Reg

Nechť B je jazyk přijímaný konečným automatem a nechť A je jazyk pro nějž $A \leq_m B$. Je A regulární? Proč?

Každý jazyk přijímaný konečným automatem je regulární. Tedy i B je regulární.

Každé slovo z regulárního jazyka lze zapsat pomocí regulárního výrazu. Jelikož platí $A \leq_m B$, existuje homomorfismus h z A do B. Tedy $\forall a \in A: h(a) \in B$. Pokud zapíšeme libovolné slovo z A pomocí regulárního výrazu, musí tedy existovat regulární výraz pro B, který je tomuto řetězci ekvivalentní. Toho lze docílit u netriviálních jazyků pouze tak, že se aplikuje homomorfismus na každý znak regulárního výrazu z A a dostaneme odpovídající regulární výraz z B.

Nyní víme, že můžeme homomorfismus aplikovat po znacích a sestrojíme konečný automat pro A (Q). Takový automat získáme z původního automatu pro B (Q') tak, že vezmeme množinu všech stavů z Q', stejné počáteční i koncové stavy, ale pro přechody použijeme abecedu z A. Namísto původních přechodů však použijeme upravené přechody: $\delta_Q(q, a) = \delta_{Q'}\big(q, h(a)\big)$.

Nyní bychom měli ukázat, že pro každé slovo z A najdeme v takovém automatě přijímající stav.

Mějme slovo $w \in A^*$. Začneme ve stavu q_0 a prázdným slovem ϵ. Pokud $w = \epsilon$, pak $\delta_Q(q_0, \epsilon) = \delta_{Q'}\big(q_0, h(\epsilon)\big) = q_0$.

Nyní nechť $w = xa$ s tím, že $a \in A \land x \in A^*$ takové, že x je přijímáno Q. Pak:

$$\begin{aligned}\delta_Q(q_0, w) &= \delta_Q\big(\delta_Q(q_0, x), a\big) = \delta_Q\big(\delta_{Q'}(q_0, h(x)), a\big) = \delta_{Q'}\Big(\delta_{Q'}\big(q_0, h(x)\big), h(a)\Big) \\ &= \delta_{Q'}\big(q_0, h(x)h(a)\big) = \delta_{Q'}\big(q_0, h(xa)\big) = \delta_{Q'}\big(q_0, h(w)\big)\end{aligned}$$

Size

Je jazyk $\boldsymbol{Size} = \{\, \langle M, k \rangle \mid |L(M)| \geq k \,\}$ *rozhodnutelný? Je částečně rozhodnutelný?*

Tento jazyk není rozhodnutelný, jelikož obsahuje jazyk $NONEMPTY$ ($k = 1$), o kterém z přednášky (jako důsledek Riceovy věty) víme, že není rozhodnutelný.

Ovšem, mohl by být částečně rozhodnutelný. Mějme vstup $\langle M, k \rangle$ pro nějaké k, kde M operuje nad abecedou Σ. Můžeme paralelně testovat slova nad Σ^* a sledovat, zda se M pro nějaká slova zastaví. Pokud se zastaví pro alespoň k, výpočet ukončíme a dvojici $\langle M, k \rangle$ přijmeme.