

## Aufgabe 1 – Beweisen

Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie folgende Aussagen:

- a)  $\left| \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right| \geq 2 \quad (a, b \neq 0),$   
 b)  $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|},$   
 c)  $\max\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2},$   
 d)  $\min\{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}.$

a) Wir führen hier eine Fallunterscheidung durch:

**Fall 1:** Es gilt:  $a, b > 0$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right| &= \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 & | \cdot ab \\ \Leftrightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} &\geq 2ab \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 &\geq 2ab & | -2ab \\ \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a - b)^2 &\geq 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

**Fall 2:** Es gilt:  $a > 0, b < 0$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right| &= -\left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \geq 2 \\ \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} &\leq -2 & | \cdot ab \quad (< 0) \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 &\geq -2ab & | +2ab \\ \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a + b)^2 &\geq 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Da die anderen Fälle analog ablaufen ist somit die Ungleichung gezeigt. ■

b) Dies lässt sich durch stupides Ausrechnen lösen:

$$\begin{aligned} \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \\ \Leftrightarrow |a+b|(1+|a|)(1+|b|) &\leq |a|(1+|a+b|)(1+|b|) + |b|(1+|a+b|)(1+|a|) \\ \Leftrightarrow |a+b| + |a+b||a| &\leq |a| + |a||a+b| + |a||b| + |a||a+b||b| \\ &\quad + |a+b||b| + |a+b||a||b| \quad + |b| + |b||a+b| + |b||a| + |b||a||a+b| \\ \Leftrightarrow |a+b| &\leq |a| + |b| + 2|a||b| + |a||b||a+b| \end{aligned}$$

Auf Basis der Dreiecksungleichung ist auch diese Gleichung bewiesen! ■

c) Wir machen hier eine Fallunterscheidung für die Fälle:

**Fall 1:**  $a > b: \frac{a+b+|a-b|}{2} = \frac{a+b+a-b}{2} = \frac{2a}{2} = a$

**Fall 2:**  $a = b: \frac{a+b}{2} = \frac{2a}{2} = a$

**Fall 3:**  $a < b: \frac{a+b+|a-b|}{2} = \frac{a+b-(a-b)}{2} = \frac{a+b-a+b}{2} = \frac{2b}{2} = b$

Durch das Abdecken aller Fälle ist auch diese Aussage somit korrekt! ■

**d)** Diese Lösung verläuft analog zur c).