

Aufgabe 1 – Grenzwertberechnung durch Mittelwertsatz

Man bestimme die folgenden Grenzwerte mithilfe der Mittelwertsätze:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(1 - \cos(1/x))$

b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}$ für $a > 0, \beta \neq 0$

- a) Dies lässt sich wieder, auf Basis des Hinweises aus (Aufgabe 43) wie folgt berechnen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(1 - \cos(1/x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0}$$

Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (0, x)$, mit $\frac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0} = -\sin(\xi)$.
Mit $x \rightarrow 0^+$ geht auch $\xi \rightarrow 0^+$, damit folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \sin(\xi) = 0$$

- b) Nach dem zweiten Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (a, x)$ mit $\frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} = \frac{\alpha \xi^{\alpha-1}}{\beta \xi^{\beta-1}}$.
Wir berechnen also:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} &= \lim_{\xi \rightarrow a} \frac{\alpha \xi^{\alpha-1}}{\beta \xi^{\beta-1}} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} a^{\alpha-\beta} \end{aligned}$$