

## Reset

*Ukažte, jak lze libovolný jednopáskový Turingův stroj  $M$  převést na Resetovací (jednopáskový) stroj  $M'$ , který se od Turingova stroje liší tím, že přechodová funkce neumožňuje pohyb doleva o jedno políčko, ale pouze pohyb na začátek (jednostranně nekonečné) pásky.*

Zavedeme abecedu  $\Sigma'$ , která obsahuje označené duplikáty všech písmen  $\sigma', \sigma \in \Sigma$ . Stejně tak zavedeme abecedu  $\Sigma'' = \{\sigma'' \mid \sigma \in \Sigma\}$ . Celá abeceda bude rozšířena o písmeno  $\Delta$ , označující konec záznamu na pásce. Množina stavů  $Q$  bude rozšířena na množinu  $Q'$  se stavy  $q, q^{R\sigma}$  a  $q^{F\omega} \forall q \in Q \forall \sigma \in \Sigma \cup \Sigma', \omega \in \Sigma$ .

Nyní budeme simulovat stroj  $M$  na stroji  $M'$ . Pokud přechodová funkce  $\delta(s, \omega), s \in Q, \omega \in \Sigma$  na stroji  $M$  vyhodnotí přechod na  $(q, \sigma, \rightarrow), q \in Q, \sigma \in \Sigma$ , provede stroj  $M'$  stejnou akci. Pokud vyhodnotí  $(q, \sigma, \leftarrow)$ , přechodová funkce stroje  $M'$  vyhodnotí  $(q^{R\omega}, \sigma', \text{Reset}), q^R \in Q', \sigma' \in \Sigma'$ .

Stroj  $M'$  tedy zapíše znak  $\sigma'$ , přejde do stavu  $q^{R\omega}$ , kde  $\omega$  je znak, který se nacházel pod hlavou původně, a provede operaci *Reset*, která vrátí hlavu na začátek pásky. Nyní se stroj nachází na začátku pásky a přechodová funkce vypadá takto:  $\delta(q^{R\omega}, \phi), \phi \in \Sigma$ . Dokud hlava nenarazí na znak  $\sigma' \in \Sigma'$ , vyhodnotí se přechodová funkce takto:  $(q^{R\phi}, \omega'', \rightarrow)$ . V okamžiku kdy přechodová funkce dostane krom stavu  $q^{R\psi}$  pro nějaké  $\psi \in \Sigma$  i písmeno  $\sigma' \in \Sigma'$ , změní se přechod na:  $(q^{R\sigma'}, \psi, \rightarrow)$ . Písmeno  $\psi$  je o jedno vlevo na pásce od písmena  $\sigma$ , které jsme chtěli původně zapsat, všechna písmena před ním jsou dvoučárkovaná. Nyní zbývá dopsat konec pásky.

$\delta(q^{R\sigma'}, \omega) \rightarrow (q^{F\omega}, \sigma, \rightarrow), \sigma' \in \Sigma', \omega \in \Sigma$ . V tento okamžik máme od začátku pásky všechna písmena dvojčárkovaná až do písmena, které předcházelo původně zapsanému  $\sigma$  strojem  $M$ . Celá páska je posunutá o písmeno doprava a tedy ji musíme dopsat do konce, aby se nám neztratila nějaká informace. K tomuto účelu slouží stavy  $q^{F\omega}$ .  $\delta(q^{F\omega}, \psi) \rightarrow (q^{F\psi}, \omega, \rightarrow), \forall \psi$ .  $\delta(q^{F\Delta}, \psi) \rightarrow (q, \Delta, \text{Reset})$ .

Konečně jsme připraveni pokračovat ve výpočtu. Nyní páska vypadá tak, že od začátku jsou všechna písmena dvojčárkovaná a nečárkovaná písmena začínají o jedno písmeno vlevo od původně zapsaného  $\sigma$ . Nečárkovaná písmena pokračují až do konce záznamu na pásce a konec záznamu je označen  $\Delta$ . Hlava se nachází na začátku pásky a jsme ve stavu  $q$ . Všechny stavy  $q \in Q$  se budou pro dvoučárkovaná písmena chovat tak, že je prostě přeskočí a přepíše na skutečnou nečárkovanou hodnotu.  $\delta(q, \omega'') \rightarrow (q, \omega, \rightarrow), \forall \omega'' \in \Sigma'' \forall q \in Q$ .

Tímto postupem jsme posunuli celou pásku o jedno pole doprava a dostali jsme se do stavu, kdy display obsahuje hodnotu  $(q, \psi)$  stejně, jako by obsahoval u stroje  $M$ .

Paměti potřebujeme přinejhorším  $O(N + \#pohybů\ doleva)$ , jelikož každý přechod doleva nám zvětšuje pásku o jeden záznam navíc.

Času na přechod doleva potřebujeme  $O(2(N + \#pohybů\ doleva)) = O(N + \#pohybů\ doleva)$ .

Problém mého řešení je rostoucí paměťová (a s tím spojená i časová) náročnost. Toho by se dalo zabavit například pomocí počítání. Za předpokladu konečné velikosti pásky (nebo alespoň informací zapsaných na ní) by si mohl zavést novou číselnou abecedu. Program bych pak upravil tak, aby se při pokusu o pohyb doleva označil písmeno, od kterého se hýbu. Poté by se stroj zresetoval, spočítal počet prvků před označeným prvkem ( $x$ ), odebral označení prvku, provedl *Reset* a následně přeskočil  $x - 1$  prvků. Paměťová i časová náročnost by byla  $O(N)$ .

## 2x piš

*Ukažte, jak lze libovolný jednopáskový Turingův stroj  $M$  převést na (jedenpáskový) Turingův stroj  $M'$ , který má omezení, že každé políčko pásky je možno přepsat pouze dvakrát (zápisy nemění obsah se nepočítají).*

Prázdné pole na pásce značí symbolem  $\lambda$ . Namísto stroje s oboustranně nekonečnou páskou budeme uvažovat ekvivalentní stroj s jednostranně nekonečnou páskou (jak takový stroj získat jsme si ukázali na cvičení). Potřebujeme rozšířenou abecedu o stav  $\Sigma' = \{\{\sigma, q\} \mid \sigma \in \Sigma, q \in Q\}$ . Dále si zavedeme speciální symbol  $\Delta$ . První symbol na pásce je  $\Delta$ , následuje páska plná prázdných symbolů ( $\lambda$ ). Hlava stroje začíná na první prázdném poli na pásce.

Přechodová funkce stroje  $M'$  funguje klasicky, dokud nenarazíme na potřebu přepsat nějaký již zapsaný znak. Buď  $(s, \omega) \rightarrow (q, \sigma, a): q, s \in Q; \omega, \sigma \in \Sigma; a \in \{\leftarrow, \downarrow, \rightarrow\}$  následující krok stroje  $M$ .

V takovém případě stroj  $M'$  vykoná:  $(s, \omega) \rightarrow (q_G, \{\omega, s\}, \rightarrow)$ . Stav  $q_G$  se chová následovně:  $(q_G, \psi) \rightarrow (q_G, \psi, \rightarrow), \forall \psi \in \Sigma, (q_G, \lambda) \rightarrow (q_S, \Delta, \leftarrow)$ . Tedy doputuje na konec záznamu a zapíše  $\Delta$ .  $\Delta$  se chová jako ohraničení zpracovaného bloku. Následuje přesun na začátek bloku, ke kterému slouží stav  $q_S$ :  $(q_S, \psi) \rightarrow (q_S, \psi, \leftarrow); (q_S, \Delta) \rightarrow (q_R, \Delta, \rightarrow)$ . Stav  $q_R$  slouží k načtení prvního znaku a jeho nahrazením za nový začátek bloku:  $(q_R, \phi) \rightarrow (q_{W_1}^\phi, \Delta, \rightarrow)$ .  $q_{W_1}^\phi$  slouží k zapsání znaku  $\phi$  do nového bloku:  $(q_{W_1}^\phi, \psi) \rightarrow (q_{W_1}^\phi, \psi, \rightarrow); (q_{W_1}^\phi, \Delta) \rightarrow (q_{W_2}^\phi, \Delta, \rightarrow); (q_{W_2}^\phi, \psi) \rightarrow (q_{W_2}^\phi, \psi, \rightarrow); (q_{W_2}^\phi, \lambda) \rightarrow (q_B, \phi, \leftarrow)$ .  $\phi$  bylo zapsáno a stav  $q_B$  se vrací do původního bloku:  $(q_B, \psi) \rightarrow (q_B, \psi, \leftarrow); (q_B, \Delta) \rightarrow (q_S, \Delta, \leftarrow)$ . Následuje opět čtení nového "prvního" znaku a následné zapsání do nového bloku. Výjimka nastane, když stroj  $M'$  narazí na znak  $\{\omega, s\}$ . V tomto případě se znak přeskočí a namísto klasických stavů se začnou používat znaky čárkované, které fungují stejně jako dosavadně popsané stavy s výjimkou toho, že  $\{\omega, s\}$  považují také za označení konce/začátku bloku stejně jako  $\Delta$  a při zápisu se jeden prázdný znak přeskočí (vynechá se místo, kam v příštích pár krocích zapíšeme  $\sigma$ ).

Přepis bloku končí v okamžiku, kdy narazíme na display  $(q'_R, \Delta)$ . Tento display značí, že již byl celý blok přepsán až na vynechaný znak.  $(q'_R, \Delta) \rightarrow (s_R, \Delta, \leftarrow)$ . Stav  $s_R$  načte poslední vynechaný znak.  $(s_R, \Delta) \rightarrow (s_R, \Delta, \leftarrow); (s_R, \{\omega, s\}) \rightarrow (s_W^{\{\omega, s\}}, \{\omega, s\}, \rightarrow)$ .  $s_W^{\{\omega, s\}}$  slouží k zápisu výsledku operace  $(s, \omega)$  na stroji  $M$  do posledního volného pole v novém bloku a vykonání příslušné akce  $a$ .  $(s_W^{\{\omega, s\}}, \psi) \rightarrow (s_W^{\{\omega, s\}}, \psi, \rightarrow), \psi \in \Sigma' \cup \{\Delta\}; (s_W^{\{\omega, s\}}, \lambda) \rightarrow (q, \sigma, a)$ . Nyní máme kompletní nový blok, kde bylo do každého pole zapsáno právě jednou a jsme ve stejném stavu a na stejné pozici jako stroj  $M$ .

Prostorová složitost je  $O(N \times \#bloků)$ , kde počet bloků odpovídá počtu prepisů místa na pásce ve stroji  $M$ . Časová složitost je  $O(N^2 \times \#bloků)$ .

## 1x piš

*Ukažte, jak lze libovolný jednopáskový Turingův stroj  $M$  převést na (jednopáskový) Turingův stroj  $M'$ , který má omezení, že každé políčko pásky je možno přepsat pouze jednou (zázpisy nemění obsah se nepočítají).*

1x piš je velmi podobný 2x piš. Jsou 2 překážky na které narazíme. První je přepisování hodnot na pásce na  $\Delta$  konce bloků a druhá je přepis  $(s, \omega) \rightarrow (q_G, \{\omega, s\}, \rightarrow)$ . Tyto dvě situace musíme obejít, jelikož nemáme k dispozici druhý zápis.

Jedním možným řešením je použití pouze lichých polí na pásce. Pokud budeme používat pouze lichá pole, zůstanou nám sudá, která můžeme použít na zápis druhých hodnot. Stroj se poté bude chovat tak, že přečte nejdříve sudé pole a pokud je prázdné, použije liché pole.

Prostoru budeme potřebovat dvojnásobek, tedy stále  $O(N \times \#bloků)$ . Časová složitost je také stále  $O(N^2 \times \#bloků)$ .