Aufgabe 1 – Grenzwertberechnung durch Mittelwertsatz

Man bestimme die folgenden Grenzwerte mithilfe der Mittelwertsätze:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} x(1-\cos(1/x))$ **b)** $\lim_{x\to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}$ für $a > 0, \beta \neq 0$

---

a) Dies lässt sich wieder, auf Basis des Hinweises aus (Aufgabe 43) wie folgt berechnen:

$$\lim_{x\to\infty} x(1-\cos(1/x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0}$$

Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (0,x)$, mit $\frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0} = -\sin(x)$. Mit $x \to 0^+$ geht auch $\xi \to 0^+$, damit folgt

$$\lim_{x\to 0^+} -\frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0} = \lim_{\xi\to 0} \sin(\xi) = 0$$

b) Nach dem zweiten Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (a,x)$ mit $\frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - \alpha^\beta} = \frac{\alpha\xi^{\alpha-1}}{\beta\xi^{\beta-1}}$. Wir berechnen also:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} &= \lim_{\xi\to a} \frac{\alpha\xi^{\alpha-1}}{\beta\xi^{\beta-1}} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} a^{\alpha-\beta}\end{aligned}$$