相対性理論 - Theory of Relativity

2024 年 4 月 26 日

目次

第 1 章

オーバービュー

1.1　相対性理論とは

ここは後々書くヲ。

第 2 章

ローレンツ変換

2.1　特殊相対性原理

種々の物理現象に対して、次のような２つの原理を要請する。

１つ目の要請は、**物理法則はすべての慣性系に対して同じ形で表される**という原理である。例として、電子誘導の法則について考える。円形の銅線と一本の棒磁石を用意し、この２つを近づけたり遠ざけたりする場合を考える。この時、銅線を動かしても棒磁石を動かしても、相対速度が同じであれば同様の電流が流れる。つまり、どちらの慣性系に対しても同じような定式が得られるはずである。もちろん、ここで考えている系は慣性系ではないのだが、例としてイメージしやすいので挙げたことだけは注意してほしい。

２つ目の要請は、**真空中の光速は光源の運動状態に無関係である**という原理である。これはマクスウェル方程式において、どの慣性系に対しても電磁波の伝搬速度が不変であるという性質から自然と出てくる原理である。これはつまり、どの速度で進んでいる観測者から見ても、光の速度は変わらないということである。

以上の２つの原理を合わせて、**特殊相対性原理**という。ちなみに、一般相対論は加速度系も含んだような理論になっており、今回考えているような慣性系に限定した理論ではない。そのため、特殊という接頭辞がついているかと思われる。

2.2　時空座標

特殊相対性原理のもとでは、座標だけではなく時間についても座標系に依存した量になる。時間が絶対的でなくなる理由は、光速が不変であるという原理を据えたからである。どこかしらの座標上の点を指定するためには、座標の情報と時間の情報の４つのパラメータが必要になる。それを (x, y, z, t) と表し、これを**時空座標**といい、時空座標上の点を**時空点**や**世界点**という。

2.3　ローレンツ変換

ここから本題のローレンツ変換に入ろうと思う。ローレンツ変換というのは、慣性系の間での座標変換である**ガリレイ変換**に、特殊相対性原理を適用した変換のことである。そのため、ガリレイ変換と大きく違うのは、**時間が絶対的ではない**ことで、言い換えると座標系の間で時間が共有されないことである。つまり、時空座標の定義の際に述べたとおり、座標系ごとに異なる時間軸をもつ。そのため、時空座標上の点を指定するために時間 t というパラメータを追加したのである。

実際に、座標系間の対応関係を求めてみる。静止した座標系 S と、それに対して x 方向に速度 V で移動している座標系 S' を考える。この時、x 軸方向の変換式は、比例定数 $\gamma(V)$ を導入して、

$$x' = \gamma(V)(x - Vt) \tag{2.1}$$

と表される。比例定数 $\gamma(V)$ は、座標系の移動速度に関連して座標軸が伸び縮みすることを反映させているためである。（ローレンツ収縮については後述）これに対して、S' からの視点で

$$x = \gamma(V)(x' + Vt') \tag{2.2}$$

も成り立つ。この 2 つをの表式を用いて t' について解くと、

$$t' = \gamma(V)t - \frac{(\gamma(V))^2 - 1}{\gamma(V)V}x \tag{2.3}$$

と時間軸についての返還式を求めることができる。ここから先の議論については詳しくは触れないが、光速不変の原理に基づいて、球面波の方程式を考えることで $\gamma(V)$ を求めることができて、

$$\gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{2.4}$$

と表される。ちなみにこの γ は**ローレンツ因子**と呼ばれている。これらを踏まえると、変換公式は

$$x' = \gamma(V)(x - Vt) = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{2.5}$$

$$y' = y \tag{2.6}$$

$$z' = z \tag{2.7}$$

$$ct' = \gamma(V)\left(t - V\frac{x}{c}\right) = \frac{t - V\frac{x}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{2.8}$$

というように表され、これを**ローレンツ変換**という。ct' というように表現している理由は、次元を他の 3 つの量に合わせ、この後定義する距離の概念にそのまま使用するためである。ガリレイ変換では、光速は限りなく大きいという仮定の元での議論なので、$c \to \infty$ とすると、これはガリレイ変換に一致する。

2.4 世界距離

特殊相対性原理において、光の球面波の方程式は例外なく満たされる。

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \tag{2.9}$$

ここで、時空座標上の 2 点 (x_1, y_1, z_1, t_1)、(x_2, y_2, z_2, t_2) における距離を

$${s_{12}}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 \tag{2.10}$$

と定義する。この ${s_{12}}^2$ を**世界距離**という。世界距離は 2 つの世界点を結んだ曲線（**世界線**）が、直線になった時の長さのことである。さらに、このように距離を定義したような空間を**ミンコフスキー空間**という。

ここで一つ重要な結論として、**世界距離 ${s_{12}}^2$ はローレンツ変換に対して不変**という性質を持つことを挙げる。これは光の球面波の方程式がどの慣性系についても成り立つことから、当たり前と言ってしまうこともできそうである。

さらに、球面波の方程式を見れば分かるとおり、光速で考える場合であれば、${s_{12}}^2$ の値は 0 になる。逆に言えば、光でなければそうならず、${s_{12}}^2$ は正の数や負の数を取りうる。正の数を取るときは、座標変化の影響が大きい時で、負の数を取るときは、時間変化の影響が大きい時であるということができる。

最後に補足として、全微分の表式を記述しておく。

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 \tag{2.11}$$

2.5 固有時間

時空座標を考えることのできる座標系は、ミンコフスキー空間であり、この空間は世界距離という尺度を持った空間として定義されている。そこで、この空間の時間軸を世界距離を使って、

$${\tau_{12}}^2 = -\frac{{s_{12}}^2}{c^2} \tag{2.12}$$

と定義する。この量について、例えば座標系に対して静止している時空点では、

$${\tau_{12}}^2 = (t_2 - t_1)^2 \tag{2.13}$$

であることは、実際に計算すれば分かる。この値は、座標系に付随する時間軸を表しており、**固有時間**という。この ${\tau_{12}}^2$ について少し掘り下げてみると、この値は**その座標系の 2 点において、どれだけ時間が経過するかを表現している**。光速で進む場合、${s_{12}}^2 = 0$ となることから、${\tau_{12}}^2 = 0$ となり、時間が進まないことが分かる。巷で、光速で進む場合は時間の進みが遅くなるというセリフが独り歩きしているが、それがこのように時間軸を定義することで表式として得られる。

最後に補足として、全微分の表式を記述しておく。

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \gamma dt \tag{2.14}$$

ここでまたローレンツ因子が現れたことには、どこか美しさのようなものを感じるだろう。

2.6 時間の遅れ

2.7 ローレンツ収縮

第 3 章

4 元ベクトルによる定式化

3.1　２次元時空

4 元ベクトルを定義する前に 2 次元時空における定式を見てみる。4 元ベクトルに拡張するにしても、キーになるのは ct と x のみなので、ここでの議論が比較的本質的なものになると思っている。

さて、まずは表記法を以下のようにする。

$$x^0 = ct \quad x^1 = x \tag{3.1}$$

すると、ローレンツ変換の表式より、

$$x^{0\prime} = \alpha^0_0 x^0 + \alpha^0_1 x^1 \tag{3.2}$$

$$x^{1\prime} = \alpha^1_0 x^0 + \alpha^1_1 x^1 \tag{3.3}$$

というように係数を設定して表すことができる。ちなみに、

$$\alpha^0_0 = c \tag{3.4}$$

$$\alpha^0_1 = c \tag{3.5}$$

である。

3.2　4 元ベクトル

3.3　共変ベクトルと反変ベクトル

3.4　ローレンツ変換

第 4 章

相対論的力学

第 5 章

相対論的電磁気学

第 6 章

一般相対論達観