Aufgabe 1 – Beweisen

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) $\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| \geq 2 \quad (a, b \neq 0)$,

b) $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$,

c) $\max\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$,

d) $\min\{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$.

---

a) Wir führen hier eine Fallunterscheidung durch:

Fall 1: Es gilt: $a, b > 0$:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} &\geq 2 && \mid \cdot ab \\
\Leftrightarrow \frac{a^2 \cancel{b}}{\cancel{b}} + \frac{\cancel{a}\, b^2}{\cancel{a}} &\geq 2ab \\
\Leftrightarrow a^2 + b^2 &\geq 2ab && \mid -2ab \\
\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0 \\
\Leftrightarrow (a-b)^2 &\geq 0 && \checkmark
\end{aligned}
$$

Fall 2: Es gilt: $a > 0, b < 0$:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| = -\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) &\geq 2 \\
\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} &\leq -2 && \mid \cdot ab \quad (< 0) \\
\Leftrightarrow a^2 + b^2 &\geq -2ab && \mid +2ab \\
\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 &\geq 0 \\
\Leftrightarrow (a+b)^2 &\geq 0 && \checkmark
\end{aligned}
$$

Da die anderen Fälle analog ablaufen ist somit die Ungleichung gezeigt. ■

b) Dies lässt sich durch stupides Ausrechnen lösen:

$$
\begin{aligned}
\frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \\
\Leftrightarrow |a+b|(1+|a|)(1+|b|) &\leq |a|(1+|a+b|)(1+|b|) + |b|(1+|a+b|)(1+|a|) \\
\Leftrightarrow |a+b| + |a+b||a| &\leq |a| + |a||a+b| + |a||b| + |a||a+b||b| \\
+ |a+b||b| + |a+b||a||b| &\quad + |b| + |b||a+b| + |b||a| + |b||a||a+b| \\
\Leftrightarrow |a+b| &\leq |a| + |b| + 2|a||b| + |a||b||a+b|
\end{aligned}
$$

Auf Basis der Dreiecksungleichung ist auch diese Gleichung bewiesen! ■

c) Wir machen hier eine Fallunterscheidung für die Fälle:

Fall 1: $a > b$: $\frac{a+b+|a-b|}{2} = \frac{a+b+a-b}{2} = \frac{2a}{2} = a$

Fall 2: $a = b$: $\frac{a+b}{2} = \frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}} = a$

Fall 3: $a < b$: $\frac{a+b+|a-b|}{2} = \frac{a+b-(a-b)}{2} = \frac{a+b-a+b}{2} = \frac{2b}{b} = b$

Durch das Abdecken aller Fälle ist auch diese Aussage somit korrekt! ■

d) Diese Lösung verläuft analog zur c).