

# Capítulo 1

## Equilibrio

### 1.1. Introducción

En esta sección se formularán las ecuaciones de equilibrio para un medio continuo, haciendo uso del principio de conservación de momentum y de momento de momentum. Estas darán como resultado un sistema de ecuaciones diferenciales parciales en las componentes del tensor de tensiones y demostrarán la simetría del tensor de tensiones. Una vez planteadas las ecuaciones, la sección concluye con el estudio de algunas soluciones<sup>1</sup> clásicas para el caso de sólidos.

Al final de esta sección el estudiante deberá estar en la capacidad de:

- Identificar el dominio del problema y su frontera (o superficie).
- Reconocer la diferencia entre equilibrio local y global en un medio continuo.
- Identificar condiciones de frontera de tracciones para diferentes problemas particulares.
- Recuperar y/o verificar condiciones de frontera.
- Entender los aspectos matemáticos fundamentales del problema de valores en la frontera de la mecánica de los medios continuos en sistemas de referencia cartesianos y cilíndricos.
- Verificar si una función de tensiones es solución a un problema particular de la mecánica de los medios continuos.
- Analizar, desde el punto de vista de tensiones, algunas soluciones clásicas de la mecánica de los medios continuos.

---

<sup>1</sup>Por soluciones nos referimos a funciones de las componentes del tensor de esfuerzos que satisfacen las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de frontera.

## 1.2. Ecuaciones de Equilibrio diferencial

En las secciones anteriores se describió el modelo del medio continuo en términos de fuerzas. El paso del modelo discreto al modelo continuo, vía la hipótesis fundamental de continuidad, se tradujo en un tratamiento de las fuerzas ya no como vectores sino que estas tuvieron que ser tratadas en términos de funciones tensoriales con significado de densidades de fuerza o fuerzas por unidad de superficie. Es así como ahora en el modelo continuo el tensor de tensiones se convierte en el dispositivo matemático que produce cambios en la cantidad de movimiento en el sistema de infinitas partículas.

Nuestro siguiente objetivo es entonces el de proponer las ecuaciones que gobiernan el flujo de las densidades superficiales de fuerza  $\sigma$ , desde sus valores conocidos en la frontera en términos del vector de tracciones  $\bar{t}^{(n)}$ , hasta cualquier punto del medio continuo. La determinación de estas tensiones no solamente es un problema con su propio valor asociado, sino que también es el camino necesario si se desean conocer los cambios en la cantidad de movimiento del sistema.

Es esperable además, si se sabe que el modelo matemático utilizado para el tratamiento del sistema de muchas (infinitas) partículas ha sido construido a partir de las leyes de la Mecánica Newtoniana, que las ecuaciones resultantes deban estar estrechamente ligadas a estas (¿O son las mismas?). Acá partimos entonces de los principios fundamentales de la mecánica Newtoniana.

Considerese un elemento diferencial arbitrario tomado de un medio continuo y de dimensiones  $dx \times dy \times dz$  como el que se muestra en la ??<sup>2</sup>

Denotemos las áreas superficiales de las caras de dicho elemento y su volumen como;

$$dS_x = dydz$$

$$dS_z = dxdy$$

$$dS_y = dx dz$$

$$dV = dxdydz.$$

En lo que sigue nos proponemos plantear las condiciones de equilibrio del elemento como si se

---

<sup>2</sup>Debe notarse que este bloque de tensiones corresponde a un elemento del continuo de tamaño diferencial, mientras que en las secciones anteriores hacíamos uso de un elemento similar pero que no tenía ningún tamaño asociado y que solo se convertía en una forma práctica de representar el estado de tensiones en un punto material en un sistema de referencia cartesiano.

Por ejemplo en aquel caso si cortábamos un punto material con un plano con dirección normal  $\hat{n}$  y con vector de tracciones asociado  $\bar{t}^{(\hat{n})}$  teníamos que este vector era igual y opuesto al asociado al corte con un plano con dirección  $-\hat{n}$ . De esta forma se decidió representar el tensor de esfuerzos para un punto del continuo mediante los tres vectores de tracción asociados con 3 direcciones perpendiculares  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$  y sus direcciones opuestas  $-\hat{i}$ ,  $-\hat{j}$  y  $-\hat{k}$ .

tratará de un cuerpo rígido. Para esto supondremos además que el elemento se encuentra sometido a la acción de fuerzas de cuerpo  $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ .



**Figura 1.1.** Tensiones en un elemento diferencial de tamaño  $dx dy dz$ .

Dado que el bloque en cuestión tiene ahora tamaño (así sea diferencial) es esperable que las tensiones sobre una cara y otra ya no permanezcan constantes sino que estas experimenten variaciones también diferenciales. Por ejemplo, si la tensión normal sobre la cara con vector  $-\hat{i}$  y localizada sobre el punto O es  $\sigma_{xx}$  entonces se tiene que la tensión normal sobre el punto  $x_O + dx$  está dada por  $\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx$  tal y como se muestra en la ??.

Con esta consideración de por medio planteamos ahora la condición de equilibrio en la dirección  $x$

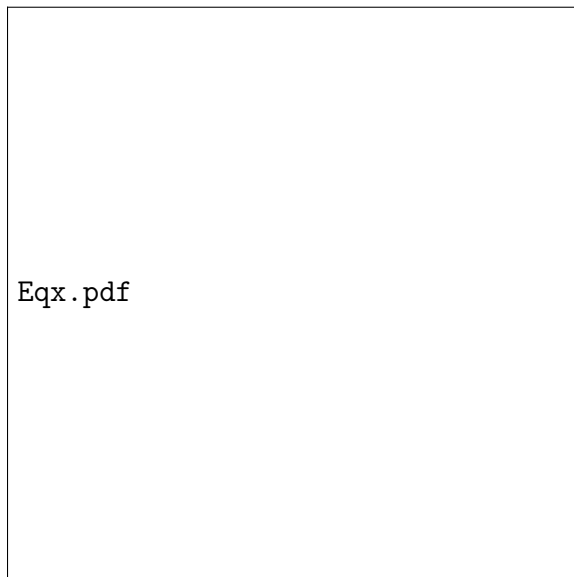
$$\sum F_x = 0$$

y teniendo cuidado de convertir las tensiones a fuerzas tras considerar el área de cada cara. Apoyándonos nuevamente en la ?? en la cual se muestran todas las tensiones en la dirección  $x$  tenemos que;

$$\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}dx\right)dS_x - \sigma_{xx}dS_x - \tau_{yx}dS_y + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dS_y - \tau_{zx}dS_z + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dS_z + B_x dV = 0$$

cancelando los términos iguales y opuestos y eliminando el diferencial de volumen común a todos los términos se tiene;

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}dx dS_x + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy dS_y + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz dS_z + B_x dV = 0.$$



**Figura 1.2.** Variación de las tensiones que producen fuerzas en la dirección  $x$  sobre un elemento diferencial de dimensiones  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ .

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + B_x = 0. \quad (1.1)$$

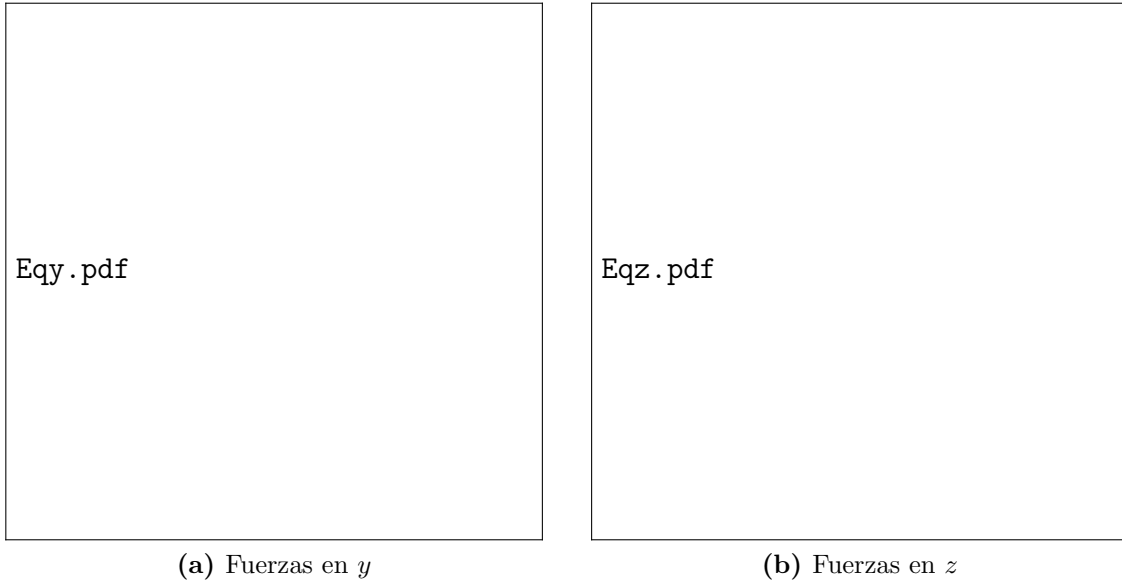
La ?? es una ecuación diferencial parcial que controla la variación de las componentes  $\sigma_{xx}$ ,  $\tau_{yx}$  y  $\tau_{zx}$ .

**Tarea**

Usando las condiciones de equilibrio en las direcciones  $y$  y  $z$  (dadas por  $\sum F_y = 0$  y  $\sum F_z = 0$ ) para los elementos diferenciales mostrados en las ?? y ?? demostrar que estas resultan en;

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + B_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + B_z = 0.$$



**Figura 1.3.** Variación de las tensiones que producen fuerzas en la dirección  $y$  y  $z$  sobre un elemento diferencial de dimensiones  $dx \times dy \times dz$ .

Por otro lado, usando ahora las condiciones de equilibrio rotacional se tiene de la condición  $\sum M_z = 0$ ;

$$\tau_{yx} dS_y \frac{1}{2} dy + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dS_y \frac{1}{2} dy - \tau_{xy} dS_x \frac{1}{2} dx - \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dS_x \frac{1}{2} dx = 0$$

$$\tau_{yx} dx dz dy + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy^2 dx dz - \tau_{xy} dx dz dy - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx^2 dy dz = 0$$

resultando en la siguiente igualdad entre las tensiones cortantes;

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

De manera similar planteando  $\sum M_x = 0$  y  $\sum M_y = 0$  resulta en;

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Las condiciones de equilibrio traslacional y rotacional se resumen en las ?? y ??. Las primeras corresponden a 3 ecuaciones diferenciales parciales y las segundas a la relación de simetría del tensor. Nótese que en total se tienen 6 ecuaciones en 9 incógnitas<sup>3</sup> lo cual significa que desde el punto de vista de tensiones el problema es estáticamente indeterminado.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + B_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + B_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + B_z &= 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \end{aligned} \tag{1.3}$$

En matemáticas un problema definido por un conjunto de ecuaciones que gobiernan el comportamiento de una función (ecuaciones gobernantes), el dominio de la misma y las condiciones que la función satisface en la superficie o frontera del dominio, se conoce como un problema de valores en la frontera (PVF). En nuestro caso particular el problema está definido de la siguiente forma:

- La función en cuestión es el tensor de tensiones.
- Las ecuaciones gobernantes son las ?? y ??.

---

<sup>3</sup>Las 9 componentes del tensor de tensiones

- El dominio será por ejemplo el depósito de suelo, le presa, la viga o la cuña autosoportada (ver ejemplo).
- Las condiciones de frontera serán el vector de tracciones especificado o conocido sobre la frontera el cual esta relacionado con el tensor de tensiones mediante la fórmula de Cauchy  $t^n = \sigma \cdot n$ .

Aunque debido a la indeterminación estática no es posible aplicar ningún método formal de solución al PVF del medio continuo si podemos afirmar que para un problema en particular la solución del problema debe satisfacer las ?? y ?? y las condiciones de frontera.

**Se dice que una función es solución de un problema de valores en la frontera cuando esta satisface sus ecuaciones gobernantes y las condiciones de frontera.**

### Tarea

La ecuación;

$$\frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) = 0$$

gobierna el desplazamiento axial  $u(x)$  de una barra de sección transversal variable  $A(x)$  y modulo de elasticidad  $E$ . La barra esta sometida a las condiciones de frontera dadas por;

$$EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = 0$$

$$u|_{x=0} = 0$$

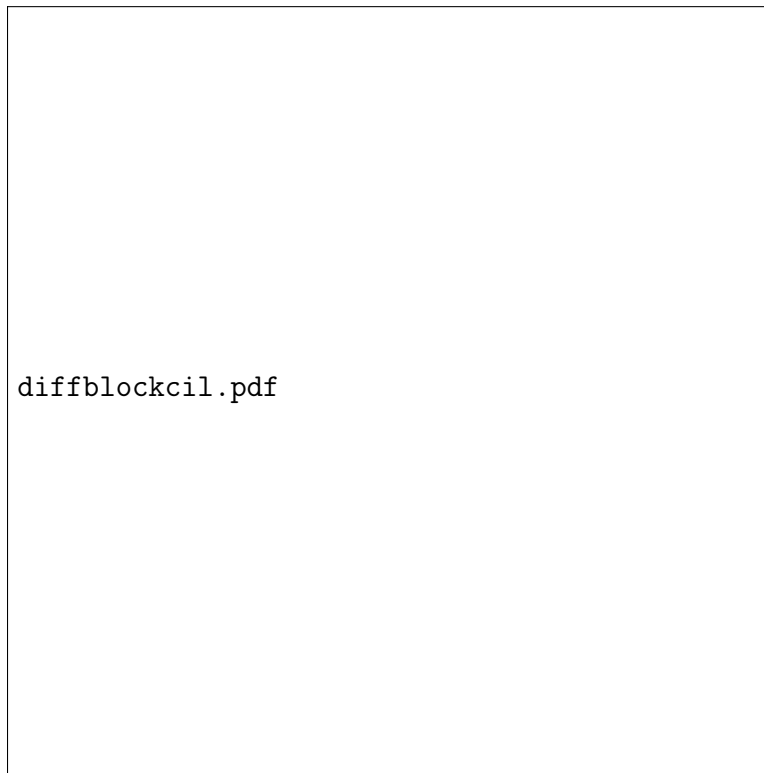
Si el área de la sección transversal esta dada por;

$$A(x) = A_0(2 - x/L)$$

demostrar que la siguiente función es solución del problema de valores en la frontera.

$$u = \frac{FL}{EA_0} \ln \left( \frac{2}{2 - x/l} \right)$$

### 1.2.1. Coordenadas cilíndricas



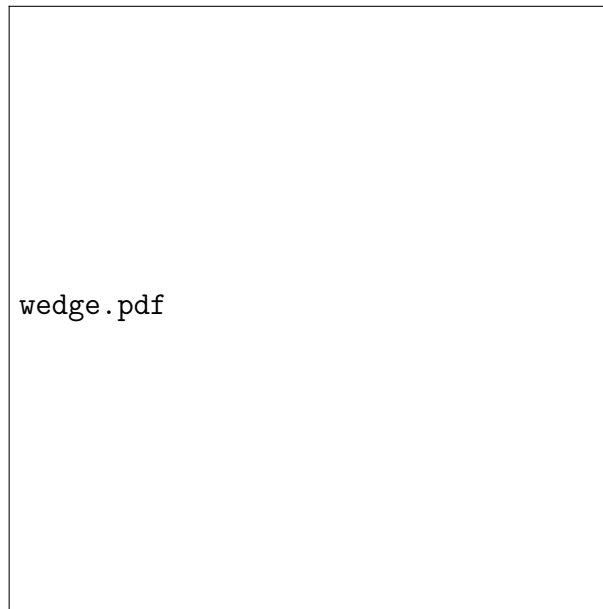
**Figura 1.4.** Tensiones en un elemento diferencial de tamaño  $drd\theta dz$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + B_r &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + B_\theta &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + B_z &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

### Ejemplo 1: Cuña autosoportada

Considere la cuña doble de lado  $\ell$  y ángulo interno  $2\phi$  mostrada en la ???. Se asume que esta se encuentra contenida en el plano  $X - Y$ , con condiciones de carga idealizables mediante un estado plano de tensiones (es decir 2D). La cuña se encuentra cargada por tracciones uniformes de intensidad  $S$  aplicadas sobre sus 4 caras de tal manera que esta se encuentra auto-equilibrada. Determinar la solución al problema de valores en la frontera **proponiendo una solución y verificando las condiciones de frontera**.





**Figura 1.5.** 2D Self-equilibrated wedge.

En el caso de estados de tensiones idealizables en 2 dimensiones y contenidos en el plano  $x - y$  nada es función de  $z$  y las ecuaciones de equilibrio ?? y ?? se reducen a;

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0\end{aligned}\tag{1.5}$$

mientras que el equilibrio rotacional se reduce a;

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Para proponer una solución planteamos las ecuaciones de equilibrio global de la cuña, lo cual es equivalente a asumir que la solución es constante. Se tiene entonces que;

$$\sum F_x = 0 \longrightarrow -\ell C_\phi S + \sigma_{xx} \ell S_\phi = 0$$

$$\sum F_y = 0 \longrightarrow -\ell S_\phi S - \sigma_{yy} \ell C_\phi = 0$$

de donde resulta la siguiente función para el campo de tensiones;

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= SCot\phi \\ \sigma_{yy} &= -STan\phi \\ \tau_{xy} &= 0\end{aligned}\tag{1.6}$$

con la condición  $\tau_{xy} = 0$  debida a la simetría del problema.

Para verificar que esta solución satisface las ecuaciones gobernantes reemplazamos la ?? en ??, notando que en este problema en particular no hay fuerzas de cuerpo ( $\vec{B} = 0$ ) resultando en;

$$\frac{\partial(SCot_\phi)}{\partial x} = 0$$

y

$$\frac{\partial(-STan_\phi)}{\partial y} = 0.$$

Sin embargo es claro que existen infinitas funciones  $\sigma = \sigma(x, y)$  que satisfacen las ?? y para garantizar que la solución **propuesta** es la solución correcta al problema es necesario verificar que esta satisface además las condiciones de frontera del problema.

Sean  $\hat{n}^1, \hat{n}^2, \hat{n}^3, \hat{n}^4$  los vectores normales externos a las caras expuestas de la cuña y escritos en el sistema de referencia  $x - y$  como;

$$\begin{aligned}\hat{n}^1 &= -S_\phi \hat{e}_x + C_\phi \hat{e}_y \\ \hat{n}^2 &= -S_\phi \hat{e}_x - C_\phi \hat{e}_y \\ \hat{n}^3 &= +S_\phi \hat{e}_x + C_\phi \hat{e}_y \\ \hat{n}^4 &= +S_\phi \hat{e}_x - C_\phi \hat{e}_y.\end{aligned}$$

Para calcular las componentes del vector de tracciones sobre cada una de las caras usamos la fórmula de Cauchy escrita como;

$$t_i = \sigma_{ij} \hat{n}_j.$$

Luego, sobre la cara con vector normal  $\hat{n}^1$  tenemos;

$$t_x = -SC_\phi$$

$$t_y = -SS_\phi$$

similarmente sobre la cara con vector normal  $\hat{n}^2$

$$t_x = -SC_\phi$$

$$t_y = +SS_\phi$$

sobre la cara con vector normal  $\hat{n}^3$

$$t_x = +SC_\phi$$

$$t_y = -SS_\phi$$

y finalmente, sobre la cara con vector normal  $\hat{n}^4$ ;

$$t_x = +SC_\phi$$

$$t_y = +SS_\phi$$

los cuales coinciden con las tracciones especificadas como condiciones de frontera del problema.

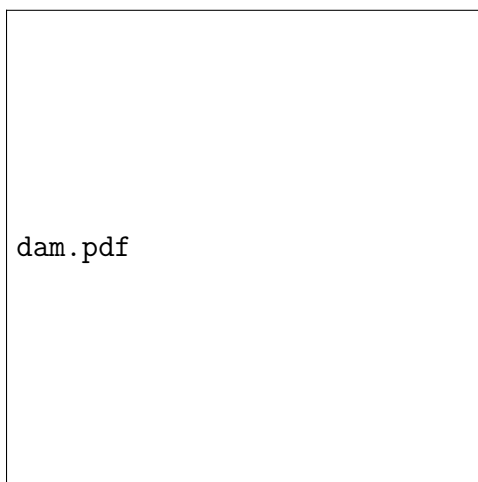
## Ejemplo 2: Empujes sobre presa de concreto

Si se sabe que la función de tensiones dada en la ?? es solución al problema de valores en la frontera del medio continuo sobre el dominio mostrado en la ??, en donde  $\gamma$  es una constante<sup>4</sup>. Se pide:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \gamma x - 2\gamma y \\ \sigma_{yy} &= -\gamma x \\ \tau_{xy} &= -\gamma y\end{aligned}\tag{1.7}$$

---

<sup>4</sup>Un script .py con las funciones de esfuerzo está disponible en: <https://github.com/casierraa/MMC/blob/master/dam.py>



**Figura 1.6.** Dominio de validez de la solución.

- Identificar la frontera del problema.
- Verificar que la función dada en la ?? efectivamente satisface las condiciones de equilibrio local.
- Determinar las condiciones de frontera sobre el dominio (graficar).
- Verificar que la solución satisface condiciones de equilibrio global.

### Solución

Sustituyendo la solución dada en ?? en las ecuaciones de equilibrio local y considerando que  $B_x = 0$  y  $B_y = 0$  se verifica que la solución satisface equilibrio;

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\gamma x - 2\gamma y)}{\partial x} + \frac{\partial(-\gamma y)}{\partial y} + B_x &= 0 \\ \gamma - \gamma &= 0 \\ \frac{\partial(-\gamma y)}{\partial x} + \frac{\partial(-\gamma x)}{\partial y} + B_y &= 0 \\ 0 + 0 &= 0. \end{aligned}$$

Sean los vectores normales a las caras vertical, horizontal e inclinada  $\hat{n}^1 = -\hat{j}$ ,  $\hat{n}^2 = \hat{i}$  y  $\hat{n}^3 = -S_\phi \hat{i} + C_\phi \hat{j}$  respectivamente. En la superficie con normal  $\hat{n}^1$  ( $y = 0$ ) se tiene que;

$$\sigma_{xx} = \gamma x$$

$$\sigma_{yy} = -\gamma x$$

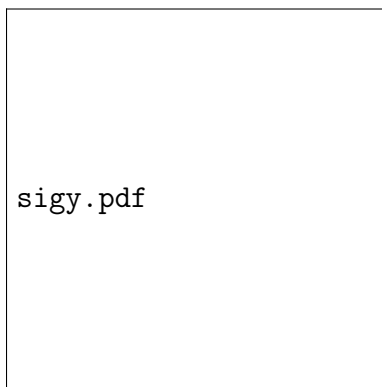
y

$$\tau_{xy} = 0$$

luego;

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma x & 0 \\ 0 & -\gamma x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \gamma x \end{Bmatrix}$$

esta distribución se muestra en la ??;



**Figura 1.7.** Distribución de tracciones sobre la cara vertical.

Similarmente, sobre la superficie con normal  $\hat{n}^2 = \hat{i}$  ( $x = H$ ) se tiene;

$$\sigma_{xx} = \gamma H - 2\gamma y$$

$$\sigma_{yy} = -\gamma H$$

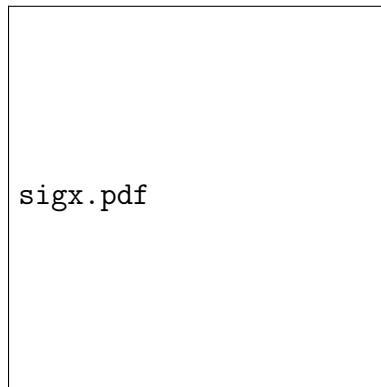
y

$$\tau_{xy} = -\gamma y$$

luego;

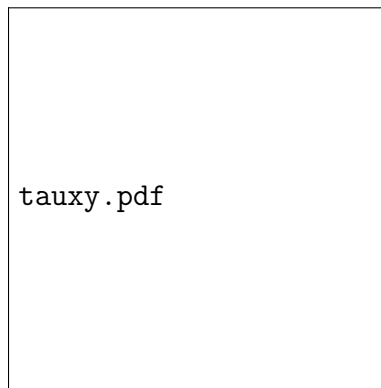
$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma H - 2\gamma y & -\gamma y \\ -\gamma y & -\gamma H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma H - 2\gamma y \\ -\gamma y \end{Bmatrix}.$$

La distribución de la componente  $t_x$  sobre esta cara, corresponde a la tensión normal  $\sigma_{xx}$  tal y como se muestra en la ??.



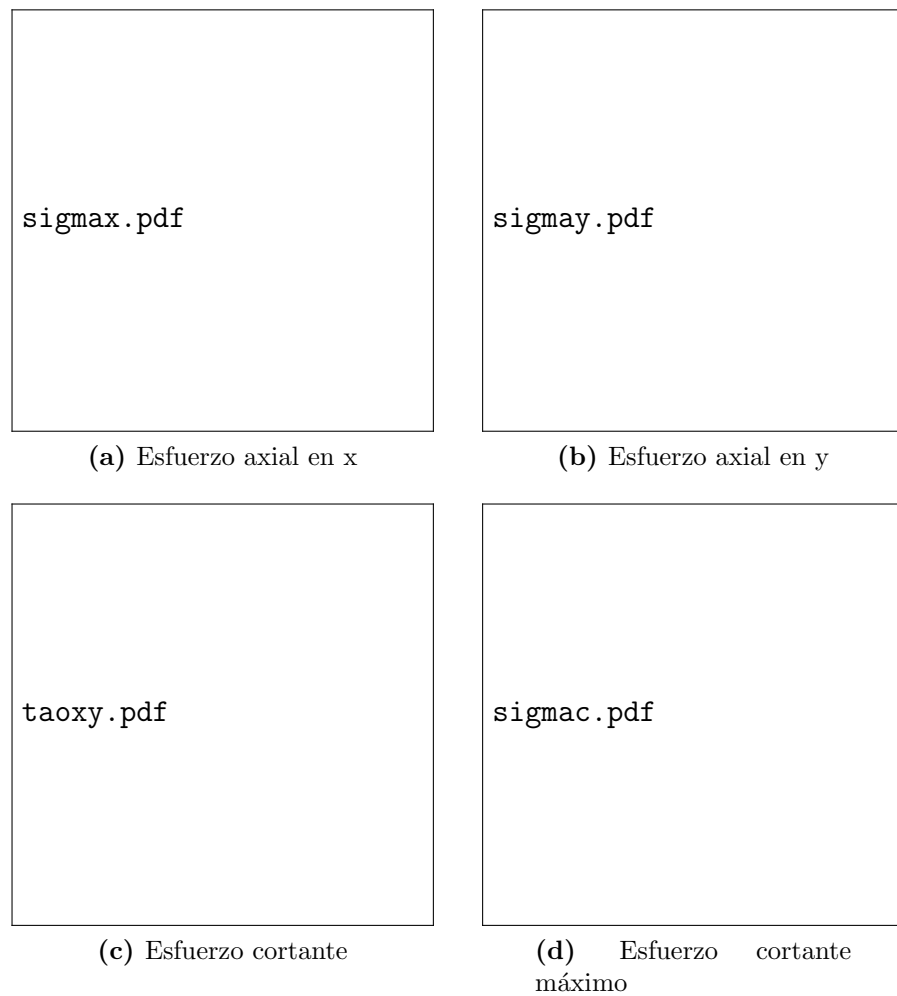
**Figura 1.8.** Distribución de tensiones normales sobre la cara horizontal.

Similarmente, la componente  $t_y$  corresponde a la componente  $\tau_{xy}$ . Sobre esta cara se tiene en  $y = 0$  que  $t_y = 0$ , mientras que en  $y = H$   $t_y = -\gamma H$ . Esta distribución se muestra en la ??;



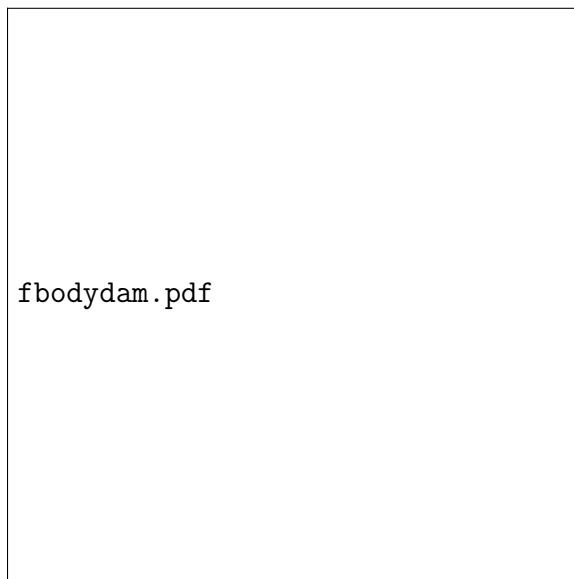
**Figura 1.9.** Distribución de tensiones cortantes sobre la cara horizontal.

La solución para la presa se ha implementado en el script de python `dam.py` distribuido en EAFIT interactiva. En la ??, ??, ?? y ?? se presenta la distribución de tensiones sobre toda la presa en forma de contornos o curvas de nivel de isotensiones (igual valor de tensión)



**Figura 1.10.** Variación de las tensiones que producen fuerzas en la dirección  $x$  y  $y$  sobre la presa.

Para verificar el equilibrio global consideremos el diagrama de cuerpo libre mostrado en la ??



**Figura 1.11.** Diagrama de cuerpo libre de la presa.

donde;

$$F_x^1 = \frac{\gamma H^2}{4}$$

$$F_x^2 = -\frac{\gamma H^2}{4}$$

luego

$$\sum F_x = 0$$

y

$$F_y^1 = \frac{\gamma H^2}{2}$$

luego

$$\sum F_y = 0$$

similarmente

$$\sum M_A = \frac{4}{24}\gamma H^3 + \frac{1}{24}\gamma H^3 - \frac{5}{24}\gamma H^3 = 0$$

con lo que se verifica que la solución satisface equilibrio global.

## Tarea

Para el problema de la presa;



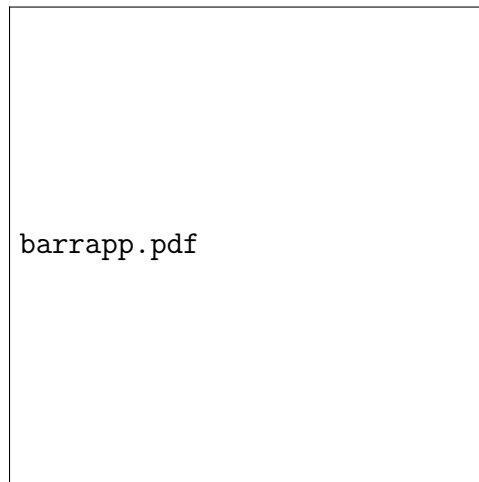
- Demostrar que la solución dada solo es valida para  $\phi = \pi/4$
- Si la presa es de concreto, el cual presenta baja resistencia a la tracción determinar la zona de la presa que se debe reforzar para que esta no flalle. Nota: Identificar la superficie donde las tensiones normales ( $\sigma_{xx}$ ) cambian de compresión a tracción.

### 1.3. Soluciones clásicas para sólidos

En esta sección se presentan algunas soluciones clásicas en términos de tensiones. Se invita al estudiante a realizar el análisis de las mismas usando razonamientos similares a los presentados en los 2 ejemplos anteriores y de acuerdo con los objetivos de aprendizaje declarados al inicio del capítulo.

#### 1.3.1. Barra prismática soportada en la superficie superior y sometida a la acción de su propio peso

La barra prismática mostrada en la ??



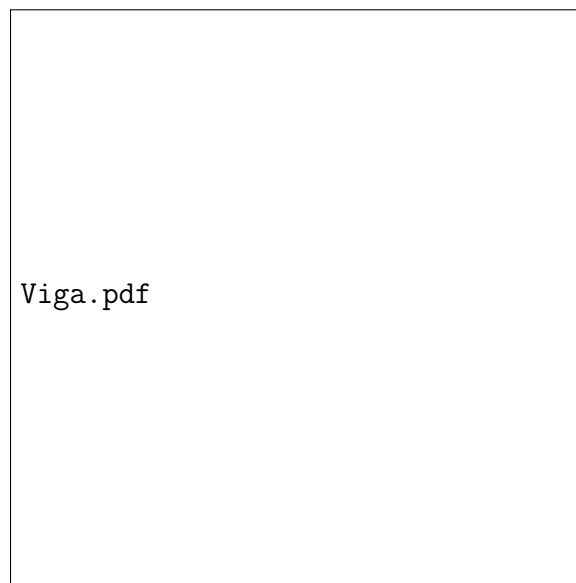
**Figura 1.12.** Barra prismática sometida a la acción de su propio peso.

se encuentra atada sobre la superficie superior y esta sometida a la acción de su propio peso. La función dada en la ?? es la solución del problema,

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz} &= \gamma z \\
 \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = 0 \\
 \tau_{xy} &= \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.8}$$

### 1.3.2. Viga Cantiliver

La ?? muestra una viga cantiliver sometida a una carga  $P$  en uno de sus extremos:



**Figura 1.13.** Viga cantiliver

El tensor solución se da en la ??.

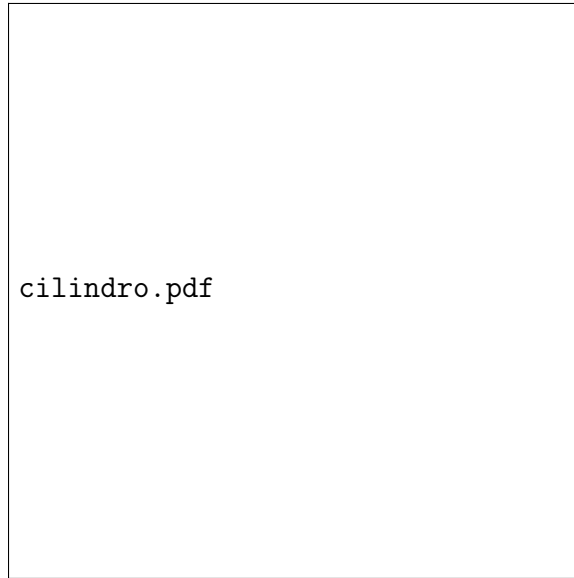
$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= -\frac{P}{I}(XY) \\
 \sigma_{yy} &= \sigma_{zz} = 0 \\
 \tau_{xy} &= \tau_{yx} = -\frac{P}{2I}\left(\frac{H^2}{4} - Y^2\right) \\
 \tau_{xz} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.9}$$

### 1.3.3. Cilindro sometido a presión interna y externa

Para este problema se requieren las ecuaciones de equilibrio local en coordenadas polares dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + B_r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + B_\theta &= 0\end{aligned}\tag{1.10}$$

La ?? muestra un cilindro de radio interno  $a$  y radio externo  $b$  sometido a presiones internas y externas  $p_a$  y  $p_b$  respectivamente.



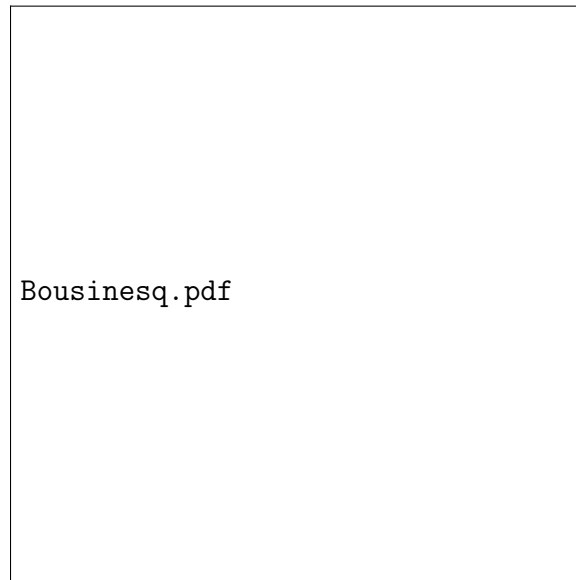
**Figura 1.14.** Cilindro sometido a presión interna y externa.

El tensor solución se da en la ??.

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -\frac{\left(\frac{b^2}{r^2} - 1\right)}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} p_a - \frac{\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)} p_b \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\left(\frac{b^2}{r^2} + 1\right)}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} p_a - \frac{\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)} p_b\end{aligned}\tag{1.11}$$

### 1.3.4. Flamant

La ?? muestra un semi-espacio sometido a una carga lineal superficial  $P$ .



**Figura 1.15.** Medio continuo sometido a una carga  $P$ .

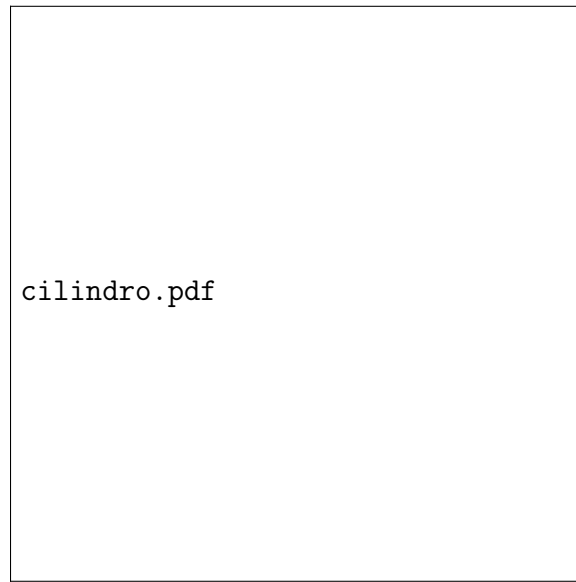
El tensor solución se da en la ??

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -\frac{2P}{\pi r} \cos\theta \\ \sigma_{\theta\theta} &= 0 \\ \tau_{r\theta} &= 0\end{aligned}\tag{1.12}$$

### Ejemplo 3: aplicación de solución para cilindro sometido a presión interna y externa

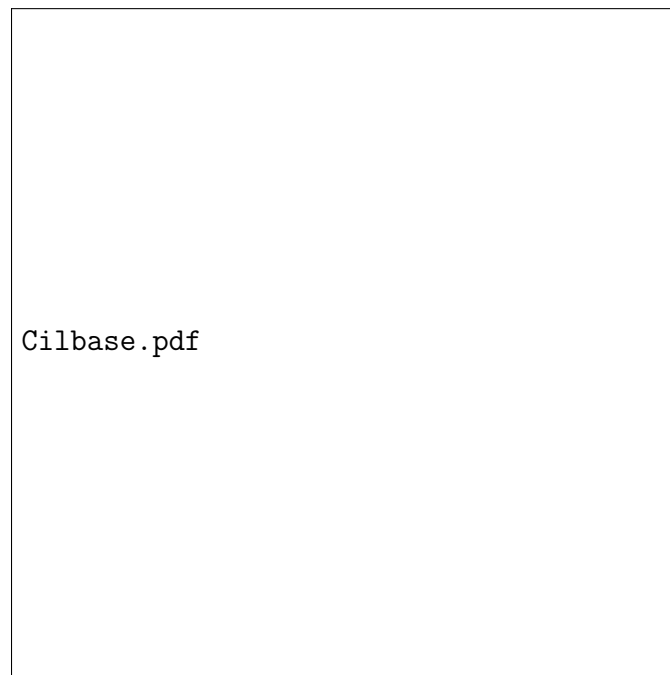
1. La solución para un cilindro de radio interno  $a$  y radio externo  $b$  sometido a presiones internas y externas  $p_a$  y  $p_b$  respectivamente (ver ??), está dado por:

$$\sigma_{rr} = -\frac{\left(\frac{b^2}{r^2} - 1\right)}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)}p_a - \frac{\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)}p_b \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\left(\frac{b^2}{r^2} + 1\right)}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)}p_a - \frac{\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)}p_b \quad \tau_{r\theta} = 0$$



**Figura 1.16.** Cilindro sometido a presión interna  $p_a$  y presión externa  $p_b$

Usando la solución anterior, y sabiendo que el radio interno es  $a$  y radio externo  $2a$  determinar el valor máximo que puede tomar la presión interna  $q$  en el cilindro para que el esfuerzo a cortante en los puntos del cilindro que están en contacto con una superficie rígida en su cara externa, tal y como se muestra en la ??, no superen un valor  $\tau = S$ .



**Figura 1.17.** Cilindro sometido a presión interna  $q$  con superficie rígida en cara externa

**Solución:**

sabiendo que  $b = 2a$  y haciendo el equilibrio de fuerzas que actuarían en las paredes interior y exterior del anillo (pared en contacto con la superficie rígida), determinemos el valor de  $P_b$ .

$$\begin{aligned}\sum F &= 0 \\ q2\pi a &= p_b 2\pi 2a \\ p_b &= \frac{q}{2}\end{aligned}$$

Haciendo los reemplazos en la solución entregada. Para  $\sigma_{rr}$  se tiene:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -\frac{\left(\frac{4a^2}{r^2} - 1\right)}{\left(\frac{4a^2}{a^2} - 1\right)}q - \frac{\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)}{\left(1 - \frac{a^2}{4a^2}\right)}\frac{q}{2} \\ \sigma_{rr} &= -\frac{1}{3}\left(\frac{4a^2}{r^2} - 1\right)q - \frac{4}{3}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\frac{q}{2} \\ \sigma_{rr} &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{2a^2}{3r^2}\right)q\end{aligned}$$

De forma similar para  $\sigma_{\theta\theta}$  se tiene:

$$\sigma_{\theta\theta} = \left(-\frac{1}{3} + \frac{2a^2}{3r^2}\right)q$$

Ahora como nos piden la condición de corte para los puntos sobre la cara externa, es decir cuando  $r = 2a$ , el estado de esfuerzos sería.

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -\frac{q}{2} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \left(-\frac{1}{3} + \frac{2a^2}{12a^2}\right)q = -\frac{q}{6} \\ \tau_{r\theta} &= 0\end{aligned}$$

El esfuerzo cortante máximo asociado al plano  $r\theta$  está dado por:

$$\tau = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{2} - \frac{q}{6}\right) = \frac{q}{6}$$

Haciendo  $\tau = S$ , se tiene:

$$q = 6S$$

### Ejemplo 4: Aplicación de soluciones

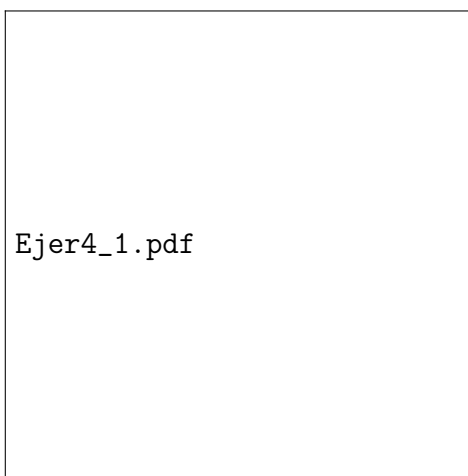
En el enlace

[http://nbviewer.ipython.org/github/casierraa/Notebooks\\_MMC/blob/master/Ej5\\_Parcial2015.ipynb](http://nbviewer.ipython.org/github/casierraa/Notebooks_MMC/blob/master/Ej5_Parcial2015.ipynb)

## 1.4. Ejercicios

- a) Si el tensor de esfuerzos en cualquier punto de la cuña presentada en la ?? es:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -S \cot \phi & 0 \\ 0 & S \tan \phi \end{bmatrix}$$



**Figura 1.18.** Cuña de espesor  $e$  sometida a tensiones tangenciales constantes ( $S$ ) en dos caras.

- 1) Verificar el equilibrio global ( $\sum F = 0.0$ ).
  - 2) Verificar el equilibrio a nivel diferencial.
  - 3) ¿Es posible encontrar esfuerzos cortantes  $\tau_{xy}$  al interior de la cuña mayores a  $S$ ?  
Responder sí o no y justificar su respuesta.
  - 4) Calcule el vector de tensiones en cada cara de la cuña.
- b) Encontrar las tensiones normales máximas y las direcciones principales de un estado tensional que está dado por el tensor de tensiones siguiente:

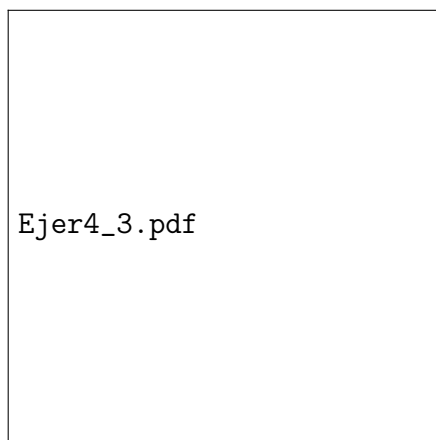
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- c) En la ?? se muestra un elemento con densidad  $\rho$ , de sección circular, soportado de su extremo superior y está sometido solamente a la acción de su peso propio. Se indica el tensor de esfuerzos en el sistema coordenado  $x - y$  para los puntos a y b mostrados en la figura.

Punto a:  $[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\gamma L/3 \end{bmatrix}$

Punto b:  $[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma L/3 \end{bmatrix}$



**Figura 1.19.** Barra colgada

Si el tensor de esfuerzos varía de forma lineal a lo largo del eje  $y$ , se pide:

- 1) El tensor de esfuerzos para cualquier punto al interior del elemento.
- 2) ¿El elemento se encuentra en equilibrio a nivel diferencial?. Justifique su respuesta matemáticamente.
- 3) Si el elemento es infinitamente resistente ante esfuerzos de tracción y de compresión, pero su capacidad máxima ante esfuerzos cortantes está dada por  $\tau_{max}$ . Determine:
  - $a'$  ¿Cuál es la longitud máxima posible del elemento?.
  - $b'$  ¿Cuál es la fuerza en el soporte superior cuando se produce la falla por corte?.
  - $c'$  ¿Cuál es la tensión en la sección transversal inferior del elemento ( $y = L$ ) cuando se produce la falla por corte?.
- 4) Si el elemento es infinitamente resistente ante esfuerzos cortantes y de compresión, pero su capacidad máxima ante esfuerzos de tracción está dada por  $\sigma_{trac}$ . Determine:
  - $a'$  ¿Cuál es la longitud máxima posible del elemento?.
  - $b'$  ¿Cuál es la tensión en la sección transversal inferior del elemento ( $y = L$ ) cuando se produce la falla por tracción?.
  - $c'$  ¿Cuál es la fuerza en el soporte superior cuando se produce la falla por tracción?.
- 5) Si el elemento es infinitamente resistente ante esfuerzos cortantes y de tracción, pero su capacidad máxima ante esfuerzos de compresión está dada por  $\sigma_{comp}$ . Determine:
  - $a'$  ¿Cuál es la longitud máxima posible del elemento?.
  - $b'$  ¿Cuál es la tensión en la sección transversal inferior del elemento ( $y = L$ ) cuando se produce la falla por compresión?.
  - $c'$  ¿Cuál es la fuerza en el soporte superior cuando se produce la falla por compresión?.

d) El tensor de tensiones de un medio continuo se describe con la siguiente diádica:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -2x^2yx & 4z^2 + yx & 2z^2yx - xz \\ 4z^2 + yx & yz + 4y^2 & -yz - xyz \\ 2z^2yx - xz & -yz - xyz & 4z^3 \end{bmatrix}$$

1) Calcular la fuerza de cuerpo necesaria para mantener el medio continuo en equilibrio estático.

e) Si en un medio continuo, el campo de tensiones está dado por el tensor:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} x^2y & (1 - y^2)x & 0 \\ (1 - y^2)x & (y^3 - 3y)/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2z^2 \end{bmatrix}$$

Determinar:

- 1) La fuerza de cuerpo necesaria para mantener el medio continuo en equilibrio estático.
- 2) Las tensiones principales en el punto  $P(a, 0, 0)$ .
- 3) La tensión tangencial (corte) máxima en el punto  $P$ .

f) El campo de tensión de un medio continuo está dado por: <sup>5</sup>

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2x_2 \\ 0 & 1 & 4x_1 \\ 2x_2 & 4x_1 & 1 \end{bmatrix}$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  son coordenadas cartesianas.

- 1) Despreciando las fuerzas de cuerpo ¿está el cuerpo en equilibrio?
- 2) Determinar el vector tensión que actúa en un punto  $(1, 2, 3)$  según el plano  $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ ;
- 3) Determinar la proyección del vector tensión según la dirección normal y tangencial al plano  $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ .

g) El campo del tensor de tensiones de Cauchy viene representado por sus componentes como:

$$[\sigma] = k \begin{bmatrix} x_1^2x_2 & (a^2 - x_2^2)x_1 & 0 \\ (a^2 - x_2^2)x_1 & \frac{1}{3}(x_2^3 - 3a^2x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 2ax_3^2 \end{bmatrix},$$

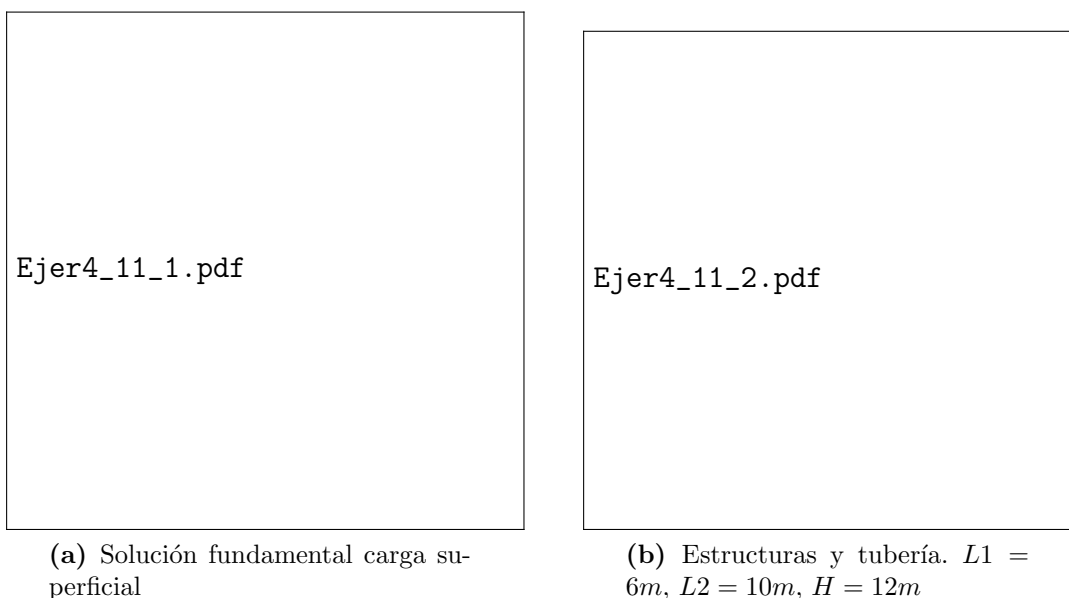
donde  $k$  y  $a$  son constantes. Encontrar el campo de fuerzas de cuerpo  $\mathbf{b}$  (por unidad de volumen) necesario para que el sistema esté en equilibrio.

---

<sup>5</sup>Tomado del problema 4.4 en Reddy, J.N (2010). An introduction to continuum mechanics

- h) En la ?? se muestra la solución fundamental para semi-espacio sometido a una carga lineal superficial,  $P$ . Los esfuerzos al interior del suelo están dados por:

$$\sigma_{xx} = -\frac{2P}{\pi r} \cos^3 \theta \quad \sigma_{yy} = -\frac{2P}{\pi r} \sin^2 \theta \cos \theta \quad \tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi r} \sin \theta \cos^2 \theta$$



**Figura 1.20.** Estructuras sobre la superficie

Sí se desea instalar una tubería, perpendicular al plano mostrado ( $XY$ ), de diámetro despreciable en el punto indicado en la ??, y se sabe que el suelo está sometido a la acción de dos estructuras que le transmiten de forma independiente una carga lineal superficial,  $P = 100 \text{ Ton}/m$ . Determine:

- 1) ¿Cuál es el esfuerzo mínimo de compresión que debe ser capaz de soportar la tubería para que no se dañe?.
  - 2) ¿Cuál es el esfuerzo mínimo de cortante que debe ser capaz de soportar la tubería para que no se dañe?.
- i) El campo de tensión de un medio continuo está representado por:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{bmatrix}$$

donde  $a$  es una constante.

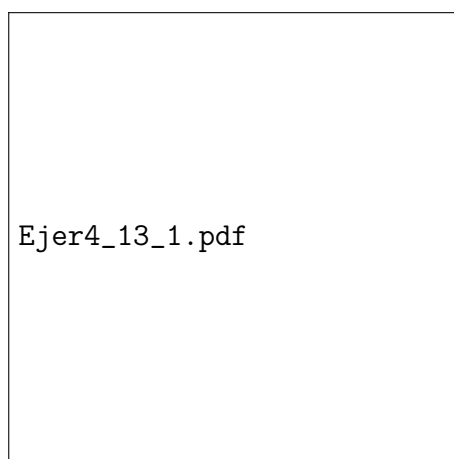
- 1) Determinar los valores principales.

- 2) Determinar las direcciones principales.  
 3) Determinar el valor del esfuerzo cortante máximo.  
 j) En la figura ?? se muestra un cuerpo cuyo tensor de esfuerzos  $[\sigma]$  en el sistema de referencia  $xy$  está dado por:

$$\sigma_{xx} = \frac{q}{8c^3}(2x^3y - 4xy^3 + \frac{12}{5}c^2xy) - px \qquad \sigma_{yy} = -\frac{q}{8c^3}(4c^3x - 2xy^3 + 6c^2xy)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{q}{8c^3}[3x^2(c^2 - y^2) - (c^4 - y^4) + \frac{6}{5}c^2(c^2 - y^2)]$$

Donde  $q$ ,  $p$  y  $c$  son constantes.



**Figura 1.21.** Medio continuo

En las siguientes preguntas seleccione la opción correcta y justifique matemáticamente su selección:

- 1) El cuerpo se encuentra en equilibrio a nivel diferencial si:  
 a' La fuerza de cuerpo en la dirección  $y$  es  $p$   
 b' No hay fuerzas de cuerpo  
 c' La fuerza de cuerpo en la dirección  $x$  es  $q$   
 d' La fuerza de cuerpo en la dirección  $x$  es  $px$ .  
 e' La fuerza de cuerpo en la dirección  $x$  es  $p$ .  
 2) El vector de tracciones sobre la cara  $y = c$  en el sistema de referencia  $xy$  está dado por:

$$a' [t] = \begin{bmatrix} \frac{q}{8c^3}(2x^3c - 4xc^3 + \frac{12}{5}c^3x) - px \\ -qx \end{bmatrix}$$

$$b' [t] = \begin{bmatrix} -qx \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c' \quad [t] = \begin{bmatrix} 0 \\ -qx \end{bmatrix}$$

$$d' \quad [t] = \begin{bmatrix} -\frac{q}{8c^3}(2x^3c - 4xc^3 + \frac{12}{5}c^3x) - px \\ qx \end{bmatrix}$$

$e'$  Ninguna de las anteriores.

3) La magnitud de la fuerza en direccion  $y$  que actua en la cara  $y = c$  es:

$$a' \quad F = qH^2.$$

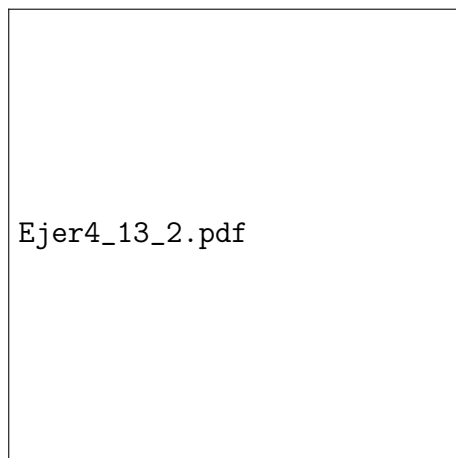
$$b' \quad F = \frac{qH^2}{2}.$$

$$c' \quad F = 2qc.$$

$$d' \quad F = \frac{qH}{2}.$$

$e'$  Ninguna de las anteriores.

4) Si el tensor  $[\sigma]$  se emplea como la solución de esfuerzos para la presa mostrada en la ??, seleccione cual de las siguientes afirmaciones es correcta.



**Figura 1.22.** Presa

$a'$  El tensor satisface plenamente las condiciones de frontera en todas las caras ( $y = c$ ,  $y = -c$ ,  $x = 0$ ,  $x = H$ ).

$b'$  El tensor satisface plenamente las condiciones de frontera en las caras  $y = c$  y  $x = 0$ .

$c'$  El tensor no satisface las condiciones de frontera en la cara  $y = -c$ .

$d'$  El tensor no satisface las condiciones de frontera en la cara  $x = 0$ .

$e'$  Ninguna de las afirmaciones es correcta.

- 5) Aceptando como solución el tensor presentado en el numeral [1] y considerando que la presa está construida con suelo compactado cuya resistencia ante esfuerzo cortante es de  $0.5 \frac{kgf}{cm^2}$ ; si  $H = 3.0$  m,  $c = 1.1$  m,  $q = 1000 \frac{kgf}{m^3}$  y  $p = 2000 \frac{kgf}{m^3}$  se puede afirmar:

$a'$  La presa fallaría ante esfuerzos de corte en el plano  $xy$  porque el cortante en el punto de coordenadas (3.0 m, 1.1 m) es mayor a  $0.5 \frac{kgf}{cm^2}$

$b'$  La presa fallaría ante esfuerzos de corte en el plano  $xy$  porque la magnitud del cortante máximo en el punto de coordenadas (0.0 m, -1.1 m) es mayor a  $0.5 \frac{kgf}{cm^2}$ .

$c'$  La presa no fallaría ante esfuerzos de corte en el plano  $xy$  porque la magnitud del cortante máximo en el punto de coordenadas (3.0 m, 0.0 m) es menor a  $0.5 \frac{kgf}{cm^2}$ .

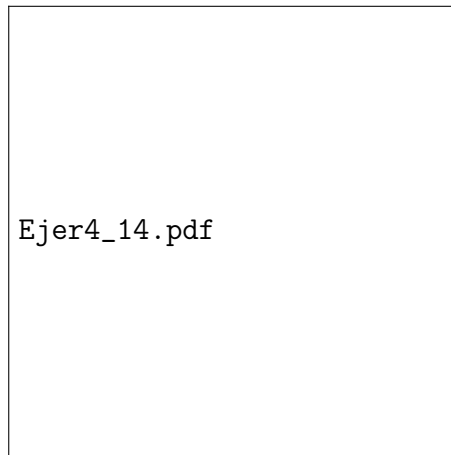
$d'$  La presa fallaría ante esfuerzos de corte en el plano  $xy$  porque la magnitud del cortante máximo en el punto de coordenadas (3.0 m, -1.1 m) es mayor a  $0.5 \frac{kgf}{cm^2}$

- $k$ ) En la figura ?? se muestra un cuerpo de sección rectangular de ancho unitario, altura  $H$ , soportado en un extremo ( $X = 0$ ), y sometido en su otro extremo ( $X = L$ ) a la acción de una fuerza  $P$  en la dirección  $Y$ . Si el tensor de esfuerzos en el sistema coordenado  $XYZ$  está dado por:

$$\sigma_{xx} = -\frac{P}{I}(XY) \qquad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{P}{2I}\left(\frac{H^2}{4} - Y^2\right) \qquad \tau_{xz} = 0$$

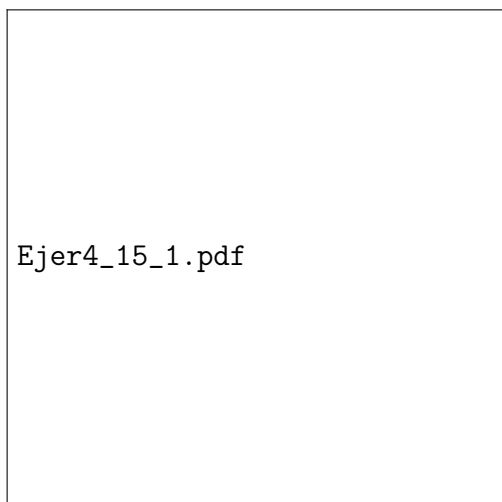
Donde  $I$  es el momento de inercia de la sección respecto a el eje  $Z$  y  $P$  es la fuerza.

**Figura 1.23.** Viga en voladizo

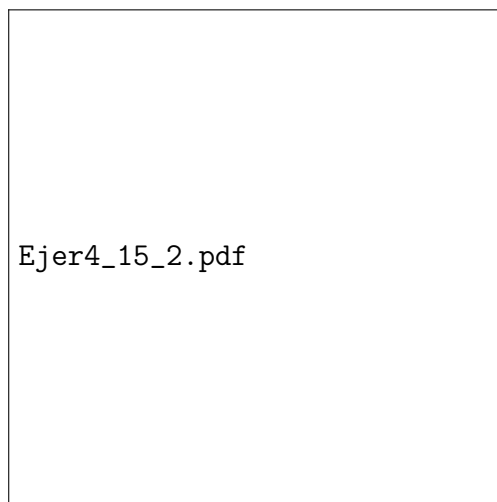
- 1) Verifique equilibrio diferencial.
  - 2) Verifique las condiciones de frontera.
  - 3) ¿Las condiciones de frontera coinciden con las presentadas en el enunciado del problema?. De ser afirmativa o negativa su respuesta, justifíquela.
  - 4) Verifique equilibrio global.
  - 5) ¿Cual es el valor del esfuerzo cortante máximo y en donde se presenta?.
  - 6) ¿Cual es el valor del esfuerzo normal máximo y en donde se presenta?.
- l) En la ?? se muestra una estructura especial actuando sobre un cuerpo de concreto de gran dimensión. El estado de esfuerzos al interior del cuerpo debidos a la acción de la estructura, en un sistema coordenado cilíndrico  $(r, \theta, z)$ , están dados por:

$$\sigma_{rr} = -\frac{2Q}{\pi r} \cos\theta; \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = 0; \quad \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0; \quad \tau_{\theta z} = \frac{Q}{\pi r} \sqrt{3}$$

$Q$  es una constante positiva,  $r$  es la distancia desde la ubicación de la estructura al punto de evaluación y  $\theta$  es el ángulo medido desde la horizontal en sentido antihorario.



(a) Solución fundamental



(b) Estructuras y cable

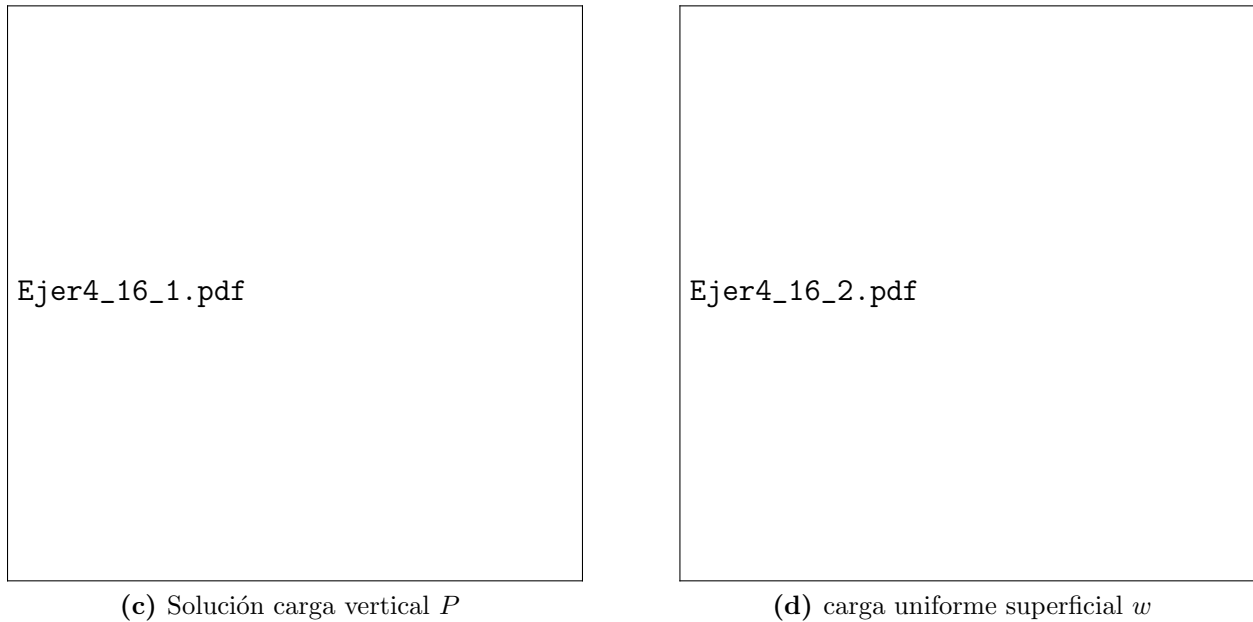
Si se desea instalar un cable (de diámetro despreciable) perpendicular al plano mostrado ( $XY$ ) a una profundidad  $h = 4\sqrt{2}$  y se sabe que el cuerpo está sometido a la acción de dos estructuras iguales, tal como se muestra en la ???. Determine:

- 1) Si el cable es infinitamente resistente ante esfuerzos normales pero  $\tau_{crit}$  es el máximo esfuerzo de corte que resiste, ¿cuál es el máximo valor de la carga  $Q$  que pueden transmitir las estructuras para que el cable no falle?.
  - 2) Si  $\tau_{crit} = 10$ , ¿cuál es el valor de  $Q$ ?
  - 3) Si  $Q = 5$ , ¿cuál es el valor mínimo de  $\tau_{crit}$  para que el cable no falle por corte?.
- m) En las ?? y ?? se muestra las soluciones para una masa de suelo sometido a una carga superficial  $P$  y una carga distribuida uniforme superficial  $w$ . Los esfuerzos al interior del suelo debidos a la carga  $P$  y  $w$ , en un sistema coordenado cilíndrico  $(r, \theta, z)$ , están dados:

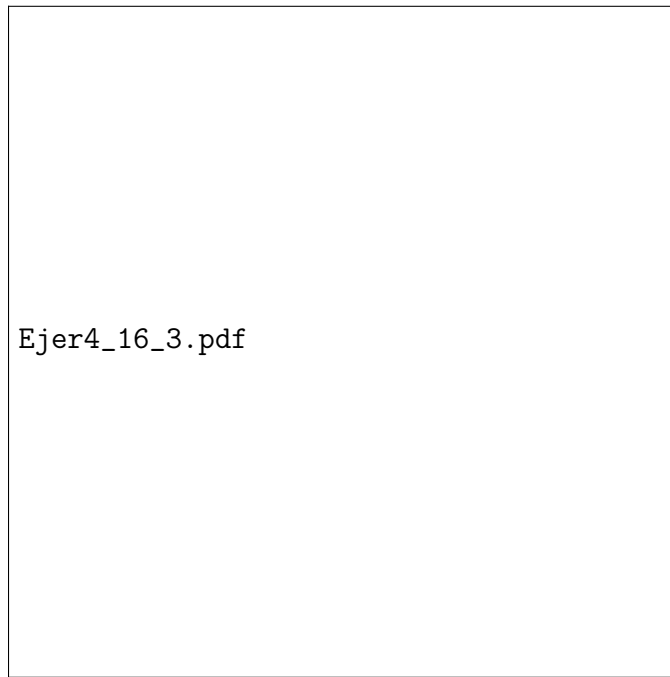
$$[\sigma]_P = -\frac{2P}{\pi r} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\sigma]_w = -\frac{w}{\pi} \begin{bmatrix} \pi + 2\theta - \sin(2\theta) & 1 - \cos(2\theta) & 0 \\ 1 - \cos(2\theta) & \pi + 2\theta + \sin(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donde  $P$  y  $w$  son las cargas,  $\theta$  es el ángulo medido desde la vertical y positivo en sentido antihorario.



**Figura 1.24.** Soluciones fundamentales

Si a la masa de suelo se transmiten de manera simultánea las cargas  $P = 100 \text{ Ton}/m$  y  $w = (100 + \text{tiempo}) \text{ Ton}/m^2$ , y se quiere instalar un sistema de acueducto conformado por dos tuberías A y B (de diámetro despreciable) perpendicular al plano mostrado ( $XY$ ), en donde la profundidad para la tubería A es  $H_A = 1.0/\pi \text{ m}$  y para la tubería B es  $H_B = 0.75H_A$  tal y como se muestra en la ???. Determine:

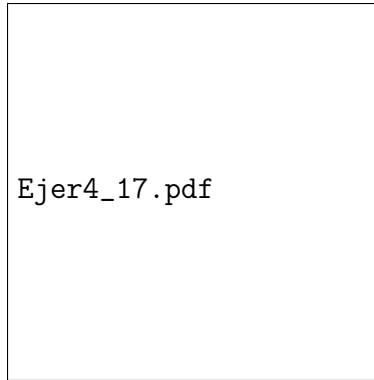


**Figura 1.25.** Cargas y tuberías

- 1) Determine cuál tubería falla primero y en que tiempo se produce la falla, si se sabe que el material de la tubería A es infinitamente resistente a esfuerzos cortantes pero no soporta esfuerzos axiales mayores o iguales a  $210,5 \frac{Ton}{m^2}$  y el material de la tubería B es infinitamente resistente a esfuerzos axiales pero no soporta esfuerzos cortantes mayores o iguales a  $100,25 \frac{Ton}{m^2}$ .

- n) En la ?? se presenta una barra de radio  $C$  y longitud  $L$ . El estado de esfuerzos del medio continuo en el sistema cartesiano  $x, y, z$  está dado por el tensor:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 0; & \sigma_{yy} &= 0; & \sigma_{zz} &= 0; \\ \tau_{xy} &= 0; & \tau_{xz} &= \omega y; & \tau_{zy} &= -\omega x \end{aligned} \quad (1.13)$$



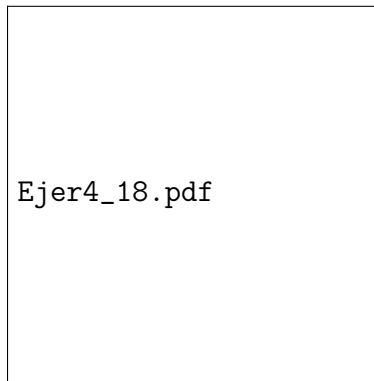
**Figura 1.26.** Medio Continuo

Donde  $\omega$  es una constante.

- 1) Determine el valor del máximo esfuerzo de compresión al que está sometido la barra y la ubicación (coodenadas de los puntos) donde se presentan esos valores máximos.
  - 2) ¿Describa que problema resuelve el estado de esfuerzos en a barra? *Sugerencia: para facilitar el análisis estudie las caras con vector normal en dirección  $z$ .*
  - 3) Si el cuerpo tiene longitud  $L = 50cm$ ,  $\omega = 5000 \text{ Tonf}/m^3$ , además es infinitamente resistente ante esfuerzos de tracción y de compresión, pero su capacidad máxima ante esfuerzos tangenciales es  $\tau_{max} = 88 \text{ kgf}/cm^2$ . Determine el valor máximo del radio  $C$  que podría tener el cuerpo.
- $\tilde{n}$ ) Si a la barra del punto ?? adicionalmente le quisieramos considerar el efecto del peso propio  $\gamma$  y sabemos que el tensor de esfuerzos en el sistema coordenado  $x, y, z$  en cualquier punto de los planos  $z = L/3$  y  $z = 2L/3$  (ver figura ??) debido solo a este efecto está dado por:

$$Puntos_{(z=L/3)}: [\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\gamma L/3 \end{bmatrix} \quad Puntos_{(z=2L/3)}: [\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma L/3 \end{bmatrix}$$

$\gamma = \rho g$ ,  $\rho$  es la densidad y  $g$  la gravedad.

**Figura 1.27.** Función peso propio

Además dicho esfuerzo es descrito por una función lineal en  $z$ .

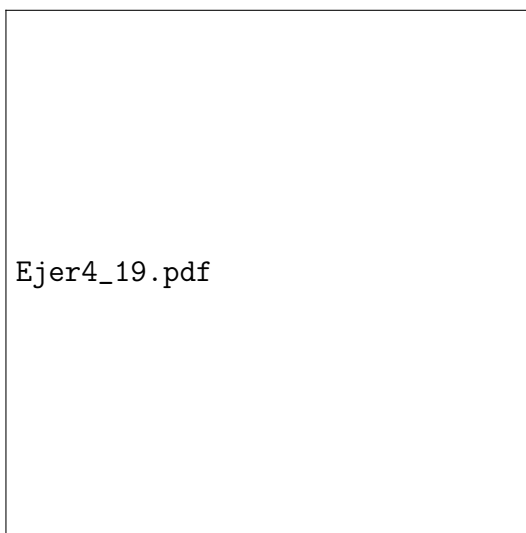
- 1) Si se tiene en cuenta que estado final de esfuerzos es la suma de estados individuales, determine cuál es el tensor de esfuerzos del problema que considera conjuntamente el tensor de esfuerzos del ?? y el peso propio.
- 2) Diga si el cuerpo está o no en equilibrio diferencial (local) estático. Sí es del caso, de una propuesta para lograr dicho equilibrio. Justifique su respuesta matemáticamente

o) El estado de esfuerzos en un punto de un medio continuo está dado por:

$$\sigma_{xx}(t) = K(t); \quad \sigma_{yy}(t) = -6K(t); \quad \sigma_{zz}(t) = -K(t);$$

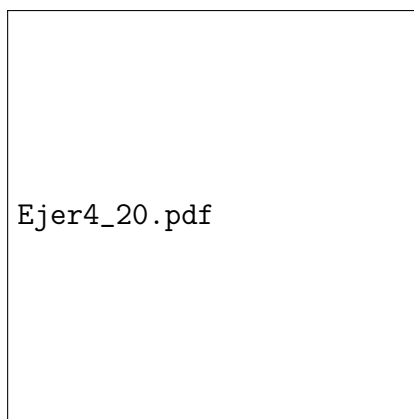
$$\tau_{xy}(t) = 0; \quad \tau_{xz}(t) = 0; \quad \tau_{yz}(t) = 0$$

Donde,  $K(t)$  es un parámetro que varía en función del tiempo  $t$ , tal como se muestra en la gráfica y tabla presentadas en la ??.

**Figura 1.28.** Variación del parámetro  $K$ 

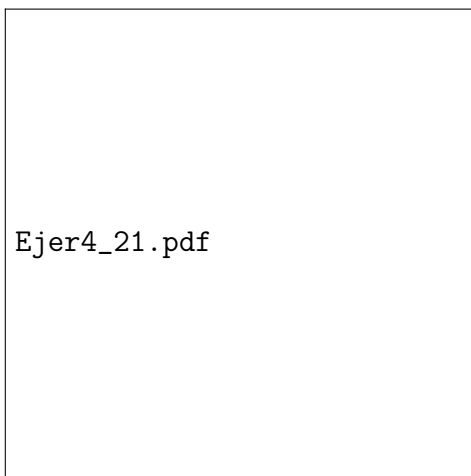
- 1) Si el material es infinitamente resistente ante esfuerzos normales (axiales), pero no soporta esfuerzos cortantes mayores o iguales a  $13 \frac{kgf}{cm^2}$  determine el instante en que se presenta la falla en caso de que se presente. Si no hay falla indíquelo claramente.
- p) En la figura ?? se presenta la sección transversal de un cilindro. Los esfuerzos en el dominio están representados por:

$$\sigma_r = \frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{(b^2 - a^2) r^2} + \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2} \quad \sigma_\theta = -\frac{a^2 b^2 (p_o - p_i)}{(b^2 - a^2) r^2} + \frac{p_i a^2 - p_o b^2}{b^2 - a^2} \quad \tau_{r\theta} = 0$$

**Figura 1.29.** Sección transversal cilindro

- 1) Verifique el equilibrio diferencial.

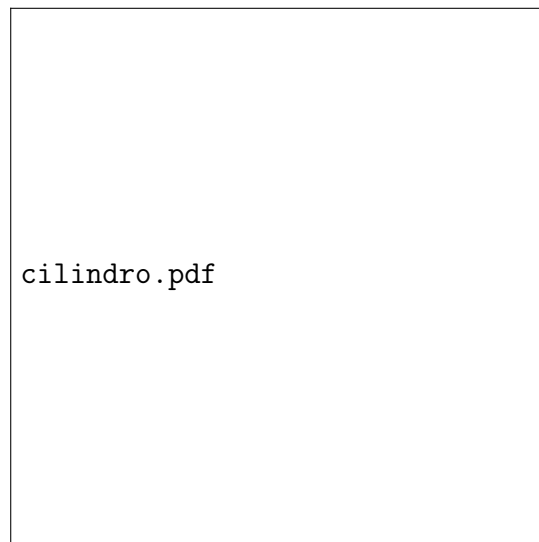
- 2) ¿Cuales son las cargas externas a las cuales está sometido el cilindro?. Indíquelas gráficamente.
- 3) ¿Cual es el esfuerzo axial máximo y dónde se presenta?.
- 4) ¿Cual es el esfuerzo de corte máximo y dónde se presenta?.
- q) En la ?? muestra el estado de tensiones en un punto de coordenadas  $(X, Y) = (55/\sqrt{2}, 55/\sqrt{2})$  al interior de un Medio Continuo. Sobre una de las caras asociadas al eje  $Y'$  se dan las tensiones  $\sigma_{Y'Y'}$  y  $\tau_{Y'X'}$  y sobre una de las caras asociadas al eje  $X'$  se da el vector de tracciones expresado en el sistema de referencia  $XY$ .



**Figura 1.30.** Estado de tensiones en un punto al interior de un medio continuo.

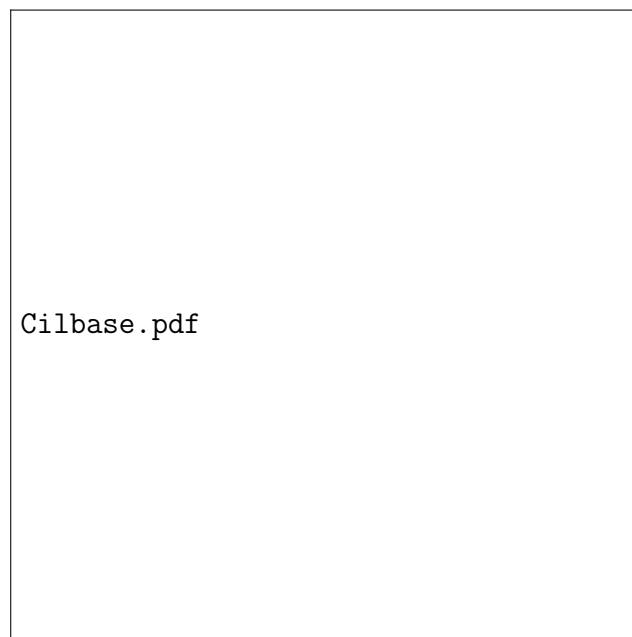
- 1) Escribir el tensor de tensiones en el sistema de referencia polar  $r, \theta$ .
- r) La solución para un cilindro de radio interno  $a$  y radio externo  $b$  sometido a presiones internas y externas  $p_a$  y  $p_b$  respectivamente (ver ??), está dado por:

$$\sigma_{rr} = -\frac{\left(\frac{b^2}{r^2} - 1\right)}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)}p_a - \frac{\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)}p_b \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\left(\frac{b^2}{r^2} + 1\right)}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)}p_a - \frac{\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)}{\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)}p_b \quad \tau_{r\theta} = 0$$



**Figura 1.31.** Cilindro sometido a presión interna  $p_a$  y presión externa  $p_b$

Usando la solución anterior, determinar las tensiones para un cilindro de radio interno  $a$  y radio externo  $2a$  sometido a una presión interna  $q$  y apoyado sobre una superficie rígida en su cara externa, tal y como se muestra en la ??



**Figura 1.32.** Cilindro sometido a presión interna  $q$  con superficie rígida en cara externa

s) Los tensores

$$[\sigma(r, \theta)]_P = \begin{bmatrix} -\frac{2P \cos \theta}{(2\alpha + \sin(2\alpha))r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\sigma(r, \theta)]_Q = \begin{bmatrix} -\frac{2Q \sin \theta}{(2\alpha - \sin(2\alpha))r} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

representan el estado de tensiones en un punto de coordenadas  $(r, \theta)$  al interior de las cuñas de semi-ángulo interno  $\alpha$  (medido en radianes) mostradas en las ?? y ??, resultantes de la aplicación de cargas puntuales  $P$  y  $Q$  respectivamente.



[l]0.32

figure\_1b\_T1.pdf

**Figura 1.33.** Cuña de semi-ángulo interno  $\alpha$  sometida a una carga vertical P.

[r]0.32

Usando dichas soluciones se pide determinar el estado de tensiones para un punto P de coordenadas  $(r, \theta)$  localizado al interior de un depósito de suelo sometido a una carga puntual de magnitud  $F$  como se muestra en la ??.

[1]0.35

figure\_1a\_T1.pdf

**Figura 1.36.** Depósito de suelo sometido a una carga puntual  $F$ .