

# Formelsamling til eksamen 10/6-17

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s), \text{ og } \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s) \quad (\text{V.1})$$


---

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = sf(s) - f(t)|_{t=0}, \quad \mathcal{L} [\ddot{f}(t)] = s^2 f(s) - sf(s)|_{t=0} - \dot{f}(t)|_{t=0} \quad (\text{V.2})$$


---

$$\text{Residuregning: } f(t) = \sum_{a_i} \frac{1}{(m-1)!} \left[ \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \{ (s - a_i)^m f(s) e^{st} \} \right] \Big|_{s=a_i} \quad (\text{V.3})$$


---

$$\text{Tidsforsinkelse: } \mathcal{L} [f(t - \tau)] = e^{-\tau s} f(s) \quad (\text{V.4})$$


---

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \quad (\text{V.5})$$


---

$$\text{Rettlinja bevegelse: } f = ma, \text{ Rotasjon: } d = J\dot{\omega}; \text{ med masse p\aa vektlos stang har vi } J = ml^2 \quad (\text{V.6})$$


---

$$\text{Ohms lov: } u = Ri, \quad \text{kondensator (kapasitans): } i = C \frac{du}{dt}; \quad \text{induktans: } u = L \frac{di}{dt} \quad (\text{V.7})$$


---

$$\text{Folding (konvolusjon): } y(t) = h(t) * u(t) = \int_0^t h(t - \tau) u(\tau) d\tau, \quad \mathcal{L} [h(t) * u(t)] = h(s) u(s) \quad (\text{V.8})$$


---

$$\begin{aligned} \text{Linearisering: } \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \Delta \mathbf{u}, \quad \mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \right] \Big|_{\mathbf{x}^p, \mathbf{u}^p} \\ \Delta \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{V.9})$$


---

$$x[\text{dB}] = 20 \cdot \log_{10}(x), \quad x = 10^{(x[\text{dB}])/20} \quad (\text{V.10})$$


---

$$N(s) = \frac{1}{1 + h_0(s)}, \quad M(s) = \frac{h_0}{1 + h_0(s)}, \quad M(s) + N(s) = 1, \quad \frac{e}{v}(s) = -h_v(s) N(s) \quad (\text{V.11})$$

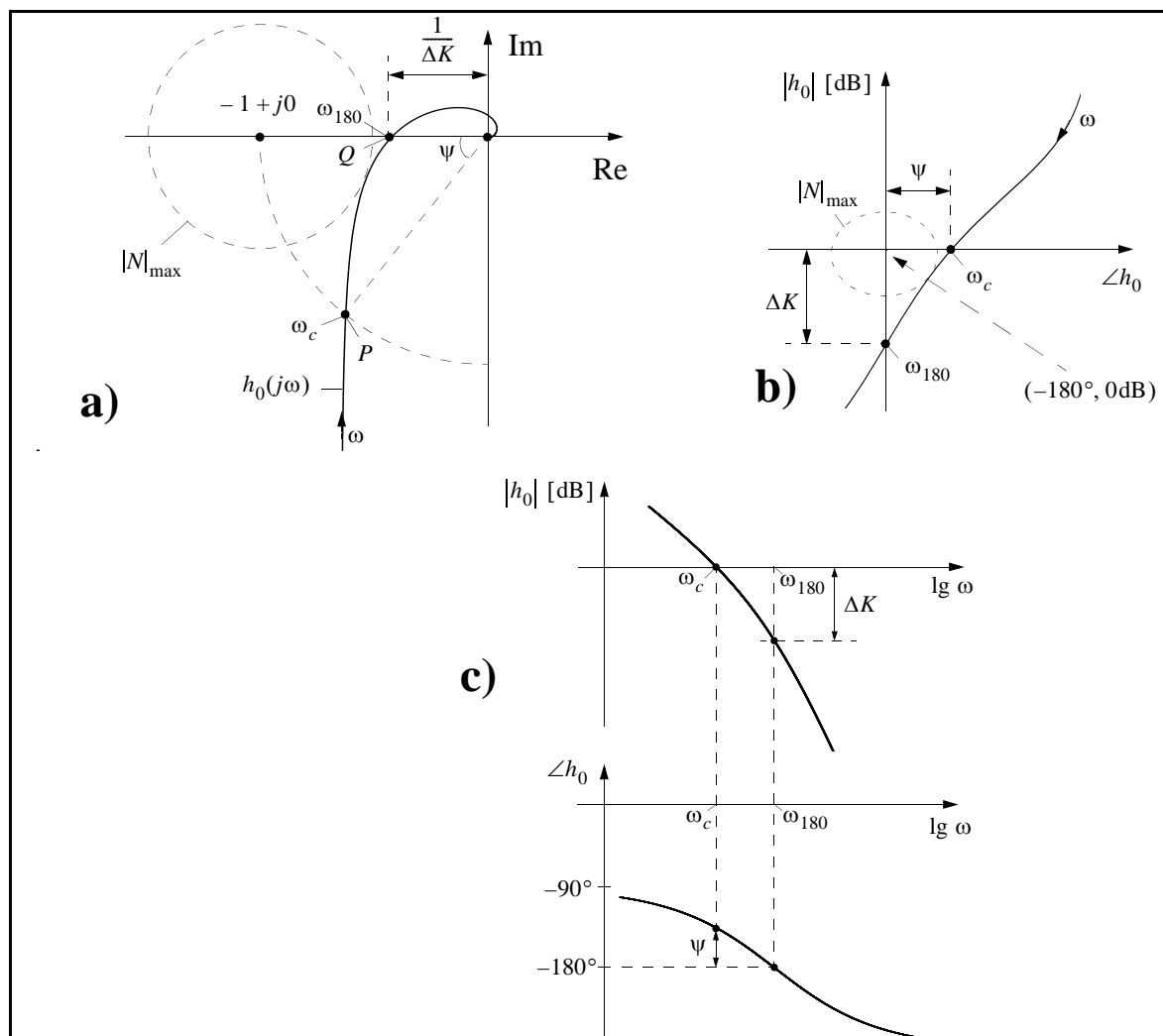

---

**Nyquists stabilitetskriterium:** Gitt en \aa pen prosess  $h_0(s)$  med  $N_p$  poler i h\oyre halvplan. Vektoren  $1 + h_0(j\omega)$  f\aa r en netto vinkeldreining (dreieretning er definert positiv *mot* urviseren) lik

$$\Delta \angle(1 + h_0) = -2\pi(N_n - N_p) \quad \text{n\aa r } \omega \text{ g\aa r fra } -\infty \text{ til } \infty \quad (\text{V.12})$$

$N_n$  er antall poler i h.h.p. for det lukkede (tilbakekoblede) system.  $N_n = 0$  kreves for stabilt system.

(V.13)



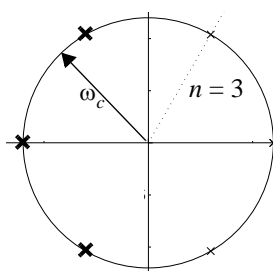
$$\psi = \angle h_0(j\omega_c) - (-180^\circ), \quad \frac{1}{\Delta K} = |h_0(j\omega_{180})|, \quad \Delta K = \frac{1}{|h_0(j\omega_{180})|} \quad (\text{V.14})$$

$$e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \tau s/2}{1 + \tau s/2} \quad (\text{V.15})$$

Ziegler-Nichols' lukket-sløyfe-regler:

Regulator	$K_p$	$T_i$	$T_d$
<b>P</b>	$0.5K_{pk}$	$\infty$	0
<b>PI</b>	$0.45K_{pk}$	$0.85T_k$	0
<b>PID</b>	$0.6K_{pk}$	$0.5T_k$	$0.12T_k$

$$, \quad T_k = \frac{2\pi}{\omega_{180}} \quad (\text{V.16})$$



*Butterworth lavpassfilter av orden  $n$ :* De  $n$  polene i  $h(s)$  ligger på hjørnene i venstre halvdel av en regulær mangekant med  $2n$  sider, der mangekanten er plassert slik at den ligger symmetrisk om Im-aksen, og hvor avstanden fra origo og ut til hvert hjørne (= pol) er filterets knekkfrekvens  $\omega_c$ . (V.17)

*Høypassfilter med knekkfrekvens  $\omega_c$ :* Lag først lavpassfilter med  $\omega_c$ . Erstatt så alle  $s$  i transferfunksjonen med  $\omega_c^2/s$ . (V.18)

Røtter er bare i v.h.p. for polynom  $\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$ , hvis og bare hvis alle koeffisienter har samme fortegn.

For 3. ordens polynom  $\alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$  kreves *i tillegg*  $\alpha_1 \alpha_2 > \alpha_0 \alpha_3$  (V.19)

---

Skogestads “SIMC” åpen-sløyfe-metode for PI-innstilling:

Sett på et sprang. Anta at prosessen  $\approx h_u = \frac{K e^{-\tau s}}{1 + T_1 s}$ . Mål (dvs. anslå)  $T_1$ ,  $K$  og  $\tau$  ut fra responsen.

Velg så  $K_p = \frac{T_1}{K(\tau + T_L)}$  og  $T_i = \min(T_1, 4(T_L + \tau))$ , hvor  $T_L$  er ønsket tidskonstant i

responsen til det lukkede systemet.  $T_L$  bør velges som  $T_L > 0.3\tau$ , f. eks.  $T_L = \tau$ . (V.20)

---

$$\text{PI-regulator: } h_r = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s} \quad (\text{V.21})$$

$$\text{begrenset PD-regulator: } h_r = K_p \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s} \quad (\text{V.22})$$


---

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdot & \cdot & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{V.23})$$

$$\mathbf{c}^T = [\rho_0 \ \rho_1 \ \rho_2 \ \cdot \cdot \cdot \ \rho_{n-1}]$$

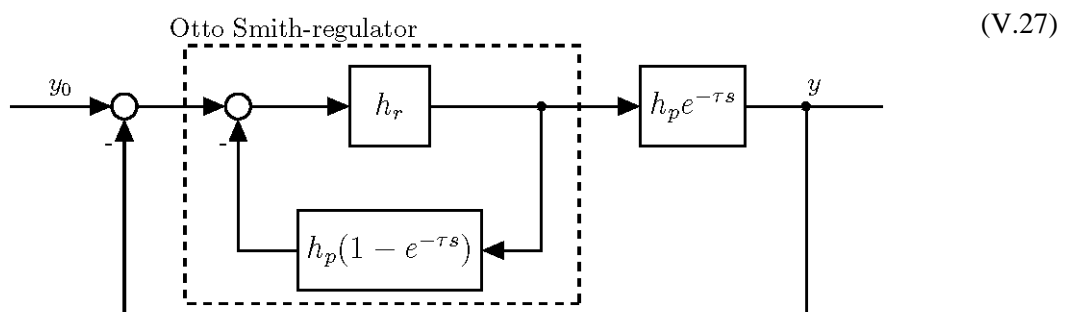
$$\text{gir } \frac{y}{u}(s) = h(s) = \frac{\rho_{n-1} s^{n-1} + \dots + \rho_1 s + \rho_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} \quad (\text{V.24})$$


---

Diskret regulator: Alle  $s$  erstattes med  $\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$ , der  $z$  er en tidsforskyvingsoperator. (V.25)

Diskret regulator brukt på kontinuerlig prosess medfører tilnærma en ekstra tidsforsinkelse =  $T/2$  i sløyfetransferfunksjonen. (V.26)

---



# Sammenhenger mellom tilstandsrombeskrivelse og Laplace, og mellom 1. ordens og høyere ordens lineære systemer

	1. orden	(eks.: RC-krets)	Høyere orden
1.	Differensiallikning	$\dot{x} = ax + bu \quad (\dot{x} = -\frac{1}{T}x + \frac{1}{T}u)$	$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$
2.	Laplace	$x(s) = \frac{1}{s-a}x(t=0) + \frac{b}{s-a}u(s)$	$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(t=0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(s)$
3.	Løsning	$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$	$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau$ <sup>1)</sup>
4.	Dekopling	(Trivielt:) $A = a = \lambda = \text{skalar}$	$A = M\Lambda M^{-1} \quad , \quad e^{\mathbf{A}t} = Me^{\Lambda t}M^{-1} \quad , \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$
5.	Rekkeutvikling	$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + \dots$	$e^{\mathbf{A}t} = \Phi(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^3\frac{t^3}{3!} + \dots$ <sup>2)</sup>
6.	$(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} (s)$	$e^{at} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a} \quad (\frac{1}{T}e^{-t/T} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{1+Ts})$	$e^{\mathbf{A}t} = \Phi(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$
7.	Fra $u(s)$ til $y(s)$	$y = cx \quad y(s) = c\frac{b}{s-a}u(s) \quad h(s) = \frac{cb}{s-a}$	$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad \mathbf{y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(s) \quad H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$
8.	Impulsrespons	$h(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} h(s) \quad h(t) = cbe^{at}$	<sup>3)</sup> $h(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t}\mathbf{b}$ <sup>4)</sup> $\xleftrightarrow{\mathcal{L}} h(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$

1)  $\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} * \mathbf{u}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(s)$

2) NB:  $e^{\mathbf{A}t} \neq \{e^{a_{ij}t}\}$ , bortsett fra når  $A = \Lambda$  er diagonal.

3) Antar nå at  $u$  og  $y$  er skalare.

4) Hvis  $y$  og  $u$  er skalare og  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$  så har vi fra 3. linje at  $y(t) = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)d\tau = h(t) * u(t)$

Tilstandsrom:  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u.$

Eigenverdier følger av:  $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$

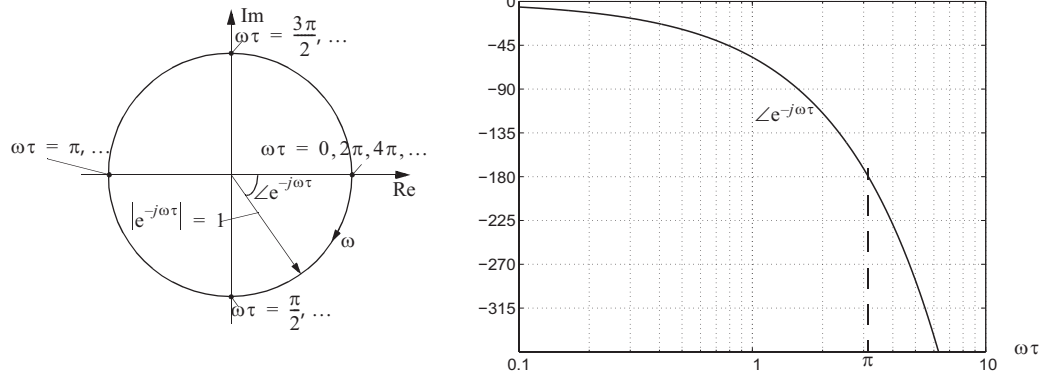
Laplace:  $H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}^{\text{adj}}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \text{Polene gitt av nevneren: } |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0.$

$\Rightarrow$  poler = eigenverdier

Orden	Transferfunksjon $h(s)$	Poler	Impuls- og sprangresponser
1. orden	$h(s) = \frac{K}{1 + Ts} = \frac{K}{s + \frac{1}{T}} = \frac{-K\lambda}{s - \lambda}$	<p><math>\lambda = -\frac{1}{T}</math></p>	<p>impulsrespons:</p> $h(t) = L^{-1}[h(s)] = \frac{K}{T}e^{-t/T}$ <p>sprangrespons:</p> $k(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{s}h(s)\right] = \int_0^t h(\tau)d\tau = K(1 - e^{-t/T})$
2. orden, $\zeta = 0$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$	<p><math>j\omega_0</math></p> <p><math>\zeta = 0</math></p> <p><math>\lambda_{1,2} = \pm j\omega_0 = \pm j\beta</math></p>	$h(t) = K\omega_0 \sin \omega_0 t$ $k(t) = K(1 - \cos \omega_0 t)$
2. orden, $\zeta < 1$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$ $= \frac{K(\alpha^2 + \beta^2)}{s^2 + 2\alpha s + (\alpha^2 + \beta^2)}, \quad \omega_0 = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$	<p><math>\zeta = \sin \varphi</math>, når <math>\zeta \leq 1</math></p> <p><math>\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\beta</math></p>	$h(t) = K \frac{\omega_0^2}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t$ $k(t) = K \left( 1 - \frac{\omega_0}{\beta} e^{-\alpha t} \cos(\beta t - \varphi) \right)$
2. orden, $\zeta = 1$	$\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{K\omega_0^2}{(s + \omega_0)^2} = \frac{K \frac{\omega_0^2}{T^2}}{\left(s + \frac{1}{T}\right)^2}$	<p><math>\zeta = 1</math></p> <p><math>\lambda_{1,2} = -\alpha = -\omega_0 = -\frac{1}{T}</math></p>	$h(t) = \frac{K}{T^2} t e^{-t/T}$ $k(t) = K \left( 1 - \left[ 1 + \frac{t}{T} \right] e^{-t/T} \right)$
2. orden, $\zeta > 1$	$\frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} = \frac{\frac{K}{T_1 T_2}}{\left(s + \frac{1}{T_1}\right)\left(s + \frac{1}{T_2}\right)} = \frac{K\lambda_1\lambda_2}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$	<p><math>\zeta &gt; 1</math></p> <p><math>-\frac{1}{T_2}</math>   <math>-\frac{1}{T_1}</math></p>	$h(t) = \frac{K}{T_1 - T_2} \left( e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$ $k(t) = K \left( 1 + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$

$$\omega_0 = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}, \quad \zeta = \frac{-(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}, \text{ gjelder for alle } \lambda \neq 0$$

**Figur 6.17**  
Nyquist-diagram  
og faseforløp i  
Bodediagram  
for  $e^{-j\omega\tau}$



### 6.4.1 Prosedyre for tegning av asymptotisk AFF-diagram (= bode-diagram)

Her følger en generell prosedyre som alltid kan brukes:

1. Transferfunksjonen bringes over på formen (6.18). Dersom vi har transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{K(\dots)}{(\dots)(a+s)}$$

må den omformes til

$$h(s) = \frac{K'(\dots)}{(\dots)(1+T's)}$$

der  $K' = K/a$  og  $T' = 1/a$ . Dette må gjentas like mange ganger som vi har 1.ordens ledd i  $h(s)$ . Dersom vi har resonansledd

$$h(s) = \frac{K(\dots)}{(\dots)(c+bs+as^2)}$$

må vi først omforme dette til

$$h(s) = \frac{K'(\dots)}{(\dots) \left( 1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \left( \frac{s}{\omega_0} \right)^2 \right)}$$

der  $K' = K/c$  og  $\omega_0 = \sqrt{c/a}$ . Poenget er altså at alle ledd i nevner (og i teller!) må ha konstantledd lik 1, det vil si at hvert ledd er lik 1 for  $s = j0$ . Forsterkning i alle ledd “samles” da i en felles  $K'$ , fra nå av bare kalt  $K$ .

2. Begynn alltid til venstre i diagrammet, ved de laveste frekvensene ( $\omega \ll 1$ ). (Vi symboliserer “liten  $\omega$ ” med å skrive  $\omega \ll 1$ .) Ved slike frekvenser kan vi se bort fra virkningen av nullpunkts-, tidskonstant- og resonansledd. Videre prosedyre blir:

Tilfelle a): Hvis vi har  $q$  integrasjoner i  $h(s)$ ,  $q > 0$ , har vi

$$h(j\omega)_{\omega \ll 1} \approx \frac{K}{(j\omega)^q}, \quad |h(j\omega)|_{\omega \ll 1} \approx \frac{K}{\omega^q}, \quad \angle h(j\omega)_{\omega \ll 1} \approx (-q) \cdot 90^\circ$$

$q$  kan selvsagt være lik 0, da er vi over i Tilfelle b) nedenfor.

#### Amplitudeforløp

Asymptoten vil ved lave frekvenser ha helning  $-q$  og skjære 0-dB-linjen i  $\omega = K^{1/q}$ . Dermed kan vi fastlegge venstre del av  $|h(j\omega)|_{as}$  og 0-dB-linjen (subskript  $as$  betyr “asymptotisk verdi av”). Se forøvrig figur 6.18).

#### Faseforløp

Dette er enklere. Asymptoten er horisontal og starter til venstre i  $(-q) \cdot 90^\circ$ .

Tilfelle b): Ingen reine integrasjoner i  $h(s)$

Amplitudeforløp: Da har vi  $|h(j\omega)|_{\omega \ll 1} = K$ , dvs. horisontal asymptote ved lave frekvenser, i  $K$  [dB] over 0-dB-linja.

Faseforløpet starter nå til venstre med en horisontal asymptote i  $0^\circ$ .

### 3. Videre amplitudeforløp

Asymptotene skal utgjøre en sammenhengende serie av linjestykker. Ta utgangspunkt i den venstre asymptoten som allerede er tegnet, og finn den minste **knekkfrekvensen**.

Knekkfrekvensene er der den asymptotiske kurven for et ledd i en transferfunksjon knekker. De er som vist ovenfor den inverse av tidskonstanten i nullpunkts- og tidskonstantledd, og frekvensen  $\omega_0$  i et resonansledd.

Finn helningen  $p$  på asymptoten til leddet du betrakter.  $p = 1$  for nullpunktsledd,  $-1$  for tidskonstantledd og  $-2$  for resonansledd. Tegn et nytt linjestykke fra den minste knekkfrekvensen fram til den *etterfølgende* knekkfrekvensen med en helning som er lik forrige asymptotes helning  $+p$ .

Sett “minste knekkfrekvens” = etterfølgende knekkfrekvens og gjenta prosedyren for neste ledd, osv.

#### Videre faseforløp

Asymptotene er ikke sammenhengende, men er horisontale, og springer opp eller ned ved knekkfrekvensen, med  $p \cdot 90^\circ$  målt fra forrige asymptote.

For faseforløpet gjelder unntaksregelen at et nullpunktsledd av typen  $1 - T_i s$  gir  $90^\circ$  knekk *ned*, ikke opp.

**EKSEMPEL 6.6: Asymptotisk Bodediagram for en transferfunksjon med flere ledd**

Vi ønsker å tegne et asymptotisk amplitudediagram og asymptotisk fasediagram for frekvensresponsen til transferfunksjonen

$$h(s) = \frac{K(1 + T_2s)(1 + T_3s)}{s(1 + T_1s)(1 + T_4s)^2} \quad (6.29)$$

der  $K = 3$ ,  $T_1 = 40$ ,  $T_2 = 10$ ,  $T_3 = 2$ ,  $T_4 = 0.2$

Vi finner

$$\begin{aligned} \lg |h(j\omega)| = & \lg K + \lg |1 + j\omega T_2| + \lg |1 + j\omega T_3| \\ & - \lg \omega - \lg |1 + j\omega T_1| - 2 \lg |1 + j\omega T_4| \end{aligned} \quad (6.30)$$

**Figur 6.18**  
Bodediagram for  
 $h(s)$ , eksakt  
diagram, og  
asymptotisk  
diagram

