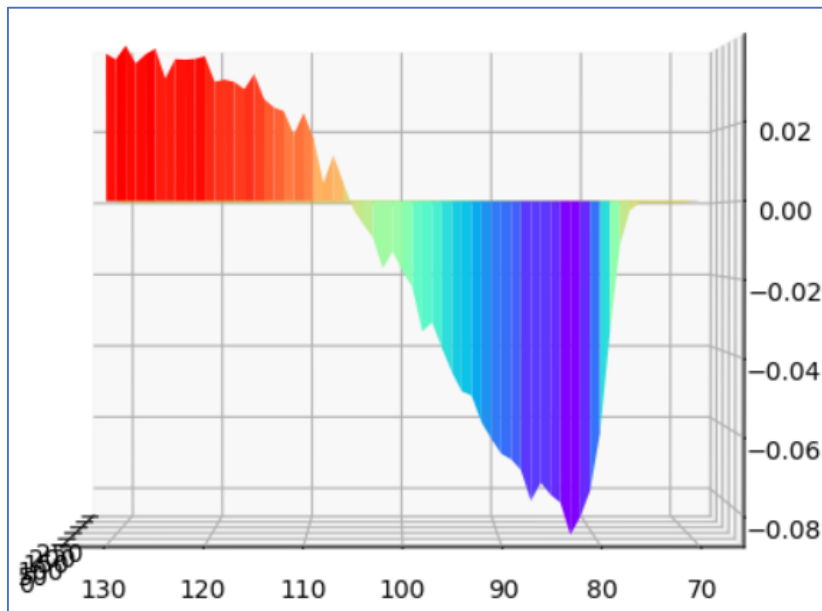


Delta: 路径 100 万条, 变动 0.01

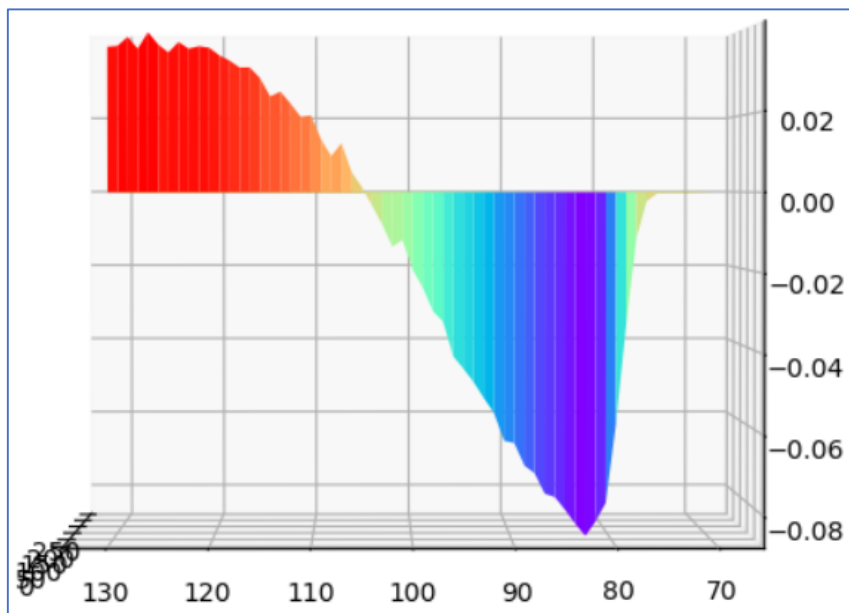


Delta: 路径 10 万条, 变动 0.01

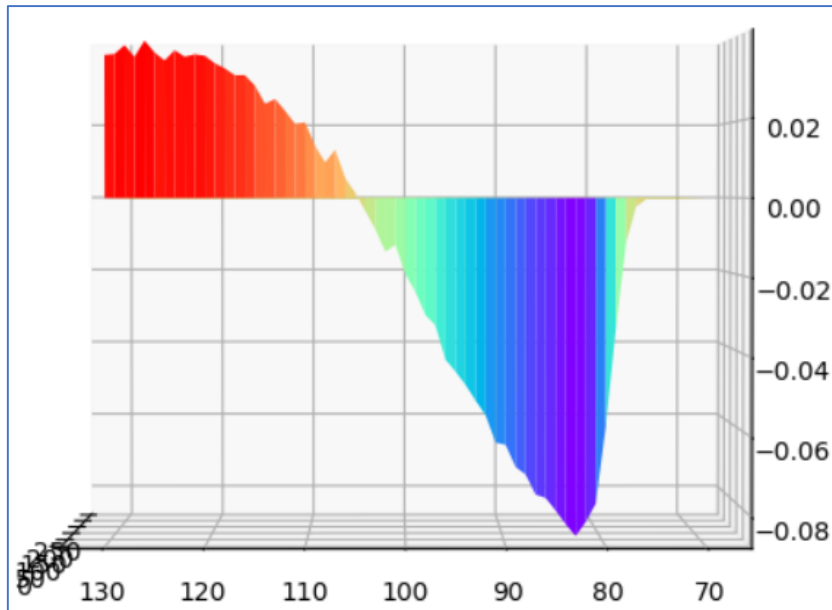
看跌单鲨-0531-100-80-0.5%-25.0%-7.0%-3.0%-12M-美式到期支付



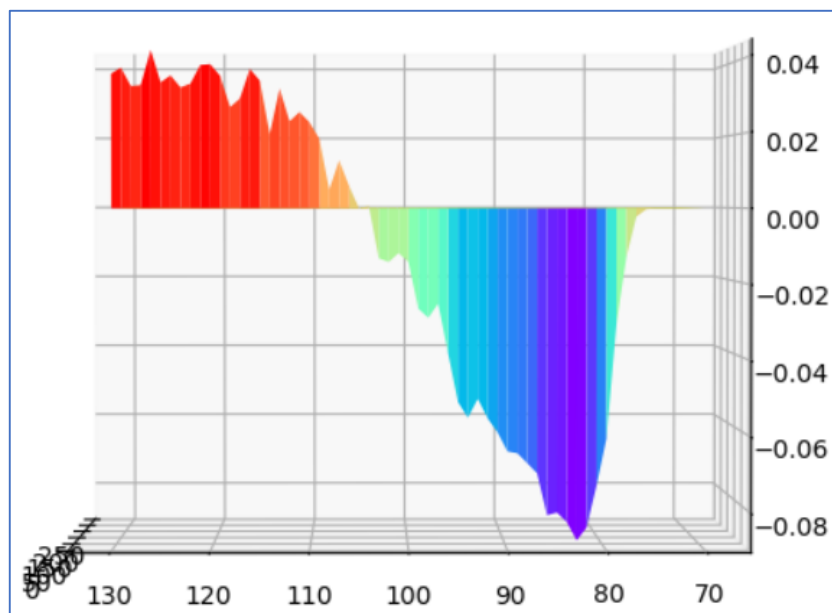
Delta: 路径 100 万条, 变动 0.001



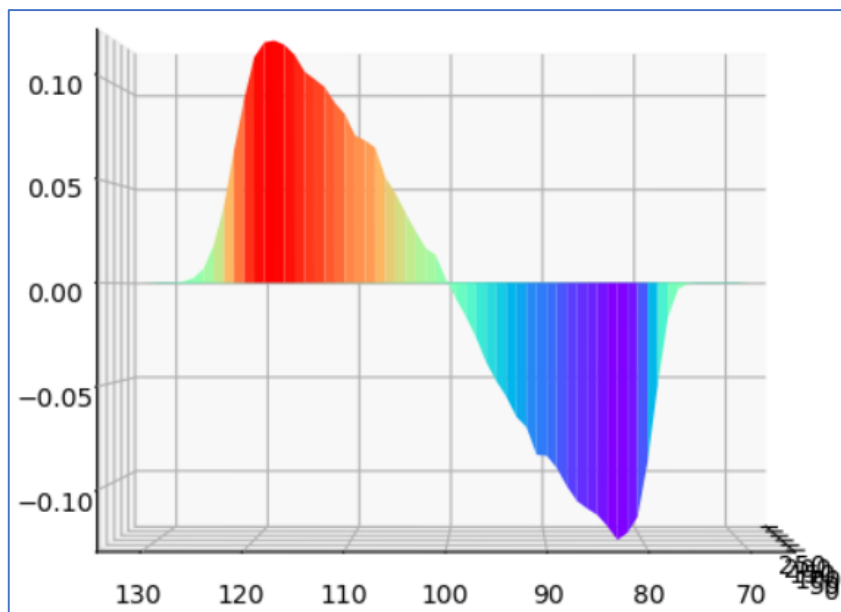
Delta: 路径 100 万条, 变动 0.005



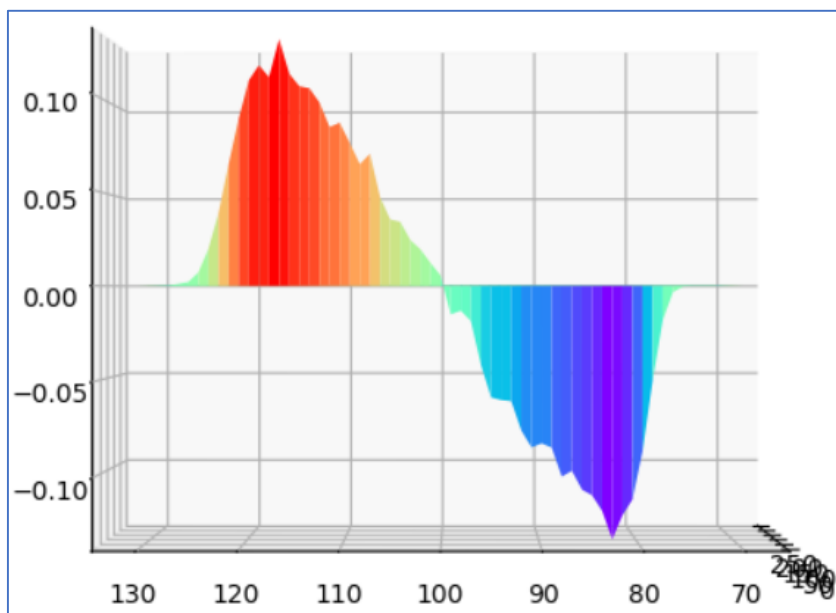
Delta: 路径 100 万条, 变动 0.01



Delta: 路径 10 万条, 变动 0.01



Delta: 双鲨, 路径 100 万条, 变动 0.01

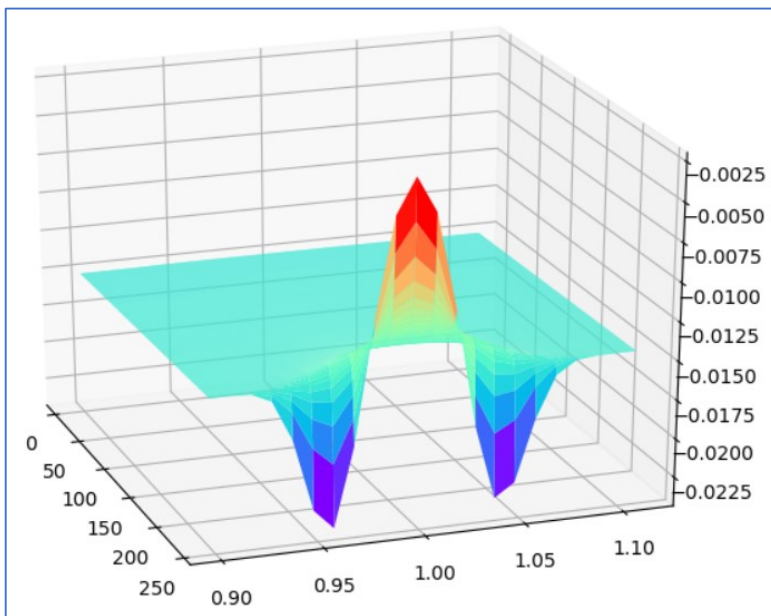


Delta: 双鲨, 路径 10 万条, 变动 0.01

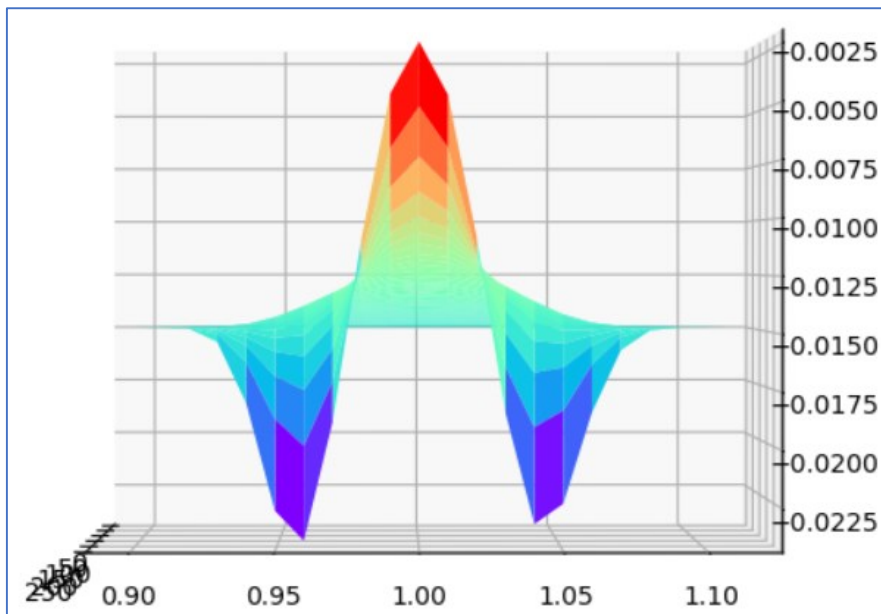
类似上述常见的看涨看跌鲨鱼鳍结构, 在初始价格附近, 尤其是看涨的, Delta 在 0.00XX 接近于零, 和同余等就无法比对。另外 Dual Smooth 对平滑 Delta 曲线效果不明显。

双鲨 Payoff 和 Delta 曲面平直问题

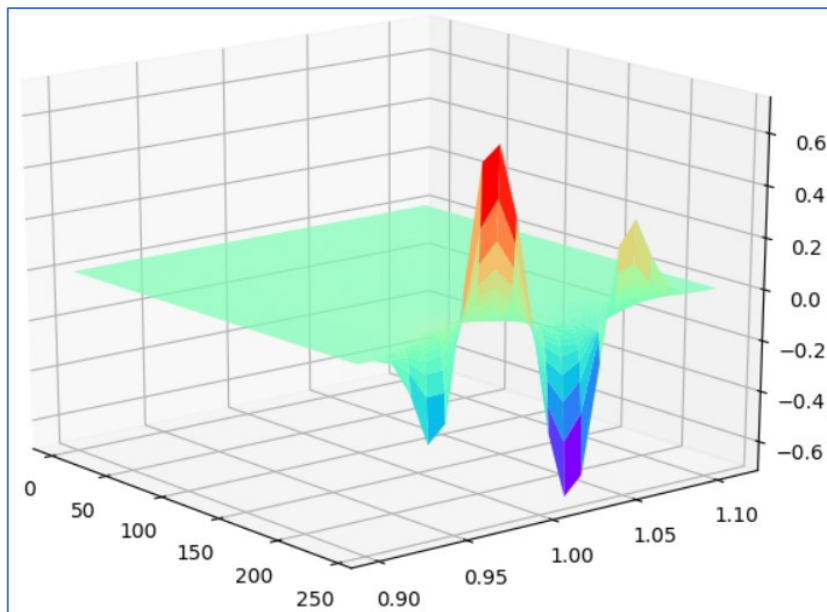
双鲨-95-105-1.5%-18.0%-3.0%-2.0%-12M-美式立即支付



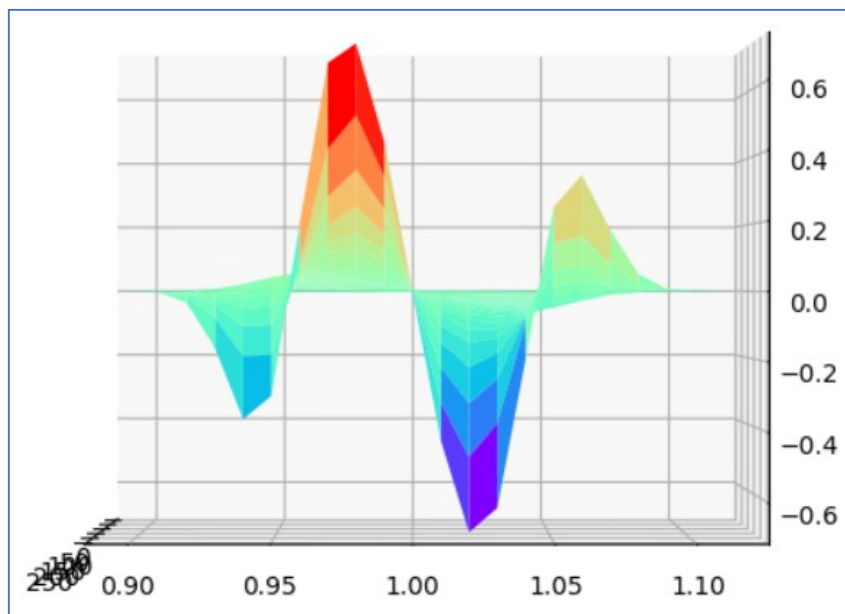
Payoff: 双鲨, 路径 20 万条



Payoff: 双鲨, 路径 20 万条



Delta: 双鲨, 路径 20 万条, 变动 0.01

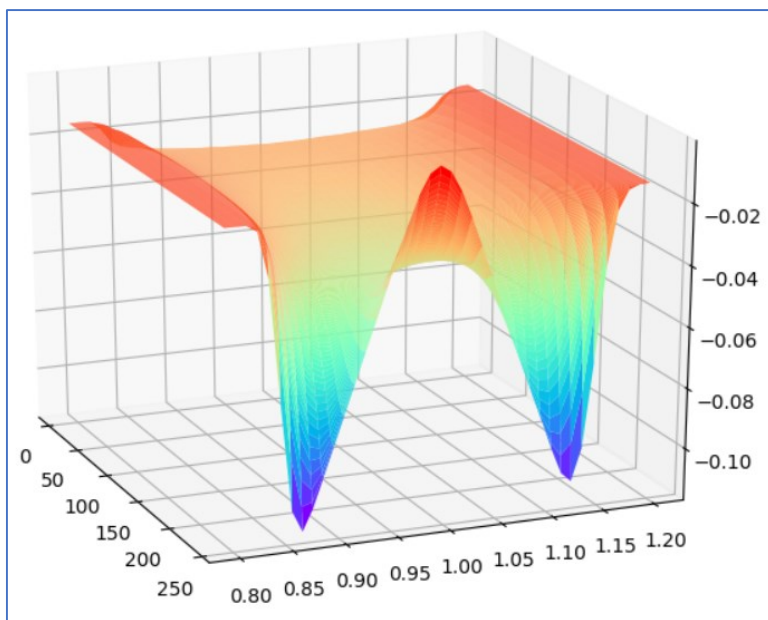


Delta: 双鲨, 路径 20 万条, 变动 0.01

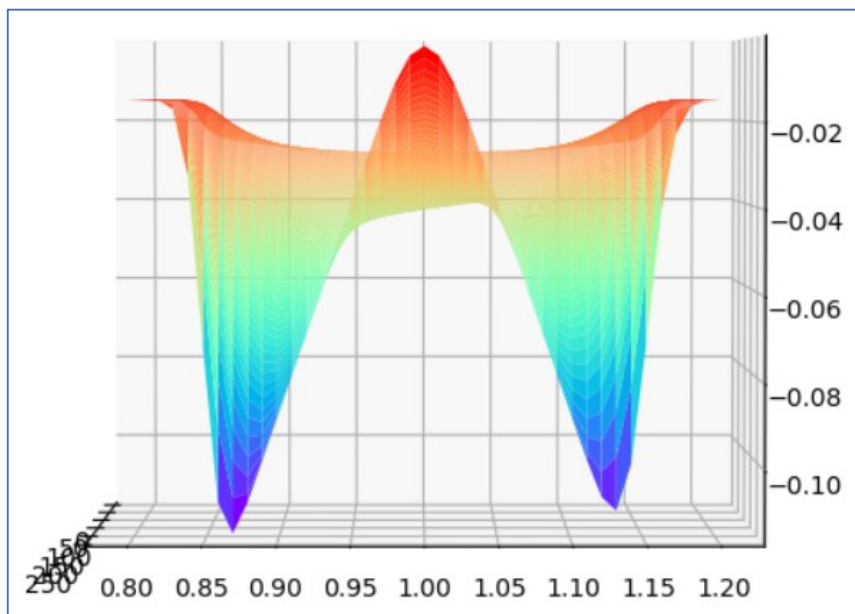
曲面平直是由于双边区间较小，波动率和产品周期导致几乎所有路径都会发生敲出导致，只有接近到期时才会有不敲出的路径，敲出路径不贴现的话 Payoff 都为敲出票息进而 Delta 几乎为零，而向客户收取的期权费率会等于几乎必然敲出的赔付比率。

看涨或看跌的单鲨，因为无敲出线的一边没有赔付，所以其 Payoff 和 Delta 曲面不平直。增大双鲨的双边区间，Payoff 和 Delta 曲面就会发生变动。

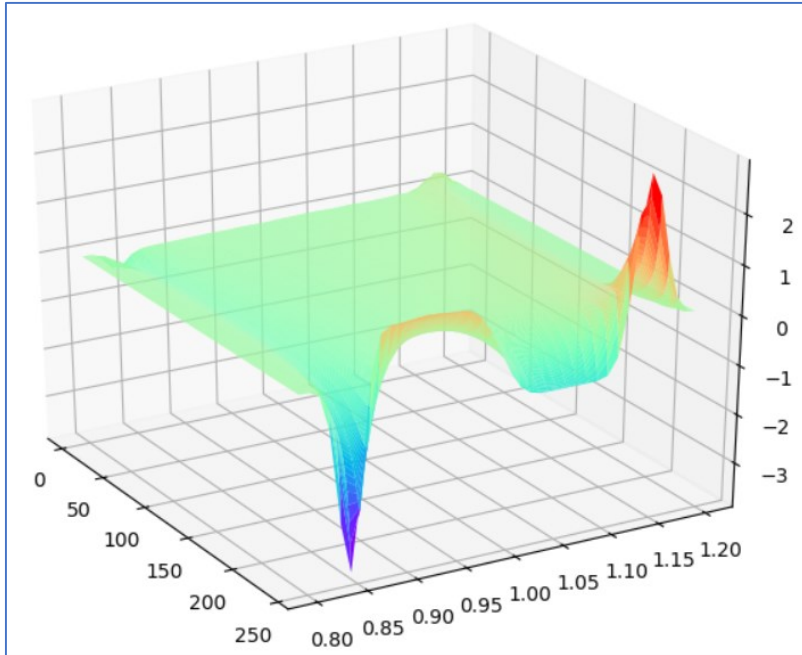
双鲨-85-115-1.5%-18.0%-3.0%-2.0%-12M-美式立即支付



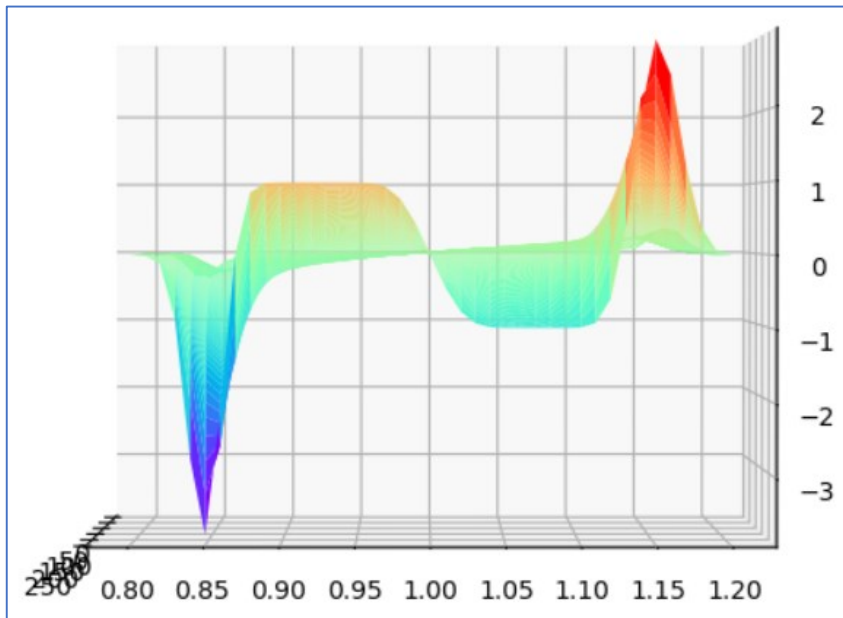
Payoff: 双鲨，路径 20 万条



Payoff: 双鲨，路径 20 万条



Delta: 双鲨, 路径 20 万条, 变动 0.01



Delta: 双鲨, 路径 20 万条, 变动 0.01

其他可以考虑的细节

- 1、产品结束支付票息一般会延后一两天，可以在定价贴现时考虑在天数上增加一个可由用户设置的付息延后天数偏移入参。(Mozixia) -- 此功能已实现
- 2、