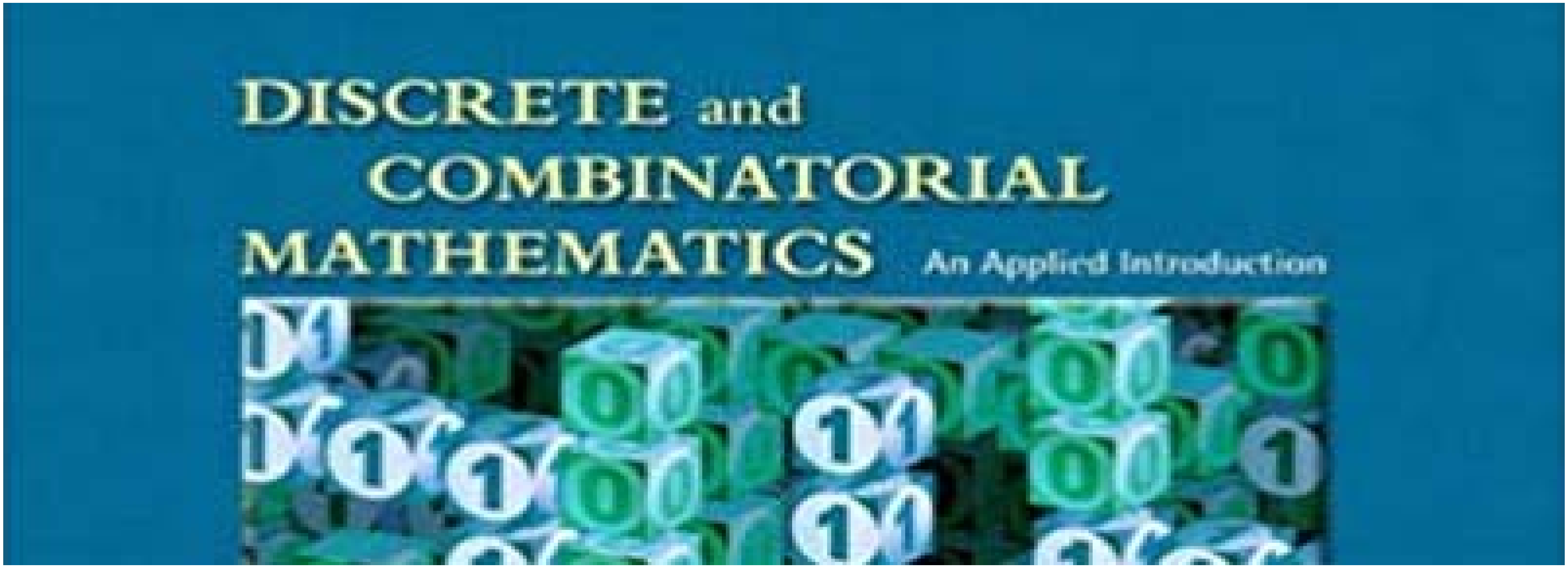

مبانی ترکیبیات

معرفی و سرفصل

استاد درس: مریم طهماسبی – گروه علوم کامپیوتر
دانشگاه شهید بهشتی

DISCRETE AND COMBINATORIAL MATHEMATICS

An Applied Introduction

FIFTH EDITION

RALPH P. GRIMALDI

Rose-Hulman Institute of Technology

منبع:

Discrete and combinatorial mathematics, R. Grimaldi, 5th ed.

سرفصل درس

۱- مبانی شمارش (فصل ۱ کتاب)

۲- خواص اعداد صحیح: استقرای ریاضی (فصل ۴ کتاب)

۳- تابع‌ها (قسمتی از فصل ۵ کتاب)

۴- رابطه‌ها (قسمتی از فصل ۷ کتاب)

۵- اصل شمول و طرد (فصل ۸ کتاب)

۶- تابعهای مولد (فصل ۹ کتاب)

۷- رابطه های بازگشتی (فصل ۱۰ کتاب)

۸- نظریه گراف (فصلهای ۱۱و ۱۲)

اصل خوش ترتیبی

- مجموعه اعداد صحیح و رابطه $<$ را در نظر بگیرید. در این مجموعه، هر دو عدد با رابطه $<$ قابل مقایسه هستند، یعنی برای هر دو عدد صحیح x و y داریم x<y یا y<x.

$$\mathbf{Z}^+ = \{x \in \mathbf{Z} | x > 0\} = \{x \in \mathbf{Z} | x \geq 1\}.$$

Z^+ را می‌توان به صورت دوم نوشت، اما Q^+ یا R^+ را نمی‌توان

$$\mathbf{Q}^+ = \{x \in \mathbf{Q} | x > 0\} \quad \text{and} \quad \mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R} | x > 0\},$$

اصل خوش ترتیبی

- اصل خوش ترتیبی: در Z^+ به ازای هر زیرمجموعه می‌توانیم عددی مانند a پیدا کنیم که از همه اعضای آن زیرمجموعه کوچکتر باشد. معمولا می گوییم Z^+ خوش ترتیب است.

استقرای ریاضی

قضیه (استقرای ریاضی): فرض کنید $s(n)$ عبارتی باشد که به ازای هر عدد صحیح مثبت n تعریف شده است و در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) $s(1)$ درست است. **پایه استقرا**

ب) هرگاه به ازای یک عدد صحیح k، $s(k)$ درست باشد، بتوان نتیجه گرفت $s(k+1)$ درست است. **پله استقرا**

در این صورت $s(n)$ به ازای هر عدد صحیح نامنفی درست است.

استقرای ریاضی

اثبات:

فرض کنید برای عبارت s(n) شرایط الف و ب برقرار باشند و

$$F = \{t \in \mathbf{Z}^+ | S(t) \text{ is false}\}$$

نشان می دهیم F تهی است.

فرض کنید چنین نباشد. پس F به عنوان زیرمجموعه‌ای از Z^+ دارای کوچکترین عضو a>1 است. حال، a-1 در F نیست، پس s(a-1) برقرار است و بنا بر بند (ب)، باید s(a) هم درست باشد. که تناقض است.

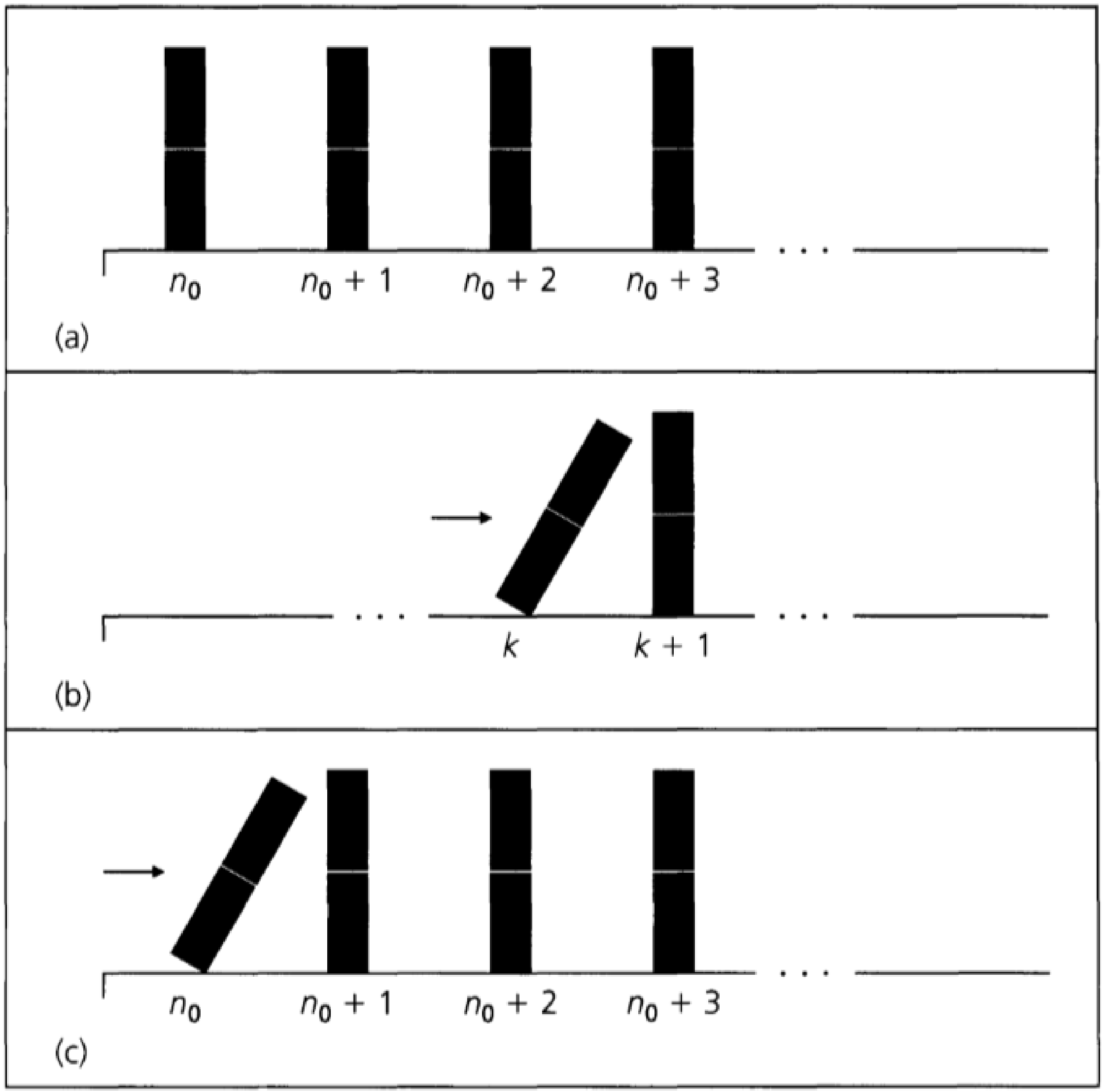

Figure 4.1

استقرای قوی ریاضی

- قضیه: فرکنید $S(n)$ ،(n گزاره ریاضی بر حسب n باشد و $n_0, n_1 \in \mathbf{Z}^+$ به صورتی که $n_0 \le n_1$
- اگر $S(n_0), S(n_0+1), S(n_0+2), \ldots, S(n_1-1), \text{and } S(n_1)$ همگی درست باشند،
- اگر درستی $S(n_0), S(n_0+1), \ldots, S(k-1), \text{and } S(k)$ برای $k \in \mathbf{Z}^+, \text{where } k \ge n_1$ ، درستی $S(k+1)$ را نتیجه دهد،

آنگاه $S(n)$ به ازای هر $n \ge n_0$ درست است.

مثال

- به مجموع های زیر دقت کنید:

$14 = 3 + 3 + 8 \qquad 15 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 \qquad 16 = 8 + 8$

اعداد ۱۴ تا ۱۶ را می توان به صورت مجموع ۳ ها و ۸ ها نوشت. با استفاده از استقرای ریاضی نشان دهید برای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ where $n \geq 14$, ، n را می توان به صورت مجموع ۳ ها و ۸ ها نوشت.

مثال

- به مجموع های زیر دقت کنید:

$$14 = 3 + 3 + 8 \qquad 15 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 \qquad 16 = 8 + 8$$

اعداد ۱۴ تا ۱۶ را می توان به صورت مجموع ۳ ها و ۸ ها نوشت. با استفاده از استقرای ریاضی نشان دهید برای هر $n \in \mathbf{Z}^+$ where $n \geq 14$، n را می توان به صورت مجموع ۳ ها و ۸ ها نوشت.

- راه حل: حکم برای n=14,15,16 برقرار است و این پایه استقرا را می سازد.
- فرض کنید حکم برای همه اعداد از ۱۴ تا k که k>16 برقرار باشد. (فرض استقرا)
- حال k+1 را در نظر بگیرید. K+1=(k-2)+3 است و حکم برای k-2 درست است، زیرا $14 \leq k-2 \leq k,$. پس حکم برای k هم درست است.

مثال

- فرض کنید

$$a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 3, \qquad \text{and}$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}, \qquad \text{for all } n \in \mathbf{Z}^+ \text{ where } n \geq 3.$$

نشان دهید $a_n \leq 3^n$ for all $n \in \mathbf{N}$.

مثال

- فرض کنید

$$a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, \qquad \text{and}$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}, \qquad \text{for all } n \in \mathbf{Z}^+ \text{ where } n \geq 3.$$

نشان دهید $a_n \leq 3^n$ for all $n \in \mathbf{N}$ -

- داریم: (پایه استقرا)

i) $a_0 = 1 = 3^0 \leq 3^0$;

ii) $a_1 = 2 \leq 3 = 3^1$; and

iii) $a_2 = 3 \leq 9 = 3^2$.

- فرض کنید حکم برای k,k-1,k-2 به ازای هر $k \in \mathbf{Z}^+$ where $k \geq 2$. برقرار باشد

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} + a_{k-2} \\ &\leq 3^k + 3^{k-1} + 3^{k-2} \\ &\leq 3^k + 3^k + 3^k = 3(3^k) = 3^{k+1} \end{aligned}$$

تعریف های بازگشتی

- دنباله $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 3, \qquad \text{and}$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}, \quad \text{for all } n \in \mathbf{Z}^+ \text{ where } n \geq 3.$$

- در این حالت جمله n ام دنباله به صورت صریح برحسب n داده نمی‌شود و از روی چند جمله قبل از خود ساخته می‌شود.

مثال

- دنباله فیبوناتچی

1) $F_0 = 0,\ F_1 = 1$; and

2) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, for $n \in \mathbf{Z}^+$ with $n \geq 2$.

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1 \qquad F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2 \qquad F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5.$$

$F_6 = 8,\ F_7 = 13,\ F_8 = 21,\ F_9 = 34,\ F_{10} = 55,\ F_{11} = 89$, and $F_{12} = 144$.

مثال

- دنباله فیبوناتچی

1) $F_0 = 0,\ F_1 = 1$; and
2) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, for $n \in \mathbf{Z}^+$ with $n \geq 2$.

1) $F_0^2 + F_1^2 = 0^2 + 1^2 = 1 = 1 \times 1$
2) $F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 = 0^2 + 1^2 + 1^2 = 2 = 1 \times 2$
3) $F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 0^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 = 2 \times 3$

$$\forall n \in \mathbf{Z}^+ \sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n \times F_{n+1}.$$

مثال: ادامه

- در دنباله فیبوناتچی داریم:

$$\forall n \in \mathbf{Z}^+ \sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n \times F_{n+1}.$$

- اثبات: با استقرا
- پایه استقرا: $F_0^2 + F_1^2 = 1 \times 1$
- فرض استقرا: برای هر $k \geq 1$ داریم: $\sum_{i=0}^{k} F_i^2 = F_k \times F_{k+1}$

$$\sum_{i=0}^{k+1} F_i^2 = \sum_{i=0}^{k} F_i^2 + F_{k+1}^2 = (F_k \times F_{k+1}) + F_{k+1}^2 = F_{k+1} \times (F_k + F_{k+1}) = F_{k+1} \times F_{k+2}.$$

مثال

- فرض کنید مجموعه X به صورت بازگشتی زیر تعریف شده باشد:

1) $1 \in X$; and

2) For each $a \in X$, $a + 2 \in X$.

نشان دهید X از همه اعداد صحیح فرد تشکیل شده است.

مثال

- فرض کنید مجموعه X به صورت بازگشتی زیر تعریف شده باشد:

1) $1 \in X$; and

2) For each $a \in X$, $a + 2 \in X$.

نشان دهید X از همه اعداد صحیح فرد تشکیل شده است.

- راه حل: قرار می‌دهیم $Y = \{2n + 1 | n \in \mathbf{N}\}$ و نشان می دهیم X=Y. یا به صورت معادل: $Y \subseteq X$ and $X \subseteq Y$.
- برای اثبات $Y \subseteq X$، تعریف می‌کنیم $S(n): \quad 2n + 1 \in X$ و با استقرا ثابت می‌کنیم:
- پایه استقرا: $S(0)$ درست است.
- فرض استقرا: $S(k)$ for some $k \geq 0$; درست است.

$$(2k + 1) + 2 = 2(k + 1) + 1 \in X$$

مثال

- فرض کنید مجموعه X به صورت بازگشتی زیر تعریف شده باشد:

1) $1 \in X$; and

2) For each $a \in X$, $a + 2 \in X$.

نشان دهید X از همه اعداد صحیح فرد تشکیل شده است.

- راه حل: برعکس، باید نشان دهیم $X \subseteq Y$
- داریم $1 \in Y$. حال باید نشان دهیم هر عدد در بند ۲، عضو Y است. یعنی $a + 2 \in Y$ ، برای هر $a \in X$.

$$a + 2 = (2r + 1) + 2 = (2r + 2) + 1 = 2(r + 1) + 1$$