Aufgabe 1 – Beweisen

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) $\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| \geq 2 \quad (a, b \neq 0)$,

b) $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$,

c) $\max\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}$,

d) $\min\{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$.

---

a) Wir führen hier eine Fallunterscheidung durch:

Fall 1: Es gilt: $a, b > 0$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} &\geq 2 && \mid \cdot ab \\
\Leftrightarrow \frac{a^2 \cancel{b}}{\cancel{b}} + \frac{\cancel{a}\, b^2}{\cancel{a}} &\geq 2ab \\
\Leftrightarrow a^2 + b^2 &\geq 2ab && \mid -2ab \\
\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 &\geq 0 \\
\Leftrightarrow (a-b)^2 &\geq 0 && \checkmark
\end{aligned}$$

Fall 2: Es gilt: $a > 0, b < 0$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| = -\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) &\geq 2 \\
\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} &\leq -2 && \mid \cdot ab \quad (< 0) \\
\Leftrightarrow a^2 + b^2 &\geq -2ab && \mid +2ab \\
\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 &\geq 0 \\
\Leftrightarrow (a+b)^2 &\geq 0 && \checkmark
\end{aligned}$$

Da die anderen Fälle analog ablaufen ist somit die Ungleichung gezeigt. ■

b) Dies lässt sich durch stupides Ausrechnen lösen:

$$\begin{aligned}
\frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \\
\Leftrightarrow |a+b|(1+|a|)(1+|b|) &\leq |a|(1+|a+b|)(1+|b|) + |b|(1+|a+b|)(1+|a|) \\
\Leftrightarrow |a+b| + |a+b||a| &\leq |a| + |a||a+b| + |a||b| + |a||a+b||b| \\
+ |a+b||b| + |a+b||a||b| &\quad + |b| + |b||a+b| + |b||a| + |b||a||a+b| \\
\Leftrightarrow |a+b| &\leq |a| + |b| + 2|a||b| + |a||b||a+b|
\end{aligned}$$

Auf Basis der Dreiecksungleichung ist auch diese Gleichung bewiesen! ■

c) Wir machen hier eine Fallunterscheidung für die Fälle:

Fall 1: $a > b$: $\frac{a+b+|a-b|}{2} = \frac{a+b+a-b}{2} = \frac{2a}{2} = a$

Fall 2: $a = b$: $\frac{a+b}{2} = \frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}} = a$

Fall 3: $a < b$: $\frac{a+b+|a-b|}{2} = \frac{a+b-(a-b)}{2} = \frac{a+b-a+b}{2} = \frac{2b}{b} = b$

Durch das Abdecken aller Fälle ist auch diese Aussage somit korrekt! ■

d) Diese Lösung verläuft analog zur c).

Aufgabe 2 – Komplexe Zahlen

Für eine komplexe Zahl ist der Betrag von z definiert durch: $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$, wobei $\overline{z}$ die zu z konjugierte Zahl bezeichnet:

a) Berechnen sie für $z = \frac{12+5\mathtt{i}}{2+3\mathtt{i}}$:

$$\overline{z}, |z|, \mathfrak{Re} z, \mathfrak{Im} z, \mathfrak{Re}(\frac{1}{z}) \text{ und } \mathfrak{Im}(\frac{1}{z}).$$

b) Es seien $z, w \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie die Parallelogrammidentität:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

c) Zeigen Sie, dass $|zw| = |z||w|$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt.

a) Als Vorarbeit bringen wir z in eine schöne Darstellung:

$$\begin{aligned} z = \frac{12+5\mathtt{i}}{2+3\mathtt{i}} &= \frac{(12+5\mathtt{i})(2-3\mathtt{i})}{(2+3\mathtt{i})(2-3\mathtt{i})} = \frac{24-36\mathtt{i}+10\mathtt{i}-15\mathtt{i}^2}{4-\cancel{6\mathtt{i}}+\cancel{6\mathtt{i}}-9\mathtt{i}^2} \\ &= \frac{39-26\mathtt{i}}{13} = 3-2\mathtt{i} \end{aligned}$$

Auf Basis der Umformung erhalten wir durch Ablesen: $\mathfrak{Re}(z) = 3$, $\mathfrak{Im}(z) = -2$:

- ◇ $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \underbrace{\sqrt{(3-2\mathtt{i})(3+2\mathtt{i})}}_{\sqrt{3^2-(2\mathtt{i})^2}} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$
- ◇ $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\underbrace{z \cdot \overline{z}}_{|z|^2}} = \frac{3+2\mathtt{i}}{13} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}\mathtt{i}$. Damit ergibt sich: $\mathfrak{Re}(\frac{1}{z}) = \frac{3}{13}$, $\mathfrak{Im}(\frac{1}{z}) = \frac{2}{13}$

b) Mit $z, w \in \mathbb{C}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2) \\ &= (z+w)\overline{(z+w)} + (z-w)\overline{(z-w)} \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{z} - z\overline{w} - w\overline{z} + w\overline{w} \\ &= 2z\overline{z} + 2w\overline{w} \\ &= 2(|z|^2 + |w|^2) \end{aligned}$$

c) Durch simples Rechnen erhalten wir:

$$\begin{aligned}|zw| &= \sqrt{(zw)\overline{(zw)}} = \sqrt{(z\overline{z})(w\overline{w})}\\ &= \sqrt{z\overline{z}}\sqrt{w\overline{w}}\\ &= |z||w|\end{aligned}$$

Aufgabe 3 – Funktionen

Es seien $f : X \to Y, g : Y \to Z$ Abbildungen zwischen Mengen X, Y, Z. Zeigen Sie folgenden Aussagen:

a) f und g sind injektiv $\Rightarrow g \circ f$ ist injektiv.

b) f und g sind surjektiv $\Rightarrow g \circ f$ ist surjektiv.

c) Die Inverse von $g \circ f$ ist gegeben durch $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

---

a) Hier gilt es zu zeigen, dass: $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \to x_1 = x_2$. Wir zeigen dies wie folgt:

$$\begin{aligned}&(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)\\ \Leftrightarrow\quad & g(f(x_1)) = g(f(x_2))\\ \overset{g\text{ inj}}{\Rightarrow}\quad & f(x_1) = f(x_2)\\ \overset{f\text{ inj}}{\Rightarrow}\quad & x_1 = x_2\end{aligned}$$

b) Hierfür wählen wir uns ein *beliebiges* $z \in Z$:

$$\begin{aligned}g \text{ surj} &\Rightarrow \exists y \in Y : g(y) = z\\ f \text{ surj} &\Rightarrow \exists x \in X : f(x) = y\end{aligned}$$

Aus diesen Ergebnissen können wir folgern:

$$\Rightarrow z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

c) Wir wollen $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ gilt:

$$\begin{aligned}(g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f) &= (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)\\ &= f^{-1} \circ \underbrace{g^{-1} \circ g}_{id} \circ f\\ &= \underbrace{f^{-1} \circ f}_{id}\\ &= id \qquad \checkmark\end{aligned}$$

Damit ist auch dies gezeigt! ■

Aufgabe 4 – Mini- und Maxima

Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Beschränktheit und geben Sie ihr Minimum, Maximum, Infimum und Supremum an (sofern sie existieren):

A: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 10x \leq 24\}$,

B: $B = \left\{\frac{|x|}{1+|x|}\right\} \mid x \in \mathbb{R}$,

C: $C = \{\frac{m+n}{m \cdot n}\} \mid m, n \in \mathbb{N}$.

A: Durch Rechnen erhalten wir:

$$\begin{aligned} x^2 - 10x &\leq 24 \\ \Leftrightarrow x^2 - 10x - 24 &\leq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 + 24} = 5 \pm 7$:
Damit erhalten wir: $x_1 = -2, x_2 = 12$. Nun überprüfen wir noch ob die 0 enthalten ist: $0^2 - 10 \cdot 0 \leq 24$ ✓. Damit erhalten wir für A eine adäquate Intervallschreibweise: $A = [-2, 12]$ und können somit ablesen:

- $\max A = \sup A = 12$
- $\min A = \inf A = -2$

B: Durch Rechnen ergibt sich wieder:

$$\frac{\overbrace{|x|}^{\geq 0}}{\underbrace{1 + |x|}_{\geq 0}} \geq 0$$

$$\frac{0}{1+0} = 0$$

Daraus folgern wir: $\min B = \inf B = 0$.
Für das Maximum wollen wir Zeigen, dass: $\frac{|x|}{1+|x|} < 1$. Dies beweisen wir durch Widerspruch. Angenommen es würde eine obere Schranke $S \leq 1$ existieren, so müsste gelten:

$$\begin{aligned} \frac{|x|}{1+|x|} &< S \\ \Leftrightarrow \quad |x| &< S(1 + |x|) \\ \Leftrightarrow \quad |x| &< S + S|x| \quad && \mid -S|x| \\ \Leftrightarrow |x| - S|x| &< S && \mid \div(1 - S) \\ \Leftrightarrow \quad |x| &\leq \frac{S}{1-S} \quad && ✗ \end{aligned}$$

$\sup B = 1$, wie zu zeigen war besitzt B kein Maximum!

C: $\frac{1+1}{1\cdot 1} = 2$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{m+n}{mn} &\leq 2 \\ \Leftrightarrow m+n &\leq 2mn \\ \Leftrightarrow \qquad 0 &\leq 2mn - m - n \\ \Leftrightarrow \qquad 0 &\leq mn - m + mn - n \\ \Leftrightarrow \qquad 0 &\leq \underbrace{m}_{\geq 0}\underbrace{(n-1)}_{\geq 0} + \underbrace{n}_{\geq 0}\underbrace{(m-1)}_{\geq 0} \checkmark \end{aligned}$$

Damit gilt: $\max C = \sup C = 2$. Für das Infimum treffen wir die Annahme: $\frac{\overbrace{m+n}^{>0}}{\underbrace{m \cdot n}_{>0}} > 0$. Nun wollen wir auf dieser Basis die Annahme Zeigen: $\inf C = 0$.
Analog wie bereits zuvor beginnen wir mit der Annahme, dass es eine untere Schranke $s > 0$ gibt:

$$\begin{aligned} \frac{m+n}{mn} &> s \\ \Leftrightarrow m+n &> smn \\ \Leftrightarrow \qquad 1 &> s \cdot \frac{mn}{m+n} \\ \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{s} &> \frac{mn}{m+n} \qquad \forall m, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Wählen wir $m = n$ so ergibt sich: $\frac{1}{s} > \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{s} > m \; \forall m \in \mathbb{N} \lightning$.
Damit folgt: $\inf C = 0$, das Minimum von C existiert nicht!