固体物理学 - Solid State Physics

2024年6月3日

目次

第1章	オーバービュー	3
第2章	結晶構造	4
2.1	格子ベクトル	4
2.2	結晶面	4
2.3	逆格子ベクトル	4
2.4	回折条件	5
2.5	ブリルアンゾーン	6
2.6	構造因子	6
第3章	結合	7
3.1	結合とは	7
3.2	分子結合	7
3.3	イオン結合	7
3.4	共有結合	8
3.5	金属結合	8
3.6	ファン・デル・ワールス結合	8
3.7	水素結合	8
第4章	フォノン	9
4.1	位相速度と群速度	9
4.2	一次元単原子格子の格子振動・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	9
4.3	一次元二原子格子の格子振動	10
4.4	三次元格子の格子振動	10
4.5	フォノンによる量子化	10
4.6	格子比熱	10
4.7	熱伝導	10
第5章	自由電子気体	11
第6章	エネルギーバンド	12
筆 7 章	フェルミエネルギー	13

第8章	半導体	14
第9章	超伝導	15
第 10 章	磁性	16
第 11 章	名前決めてない	17
第 12 章	光学的性質	18
第 13 章	雷气的性質	10

第1章 オーバービュー

第2章

結晶構造

2.1 格子ベクトル

ブラベ格子、格子ベクトルの表式

結晶は膨大な数の原子が並んで形成されている。その原子は規則正しく並んでいる(とする)わけであるが、どの原子から見ても景色が同じような点の集まりを**ブラベ格子**という。表現が分かりづらいので少し噛み砕くと、どのような周期性を持って原子が並んでいるのかを判別するためにピックアップした原子群といったようなイメージである。基本的な固体物理学のアプローチとして、周期構造の中の一つ(**単位格子**)で解析をし、それを周期的境界条件で実際のスケールに拡張する。そのプロセスの中で、ブラベ格子を考えることは非常に意義のあることである。

その周期的境界条件をどのように表現するのか。ここで、**格子ベクトル**を**基本並進ベクトル**と呼ばれる a_i を使用して、

$$T = n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 \tag{2.1}$$

と定義し、格子点の位置 r、r' を用いて、

$$r' = r + T \tag{2.2}$$

となることとする。この格子ベクトルを使えば、周期性を表現することができる。

2.2 結晶面

結晶(格子)の面を表現するには**ミラー指数**と呼ばれる量を使用し、(hkl) というように表記する。ここでは、基本並進ベクトル a_i を使って、その軸上での点 0 から 1 の範囲で指定し、その逆数をそれぞれ取ったものがそれらの点を繋いでできる面がミラー指数で表される結晶面となる。文章だけで説明することは難しいので、ここではこれぐらいの記述に留めておく。ちなみにミラー指数は、逆格子空間での記述に対応させており、表記として $(hkl)=(m_1m_2m_3)$ と、逆格子ベクトルの係数を順に並べるように定義されている。

2.3 逆格子ベクトル

実空間での解析よりも、**逆格子空間**(波数空間)と呼ばれる、実空間と逆の次元を持つような空間での解析の方が見通しが良い。理由は様々であるが、運動量や分散との対応が分かりやすくなるなどがある。

実空間での周期性を損なうことがないように、逆格子空間を定義していきたい。任意の物理量 f(r) について、実格子の周期性から

$$f(r+T) = f(r) \tag{2.3}$$

が成り立つ。ここで周期性に相性が良いフーリエ級数展開を利用することにより、

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{m} A_{m} \exp(i\mathbf{G}_{m} \cdot \mathbf{r})$$
(2.4)

と表現することができ、ここで現れた G_m が逆格子ベクトルに当たるものである。平面波の表式と見比べると、波数 k に当たる部分が G_m になっていることから、逆格子空間は波数空間と呼ばれることがあるのだろう。以上までの議論を踏まえて、**逆格子基本並進ベクトル**を

$$b_i = 2\pi \frac{a_j \times a_k}{a_i \cdot a_j \times a_k} \tag{2.5}$$

と定義し、これを用いて**逆格子ベクトル**を、

$$G_m = m_1 b_1 + m_2 b_2 + m_3 b_3 \tag{2.6}$$

と表すことにする。これを実際に(2.4)式に代入してみると、(2.3)式を満たしていることが分かる。ここでは、

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = 2\pi \delta_{i,j} \tag{2.7}$$

という関係式が成り立っており、実空間の基本並進ベクトルと長さの情報に関するものだけが逆になったような、密接すぎる関係があることは見て取れる。実際、実格子空間と逆格子空間は、フーリエ変換と逆フーリエ変換により行き来することができる。フーリエ変換は、重ね合わさった波を波数ごとに分離する(波束 \rightarrow 単一波)に対応し、逆フーリエ変換はその逆の操作に対応する。このことを考えると、(2.7) 式で 2π の因子が出てくることも直感的に理解することができる。

2.4 回折条件

位置rにある体積素片での回折について考えたい。入射波と散乱波の波数をそれぞれk、k' と表現することにすると、位相差による因子は、 $\exp\{i(k-k')\cdot r\}$ と表される。この位相差の因子を見て、強めあう条件は、波数差が周期性と一致するときであると言えるので、

$$\mathbf{k} - \mathbf{k'} = -\Delta k = \mathbf{G} \tag{2.8}$$

となるときである。ちなみに、この $-\Delta k$ は**散乱ベクトル**と呼ばれる量である。この散乱が**弾性散乱**である場合、式変形をしていくことで、

$$2\mathbf{k} \cdot \mathbf{G} = G^2 \tag{2.9}$$

という表式が現れる。ここまでの議論は、強め合う条件に関するもので、最後の表式は**ブラッグの条件**の別の表し方であると言える。

2.5 ブリルアンゾーン

実空間の単位格子に**ウィグナー・サイツ・セル**と呼ばれるものがある。これは各格子点との中間面に囲まれた領域のことで、格子内に原子をただ1つだけ含む最小の格子(単位格子)である。

逆格子空間におけるウィグナー・サイツ・セルに当たるものが**ブリルアンゾーン**である。(2.9) 式を利用して、両辺を 4 で割ることで、

$$\mathbf{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\mathbf{G}\right) = \left(\frac{1}{2}G\right)^2 \tag{2.10}$$

という表式が成り立ち、これがブリルアンゾーンを表す。このブリルアンゾーンは、中間面によって囲まれる空間の取り方に任意性があり、体積が小さい順に**第一ブリルアンゾーン、第二ブリルアンゾーン**、、と呼ばれる。もちろんのこと、境界は(2.9)式を満たす、つまりブラッグの条件を満たすので回折現象により強め合う。

2.6 構造因子

散乱された波の振幅 (散乱振幅 F) は、その位置の電子密度 $n(\mathbf{r})$ に依存し、

$$F = N \int dV n(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}) = NS_G$$
(2.11)

と表される。ちなみに、振幅の 2 乗が強度に当たる。これより、電子間の相互作用などを踏まえて、導出過程は省略するが、

$$S_G = \sum_j f_j \exp(-i\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{r_j})$$
 (2.12)

となり、この S_G を**構造因子**、 f_j を**原子構造因子**と呼ぶ。 f_j については、原子(の状態)ごとに決まった値を持つものである。この S_G は、結晶構造を如実に表すものであり、結晶にどこに光を当てるとどれほど散乱するのかなどをすることができ、例えば散乱強度が 0 になるようなパラメータでは弱め合っているということが分かる。

第3章

結合

3.1 結合とは

原子はなぜ結合するのか。その理由はシンプルで、結合した方が安定するからである。それを定量的に見ていきたいのだが、原子が完全に自由な時と、結合して結晶になっている時のエネルギー差を**結合エネルギー**と呼ぶ。この結合エネルギーが大きいほど、結合しやすいと言える。

2原子間の相互作用を表すポテンシャルエネルギーV(R)を使って、

$$F(R) = -\frac{dV(R)}{dR} \tag{3.1}$$

は**原子間力**を与える。このポテンシャルエネルギーV(R) は、ある R_0 で極小値を取り、その R_0 が安定の位置となり、そのときの原子間力は 0 になる。

3.2 分子結合

2つの水素原子の結合について考える。それぞれの原子の波動関数を $\varphi_1,\,\varphi_2$ と表現することにすると、分子の波動関数は、

$$\phi = C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 \tag{3.2}$$

と一次結合で表される。この手法のことを LCAO 法という。この波動関数のエネルギー準位を考えると、元のエネルギー準位よりも低い準位(安定的で結合に寄与する価電子帯)と高い準位(非安定的で電気伝導に寄与する伝導帯)の2つに分裂する。前者を**結合性軌道**、後者を**反結合性軌道**という。実際、それぞれの波動関数を導出し、それを2乗することにより電子の存在確率を計算すると、結合性たる所以と反結合性たる所以を体感することができるが、ここでは時間の関係でカットする。ちなみに、この結合性軌道にある電子は**価電子帯**の電子に対応し、反対に反結合性軌道にある原子は**伝導帯**にある電子に対応する。

3.3 イオン結合

陽イオンになりやすい原子と陰イオンになりやすい原子はしばしば**イオン結合**と呼ばれる、後述の共有結合とは異なる結合をすることがある。この結合が安定するのは、陽イオンにするために必要なエネルギー(イオン化エネルギー)よりも陰イオンになった時に放出されるエネルギー(電子親和力)とクーロンポテンシャル

の和の方が大きいからである。つまり、

$$(イオン化エネルギー) - (電子親和力) - (クーロンポテンシャル) < 0$$
 (3.3)

となり、これは孤立原子の状態よりも安定であることを表している。イオン結合における具体的な表式について述べてい。任意のイオンi, jには、ボルン・マイヤーポテンシャルという斥力ポテンシャルがあり、

$$U_{ij} = \lambda exp\left(-\frac{r_{ij}}{\rho}\right) \tag{3.4}$$

と表される。最近接イオン間距離を R とし、斥力はそれとしか相互作用しないとし、

$$r_{ij} = p_{ij}R (3.5)$$

と書けることを踏まえると、格子としてのポテンシャルは、

$$U_t ot = NU_i = NZ \lambda exp\left(-\frac{r_{ij}}{\rho}\right) - \frac{\alpha q^2 N}{4\pi\epsilon_0 R}$$
(3.6)

と表される。この式中の α はマーデルング定数と呼ばれる量で、

$$\alpha = \sum_{i,j} \frac{(\pm)}{p_{ij}} \tag{3.7}$$

と表され

- 3.4 共有結合
- 3.5 金属結合
- 3.6 ファン・デル・ワールス結合
- 3.7 水素結合

第4章

フォノン

4.1 位相速度と群速度

波の伝わる速度には、単一の波の場合と波束の場合の 2 種類ある。単一の波の場合、その波の伝わる速度を**位相速度**といい、

$$v_p = \frac{\omega}{k} \tag{4.1}$$

と表される。それに対して、波束(重ね合わされた波)の場合、その伝わる(ように見える)速度を**群速度**といい、

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \tag{4.2}$$

と表される。当たり前の議論ではあるが、位相速度と群速度は一般には一致しない。群速度を構成する位相速度には振れ幅(分散)があるからである。

4.2 一次元単原子格子の格子振動

格子が単一の原子で構成されている場合を考える。格子の振動のモデルはしばしば原子間にバネを設けたモデルで表現される。今回もそのアプローチをとることとして、全ての原子が同じ角振動数で振動する(基準モード)として考える。詳しい導出の過程は省略するが、角振動数 ω は、

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{4K}{M}} \left| \sin \frac{ka}{2} \right| \tag{4.3}$$

と表され、この関係を**分散関係**という。この言われの所以は、この分散関係によって位相速度や群速度を導出することが可能であることから来ており、それらを決定することで波動の伝搬特性を知ることができるためである。長波長の極限では、

$$\omega = a\sqrt{\frac{K}{M}}k\tag{4.4}$$

と表され、角周波数は波数に比例する式が得られる。この性質を、連続媒質中を伝わる音波(弾性波)と同じ性質を満たすことから音響モードという。イメージとしては、格子間弾性的相互作用的なものである。

4.3 一次元二原子格子の格子振動

格子内の原子を一個増やして考えてみたい。実際問題、格子内の原子の数は複数個にして考えることの方が、対称性などの観点から有益なことが多い。詳しい導出過程は省略するが、分散関係は

$$\omega_{\pm}^{2}(k) = K \left(\frac{1}{M_{1}} + \frac{1}{M_{2}} \right) \pm K \sqrt{\left(\frac{1}{M_{1}} + \frac{1}{M_{2}} \right)^{2} - \frac{4 \sin^{2} ka}{M_{1} M_{2}}}$$
(4.5)

と表される。これのうち、 ω_- は音響モードを表しており、長波長領域では

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{2K}{M_1 + M_2}} ka \tag{4.6}$$

と表され、単原子格子の場合と同様に波数 k に依存するような関数系を持つ。 ω_+ は、電磁波の吸収などのような光学的な性質から**光学モード**と呼ばれる。実際にそれぞれの分散関係を図示すると分かるのだが、ここでも省略してしまうことにする。

4.4 三次元格子の格子振動

4.5 フォノンによる量子化

N 個の粒子から構成される 3 次元結晶の場合、自由度は 3N で、これは 3N 個の独立な調和振動子があるとみなすことができる。これにより、

$$E = \sum_{\mathbf{k},s} \left(n_{\mathbf{k},s} + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_s \mathbf{k} \tag{4.7}$$

とエネルギーを表現することができる。この式の理解としては、まず 3N 個ある各モードに対して量子化された粒子($\mathbf{7}$ オノン)が存在する。このフォノンというのは、状態の励起具合を表していて、このフォノンの数が多い(振動の腹が多い)ほどエネルギーが高いということに対応する。各モードの合計のエネルギーが、系のエネルギーになるということである。

4.6 格子比熱

フォノンはボゾン(ボーズ粒子)なので、フェルミ分布関数より

$$n_{\mathbf{k},s} = \frac{1}{\exp\{\beta\hbar\omega_s(\mathbf{k})\} - 1} \tag{4.8}$$

と表される。

4.7 熱伝導

第5章

自由電子気体

第6章

エネルギーバンド

第7章

フェルミエネルギー

第8章

半導体

第9章

超伝導

第 10 章

磁性

11-13 章

第 11 章

名前決めてない

第 12 章

光学的性質

第 13 章

電気的性質