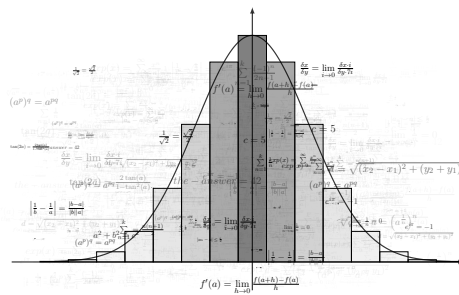


[Übungsblatt,Jake]Lilly

# *Analysis 1*

Dr. Jan-Willem Liebezeit, Marcus Müller

Sammlung der Übungsblätter 1 – 13  
Mitschrift von: Florian Sihler



**Alle Übungsblätter**

# Übungsblatt 1

Test

## Aufgabe 1 – Beweisen

Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie folgende Aussagen:

a)  $\left| \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right| \geq 2 \quad (a, b \neq 0),$

b)  $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|},$

c)  $\max\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2},$

d)  $\min\{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}.$

a) Wir führen hier eine Fallunterscheidung durch:

**Fall 1:** Es gilt:  $a, b > 0$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right| &= \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 & | \cdot ab \\ \Leftrightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} &\geq 2ab \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 &\geq 2ab & | -2ab \\ \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a - b)^2 &\geq 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

**Fall 2:** Es gilt:  $a > 0, b < 0$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right| &= -\left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \geq 2 \\ \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} &\leq -2 & | \cdot ab \quad (< 0) \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 &\geq -2ab & | +2ab \\ \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a + b)^2 &\geq 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Da die anderen Fälle analog ablaufen ist somit die Ungleichung gezeigt. ■

b) Dies lässt sich durch stupides Ausrechnen lösen:

$$\begin{aligned} \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \\ \Leftrightarrow |a+b|(1+|a|)(1+|b|) &\leq |a|(1+|a+b|)(1+|b|) + |b|(1+|a+b|)(1+|a|) \\ \Leftrightarrow |a+b| + |a+b||a| &\leq |a| + |a||a+b| + |a||b| + |a||a+b||b| \\ &\quad + |a+b||b| + |a+b||a||b| \quad + |b| + |b||a+b| + |b||a| + |b||a||a+b| \\ \Leftrightarrow |a+b| &\leq |a| + |b| + 2|a||b| + |a||b||a+b| \end{aligned}$$

Auf Basis der Dreiecksungleichung ist auch diese Gleichung bewiesen! ■

c) Wir machen hier eine Fallunterscheidung für die Fälle:

**Fall 1:**  $a > b$ :  $\frac{a+b+|a-b|}{2} = \frac{a+b+a-b}{2} = \frac{2a}{2} = a$

**Fall 2:**  $a = b$ :  $\frac{a+b}{2} = \frac{2a}{2} = a$

**Fall 3:**  $a < b$ :  $\frac{a+b+|a-b|}{2} = \frac{a+b-(a-b)}{2} = \frac{a+b-a+b}{2} = \frac{2b}{2} = b$

Durch das Abdecken aller Fälle ist auch diese Aussage somit korrekt! ■

d) Diese Lösung verläuft analog zur c).

## Aufgabe 2 – Komplexe Zahlen

Für eine komplexe Zahl ist der Betrag von  $z$  definiert durch:  $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ , wobei  $\bar{z}$  die zu  $z$  konjugierte Zahl bezeichnet:

a) Berechnen sie für  $z = \frac{12+5i}{2+3i}$ :

$$\bar{z}, |z|, \Re z, \Im z, \Re\left(\frac{1}{z}\right) \text{ und } \Im\left(\frac{1}{z}\right).$$

b) Es seien  $z, w \in \mathbb{C}$ . Zeigen Sie die Parallelogrammidentität:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

c) Zeigen Sie, dass  $|zw| = |z||w|$  für alle  $z, w \in \mathbb{C}$  gilt.

a) Als Vorarbeit bringen wir  $z$  in eine schöne Darstellung:

$$\begin{aligned} z &= \frac{12+5i}{2+3i} = \frac{(12+5i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{24-36i+10i-15i^2}{4-6i+6i-9i^2} \\ &= \frac{39-26i}{13} = 3-2i \end{aligned}$$

Auf Basis der Umformung erhalten wir durch Ablesen:  $\Re(z) = 3$ ,  $\Im(z) = -2$ :

$$\diamond |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{(3-2i)(3+2i)} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$\diamond \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\underbrace{z \cdot \bar{z}}_{|z|^2}} = \frac{3+2i}{13} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i. \text{ Damit ergibt sich: } \Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{3}{13}, \Im\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{2}{13}$$

b) Mit  $z, w \in \mathbb{C}$  erhalten wir:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 + |z-w|^2 &= 2(|z|^2 + |w|^2) \\ &= (z+w)(\overline{z+w}) + (z-w)(\overline{z-w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= 2z\bar{z} + 2w\bar{w} \\ &= 2(|z|^2 + |w|^2) \end{aligned}$$

c) Durch simples Rechnen erhalten wir:

$$\begin{aligned}|zw| &= \sqrt{(zw)(\overline{zw})} = \sqrt{(z\bar{z})(w\bar{w})} \\ &= \sqrt{z\bar{z}} \sqrt{w\bar{w}} \\ &= |z||w|\end{aligned}$$

### Aufgabe 3 – Funktionen

Es seien  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$  Abbildungen zwischen Mengen  $X, Y, Z$ . Zeigen Sie folgenden Aussagen:

- a)  $f$  und  $g$  sind injektiv  $\Rightarrow g \circ f$  ist injektiv.
- b)  $f$  und  $g$  sind surjektiv  $\Rightarrow g \circ f$  ist surjektiv.
- c) Die Inverse von  $g \circ f$  ist gegeben durch  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .

a) Hier gilt es zu zeigen, dass:  $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$ . Wir zeigen dies wie folgt:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x_1) &= (g \circ f)(x_2) \\ \Leftrightarrow g(f(x_1)) &= g(f(x_2)) \\ \xRightarrow{g \text{ inj}} f(x_1) &= f(x_2) \\ \xRightarrow{f \text{ inj}} x_1 &= x_2\end{aligned}$$

b) Hierfür wählen wir uns ein *beliebiges*  $z \in Z$ :

$$\begin{aligned}g \text{ surj} &\Rightarrow \exists y \in Y : g(y) = z \\ f \text{ surj} &\Rightarrow \exists x \in X : f(x) = y\end{aligned}$$

Aus diesen Ergebnissen können wir folgern:

$$\Rightarrow z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

c) Wir wollen  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$  gilt:

$$\begin{aligned}(g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f) &= (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) \\ &= f^{-1} \circ \underbrace{g^{-1} \circ g}_{id} \circ f \\ &= \underbrace{f^{-1} \circ f}_{id} \\ &= id \quad \checkmark\end{aligned}$$

Damit ist auch dies gezeigt! ■

# Aufgabe 4 – Mini- und Maxima

Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Beschränktheit und geben Sie ihr Minimum, Maximum, Infimum und Supremum an (sofern sie existieren):

**A:**  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 10x \leq 24\},$

**C:**  $C = \{\frac{m+n}{m \cdot n}\} \mid m, n \in \mathbb{N}.$

**B:**  $B = \{\frac{|x|}{1+|x|}\} \mid x \in \mathbb{R},$

**A:** Durch Rechnen erhalten wir:

$$\begin{aligned} x^2 - 10x &\leq 24 \\ \Leftrightarrow x^2 - 10x - 24 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 + 24} = 5 \pm 7:$$

Damit erhalten wir:  $x_1 = -2, x_2 = 12$ . Nun überprüfen wir noch ob die 0 enthalten ist:  $0^2 - 10 \cdot 0 \leq 24$  ✓. Damit erhalten wir für  $A$  eine adäquate Intervallschreibweise:  $A = [-2, 12]$  und können somit ablesen:

$$\diamond \max A = \sup A = 12$$

$$\diamond \min A = \inf A = -2$$

**B:** Durch Rechnen ergibt sich wieder:

$$\begin{aligned} \frac{\overbrace{|x|}^{\geq 0}}{\underbrace{1+|x|}_{\geq 0}} &\geq 0 \\ \frac{0}{1+0} &= 0 \end{aligned}$$

Daraus folgern wir:  $\min B = \inf B = 0$ .

Für das Maximum wollen wir zeigen, dass:  $\frac{|x|}{1+|x|} < 1$ . Dies beweisen wir durch Widerspruch. Angenommen es würde eine obere Schranke  $S \leq 1$  existieren, so müsste gelten:

$$\begin{aligned} \frac{|x|}{1+|x|} &< S \\ \Leftrightarrow |x| &< S(1+|x|) \\ \Leftrightarrow |x| &< S + S|x| \quad | -S|x| \\ \Leftrightarrow |x| - S|x| &< S \quad | \div (1-S) \\ \Leftrightarrow |x| &\leq \frac{S}{1-S} \quad \times \end{aligned}$$

$\sup B = 1$ , wie zu zeigen war besitzt  $B$  kein Maximum!

**C:**  $\frac{1+1}{1 \cdot 1} = 2$ . Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
 \frac{m+n}{mn} &\leq 2 \\
 \Leftrightarrow m+n &\leq 2mn \\
 \Leftrightarrow 0 &\leq 2mn - m - n \\
 \Leftrightarrow 0 &\leq mn - m + mn - n \\
 \Leftrightarrow 0 &\leq \underbrace{m}_{\geq 0} \underbrace{(n-1)}_{\geq 0} + \underbrace{n}_{\geq 0} \underbrace{(m-1)}_{\geq 0} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Damit gilt:  $\max C = \sup C = 2$ . Für das Infimum treffen wir die Annahme:

$\underbrace{\frac{m+n}{m \cdot n}}_{>0} > 0$ . Nun wollen wir auf dieser Basis die Annahme Zeigen:  $\inf C = 0$ .

Analog wie bereits zuvor beginnen wir mit der Annahme, dass es eine untere Schranke  $s > 0$  gibt:

$$\begin{aligned}
 \frac{m+n}{mn} &> s \\
 \Leftrightarrow m+n &> smn \\
 \Leftrightarrow 1 &> s \cdot \frac{mn}{m+n} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{s} &> \frac{mn}{m+n} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

Wählen wir  $m = n$  so ergibt sich:  $\frac{1}{s} > \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{s} > m \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \nexists$ .  
Damit folgt:  $\inf C = 0$ , das Minimum von  $C$  existiert nicht!