

# Übungsblatt 6

Datenstrukturen und Algorithmen (SS 2022)

Abgabe: Montag, 30.05.2022, 15:30 Uhr — Besprechung: ab Montag, 13.06.2022

**Abgabevorschriften:** Die Aufgaben auf diesem Blatt sind unter Einhaltung der Abgabevorschriften<sup>1</sup> zu lösen und abzugeben.

**Lernziele:** Nach dem Tutorium zu diesem Blatt sollten Sie folgende Lernziele erreicht haben. Wenn nicht, zögern Sie nicht, Ihre:n Tutor:in anzusprechen um die Lücken zu füllen, Unklarheiten zu klären oder Fragen zu beantworten.

- Sie können Graphen, Graphenelemente, verschiedene Arten von Graphen, Pfade und zusammenhängende Teilgraphen erkennen und mit Fachbegriffen beschreiben.
- Sie kennen die folgenden verschiedenen Darstellungen von Graphen: Kantenlisten, Knotenlisten, Adjazenzmatrizen und Adjazenzlisten. Sie können den Graphen in diesen Darstellungen erstellen, updaten, in Java implementieren und die Komplexität der darauf möglichen Operationen abschätzen.
- Sie können einen Graph von einer der Darstellungen in jede der anderen Darstellungen transformieren.
- Sie können zu einem gegebenen Szenario bestimmen, welche Darstellungsform von Graphen am besten geeignet ist.
- Sie wissen, was ein Euler'scher Weg, Euler'scher Kreis, Hamilton'scher Weg und Hamilton'scher Kreis ist und welche Eigenschaften diese haben.

**Punkte:** Dieses Übungsblatt beinhaltet 5 Aufgaben mit einer Gesamtzahl von 30 Punkten. Zum Bestehen werden also 15 Punkte benötigt.

## Aufgabe 1 Grundlegendes Verständnis von Graphen [Punkte: 7]

Gegeben sei der Graph  $G_1$  als Kantenliste:

$G_1 = 5, 12, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 2, 1, 2, 2, 2, 3, 2, 5, 3, 1, 3, 2, 5, 1, 5, 2$

- (1 Punkt) Zeichnen Sie  $G_1$  als **Knoten-Kanten-Diagramm** (Visualisierung s. VL Foliensatz 11, Folien 6-12).
- (2 Punkte) Geben Sie sowohl eine **Knotenliste** sowie eine **Adjazenzmatrix** an, welche  $G_1$  repräsentieren.
- (3 Punkte) Beantworten Sie folgende Fragen zu den Eigenschaften von  $G_1$ :
  - Welcher Knoten hat die meisten eingehenden Kanten? Nennen Sie den entsprechenden Knoten sowie die Anzahl der eingehenden Kanten.
  - Besitzt  $G_1$  Zyklen? Falls ja, geben Sie einen an. Falls nein, begründen Sie wieso nicht. Eine Antwort ohne Angabe eines Zyklus bzw. Begründung wird mit null Punkten bewertet.
  - Ist  $G_1$  ein gerichteter oder ungerichteter Graph? Begründen Sie Ihre Antwort. Eine Antwort ohne Begründung wird mit null Punkten bewertet.
  - Ist  $G_1$  gewichtet? Begründen Sie Ihre Antwort. Eine Antwort ohne Begründung wird mit null Punkten bewertet.
  - Besitzt  $G_1$  **Schleifen**? Falls ja, geben Sie eine an. Falls nein, begründen Sie wieso nicht. Eine Antwort ohne Begründung wird mit null Punkten bewertet.
  - Besitzt  $G_1$  einen Pfad von 4 nach 5? Falls ja, geben Sie die Knoten an, die besucht werden. Falls nein, begründen Sie weshalb es keinen Pfad gibt. Eine Antwort ohne Angabe der besuchten Knoten bzw. Begründung wird mit null Punkten bewertet.

<sup>1</sup>[https://ilias3.uni-stuttgart.de/goto\\_Uni\\_Stuttgart\\_file\\_2904210.html](https://ilias3.uni-stuttgart.de/goto_Uni_Stuttgart_file_2904210.html)

- (d) (1 Punkt) Erklären Sie den Unterschied zwischen Bäumen und Graphen. Wie hängen sie miteinander zusammen? Nutzen Sie Fachbegriffe und beziehen Sie sich auf die Definitionen aus der Vorlesung.

**Aufgabe 2** Komplexität unterschiedlicher Repräsentationen von Graphen [Punkte: 5]

Im Folgenden sind die effizientesten Realisierungen von Graphen für unterschiedliche Anwendungsfälle gesucht. Markieren Sie für jedes Szenario, welche Realisierung am effizientesten ist. Falls es mehrere Realisierungen gibt, die gleich schnell sind, markieren Sie alle. Begründen Sie außerdem Ihre Auswahl und geben Sie dabei zu jedem Anwendungsfall an, welche Komplexität (in  $\mathcal{O}$ -Notation) vorliegt. Eine Antwort ohne Begründung wird mit null Punkten bewertet.

- (a) (1 Punkt) Fall 1: Zu einem existierenden Graphen sollen mehrere Paare aus neuem Knoten und neuer Kante hinzugefügt werden.  
☒ Kantenliste   ☐ Knotenliste   ☐ Adjazenzmatrix   ☐ Adjazenliste
- (b) (1 Punkt) Fall 2: Einige Kanten eines Graphen sollen manipuliert werden, d.h. ihr Start- oder Endknoten muss verändert werden.  
☐ Kantenliste   ☐ Knotenliste   ☒ Adjazenzmatrix   ☐ Adjazenliste
- (c) (1 Punkt) Fall 3: Aus einem Graphen sollen viele Kanten entfernt werden.  
☐ Kantenliste   ☐ Knotenliste   ☒ Adjazenzmatrix   ☐ Adjazenliste
- (d) (1 Punkt) Fall 4: Es soll für einen gegebenen Graphen bestimmt werden, ob die Knoten  $v_1$  und  $v_2$  durch eine Kante verbunden sind.  
☐ Kantenliste   ☐ Knotenliste   ☒ Adjazenzmatrix   ☐ Adjazenliste
- (e) (1 Punkt) Wieso ist der Aufwand für das Löschen eines Knoten bei sämtlichen Realisierungen verglichen mit anderen Operationen, wie Löschen einer Kante, sehr hoch? Begründen Sie Ihre Antwort. Eine Antwort ohne Begründung wird mit null Punkten bewertet.

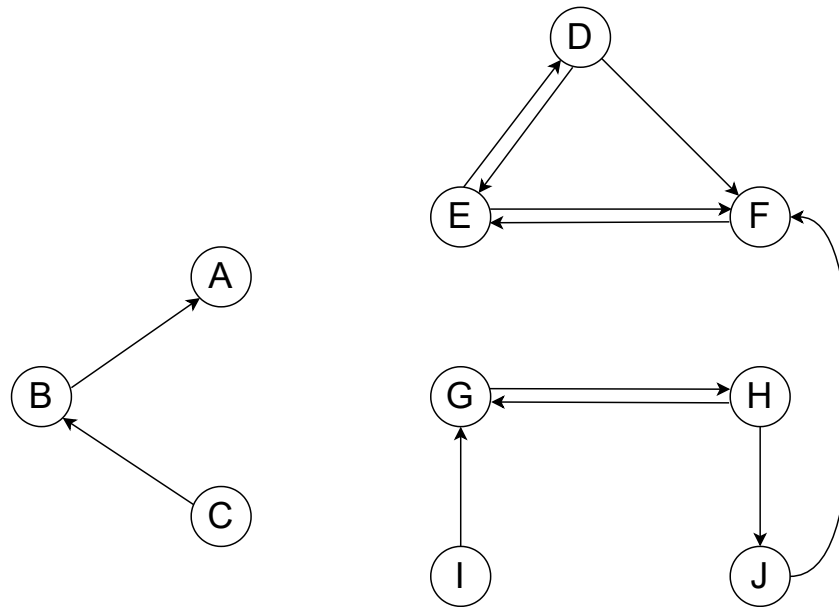
**Aufgabe 3** [Impl] Kantenliste und Knotenliste in Java implementieren [Punkte: 8]

In den beiden vorangegangenen Aufgaben haben Sie sich bereits auf theoretischer Ebene mit unterschiedlichen Repräsentationen von Graphen auseinandergesetzt. In dieser Aufgabe sollen Sie nun für die Graphdarstellungsformen *Kantenliste* und *Knotenliste* eine Konvertierung von und zu Adjazenlisten implementieren. Hierfür sind im Eclipse-Projekt folgende Codefragmente gegeben:

- Schnittstelle `IEdge` und bereits implementierte Klasse `Edge`
  - Schnittstelle `IWeightedGraph` und unvollständige Klasse `WeightedGraph`, in der ein Graph als Adjazenliste implementiert ist
- (a) (4 Punkte) Realisieren Sie eine Transformation der Darstellung eines Graphen von Kantenliste zur Adjazenliste, die in `WeightedGraph` vorgegeben ist, und wieder zurück. Implementieren Sie hierfür die beiden Methoden `createFromEdgeList` und `toEdgeList` in der Klasse `WeightedGraph`
- (b) (4 Punkte) Realisieren Sie eine Transformation der Darstellung eines Graphen von Knotenliste zur Adjazenliste, die in `WeightedGraph` vorgegeben ist, und wieder zurück. Implementieren Sie hierfür die beiden Methoden `createFromNodeList` und `toNodeList` in der Klasse `WeightedGraph`

*Hinweise:*

- Lesen Sie den vorgegebenen Code sorgfältig.
- Achten Sie beim Implementieren auf die zugehörigen Kommentare in den Interface Klassen.
- Werfen Sie in den von Ihnen implementierten Methoden `UnsupportedOperationException` und `IllegalArgumentException`, wenn angemessen.
- Sie dürfen die vorgegebenen Methoden, wie z.B. `edgeIterator`, `addEdge`, etc. in Ihrer Lösung verwenden, wenn Sie dies für sinnvoll erachten.

**Aufgabe 4** Zusammenhang in Graphen [Punkte: 4]Gegeben sei der folgende Graph  $G_2$ :

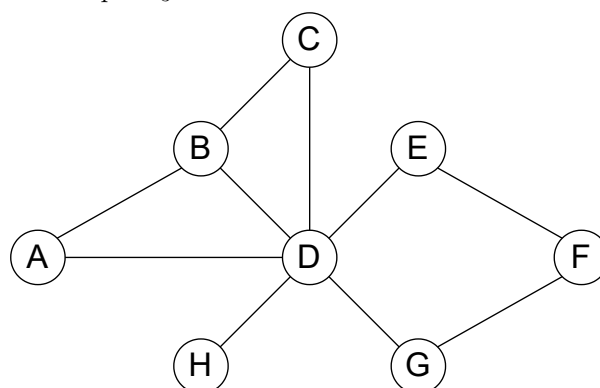
- (a) (1 Punkt) Bestimmen Sie alle in  $G_2$  enthaltenen **maximalen zusammenhängenden starken Zusammenhangskomponenten** und geben Sie diese an.
- (b) (1 Punkt) Bestimmen Sie alle in  $G_2$  enthaltenen *maximalen zusammenhängenden schwachen Zusammenhangskomponenten* und geben Sie diese an.
- (c) (2 Punkte) 🦋 Ist die folgende Aussage wahr? Falls ja, begründen Sie, warum dies der Fall ist (ein formaler Beweis ist nicht nötig). Falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an und erklären Sie es.

*Für alle  $k > 1$  gilt: Damit ein Graph mit insgesamt  $k$  Knoten nur eine starke Zusammenhangskomponente besitzen kann, muss er mindestens  $k$  Kanten besitzen.*

**Aufgabe 5** Euler und Hamilton [Punkte: 6]

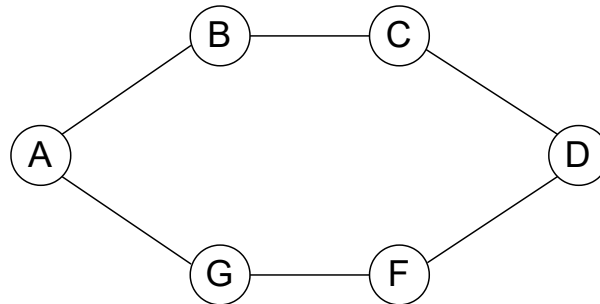
In dieser Aufgabe werden erste wichtige topologische Probleme auf Graphen besprochen.

- (a) Gegeben sei der folgende Graph  $G_3$ :



- i. (1 Punkt) Gibt es in dem gegebenen Graphen  $G_3$  einen **Euler'schen Weg**? Falls ja, geben Sie eine Reihenfolge an, in der die Knoten besucht werden. Falls nein, begründen Sie weshalb nicht. Eine Antwort ohne Angabe der besuchten Knoten bzw. Begründung wird mit null Punkten bewertet.
- ii. (1 Punkt) Gibt es in dem gegebenen Graphen  $G_3$  einen **Euler'schen Kreis**? Falls ja, geben Sie eine Reihenfolge an, in der die Knoten besucht werden. Falls nein, begründen Sie weshalb nicht. Eine Antwort ohne Angabe der besuchten Knoten bzw. Begründung wird mit null Punkten bewertet.

- iii. (1 Punkt) Gibt es in dem gegebenen Graphen  $G_3$  einen **Hamilton'schen Weg**? Falls ja, geben Sie eine Reihenfolge an, in der die Knoten besucht werden. Falls nein, begründen Sie weshalb nicht. Eine Antwort ohne Angabe der besuchten Knoten bzw. Begründung wird mit null Punkten bewertet.
- iv. (1 Punkt) Gibt es in dem gegebenen Graphen  $G_3$  einen **Hamilton'schen Kreis**? Falls ja, geben Sie eine Reihenfolge an, in der die Knoten besucht werden. Falls nein, begründen Sie weshalb nicht. Eine Antwort ohne Angabe der besuchten Knoten bzw. Begründung wird mit null Punkten bewertet.
- (b) Gegeben sei der folgende Graph  $G_4$ , welcher sowohl einen *Euler'schen Kreis* wie auch einen *Hamilton'schen Kreis* enthält:



- i. (1 Punkt) 🦋 Variieren Sie  $G_4$  durch Hinzufügen neuer Kanten und Knoten so, dass zwar ein **Euler'scher Kreis**, aber **kein Hamilton'scher Weg** vorliegt. Der sich ergebende Graph werde als  $G_5$  bezeichnet. Zeichnen Sie  $G_5$  und beschreiben Sie, weshalb  $G_5$  die geforderten Eigenschaften erfüllt.
- ii. (1 Punkt) 🦋 Variieren Sie  $G_4$  durch Hinzufügen neuer Kanten und Knoten so, dass zwar ein **Hamilton'scher Kreis**, aber **kein Euler'scher Weg** vorliegt. Der sich ergebende Graph werde als  $G_6$  bezeichnet. Zeichnen Sie  $G_6$  und beschreiben Sie, weshalb  $G_6$  die geforderten Eigenschaften erfüllt.