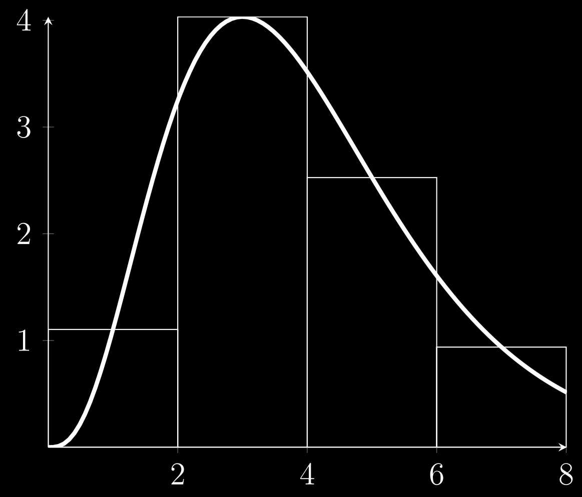
$\mathfrak{I}$ntegral $\mathfrak{K}$okeboken



$$\int_0^\infty \frac{\sin(\pi x^2)}{\sinh^2(\pi x)}\,\mathrm{d}x = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\int \frac{1}{\log x} + \log(\log x)\,\mathrm{d}x = x\log(\log x) + \mathcal{C}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \cos(x^2) + \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x = \Gamma(s)\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \Gamma(s)\zeta(s)$$

$$\int_0^{2\pi} \log\left(\frac{(1+\sin x)^{1+\cos x}}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x = 0$$

Denne siden er med hensikt blank, for å gi leser en pustepause og for å la forfatter slåss mot dinosaurer.

I

1.1 Innledning

I denne delen dypper vi forsiktig tærne ned i den delen som heter integrasjon. Her vil vi gå igjennom noen klassiske måter å beregne arealet til figurer på, før vi går over til mer effektive måter. Kapitellet vil så ta for seg en rekke grunnleggende integrasjonsteknikker som delvis integrasjon. delbrøk-oppspalting og delvis integrasjon. Det er nok mye her som burde være kjent, men merk at disse teknikkene og ideene må sitte helt ut til fingerspissene, før du prøver å dykke dypere ned i integrasjonskunsten.

1.1.1 Historisk bakteppe

Hvor mye vin rommer tønnen, hvilken båt er størst? Behovet for å finne størrelsen til ulike geometriske objekter har vært viktig gjennom store deler av menneskehetens historie. Allerede i de tidligste skriftkildene vi har fra Egypt og Mesopotamia finner vi matematiske oppskrifter for å løse slike problemer. Såfremt figurene har rette sideflaterog sideflater, kan størrelsen som regel beregnes ved hjelp av elementær geometri og skarpsindighet, men når kantene og sideflatene er krumme, blir problemet vanskeligere.

De første som utviklet systematiske måter for å beregne størrrelsen til geometriske størrelser var de greske matematikerrne I første rekke da Eudoxos (ca 400-350 f. Kr) og Arkimedes (287-212 f Kr). Den grunnleggende ideen var å beregne størrelsen til kompliserte objekter ved å tilnærme dem med enkle objekter, som var lett å finne størrelsen til. Dersom man vil finne den virkelige verdien holder det ikke å gjøre ett eller to overslag, men en må lage stadig bedre tilnærmelser og finne den virkelige størrelsen som en grenseverdi av tilnærmingene. Ved hjelp av denne metoden kunne Arkimedes for eksempel beregne arealet av et parabelsegment, og beregne π til to desimaler.

Den greske metoden er logisk håndterbar, men vanskelig å regne med i praksis. Det var derfor en revolusjon når Isaac Newton (1642-1727) og Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) oppdaget at derivasjon og integrashib er motsatte regnearter, og at man kan utføre kompliserte areal- og volumberegninger ved å derivere ≪baklengs≫.

I dette kapitlet skal vi først ta på oss tresko og følge i grekerenes fotspor med noen eksempler. Deretter skal vi gå over til Leibniz' og Newtons oppdagelse og konsekvensene av den. Det er viktig å være klar over at det Newton og Leibniz gjorde, ikke var et brudd med fortiden, men en revolusjonerende videreføring av tradisjonen fra Eudox og Arkimedes. Grunnideene i grekerenes teori lever videre som en hjørnesten i Newton og Leibniz byggverk.

1.2 DEFINISJON AV INTEGRALET

I denne seksjonen skal vi bruke ideen om tilnærming til å definere det bestemte integralet $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Altså en formell definisjon av arealet under en funksjon. Som vi skal se senere finnes det mange ulike måter å definere integralet på. Vi velger en forholdsvis enkel definisjon her, og sparer målteorien til senere. For å motivere definisjonene skal vi ofte tenke oss at f er en positiv funksjon og det vi ønsker, er å beregne arealet under grafen til f mellom punktene a og b. Definisjonen og resultatene vi kommer frem til, vil dog fungere like så godt dersom f tar negative verdier på intervallet. Vi begynner med noen definisjoner.

Definisjon 1.2.1. En *partisjon* av intervallet $[a,b]$ er en endelig mengde tall $\Pi = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ slik at

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

Partisjonen deler opp intervallet [a,b] i n delintervaller

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ \cdots,\ [x_{n-1}, x_n]\,.$$

FIGUR viser funksjonsgrafen over det i-te delintervallet $[x_{i-1}, x_i]$. Vi har tilnærmet denne delen av funksjonen med to rektangler – et over og et under grafen. Arealet til det største rektanglet er $M_i(x_i - x_{i-1})$, hvor

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Dersom funksjonen har et maksimum så vil $\max = \sup$[1]. Dersom f ikke har noe maksimum er $\sup$ er den *laveste* verdien f *ikke* kan oppnå på intervallet. Arealet til det minste rektanglet er $m_i(x_i - x_{i-1})$, der

$$m_i = \inf\{f(x)\colon x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

er største nedre skranke til f over intervallet $[x_{i-1}, x_i]$.

På (FIGUR) er dermed det totale arealet til de rektanglene som ligger på oversiden av grafen, lik

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

mens det totale arealet til de rektanglene som ligger på undersiden av grafen, er

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

Håpet er at dersom vi lager partisjonene finere og finere, vil disse to uttrykkene nærme seg hverandre, og den felles grenseverdien blir dermed arealet under grafen til f. Legg merke til at dersom f er en negativ funksjon, så vil summene ha en lignende geometrisk tolking, men denne gangen vil arealene være gitt med *negativt* fortegn.

For å definere integralet, formaliserer vi først definisjonene ovenfor.

[1]Dessverre har matematikere en lei tendens til å lage patologiske eksempler. Se på $L = \{1, 1.4, 1.41, 1.414, \ldots\}$ her vil ikke L ha noe maksimum men $\sup L = \sqrt{2}$ siden dette er den *laveste* verdien L ikke kan oppnå.

Definisjon 1.2.2. La $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon[2]. Dersom $\Pi = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ er en partisjon av intervallet $[a, b]$ kaller vi

$$\text{Ø}(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

den øvre trappesummen til Π og

$$N(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

den nedre trappesummen til Π.

Definisjon 1.2.3. Vi definerer så *øvreintegralet* $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ til å være den største nedre skranken til de øvre trappesummene, det vil si

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\{\text{Ø}(\Pi) \colon \Pi \text{ er en partisjon av } [a, b]\}$$

og nedreintegralet $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ til å være den minste øvre skranken til de nedre trappesummene, det vil si

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\{N(\Pi) \colon \Pi \text{ er en partisjon av } [a, b]\}$$

Øvreintegralet er altså infimum av de verdiene vi kan nå frem til ved å tilnærme fra oversiden, mens nedreintegralet er supremum av de verdiene vi kan få ved å tilnærme funksjonen fra nedsiden. Det er klart at nedreintegralet *aldri* kan være større enn øvreintegralet, og håpet er at de to skal være like slik at vi kan definere integralet tl å være fellesverdien av nedre- og øvreintegralet.

Definisjon 1.2.4 (Darboux integralet[3])**.** Anta at $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er en begrenset funksjon. Dersom $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ sier vi at f er *integrerbar* på $[a, b]$ (en annen ordlyd er at integralet av f eksisterer), og definerer *integralet* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ved

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

Legg merke til at vi bare har definert integralet for integrerbare funksjoner – for en ikke-integrerbar funksjon f gir ikke symbolet $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ mening. Øvre- og nedreintegralet er derimot definert for *alle* begrensede funksjoner. Finnes det virkelig funksjoner som ikke er integrerbare? Det påfølgende eksempelet viser skremmende nok at svaret er ja.

[2]Husk at ifølge ekstremalverdisetningen er alle kontinuerlige funksjoner på et lukket intervall begrensede. Altså de har et minimum og et maksimum på intervallet.

[3]Grunnen til at jeg velger Darboux og ikke Riemann intgralet som definisjon er mer en smaksak. Denne definisjonen har ett sterkere geometrisk preg, og beviset for Analysends Fundamentalsetning blir mer intuitiv. I tillegg til at Rieman og Darboux leder til akkuratt samme integralbegrep. Riemann integralet blir studert i **??**, samt å vise at Darboux og Riemann er ekvivalente.

Eksempel 1.2.1. Funksjonen $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ definert ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{når } x \text{ er rasjonal} \\ 0 & \text{når } x \text{ er irrasjonal} \end{cases}$$

er ikke integrerbar[4]. Grunnen er at siden både de rasjonale og de irrasjonale tallene ligger tett på tallinjen så vil ethvert intervall inneholde både rasjonale og irrasjonale tall. Dette betyr at $M_i = 1$ og m_i uansett hvor lite vi gjør intervallet $[x_{i-1}, x_i]$. Følgelig er

$$\text{Ø}(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 1$$

og

$$N(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0$$

for alle partisjoner Π. Altså er

$$\overline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{og} \quad \underline{\int_0^1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

og f er derfor ikke integrerbar på $[0,1]$.

Bemerkning: Hva vil det si at det eksisterer ikke-integrerbare funksjoner? Geometrisk betyr det at noen funksjoner er så uregelmessige at vi ikke kan definere arealet under graven deres ved hjelp av vår tilnærmingsprosedyre. Det kan tenkes at vi for noen av disse funksjonene kan definere arealet ved å bruke smartere og mer fleksible metoder, men man kan vise at det er prinsipielt umulig å finne et fornuftig arealbegrep som omfattet *alle* mengder. Vi må derfor venne oss til tanken på at det eksisterer områder som ikke kan måles, og visse funksjoner som ikke kan integreres.

Hvordan kan vi vise at funksjoner er integrerbare? Legg merke til at siden

$$\overline{\int_a^b} f(x) \geq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

så er det nok å vise at for enhver $\varepsilon > 0$, finnes det en partisjon Π slik at

$$\text{Ø}(\Pi) - N(\Pi) \leq \varepsilon \tag{1.2}$$

Så fremt vi kan gjøre forskjellen mellom nedre og øvre trappesum vilkårlig liten må de gå mot samme verdi. Dette samsvarer med hvordan vi har definert integralet. La oss se på noen enkle funksjoner

[4]Denne funksjonen kalles gjerne Dirichlet funksjonen og er en indikatorfunksjon. La A være en undermengde av X Da er indikatorfunksjonen $\mathbf{1}_A : X \to \{0,1\}$ definert som

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A, \\ 0 & \text{if } x \notin A. \end{cases}$$

Selv om funksjonen ikke er integrerbar ut i fra vår definisjon, er den som vi skal se senere Lebesgue integrerbar. Funksjonen blir ofte brukt for å begrunne behovet for en mer generell definisjon av integralet.

Proposisjon 1.2.1. *Enhver monoton funksjon er integrerbar*

Bevis. La oss anta at $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ er voksende (beviset for avtagende funksjoner er helt likt). La Π være partisjonen som deler $[a,b]$ inn i n like lange delintervaller av lengde $(b-a)/n$. Siden f er voksende, så er

$$m_i = f(x_{i-1}) \quad \text{og} \quad M_i = f(x_i)$$

Det er lett å innse at

$$Ø(\Pi) - N(\Pi) = \big[f(b) - f(a)\big]\frac{b-a}{n}$$

ved å gjøre følgende regnestykke

$$\begin{aligned} Ø(\Pi) - N(\Pi) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{b-a}{n} - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\cdot\frac{b-a}{n} \\ &= \big[f(b) - f(a)\big]\frac{b-a}{n} \end{aligned}$$

Den siste likheten skyldes at summen teleskoperer, siden summene inneholder de samme leddene bortsett fra to ledd. Leser oppfordres til å skrive ut summene og se hvilke ledd som består. Lar vi n vokse, ser vi at vi kan få $Ø(\Pi) - N(\Pi) = \big[f(b) - f(a)\big]\frac{b-a}{n}$ så liten vi måtte ønske. Følgelig så er f integrerbar. □

Beviset ovenfor inneholder en ≪oppskrift≫ på hvordan en kan beregne integralet av monotone funksjoner. Dette oppsummerer vi i følgende korollar.

Korollar 1.2.1. *Dersom $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ er en monoton funksjon, så er*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

der $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ er en inndeling av intervallet $[a,b]$ i n like store deler , og $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

Bevis. Anta at f er voksende og la Π betegne partisjonen i korollaret. Vi vet at

$$N(\Pi) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le Ø(\Pi)$$

I følge beviset for proposisjon (1.2.1) nærmer $N(\Pi)$ og $Ø(\Pi)$ seg hverandre når $n \to \infty$, og de må derfor begge nærme seg $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ som grenseverdi. Altså er

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} N(\Pi) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

og

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} Ø(\Pi) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Beviset for avtagende funksjoner er analogt. □

Eksempel 1.2.2. Beregn $\int_0^b e^x \,\mathrm{d}x$.

Funksjonen er en monoton funksjon, og følgelig integrerbar. La $0 < x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$ være en inndeling av intervallet $[0, b]$ i n like store deler. I følge korollaret (med $f = e^x$) er

$$\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f(x_{i-1})\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} e^{(i-1)b/n} \frac{b}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{kb/n}$$

Summen $\sum_{k=0}^{n-1} e^{kb/n}$ kan beregnes ved hjelp av differensiallikninger. Men det enkleste er å observere at $\sum_{k=0}^{n-1} e^{kb/n} = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{b/n})^k$ er en endelig geometrisk rekke med kvotient $e^{b/n}$. I følge sum formelen for en geometrisk rekke er da

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{kb/n} = \frac{(e^{b/n})^n - 1}{e^{b/n} - 1} = \frac{1 - e^b}{1 - e^{b/n}}$$

Dette betyr at

$$\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n} \frac{1 - e^b}{1 - e^{b/n}} = (e^b - 1) \lim_{n\to\infty} \frac{b/n}{e^{b/n} - 1}$$

For å beregne den siste grensen er det lurt å sette $x = b/n$ og benytte L'hôpitals

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b/n}{e^{b/n} - 1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{e^x - 1} \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^x} = 1$$

Dermed har vi altså vist at

$$\int_0^b e^x \,\mathrm{d}x = (e^b - 1) \lim_{n\to\infty} \frac{b/n}{e^{b/n} - 1} = e^b - 1$$

som var det som skulle bestemmes.

Regningen i dette eksempelet er akkurat samme type som vi gjorde i forrige seksjon, og illustrerer hvordan **??** binder sammen den abstrakte definisjonen av integralet med konkrete beregninger.

Det er enkelt å utvide proposisjon (1.2.1) og **??** til en klasse funksjoner som omfatter nesten alle de vi støter på i skolematematikken. Vi sier at en funksjon $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ er *stykkevis monoton* dersom vi kan dele inn $[a, b]$ i endelig mange delintervaller slik at f er monoton på hvert delintervall. Dette betyr altså at vi kan finne en partisjon $a = d_0 < d_1 < d_2 < \cdots < d_n = b$ slik at f er monoton på hvert av intervallene (d_{i-1}, d_i). Altså

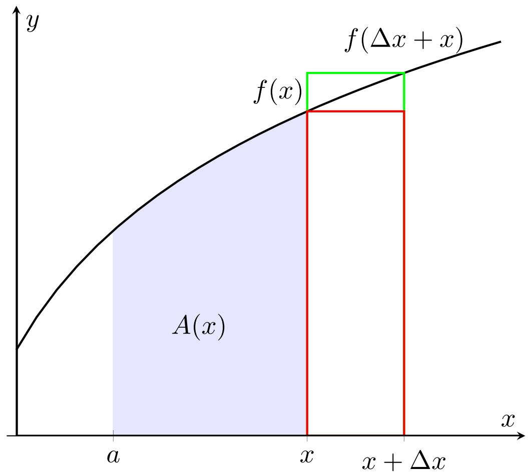
Proposisjon 1.2.2. *Enhver* stykkevis *monoton funksjon er integrerbar*

Dette kan bevises Ved å behandle hvert av intervallene (d_{i-1}, d_i) for seg. Jeg overlater dog beviset til leseren.

1.3 Analysens fundamentalteorem

Newton og Leibniz' grunnleggende oppdagelse var at integrasjon og integrasjon var omvendte regnearter. Istedenfor å løse integrasjonsoppgaver gjennom kompliserte og arbeidskrevende summasjonser (som du forhåpentligvis har gjort gjennom oppgavene) kan vi heller finne en *anti-derivert*. I denne seksjonen skal jeg forklare det teoretiske grunnlaget for denne metoden. En antiderivert til f er en funksjon G slik at $G'(x) = f(x)$[5]. La $A(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, da er A en funksjon som angir arealet mellom x-aksen og f. At A er en antiderivert til f, betyr at $A'(x) = f(x)$.

Det er ikke så vanskelig å forklare intuitivt hvorfor det må være slik. Anta at



Figur 1.1: Grafen til en vilkårlig funksjon $f(x)$

det eksisterer en slik funksjon $A(y)$ som beskriver arealet under $f(x)$ fra et punkt a til ett eller annet punkt $y \geq a$. Her antar jeg at f er en monotont stigende på hele intervallet, argumentet for en monotont synkende funksjon er helt likt[6]. Det skyggelagte området i figur (1.1) er eksempelvis $A(x)$. Nå utvider vi området med en liten faktor Δx. Arealet under grafen til f fra x til $x + \Delta x$ kan da skrives

$$\Delta A = A(x + \Delta x) - A(x)\,.$$

Ut i fra figur (1.1) så vil dette arealet alltid ligge mellom nedre og øvre skranke. Dette kan beskrives ved følgende ulikhet

$$\Delta x \cdot f(x) \leq A(x + \Delta x) - A(x) \leq \Delta x \cdot f(x + \Delta x)\,.$$

Siden arealet av et rektangel er lik grunnlinjen ganget med høyden. Grunnlinjen her blir $G = (\Delta x + x) - x = \Delta x$, og høyden er $f(x)$. «Kruxet» er nå at siden

[5] Jeg kommer til å betegne antideriverte med store bokstaver, mens vanlige funksjoner forblir små.

[6] Selvsagt vil ulikhetene gå motsatt vei for en synkende funksjon. Kanskje du er skeptisk til hvorfor det holder å studerere monotont voksende og synkende funksjoner, hva med de som er begge deler? Merk at dersom funksjonen er tilstrekkelig pen (jeg kommer tilbake med en presis beskrivelse), så kan vi dele inn funksjonen i intervall hvor den enten er monotont synkende eller sitgende.

$\Delta x > 0$ så kan en fritt dele ulikheten på Δx

$$f(x) \le \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} \le f(\Delta x + x)\,. \tag{1.3}$$

Videre lar vi $\Delta x \to 0$. Visuelt kan en se på dette som at vi gjør rektangelet mindre og mindre, helt tilsvarende som når en utledet formelen for den deriverte.

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x) \le \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x)\,.$$

Første leddet blir $f(b)$, og siste leddet blir $f(b)$, altså

$$f(x) \le \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} \le f(x)$$

Dette begynner å se pent og kjent ut. Det midterste leddet kjenner du nok igjen som definisjonen på den *deriverte*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\,.$$

Da har en altså skvist $A'(x)$

$$f(x) \le A'(x) \le f(x)\,.$$

Vi har altså at $A(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}x$ for alle $x \ge a$ og $A'(x) = f(x)$. Med andre ord er A en antiderivert til f! Dette ≪viser≫ altså følgende teorem

Teorem 1.3.1 (Analysens fundamentalteorem - Del I)**.** *Anta at $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig. Da er f integrerbar på ethvert intervall $[a,x]$ der $a \le x \le b$ og funksjonen*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

er en antiderivert til f på $[a,b]$.

De fleste bøker er fornøyd med denne forklaringen, men den har flere hull og mangler. For et skikkelig bevis anbefaler jeg å lese starten på neste seksjon avsnitt (2.2). Ønsker en heller et bevis via Riemann-integralet kan du skumme igjennom avsnitt (B.1).

Analysens fundamentalteorem har mange konsekvenser – både teoretiske og praktiske. De praktiske er lettest å se om vi formulerer resultatet litt. Men først en liten hjelpesetning

Lemma 1.3.1. *Anta F og G begge er antideriverte til f på intervallet $[a,b]$, ($F' = G' = f$). Da eksisterer det en konstant $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$ slik at*

$$F(x) = G(x) + \mathcal{C}$$

for alle $x \in [a,b]$.

Bevis. Definer $H(x) = F(x) - G(x)$. For alle $x \in (a,b)$ så er

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

og siden den deriverte er null, betyr dette at H er konstant. Det vil si at $C = H(x) = F(x) - G(x)$. Men dermed så er $F(x) = G(x) + C$, som ønsket. □

Korollar 1.3.1 (Analysens fundamentalteorem - Del II)**.** *Anta at* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *er kontinuerlig, og at* F *er en antiderivert til* f*. Da er*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$$

Beviset er langt i fra like teoretisk som for Del I, og inkluderes derfor her.

Bevis. Anta F er en antiderivert til f, hvor f er kontinuerlig på $[a,b]$.. La

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Fra FTC[7] (2.2.1) vet vi at G er en antiderivert til f. I følge lemma (2.2.1) er da $G(x) = F(x) + \mathcal{C}$, hvor $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$ er en eller annen konstant. Bruker vi $G(a) = 0$ (hvorfor?), fås

$$F(a) + \mathcal{C} = G(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Som medfører at $\mathcal{C} = -F(a)$. Med andre ord så er $G(x) = F(x) + \mathcal{C} = F(x) - F(a)$, altså

$$G(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

som var det som skulle vises. □

Det er dette korollaret som tillater oss å integrere på den måten vi er vant til.

Eksempel 1.3.1. Beregn

$$\int_2^3 x^4\,\mathrm{d}x$$

Siden den deriverte til $x^5/5$ er x^4, forteller korollaret oss at

$$\int_2^3 x^4\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{5}\right]_2^3 = \frac{3^5}{5} - \frac{2^5}{5} = \frac{243-32}{5} = \frac{211}{5} = 42 + \frac{1}{5}$$

Eksempel 1.3.2. Bestem $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^{\cos x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Det første du kanskje tenker på er å regne ut integralet, sette inn grensene også derivere svaret. I dette tilfellet er faktisk denne metoden ikke bare tungvinn men, umulig siden vi ikke klarer å finne en antiderivert til e^{t^2}. Det neste du kanskje tenker på er å at det er synd at øvre grense er $\cos x$ og ikke x, for da kunne vi ha brukt FTC (2.2.1) til å si at siden derivasjon og integrasjon er motsatte regnearter, ville vi fått få integranden tilbake når vi deriverte integralet. Denne observasjonen er faktisk halveis til målet – alt vi trenger en en liten vri.

La oss først definere funksjonen $F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$. I følge FTC (2.2.1) er da $F'(x) = e^{x^2}$. Så observerer vi at $G(x) = F(\cos x)$. Vi kan nå bruke kjerneregelen til å derivere G

$$G'(x) = F'(\cos x)(\cos x)' = -e^{\cos^2 x}\sin x \tag{1.4}$$

[7] herfra betegner jeg analysens fundamentalteorem som FTC ≪fundamental theorem of calculus≫, både for å være internasjonal, og fordi det er for langt å skrive

Dette eksempelet kan generaliseres inn i følgende korollar.

Korollar 1.3.2. *La f, g, h være deriverbare funksjoner, da holder*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f\circ h\cdot h' - f\circ g\cdot g'$$

I korollaret ble følgende notasjon brukt $f\circ h = f(h(x))$ og $h' = h'(x)$ for å gjøre ting noe penere. Beviset overlates til leser, men det holder å dele opp integralet $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^a \mathrm{d}t$, også benytte kjerneregelen på hver del. Helt tilsvarende som i eksempel (1.3.2).

Helt til sllutt i denne seksjonen er det kanskje på sin plass å diskutere hvorfor analysens fundamentalteorem (2.2.1) er så fundamental. Hvorfor kunne vi ikke bare ha definert integralet til å være den antideriverte, og ha sluppet alle disse bevisene? Det er flere gode grunner. Den viktigste er kanskje at det er ideen om integralet som grenseverdien av en sum som er det viktigste når en skal løse praktiske problemer. Det er denne ideen som gjør at man kan omforme et fysisk problem eller teknisk problem til en integrasjonsoppgave. Den andre grunnen er at det er ideèn om tilnærming ved hjelp av trappefunksjoner som ligger bak alle generaliseringene av integralbegrepet, for eksempel til flere variabler eller ende mer kompliserte funksjoner. Forstår man ikke denne ideèn i det enkleste tilfellet vi ser på, har man ikke mulighet til å forstå generaliseringene. Den tredje grunnen er mer teoretisk. Dersom vi hadde definert integralet som en antiderivert, hadde vi ikke visst hvilke funksjoner som var integrerbare– det finnes nemlig mange funksjoner som er integrerbare (slik vi har definert begrepet), men som ikke kan integreres i den forstand at vi kan skrive ned en formel for den antideriverte uttrykt ved elementære funksjoner. Spesielt i teoretisk arbeid ville det vært plagsomt å ikke kunne snakke om integralet til en funksjon, før man faktisk hadde integrert den.

1.4 DET UBESTEMTE INTEGRALET

Analysens fundamentalteorem forteller oss at det er viktig å kunne derivere ≪baklengs≫ .. det vil si å kunne finne de antideriverte til en gitt funksjon. Når vi skal gjøre dette i praksis, er det greit å ha et symbol for antiderivajson. Siden formålet med antiderivasjon naturlig nok er å løse integraler, velger vi et symbol og en terminologi som minner oss om dette:

Definisjon 1.4.1. Vi definerer det *ubestemte integralet*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

til å være en generell antiderivert til f. Siden to antideriverte er like opp til en konstant, betyr det at $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ er lik en spesiell antiderivert pluss en vilkårlig konstant.

Merk at integralet $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ bare er definert når f har en antiderivert. En stor fordel med analysens fundamentalteorem

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + \mathcal{C} & n \neq -1 \\ \log|x| + \mathcal{C} & n = -1 \end{cases}$$

Eksempel 1.4.1.

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x|$$

La oss vise integralet ovenfor. Husk på at den naturlige logaritmen har jeg definert som $\log x := \int_1^x \mathrm{d}t/t$ (se **??** fra avsnitt (A.2)). Derivasjon av logaritmen gir da

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log|x| = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^{|x|}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Målet blir nå å vise at høyresiden blir $1/x$ uavhengig om x er positiv eller negativ. Tilfellet hvor x er positiv følger direkte fra analysens fundamentalteorem (hvorfor?). Anta at $x < 0$, vi har da

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log|-x| = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log x = \frac{1}{x}$$

som var det som skulle vises.

Noe oppkonstruert eksempel, men det ville ikke vært vanskeligere å vise med en annen definisjon av logaritmen. Merk at dette gir oss muligheten til å beregne integralet over $1/t$ også for negative verdier, for eksempel

$$\int_{-3}^{-1}\frac{\mathrm{d}t}{t} = [\log|x|]_{-3}^{-1} = \log|-1| - \log|-3| = -\log 3$$

To kommentarer. Merk at integralet $\int_{-a}^{b} \mathrm{d}t/t$ hvor a og b er positive tall fortsatt ikke eksister, dette har å gjøre med hvordan $1/t$ oppfører seg nærme null. Integralet ovenfor kunne og vært løst via substitusjon

$$\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_{3}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\int_{1}^{3} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \log 3$$

Her lar jeg det være opp til leser å finne ut hvilken substitusjon jeg brukte, samt å finne hvilken regel som ble brukt i hver overgang. Det er dette som gjør at vi velger å definere $\log|x| = \int \mathrm{d}t/t$ eller med andre ord

$$\int_{a}^{b} \frac{1}{t} = \Big[\log|x|\Big]_{a}^{b} = \log \frac{b}{a} \tag{1.5}$$

såfremt a og b har samme fortegn. Hva skjedde i den siste overgangen?

Eksempel 1.4.2. Siden $\sin x$ er en spesiell antiderivert til $\cos x$, blir

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + \mathcal{C}$$

hvor $\mathcal{C}$ som vanlig betegner en vilkårlig konstant.

Proposisjon 1.4.1. *Anta at f og g er kontinuerlige funksjoner og at a er konstant. Da gjelder*

$$\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.6}$$

$$\int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.7}$$

Bevis. Disse regnereglene følger direkte fra regnereglene for derivasjon. Vi viser likning (1.7), siden den første kan vises helt likt. Her tar vi utgangspunkt i at vi allerede har vist analysens fundamentalteorem. Dersom F og G er antideriverte av henholdsvis f og g, så er

$$D[F(x) + G(x)] = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

Dette viser at $F(x) + G(x)$ er en antiderivert til $f(x) + g(x)$, så

$$\int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + G(x) + C = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

som ønsket. Se (A.1.2) for et bevis for at $D[F(x) + G(x)] = F'(x) + G'(x)$. □

Proposisjon 1.4.2. *Dersom g er deriverbar, f er kontinuerlig og F er en antiderivert av f, så er*

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,\mathrm{d}x = F\big(g(x)\big) + \mathcal{C}$$

Bevis. Deriverer vi $F\big(g(x)\big)$, får vi via kjerneregelen (A.1.5)

$$D[F\big(g(x)\big)] = F'\big(g(x)\big)g'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x)$$

Altså er $F\big(g(x)\big)$ en antiderivert av $f\big(g(x)\big)g'(x)$, og resultatet følger. □

Senere kommer vi til å gå dypere inn for å forklare denne regelen. For nå svelger jeg verdigheten min og kommer å bruke regelen som vanlig. Altså at vi setter $u = g(x)$ og beregner $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$[8]. De som ikke kan vente på svaret, så tar jeg opp igjen denne tråden om pussig notasjon i starten av Del II.

Eksempel 1.4.3. Beregn $\int (\sin x)^4 \cos x \,\mathrm{d}x$

Vi setter $u = \sin x$[9] og får $\mathrm{d}u = \cos x \,\mathrm{d}x$. Setter vi inn fås

$$\int (\sin x)^4 \cos x \,\mathrm{d}x = \int u^4 \,\mathrm{d}u = \frac{u^5}{5} + \mathcal{C} = \frac{1}{5}(\sin x)^5 + \mathcal{C}$$

(kontroller svaret ved å derivere høyresiden).

[8] Forklaringen på hvorfor dette er lov står som følgende i mange calculus bøker: ≪La $u = g(x)$ ved å derivere begge sider med hensyn på x. Så $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x) \Rightarrow \mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$ ≫ Men dette er jo selvsagt bare tull. Notasjonen $\mathrm{d}u/\,\mathrm{d}x$ betegner den deriverte og er ingen brøk.

[9] Enda et tankekors: vanligvis setter vi $x = g(u)$, hvorfor er det lov å gjøre det omvendte? Altså hvorfor har vi lov å bruke samme metode med $h(x) = u$, eller $f(x) = p(u)$?

1.5 Delvis Integrasjon

I denne delen skal vi besøke delvis integrasjon. Mens integrasjon via substitusjon i sin mest elementære form utnytter kjernereglen, så utnytter delvis integrasjon produkt regelen. I bruk er metoden noe vanskeligere, og kan kreve flere steg før en kommer i mål. Til gjengjeld har nok metoden noen flere bruksområder.

1.5.1 Ideèn gjennom eksempler

Anta at vi trenger å bestemme en antiderivert til funksjonen $f(x) = x(\sec x)^2$.[10]. Det er ikke vanskelig å se at en normal substitusjon ikke vil fungere her (hvorfor?). En oppegående og anstendig student vil nok kanskje merke seg at $x\sec^2 x$ inneholder ledd som kunne ha kommet fra produktregelen for derivasjon

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x\tan x = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x + \tan x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = x\sec^2 x + \tan x \tag{1.8}$$

Dersom vi stokker om leddene ovenfor, kan vi skrive likning (1.8) som

$$x\sec^2 x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[x\tan x\big] - \tan x \tag{1.9}$$

Faktisk gir denne likningen selve essensen av delvis integrasjon: funksjonen som skal integreres er altså en del av produktregelen. Håpet er da at den andre delen av produktet $\tan x$ er enklere å integrere enn det første, altså $x\sec^2 x$. Integrerer vi begge sider av likning (1.9) får vi

$$\begin{aligned}\int x\sec^2 x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[x\tan x\big] - \tan x\,\mathrm{d}x \\ &= x\tan x - \int \tan x\,\mathrm{d}x \\ &= x\tan x + \log|\cos x| + \mathcal{C}\end{aligned}$$

Jeg skal snart utlede og struktere dette til en formell teknikk, men før dess tar i enda ett eksempel.

Eksempel 1.5.1.

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x$$

Ved litt prøving og feiling eller et utmerket falkeblikk ser vi at integranden er en del av produktet $D_x\big[x\sin x\big] = x\cos x + \sin x$. Så isolerer vi $x\cos x$ og integrerer

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[x\sin x\big] - \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + \mathcal{C}$$

Det kan være interessant å derivere uttrykket ovenfor å se hvordan leddet $x\cos x$ oppstår og hvordan $\cos x$ leddet kanseleres. Dette overlates til leser

[10] Husk på at $\sec x = 1/\cos x$.

1.5.2 BEVISET

Proposisjon 1.5.1. *Anta at u og v er kontinuerlig deriverbare*[11] *funksjoner av en underliggende variabel la oss si x. Da er formelen for* delvis integrasjon *gitt ved*

$$\int u(v)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.10}$$

Formelen er lett å utlede, men først vil jeg påpeke at likning (1.10) ofte skrives

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int u'v\,, \tag{1.11}$$

og det er denne notasjon jeg kommer til å benytte meg av i utledningen[12]. Merk at dette bare er et skifte av notasjon, og likningen uttrykker akkuratt det samme. Skrivemåten ovenfor kalles for differensialformen.

Bevis. Vi obsererver først at $(uv)' = u'v + uv'$ fra produktregelen for derivasjon – se (A.17) fra proposisjon (A.1.2). Integrerer vi begge sider av likningen fås

$$\int (uv)' = \int u'v + \int uv'\,. \tag{1.12}$$

Husk igjen at u og v er funksjoner av en underliggende variabel x, og vi strengt talt burde ha skrevet $\mathrm{d}x$ bak hvert integral. Disse sløyfes dog av latskap. I følge analysens fundamentalteorem (2.2.1) er

$$\int (uv)' = uv + C\,. \tag{1.13}$$

Setter vi inn likning (1.13) så kan (1.12) skrives på formen

$$uv = \int u'v + \int uv'\,.$$

(Hvor integralene på høyre side sluker integrasjonskonstanten vår) Ved å skrive $v' = \mathrm{d}v$, samt å stokke om på leddene ovenfor gir oss likning (1.10). □

De fleste lærebøker definerer delvis integrasjon akkuratt som likning (1.11). Den bør pugges, men utledningen – spesielt (1.12) – bør ikke gå i glemmeboken.

Eksempel 1.5.2. Bestem $\displaystyle\int xe^x\,\mathrm{d}x$.

Jeg velger u og v' som vist under

$$\begin{array}{rclcrcl} u &=& x & \qquad & \mathrm{d}v &=& e^x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &=& 1\,\mathrm{d}x & & v &=& e^x \end{array}$$

Ved å sette inn i formelen for delvis integrasjon vår vi da

$$\begin{aligned} \int xe^x &= xe^x - \int e^x \cdot 1\,\mathrm{d}x \\ &= xe^x - e^x + \mathcal{C} \\ &= e^x(x-1) + \mathcal{C} \end{aligned}$$

som var det som skulle beregnes.

[11] Dette betyr med andre ord at u', v' er kontinuerlige, altså at $u, v \in C^1$. Fra proposisjon (A.1.4) og induksjon følger det at dersom $f^{(n)}$ er kontinuerlig, så er $f^{(k)}$ kontinuerlig hvor $k = 1, \ldots, n-1$.

[12] Leser oppfordres til å bekle beviset i en formell språkdrakt om du ikke er fornøyd med notasjonen.

I del I vil alle stykker som innvolverer delvis integrasjon bli ført på samme måte. Senere når du er blitt litt varmere i trøya – altså del II – vil jeg bare skrive opp u og $\mathrm{d}v$.

Eksempel 1.5.3.

$$\int x^3 \sin x^2 \,\mathrm{d}x$$

Her vil det ikke være gunstig å velge $u = \sin x^2$, fordi da må $\mathrm{d}v = x^3\,\mathrm{d}x$. Dette fører da til at $\mathrm{d}u = 2x\cos x^2$ og $v = \frac{1}{4}x^3$ så $\int v\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{5}x^5 \cos x^2\,\mathrm{d}x$ som er værre enn hva vi startet med.

Vi må derfor velge $u = x^k$, for en eller annen $k = 0, 1, 2$, vi kan ikke velge $u = x^3$ for da er $\mathrm{d}v = \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ som ikke har en elementær antiderivert[13]. Valget faller på $\mathrm{d}v = x\sin x^2\,\mathrm{d}x$, da denne har en enkel antiderivert (hvorfor?).

$$\begin{array}{rclcrcl} u &=& x^2 & \qquad & \mathrm{d}v &=& x\sin x^2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &=& 2x\,\mathrm{d}x & & v &=& \frac{1}{2}\cos x^2 \end{array}$$

Ved å sette inn i formelen for delvis integrasjon vår vi da

$$\begin{aligned} \int x^3 \sin x^2\,\mathrm{d}x &= \int x^2 \cdot x\sin x^2\,\mathrm{d}x \\ &= x^2\left(-\frac{1}{2}\cos x^2\right) - \int \left(-\frac{1}{2}\cos x^2\right) 2x\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{x^2}{2}\cos x^2 + \int x\cos x^2\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{x^2}{2}\cos x^2 + \frac{1}{2}\sin x^2 + \mathcal{C} \end{aligned}$$

Hvor jeg brukte substitusjon for å integrer $\int x\cos x^2\,\mathrm{d}x$, du ser kanskje hvilken?

Dette eksemplet viser hvordan kravet om at $v = \int dv$ hjelper oss å velge fornuftige u og $\mathrm{d}v$. Man kan si det var flaks at integralet vi endte opp med var integrerbart, da det ikke hadde vært mulig med liknende integral $\int x^4 \sin x^2\,\mathrm{d}x$, $\int x^2 \sin x^2\,\mathrm{d}x$.

La oss ta ett liknende eksempel, men denne gangen med brøker

Eksempel 1.5.4.

$$\int \frac{x^9}{\sqrt{1-x^5}}\,\mathrm{d}x$$

Ved å stirre en stund på integralet, velger jeg

$$\begin{array}{rclcrcl} u &=& x^5 & \qquad & \mathrm{d}v &=& x^4(1-x^5)^{-1/2}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &=& 5x^4\,\mathrm{d}x & & v &=& -\frac{2}{5}(1-x^5)^{1/2} \end{array}$$

[13] Merk at selv om ikke integralet har en elementær antiderivert, så kan vi bestemme integralet $\int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$, dette integralet kalles et av *Fresnel* integralene og vil bli studert i avsnitt (3.8), se spesielt (**??**).

Merk hvor omhyggelig disse var valgt slik at $v = \int \mathrm{d}v$ var mulig å beregne.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^9}{\sqrt{1-x^5}}\,\mathrm{d}x &= x^5\left(-\frac{2}{5}(1-x^5)^{1/2}\right) + \int\left(-\frac{2}{5}(1-x^5)^{1/2}\right)5x^4\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{5}x^5(1-x^5)^{1/2} + 2\frac{-1}{5}\frac{2}{3}(1-x^5)^{3/2} + \mathcal{C} \\ &= -\frac{2}{15}(x^2+2)\sqrt{1-x^5} + \mathcal{C}\end{aligned}$$

Hvor den siste overgangen bestod i å trekke ut den felles faktoren $\sqrt{1-x^5}$.

1.5.3 Integrasjon av bestemte funksjoner

Her skal vi se på delvis integrasjon av funksjoner på formen $\int p(x)f(x)\,\mathrm{d}x$, hvor p er et polynom og f er en funksjon. Tidligere har jeg alltid derivert polynomet – siden dette er forholdsvis enkelt å gjøre – mens f har (heldigvis) vært enkelt å integrere. La oss studere noen eksempler hvor det er motsatt, altså hvor f er vanskelig å integrere, men enkel å derivere.

Eksempel 1.5.5.

$$\int x^2 \log x\,\mathrm{d}x$$

Vi kan ikke velge $\mathrm{d}v = \log x\,\mathrm{d}x$, siden vi enda ikke vet hva den antideriverte av $\log x$ er[14]. So vi har lite valg i å la $\log x$ være u.

$$\begin{array}{rclcrcl} u &=& \log x & \qquad & \mathrm{d}v &=& x^2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &=& \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x & & v &=& \frac{1}{3}x^3 \end{array}$$

Delvis integrasjon gir da

$$\begin{aligned}\int x^2\log x\,\mathrm{d}x &= (\log x)\frac{1}{3}x^3 - \int\left(\frac{1}{3}x^3\right)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}x^3\log x - \frac{1}{3}\int x^2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}x^3\log x - \frac{1}{9}x^3 + \mathcal{C}\end{aligned}$$

Eksempel 1.5.6.

$$\int \log x\,\mathrm{d}x = x\log x - x + \mathcal{C} \tag{1.14}$$

Vi kan ikke velge $\mathrm{d}v = \log x\,\mathrm{d}x$ (hvorfor ikke?). Slik eneste gjenstående valg er $u = \log x$, akkuratt som i forrige eksempel. Kruxet er nå å legge merke at da må $v' = 1$ siden $v'u = \log x$ altså hele integranden.

$$\begin{array}{rclcrcl} u &=& \log x & \qquad & \mathrm{d}v &=& 1\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &=& \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x & & v &=& x \end{array}$$

[14] Selv om dette var kjent ville det ikke vært et lurt valg, dette vil eksempel (1.5.6) vise.

Ved å sette inn kan altså integralet skrives som

$$\int \log x \,\mathrm{d}x = (x)\cdot(\log x) - \int x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = x\log x - \int \mathrm{d}x$$

Herfra ser vi at integralet av en konstant er x, så integralet kan skrives som

$$\int \log x \,\mathrm{d}x = x\log x - x + \mathcal{C} \tag{1.15}$$

Dette er nok det mest ikoniske eksempelet på nytteverdien av delvis integrasjon, selv om utregningen var såre enkel.

Bestemte integral Med grenser skrives formelen for delvis integrasjon (1.11)

$$\int_a^b u \,\mathrm{d}v = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b u'v\,,$$

hvor igjen u og v er funksjoner av en underliggende variabel x. Et enkelt eksempel er vist under

Eksempel 1.5.7.

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x \,\mathrm{d}x$$

Den antideriverte er enklere enn eksempler, men her er utfordringen å holde tungen bent i munnen når en skal holde styr på alle fortegnene $(+/-)$.

$$\begin{aligned} u &= x & \mathrm{d}v &= \sin x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &= 1\,\mathrm{d}x & v &= -\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x &= \Big[-x\cos x\Big]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x \\ &= [-\pi\cos\pi] - [-(-\pi)\cos(-\pi)] + \Big[\sin x\Big]_{-\pi}^{\pi} \\ &= (-\pi)(-1) - (\pi)(-1) + \sin\pi - \sin(-\pi) \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

For å gjøre utregningen noe enklere å føre, kunne vi lagt merke til at $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x$ er null siden vi integrerer $\cos x$ over en hel periode. Integralene over $\cos x$ og $\sin x$ er null over enhver hel periode.

Det er sedvane å beregne delen $[u(v)v(x)]_a^b$ separat, men en kunne også ha beregnet hele den antideriverte, også beregnet grensene og tatt differansen. En rask måte å føre integralet på blir da

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-x\cos x + \sin x\Big]_{-\pi}^{\pi} = (\pi + 0) - (-\pi + 0) = 2\pi\,.$$

Som du ser er det noen ganger enklere å besteme det ubestemte integralet først.

1.5.4 Å legge til en konstant

Når vi integrerte brøker la jeg noen ganger til null i tellere for at integrasjonen skulle bli enklere. For delvis integrasjon kan vi gjøre noe tilsvarende. Det er artig å legge merke til av vi *velger* u og $\mathrm{d}v$, og deretter *beregner* $\mathrm{d}u$ og v. Altså er ikke valget av v unik; siden overgangen fra $\mathrm{d}v$ til v er antiderivasjon, så vet vi bare v opp til en additativ konstant.

Eksempel 1.5.8. La oss igjen ta (1.5.2) igjen som et eksempel.

$$\int x e^x \,\mathrm{d}x$$

La oss nå velge $v = e^x + \pi$ i stedet for $v = e^x$ og se hva som skjer.

$$\begin{aligned}\int x e^x \,\mathrm{d}x &= x(e^x + \pi) - \int (e^x + \pi) \cdot 1 \,\mathrm{d}x \\ &= x e^x + \pi x - (e^x + \pi x) + C \\ &= (x-1)e^x + \mathcal{C}\end{aligned}$$

akkuratt som før.

Korollar 1.5.1. *La u og $w = v + k$, hvor v og u er funksjoner av en underliggende variabel x. Da er*

$$\int uw = uv - \int u \,\mathrm{d}v\,,$$

gitt at $k \in \mathbb{R}$ er en konstant.

Her overlater jeg ≪beviset≫ til leseren og tar i stedet et enkelt eksempel.

Eksempel 1.5.9.

$$\int x \arctan x \,\mathrm{d}x$$

La oss først prøve det naturlige valget

$$\begin{aligned} u &= \arctan x & \mathrm{d}v &= x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &= \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x & v &= \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

Her valgte jeg å sette $u = \arctan x$ fordi jeg ikke helt vet hvordan jeg integrerer $\arctan x$.[15]

$$\int x \arctan x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Her ser ikke det siste uttrykket spesielt pent ut[16], så vi prøver ett nytt valg av u og v. Et smartere valg er følgende

$$\begin{aligned} u &= \arctan x & \mathrm{d}v &= x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &= \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x & v &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

[15] Dette er en hvit løgn. Bytt om på u og $\mathrm{d}v$ hva skjer?

[16] Det siste uttrykket kan selvsagt integreres ved enten å bruke polynomdivisjon eller å legge til null

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$$

resten overlates til leser. Poenget er at utregningen tar unødvendig mye plass og tid.

Bruker en nå delvis integrasjon får vi direkte

$$\begin{aligned}\int x \arctan x \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\arctan x - \int \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\cdot\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\arctan x - \frac{1}{2}x + \mathcal{C}\end{aligned}$$

som var hakket enklere å integrere. For å finne det «magiske» konstantleddet kunne vi først ha brukt $v = x^2/2 + k$ satt inn i formelen for delvis integrasjon også sett at $k = 1/2$ gav den enkleste utregningen. En bytter altså mer tenking omkring valget av u og v', mot mindre arbeid i utregningen av $\int u'v$.

1.5.5 Indirekte delvis integrasjon

Eksempel 1.5.10.

$$\int (\sin x)^2 \,\mathrm{d}x \tag{1.16}$$

La oss bestemme integralet av $(\sin x)^2$ via delvis integrasjon. Først setter vi $u = \sin x$ og $v' = \cos x$ får vi

$$\int (\sin x)^2 \,\mathrm{d}x = \sin x(-\cos x) - \int \cos x(-\cos x)\,\mathrm{d}x$$

Siden $v = \int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x$ og $u' = (\sin x)' = \cos x$. Dette kan skrives som

$$\int (\sin x)^2 \,\mathrm{d}x = -\sin x \cos x + \int 1 - (\sin x)^2 \,\mathrm{d}x$$

Hvor enhetsformelen $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ ble brukt. Kruxet er nå å legge til $\int (\sin x)^2 \,\mathrm{d}x$ på begge sider av likningen. Vi får da

$$2\int (\sin x)^2 \,\mathrm{d}x = -\sin x \cos x + \int 1 \,\mathrm{d}x$$

Ved å dele på 2 på begge sider av likhetstegnet, får vi

$$\int (\sin x)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x \cos x + \mathcal{C}$$

som var det som skulle bestemmes. Senere skal vi se at integralet også kan løses uten delvis integrasjon.

Eksempel 1.5.11.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x$$

Dette er et noe oppkonstruert eksempel da det kan løses enkelt om en husker på sine trigonometriske identiter[17] Vi bruker delvis med følgende u og v'.

$$\begin{aligned} u &= \sin x \cos x & \mathrm{d}v &= \sin x \cos x \,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &= (\cos x)^2 - (\sin x)^2 \,\mathrm{d}x & v &= -\tfrac{1}{2}\cos^2 x \end{aligned}$$

[17] Merk at

$$\int (\sin x)^2(\cos x)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int (\sin 2x)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + \mathcal{C}$$

siden $\sin^2 x = 2\cos x \sin x$ og $(\sin x)^2 = 1 - \cos 2x$.

Hvor integralet $v = \int \cos x \sin x \,\mathrm{d}x$ kan løses både med $u \mapsto \sin x$ eller $u \mapsto \cos x$. Grunnen til at vi ikke skriver $[\cos x \sin x]' = \cos 2x$, vil snart bli klar. Delvis integrasjon gir da

$$\begin{aligned} I = \int (\sin x)^2 (\cos x)^2 \,\mathrm{d}x &= \sin x \cos x \cdot \left(-\frac{1}{2} (\cos x)^2 \right) \\ &- \left[\int \left[(\cos x)^2 - (\sin x)^2 \right] \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos^2 x \right) \mathrm{d}x \right] \\ &= -\frac{1}{2} \sin x (\cos x)^3 - \left[\frac{1}{2} \int \sin^2 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{2} (\cos x)^4 \,\mathrm{d}x \right] \\ &= -\frac{1}{2} \sin x (\cos x)^3 - \frac{1}{2} I - \frac{1}{2} \int (\cos x)^4 \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Hvor jeg definerte integralet vårt som I, se nå at akkuratt som i forrige eksempel ender vi igjen opp med integralet vårt på høyre side. Denne gangen er det ikke hele integralet som dukker opp, men $I/2$. Legger vi dette til på begge sider fås

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} I &= -\frac{1}{2} \sin x (\cos x)^3 + \frac{1}{2} \int (\cos x)^4 \,\mathrm{d}x \\ I &= -\frac{1}{3} \sin x (\cos x)^3 + \frac{1}{3} \int (\cos x)^4 \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Det siste integralet kan løses enten via flere smarte trigonometriske identiter, eller delvis integrasjon. Dette overlater jeg dog til leser å finne ut av.

Oppgaver

1. Bruk delvis integrasjon til å vise at

$$\int \sqrt{x^2 - 1} \,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x^2 - 1}} \tag{1.17}$$

1.6 Substitusjon

Tidligere så vi på hvordan produktregelen for derivasjon gav opphav til en nyttig integrasjonsteknikk. I denne delen skal vi se på hvordan kjerneregelen kan gjøre det samme. Teknikken som skal studeres kalles gjerne *skifte av variabel*, eller *substitusjon*, siden kjært barn har flere navn.

Kjernereglenen i all sin enkelhet sier at $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\big(g(x)\big) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$, integrerer vi begge sider får vi følgende proposisjon

Proposisjon 1.6.1. *Dersom g er deriverbar, og f er kontinuerlig, da er*

$$\int (f \circ g) \cdot g' = F \circ g + \mathcal{C}\,,$$

Hvor F betegner en antiderivert til f[18].

Huskeregelen for denne setningen er relativt grei. Vi setter $u = g(x)$, deriverer vi får vi $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$, slik at du kan skrive

$$\int f\big[g(x)\big) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + \mathcal{C} = F\big(g(X)\big) + C$$

Som virker naturlig siden $\mathrm{d}u/\,\mathrm{d}x = g'(x)$, bare er to ulike navn som betegner det samme. La oss illustrere proposisjonen gjennom et enkelt eksempel.

Eksempel 1.6.1.

$$\int (1 + x^2)^7 2x\,\mathrm{d}x$$

Tanken er at dersom integralet var $\int u^7\,\mathrm{d}u$ ville vi klart å integrere det enkelt.

$$\int u^7 = \frac{1}{1+7} u^{7+1} + \mathcal{C}$$

Dersom vi lar $u = 1+x^2$, så blir $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ og vi kan benytte proposisjon (1.6.1). Siden da er kjernen vår $g(x) = 1 + x^2$ og $g'(x) = 2x$. Slik at

$$\int (1 + x^2)^7 (1 + x^2)'\,\mathrm{d}x = \int u^7\,\mathrm{d}u = \frac{1}{1+7} u^{7+1} + \mathcal{C} = \frac{1}{8}(1 + x^2)^9$$

Som en kan teste gyldigheten av via derivasjon.

Dessverre har proposisjon (1.6.1) en stor ulempe i praksis – da den kan bare benyttes når den deriverte $g'(x)$ er en faktor i integranden. Ofte er det dog ikke like enkelt å finne $g'(x)$ i integralet vårt. Anta at integralet vi skulle integrert

[18] Merk at $f \circ g$ betegner komposisjonen mellom f og g, med andre ord $f\big(g(z)\big)$. Fordelen er noe enklere notasjon, samt at en slipper å spesifisere variabelen. Helt eksplisitt skrives formelen som

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = F\big(g(x)\big) + \mathcal{C}\,.$$

Men ulempen da er at en må eksplisitt nevne hvilken variabel en integrerer med hensyn på. I henhold til formelen er jo dette helt irrelevant.

hadde vært $\int (1+x^2)^7 x \,\mathrm{d}x$, nå er ikke proposisjon (1.6.1) gyldig, siden integralet ikke inneholder $g'(x)$.[19] La oss se på et eksempel hvor $g'(x)$ ikke er en faktor.

Eksempel 1.6.2.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+1}$$

En relativt åpenbar substitusjon er $u = \sqrt{x}+1$, men da mangler som nevnt $g'(x)$ som trengs for proposisjon (1.6.1). La oss derimot være lovløse og fortsette regningen. Løser vi likningen $u = \sqrt{x}+1$, fås $x = (u-1)^2$. Derivasjon gir da

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = 2(u-1)$$

Ren ønsketenkning så kan dette skrives som $\mathrm{d}x = 2(u-1)\,\mathrm{d}u$, og innsetning gir

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+1} &= \int \frac{1}{u} 2(u-1)\,\mathrm{d}u = \int 2 - \frac{2}{u}\,\mathrm{d}u = 2u - 2\log|u| \\ &= 2(\sqrt{x}+1) - 2\log(\sqrt{x}+1) + C_1 = 2\sqrt{x} - 2\log(\sqrt{x}+1) + \mathcal{C}\end{aligned}$$

Hvor konstanten $\mathcal{C}$ slukte både 2 og C_1. At dette svaret er riktig kan en se via derivasjon, men hvorfor fremmgangsmåten er rett er mer usikkert.

Fra oven så er riktig nok $\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}u = 2(u-1)$, men $\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}u$ er ikke en brøk, og vi akan ikke skrive denne formelen som $\mathrm{d}x = 2(u-1)\,\mathrm{d}u$. Heller kan vi ikke sette inn for $\mathrm{d}x$ i integralet $\int 1/(\sqrt{x}+1)\,\mathrm{d}x$ – da $\mathrm{d}x$ er ingen faktor i integranden, men bare en merkelapp som forteller oss at x er integrasjonsvariabelen.[20] Vi trenger et resultat som forsikrer oss atregningene ovenfor gir riktig resultat selv om enkelttrinnene er komplett meningsløse

Proposisjon 1.6.2. *Anta at f er kontinuerlig og at g er deriverbar og strengt monoton. La h være den omvendte funksjonen til g, og anta at $h'(x)$ er kontinuerlig. Da er*

$$\int f \circ g = \left[\int f \cdot h' \,\mathrm{d}u \right]_{u=g} .$$

Hvor den siste notasjonen betyr at vi integrerer høyresiden, for deretter å erstatte alle u med funksjonen g.[21]

[19] Det finnes selvsagt måter å gå rundt dette problemet på, ved å legge til den manglende faktoren 2.

$$\int (1+x^2)^7 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^7 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int u^7 \,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\frac{1}{8}u^8 + \mathcal{C} = \frac{1}{16}(1+x^2)^8 + \mathcal{C}$$

Derimot blir denne metoden langt vanskeligere å bruke på styggere integral.

[20] Selv ikke dette er helt riktig, en kan se på $4x\,\mathrm{d}x$ som ett uttrykk og så integrere disse. Dette betegnes gjerne som differensialformer, og brukes mye i differensialgeometri. Rammeverket for å behandle slike uttrykk er derimot svært komplisert.

[21] Proposisjon (1.6.2) kan selvsagt også eksplisitt skrives som

$$\int f\big(g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \left[\int f(u)h'(u)\,\mathrm{d}u \right]_{u=g(x)}$$

men igjen er notasjonen ovenfor noe penere.

La oss vise at proposisjonen ovenfor gir mening. Anta at vi ønsker å integrere $\int f\big(g(x)\big)\,\mathrm{d}x$ ved å innføre $u = g(x)$ som en ny variabel. Løser vi likningen $u = g(x)$ med hensyn på x fås, $x = h(u)$ (Husk at h og g er omvendte funksjoner). Deriverer vi med hensyn på u fås

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = h'(u)$$

Akkuratt som i eksempel (1.6.2), skriver vi dette som $\mathrm{d}x = h'(u)\,\mathrm{d}u$ og setter inn i integralet

$$\int f\big(g(x)\big)\mathrm{d}x = \int f(u)h'(u)\,\mathrm{d}u$$

Som er akkuratt hva proposisjonen sier. Kravet om at g skal være monoton handler om at dette må til for at det skal eksistere en unik omvendt funksjon h på integrasjonsområdet. Løser vi det siste integralet og setter $u = g(x)$ får vi

$$\int f\big(g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \left[\int f(u)h'(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=g(x)}$$

Så dersom overgangene i eksempel (1.6.2) kan vises, beviser dette også (1.6.2).

Bevis. Vi ønsker å gjøre en liten omskrivning slik at proposisjon (1.6.1) kan benyttes. Dette gjøres ved en frekk liten manøver. Siden h er den omvendte funksjonen til g så er $h(g(x)) = x$. Derivasjon gir da. $h'(g(x))\cdot g'(x) = 1$. Følgelig kan vi skrive

$$\int f\circ g = \int (f\circ g)(h'\circ g)g'$$

Nå har vi sneket inn den magiske faktoren g', og vi kan benytte proposisjon (1.6.1) med $u = g$, og $\mathrm{d}u = g'(x)$.

$$\int (f\circ g)(h'\circ g)g' = \int f\cdot h'$$

Hvor $g' = g'(x)\,\mathrm{d}x$ og $h' = h'(u)\,\mathrm{d}u$ bare for å rydde opp i notasjonen. Løser vi dette integralet og setter $u = g$, får vi $\int f\circ h'\,\mathrm{d}u\big|_{u=g}$. Altså er

$$\int f\circ g = \left[\int f\cdot h\,\mathrm{d}u\right]_{u=g}.$$

og dette fullfører beviset. □

Eksempel 1.6.3.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$

Vi bruker her den nye teknikken vi har lært, og setter $u = \sqrt[3]{x}$. Da er $\mathrm{d}u = 1/(3x^{2/3})\,\mathrm{d}x$, med andre ord er $\mathrm{d}x = 3u^2\,\mathrm{d}u$, siden $x^{2/3} = (x^{1/3})^2$.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u}{1+u}3u\,\mathrm{d}u = 3\int \frac{u^3}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2 - x + 1 \\
\cline{2-2}
x+1 \big) & x^3 \\
 & -x^3 - x^2 \\
\cline{2-2}
 & -x^2 \\
 & x^2 + x \\
\cline{2-2}
 & x \\
 & -x-1 \\
\cline{2-2}
 & -1
\end{array}
$$

Figur 1.2: Polynomdivisjon av $u^3 : (u+1)$.

Det siste uttrykket kan være noe vanskelig å integrere, løsningen blir å enten bruke polynom-divisjon, eller en smart omskrivning. Alternativt kan vi legge til å trekke fra 1 i telleren, og deretter bruke at

$$\frac{u^{2k+1}+1}{u+1} = \sum_{i=0}^{2k}(i-u)^i$$

Som for eksempel kan vises via induksjon.[22] For $k = 1$ blir da formelen $\frac{u^3+1}{u+1} = u^2 - u + 1$. Altså blir integralet

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x &= 3\int \frac{u^3+1}{u+1} - \frac{1}{u+1}\,\mathrm{d}x \\
. &= 3\int u^2 - u + 1 - \frac{1}{u+1}\,\mathrm{d}x \\
&= 3\left(\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{2}u^2 + u - \log|u+1|\right) + \mathcal{C} \\
&= x - \frac{3}{2}x^{2/3} + 3x^{1/3} - 3\log\left|1 + x^{1/3}\right| + \mathcal{C}
\end{aligned}
$$

Som er akkuratt det samme en ville fått ved å bruke polynomdivisjonen.

Eksempel 1.6.4.

$$\int x \arcsin x \,\mathrm{d}x$$

Dette integralet kan løses selv om regningen blir noe grisete. Her prøver vi heller substitusjonen $z \mapsto \arcsin x$, da er $x = \sin z$ (egentlig kunne vi lagt til et multiplum av 2π her, men vi velger den enkleste inversen). Da blir $\mathrm{d}x =$

[22] Det holder for $n = 1$. Anta at det holder for $\sum_{i=0}^{2k}(-u)^i = \frac{x^{2k+1}+1}{x+1}$. For $k+1$ har vi da $\sum_{i=0}^{2k+2}(-u)^i = (-u)^{2k+1} + (-u)^{2k+2} + \sum_{i=0}^{2k}(-u)^i$. Bruker en nå induksjonshypotesen fås

$$\sum_{i=0}^{2k+2}(-u)^i = -u^{2k+1} + u^{2k+2} + \frac{x^{2k+1}+1}{u+1} = \frac{u^{2k+3}+1}{u+1}\,.$$

Som var det vi ønsket å vise. Selvsagt er dette mye enklere å vise om en tar i bruk sumformelen for den geometriske rekken. Men dette overlates til leser å bekrefte.

$\cos z \, \mathrm{d}z$.[23] Altså kan integralet skrives som

$$\int x \arcsin x \, \mathrm{d}x = \int \sin z \cdot z \cdot \cos z \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2} \int z \sin 2z \, \mathrm{d}z$$

Hvor vi i siste overgang la merke til at $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$. Bare for å drille substitusjon, setter jeg $t \mapsto 2z$, dette gir

$$\begin{aligned} \int x \arcsin x \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{8} \int t \sin t \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{8} \left[t(-\cos t) - \int (-\cos t) \, \mathrm{d}t \right] 1 = \frac{1}{8} [\sin t - t \cos t] \end{aligned}$$

Hvor leser selv får fylle inn mellomregningene i substitusjonen. I den nest siste overgangen brukte jeg delvis integrasjon, med $u = t$, og $v' = \sin t$. Det siste som gjenstår er å bytte tilbake til den opprinnelige integrasjonsvariabelen.

$$\int x \arcsin x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{8} [\sin 2z - 2z \cos 2z] = \frac{1}{8} \sin 2z - \frac{1}{4} z \cos 2z$$

Vi vet at $z = \arcsin x$, altså $x = \sin z$, men hvordan kan $\cos 2z$ og $\sin 2x$ skrives?

$$\begin{aligned} \cos 2z &= \cos^2 z - \sin^2 z = 1 - 2\sin^2 z = 1 - 2x^2 \\ \sin 2z &= 2 \sin z \cos z = 2 \sin z \sqrt{1 - (\sin z)^2} = 2x\sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

Altså kan det endelige svaret skrives på formen

$$\int x \arcsin x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} x\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{4}(2x^2 - 1) \arcsin z + \mathcal{C}$$

Det eksempelet viser noen av styrkene til substitutsjon, det er nemlig tilnærmet umulig å tippe svaret ovenfor. Derimot kan en enkelt sjekke at det virker rimelig. Definisjonsmengden til $\arcsin x$ er $x \in [-1, 1]$, og det stemmer for høyresiden og. Om en virkelig vil sjekke at svaret er riktig, kan leser bruke en del av livet sitt på å derivere svaret.

En kan kanskje bli fristet til å bruke delvis integrasjon på uttrykket ovenfor:

$$\int x \arcsin x \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2} x^2 \arcsin x - \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \, \mathrm{d}x \, .$$

Men løser en det siste integralet ender en opp på nøyaktig samme spor som før.[24] Bruker en delvis integrasjon først, må en deretter bruke substitusjon; altså

[23] Noen vil kanskje sette spørsmålstegn til denne fremgangsmåten. Vanligvis ville en derivert $z = \arcsin x$, som gir

$$\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - (\sin z)^2}} = \frac{\mathrm{d}x}{|\cos z|}$$

Ved å gange med $\cos u$ får vi $\mathrm{d}x = \cos z \, \mathrm{d}z$ (siden $\cos z$ på intervalet), akkuratt som før.

[24] Substitusjonen $x \mapsto \sin z$ leder til

$$\int \frac{-x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int -(\sin z)^2 \, \mathrm{d}z = \frac{1}{4} \sin z \cos z - \frac{1}{4} z + \mathcal{C}$$

Hvor en igjen må beregne de inverse funksjonene.

omvendt av før. Dette viser at det langt i fra er en metode å beregne integraler på, ofte kommer det ned til hvilken metode en er mest komfortabel med. Selv om det er svært nyttig å prøve å løse integraler på flere ulike måter. Dette kommer spesielt til å bli nyttig i Del II og III, hvor hvert integral krever en rekke steg for å bli løst.

1.6.1 Oppgaver

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$
2. Bestem integralet $\int \cos x \sin x \,\mathrm{d}x$ ved å bruke to ulike substitusjoner. Bruk dette til å vise enhetsformelen $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.[25]

[25] Dette ≪beviset≫ er selvsagt sirkulært, enhetsformelen trengs for å definere relasjonen mellom $\sin x$ og $\cos x$, som igjen benyttes til å definere de deriverte. Dog gjør ikke det oppgaven mindre kjekk.

1.7 Trigonometriske funksjoner

For en diskusjon om Rieman-integrerbarhet og ulike typer integraler henvises leses til Appendix 1. Her blir og temaet om konvergens av integraler studert gjennomgående.

Proposisjon 1.7.1. *Vi har at* $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ *og*

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan t \tag{1.18}$$

for alle $t \geq 0$*. Videre så er*

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{1/t}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan t \tag{1.19}$$

Bevis. Vi beviser første del av proposisjonen mens siste del overlates til leser, se oppgave. Derivasjonen av $\arctan x$ kan vises ved implisitt derivasjon. La $y = \arctan x$, da er $\tan y = x$. Derivasjon gir

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan y &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(\tan y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 1 \\
\big(1 + (\tan y)^2\big)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 1 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{1+(\tan y)^2} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan x &= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

I andre linje ble kjerneregelen benyttet, altså at $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. I siste linje kan vi benytte oss av at $y = \arctan x$ og $\tan y = x$ for å få det ønskede resultatet. Derivasjonen av $\tan x$ kan for eksempel føres

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\tan x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(\sin x)'\cdot\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2} + \frac{(\cos x)^2}{(\cos x)^2}$$

Som viser at $(\tan x)' = 1 + (\tan x)^2$, siden $\sin x/\cos x = \tan x$ per definisjon. Ved å integrere $(\arctan x)' = 1/(1+x^2)$ fra null til t fås

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_0^t (\arctan x)'\,\mathrm{d}x = \Big[\arctan x\Big]_0^t = \arctan t$$

Som følger fra at siden $\tan 0 = 0$ så er $\arctan 0 = 0$. Alternativt kunne vi integrert uttryket via substitusjonen $x = \tan y$. Da blir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = (\tan y)' \Rightarrow \mathrm{d}x = \big(1 + \tan^2(y)\big)\mathrm{d}y = (1+x^2)\,\mathrm{d}y$$

Altså er $\mathrm{d}x/(1+x^2) = \mathrm{d}y$. Grensene blir $\arctan 0 = 0$ og $\arctan t$. Slik at integralet kan skrives som

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\arctan t} \mathrm{d}y = \arctan t$$

Dette fullfører første del av beviset. Siste delen av beviset overlates til leser, se oppgave 4. □

Korollar 1.7.1.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$
$$2\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

Bevis. Første overgang faller direkte ut av likning (1.19), med $t = 1$. Da har vi

$$\int_{1/1}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Andre overgang følger fra likning (1.18). Verdien av $\arctan 1$ vet vi, siden $\tan \pi/4 = 1$ så er $\arctan 1 = \pi/4$.

□

Oppgaver

1. **a)** Bevis siste halvdel av proposisjon (1.7.1), altså likning (1.19).

   b) Bruk likningen til å vise at

   $$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

   holder for alle $x \in \mathbb{R}$.

   c) Vis videre at integralene under

   $$\int_0^t \frac{\log x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_{1/t}^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,, \tag{1.20}$$

   holder for alle $t > 0$. Bestem følgende integral

   $$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,,$$

   ved å benytte deg av likning (1.20).

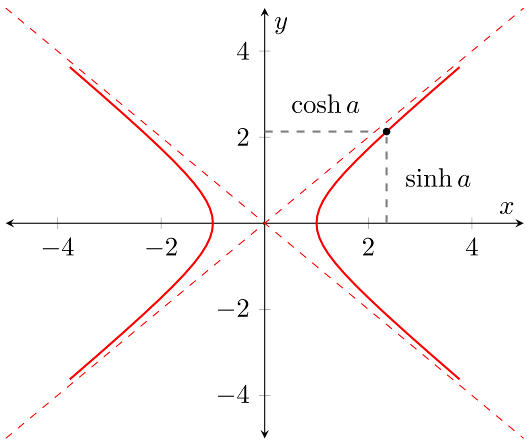
1.8 HYPERBOLSKE FUNKSJONER

Den siste klassen av funksjoner vi skal studere er hyperbolske funksjoner. Som vi skal se er ikke disse funksjonene ny, da de kan uttrykkes ved eksponential funksjonen, mens den deriverte kan uttrykkes via den naturlige logaritmen. Grunnen til at vi studerer funksjonene er at de har mange nyttige egenskaper som gjør de velegnet å bruke i ulike substitusjoner.

Denne boken handler om arealer og integraler, jeg kommer derfor til å definere disse hyperbolske funksjonene som geometriske objekt og dereter utlede den klassiske definisjonen.

Definisjon 1.8.1. La γ være en linje gjennom origo til et punkt P på kurven $x^2 - y^2 = 1$. La $a/2$ være arealet avgrenset av $x^2 - y^2 = 1$, γ og x-aksen. Funksjonene $\cosh a$ og $\sinh a$ er da definert som henholdsvis x og y koordinatene til punktet P.

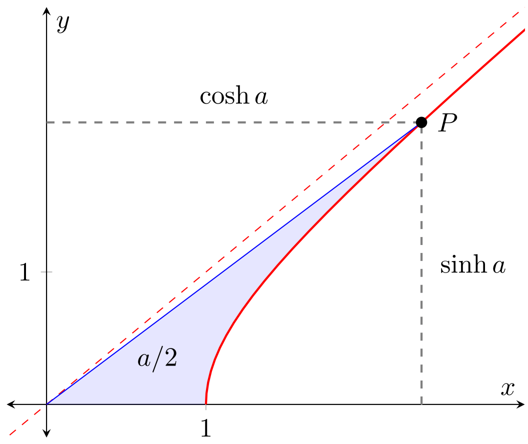
Denne definisjonen virker nok veldig uvant, men blir langt klarere om en betrakter figur (1.3) og spesielt (1.4). Med andre ord så betegner $(\cosh x, \sinh x)$



Figur 1.3: Geometrisk fremstilling av de hyperbolske funksjonene.

er punkt på hyperbelen $x^2 - y^2 = 1$, vist i figur (1.3). En kan altså betrakte $r(a) = (\cosh a, \sinh a)$ som en parametrisering av kurven $x^2 - y^2 = 1$. Men hvorfor akkuratt denne parametriseringen? Forklaringen er at akkuratt denne parametriseringen gir opphavet til to funksjoner med svært mange like egenskaper til $\sin x$ og $\cos x$, som er definert som et punkt på kurven $y^2 + x^2 = 1$.

La oss nå vise at dette er ekvivalent med den mer klassiske definisjonen



Figur 1.4: Geometrisk fremstilling av definisjonen til $\sin a$ og $\cosh a$.

Proposisjon 1.8.1. *Gitt at x er et reellt tall så er*

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{1.21}$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{1.22}$$

Korollar 1.8.1.

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Det neste beviset er ganske teknisk, dersom leser føler det er vanskelig å henge med er det bare å ta proposisjon (1.8.1) som definisjonen og deretter utlede korollar (1.8.1) ved å bruke at $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$. Dette impliserer at $(\cosh x, \sinh x)$ ligger på kurven $x^2 - y^2 = 1$. Det siste som gjenstår blir å bestemme arealet. Dette overlates dog som en oppgave til leser.

Bevis. Beviset kan føres enklere ved å bruke flere geometriske betraktninger [26]. Derimot så kommer jeg til å benytte meg av traktormetoden som er enklere å forstå, men leder til langt mindre estetiske uttrykk.

La oss først bevise likning (1.21) siden (1.22) vises helt tilsvarende. Vi begynner å skrive arealet $a/2$ på en annen måte. For korthetens skyld definerer jeg $p_x = \cosh a$ og $p_y = \sinh a$. På $x^2 - y^2 = 1$ for $x > 0$ så er

$$y = \sqrt{x^2 - 1}$$

Spesielt så har vi at $p_y = \sqrt{p_x^2 - 1}$. Anta nå at $p_x > 0$, arealet kan da skrives

$$\frac{a}{2} = \frac{p_x\sqrt{p_x^2 - 1}}{2} - \int_1^{p_x} \sqrt{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x \tag{1.23}$$

Som blir klarere når en studerer figur (1.4), vi tar altså å lager en trekant med hjørner i $(0,0)$, $(p_x, 0)$ og $P = (p_x, p_y)$. Arealet av denne trekanten er for stort,

[26] Se for eksempel `//math.stackexchange.com/questions/757091/definition-of-hyperbolic-cosine-and-its-relation-`

og vi trekker derfor fra arealet under hyperbelen $x^2 - y^2 = 1$. Ved å bruke delvis integrasjon på $\sqrt{x^2+1}$ med

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{x^2-1} & \mathrm{d}v &= 1\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x & v &= x \end{aligned}$$

Så ender en opp med følgende utrykk

$$\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x^2-1}}$$

Detaljene i den delvise integrasjonen er vist med pinlig nøyaktighet i oppgave (1). Det bestemte integralet kan da skrives som

$$\int_1^{p_x} \sqrt{x^2-1} = \frac{p_x}{2}\sqrt{p_x^2-1} - \int_1^{p_x} \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x^2-1}} \tag{1.24}$$

Da nedre grense forsvinner. Ved å sette likning (1.24) inn i (1.23) får vi endelig

$$\frac{a}{2} = \int_1^{p_x} \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x^2-1}} = \left[\log\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}\,\right]_1^{p_x} = \log\sqrt{p_x+\sqrt{p_x^2-1}}$$

Hvor vi trakk det siste integralet ut av hatten.[27] Ved å løse likningen over får vi

$$\cosh a = p_x = \frac{e^a + e^{-a}}{2}\,,$$

Som var det som skulle vises. De algebraiske krumspringene overlates til leser å vise. Siden vi vet at $p_x^2 - p_y^2 = 1$, så har vi at

$$\sinh a = p_y = \sqrt{\left(\frac{e^a+e^{-a}}{2}\right)^2 - 1} = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$$

Som var den andre kordinaten som skulle vises. Dette fullfører beviset. □

Nå som vi har vist at proposisjon (1.8.1) og korollar (1.8.1) er ekvivalente definisjoner, kan vi gå videre til å vise en rekke egenskaper de hyperbolske funksjonene besitter.[28]

[27]Dette er ikke helt sant, integralet ble hoppet over for å spare plass og tid. Integralet kan beregnes ved å sette $x \mapsto \sec u$, og være forsiktig med fortegn. Alternativt kan en derivere og se hva en får

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}\,\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Som vi skal se senere kan integralet også bestemmes ved å bruke hyperbolske substitusjoner, men jeg holder meg for god for sirkulære bevis intill videre.

[28]Merk at jeg bare vist at korollar (1.8.1) $\Rightarrow$ proposisjon (1.8.1) å vise $\Leftarrow$ overlates jo til leser.

Proposisjon 1.8.2.

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1\,, \tag{1.25}$$

dersom t er et reellt tall.

Dett er en proposisjon i hermetegn. Ut i fra vår definisjon av $\sinh x$ og $\cosh h$ som punkter på kurven $x^2 - y^2 = 1$, så ligger proposisjonen i definisjonen. Tar en proposisjon (1.8.1) som definisjon, kan en derimot føre et søtt lite bevis

Bevis.

$$\begin{aligned}(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 &= \frac{1}{4}(e^t + e^{-t})^2 - \frac{1}{4}(e^t - e^{-t})^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2t} + 2e^t e^{-t} + e^{-2t}) - \frac{1}{4}(e^{2t} - 2e^t e^{-t} + e^{-2t}) \\ &= 1\end{aligned}$$

□

At de trigonometriske og hyperbolske funksjonene deler svært mange identiter og egenskaper følger fra det tette forholdet mellom e^x og $\sin x$ og $\cos x$. Som vi skal se senere har vi

$$\begin{aligned}e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x\end{aligned}$$

Dersom vi tar de magiske formlene ovenfor for gitt, har vi da

$$\begin{aligned}\cosh ix &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x \\ \sinh ix &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = i \sin x\end{aligned}$$

Så vi se klart at det er en sterk sammenheng mellom de trigonometriske og hyperbolske funksjonene. La oss se på noen elementære egenskaper.

Proposisjon 1.8.3.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh x &= \sinh x \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh x &= \cosh x\end{aligned}$$

Bevis. Dette følger direkte fra proposisjon (1.8.1).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

Beviset for $(\sinh x)' = \cosh x$ føres helt tilsvarende. □

Dette gir oss at $\int \cosh x \,\mathrm{d}x = \sinh x \,\mathrm{d}x + C$ og $\int \sinh x \,\mathrm{d}x = \sinh x \,\mathrm{d}x + C$. Men hva om vi skulle ha integrert $\int (\cosh x)^2 \,\mathrm{d}x$? Til dess trengs en håndfull flere identiter

Identiter

Proposisjon 1.8.4 (Osborn's regel)**.** *Enhver trigonemtrisk identitet kan omskrives til en hyperbolsk identitet ved å gjøre følgende:*

1. *Forandre enhver* $\cos x$ *til* $\cosh x$ *og* $\sin x$ *til* $\sinh x$
2. *Dersom et produkt inneholder* $4n - 2$*,* $\sin x$ *ledd skal en forandre fortegn på produktet. Her er* $n \in \mathbb{N}$ *et naturlig tall.*

For eksempel om vi har $\sin y \sin x$ får vi $-\sinh y \sinh x$. Dette gir følgende

Proposisjon 1.8.5.

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \tag{1.26}$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \tag{1.27}$$

$$\tanh(x + y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tan y} \tag{1.28}$$

Som følger fra Osborns regel (1.8.4). Har en for mye fritid kan også vise idententene svært enkelt ved å skrive ut høyresidene og bruke proposisjon (1.8.1). Korollaret ovenfor gir oss følgende identiter, som og følger fra Osborn's regel.

Korollar 1.8.2.

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x \tag{1.29}$$

$$\cosh 2x = (\cosh x)^2 + (\sinh x)^2 \tag{1.30}$$

$$\tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + (\tanh x)^2} \tag{1.31}$$

Bevis. Alle disse følger direkte ved å sette $y = x$ i proposisjon (1.8.5). □

Korollar 1.8.3.

$$(\sinh x)^2 = \frac{\cos 2x - 1}{2}$$

$$(\cosh x)^2 = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

Ved å bruke at $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$ på likning (1.30) får en

$$\cosh 2x = 2(\cosh x)^2 - 1 = 2(\sinh x)^2 + 1$$

Fra dette følger korollaret direkte. Å fylle inn detaljene overlates til leser.

Eksempel 1.8.1.

$$\int (\cosh x)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int 1 + \cosh 2x \,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sinh 2x + C$$

Dette integralet kan selvsagt også integreres ved å skrive ut eksplisitt

$$\int (\cosh x)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int e^{2x} + 2 + e^{-2x} \,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \frac{e^{2x} - e^{2x}}{2} + C$$

Det er enkelt å se at uttrykkene er like ved å bruke at $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$.

1.8.1 Hyperbolske substitusjoner

1.8.2 Inverse hyperbolske funksjoner

1.9 Brøk

Tidligere har du møtt oppgaver som ber deg om å trekke sammen eller forenkle brøk-uttrykk

$$\frac{1-x}{1+x} + \frac{x}{x-1} = \frac{1-x}{1+x}\frac{x-1}{x-1} + \frac{x}{x-1}\frac{x+1}{x+1} = \frac{3x-1}{x^2-1}$$

Hva om vi ønsker å gå andre veien? Altså å *dele* eller *spalte* brøken? Som ett eksempel kan du se om du klarer å vise at

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

uten å trekke sammen høyresiden. [29] Det finnes mange måter å trekke sammen brøker på og for en enda grunndigere gjennomgang kan kalkulus anbefales eller

Det neste resultatet innvolverer merkelig nok noen trigonometriske integraler. Proposisjonen viser hvor nyttig delbrøksoppspalting kan være for også å løse slike integraler. Det siste integralet tas bare med for kompletthetens skyld.

Proposisjon 1.9.1.

$$\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \csc x\,\mathrm{d}x = \log|\csc x - \cot x| + \mathcal{C} \tag{1.32}$$

$$\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \sec x\,\mathrm{d}x = \log|\sec x + \tan x| + \mathcal{C} \tag{1.33}$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \cot x\,\mathrm{d}x = \log|\sin x| + \mathcal{C} \tag{1.34}$$

Bevis. Her beviser jeg bare $\int \sec x\,\mathrm{d}x$ siden likning (1.33) løses helt tilsvarende, og (1.34) løses (selvsagt?) via substitusjon. Dette integralet krever flere triks for å løses, heldigvis skal vi se på enklere metoder senere. Målet er å forvandre integralet ovenfor til en rasjonal funksjon som kan løses via delbrøksoppspalting.

$$\begin{aligned}\int \sec x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\cos x}\frac{\cos x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{1-(\sin x)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\mathrm{d}y}{1-y^2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y} - \frac{1}{y-1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\log\left|\frac{y+1}{y-1}\right|\end{aligned}$$

Hvor substitusjonen $y \mapsto \sin x$, $\mathrm{d}y = \cos x\,\mathrm{d}x$ ble brukt i overgangen til andre linje. Substituerer vi tilbake ser vi at svaret ikke likner helt på det vi ønsket å få, for å se at svarene virkelig er like, trengs mer svart algebramagi.

$$\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}\frac{\sin x + 1}{\sin x + 1} = \frac{(\sin x + 1)^2}{(\sin x)^2 - 1} = \frac{(\sin x + 1)^2}{-(\cos x)^2}$$

Bruker en dette kan integralet skrives

$$\int \sec x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log\left|\frac{(\sin x + 1)^2}{-(\cos x)^2}\right| = \log\left|\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x}\right| = \log|\tan x + \sec x|\,,$$

som ønsket. Minustegnet forsvant siden vi tar absoluttverdien av uttrykket. □

[29] Som liten førsteklasse tass på gymnaset var jeg dypt interessert i temaet og holdt på i flere uker med å dele brøker og lage regler. Det var først det påfølgende året at skolen begynte med teorien.

Bestemte integral kan være lunefulle

Ett gjennomgående tema i dette heftet er at integrasjon er en kunst og i del II skal vi se at bestemte integral kan bli beregnet på forunderlige måter. Oppfordringen før des blir å prøve ut flere metoder for å bestemme ett integral. Selv om du ser en løsning som du vet vil virke, ta en pause. Tenk. Er det noen andre metoder som kan virke, er de lettere, mer elegant enn min? Ett oppkonstruert eksempel er følgende

$$I = \int_1^2 \frac{4x}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x$$

Flere vil etter å ha lest forrigående seksjon begynne med delbrøksoppspalting. Flott! Men hva om teller hadde vært $x^2 + 1$, hva kunne en gjort da? Svaret er jo substitusjon, og detaljene skal leser få kose seg med alene. Ett litt tøffere eksempel – som vi kommer tilbake til senere – er følgende

Eksempel 1.9.1. Bestem verdien av følgende integral

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

En ser ikke noen umidelbar smart substitusjon så en naturlig vei er delbrøksoppspalting. Det finnes mange måter, men for eksempel

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1 + x^2 - x^2}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

Integrasjonen blir nå enklere. For å bestemme integralet av siste del, bruker vi substitusjon

$$I = \int \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \log x - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \log x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + \mathcal{C}$$

Dette uttrykket er rett. Men vi velgere å gjøre noen små algebraiske omskrivninger ved hjelp av logaritmereglene $\log a + \log b = \log ab$. Grunnen til dette vil snart bli klar[30]

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) + \mathcal{C}$$

Hvor det blant annet ble brukt at $\log x = \frac{1}{2}\log x^2$ og $\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$. Ved å sette inn grensene våre får vi endelig

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left[\log\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\right]_1^\infty \\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\log\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{1+1}\right)\end{aligned}$$

[30]Prøv å fortsette å beregne integralene uten disse algebraiske krumspringene. Hva skjer?

Siden $1/x \to 0$ når $x \to \infty$ så vil $1/(1+x^2) \to 0$ når $x \to \infty$. Altså går første del mot $\log 1 = 0$.

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log(1-0) - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log 2$$

og vi er ferdige. I siste overgang brukte vi at $\log(1/2) = \log 1 - \log 2 = -\log 2$. Finnes det en enklere metode? Ja, heldigvis. Men den krever et bedre falkeøye for å se. Vi begynner i stedet med den noe uvante substitusjonen $y \mapsto 1/x$. Dett er det samme som at $x \mapsto 1/y$ slik at $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}y/y^2$. Når $x \to \infty$ så vil $y \to 0$ siden $y = 1/x$. Og tilsvarende $x > 1$ gir $y = 1/x = 1$. Dermed så fås

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = -\int_1^0 \frac{1}{1/y(1+(1/y)^2)}\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2y}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$$

Problemet løses så ved å bruke en åpenbar substitusjon. Tanken er at selv om det ikke ser ut som en metode vil føre frem, kan det være lurt å gi den en sjangse like vell. Substitusjonen $x \mapsto 1/y$ kalles gjerne den inverse substitusjonen, eller en bijectiv substitusjon. Den er mye brukt på bestemte integral med grenser 1 og ∞.

1.10 Anvedelser

I denne boken er det ikke lagt et stort fokus på praktiske anvendelser, og det skal heller ikke denne seksjonen handle om. Leser kan derfor slappe av og nyte noen av de teoretiske anvendelsene, som også leder til spennende integrasjonsoppgaver.

1.10.1 Buelengde

Integrasjon handler hele tiden om arealet under en funksjon, hva om vi istedet var ute etter *lengden* til funksjonsgrafen? Altså hvor langt er det fra $()$ til $()$ dersom vi bare har lov til å flytte oss langs grafen?

Før jeg gir deg svaret må vi ta noen definisjoner. Vi har pratet mye om funksjoner $y = f(x)$ i denne boken, men en litt mer generell fremstilling er kurver. Dersom vi klarer å gi en fornuftig betydning til lengden av en kurve, vil det være enkelt å beskrive lengden til en funksjonsgraf.

Definisjon 1.10.1. En kurve i $\mathbb{R}^n$ er en funksjon $r\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$$r(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{n-1}(t), x_n(t))$$

Hvor x_1, x_2 er funksjoner avhengig av en underliggende variabel t. Altså blir hver koordinat beskrevet av sin egen funksjon. Vi definerer

$$|r(t)| = \sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + \cdots + x_{n-1}(t)^2 + x_n(t)^2}$$

som normen, eller lengden til kurven.

Definisjon 1.10.2. Hastigheten til en kurve $r\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ er definert som forandringen i posisjonen

$$v(t) = \big(x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_{n-1}'(t), x_n'(t)\big)$$

Farten til kurven r defineres som

$$|v(t)| = \sqrt{[x_1'(t)]^2 + [x_2'(t)]^2 + \cdots + [x_{n-1}'(t)]^2 + [x_n'(t)]^2}$$

altså lengden til v. Hvor x_1, x_2 er funksjoner avhengig av en underliggende variabel t. Altså blir hver koordinat beskrevet av sin egen funksjon. Vi definerer

$$|r(t)| = \sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + \cdots + x_{n-1}(t)^2 + x_n(t)^2}$$

som normen, eller lengden til kurven.

Vi ønsker å definere lengden L av denne kurven (gjerne kalt buelengde eller bogelengde på norsk). Den vil være definert som integralet av farten til kurven. Dette betyr med andre ord at r må være deriverbar og den deriverte må være kontinuerlig.

Proposisjon 1.10.1 (Lengden til en kurve)**.** *Anta at* $r\colon [t] \to \mathbb{R}^n$ *er en deriverbar funksjon, med kontinuerlig derivert (*$r \in C^1[a,b]$*). Da er lengden til* r *gitt ved*

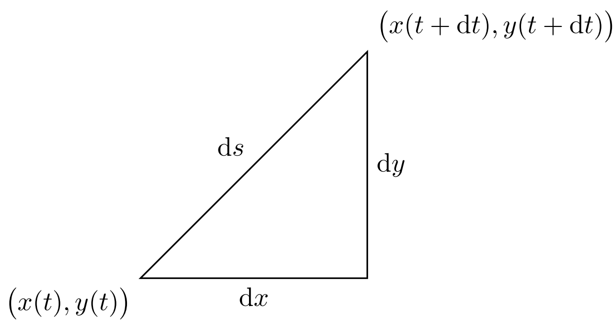
$$L = \int_a^b |r'(t)| \,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{[x_1'(t)]^2 + [x_2'(t)]^2 + \cdots + [x_n'(t)]^2} \,\mathrm{d}t \,. \tag{1.35}$$

Korollar 1.10.1. *Dersom* $r\colon [t] \to \mathbb{R}^2$*, (med andre ord* $r(t) = \big(x(t), y(t)\big)$*) igjen med kontinuerlig derivert. Så blir lengden til* r *gitt ved*

$$L = \int_a^b |r'(t)| \,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \,\mathrm{d}t \,.$$

Et skikkelig bevis for dette tar en del plass, og spares derfor til slutten av seksjonen. Vi kan derimot ta et ad-hoc bevis.

Bevis. Argumentasjonen kommer til å være basert på infinitesmaler.[31] Anta at tidsintervalet $[a,b]$er delt inn i svært korte (infinitesmalt korte) interval $[t, t+\mathrm{d}t]$. Hvor $\mathrm{d}t$ kalles for differensialformen til tiden t. I løpet av dette uendelig korte intervallet, beveger objektet seg fra posisjonen $r(t)$ til $r(t+\mathrm{d}t)$. La oss nå for anta for leserens mentale helse at vi befinner oss i $\mathbb{R}^2$, slik at $r(t) = \big(x_1(t), x_2(t)\big) = \big(x(t), y(t)\big)$. Da forandrer x-koordinaten seg fra $x(t)$ til $x(t+\mathrm{d}t)$, en differanse vi kan betegne som $\mathrm{d}x = x(t+\mathrm{d}t) - x(t)$. Tilsvarende for y-koordinaten har vi $\mathrm{d}y = y(t+\mathrm{d}t) - y(t)$. Disse er to sider av en uendelig liten trekant med ben $\mathrm{d}x$ og $\mathrm{d}y$. Denne trekanten kalles *Leibniz differensial trekant* og er vist i figur (1.5).



Figur 1.5: Leibniz' differensial trekant

Merk at dersom en zoomer inn nok på en kontineurlig deriverbar så vil kurven tilslutt se ut som en rett linje. Det er grunnen til at vi kan bruke trekanten ovenfor, siden vi zoomer uendelig langt inn. La $\mathrm{d}s$ være hypotenusen til trekanten, da er

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$$

fra pytagoras. Med andre ord er $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$, da en lengde nødvendigvis må være positiv. Objektet forlytter seg altså en lengde $\mathrm{d}x$ løpet av tiden $[t, t+\mathrm{d}t]$. Dersom vi summerer opp alle disse uendelig små avstandene burde vi få den totale lengden reist langs kurven. Med andre ord

$$L = \int_a^b \mathrm{d}s = \int_a^b \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \,\mathrm{d}t$$

[31] Infinitesmale størrelser er som nevnt tidligere krevende å definere rigorøst. Kort sagt betegner infinitesmaler uendelig små avstander, om en klarer å se for seg noe slikt.

Vi kan uttrykke $\mathrm{d}s/\,\mathrm{d}t$ på en annen måte som følger

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}^2 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}^2} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = |r'|$$

Med andre ord så kan lengden av kurven skrives som

$$L = \int_a^b |r'(t)|\,\mathrm{d}t$$

som var det vi ønsket å vise. Merk at beviset kan uten tap generaliseres til alle dimensjoner, ikke bare $\mathbb{R}^2$. □

Korollar 1.10.2 (Lengden til en graf)**.** *Anta at $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ er en deriverbar funksjon, med kontinuerlig derivert ($f \in C^1[a,b]$). Da er lengden til grafen til f*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Bevis. Når vi har vist proposisjonen ovenfor følger dette beviset direkte. En funksjon $y = f(x)$, kan skrives som følgende parameterfremstilling

$$x_1(t) = f(t)\,, \quad x_2(t) = t$$

Hvor $r(t) = \big(x_1(t), x_2(t)\big)$. Fra proposisjon (1.10.1) blir dermed buelengden

$$L = \int_a^b |r'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{(t')^2 + [f'(t)]^2}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

som var det vi ønsket å vise. □

Eksempel 1.10.1. Bestem lengden til $x = \dfrac{2}{3}(y-1)^{3/2}$ mellom $1 \leq y \leq 4$.

Det enkleste her er å se på funksjonen $x(y)$, den deriverte blir da

$$x'(y) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}(y-1)^{3/2-1} = \sqrt{y-1}$$

Rotuttrykket i buelengde formelen vil da være

$$\sqrt{1 + x'(y)^2} = \sqrt{1 + (\sqrt{y-1}\,)^2} = \sqrt{y} \tag{1.36}$$

Ved å sette inn i formelen (hvor $f = x$) så blir buelengden

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + x'(y)^2}\,\mathrm{d}y = \int_1^4 \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{2}{3}y^{3/2}\right]_1^4 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$$

som var akkuratt det som skulle bestemmes.

Eksempel 1.10.2. Bestem igjen buelengden til funksjonen fra eksempel (1.10.1), med $y = f(x)$.

Vi uttrykker y som en funksjon av x, og bestemmer dens deriverte

$$y = \left(\frac{3x}{2}\right)^{2/3} + 1y'(x) = \left(\frac{3x}{2}\right)^{-1/3}$$

Rotuttrykket i buelengde formelen vil da være

$$\sqrt{1+y'(x)} = \sqrt{1+\frac{1}{(3x/2)^{2/3}}} = \sqrt{\frac{1+(3x/2)^{2/3}}{(3x/2)^{2/3}}} = \frac{\sqrt{1+(3x/2)^{2/3}}}{(3x/2)^{1/3}}$$

Men dette ser ikke spesielt pent ut sammenliknet med likning (1.36). Nå før vi skriver opp integralet må vi også bestemme grensene. Når vi integrerer langs $\mathrm{d}x$ holder det ikke å vite at $1 \leq y \leq 4$. Derimot kan vi sette inn uttrykket vårt for x og få

$$\leq 1\left(\frac{3x}{2}\right)^{2/3} + 1 \leq 40 \leq x \leq \frac{2}{3}(3)^{3/2}$$

Ikke spesielt pene grenser, men det er det ikke så mye å gjøre med. Altså er

$$L = \int_0^{2/33^{2/3}} \frac{\sqrt{1+(3x/2)^{2/3}}}{(3x/2)^{1/3}}\,\mathrm{d}x$$

Som er et ganske udelikat integral. Det kan beregnes ved å bruke følgende substitusjon

$$u = \left(\frac{3x}{2}\right)^{2/3} + 1\,\mathrm{d}u = \left(\frac{3x}{2}\right)^{-1/3}\mathrm{d}x$$

Dersom $x = 0$ så er $u = 1$, og $x = 2/33^{2/3}$ gir $u = 4$. Med andre ord

$$L = \int_0^{2/33^{2/3}} \frac{\sqrt{1+(3x/2)^{2/3}}}{(3x/2)^{1/3}}\,\mathrm{d}x = \int_1^4 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{14}{3}$$

Så vi får akkuratt det samme svaret som i forrige eksempel. Men det burde ikke overaske leser, siden vi tross alt beregnet buelengden til samme funksjon over samme interval.

Så moralen fra disse to eksemplene er at en kan velge om en vil bruke $y = f(x)$ eller $x = f(y)$. Noen ganger vil den ene metoden være betraktelig enklere å bruke.

La oss nå bevise proposisjon (1.10.1) uten bruk av infinitesmale størrelser.

Bevis. La oss anta at r er en deriverbar funksjon med kontinuerlig derivert. Intervalet $[a, b]$ kan deles inn i k deler. Eg vi kan lage en partisjon hvor

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = b\,.$$

Lengden av kurven blir da godt beskrevet av (se på figur faen)

$$|r(t_1) - r(t_0)| + \cdots |r(t_k) - r(t_{k-1}| = \sum_{i=0}^{k} |r(t_i) - r(t_{i-1})|\,,$$

dersom avstanden $|t_i - t_{i-1}|$ er liten. Hvordan kan dette skrives med koordinater? La oss igjen for leserens helse anta at r ligger i $\mathbb{R}^2$.[32] Med andre ord

[32] Igjen en hvit løgn. Jeg gjør dette fordi margen er for liten til å ta beviset i dens fulle generalitet. Om rigorøsitetens ånd forbarmer seg over leseren oppfordres det til å føre beviset på et A3 ark.

$r(t) = \big(x_1(t), x_2(t)\big)$. Hvert ledd i summen blir

$$\begin{aligned}
|r(t_i) - r(t_{i-1})| &= \sqrt{[x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}]^2 + [x_2(t_i) - x_2(t_{i-1}]^2} \\
&= \sqrt{\left[\frac{x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\right]^2 + \left[\frac{x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\right]^2}\,(t_i - t_{i-1})\,.
\end{aligned}$$

Lengden blir da ca summen av disse

$$L \approx \sum_{i=0}^{k} \sqrt{\left[\frac{x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\right]^2 + \left[\frac{x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\right]^2}\,(t_i - t_{i-1})$$

Sett inn referanse

Ifølge middelverdisetningen finnes det et tall $t_{i-1} \leq c_i \leq t_i$ slik at

$$\frac{x_j(t_i) - x_j(t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} = \left.\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}\right|_{t=c_i}\,,$$

for $j = 1, 2$.[33] Men denne summen kjenner vi igjen – den er en Riemann-sum for integralet $\int_a^b \sqrt{[x_1'(t)]^2 + [x_2'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$. Dette betyr at når partisjonen blir finere og finere (maskevidden går mot null), vil summen nærme seg integralet. Fra dette følger det at når $k \to \infty$ så er

$$L = \int_a^b \sqrt{[x_1'(t)]^2 + [x_2'(t)]^2}\,\mathrm{d}t\,,$$

akkuratt som vi skulle vise (tenk over hva som skjer i den siste overgangen). □

Oppgaver

1. Beregn lengden på grafen til $y = \log\sec x$ fra $x = 0$ til $x = \pi/4$. **Hint:** Integralet $\int \sec x\,\mathrm{d}x$ kan løses via delbrøksoppspalting, se side (37).

2. La f være gitt som $f(x) = \cosh x$ for $x \in [a, b]$. Vis at arealet og buelengden til funksjonen f er like.

3. (**UIO**) I denne oppgaven skal vi se på kurver beskrevet med polarkoordinater. Figur 5 viser grunnideèn: Starter vi i origo og går i retningen som danner en vinkel θ, men den positive x-aksen, kommer vi til kurven etter å ha gått en avstand $r = f(\theta)$, der $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon.

   a) Forklar at

   $$\mathbf{r}(\theta) = \big(f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta\big)\,, \qquad \theta \in [a, b]$$

   er en parameterfremstilling av polar-kurven.

   b) Anta at f er deriverbar og finn uttrykk for $v(\theta)$ og $|v(\theta)|$. Vis at buelengden i polarkoordinater kan skrives som

   $$L = \int_a^b \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta\,.$$

   I resten av oppgaven ser vi på kurven $\mathcal{C}$ der $f(\theta) = 1 + \cos\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$

[33] Leser er kanskje mer vant til notasjonen $x_j'(c_i)$, men når en først har begynt med Leibniz' notasjon, blir det pussig å skifte halveis.

c) Regn ut $|v(\theta)|$ og lag en figur av $r(\theta)$ for $\theta \in [0, 2\pi]$.

d) Vis at

$$L = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos\theta}}\,\mathrm{d}\theta\,,$$

beskriver lengden til kurven $\mathcal{C}$.

e) beregn L.

1.11 Oppgavesamling I

1.11.1 Integral

1.11.2 Integral

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+3x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int \sin(x)\,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int \frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$

5. $\displaystyle\int_{-3}^3 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$

6. $\displaystyle\int \sqrt{4-x}\,\mathrm{d}x$

7. $\displaystyle\int_0^{1/2} (2x-1)^{50}\,\mathrm{d}x$

8. $\displaystyle\int \sqrt[n]{x}\,\mathrm{d}x$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$

10. $\displaystyle\int \sin x\cos x\,\mathrm{d}x$

11. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e-1}} \ln\left(1+x^2\right)x\,\mathrm{d}x$

12. $\displaystyle\int \frac{x}{e^x}\,\mathrm{d}x$

13. $\displaystyle\int \sin x\cos x\,\mathrm{d}x$

14. $\displaystyle\int_1^{e^n} \ln x\,\mathrm{d}x \;\; n\in\mathbb{R}$

15. $\displaystyle\int x\cdot a^x\,\mathrm{d}x$

16. $\displaystyle\int \log_{10}(x)\,\mathrm{d}x$

17. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin(x)^2\,\mathrm{d}x$

18. $\displaystyle\int_1^e\int \frac{\pi}{-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x$

19. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} x\ln(x+1)\,\mathrm{d}x$

20. $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

21. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

22. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

23. $\displaystyle\int_\pi^\pi \frac{\sin(1/x)e^{x^2}}{\sqrt{x!}}\,\mathrm{d}x$

24. $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2x+7}}\,\mathrm{d}x$

25. $\displaystyle\int \frac{1+e^x}{\sqrt{e^x+x}}\,\mathrm{d}x$

26. $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$

27. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+2}{x-1}\,\mathrm{d}x$

29. $\displaystyle\int_0^1 e^{-y^2}\,\mathrm{d}x$

30. $\displaystyle\int_{-3/4}^4 \frac{x+1}{(x+2)^4}\,\mathrm{d}x$

31. $\displaystyle\int x^3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

32. $\displaystyle\int \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$

33. $\displaystyle\int \sin(2x)e^{\sin(x)^2}\,\mathrm{d}x$

34. $\displaystyle\int x\ln\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

35. $\displaystyle\int 2^x e^x\,\mathrm{d}x$

36. $\displaystyle\int \binom{x+1}{x}\,\mathrm{d}x$

37. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x$

38. $\displaystyle\int_1^{\log_e(a)^2} e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

39. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

40. $\displaystyle\int \frac{x}{1-x^2+\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

41. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e-1}} \ln\left(1+x^2\right)x\,\mathrm{d}x$

42. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+4x+8}\,\mathrm{d}x$

43. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)^n}\,\mathrm{d}x$

44. $\displaystyle\int_0^\infty x^3e^{-x}\,\mathrm{d}x$

45. $\displaystyle\int e^{x+e^x}\,\mathrm{d}x$

46. $\displaystyle\int \ln(x)^3\,\mathrm{d}x$

47. $\displaystyle\int_n^m (m-x)(x-n)\,\mathrm{d}x$

48. $\displaystyle\int \frac{\pi}{\sqrt{e^2-16}}\,\mathrm{d}x$

49. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\,\mathrm{d}x$

50. $\displaystyle\int \frac{\sin(2x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

51. $\displaystyle\int_0^{\pi/3n} \tan(nx)\,\mathrm{d}x$

52. $\displaystyle\int \frac{4a}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x$

53. $\displaystyle\int e^{\sin(x)^2}e^{\cos(x)^2}\,\mathrm{d}x$

54. $\displaystyle\int \frac{e^{\ln(x^2+1)}}{x+1}\,\mathrm{d}x$

55. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{\tan x}\,\mathrm{d}x$

56. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x(x^2+3)}\,\mathrm{d}x$

57. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+x}\,\mathrm{d}x$

58. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x - x}\,\mathrm{d}x$

59. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x^2\sin(x)}{\pi-2}\,\mathrm{d}x$

60. $\displaystyle\int \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

61. $\displaystyle\int 2^{\ln x}\,\mathrm{d}x$

62. $\displaystyle\int_2^5 \frac{2-4}{x^4-x^2}\,\mathrm{d}x$

63. $\displaystyle\int \cos(\sin(x))\cos x\,\mathrm{d}x$

64. $\displaystyle\int (x+x^2)\,e^{3(x+\ln 3)}\,\mathrm{d}x$

65. $\displaystyle\int_0^1 x^n\ln x\,\mathrm{d}x$

66. $\displaystyle\int \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}\,\mathrm{d}x$

67. $\displaystyle\int_0^1 x^n\ln x\,\mathrm{d}x$

68. $\displaystyle\int \frac{\log_5(x)}{\log_{25}(x)}\,\mathrm{d}x$

69. $\displaystyle\int \frac{x^2-x}{x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$

70. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/2}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$

71. $\displaystyle\int \ln\left(x^{\frac{1}{2}\ln(x^2)}\right)\mathrm{d}x$

72. $\displaystyle\int \frac{x^5-x+1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

1.11.3 Oppgaver

1. Vis at integralet

$$K = \int_a^{a+2\pi} \sin x + 1\,\mathrm{d}x\,,$$

er konstant dersom a er et reellt tall. Kan resultatet forklares geometrisk?

2. La D betgne området avgrenset av linjene $y = \sin x$, $x = \sin y$ og $y = 2\pi + x$. Bestem arealet av D Hint: En god tegning gjør ofte susen

3. Vi har følgende integral

$$I = \int_1^{e^a} \frac{1}{x\log x + ax}\,\mathrm{d}x\,,$$

hvor a er et reellt tall. Drøft integralet for tilfellene $a < 0$, $a = 0$ og $a > 0$,

4. Bestem følgende integral

$$\int \left(1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)^2 \mathrm{d}x$$

Hint: Integralet kan løses både med og uten å gange ut parentesen.

5. Vis at

$$\int_{\psi}^{\varphi} 2^2\left(x^2-1\right)e^{2x}\,\mathrm{d}x = e^{2\varphi}-e^{2\psi}$$

hvor ψ og φ henholdsvis er minste og største løsning av $x(x-1)=1$.

6. Finn ett reelt tall a som tilfredstiller $\int_0^a \frac{e^x+e^{-2}}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{12}{5}$

7. For $x>0$, la $f(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{\log t}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Finn funksjonen $f(x)+f(1/x)$ og vis at $f(e)+f(1/e)=1/2$.

8. Bestem følgende integral $\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}\frac{r^2}{\left(1+r^2\right)^2}\,\mathrm{d}r$

9.

10. La $f(x)$ være en funksjon slik at
1) $f(x)$ er integrerbar for $x\in[0,3]$
2) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$
3) $f(x)=\frac{1}{2}f(x)$ for alle $x\in[0,3]$. Bestem integralet

$$\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$$

11. Det oppgis at

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{a} \text{ og } \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+a^2\right)^2}=\frac{\pi}{2a^3}$$

hvor $a>0$ er en positiv konstant. Bruk dette til å bestemme

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Integralene ovenfor kan fritt benyttes, og det oppgis og at integralet ovenfor konvergerer.

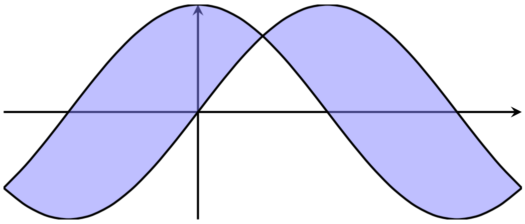
12. Vis at integralet

$$\int_0^{\infty}\frac{f(x)}{x}$$

er invariant (er det samme) om f byttes ut med $f(cx)$, hvor c er en konstant.

13. Ved å se på integralet mellom $f(x)=\sin x$ og $g(x)=\cos x$ kan vi få et området som likner på en bart (se 345). Bestem arealet av barten.

14. Målet med denne oppgaven er å bevise hva som er størst av $\log 2$ og $1/\sqrt{2}$. Og de er nærmere enn hva enn skulle tro ved første øyenkast.



a) Vis at ulikheten

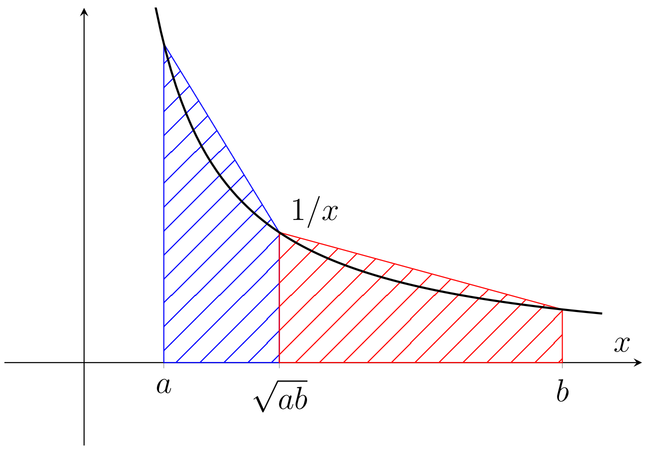
$$\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{\left(t+1+\sqrt{2}\right)^2} > \frac{1}{1+t}$$

holder for alle $0 < t < 1$.

b) Den geometriske aritmetriske ulikheten er definert som

$$\frac{x-y}{\log x - \log y} > \sqrt{xy}$$

der $x > 0$. Bevis ulikheten, Her kan det være fordelaktig å studere figur (1.6).



Figur 1.6: Den aritmetriske geometriske ulikheten

c) Bestem hva som er størst av $\log 2$ og $1/\sqrt{2}$. En står fritt til å benytte tidligere oppgaver.

Denne siden er med hensikt blank, for å gi leser en pustepause og for å la forfatter slåss mot dinosaurer.

II

2.1 Introduksjon II

I denne delen vil vi hovedsaklig dykke dypere ned i tidligere besøkte temaer, men også lære noen nye eksotiske teknikker for å beregne spesielt hårete integral. Det som forventes av leseren på dette tidspunktet er en grundig forståelse for de elementære integrasjonsteknikkene som ble gjennomgått i del I. For å kunne løse mange av integralene som kommer videre *må* disse elementære teknikkene sitte helt ut til fingerspissene.

Hvor i forrige del fleste integralene kunne bli løst via et steg – En smart substitusjon, en delbrøkoppspalting, en frekk faktorisering osv – vil vi se fremmover at integralene krever flere steg for å bli løst. Mange av løsningene vil virke merkelige og noen vil virke som de er tatt rett ut av det blå. Men husk at bak hvert skritt som fører mot en løsning ligger et stort maskineri.

Ofte er grunnen til at vi bruker en så merkelig substitusjon eller delvis integrasjon enkel. Det fungerer. Fremmgangsmåten blir en blanding av å ha sett liknende problem før, og prøve en rekke velkjente triks og knep. Og det er også målet med denne delen; og lære bort alle disse merkelige substitusjonene og metodene for å beregne integral, slik at du selv kan anvende dem. For etter å ha sett det samme smarte trikset nok ganger, blir det ikke lengre et triks men en nyttig teknikk du selv kan bruke.

Et nøkkelkonsept i denne delen er å se studere når en kan gjøre følgende omskrivning

$$\int_S f(x)\,\mathrm{d}x = \int_D g(x)\,\mathrm{d}x - a\int_S f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Metoden for å komme fra venstre side til høyre side av likningen er ikke spesielt viktig. Det kan være en lur substitusjon, en brutal delvis integrasjon eller noe helt annet. Poenget er at likningen ovenfor kan løses med hensyn på integralet over S[1], en beregner altså integralet *indirekte*. I mange tilfeller vil dette og være eneste metoden som fungerer da det eksisterer funksjoner som ikke har elementære antideriverte[2]. I denne delen blir også andre måter å løse integraler inderekte på studert, alt fra å anvende symmetri, til smart bruk av delvis integrasjon.

[1]Så fremt $a \neq -1$, da ender en opp med at integralet over D er null.

[2]En sier gjerne at en funksjon har en *elementær* antiderivert dersom $\int f\,\mathrm{d}x$ kan uttrykkes ved elementære funksjoner. Selv om en funksjon ikke har en elementær antiderivert kan likevel $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ eksistere og være elementær. Dette er noe som skaper hodebry for mange matematikkere.

2.2 Analysens fundamentalteorem

Denne seksjonen starter mer teknisk enn den forrige, men bør likevell leses. Selv om den ikke introduserer eksotiske integrasjonsteknikker. I stedet går vi til røttene og viser at denne grenen har et solid fundament.

Newton og Leibniz' grunnleggende oppdagelse var at integrasjon og integrasjon var omvendte regnearter. Istedenfor å løse integrasjonsoppgaver gjennom kompliserte og arbeidskrevende summasjonser (som du forhåpentligvis har gjort gjennom oppgavene) kan vi heller finne en anti-derivert. I denne seksjonen skal jeg forklare det teoretiske grunnlaget for denne metoden.

Min oppgave er å finslipe dette noe grovkornede argumentet fra avsnitt (1.3) til det blir en presis matematisk utledning. Mange er sikkert overbevist allerede og kan ikke forstå vitsen med ytterligere utslipninger, men fra et fra et logisk synspunkt er det flere mangler ved argumentet ovenfor. Vi har for eksempel snakket om arealet under grafen uten å være sikker på at det eksisterer (det kunne tenkes at f ikke var integrerbar).. Når det gjelder arealbegrepet, er det en vanskelighet til bygget inn i argumentasjonen vår; vi har nemlig antatt at arealet under grafen x og $x + \Delta x$ er $A(x + \Delta x) - A(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(x)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, mens det strengt talt er definert som $\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t$. Disse to uttrykkene *burde* være selvsagt være like, men poenget er at vikke har vist at de *er* det.

Vi kan slå to fluer i en smekk- Det viser seg at argumentene som trengs for å vise at enhver kontinuerlig funksjon er integrerbar, også kan brukes til å vise at integrasjon av kontinuerlige funksjoner er det samme som antiderivajson. Nøkkelen viser seg å være følgende resultat, som er en mer presis formulering av ønske om at $\int_a^{x+\Delta x} f(x)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ og $\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t$ skal være det samme.

Proposisjon 2.2.1. *Anta $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ er begrenset , og at $a < c < b$. Da er*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.1}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{2.2}$$

De to likningene vises på nøyaktig samme måte, derfor skriver jeg bare ned argumentet for den første delen. La oss legge en slagplan før vi begynner. Vi skal vise at for enhver $\varepsilon > 0$, så er

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon$$

og

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon\,.$$

Da dette gjelder for enhver ε, må $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ (hvorfor?). Kan virke noe merkelig at vi smugler inn en epsilon for å bevise en likhet, men det gir oss det ekstra manøvreringsrommet vi trenger.

Bevis. Gitt en $\varepsilon > 0$ kan vi finne partisjoner $\Pi_1 = \{a, x_1, x_2, \ldots, c\}$ og $\Pi_2 = \{c, y_1, y_2, \ldots, b\}$ av henholdsvis $[a, c]$ og $[c, b]$ slik at

$$\text{Ø}(\Pi_1) < \overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}$$

og

$$N(\Pi_2) < \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}$$

Slår vi sammen Π_1 og Π_2, vår vi en partisjon $\Pi = \{a.x_1, x_2, \ldots, c, y_1, y_2, \ldots, b\}$ av hele intervalet $[a, b]$. Vi ser at $\text{Ø}(\Pi) = \text{Ø}(\Pi_1) + \text{Ø}(\Pi_2)$, så

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \text{Ø}(\Pi) = \text{Ø}(\Pi_1) + \text{Ø}(\Pi_2) \leq \overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon$$

Siden vi kan få til dette for en hvilken som helst positiv ε, må

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Nå må vi vise den omvendte ulikheten, dette gjør vi ved å reverse argumentet ovenfor. Gitt en ε, kan vi finne en partisjon $\Pi = \{a, x_1, x_2, \ldots, b\}$ av $[a, b]$ slik at

$$\text{Ø}(\Pi) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon$$

La x_i være det punktet i partisjonen Π som ligger rett til venstre for c; det vil si $x_i \leq c \leq x_{i+1}$. Da er $\Pi = \{a, x_1, x_2, \ldots, x_i, c\}$ en partisjon av $[a, c]$ og $\Pi_2 = \{c, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, b\}$ en partisjon av $[c, b]$. Vi ser at

$$\text{Ø}(\Pi_1) + \text{Ø}(\Pi_2) \leq \text{Ø}(\Pi)$$

(lag en figur). Dermed så er

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \text{Ø}(\Pi_1) + \text{Ø}(\Pi_2) \leq \text{Ø}(\Pi) \leq \overline{\int_a^b} \mathrm{d}x + \varepsilon$$

og siden dette gjeler for alle $\varepsilon > 0$, må

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Dermed har vi ulikheter begge veier og vi kan konkludere med at

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

som var det som skulle vises. □

Bemerkning: Hittil har vi bare definert integralene $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ og $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ når $a < b$, men ofte er det nyttig å ha symbolene definert når $a = b$ eller $a > b$ også.

Definisjon 2.2.1. Dersom $a = b$ definerer vi

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{2.3}$$

Dersom $a > b$ definerer vi

$$\overline{\int_b^a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\overline{\int_a^b}\,\mathrm{d}x \quad \text{og} \quad \underline{\int_b^a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\underline{\int_a^b}\,\mathrm{d}x$$

Første likning (2.3) er en naturlig definisjon fordi

$$\lim_{c\to a^+} \overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to a^+} \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Fordelen med denne definisjonen er at formlene i proposisjon (2.2.1) gjelder uansett størrelseforholdet mellom a, b og c – vi behøver altså ikke å anta at $a < c < b$. Som et en avstikker viser jeg at likning (2.1) holder når $c < a < b$. Hvis $c < b < b$, sier proposisjonen at

$$\overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_c^a} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Per definisjon er $\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x = -\overline{\int_f^{(}} x)\,\mathrm{d}x$, innsetning i likningen ovenfor gir

$$\overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x = -\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Legger vi til $\int acf(x)\,\mathrm{d}x$ på begge sider av likheten, vår vi

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Heretter vil vi bruke likning (2.1) og (2.2) fra (2.2.1) uten å tenke på rekkefølgen av a, b og c. La oss nå innføre begrepet *antiderivert*

Definisjon 2.2.2. Funksjonen F kalles en antiderivert til f på intervalet $[a, b]$ dersom $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in (a, b)$. Vi krever og at F er kontinuerlig i endepunktene a,b.

Vi trenger så et lemma som sier at to antideriverte høyst aviker med en konstant.

Lemma 2.2.1. *Anta F og G begge er antideriverte til f på intervallet $[a, b]$. Da eksisterer det en konstant $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$ slik at*

$$F(x) = G(x) + \mathcal{C}$$

for alle $x \in [a, b]$.

Bevis. Definer $H(x) = F(x) - G(x)$. For alle $x \in (a,b)$ så er

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

og siden den deriverte er null, betyr dette at H er konstant. Det vil si at $C = H(x) = F(x) - G(x)$. Men dermed så er $F(x) = G(x) + C$ $\square$

Vi er nå klare til å bevise det viktigste teoremet i denne delen – og sannsynligvis det viktigste i hele boken.

Teorem 2.2.1 (Analysens fundamentalteorem - Del I)**.** *Anta at $f R$ er kontinuerlig. Da er f integrerbar på ethvert intervall $[a,x]$ der $a \leq x \leq b$ og funksjonen*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

er en antiderivert til f på $[a,b]$.

Bevis. Siden vi ikke vet om f er integrerbar ennå (husk definisjonen vår av integrerbarhet), kan vi ikke skrive opp integralet $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Men siden f er kontinuerlig er den også begrenset. Så øvreintegralet eksister

$$G(x) = \overline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

og nedreintegralet

$$H(x) = \underline{\int_a^x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Jeg ønsker å først vise at G er en antiderivert til f på $[a,b]$. Vi må da vise at $G'(x) = f(x)$ for alle $x \in (a,b)$, og at G er kontinuerlig i endepunktene. Vi konsentrer oss først om deriverbarheten som kan sies å være det vanskeligste punktet. Per definisjon er

$$\begin{aligned}
G'(x) &= \lim_{\Delta x} \frac{G(x+\Delta x) - G(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x} \left(\overline{\int_a^{x+\Delta x}} + \overline{\int_a^{x}} \right) f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{\Delta x} \overline{\int_x^{x+\Delta x}} f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

hvor den siste overgangen følger fra proposisjon (2.2.1). For hver Δx, la $M(x,\Delta x)$ være supremum til f over intervallet $[x - |\Delta x|, x + |\Delta x|]$, og la $m(x,\Delta x)$ være infinum til f over samme intervallet. Siden f er kontinuerlig må

$$\lim_{\Delta x \to 0} M(x,\Delta x) = f(x) \tag{2.4}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} m(x,\Delta x) = f(x) \tag{2.5}$$

Fra definisjonen av øvreintegralet ser vi at dersom Δx er positiv, så er (tenk på øvre og nedre trappesummer)

$$m(x,\Delta x)\Delta x \leq \overline{\int_x^{x+\Delta x}} f(t)\,\mathrm{d}t \leq M(x,\Delta x)\Delta x$$

Se for eksempel figur (1.1). Tilsvarende om Δx er negativ så har vi

$$m(x, \Delta x)(-\Delta x) \leq \overline{\int_{x+\Delta x}^{x}} f(t)\,\mathrm{d}t \leq M(x, \Delta x)(\Delta x-)$$

I begge tilfeller så er

$$m(x, \Delta x) \leq \frac{1}{\Delta x} \overline{\int_{x}^{x+\Delta x}} f(t)\,\mathrm{d}t \leq M(x, \Delta x)$$

Ved å la $\Delta x \to 0$ i ulikheten ovenfor får vi dermed

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \overline{\int_{x}^{x+\Delta x}} f(t)\,\mathrm{d}t = f(t)$$

hvor vi brukte (2.4) og (2.5). Dette var jo akkurat det vi ønsket å vise!

På akkuratt samme måte viser man at $H'(x)$ er en antiderivert til $f(x)$ på $[a, b]$. I følge lemma (2.2.1) er da $G(x) = H(x) + \mathcal{C}$. Siden $H(a) = G(a) = 0$ (hvorfor?), må konstanten $\mathcal{C}$ være null. Følgelig er $G(x) = H(x)$, dermed er øvreintegralet lik nedreintegralet. Per definisjon betyr det at f er integrerbar over intervallet $[a, x]$. Altså eksisterer integralet $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, og

$$F(x) = \overline{\int_{a}^{x}} f(t)\,\mathrm{d}t = \underline{\int_{a}^{x}} f(t)\,\mathrm{d}t = G(x)$$

Siden $G'(x) = f(x)$, må $F'(x) = f(x)$ og beviset er fullført. □

Oppgaver

1. Anta at vi allerede har vist korollar (1.3.1). Bruk korrollaret til å vise at

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

hvor $a \leq c \leq b$ og f er en integrerbar funksjon på $[a, b]$. Forklar hvorfor dette argumentet er sirkulært/ikke gyldig.

2.3 Symmetri og nyttige sammenhenger

Målet med denne delen er å se på hvordan integral og funksjoner kan forenkles ved hjelp av symmetri. Det første vi skal se på er definisjonen av en symmetrisk funksjon.

Definisjon 2.3.1. En funksjon f kalles *symmetrisk* omkring c dersom

$$f(x-c) = f\big(-(x-c)\big)$$

En funksjon f kalles *anti-symmetrisk* omkring c dersom

$$f(x-c) = -f\big(-(x-c)\big)$$

Dette må selvsagt holde for alle x. Dersom det bare holder for $x \in C$ hvor $C = [a,b]$ er et endelig interval, så sier en at f er henholdsvis odde eller like over C

Definisjon 2.3.2. En funksjon f kalles for en likefunksjon eller jevnfunksjon dersom funksjonen er symmetrisk omkring origo.

$$f(x) = f(-x)$$

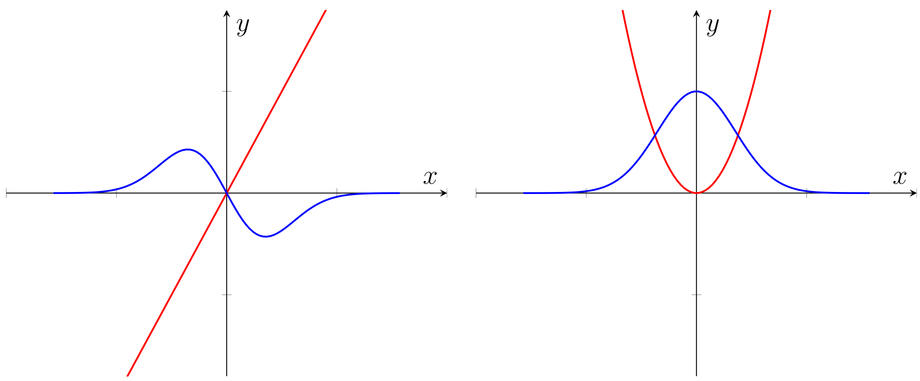
En funksjon f kalles odde eller for en oddefunksjon dersom funksjonen er antisymmetrisk omkring origo.

$$f(x) = -f(-x)$$

Som igjen må holde for alle x.

En grafisk fremstilling av odde og like funksjoner er vist i figur (2.1). Eksempelvis så er x^2, $\cos x$, e^{-x^2} og $|x|$ like funksjoner. Tilsvarende så er x^3, $\sin x$, xe^{-x^2} og x eksempel på odde funksjoner.

En sammlebetegnelse for odde og like funksjoner er paritet. Så pariteten til e^{-x^2} er like, partiteten til xe^{-x^2} er odde, og e^x har ingen paritet. Odde og



(a) Et plot av to odde funksjoner

(b) Et plot av to like funksjoner

Figur 2.1: Pictures of animals

like funksjoner har mange nyttige egenskaper hvor de viktigste egenskapene er sammlet i tabell (2.1). Her er O en forkortelse for en odde funksjon, og L er en forkortelse for en likefunksjon. Videre så er E enten odde eller like, og E^* har motsatt paritet av E. Så dersom E er like så er E^* odde. Uttrykket $E \cdot E^* = O$ betyr det samme som at $O \cdot L = O$ og $L \cdot O = O$. Gitt to funksjoner f og g så er $f \circ g = f\big(g(x)\big)$.

Tabell 2.1: Noen egenskaper til odde og like funksjoner.

$E + E$	$=$	E	$E \cdot E$	$=$	L
E/E	$=$	L	E/E^*	$=$	O
$E \cdot E^*$	$=$	O	$O \circ O$	$=$	O
$E \circ L$	$=$	L	$L \circ E$	$=$	L

Fra figur (2.1) virker det som arealet av en likefunksjon er likt på høyre og venstre side av origo. Tilsvarende for en oddefunksjon, bare at områdene nå har motsatt fortegn.

Dette stemmer faktisk, men før vi viser det la oss ta et litt annet eksempel med hensyn på symmetri.

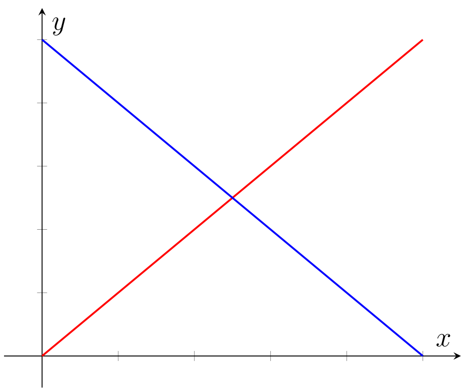
Eksempel 2.3.1. Se på funksjonen

$$f(x) = x$$

Det ønskes å vises at arealet under $f(x)$ og $f(a-x)$ grafisk. Altså

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x$$

Ved å se på figur figur (2.2) så er det rimelig åpenbart at området under funksjo-



Figur 2.2: $f(x)$ og $f(a-x)$ i samme figur.

nene er like. Arealet under x fra 0 til a er en trekant med grunnlinje a og høyde a dermed så er

$$\int_0^a x\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}$$

Tilsvarende for $a - x$ er dette og en trekant med grunnlinje a og høyde a så

$$\int_0^a x\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}$$

Eksemepelet ovenfor var veldig konstruert og pedantisk. Men det stiller et viktig spørsmål, gjelder dette for alle funksjoner? Svaret er heldigvis ja, og kan generaliseres til følgende proposisjon

Proposisjon 2.3.1. *Anta at f er en vilkårlig funksjon, og a,b er to reelle tall da er*

$$\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Bevis. Igjen kan dette visualiserer med at f blir rotert omkring linjen $x = (a+b)/2$ og det er derfor logisk at arealet er uforandret. Begynner med å se på venstre side av likheten

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ved å bruke substitusjonen $x \mapsto a+b-u$ så er $\mathrm{d}u = -dx$. Videre er $x = a \to u = b$, og $x = d \to u = a$ så

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a f(a+b-u) - \mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-u)\,\mathrm{d}u$$

og beviset fullføres ved å bytte integrasjonsvariabelen tilbake til x. □

Dette enkle beviset fører direkte til at

Korollar 2.3.1. *Gitt at f er en symmetrisk funksjon omkring c, g er en antisymmetrisk funksjon omkring c da er*

$$\int_{c-a}^{c+a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{c+a} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{og} \quad \int_{c-a}^{c+a} g(x)\,\mathrm{d}x = 0\,\mathrm{d}x\,, \tag{2.6}$$

der at a er en positiv, reell konstant. Spesielt dersom $c = 0$ så er

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{og} \quad \int_{-a}^{a} g(x)\,\mathrm{d}x = 0\,\mathrm{d}x\,, \tag{2.7}$$

gitt at f er en likefunksjon, og g er odde.

Som det overlates leser å vise. Her er det nok å putte inn i proposisjon (2.3.1) og benytte seg av definisjonen av en odde og like-funksjon. Dette er og svært logisk om en betrakter figur (2.1).

Langt i fra alle funksjoner har symmetriske egenskaper, for eksempel så er e^x hverken like eller odde. Men

$$e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x + \cosh x$$

Slik at e^x kan skrives som en odde og en likefunksjon. Faktisk så kan enhver funksjon f skrives som en en odde og en likefunksjon

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} \tag{2.8}$$

Hvor første del er en like, og andre del en odde. Fra denne observasjonen kan en vise

Proposisjon 2.3.2. *La f være en vilkårlig funksjon da er*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(x) + f(-x)\,\mathrm{d}x$$

Bevis. Legg merke til at

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)+f(-x)}{2} = \int_{0}^{a} f(x) + f(-x) \;\text{ og }\; \int_{-a}^{a} \frac{f(x)-f(-x)}{2} = 0$$

Dette følger fra korollar (2.3.1) siden første første funksjon er like og andre funksjon er odde. Ved å integrere likning (2.8) fra $-a$ til a fås da

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(x) + f(-x)\,\mathrm{d}x\,,$$

som ønsket. Alternativt kan en og dele integralet på midten og benytte substitusjonen $x \mapsto -y$ i integralet fra $-a$ til 0. □

Proposisjon 2.3.3. *La f være en integrerbar funksjon på intervalet $[0, 2a]$, hvor $a \in \mathbb{R}$ er en positiv konstant. Da holder*

$$\int_{0}^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(2a-x)\,\mathrm{d}x$$

for alle funksjoner f.

Korollar 2.3.2. *La f være en vilkårlig funksjon da er*

$$\int_{0}^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\displaystyle\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x & \textit{hvis} \quad f(2a-x) = f(x) \\ 0 & \textit{hvis} \quad f(2a-x) = -f(x) \end{cases}$$

hvor a er reell konstant.

Bevis. Beviset følger direkte fra proposisjon (2.3.3) og nesten rett fra korollar (2.3.1) med et snedig skifte av koordinater. Geometrisk beskriver integralet en funksjon som er odde eller like omkring $x = a$. Vi deler først integralet på midten og bruker deretter substitusjonen $x \mapsto 2a - u$ på det siste integralet.

$$\begin{aligned} \int_{0}^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2a-a}^{2a-2a} -f(2a-u)\,\mathrm{d}u\,, \end{aligned}$$

hvor grensene blir $u = 2a - 2a = 0$ og $u = 2a - a = a$. Bruker vi nå at $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ kan integralet skrives som

$$\int_{0}^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(x) + f(2a-x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{2.9}$$

Dette beviser proposisjon (2.3.3). Å sette inn henholdsvis $f(2a-x) = f(x)$ og $f(2a-x) = -f(x)$ fullfører beviset for korollar (2.3.2). Som vi skal se snart følger likning (2.9) også rett fra (2.11) i lemma (2.3.1). □

La oss ta et eksempel for å se hvor nyttig symmetriegenskaper kan være

Eksempel 2.3.2. Putnam 1987: B1

$$J = \int_2^4 \frac{\sqrt{\log(9-x)}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\log(9-x)}+\sqrt{\log(3+x)}}$$

Nå er $a+b-x = 6-x$ så ved å benytte seg av proposisjon (2.3.1) får en direkte

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{\log(9-(6-x))}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\log(9-(6-x))}+\sqrt{\log(3+(6-x))}} = \int_2^4 \frac{\sqrt{\log(3+x)}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\log(3+x)}+\sqrt{\log(9-x)}}$$

Meget pent. Ved å ta gjennomsnittet av uttrykkene får en at

$$J = \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{\sqrt{\log(9-x)}}{\sqrt{\log(9-x)}+\sqrt{\log(x+3)}} + \frac{\sqrt{\log(3+x)}}{\sqrt{\log(x+3)}+\sqrt{\log(9-x)}}\,\mathrm{d}x$$

Dermed forenkler integranden dramatisk og en står igjen med

$$J = \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{\sqrt{\log(9-x)}+\sqrt{\log(x+3)}}{\sqrt{\log(9-x)}+\sqrt{\log(x+3)}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^4 1\,\mathrm{d}x = \frac{(4-2)}{2} = 1$$

Merk at teknikken som ble brukt her kan enkelt generaliseres til følgende to korollar

Korollar 2.3.3. *La $f(x)$ være en vilkrålig funksjon på (a,b) da er*

$$\int_a^b \frac{f(x)}{f(a+b-x)+f(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\,,$$

gitt at a og b er to reelle konstanter og at integralet konvergerer.

For å sikre seg konvergens holder det at $f(a+b-x)+f(x) \neq 0$ på intervalet. Beviset er i seg selv enkelt, og en kan bruke nøyaktig samme fremgangsmåte som i eksempelet ovenfor. I seg selv er korollaret enkelt å vise, men i praksis er det vanskeligere å bruke. For eksempel så er

$$\int_0^1 \frac{x^3+x+1}{4-3x+3x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^3+x+1}{[(x-1)^3+(x-1)+1]+x^3+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,.$$

Men å se denne overgangen krever at en har en liten algebra-trollmann i magen. Som regel er det enklere å tippe at denne teknikken fungerer og se om teorem (2.3.1) kan benyttes. På enkle integrander kan korollaret brukes til å løse integraler ved inspeksjon.

Lemma 2.3.1.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)+f(a+b-x)\,\mathrm{d}x \tag{2.10}$$

$$= \int_a^c f(x)+f(a+b-x)\,\mathrm{d}x \tag{2.11}$$

$$= \int_c^b f(x)+f(a+b-x)\,\mathrm{d}x \tag{2.12}$$

Gitt at a,b er to reelle tall og $c = (a+b)/2$ er gjennomsnittsverdien av a og b.

Bevis. Første likning faller rett ut fra (2.3.1), siden integralet over $f(x)$ og $f(a+b-x)$ er like store. For å se neste overgang kan en snitte integralet i to

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{2.13}$$

med $c = (a+b)/2$. Ved å bruke substitusjonen $x \mapsto a+b-u$ på siste integral fås

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_c^a f(a+b-u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_a^c f(x) + f(a+b-x)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Grensene blir $u = (a+b) - c = c$ og $u = (a+b) - b = a$, og en byttet tilbake til x som integrasjonsvariabel i siste linje. Dersom en i stedet bruker substitusjonen $x \mapsto a+b-u$ på første integral i (2.13) får en

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_b^c f(a+b-x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_c^b f(a+b-x) + f(x)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

som var den siste likningen som skulle vises. □

La oss rette fokus mot de kjente å kjære trigonometriske funksjonene våre. Vi vet allerede at

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2x)}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2-\sin(2x)}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

Der det ble benyttet at $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos 2x$, og enhetsformelen $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Dette er et integral som dukker mye opp både i fysikk og flervariabel analyse, men hva med integralet av $\cos^2(x)$, kan vi bruke resultatet på noen måte? Ved å se på figur (2.3) så er $\cos^2 x$ og $\sin^2 x$ samme funksjon, bare at cosinus er forskjøvet med en halv periode altså

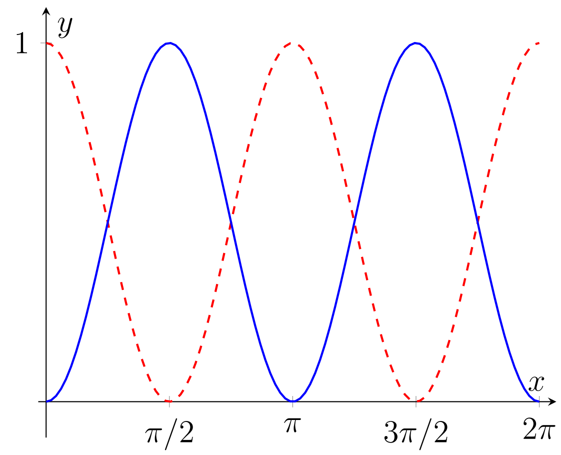
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

Der virker da logisk at arealet under sinus og cosinus er det samme, gitt at en integrerer over en hel periode. Dette viste du vel allerede fra før, men ved å sette inn i proposisjon (2.3.1) fås direkte at

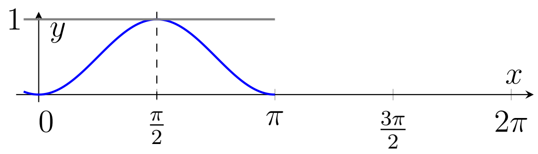
$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin(\pi/2 - x)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos(x)^2\,\mathrm{d}x$$

Interessant, siden arealet under av funksjonene er like så er

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin(x)^2 + \cos(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$



Figur 2.3: Her er $\cos x$ den stipplede funksjonen, og $\sin x$ er den heltrukne.



Figur 2.4: $f(x)$ og $f(a-x)$ i samme figur.

Stilig! Teknikken fungerer ikke bare på alle intervall, men alle multipler av $\pi/2$.

$$\int_0^{n\pi/2} \sin(x)^2 = \int_0^{n\pi/2} \cos(x)^2 = \frac{1}{2}\int_0^{n\pi/2} 1\,\mathrm{d}x = \frac{n\pi}{4}$$

Men dette er kanskje kjent fra før? La oss angripe problemet på en mer grafisk måte. Ved å se nærmere på intervalet 0 til π. Legg merke til symmetrien fra $x = 0$ til $x = \pi/2$ i figur (2.4). Funksjonen $f(x) = \sin(x)^2$ deler kvadratet avgrenset av $y = 0$, $y = 1$ og $x = 0$, $x = \pi/2$ i nøyaktig to på figuren. Slik at arealet under f er nøyaktig halvparten av arealet til kvadratet. Altså

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

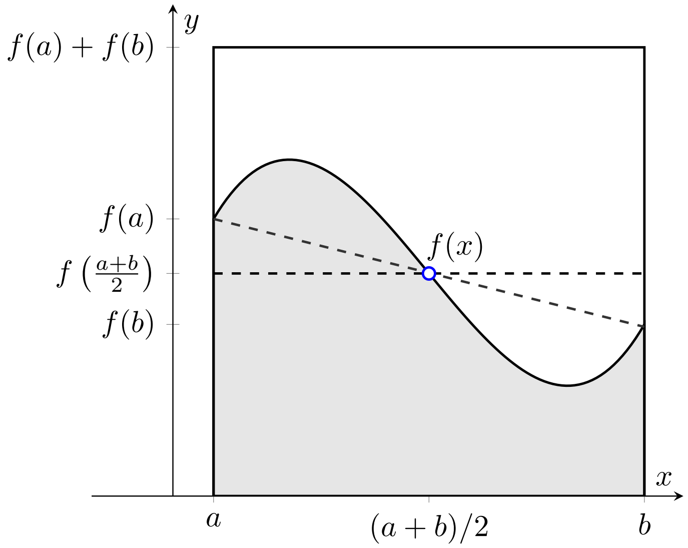
Dette er helt tilsvarende som å bestemme arealet av en trekant, den er nøyaktig halvparten av kvadratet.

For å få samme resultat som før kan en dele opp integralet i n kvadrat hver med areal $\pi/2$, og nøyaktig det samme argumentet kan og benyttes på $\cos(x)^2$. Hittil har det bare vært håndvifting, hvordan kan en være sikker på at fremgangsmåten er rett? Svaret finner vi i følgende theorem

Teorem 2.3.1. *Anta f er kontinuerlig på $[a, b]$ og at $f(x)+f(a+b-x)$ er konstant for alle $x \in [a, b]$ da er*

$$\int_a^b f(x) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$

Bevis. Beviset her tilegnes Roger Nelsen [11, s39-41], og er mildt sagt pent. Merk at teoremet kan vises utelukkende ved å betrakte figur (2.5). Men litt algebratre-



Figur 2.5: Bevis for teoremet uten ord.

ning har aldri skadet noen. For å beregne integralet benyttes lemma (2.3.1) og likning (2.11) Da er

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x) + f(a+b-x)\,\mathrm{d}x = \left(\frac{b+a}{2} - a\right) K$$

Siden $f(x)+f(a+b-x) = K$, hvor K er en konstant. For å bestemme konstanten kan hvilken som helst $x \in [a, b]$ benyttes. Velges $x = a$ eller $x = b$ fås

$$K = f(a) + f(b)$$

Derimot om en velger $f(x) = c$ fås

$$K = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Integralet kan dermed skrives som

$$\int_a^b f(x) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{b-a}{2}\big[f(a) + f(b)\big]$$

som var det som skulle vises. □

En ser at om $f(x) = \sin^2 x$ eller $f(x) = \cos^2 x$ så er $f(x) + f(\pi/2 - x) = 1$ konstant så

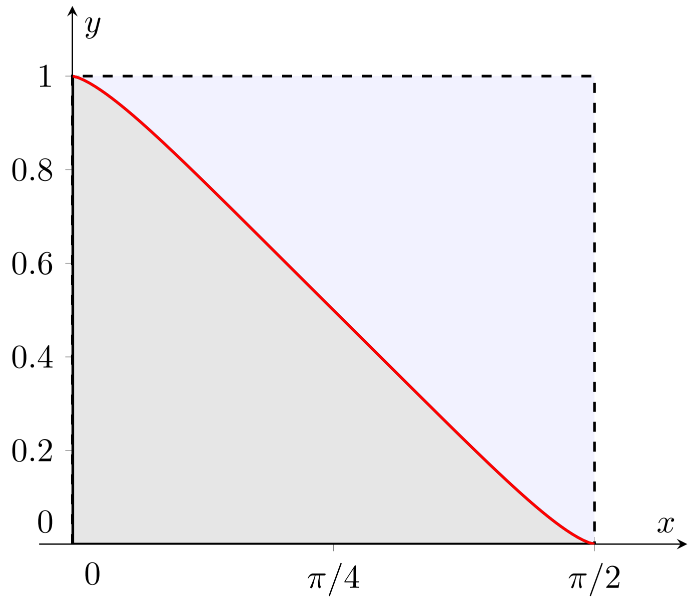
$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi/2 - 0}{2}\big[f(0) + f(\pi/2)\big] = \frac{\pi}{4}$$

som stemmer med tidligere resultater. La oss ta et noe vanskeligere eksempel avslutningsvis

Eksempel 2.3.3. Putnam 1987: B1

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan(x)^{\sqrt{2}}}\,.$$

Dette er en av de vanskeligste oppgavene som har vært gitt på en Putnam eksamen[3]. Ved å tegne funksjonen får en noe som likner på figur (2.6). Allerde nå



Figur 2.6: Grafen til funksjonen $1/\tan(x)^{\sqrt{2}}$.

burde en kjenne igjenn teknikken. Området under funksjonen er halvparten av rektangelet. Slik at det forventes at

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan(x)^{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\,.$$

For å være sikre på dette sjekkes det at $f(x) - f(a+b-x)$ er konstant. Nå er

$$\tan(\pi/2 - x) = \frac{\sin(\pi/2-x)}{\cos(\pi/2-x)} = \frac{\cos x}{\sin x} = 1/\tan(x)$$

slik at

$$\begin{aligned} f(x) + f(\pi/2 - a) &= \frac{1}{1+\tan(x)^{\sqrt{2}}} + \frac{1}{1+1/\tan(x)^{\sqrt{2}}} \cdot \frac{\tan(x)^{\sqrt{2}}}{\tan(x)^{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{1+\tan(x)^{\sqrt{2}}} + \frac{\tan(x)^{\sqrt{2}}}{1+\tan(x)^{\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

[3]Putnam er en den mest prestisjefylte matematikkonkuransen for studenter i USA og Kanada. Konkurransen består av 12 spørsmål, med maks poengsum 120. Oppgaven som er vist her klarte bare 23 av 2043 deltakare å få 3 eller mer poeng på

Dermed så er $f(x) + f(a + b - x)$ konstant for alle $x \in [0, \pi/2]$. Arealet under $f(x)$ er dermed nøyaktig halvparten av kvadratet med høyde 1 og bredde $\pi/2$. Fra teorem (2.3.1) har en altså at

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \tan(x)^{\sqrt{2}}} = \frac{\pi/2 - 0}{2} \left[f(0) + \lim_{x \to \pi/2} f(x) \right] = \frac{\pi}{4} .$$

Der $f(0) = 1$ og den siste grensen blir 0, siden $\tan(x)$ går mot uendelig når $x \to \pi/2$ dermed vil $1/\tan x \to 0$.

I oppgaven ovenfor var figuren en god indeksjon på symmetrien. La oss avslutningsvis ta et eksempel som i utgangspunktet virker motstriende mot tidligere resultater.

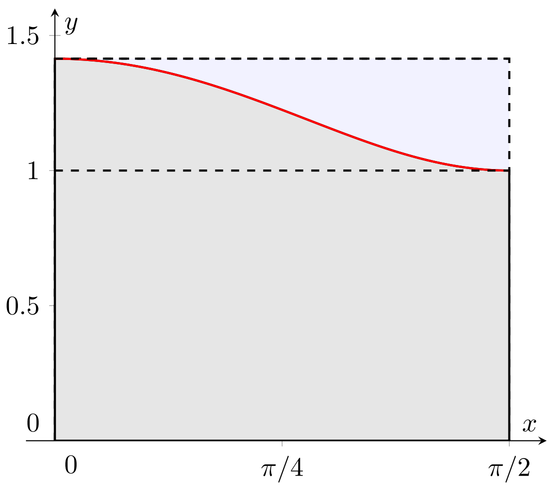
Eksempel 2.3.4. Her skal vi studere følgende integral

$$A = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 x} \, \mathrm{d}x$$

La som definere funksjonen f som

$$f(x) = \sqrt{1 + \cos^2 x}$$

Ved å se på figur (2.7) ser det ut som at integralet fyller opp nøyaktig halvparten av det stiplede området. Så antakelsen om at arealet er



Figur 2.7: Den røde kurven viser funksjonen $f(x) = \sqrt{1 + \cos^2 x}$.

$$\tilde{A} = \frac{\pi\big(f(0) + f(\pi/2)\big)}{2} = \frac{\pi\big(1 + \sqrt{2}\big)}{4}$$

virker ikke urimelig. Dessverre så er

$$g(x) = f(x) + f(\pi - x) = \sqrt{1 + \cos^2 x} + \sqrt{1 + \sin^2 x}$$

ikke konstant på intervallet. Ved å se på den deriverte kan en se at funksjonen duver sakte i intervalet, eksempelvis så er $g(0) = g(\pi/2) = 1 + \sqrt{2}$, mens $g(\pi/4) = \sqrt{6}$. Så $f(x) - f(\pi - x)$ er akk så nære å være konstant, men det hjelper dessverre ingenting. Ved direkte utregning så er faktisk

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx \approx 1.9100 > \frac{\pi(1 + \sqrt{2})}{4} \approx 1.8961$$

Så selv om det *ser* ut som funksjonen har pen symmetri, må en teste om $f(x) + f(a+b-x)$ er konstant. Problemet i denne oppgaven er at $1+\cos^2(x)$ tilfredstiller $f(x) = f(a + b - x)$, mens $\sqrt{x}$ ikke gjør det. En konvolusjon av en symmetrisk og ikke symmetrisk funksjon er dessverre ikke symmetrisk.

Addendum: Integralet som ble studert i denne oppgaven ikke er mulig å beregne analytisk og betegnes som et elliptisk integral av andre grad. Men å vise dette overlates som en artig oppgave til leser.

Oppgaver

1. La α være en reell konstant, og $f(x)$ en kontinuerlig funksjon. Hvilke egenskaper må f ha for at

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)\, dx}{1 + \beta^x} = \int_0^{\alpha} f(x)\, dx$$

skal gjelde? Bestem også

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)(1 + e^x)}\,.$$

2. Vis at

$$\int_0^{2\pi} \log\left(\frac{(1 + \sin x)^{1+\cos x}}{1 + \cos x}\right) dx = 0\,,$$

3. Bestem konstantene A,B,C og D slik at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = A \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = B \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = C \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2}\,.$$

4. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 3}\, dx$

5. Følgende transformasjon

$$\int_0^{\pi} xR(\sin x, \cos^2 x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} R(\sin x, \cos^2 x)\, dx$$

er nyttig i flere sammenhenger. Vis at den stemmer der $R(x)$ er en rasjonell funksjon uten singulariter på intervalet. Gjelder identiteten for $R(\cos x, \sin^2 x)$?

6. Et komplett elliptisk integral av andre grad kan skrives på fomen

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\, \mathrm{d}x$$

a) Vis at integralet

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, \mathrm{d}x$$

kan uttrykkes via $E(x)$.

La oss ta en liten digresjon til numerisk integrasjon. For å beregne et integral kan en dele opp intervalet i n deler og konstruere et trapes på hver del. Da ender en opp med at

$$T(n) = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{h}{2}\big[f(a) + f(b)\big] + h \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)$$

hvor n er antall interval, $h = (b-a)/n$, og $x_k = a + hk$. En øvre grense for feilen i metoden er gitt som

$$0 \leq \text{Error} \leq \frac{(b-a)^3}{2n^2} M$$

Hvor M er den største verdien $|f''(\xi)|$ har på intervallet.

b) Bestem hvor mange interval n som trengs for å være helt sikker på at

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 x}\, \mathrm{d}x > \frac{\pi(1 + \sqrt{2})}{4}$$

2.4 Diverse substitusjoner

Vi betegner en substitusjon som følgende overgang

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\varphi^\psi f[g(t)]g'(t)\,\mathrm{d}t$$

og formelt sett er dette en avbildning fra et område X til et område Y via funksjonen $x \mapsto g(t)$. Hva dette i praksis vil si er at vi går fra et koordinatsystem x,y til et nytt koordinatsystem x',y' og det eneste som er konstant mellom systemene er at arealet under $f(t) \in (a,b)$ og $f(g(t)) \in (\varphi,\psi)$ er like store.

Vi begynner med å se på noen få eksempler på nyttige susbtitusjoner. Inneholder integralet $\sqrt{(x-a)(b-x}$ eller $\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}$ så kan substitusjonen $x \mapsto a\cos^2\theta + b\sin^2\theta$

Eksempel 2.4.1.

$$I = \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \pi$$

Vi benytter den anbefalte substitusjonen $x \mapsto a\cos^2\theta + b\sin^2\theta$. Da er

$$\begin{aligned}(x-a)(b-x) &= \big(a(\cos^2\theta - 1) + b\sin^2\theta\big)\big(b(1-\sin^2\theta) - a\cos^2\theta\big)\\ &= (-a\sin^2\theta + b\sin^2\theta)(b\cos^2\theta - a\cos^2\theta)\\ &= (b-a)^2\sin^2\theta\cos^2\theta\end{aligned}$$

Mens den deriverte kan skrives som

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -2a\cos\theta\sin\theta + 2b\sin\theta\cos\theta = 2(b-a)\sin\theta\cos\theta$$

Herfra må vi arbeide med grensene våre. Når $x = a$ får vi likningen $a = a\cos^2\theta + b\sin^2\theta$ som medfører $(a-b)\sin^2\theta = 0$. Her kan vi se bort i fra det trivielle tilfellet $a = b$. Så vi må ha $\sin^2\theta = 0$ eller $\theta = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Vi velger $n = 0$ for enkelhetens skyld.

Tilsvarende for $x = \beta$ finner vi at $\theta = \pi/2 + n\pi$. Denne gangen kan vi ikke velge n fritt. Det er relativt trygt å gjette at vi må velge $\theta = \pi/2$. Vi kan rettferdiggjøre dette ved å se at vi ønsker at x øker fra a til b, og dersom vi velger en annen verdi for den øvre grensen vil ikke dette skje. Substitusjonen gir altså

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{(b-a)\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(b-a)^2\sin^2\theta\cos^2\theta}} = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta = \pi$$

som ønsket. Noen tillegskommentarer: For $x \in [0,\pi/2]$ så er $\cos x$ og $\sin x$ positive slik at $\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta} = |\cos x||\sin x| = \cos x \sin x$. Vi kan og se raskt på konvergens, eneste faremomomenter er $x = a$ og $x = b$. Integralet oppfører seg som $\int_0^1 \mathrm{d}x/\sqrt{x}$ nære disse punktene og konvergerer dermed. En har fra taylorutvikling at

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \sim \int (x-a)^{-1/2}(b-a)^{-1/2}\,\mathrm{d}x = 2(x-a)^{1/2}(b-a)^{-1/2}$$

som er konvergent. Helt tilsvarende omkring $x = b$.

Å evaluere bestemte integral ved bruk av substitusjon krever ømfintlighet. Følgende theorem gir oss tilstrekkelige betingelser for en gyldig substitusjon

Teorem 2.4.1. *Dersom funksjonen $t = \phi(x)$ tilfredstiller følgende*

1. *$\phi(x)$ er en kontinuerlig en-til-en funksjon definert på intervalet $[\varphi, \psi]$ og har en kontinuerlig derivert der.*
2. *Verdiene til $\phi(t)$ ligger i intervalet $[a, b]$*
3. *$\phi(\varphi) = a$ og $\phi(\psi) = b$.*

da vil følgende formel holde

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\varphi^\psi f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$$

for alle f stykkevis kontinuerlig funksjoner derfinert på $[a, b]$.

Gjennom nonen eksempler vil vi vise visse fallgruver om en ikke passer på betingelsenene ovenfor. Det enkleste er altså benytte seg av monotone[4] substitusjoner. Ellers må en dele opp intervallet til substitusjonen blir monoton.

Eksempel 2.4.2.

$$I = \int_{-2}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{4 + x^2}$$

Variabelskifte $x \mapsto 1/t$ vil her lede til et galt svar

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{4 + x^2} = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)} = -\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{4t^2 + 1} \\ &= \left[\frac{1}{2}\arctan 2t\right]_{1/2}^{-1/2} = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

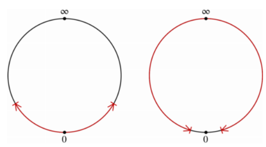
Som er umulig siden funksjonen er strengt positivt. Dette skjer fordi substitusjonen $1/t$ ikke er deriverbar i origo[5]. Rett svar er selvsagt

$$I = \int_{-2}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{4 + x^2} = \left[\arctan \frac{x}{2}\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\pi}{4}$$

En annen som kan komme er når en bruker den iverse substitusjonen $x = \psi(t)$ og $x = \phi(t)$ tar flere verdier[6].

[4]En monoton funksjon er en funksjon som er avtagende eller synkende på ett gitt området.

[5]Dette er jo selvsagt ikke helt rett. Problemet ligget i at vi må dele opp intervallet vårt ved origo før vi kan derivere. Dette handler om at $x \mapsto 1/x$ mapper $[-2, 2]$ til $(-\infty, -1/2] \cup [1/2, \infty)$ og *ikke* $[-1/2, 1/2]$ som en kanskje skulle trodd i utgangspunktet.



[6]Innen kompleks analyse klaller vi slike funksjoner gjerne for branch cuts.

Eksempel 2.4.3.

$$I = \int_0^3 (x-2)^2 \, \mathrm{d}x$$

Ved å bruke substitusjonen $u \mapsto (x-2)^2$ vil resultere i et galt resultat. Dette er fordi den inverse funksjonen ikke er unikt definert $x = 2 \pm \sqrt{t}$. en ene grenenen $x_1 = 2 - \sqrt{t}$ kan ikke ta verdier for $x > 2$, og den andre $x_2 = 2 - \sqrt{t}$ kan ikke ta verdier for $x < 2$. Direkte (men feil) utregning via $u \mapsto (x-2)^2$ gir

$$\int_0^3 (x-2)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_4^1 \sqrt{u} \, \mathrm{d}u = \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_4^1 = \frac{1}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{7}{3}$$

Åpenbart feil, da integranden er positiv på hele området. For å få det korrekte svaret er det nødvending å dele integralet i to deler

$$I = \int_0^2 (x-2)^2 \, \mathrm{d}x + \int_2^3 (x-2)^2 \, \mathrm{d}x$$

Så kan vi la $x \mapsto 2 - \sqrt{t}$ i første integrealet og $x \mapsto 2 + \sqrt{t}$ i det andre. Dette gir

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^2 (x-2)^2 \mathrel{\dot{=}} -\int_4^0 t \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{t} \, \mathrm{d}t = \frac{8}{3} \\ I_2 &= \int_2^3 (x-2)^2 \mathrel{\dot{=}} \int_0^1 t \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Derfor så er $I = I_1 + I_2 = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3$. Resultatet kan bekreftes ved å beregne integralet direkte

$$\int_0^3 (x-2)^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{(x-2)}{2} \right]_0^3 = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 3$$

En kan og betrakte[7] en substitusjon som at en omformer et materialet eller væske som en ikke kan trykkes sammen[8]. En substitusjon kan da sees på som an en drar materialet i en eller annen retning, merk at transformasjonen må være kontinuerlig, og kan heller ikke innføre ”hull”i området.

En avbildning fra X til Y ikke er entydig og det kan finnes mange måter å komme seg fra X til Y på. En kan for eksempel gå fra X til Z også fra Z til Y, eller en rekke andre måter. Områdene vi vil arbeide med vil i hovedsak være interval på den reelle tallinjen slik at en kan skrive $X = [a, b]$ og $Y = [\varphi, \psi]$. Men det er ikke noe mot at X er et interval og at Y er en sirkel for eksempel.

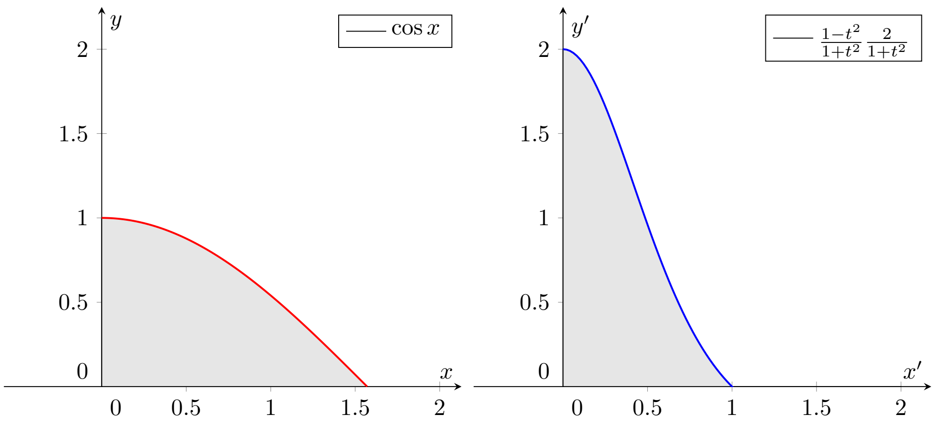
Ofte når vi bruker substitusjon er målet å forenkle integranden, men hva om vi ønsker å forenkle grensene i stedet. Hvordan skal vi finne en substitusjon slik at grensene går fra $[a, b]$ til $[\varphi, \psi]$? Substitusjonen kan skrives som

$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t = \int_\varphi^\psi f(g(x)) g'(x) \, \mathrm{d}x \,,$$

hvordan må da $t = g(x)$ velges? Følgende propsisjon gir oss heldigvis svaret

[7] En alternativ synsvinkel er en lineær transformasjon mellom to topologiske rom.

[8] Formelt kalles et slikt materialet med konstant volum for *inkompressibelt*. Når det gjelder gasser, kalles en prosses med konstant volum for en isokor prosess.



(a) Funksjon med areal 1.

(b) Funksjon med areal 1.

Figur 2.8: Arealet under begge funksjonene er like og $t \mapsto \tan(x/2)$ mapper x, y til x',y'.

Teorem 2.4.2. *Integralet $\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ kan bli transformert til et annet integral med grenser φ og ψ via den lineære transformasjonen*

$$T(x) \mapsto \frac{\beta-\alpha}{\psi-\varphi}x + \frac{\alpha\psi-\beta\varphi}{\psi-\varphi} \tag{2.14}$$

Da kan integralet skrives som

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\beta-\alpha}{\psi-\varphi}\int_\varphi^\psi f\left(\frac{\beta-\alpha}{\psi-\varphi}x + \frac{\alpha\psi-\beta\varphi}{\psi-\varphi}\right)\mathrm{d}x \tag{2.15}$$

Beviset overlates til leser. Det er ikke vanskeligere enn å anta at $x(t) = Ax + B$. Kravene om at $x(\alpha) = \psi$, $x(\beta) = \varphi$ bestemmer konstantene A og B. Fra dette følger

Korollar 2.4.1.

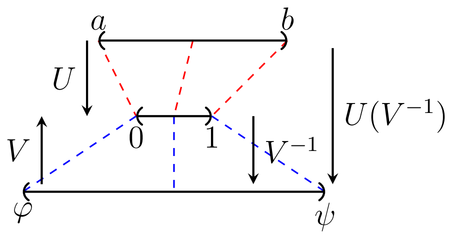
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\int_0^1 f\big((b-a)t + a\big)\,\mathrm{d}t \tag{2.16}$$

$$= (b-a)\int_0^\infty f\left(\frac{a+bx}{1+x}\right)\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} \tag{2.17}$$

for alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Dette følger fra og sette inn henholdsvis $\varphi = 0$, $\psi = 1$ og $\varphi = 0$, $\psi \to \infty$ i likning (2.15).

En noe mer intuitiv måte å se likning (2.15) på er å vise korollaret først. Dette viser at ethvert åpent interval (a, b) kan 'krympes' ned til enhetsintervalet $(0, 1)$ via en eller annen transformasjon U. Dette betyr også at en kan krympe intervalet (φ, ψ) ned på $(0, 1)$ via en transformasjon V. Ved å ta inversen av V, går vi motsatt vei fra $(0, 1)$ til (φ, ψ) altså 'forstørres' området. Dette er illustrert i figur (2.9). Ved å først bruke transformasjonen U, og deretter V^{-1} går vi altså fra



Figur 2.9: Mapping fra (a, b) til (φ, ψ).

(a, b) til (ψ, φ). Å vise at $U(V^{-1})$ er samme transformasjon som i likning (2.14) overlates til leser.

Som vist ovenfor er ikke avbildninger unike, det finnes mange veier en kan ta fra X til Y- I tabell (2.2) er et utvalg transformasjoner fra X til Y vist. Her blir notasjonen (a, b) for å betgne området en integrerer over.

Tabell 2.2: Et utvalg av sentrale substitusjoner

X	Y	$t = g(x)$
(a, b)	$(-1, 1)$	$-\dfrac{b+a}{b-a} + \dfrac{2x}{b-a}$
$(0, a)$	$(0, 1)$	x/a
$(0, 1)$	(a, b)	$a + (b-a)x$
$(0, 1)$	$(-\infty, \infty)$	$(1-2x)/4(x^2 - x)$
$(-1, 1)$	$(-\infty, \infty)$	$x/(1-x^2)$
$(0, \infty)$	(a, b)	$(a-x)b/(b-x)$
$(1, \infty)$	$(0, 1)$	$1/x$
$(0, \infty)$	$(-1, 1)$	$(x-1)/(x+1)$
$(0, \infty)$	$(-1, 1)$	$\pi \arctan(x)/4 - 1$
$(0, \infty)$	$(0, 1)$	$x/(1+x)$
$(0, \infty)$	$(0, 1)$	$\tanh x$
$(0, \infty)$	$(1, 0)$	$1/(1+x^2)$
$(0, \infty)$	$(1, 0)$	$\exp(-x)$
$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$	$x + 1/x$

En transformasjon som er utelatt fra tabellen er hvordan en kan mappe (a, b) til $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, og motsatt. Grunnen til dette er plassmangel, og resultatet er gitt under

Proposisjon 2.4.1. *La a, b være to reelle tall med $b > a$, da er*

$$T(x) = \frac{1}{4}\frac{(b-a)(b+a-2x)}{x^2 - (a+b)x + ab} \tag{2.18}$$

En funksjon slik at

$$X \xrightarrow{T} Y$$

Hvor $X = (a, b)$ og $Y = \mathbb{R}$.

Dette overlates til leser å vise, men det holder å sjekke at at $x \to a$ fører til at $T \to -\infty$, $x \to b$ fører til at $T \to \infty$, og at T er kontinuerlig på (a, b).

For å utlede resultatet kan en for eksempel mappe (a, b) på $(-1, 1)$ og deretter $(-1, 1)$ på $\mathbb{R}$. Det eksisterer heldigvis enklere transformasjoner fra et åpent interval til den reelle tallinjen om en tillater seg bruk av hyperbolske funksjoner. Å finne en slik transformasjon er gitt i oppgaveteksten under.

Merk avbildningene ovenfor kan både snus $(0, 1) = -(1, 0)$ og deles opp $(0, \infty) = (0, 1) \cap (1, \infty)$. Dette vil komme til nytte i følgende omskrivning

Proposisjon 2.4.2.

$$\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = S \int_0^1 g(Sx) + \frac{1}{x^2} g\left(\frac{S}{x}\right) \mathrm{d}x \tag{2.19}$$

Hvor $S > 0$ er en vilkårlig konstant.

Bevis. Ved å benytte substitusjonen $x \mapsto St \Rightarrow \mathrm{d}x = S\,\mathrm{d}t$ fås

$$\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = S \int_0^\infty g(St)\,\mathrm{d}t$$

Grensene blir uforandret siden $S > 0$. Merk at

$$\int_1^\infty g(Sx)\,\mathrm{d}x = -\int_1^0 g\left(\frac{S}{t}\right) \frac{\mathrm{d}t}{t^2}\,, \tag{2.20}$$

via substitusjonen $x \mapsto 1/t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t/t^2$. Ved å dele opp intervalet i $(0, 1) \cap (1, \infty)$ kan nå integralet skrives som

$$S \int_0^1 g(Sx)\,\mathrm{d}x + S \int_1^\infty f(Sx)\,\mathrm{d}x = S \int_0^1 g(Sx) + \frac{1}{x^2} f\left(\frac{S}{x}\right) \mathrm{d}x$$

Der likning (2.20) ble brukt. Dette fullfører beviset. $\square$

Spesielt så vil tilfellet når $S = 1$

$$\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x) + \frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x\,, \tag{2.21}$$

bli mye brukt fremmover.

Oppgaver

1. Benytt integralet fra eksempel (2.4.1) til å vise at

$$J = \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{(t-a)(b-t)}} = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}\,.$$

Bestem også integralet

$$\int_c^d \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{(u^2-c^2)(d^2-u^2)}}\,,$$

hvor $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

2. En annen transformasjon er

$$\int_1^a f\left(t^2 + \frac{a^2}{t^2}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^a f\left(t + \frac{a^2}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}\,,$$

noen ganger kjent som *Wolstenholme* transformasjonen. Vis at denne stemmer

3. La $f(x)$ være en kontinuerlig funksjon og $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ eksisterer. Vis at

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$$

Denne overgangen kalles ofte for *Slobin* transformasjonen.

4. Beregn integralet $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$, hvor $a \geq 2$.

5. **a)** Benytt transformasjonene

$$U(x) = \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2} \quad \text{og} \quad V(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

til å bevise proposisjon (2.4.1).

b) Bestem funksjonene $v(a,b)$, og $u(a,b)$ slik at

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f\Big(\operatorname{arctanh}\big(v(a,b,x)\big)\Big)u(a,b,x)\,\mathrm{d}x$$

Denne transformasjonen har en entydig invers på $\mathbb{R}$ – i motsetning til likning (2.18) – gitt ved

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = Q\int_a^b f\left(Q\tanh x + P\right)\frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x}$$

Bestem konstantene Q og P slik at likheten stemmer. Her er $P = P(a,b)$ og $Q = Q(a,b)$ funksjoner av a og b.

2.4.1 Weierstrass substitusjon

I denne delen skal vi se nærmere på en substitusjon kjent som weierstrass substitusjon[9]. Teknikken er oppkalt etter den tyske matematikeren Karl Weierstrass (1815-1897) og består i å sette

$$t \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right).$$

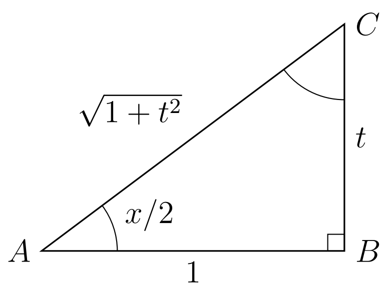
Meningen med substiusjonen er å transformere trigonometriske integral over til rasjonale funksjoner. Men for å gjøre dette trengs uttrykk for både $\mathrm{d}x$, $\sin x$ og $\cos x$

Teorem 2.4.3. (Weierstrass) *Anta at $a, b \in [-\pi, \pi]$ da er*

$$\int_a^b R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \int_\varphi^\psi R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

via substitusjonen $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Hvor R er en rasjonal funksjon, $\varphi = \tan(a/2)$, $\psi = \tan(b/2)$ og $\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$.

Bevis. Dett beviset tar utgangpunkt i figur (2.10), hvor sidene ble valgt på en



Figur 2.10: Figur med $t = \tan(x/2)$.

slik måte at $t = \tan(x/2)$. Dessverre får en bare uttrykk for $\sin(x/2)$ og $\cos(x/2)$ fra figuren

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{og} \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \tag{2.22}$$

For å få de rette verdiene benyttes dobbelformelene

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \tag{2.23}$$
$$\sin(A+B) = \cos A \sin B + \sin A \cos B \tag{2.24}$$

[9]Flere bøker kaller denne substitusjonen for Weierstrass uten å gi noen refferanser til hvorfor. Teknikken var kjent lenge før Weierstrass var født, blant annet fra Euler og ideen om å paramterisere enhetssirkelen har vært kjent i flere tusen år. Se `http://math.stackexchange.com/questions/461527/on-the-origins-of-the-weierstrass-tangent-half-angle-substitution` for flere detaljer. I de fleste verk så er teknikken kjent som weierstass-substitusjonen og derfor er det navnet som vil bli benyttet her og.

Ved å sette inn $A = B = x/2$ i likning (2.23) kan $\cos x$ skrives som

$$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 - \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,.$$

Tilsvarende så kan $\sin x$ skrives som

$$\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) = \frac{2t}{1+t^2}\,,$$

ved å sette inn $A = B = x/2$ i likning (2.24). For å bestemme $\mathrm{d}t$ deriveres $t = \tan(x/2)$ med kvotientregelen

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1+t^2)\,\mathrm{d}x$$

Dette gir som ønsket at $\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t/(1+t^2)$, hvor enhetsformelen og likning (2.22) ble benyttet i siste overgang. Til slutt har en

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2t}{1+t^2}\Big/\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{2t}{1-t^2}$$

og dette fullfører beviset. □

Eksempel 2.4.4. Vis at

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \log|\tan x + \csc x| + \mathcal{C}$$

Standardtrikset her er å få en åpenbaring og deretter se at en kan gange med

$$\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$$

forså å benytte seg av substitusjonen $u = \sec x + \tan x$. Dette er dog svart magi og overlates til leser. Her vises heller frem Weierstrass i sin prakt

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\,\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{(1+t)-(t-1)}{(1+t)(1-t)}\,\mathrm{d}t$$

For å bestemme integralet kan en nå dele opp integralet relativt enkelt

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{1}{1+t} - \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t = \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \mathcal{C} = \log\left|\frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)}\right| + \mathcal{C}$$

Men dette likner ikke helt på det som skulle vises. Heldigvis hjelper det å ha en liten algebratrollmann i magen. Legg merke til at

$$\frac{1+t}{1-t} = \frac{1+t}{1-t}\cdot\frac{1+t}{1+t} = \frac{2t}{1-t^2} + \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

Ved å sette inn har en altså at

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \log\left|\frac{2t}{1-t^2} + \frac{1+t^2}{1-t^2}\right| = \log|\tan x + \sec x| + \mathcal{C}$$

som var det som skulle vises. I siste overgang ble det ikke brukt mer enn teorem (2.4.4).

Eksempel 2.4.5. Som et siste eksempel skal vi se på det bestemte integralet

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Merk at det ikke fungerer og bruke Weierstrass substitusjonen med en gang. Siden $\tan(0) = 0$ og $\tan(2\pi/2) = 0$. Grunnen er at for at $\tan(x/2)$ skal være *unikt* definert, må en begrense intervalet til $x \in (-\pi, \pi]$. Problemet unngås dog ved å dele integralet inn i perioder eller benytte **??**.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$$

Her ble substitusjonen $t \mapsto 2\pi - x$ ble benyttet på siste integralet. Dette forandrer grensene $(\pi, 2\pi) \to (-\pi, 0)$. Ved nå og benytte seg av Weierstrass, fås

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^{-1} \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{3+t^2}$$

Siste integralet kan bli løst via substitusjonen $t \mapsto \sqrt{3}\,u$. Så

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Siste integralet er bare den deriverte av $\arctan u$.

Hittil har integralene våre vært relativt hyggelige og pene, og i slike tilfeller er Weierstrass svært nyttig. Beklagigvis bryter metoden helt sammen for de aller fleste kompliserte integrander.

$$\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x} = \int \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^{-3} \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\int \frac{1+2t^2+t^4}{(1-t)^3(1+t)^3}\,\mathrm{d}t$$

Integralet kan videre bli løst via delbrøksoppspalting, men denne blir lang. Konklusjonen blir at Weiestrass-substitusjon blir en siste utvei for å beregne trigonometriske integral. Den omskriver trigonometriske funksjoner til rasjonale, men uttrykkene en ender opp med kan være like vanskelig eller vanskeligere å integrere. Som vi skal se senere kan det være enklere å beregne slike integral i det komplekse planet.

Weierstrass hyperbolske

Weiestrass substitusjon fungerer ikke bare for trigonometriske funksjoner. Vi kan lage et svært liknende teorem for de hyperbolske funksjonene

Teorem 2.4.4. (Weierstrass hyperbolske) *Anta at $a, b \in [-\pi, \pi]$ da er*

$$\int_a^b R(\sinh x, \cosh x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi}^{\psi} R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right) \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

via substitusjonen $t = \tanh\left(\frac{x}{2}\right)$. Hvor R er en rasjonal funksjon, $\varphi = \tanh(a/2)$, $\psi = \tanh(b/2)$ og $\tanh(x) = \frac{2t}{1+t^2}$.

Oppgaver

1. La oss se på to klassiske integral som kan løses rimelig enkelt via Weierstrass. Vis at

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a + b\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \tag{2.25}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{a + b\sin\theta} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tag{2.26}$$

hvor $|a| \geq |b|$ er reelle konstanter. Vis spesielt at

$$6\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{2 + \sin\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2 + \sin\theta}$$

2.4.2 Euler substitusjon

Studiet av rasjonalle funksjoner med radikale nevnere har vært studert lenge

$$\int \frac{A(x)}{\sqrt{B(x)}}\,\mathrm{d}x$$

og har gitt oppspring til elliptiske kurver, elliptiske integraler, differensial geometri og mer. Håpet er at om A og B er 'pene' nok så kan integraler skrives på formen $P(x)/Q(x)$ hvor P og Q er polynomer. Studiet av disse integralene er ferdig i den forstand at alle slike integral kan bli løst ved hjelp av samme oppskrift.

En måte å gjøre denne omformingen på er å bruke hyperbolske eller inverse trigonometriske substitusjoner. En annen måte er å benytte seg av en rekke substitusjoner kalt *euler*-substitusjonene. I nyere tid har disse knepene mistet mye av sin popularitet av uviss grunn.

Eksempel 2.4.6.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| , \qquad a \in \mathbb{R}$$

Dette er et standard integral, men det er likevell nyttig å arbeide seg gjennom. Vi bruker substitusjonen

$$z \mapsto x + \sqrt{x^2 + a} \tag{2.27}$$

Dermed så kan $\mathrm{d}x$ uttrykkes som

$$\mathrm{d}z = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}}\right)\mathrm{d}x = \frac{x + \sqrt{x^2 + a}}{\sqrt{x^2 + a}}\,\mathrm{d}x = \frac{z}{\sqrt{x^2 + a}}\,\mathrm{d}x$$

Dette medfører at $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{\mathrm{d}z}{z}$. Med å sette inn kan altså integralet skrives

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a}} = \int \frac{\mathrm{d}z}{z} = \log|z| = \log\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + \mathcal{C}$$

Variabelskifte so ble brukt i dette eksempelet leder til en svært elegang løsning, men det ikke like klart hvordan substitusjonen kom frem. **??** kan skrives på formen

$$\sqrt{x^2+a} \mapsto z - x\,,$$

og det skal vise seg at dette er nøyaktig en av euler substitusjonene.

Proposisjon 2.4.3. *Euler substitusjonene er brukt for å beregne integraler på formen*

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,)\,\mathrm{d}x$$

ved å fjerne kvadratroten. Anta att ax^2+bx+c ikke er ulelukkende negativt og at $a \neq 0$. Dersom

1. *$a > 0$ benytt variabelskiftet*

$$\sqrt{ax^2+bx+c} \mapsto x\sqrt{a} + t \tag{2.28}$$

2. *polynomet ax^2+bx+c har to distinkte reelle røtter α, β da kan substitusjonen*

$$\sqrt{ax^2+bx+c} \mapsto (x-\alpha)t \tag{2.29}$$

benyttes.

3. *$c > 0$ kan substitusjonen*

$$\sqrt{ax^2+bx+c} \mapsto xt + \sqrt{c} \tag{2.30}$$

bli brukt.

Eksempel 2.4.7.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$$

Siden $c > 1$ så kan likning (2.30) brukes

$$\sqrt{1+x-x^2} \mapsto tx + 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{1-2t}{1+t^2}$$

Differensialene våre blir

$$\mathrm{d}x = -2\frac{t^2-t-1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}} = -2\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

Siden $\sqrt{1+x-x^2} = tx+1 = -\frac{t^2-t-1}{1+t^2}$ Dette fører og til at $1+x = \frac{t^2-2t}{1+t^2}$. Setter vi alt inn fås

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{1+x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}} = \int \frac{1+t^2}{t^2-2t}\frac{-2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = -2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-2t} \\ &= \int \frac{(t-2)-t}{t(t-2)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} - \frac{(t-2)'}{t-2}\,\mathrm{d}t = \log\left|\frac{t}{t-2}\right| + \mathcal{C} \end{aligned}$$

Ved å substituere tilbake for x fås

$$\int \frac{1}{1+x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}} = \log\left|\frac{\sqrt{1+x-x^2}-1}{\sqrt{1+x-x^2}-2x-1}\right| + \mathcal{C}$$

som fullfører eksempelet.

Abels substitusjon

En annen måte å kvitte seg med rottegnet i integralet er å benytte seg av Abel's substitusjon. Den virker på integraler på følgende former

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}\,, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+p)^m\sqrt{kx^2+l}}$$

Trikset er å la den deriverte av rottegnet bli satt som den nye variablen. Teknikken baserer seg på at $(\sqrt{A}) = A'/\sqrt{A}$. La altså henholdsvis

$$t = \left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)'\,, \qquad t = \left(\sqrt{kx^2+l}\right)'$$

Eksempel 2.4.8.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}$$

La som i teksten $t = (\sqrt{x^2+t})' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Slik at $t\sqrt{x^2+1} = x$. Deriverer vi begge sider med hensyn x fås

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2+1} + t\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = 1$$

Siste er jo bare hvordan vi definerte t. Så vi har $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2+1} + t^2 = 1$. Ved å trekke fra t^2 på begge sider og dele kan uttrykket skrives som

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}$$

Tilslutt kan x^2+2 uttrykkes på følgende måte $x^2 = \frac{t^2}{1-t^2} \;\Rightarrow\; x^2+2 = \frac{2-t^2}{1-t^2}$. Innsatt kan integralet skrives som

$$\int \frac{1}{x^2+2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{1-t^2}{2-t^2}\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctanh}\frac{t}{\sqrt{2}}$$

Her kan en igjen benytte at $\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$. Så

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2x^2+2}+x}{\sqrt{2x^2+2}-x} + \mathcal{C}$$

2.5 Brøker og kvadratrøtter

I denne delen skal vi se nærmere på noen spesielle teknikker for å beregne brøker, kvadratrøtter, og kombinasjoner av disse. Tidligere har en sett på en rekke generelle substitusjoner, mens her blir noen substitusjoner som er spesielt effektive på kvadratrøtter og brøker nevt. Merk at de kvadratrøttene som stort sett nevnes i denne delen er på formen $\sqrt{ax^2+bx+c}$, med rasjonelle konstanter.

2.5.1 Brøker

La oss begynne med å se litt på fortegn og viktigheten av å være forsiktig.

Eksempel 2.5.1.

$$I = \int_{-1/2}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^3-3x^2+1}}$$

Vi begynner med å faktorisere polynomet under rottegnet. Ser raskt at $x=1$ er en løsning så

$$\begin{aligned} 2x^3-3x^2+1 &= (2x^3-2x)-(x^2-1) \\ &= 2x^2(x-1)-(x-1)(x+1) \\ &= (x-1)(2x^2-x-1) \end{aligned}$$

Ved å bruke andregradsformelen, eller mer faktorisering kan polynomet skrives som $2x^3-3x^2+1=(x-1)^2(2x+1)$. Ved å sette inn fås

$$I = \int_{-1/2}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)^2(2x+1)}} = \int_{-1/2}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{|x-1|\sqrt{2x+1}}$$

For $-1/2 < x < 0$ så har vi $-3/2 < x-1 < -1$ og $0 < 2x+1 < 1$. Så er $|x-1|$ negativ på intervallet, mens $\sqrt{2x+1}$ beholder fortegnet sitt. Ved å sette inn fås

$$I = \int_{-1/2}^{0} \frac{1}{1-x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x+1}}$$

Tanken er nå å la $t \mapsto \sqrt{2x+1}$ slik at $x=(t^2-1)/2$. Derivasjon gir $\mathrm{d}t = \frac{2\,\mathrm{d}x}{2\sqrt{2x+1}}$.

$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-\frac{t^2-1}{2}} = \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-(t/\sqrt{3})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctanh} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Hvor vi brukte . Vi kan skrive svaret en del penere ved å bruke definisjonen $\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$. Siden

sett inn refferanse til standard arctanh integral

$$\log\frac{1+1/\sqrt{3}}{1-1/\sqrt{3}} = \log\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \log\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2} = \log(2+\sqrt{3})$$

Så kan det endelige svaret skrives som

$$\int_{-1/2}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^3-3x^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctanh}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\log(2+\sqrt{3})$$

Ofte er det mulig å uttrykke integralet som en rasjonell funksjon hvor teller og nevner er lineære, $\frac{ax+b}{cx+d}$. I disse tilfellene er følgende susbstitusjon $t = \frac{ax+b}{cx+c}$ eller $t^2 = \frac{ax+b}{cx+c}$ nyttig for å elliminere rottegnet.

Eksempel 2.5.2.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$$

Først må vi skrive om integralet slik at vi får frem det rasjonale uttrykket vårt

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}(1-x)^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$$

Ved å la $t^2 \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ så får vi at $x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$. Derivasjon gir oss at

$$\mathrm{d}x = \frac{4t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

Mens $1 - x = \frac{2}{1+t^2}$. Dette er alt vi trenger. Innsetning gir nå

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \int \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^2 \frac{4t}{(1+t^2)^2}\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int dt = t + \mathcal{C}$$

Altså er

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \mathcal{C}$$

som var det som skulle vises.

Uttrykk på formen $\texttt{lineær} \cdot \sqrt{\texttt{kvadratisk}}$ kan forenkles ved å finne igjen den deriverte.

Eksempel 2.5.3.

$$I = \int (x+1)\sqrt{2x^2+3x+1}$$

Tanken er nå at vi ønsker å finne koeffisienter α og β slik at

$$x + 1 = a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x^2+3x+1) + \beta = a(4x+3) + \beta$$

Dette gir $\alpha = 1/4$ og $\beta = 1/4$ via innsetning eller falkeblikk. Integralet kan altså skrives som

$$\begin{aligned} I &= \int \left[\frac{1}{4}(4x+3) + \frac{1}{4}\right]\sqrt{2x^2+3x+1}\,dx \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(2x^2+3x+1)^{2/3} + \frac{1}{4}\int \sqrt{2x^2+3x+1}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Siden $\int f'(x)\sqrt{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{v}\,\mathrm{d}v = \frac{2}{3}f(x)^{3/2} + \mathcal{C}$. Dermed blir uttrykket noe enklere og integrere og vi kan fokusere på siste delen. Fokuset i denne delen er på selve omskrivningen og ikke løsningen av det siste integralet. I korte trekk brukes $z \mapsto 4x+3$ slik at

$$J = \int \sqrt{2x^2+3x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{2}}{16}\sqrt{z^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{16}\int \sqrt{\cosh^2 y - 1}\,\sinh y\,\mathrm{d}y$$

Hvor vi benyttet oss av substitusjonen $z \mapsto \cosh y$ i siste overgang. Siden $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ så er $\sqrt{\cosh^2 x - 1} = \sqrt{\sin^2 x}$. Altså fås

$$J = \int \sinh^2 y = \int \frac{\cosh(2y)-1}{2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\sinh y \cosh y - \frac{1}{2}y$$

Svaret blir altså $\frac{1}{2}\sinh(\operatorname{arccosh} y)y - \frac{1}{2}\operatorname{arccosh} y$. Vi har videre at $\sinh(\operatorname{arccosh} y) = \sqrt{y^2-1}$ og $\operatorname{arccosh} y = \log\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$. Dette gir

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x^2+3x+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{\sqrt{2}}{32}(4x+3)\sqrt{(4x+3)^2-1} - \frac{\sqrt{2}}{32}\operatorname{arccosh}(4x+3)\\ &= \frac{1}{8}(4x+3)\sqrt{2x^2+3x+1} - \frac{\sqrt{2}}{32}\operatorname{arccosh}(4x+3)\end{aligned}$$

Det hele og fulle svaret blir altså

$$\begin{aligned}I &= \int (x+1)\sqrt{2x^2+3x+1}\\ &= \frac{1}{6}(2x^2+3x+1)^{3/2} + \frac{1}{32}(4x+3)\sqrt{2x^2+3x+1} - \frac{\sqrt{2}}{128}\operatorname{arccosh}(4x+3)\\ &= \frac{1}{96}(4x+5)(8x+5)\sqrt{2x^2+3x+1} - \frac{\sqrt{2}}{128}\operatorname{arccosh}(4x+3)\end{aligned}$$

En kan også bruke metoden med uttrykk på formen $\frac{\texttt{lineær}}{\sqrt{\texttt{kvadratisk}}}$.

Eksempel 2.5.4.

$$I = \int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x-3}}\,\mathrm{d}x$$

Igjen så leter vi etter å skrive om teller, ved å finne den deriverte av $4x^2+4x-3$. Legg merke til at $4x^2+4x-3 = (2x+1)^2-4$. Så

$$x+3 = \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(2x+1)^2-4\right] + \beta = 4\alpha(2x+1)+\beta$$

Dette gir $\alpha = 1/8$ og $\beta = 5/2$. Altså kan vi skrive

$$\begin{aligned}\int \frac{\frac{1}{8}(8x+4)+\frac{5}{2}}{\sqrt{4x^2+4x-3}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{8}\int \frac{(4x^2+4x-3)'\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2+4x-3}} + \frac{5}{4}\int \frac{(2x+1)'\,\mathrm{d}x}{(2x+1)^2-4}\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} + \frac{5}{4}\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-4}}\end{aligned}$$

Det første integralet er et standard integral $\int \mathrm{d}x/2\sqrt{x} = \sqrt{x} + \mathcal{C}$ og det siste integralet kan bli løst ved en valgfri euler-substitusjon.

2.5.2 KVADRATRØTTER

Vi har sett mange eksempler på integraler med kvadratrøtter tidligere. Her kan en bruke euler-substitusjoner, hyperbolske eller trigonometriske substitusjoner også videre. Her ser vi på noen få mindre kjente teknikker for å forenkle integraler med kvadratrøtter i seg.

Eksempel 2.5.5.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}$$

Her kan vi begynne å bruke våre magiske trigononometriske identiteter. Men det er langt enklere å gange med den konjugerte

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$$

Hvor tredje kvadratsetning ble brukt, $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Bruker vi det samme på integrlet vårt får vi

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}} &= \int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{(x^2+1)-(x^2-1)}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Hvor begge integralene kan bli løst via delvis integrasjon eller en luddig substitusjon. Forsec:II-Delvis-integrasjon det første integralet kan substitusjonen $x \mapsto \tan x$ benyttes då får en

$$J = \int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{(\tan t)^2+1}\,\frac{\mathrm{d}t}{(\cos t)^2} = \int (\sec t)^3\,\mathrm{d}t$$

og dette integralet vil bli studert nærmere senere[10], fremgangsmåten blir å bruke delvis integrasjon samt integralet av $\sec(x)$ som har blitt studert tidligere, eksempel (2.4.4). Alternativt gir delvis integrasjon

$$J = \int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = x \cdot \sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$$

Herfra legger vi merke til at $\int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$. Hvor det første integralet kjenner vi igjen som J. Altså er

$$\begin{aligned}J = \int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= x \cdot \sqrt{x^2+1} - \left(J - \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x\right) \\ 2J &= x\sqrt{x^2+1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} \\ J &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh} x + \mathcal{C}\end{aligned}$$

Hvor det siste integralet har blitt behandlet i seksjon 4 om hyperbolske integraler og funksjoner. Integralet $\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ kan løses tilsvarende og overlates til leser.

[10] Se eksempel (2.7.1) fra avsnitt (2.7) om trigonometriske integraler.

Eksempel 2.5.6. Andre integraler kan skrives om før de integreres

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Her velger vi å derasjonalisere uttrykket slik at vi kan skrive integranden som

$$\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{x^2+1+1}{(x^2+1)\sqrt{2+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{2+x^2}}$$

Dermed kan integralet skrives som

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \log\left|x+\sqrt{x^2+2}\right| + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{2+x^2}}$$

hvor vi benyttet oss av eksempel (2.4.6) og euler-substitusjonen $z \mapsto x+\sqrt{x^2+a}$. Merk at integralet kunne blitt løst like elegant ved bruk av $x \mapsto \sqrt{2}\sinh t$. Det siste integralet samt generaliseringer overlates til leser.

En nyttig egenskap når det kommer til brøker er følgende

Lemma 2.5.1.

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+x^{n-2}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} = \int_0^\infty \frac{x^{n-2}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \tag{2.31}$$

Gitt at n er et reelt tall større enn 1.

Bevis. For $n = 2$ holder proposisjonen åpenbart vann. Ved å benytte seg av substitusjonen $1/x$ så har en

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} = -\int_\infty^0 \frac{1}{1+x^{-n}}\frac{x^n}{x^n}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_0^\infty \frac{x^{n-2}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \tag{2.32}$$

Disse integralene må da være like store. Addisjon gir da

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} + \int_0^\infty \frac{x^{n-2}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1+x^{n-2}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$

å dele på 2 og bruke likning (2.32) fullfører beviset. □

Proposisjon 2.5.1. *Gitt at n er positiv og $a, b \in \mathbb{R}$, da er*

$$\int_0^\infty \frac{a+bx^{n-2}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_0^\infty \frac{1+x^{n-2}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \tag{2.33}$$

Dette er en generalisering av lemma (2.5.1), og følger nesten direkte fra lemmaet. I stedet for å se på beviset studeres heller integralene i likning (2.31) for $n = 4$. Å kunne veksle mellom disse ulike formene er nyttig og senere skal vi se at integraler på formen $\int \mathrm{d}x/(1+x^n)$ er noe enklere å regne med[11].

[11] Dette vil komme godt frem i delen om kompleks integrasjon

Eksempel 2.5.7. Vi ønsker å bestemme integralene

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}\,,\qquad \int_0^\infty \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^4} \quad \text{og} \quad \int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

merk først at fra lemma (2.5.1) så er de to første like og vi har sammenhengen

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \int_0^\infty \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

en annen nyttig ting å notere seg er at ved å dele på siste integralet på x^2 så er

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+1/x^2}{x^2+1/x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+1/x^2}{(x-x^{-1})^2+2}\,\mathrm{d}x$$

Ved å bruke substitusjonen $u \mapsto x - x^{-1}$ så er $\mathrm{d}u = (1+1/x^2)\,\mathrm{d}x$ og grensene blir $(-\infty, \infty)$. Dette er ofte en nyttig omskrivning.

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

hvor substitusjonen $u \mapsto \sqrt{2}\,y$ ble brukt. Oppsumert har en altså at

$$\int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \tag{2.34}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \tag{2.35}$$

Ved å bruke samme fremgangsmåte kan en vise at følgende korollar

Korollar 2.5.1.

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}+x^{3n-1}}{1+x^{4n}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\,\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

for alle $n \in \mathbb{R}_+$.

Oppgaver

1. Bestem integralene $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$ og $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x\,.$

2. **a)** Bestem integralet $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$

   b) Integralet ovenfor kan generaliseres til

$$I_a = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+a}} = \frac{1}{\sqrt{a-1}}\arctan\left(\frac{\sqrt{a-1}\,x}{\sqrt{x^2+a}}\right) + \mathcal{C}\,.$$

   Bevis generaliseringen ovenfor. Hva blir I_1?

3. **a)** Bestem integralet $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2+x^2}{1+x^4}$ uten bruk av (2.33).
b) Bevis at likning (2.31) følger fra

$$\int_0^\infty \frac{a+bx^{n-2}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_0^\infty \frac{1+x^{n-2}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x\,,$$

Bevis så det motsatte altså at likningen over (2.5.1) følger fra likning (2.31).

?? 16

2.6 Delvis integrasjon

I denne delen skal vi igjen besøke delvis integrasjon

$$\int uv' = uv - \int u'v\,,$$

med tilhørende smarte knep og metoder. Som oppfriskning tas et lite eksempel som vil komme til nytte senere

Proposisjon 2.6.1.

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{d}x = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\big[\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x\big] + \mathcal{C}$$
$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{d}x = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\big[\beta\sin\beta x + \alpha\cos\beta x\big] + \mathcal{C}$$

Bevis. Resultatet ovenfor kan vises noe enklere ved hjelp av kompleks analyse. Men dette blir først sett på litt senere. Tar først for oss første integral, og kaller det for I. En delvis integrasjon gir da

$$I = e^{\alpha x}\sin\beta x = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\sin\beta x - \int \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\beta\cos\beta x\,\mathrm{d}x$$

Der $u = \sin\beta x$ og $v = e^{\alpha x}/\alpha$. Ved å bruke delvis integrasjon atter en gang blir nå integralet

$$I = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\sin\beta x - \frac{\beta}{\alpha}\left[\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\cos\beta x + \frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{d}x\right]$$

Legg merke til at en ender opp med det originalet integralet I på høyre side av likningen. Ved å skrive ut og forenkle

$$I = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\sin\beta x - \frac{\beta}{\alpha^2}e^{\alpha x}\cos\beta x - \frac{\beta^2}{\alpha^2}I$$

Ved å gange begge sider med α^2 og legge til $\beta^2 I$ på begge sider fås

$$(\alpha^2+\beta^2)I = e^{\alpha x}\alpha\sin\beta x - e^{\alpha x}\beta\cos\beta x$$

Deles begge sider på $\alpha^2+\beta^2$ får en som ønsket at

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{d}x = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\big[\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x\big] + \mathcal{C}$$

helt tilsvarende regning kan benyttes for å vise det andre integralet. Å gjennskjenne integralet på høyre side er et velkjent indianertriks, og kommer ofte til nytte. $\square$

2.6.1 Delvis kanselering

Anta at en skal integrere en funksjon som på kan deles opp til $f = g + h$. Tanken er nå å bruke delvis integrasjon på h slik at integralet av g blir kanselert.

$$\int g + h = \int g + \left[r - \int g \right] = r$$

Det spiller selvsagt ingen rolle om det er g eller h som blir utsatt for den delvise integrasjonen. Eneste forutsetningen at h kan skrives som et produkt av to funksjoner u og v', på en slik måte at $g = u'v$. Dette blir forhåpentligvis klarere i det neste eksempelet

Eksempel 2.6.1. La oss se på det ubestemte integralet av funksjonen

$$f(x) = (1 + 2x^2)e^{x^2}$$

Integralet består av summen av to funksjoner hvor det ikke er mulig å integrere noen av delene alene. Leser oppfordres til å prøve delvis integrasjon, ulike substitusjoner eller andre metoder. Resultatet vil dessverre være nedslående, ingen av metodene biter på integralet. Løsningen blir heldigvis å dele integralet

$$J = \int (1 + 2x^2)e^{x^2} \, \mathrm{d}x = \int 2x^2 e^{x^2} + e^{x^2} \, \mathrm{d}x \, ,$$

og benytte delvis integrasjon på siste leddet med $u = \exp(x^2)$ og $v' = 1$. Da er $u' = 2x \exp(x^2)$ og $v = x$. Ikke minst så er $u'v = 2x^2 \exp(x^2)$.

$$J = \int 2x^2 e^{x^2} \, \mathrm{d}x + \left[xe^{x^2} - \int x \cdot 2xe^{x^2} \, \mathrm{d}x \right] = xe^{x^2} + \mathcal{C}$$

Hvilken delvis integrasjon som fungerer er noe som kommer med erfaring. La oss se på et noe vanskeligere eksempel

Lemma 2.6.1.

$$\int \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, \mathrm{d}y = \frac{y}{x^2 + y^2} \tag{2.36}$$

Bevis. La oss begynne å dele integralet opp i to deler

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, \mathrm{d}y = \int \frac{1}{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}y + \int \frac{-2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, \mathrm{d}y \\ &= \int \frac{1}{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}y + \int y \cdot \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \frac{1}{x^2 + y^2} \right) \mathrm{d}y \end{aligned}$$

En kan nå rimelig enkelt benytte seg av delvis integrasjon på siste leddet. Her er $u = y$ og $v = 1/(x^2 + y^2)$.

$$I = \int \frac{1}{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}y + \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - \int \frac{1}{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}y \right) = \frac{y}{x^2 + y^2} + \mathcal{C}.$$

For å se omskrivningen av integralet kan en se at

$$\int \frac{2x}{(x^2 + a^2)^2} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{x^2 + a^2} + \mathcal{C}$$

Via eksempelvis $u = x^2 + a^2$, og at $-1/u^2 = (1/u)'$. Slik at

$$\int \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y = \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x^2+y^2}$$

og dette fullfører beviset. □

Kanseleringen var ikke strengt talt nødvendig, siden $1/(x^2+y^2)$ ikke er spesielt vanskelig å integrere, men poenget er at den delvise kanseleringen gjorde beregningene noe enklere. Å bruke denne teknikken er aldri eneste utvei, teknikken er helt tilsvarende som å bruke produktregelen og kjerneregelen baklengs. Som eksempel kunne en løst oppgavene ovenfor på følgende måte

$$f(x) = (1+2x^2)e^{x^2} = x'e^{x^2} + x(e^{x^2})' = (xe^{x^2})'$$

Der produktregelen ble benyttet i siste overgang. Tilsvarende

$$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(x^2+y^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}y - y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Har man ikke langt mosegrodd skjegg kan disse tingene være vanskelig å legge merke til. Det er derfor delvis kanselering i mange tilfeller er vell så nyttig.

Oppgaver

1. $I = \displaystyle\int e^x \sin x + e^x \cos x \,\mathrm{d}x$

2. Gitt at[12] $\sqrt{\pi} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ beregn følgende integral[13]

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

3. Bestem konstanten c og k slik at

$$I = \int (x+c)\sqrt{e^x x}\,\mathrm{d}x = kx\sqrt{e^x x} + \mathcal{C}\,.$$

4. $I = \displaystyle\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$

5. $I = \displaystyle\int \log(\log x) + \frac{2}{\log x} - \frac{1}{(\log x)^2}\,\mathrm{d}x$

[12] Integralet betegnes ofte som det gaussiske integralet og vil bli vist på ulike måter i Del III.

[13] Integralet betegnes ofte som *forventingsverdien* til den gaussiske funksjonen e^{-x^2} og et hint for å løse det er selvsagt delvis integrasjon. Men nok fotnoter nå.

2.6.2 Eksponentialfunksjonen

Anta at du er blitt tatt til fange av en ond verdensleder og får ikke dra hjem før du har bestemt følgende integral

$$\int (x^4 - 6x^2 + 8x - 3)e^x \,\mathrm{d}x \tag{2.37}$$

Er du noenlunde stø på de grunnleggende integrasjonsteknikkene begynner du vel allerede nå og bite negler og skjelve. For den normale fremgangsmåten er delvis integrasjon, hvor i hver delvise integrasjon derives polynomdelen slik at den tilslutt forenkles til en konstant. Metoden fungerer, men kan og føre til svært mange delvise integrasjoner og er svært langtrekkelig. I oppgaven ovenfor trengs det eksempelvis 4 delvise integrasjoner for å beregne integralet. Etter omstendig og monoton regning, kan svaret skrives som

$$\int (x^4 - 6x^2 + 8x - 3)e^{-x} \,\mathrm{d}x = (x-1)^4 e^x + \mathcal{C}$$

Legg merke til at polynomet på venstre og høyre side er av lik grad. Dette gjør det rimelig å gjøre følgende antakelse

Proposisjon 2.6.2. *Integralet av $p(x)e^x$ kan alltid skrives på formen*

$$\int p(x)e^x \,\mathrm{d}x = q(x)e^x\,, \tag{2.38}$$

der p og q har samme grad.

Bevis. La oss starte med funksjonen $f(x) = q(x)e^x$, hvor p er et vilkårlig polynom. Derivasjon gir oss da at

$$f'(x) = q'(x)e^x + q(x)e^x = \big[q(x) + q'(x)\big]e^x = p(x)e^x$$

Der $p(x) = q(x) + q'(x)$. Legg merke til at p og q begge er polynomer av samme grad. Ved å integrere $p(x)$ har en nå at

$$\int p(x)e^x \,\mathrm{d}x = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = q(x)e^x + \mathcal{C}$$

Hvor p og q selvsagt har samme grad. $\square$

La oss benytte oss av proposisjonen på et litt enklere eksempel

Eksempel 2.6.2.

$$I = \int (x^2 - 1)e^x \,\mathrm{d}x$$

Polynomet av grad 2, og det er derfor må også svaret inneholde et polynom av grad to. Vi gjør derfor følgende ansatz

$$\int (x^2 - 1)e^x \,\mathrm{d}x = (ax^2 + bx + c)e^x + \mathcal{C}$$

Ved å derivere begge sider av likningen fås

$$\begin{aligned}(x^2-1)e^x &= \left[(ax^2+bx+c)+(ax^2+bx+c)'\right]e^x \\ &= \left(ax^2+[b+2a]x+[b+c]\right)e^x\end{aligned}$$

Ved nå og anta at høyre og venstre side er like må alle koeffisientene være like. Dette gir følgende likninger

$$\begin{aligned}1 &= a \\ 0 &= b+2a \\ -1 &= b+c\end{aligned}$$

Første likning gir at $a=1$. Neste likning gir at $b=-2a=-2$, og siste likning gir at $c=-b-1=1$. Dermed så er

$$\int (x^2-1)e^x\,\mathrm{d}x = (x^2-2x+1)e^x = (x-1)^2e^x + \mathcal{C}$$

En bytter altså ut å løse n-delvise integrasjoner med å løse $n+1$ likningsett. Siden det finnes mange svært raske og nøyaktige måter å løse disse på er det ofte å foretrekke. Ved hjelp av gauss-elliminiasjon kan likninsettet ovenfor løses som følger

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1\\2&1&0&0\\0&1&1&-1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&1&1&-1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

hvor en kan lese mer om dette i enhver lineær algebrabok. La oss ta ett siste eksempel.

Eksempel 2.6.3. Vi ønsker å bevise proposisjon (2.6.1) uten å måtte gå igjennom to (stygge) delvise integrasjoner.

$$\begin{aligned}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{d}x &= \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left[\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x\right]+\mathcal{C} \\ \int e^{\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{d}x &= \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left[\beta\sin\beta x+\alpha\cos\beta x\right]+\mathcal{C}\end{aligned}$$

Tanken er nå at vi antar at både $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{d}x$ og $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{d}x$ kan skrives

$$e^{\alpha x}\left[A\sin\beta x+B\cos\beta x\right],$$

hvor A og B er reelle konstanter. Forklaringen er enkel. Siden eksponentialfunksjonen er sin egen derivert, og cosinus og sinus er hverandres deriverte må integralet nødvendigvis være en linær kombinasjon av disse. Målet blir altså å bestemme konstantene ovenfor. Som i forrige eksempel deriverer vi begge sider

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[Ae^{\alpha x}\sin\beta x+Be^{\alpha x}\cos\beta x\right] \\ e^{\alpha x}\cos\beta x\,\mathrm{d}x &= e^{\alpha x}(-\beta A\ +\alpha B)\sin\beta x+e^{\alpha x}(\alpha A+\beta B)\cos\beta\end{aligned}$$

Den deriverte av vesntresiden følger fra analysens fundamentalteorem, mens høyresiden ble derivert via produktregelen og kjerneregelen. For at høyre og venstre side skal være like trenger vi

$$\begin{aligned} -\beta A + \alpha B &= 0 \\ \alpha A + \beta B &= 1 \end{aligned}$$

Dette er et likningsett som vi kan løse med hensyn på A og B. Løsningene blir

$$\left[A = -\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} \; , \; B = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \right]$$

Altså har vi vist

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x \,\mathrm{d}x = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2} \left[\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x \right] + \mathcal{C} \,,$$

som ønsket. Integralet $\int e^{\alpha x} \sin \beta x \,\mathrm{d}x$ føres helt likt, og overlates derfor til leser.

Oppgaver

1. $\displaystyle\int e^x (x^4 - 6x^2 + 8x - 3) \,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int e^{ax+b} (x^2 - 1) \,\mathrm{d}x$

3. La oss se på en svak generalisering av oppgaven. Ved å sette inn generelle uttrykk for polynomene kan likning (2.38) skrives som

$$\int e^x \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \,\mathrm{d}x = e^x \left(\sum_{k=0}^{n} c_k x^k \right) + \mathcal{C} \,,$$

hvor a_k er kjente konstanter og $a_k \neq 0$ for alle k og tilsvarende for c_k. Målet blir nå å uttrykke koeffisientene c_n ved hjelp av a_n. Vis at ved å følge samme fremgangsmåte som i eksempel (2.6.2) ender en opp med

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = c_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_{k-1} + k c_k \,.$$

Dette er et likningsett som kan løses, vis at koeffisientene c_n kan defineres rekursivt som

$$c_{n-k-1} = a_{n-k} - (n-k) c_{n-k} \qquad k = 0, 1, \cdots, n-1 \,.$$

Hva er initialbetingelsen? Test ut iterasjonen på likning (2.37). Dersom e^x i stedet hadde vært på formen e^{ax+b} er det mulig å nå definere c_n rekursivt, hva blir i såfall rekursjonen?

4. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} x^n \,\mathrm{d}x \,, \qquad n \in \mathbb{N}$

2.6.3 Tabell og reduksjonsformler

I forrige del ble det sett på ulike måter å *slippe* å gjennomføre delvis integrasjon på. Eksempelvis takket være at e^x men hva med integraler på formen

$$\int_0^{\pi} (x^3 - 1)\cos x \, \mathrm{d}x \tag{2.39}$$

Her kan en ikke lengre anta hva svaret skal bli da $\cos x$ og $\sin x$ deriverte har en periode på fire og ikke en. Det en står igjen med er altså vanlig delvis integrasjon.

Metoden vi skal bruke her ble visstnok først tatt i bruk på 1960 tallet [4] og er ikke spesielt kjent. Noe av grunnen nok at metoden ikke revolusjonerer delvis integrasjon; men heller automatiserer arbeidet.

La oss integrere funksjonen fg, og lar $f^{(k)}$ betegne den k'te deriverte og $g_{(k)}$ betegne den k'te integrerte. Ved å bruke delvis integrasjon får en da

$$\begin{aligned}
\int fg &= fg_1 - \int f^1 g_1 \\
&= fg_1 - f^1 g_2 + \int f^1 g_2 \\
&= \cdots \\
&= fg_1 - f^1 g_2 + f^2 g_3 - \cdots + (-1)^{k+1} f^k g_{k+1} + \cdots
\end{aligned}$$

Dersom det eksister en n slik at $f^n = 0$ eller $g_n = 0$ stopper prossesen etter n-delvise integrasjoner. Vi illustrerer dette med et eksempel.

Eksempel 2.6.4. Vi tar utgangspunkt i likning (2.39) og ønsker først å beregne det ubestemte integralet

$$\int (x^3 - 1)\cos x \, \mathrm{d}x$$

vi velger nå $u = x^3$, og $v = \cos x$. Grunnen er enkel, etter fire derivasjoner blir u null, mens v er periodisk og blir aldri null. De deriverte og integrerte er gitt i tabell (2.3) Ved å gange sammen u^k med v_{k+1} – som vist med pilene i tabellen –

Tabell 2.3: Viser de deriverte til $u = x^3 - 1$, og integrerte til $v = \cos x$.

u		v
$x^3 - 1$	$\searrow$	$\cos x$
$3x^2$	$\searrow$	$\sin x$
$6x$	$\searrow$	$-\cos x$
6	$\searrow$	$-\sin x$
0		$\cos x$

kan integralet skrives som

$$\begin{aligned}
\int (x^3 - 1)\cos x \, \mathrm{d}x &= (x^3 - 1)\sin x - 3x^2(-\cos x) + 6x(-\sin x) - 6\cos x \\
&= (x^3 - 1)\sin x + 3x^2\cos x - 6x\sin x - 6\cos x
\end{aligned}$$

som ønsket.

Dersom vi videre trenger å bruke delvis tre eller flere ganger kommer vi alltid til å skrive opp de deriverte som i tabellen ovenfor. Denne teknikken kan og brukes til å utlede taylorrekka til ulike funksjoner. Under viser vi dette for e^x.

Eksempel 2.6.5. Vi studererer følgende funksjon

$$I = \int_0^x e^t \, \mathrm{d}t$$

På den ene siden vet vi at integralet er likt $I = [e^t]_0^x = e^x - 1$, siden e^t per definisjon er sin egen derivert. Men vi kan og bruke delvis integrasjon for å bestemme uttrykket la $v = 1$ og $u = e^t$, da får vi tabell (2.4) Via sammenlikning

Tabell 2.4: Viser de deriverte til $u = x^3 - 1$, og integrerte til $v = \cos x$.

u		v
e^t	$\searrow$	1
e^t	$\searrow$	t
e^t	$\searrow$	$t^2/2$
e^t	$\searrow$	$t^3/6$
e^t		$t^4/24$

og å bruke at $\int_0^x t^n \, \mathrm{d}x = x^n/(n+1)$, så har vi

$$\begin{aligned} I &= \int_0^x e^t \, \mathrm{d}t \\ e^x - 1 &= \left[te^t - \frac{1}{2}t^2e^t + \frac{1}{6}t^3e^t - \frac{1}{24}t^4e^t + \cdots \right]_0^x \\ &= e^x \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \cdots \right) \end{aligned}$$

Deler vi begge sider på e^x, eller ganger med e^{-x} får vi

$$\begin{aligned} 1 - e^{-x} &= \qquad x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \cdots \\ e^{-x} &= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots \end{aligned}$$

som gir oss rekkeutviklingen for e^{-x}, ved å sette inn $u = -x$, får en tilsvarende utviklingen for e^x.

For flere kildehenvisninger og eksempler anbefales [17] på det varmeste. La oss ta en titt på en siste klasse av integraler, hvor tabell-integrasjon viser seg å være nyttig.

Eksempel 2.6.6. La oss betrakte følgende integral

$$K = \int \frac{x^3}{(1+x)^5} \, \mathrm{d}x$$

Den normale fremgangsmåten er å bruke substitusjonenen $u \mapsto x+1$, slik at

$$K = \int \frac{x^3}{(1+x)^5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(u-1)^3}{u^5}\,\mathrm{d}u = \int \frac{u^3-3u^2+3u-1}{u^5}\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{-1+4u-6u^2+4u^3}{u^4} = -\frac{1}{4}\frac{(2x+1)(2x^2+2x+1)}{(x+1)^4}$$

Hvor igjen integrasjonskonstanten ble droppet av plassmangel. Bruker vi heller tabell-integrasjon kan K skrives på en mer givende form (suggestive form). Ved

Tabell 2.5: Integrasjon av $f(x) = x^3/(1+x)^5$

u		v
x^3	$\searrow$	$(1+x)^{-5}$
$3x^2$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}(1+x)^{-4}$
$6x$	$\searrow$	$\frac{1}{12}(1+x)^{-3}$
6	$\searrow$	$-\frac{1}{24}(1+x)^{-2}$
0		$-\frac{1}{24}(1+x)^{-1}$

å bruke verdiene fra tabell (2.5) kan K og skrives som

$$K = -\frac{1}{4}\frac{x^3}{(1+x)^4} - \frac{3}{12}\frac{x^2}{(1+x)^3} - \frac{6}{24}\frac{x}{(1+x)^2} - \frac{6}{24}\frac{1}{1+x}$$
$$= -\frac{1}{4}\frac{1}{1+x}\left[1 + \left(\frac{x}{1+x}\right) + \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^3\right] \tag{2.40}$$

Dersom en har ett godt falkeblikk[14] kan en se at

$$\int \frac{x^3}{(1+x)^5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+3}\left[\left(\frac{x}{1+x}\right)^{1+3} - 1\right]. \tag{2.42}$$

Ved å følge tankerekken ovenfor kan vi generalisere til følgende eksempel

Eksempel 2.6.7.

$$I = \int \frac{x^n}{(1+x)^{n+2}}\,\mathrm{d}x$$

Vi vil beregne integralet ved akkuratt samme fremmgangsmåte som før. Merk at senere vil vi se på andre måter å beregne dette og liknende integral.

$$I = -\frac{1}{n+1}\frac{x^n}{(1+x)^{n+1}} - \frac{n}{n(n+1)}\frac{x^{n-1}}{(1+x)^n} - \frac{n(n-1}{(n-1)n(n+1)}\frac{x^{n-2}}{(1+x)^{n-1}}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{(n-2)(n-1)n(n+1)}\frac{x^{n-3}}{(1+x)^{n-2}} - \cdots$$

[14]Legg merke til at $\sum_{k=0}^{n} = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Dette medfører at vi kan skrive uttrykket i parentesen som

$$1 + \left(\frac{x}{1+x}\right) + \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 = \sum_{k=0}^{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^k = (1+x)\left[1 - \left(\frac{x}{1+x}\right)^{3+1}\right] \tag{2.41}$$

Ved å sette inn likning (2.41) inn i (2.40) får vi som ønsket likning (2.42).

Legg merke til at vi bare har et endelig antall ledd ($n+1$, faktisk) siden tilslutt så vil x^n deriveres til null. Integralet kan dermed skrives som

$$I = -\frac{1}{(n+1)}\frac{1}{(1+x)}\left[1 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^1 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{1+x}\right)^n\right]$$

Som faktisk ble ganske pent. Siden utttrykket inneholder en geometrisk rekke, kan vi forenkle summen til

$$I = \int \frac{x^n}{(1+x)^{n+2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1} - 1\right]$$

som er ganske stilig.

2.7 Trigonometrske funksjoner

I denne delen vil det bli sett på en rekke spenstige trigonometriske integral, men først tas noen generelle råd[15]. Anta at integralet kan skrives som

$$\int R(\sin x, \cos x)\, \mathrm{d}x$$

hvor R er en rasjonell funksjon. La oss ta en titt på noen spesialtilfeller

1. Gitt at $R(\sin x, \cos x) = R(\cos x) \sin x \, \mathrm{d}x$, da foretrekkes substitusjonen $u \mapsto \cos x$.
2. Tilsvarende om $R(\sin x, \cos x) = R(\sin x) \cos x \, \mathrm{d}x$ da foretrekkes substitusjonen $u \mapsto \sin x$.
3. Om $R = R(\tan x)$, anbefales $\tan x \to y$.
4. Dersom $R = R(\sin^2 x, \cos^2 x)$ så kan igjen substitusjonen $\tan x \to y$ benyttes, da er

$$\int R(\cos^2 x, \sin^2 x)\, \mathrm{d}x = \int R\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right) \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

Fungerer intet av det ovenfor, må en nok krype til korset og benytte seg av den universelle Weierstrass substitusjonen fra avsnitt (2.4.1). La oss se på unntaket som bekrefter regelen

Eksempel 2.7.1. En har tidligere prøvd å beregne følgende integral

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x}$$

ved å bruke weiestrass, dette leder dog til en meget urovekkende delbrøksoppspalting. Et alternativ er å benytte delvis integrasjon med $u = \sec x \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = \sec x \tan x \, \mathrm{d}x$, og $v' = \sec^2 x \, \mathrm{d}x \;\Rightarrow\; v = \tan x$.

$$\begin{aligned} \int \sec^2 x \, \mathrm{d}x &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 \mathrm{d}x \\ &= \sec x \tan x + \int \sec x \, \mathrm{d}x - \int \sec^3 x \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Hvor det i siste overgang ble brukt at $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$. Ved å legge til integralet av $\sec^3 x$ på begge sider så er

$$2 \int \sec^3 x \, \mathrm{d}x = \sec x \tan x + \int \sec x \, \mathrm{d}x$$

Det siste integralet har blitt beregnet i eksempel (2.4.4) og dermed så er

$$\int \sec^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \log |\tan x + \csc x| + \mathcal{C}$$

som var det som skulle vises.

[15] Deler av denne introduksjonen er basert på http://planetmath.org/IntegrationOfRationalFunctionOfSineAndCosine

Dette var langt enklere enn å integrere den rasjonale funksjonen som oppstår ved å bruke weiestrass-substisjonen. La oss se på to integraler til som kan løses ved ulike metoder

Herfra tas et par nyttige egenskaper til trigonometriske funksjoner

Proposisjon 2.7.1.

$$\int_0^\pi xR(\sin x, \cos^2 x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi R(\sin x, \cos^2 x)\,\mathrm{d}x\,,$$

hvor R er en rasjonell funksjon.

Et elementært bevis er vist i oppgave (5), og det anbefales på det sterkeste å prøve å vise denne identiteten. Under gis det kort og søtt bevis som ikke er like intuitivt

Bevis. Det første vi kan legge merke til er at det holder å vise identiteten for $f(\sin x)$ siden

$$R(\sin x, \cos^2 x) = R(\sin x, 1 - \sin^2 x) = f(\sin x)$$

La oss så definere følgende funksjon

$$g(x) := \left(x - \frac{\pi}{2}\right) f(\sin x)\,.$$

En kan nå enkelt se at $g(\pi - x) = -g(x)$, siden $\sin(\pi - x) = \sin x$. Funksjonen g er altså symmetrisk omkring π og vi har $\int_0^\pi g(x)\,\mathrm{d}x = 0$[16]. Ved å putte inn definisjonen av g fås

$$\int_0^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right) f(\sin x)\,\mathrm{d}x = 0\,\mathrm{d}x\,,$$

Beviset fullføres ved å dele opp integralet og legge til $\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,\mathrm{d}x$ på begge sider. $\square$

Et liknende integral er

Proposisjon 2.7.2. *La p og q være to relle tall, da er*

$$\int_0^{2\pi} f(p\cos x + q\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(\alpha\cos x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\pi f(\alpha\cos x)\,\mathrm{d}x$$

hvor $\alpha = \sqrt{p^2 + q^2}$.

Bevis. Venstre siden kan skrives som

$$p\cos x + q\sin x = \sqrt{p^2+q^2}\left(\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\cos x + \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\sin x\right) = \cos(x - a)$$

[16] Dette følger direkte fra korollar (2.3.2) med $a = \pi/2$ eller ved å la $I = \int_0^\pi g(x)\,\mathrm{d}x$. Via substitusjonen $x \mapsto \pi - x$ så er $I = \int_0^\pi g(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\pi^0 -g(u)\,\mathrm{d}u = -I$. Dette medfører at $2I = I + (-I) = 0$ så $I = 0$. Alt dette følger fra at $g(\pi - x) = -g(x)$.

Hvor sum formelen $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ ble benyttet med $a = \arccos(p/\sqrt{p^2-q^2}\,) = \arccos p/\alpha$. Integralet kan nå skrives om som følger

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f\big(\alpha\cos(x-a)\big)\,\mathrm{d}x &= \int_{-a}^{2\pi-a} f(\alpha\cos x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-a}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi-a} g(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

hvor forkortelsen $g(x) = f(\alpha\cos x)$ ble innført. De to siste integralene kan skrives

$$\int_{2\pi-a}^{2\pi} f(\alpha\cos x)\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi-a} f(\alpha\cos x)\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{2\pi} f(\alpha\cos x)\,\mathrm{d}x$$

Hvor en enten bruker at $\cos x$ har en periode på 2π, eller subsitusjonen $x = u - 2\pi$ på første integralet. Dette har en og sett før, for eksempel i **??**. Ved å bruke dette har en nå at

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f\big(\alpha\cos(x-a)\big)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} f(\alpha\cos x)\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} f(\alpha\cos x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{2\pi} f(\alpha\cos x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} f(\alpha\cos x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

hvor igjen forkortelsen $\alpha = \sqrt{p^2+q^2}$ ble brukt for å spare plass.

Det er flere måte å se den siste overgangen på, den har for eksempel blitt studert i detalj i oppgave (**??**). Dette fullfører beviset. □

Nå tas en artig trigonometrisk identitet som vil bli mye brukt fremmover.

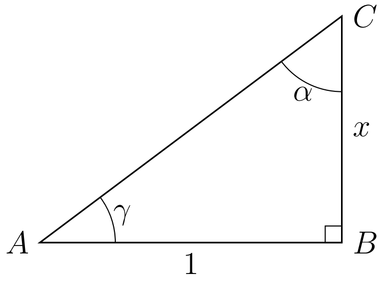
Lemma 2.7.1.

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Bevis. En måte å vise at $f(x) = \pi/2$ er å se at den deriverte er null.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(1/x)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Dermed så må f være lik en konstant så lenge $x \neq 0$. Dette kan en se for eksempel ved å integrere $f'(x) = 0$. For å bestemme denne konstanten så er $f(1) = 2\arctan(1)$. Siden $\tan(\pi/4) = 1$ så er $\arctan 1 = \pi/4$ da $\arctan y$ er inversen av $\tan y$. Dermed så er $f(x) = f(1) = \pi/2$, siden $f(x)$ er konstant. Alternativt kan og identiteten og vises ved å betrakte følgende figur



$$\begin{aligned}&\tan\gamma = x/1 \Rightarrow \gamma = \arctan x\\ &\tan\alpha = 1/x \Rightarrow \alpha = \arctan\frac{1}{x}\\ &\alpha + \gamma + \frac{\pi}{2} = \pi\\ &\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}\\ &\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

som er et søtt lite bevis. □

Korollar 2.7.1. *La $a, b \in \mathbb{R}$ da er*

$$\arctan a + \arctan b = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right) & \textit{hvis} \quad ab < 1 \\ \arctan\left(\dfrac{a+b}{1-ab}\right) + \pi & \textit{hvis} \quad ab > 1 \\ \pi/2 & \textit{ellers} \end{cases}$$

Bevis. Siden beviset er så kort inkluderes det her. Beviset har og vært gitt på eksamen på videregående . Tilfellet $ab = 1$ har allerede blitt drøftet i lemma (2.7.1). Sider $ab = 1$ impliserer $a = 1/b$, så er $\arctan 1/b + \arctan b = \pi/2$. Fra trigonometrien har vi

sett inn refferanse i fotnote.

$$\sin(x+y) = \sin x \sin y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin a \sin b$$

Ved å bruke disse uttrykkene kan $\tan(x+b)$ skrives på formen

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{(\sin x \cos y + \cos x \sin y)/(\cos x \cos y)}{(\cos x \cos y - \sin x \sin y)/(\cos x \cos y)} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$

Setter vi nå inn $a = \tan x$ og $b = \tan y$ får vi

$$\tan(\arctan a + \arctan b) = \frac{a+b}{1-ab},$$

og beviset fullføres ved å ta $\arctan$ på begge sider av likningen. Anta at $ab > 1$, da vil alltid $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} < 1$. Ved å bruke lemma (2.7.1) to ganger har vi

$$\arctan a + \arctan b = \pi - \left(\arctan \frac{1}{a} + \arctan \frac{1}{b}\right) = \pi - \arctan\left(\frac{a+b}{ab-1}\right) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + \pi$$

som var det vi ønsket å vise. Dette fullfører beviset. □

Et annet viktig integral er følgende

Proposisjon 2.7.3.

$$\int_0^{\pi} \log(\sin x)\, dx = 2\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\, dx = -\pi \log 2$$

For å vise dette tas først et lite hjelperesultat

Lemma 2.7.2.

$$\int_0^{\pi/2} \log(\sin 2x)\, dx = \int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\, dx$$

Bevis. Dette lemmaet følger direkte fra **??** i **??**, se oppgave (**??**) for et bevis. Vi viser likevell resultatet uten bruk av proposisjonen. Via substitusjonen $u \mapsto 2x$ så er

$$\int_0^{\pi/2} \log(\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log(\sin u)\,\mathrm{d}u$$

Høyresiden av likniningen kan nå skrives om via **??** ved å sette $m = 0$, $n = 1$ og $f(x) = \log(x)$ i **??**. Da er

$$\int_0^{\pi/2} \log(\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(2\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

som ønsket. Alternativt kan en og snitte det integralet på midten, og bruke substitusjonen $u \mapsto \pi - x$. Da kan integralet skrives som

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \log(\sin u)\,\mathrm{d}u &= \int_0^{\pi/2} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_{\pi/2}^{\pi} f(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\pi/2} f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^{\pi/2} f(\pi - u)\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{\pi/2} f(u)\,\mathrm{d}u\,.\end{aligned}$$

Hvor $f(u) = \log(\sin u)$, og substitusjonen $u \mapsto \pi - x$ ble benyttet i andre overgang. Heldigvis så er $f(\pi - u) = f(u)$, siden $\sin x$ er periodisk. Ved å bytte tilbake til x som integrasjonsvariabel har en altså at

$$\int_0^{\pi/2} \log(\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[2\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,\mathrm{d}x\right] = \int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

som var det som skulle vises. □

En er nå klar til å vise proposisjon (2.7.3).

Bevis. Fra proposisjon (2.3.1) eller via substitusjonen $u \mapsto \pi/2 - x$ har en

$$\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \log\big(\sin(\pi/2 - x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \log(\cos x)\,\mathrm{d}x$$

Ved å legge sammen disse integralene får en at

$$\int_0^{\pi/2} \log(\cos x) + \log(\cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \log(1/2\sin 2x)\,\mathrm{d}x$$

Dermed kan integralet skrives som

$$2\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \log(\sin 2x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2} \log(2)\,\mathrm{d}x$$

Siste integralet beregnes relativt enkelt og ved å benytte lemma (2.7.2) så er

$$2\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\log(2)\,\mathrm{d}x$$

Beviset fullføres ved å trekke fra det opprinnelige integralet på begge sider. For å vise den siste likheten kan en skrive

$$\int_0^\pi \log(\sin x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \log(\sin 2u)\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,\mathrm{d}x = -\pi \log 2$$

Hvor substitusjonen $2u \mapsto x$ og lemma (2.7.2) ble benyttet igjen. $\square$

Avslutningsvis tas et integral som vil dukke opp flere ganger senere

Eksempel 2.7.2. Gitt at α er en vinkel slik at $\alpha \in (-\pi, \pi)$ vis at

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2x\cos\alpha + 1} = \frac{\alpha}{2\sin\alpha}\,.$$

Begynner med å skrive om nevneren

$$\begin{aligned} x^2 + 2x\cos\alpha + 1 &= x^2 + 2x\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \\ &= (x + \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha \end{aligned}$$

Integralet kan nå skrives som

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2x\cos\alpha + 1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x + \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha}\,,$$

Dersom $\alpha = 0$ så blir integralet

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x + \cos 0)^2 + 0^2} = \left[\frac{1}{x+1}\right]_1^0 = \frac{1}{2}$$

Høyresiden blir tilsvarende

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{1}{2}\left[\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right]^{-1} = \frac{1}{2}$$

Der det ble brukt at $\sin x \sim x$ når $x \to 0$. Anta nå at $\alpha \neq 0$, vi kan da fritt benytte substitusjonen[17] $u\sin\alpha \mapsto x + \cos\alpha$ og $\mathrm{d}u\sin\alpha = \mathrm{d}x$. Dette gir

$$\int_0^1 \frac{\sin(\alpha)\,\mathrm{d}u}{u^2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{\sin\alpha}\left[\arctan\left(\frac{x+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\right]_0^1$$

Ved å sette inn grensene blir integralet på formen

$$I(\alpha) = \frac{1}{\sin\alpha}\left[\arctan\left(\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) - \arctan\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\right]$$

Dersom differansen av de to siste leddene blir $\alpha/2$ kan uttrykket skrives som $\alpha/2\sin\alpha$, som ønsket. Krukset blir å å nå benytte addisjonsformelen fra korollar (2.7.1)[18],

$$\arctan x - \arctan y = \arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right).$$

[17] Hvorfor kan vi ikke bruke substitusjonen når $\alpha = 0$?

[18] Hvorfor brukes $\arctan \frac{x-y}{1+xy}$ konsekvent her og ikke $\arctan \frac{x-y}{1+xy} + \pi$?

Ved å kun se på brøken $(x-y)/(1+xy)$ så er $x-y = 1/\sin\alpha$ og

$$\frac{x-y}{1+xy} = \frac{1}{\sin\alpha}\Big/\left[1+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right] = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \tan\frac{\alpha}{2}$$

Der det ble benyttet i andre overgang at $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$. Siste overgang kan en se fra halv-vinkel formlene for sinus og cosinus $\sin\alpha = 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)$ og $1+\cos(\alpha) = 2\cos^2(\alpha/2)$. Integralet forenkles dermed til

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x\cos\alpha+1} = \frac{1}{\sin\alpha}\arctan\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2\sin\alpha}$$

som ønsket.

Oppgaver

1. Bestem integralet $I = \displaystyle\int_0^\pi x\cos^2 x\sin x\,\mathrm{d}x$

2. Vis at følgende likhet holder

$$\int_0^\infty f\left(x^n+x^{-n}\right)\frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{1}{x}f\left(x^n+x^{-n}\right)\mathrm{d}x$$

for alle funksjoner f.

3. Vis at

$$J = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2(\sin\alpha)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4\cos^2\alpha/2}$$

holder der $\alpha\in[0,2\pi]$.

4. Bestem integralet $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\arctan(x)\,\mathrm{d}x}{x^2-2x\sin(a)+1}$ når a som vanlig er en vinkel i $a\in(-\pi,\pi)$.

5. Bestem integralet $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

2.8 Logaritmiske funksjoner

I forrige del ble det sett på integral på formen

$$\int p(x)\log x \,\mathrm{d}x$$

der løsningen var relativt enkel. Benytt delvis integrasjon og sett $u = \log x$ og $v = P(x)$, der $P'(x) = p(x)$. I denne delen blir studiet av integraler på formen

$$\int_a^b R(x)\log \mathrm{d}x$$

begynt på. Her er $R(x)$ er en rasjonal funksjon på formen $P(x)/Q(x)$ med P og Q som polynomer. La oss først ta et lite hjelperesultat

Lemma 2.8.1.

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

Bevis. Fremgangsmåten blir å dele integralet. Legg først merke til at

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^0 \frac{\log 1/x}{1+(1/u)^2}\frac{\mathrm{d}x}{-u^2} = \int_0^1 \frac{\log 1/u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \tag{2.43}$$

Via substitusjonen $x \mapsto 1/u$. Så $\mathrm{d}x = -1/u^2\,\mathrm{d}u$. Ved å dele integralet i to fås nå

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\log 1/x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0\end{aligned}$$

I andre overgang ble likning (2.43) ble benyttet og $\log 1/x = -\log x$. □

En generalisering av dette lemmaet kommer i en senere seksjonen for nå kan resultatet brukes til å vise følgende

Proposisjon 2.8.1.

$$\int_0^\infty \frac{\log ax}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2b}\log(ab) \tag{2.44}$$

Bevis. Velger først å bruke substitusjonen $bw = x$ slik at $\mathrm{d}w = \mathrm{d}x/b$. Grensene blir det samme

$$\int_0^\infty \frac{\log ax}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x = b\int_0^\infty \frac{\log abw}{(wb)^2+b^2}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{b}\int_0^\infty \frac{\log abw}{u^2+1}\,\mathrm{d}w \tag{2.45}$$

Vi kan dele integralet i to siden $\log abw = \log ab + \log w$, slik at

$$\int_0^\infty \frac{\log ax}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\log ab}{b}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}w}{1+w^2} + \frac{1}{b}\int_0^\infty \frac{\log w}{1+w^2}\,\mathrm{d}w$$

Fra lemma (2.8.1) er det siste integralet null, mens det første er likt

$$\frac{\log ab}{b}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}w}{1+w^2} = \frac{\log ab}{b}\cdot\Big[\arctan(\infty)-\arctan(0)\Big] = \frac{\pi}{2b}\log(ab)$$

og en er ferdige. Her brukte en at $\arctan x \to \pi$ når $x \to \infty$ og $\arctan 0 = 0$. Vi kan og vise proposisjonen uten å bruke lemmaet. Ved å heller bruke substitusjonen $w \mapsto 1/y$ i likning (2.45) fås

$$\frac{1}{b}\int_0^\infty \frac{\log abw}{1+w^2}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{b}\int_\infty^0 \frac{\log ab/y}{1+(1/y)^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{-y^2} = \frac{1}{b}\int_0^\infty \frac{\log ab/y}{1+y^2}\,\mathrm{d}y \tag{2.46}$$

Ved å ta gjennomsnittet av likning (2.44) og (2.46) får en

$$\int_0^\infty \frac{\log ax}{x^2+b^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2b}\int_0^\infty \frac{\log ay+\log ab/y}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\log ab}{2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}$$

som vist før. Her ble det bare brukt at $\log A + \log B = \log AB$. □

La oss videre se på et integral som dukker opp i [10].

Eksempel 2.8.1.

$$\int_a^b \frac{\log x}{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\frac{\log(ab)}{b-a}\log\left(\frac{(a+b)^2}{4ab}\right)$$

Integralet kan dog vises relativt enkelt via substitusjonen $x \mapsto ab/t$. Da er

$$\int_b^a \frac{-\log ab/t}{ab(b/t+1)(a/t+1)}\,\frac{ab}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\log ab - \log t}{(t+a)(t+b)}\,\mathrm{d}t$$

Slik at ved å ta gjennomsnittet av integralene fås

$$\int_a^b \frac{\log x}{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\log x + \log ab - \log x}{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x$$

Merk den fine kanseleringen som skjer med logaritmen i telleren. Det gjenstående integralet kan beregnes via delbrøksoppspalting

$$\frac{1}{(x+b)(x+a)} = \frac{1}{b-a}\,\frac{(b+x)-(x+a)}{(x+b)(x+a)} = \frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right] \tag{2.47}$$

Ved å integrere begge sider av (2.47) fra a til b får en at

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x+b)(x+a)} = \frac{1}{b-a}\left[\log\frac{x+a}{x+b}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\log\frac{a+b}{2b} - \log\frac{2a}{a+b}\right)$$

Integralet kan dermed skrives som

$$\int_a^b \frac{\log x}{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\log ab\,\mathrm{d}x}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{2}\,\frac{\log(ab)}{b-a}\log\left(\frac{(a+b)^2}{4ab}\right)$$

som var det en ønsket å vise.

Eksempel 2.8.2. La oss se på et litt annet integral med en enda rarere substitusjon.

$$\int_0^2 \frac{\log(1+x)}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$$

Det er mulig å stange hodet mott dette integralet helt til en ser den magiske substiusjonen som løser alt. Vi begynner med å anta at en substitusjon på formen

$$x \mapsto -1 + \frac{K}{u+1}$$

vil fungere. Dette vil forenkle logaritmen i nevneren siden

$$\log(1+x) = \log\left(1 - 1 + \frac{K}{u+1}\right) = \log K - \log(u+1)$$

Konstantent K må bestemmes slik at $u(0) = 2$ og $u(2) = 0$ (hvorfor?). Ved å sette inn ser en at magisk nok vil $K = 3$ fungere. Legg merke til at $\mathrm{d}x = -3\,\mathrm{d}u/(u+1)^2$ og at

$$x(u)^2 - x(u) + 1 = (u^2 - u + 1)\frac{3}{(u+1)}$$

Integralet blir dermed

$$\int_0^2 \frac{\log(1+x)}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = -\int_2^0 \frac{\log\big[3/(1+u)\big]}{u^2-u+1}\,\mathrm{d}u = \int_0^2 \frac{\log 3 - \log(1+u)}{u^2-u+1}\,\mathrm{d}u$$

Ved å ta gjennomsnittet av integralene, får en som før at

$$\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{\log 3 - \log(u+1) + \log(u+1)}{u^2-u+1}\,\mathrm{d}u = \int_0^2 \frac{\log\sqrt{3}\,\mathrm{d}u}{u^2-u+1}$$

Hvor beregningen av integralet eksempelvis kan gjøres ved å fullføre kvadratet

$$\int_0^2 \frac{4\,\mathrm{d}u}{(2u-1)^2+3} = \int_{-\pi/6}^{\pi/3} \frac{2\sqrt{3}\sec^2 y\,\mathrm{d}y}{3\tan^2 y + 3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$$

I andre overgangen ble substitusjonen $2u-1 = \sqrt{3}\tan y \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = \sqrt{3}/2\sec^2 y\,\mathrm{d}x$ brukt. I tillegg så er $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ som vanlig. Ved å sette inn og rydde opp fås altså

$$\int_0^2 \frac{\log(1+x)}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{\log\sqrt{3}\,\mathrm{d}u}{u^2-u+1} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\log\sqrt{3}$$

Disse to integralene er begge eksempler på integral som kan bli løst via den samme substitusjonen. La oss generalisere dette, men først et lite lemma

Lemma 2.8.2. *La $P(x)$ være et polynom da tilfredstiller P*

$$P\left(\frac{K}{d^2u+cd} - \frac{c}{d}\right)\frac{(d^2u+dc)^2}{Kd^2} = P(u)$$

hvor $K = (c + ad)(db + c) \neq 0$, hvis og bare hvis P er på formen

$$P(x) = Ax^2 + \frac{Ac^2 + Cd^2 - AK}{dc} x + C \,,$$

hvor $d \neq 0$. Dersom $c = 0$ så tilfredstilles funksjonallikningen kun dersom P kan skrives på formen

$$P(x) = \frac{A}{ab} x^2 + Cx + A \,, \tag{2.48}$$

Hvor A og C velges fritt, og $a, b \neq 0$.

Å vise dette overlates som en oppgave til leser. Fremgangsmåten blir å sette inn et generelt polynom i likningen, og se at høyre side vil ikke være et polynom om ikke graden er to. Dette fører til følgende generalisering

Teorem 2.8.1. *Gitt at $P(x) = Ax^2 + Bx + C$ hvor*

$$B = \frac{AK - Ac^2 - Cd^2}{dc} \,, \tag{2.49}$$

med $K = (ad + c)(db + c)$. Da holder følgende likhet

$$\int_a^b \frac{\log(dx + c)}{P(x)} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\log K}{P(x)} \,\mathrm{d}x$$

for alle A, B. Dersom $c = 0$ da er

$$\int_a^b \frac{\log(dx)}{P(x)} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\log K}{P(x)} \,\mathrm{d}x$$

med $K = dab$, for alle polynomer på formen $P(x) = \frac{A}{ab} x^2 + Cx + A$. Hvor A og C kan velges fritt.

Dette kan vises direkte ved å benytte seg av substitusjonen $u \mapsto -c + K/(x + c)$. Men det i tilleg til å vise at graden av P maksimalt kan være to overlates til leser. Ved å sette inn et generelt andregradspolynom inn i likning (2.49) kan en vise følgende

Fra dette korollaret faller **??** direkte ut ved å sette $A = ab$ og $C = (a + b)$ inn i likning (2.48)

2.9 Ulike tips og knep

2.9.1 Rekursjoner og funksjonsfølger

I avsnitt (2.6.3) ble delvis integrasjon gjort enklere ved å skrive om integralet som en funksjonsfølge. I denne delen skal vi se nærmere på slike følger, og hvordan de kan løeses direkte uten bruk av delvis integrasjon.

Eksempel 2.9.1.

$$I_n = \int_0^\pi \cos nx \,\mathrm{d}x = 0\,, \quad n \in \mathbb{Z}/\{0\} \tag{2.50}$$

Dette eksempelet overlates til leser. Men viser en svært enkel rekursjon $I_n = I_{n-1}$.

Proposisjon 2.9.1.

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{5} - \cdots + \dfrac{2(-1)^n}{2n+1} & \textit{dersom} \quad n = 2m \\ \dfrac{\pi}{2} & \textit{dersom} \quad n = 2m-1 \end{cases},$$

gitt at $m \in \mathbb{N}$.

Bevis. Vi begynner med den trigonometriske identiten

$$\sin(m+2)x - \sin mx = 2\sin x\cos(m+2)x\,,$$

som vises ved å bruke dobbel-vinkel identitene. Ved å dele likheten på $\sin x$ fås

$$\frac{\sin(m+2)x}{\sin x} - \frac{\sin mx}{\sin x} = 2\cos(m+1)x\,.$$

Vi må herfra anta at $x \neq 0$ slik at vi unngår å dele på null. Tilfellet hvor $m = 0$ betraktes derfor for seg selv senere. Ved å integrere begge sider av likheten fås

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(m+2)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin mx}{\sin x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} 2\cos(m+1)x\,\mathrm{d}x\,, \tag{2.51}$$

som likner en del på en rekursjonslikning. Ved å definere

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin mx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

har vi altså vist at

$$I_{m+2} - I_m = \frac{2}{m+1}\sin\frac{\pi}{2}(m+1) \tag{2.52}$$

hvor vi bare har brukt definisjonen av I_m, og beregnet integralet på høyre side av likning (2.51). Tanken er nå at studerer tilfellet hvor m er odde og like hver for seg. Dersom m er odde kan en skrive $m = 2n - 1$. Rekursjonen gir da

$$I_{2n+1} - I_{2n-1} = \frac{2}{2n}\sin\frac{\pi}{2}(2n) = 0$$

Gitt at $n \in \mathbb{N}$ så er altså $I_{2n+1} = I_{2n-1}$. Rekursjonen sier altså at dersom m er odde er alle odde potenser like. For eksempel for $m = 5$ så fås $I_5 = I_{4+1} = I_{4-1} = I_{2+1} = I_{2-1} = I_1$. For å fullføre utregningen må en altså bestemme I_1

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 1 \cdot x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,.$$

Altså har en at når $m = 2n - 1$ hvor $n \in \mathbb{N}$ så er

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

som ønsket. La nå m være like i likning (2.52), da er m på formen $2n$, $n \in \mathbb{N}$

$$I_{2n+2} - I_{2n} = \frac{2}{2n+1}\sin\frac{\pi}{2}(2n+1) = \frac{2}{2n+1}(-1)^n\,.$$

For å vise siste overgang kan en for eksempel bruke dobbel-vinkel identitene

$$\sin\frac{\pi}{2}(2n+1) = \sin\pi n\cos\frac{\pi}{2} + \cos\pi n\sin\frac{\pi}{2} = \cos\pi n = (-1)^n$$

Rekursjonen sier altså at hver gang vi minker potensen med 2, så legger vi til en faktor $2(-1)^n/(2n+1)$

$$\begin{aligned}
I_{2n} &= \frac{2(-1)^n}{2n+1} + I_{2n-2} \\
&= \frac{2(-1)^n}{2n+1} + \frac{2(-1)^{n-2}}{2(2n-2)+1} + I_{2n-4} \\
&= \frac{2(-1)^n}{2n+1} + \cdots + \frac{2(-1)^1}{2+1} + I_0 = 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^n}{2n+1}
\end{aligned}$$

siden $I_0 = 0$. Dette fullfører tilfellet hvor m er like, og også beviset. □

Lemma 2.9.1.

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2mx}{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \textit{dersom} \quad m = 0 \\ \dfrac{m}{|m|}\dfrac{\pi}{2} & \textit{dersom} \quad m \in \mathbb{Z}/\{0\} \end{cases},$$

gitt at $m \in \mathbb{N}$.

Bevis. Det er klart fra definisjonen at $I_0 = 0$ siden $\sin 0 = 0$. Siden $\sin(-x) = -\sin x$ følger det at $I_{-m} = -I_m$ slik at det holder å betrakte I_m for $n \in \mathbb{N}$. Igjen så betrakter vi differansen $I_{m+1} - I_m$ for $n \geq 0$.

$$\begin{aligned}
I_{m+1} - I_m &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+2)x - \sin 2nx}{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} 2\cos(2n+1)x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos(2n+2)x - \cos 2nx\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

herfra kan vi bruke et resultat som vi lar det være opp til leser å bekrefte

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2mx = \begin{cases} 0 & \text{dersom} \quad m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \\ \pi/2 & \text{dersom} \quad m = 0 \end{cases}$$

Dermed så er $I_{m+1} = I_m$, såfremt $m \neq 0$. Vi har at

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{\sin x} \cos x \, \mathrm{d}x = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

Der dobbel-vinklel identiten ble brukt $\sin 2x = 2\cos x \sin x$ og at $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \cos^2 x + \sin^2 x \, \mathrm{d}x$. Fra dette følger det at $I_m = \pi/2$, når $m \neq 0$ og $I_m = 0$ som ønsket. □

Proposisjon 2.9.2.

$$\ell_2(m) = \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin mx}{\sin x} \right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos mx}{1 - \cos x} \, \mathrm{d}x = |m|\pi \tag{2.53}$$

Hvor $m \in \mathbb{Z}$.

Bevis. Første likhet følger fra at $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ så $(\sin mx)^2 = 1 - \cos mx$, og $(\sin x)^2 = 1 - \cos x$. Vi har at $\cos(-m) = \cos m$, så det holder å betrakte $m = 0, 1, \ldots$ For $m = 0$ har vi

$$I_0 = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 0x}{1 - \cos x} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{1 - 1}{1 - \cos x} \, \mathrm{d}x = 0$$

som stemmer. Så herfra gjennstår det bare å drøfte tilfellet $m \in \mathbb{N}$. For å bevise dette ser vi på en litt annen rekursjon, vi ønsker å vise at $(I_{n+1} + I_{n-1})/2 = I_n$. Sumformelen for cosinus er

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

Ved å bruke likningen har vi at

$$\begin{aligned} \cos(n+1)x + \cos(n-1)x = &\big(\cos nx \cos x - \sin nx \sin x\big) \\ &+ \big(\cos nx \cos x + \sin nx \sin x\big) = 2 \cos nx \cos x \end{aligned} \tag{2.54}$$

Som vi skal se forenkler dette utregningene våre noe

$$\begin{aligned} \frac{I_{n+1} + I_{n-1}}{2} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(n+1)x}{1 - \cos x} + \frac{1 - \cos(n-1)x}{1 - \cos x} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{2 - \big[\cos(n+1)x + \cos(n-1)x\big]}{1 - \cos x} \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Ved å bruke likning (2.54) får vi nå at

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos nx \cos x}{1 - \cos x} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi} \frac{(1 - \cos nx) + (1 - \cos x) \cos nx}{1 - \cos x} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos nx}{1 - \cos x} \, \mathrm{d}x = I_n \end{aligned}$$

siden som var det vi ønsket å vise. Siste overgang følger fra at $\int_0^\pi \cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}[\sin \pi n - 0] = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Nå har vi vist at

$$I_n = \frac{I_{n+1} + I_{n-1}}{2} \;\Rightarrow\; 2I_n = I_{n+1} + I_{n-1} \;\Rightarrow\; I_n - I_{n-1} = I_{n+1} - I_n$$

Dette beskriver en *aritmetrisk progresjon*, da differansen mellom to påfølgende ledd er konstant. Vi har altså $I_n = I_0 + (n-0)d = nd$, hvor d er differansen mellom to påfølgende ledd og $I_0 = 0$. Differansen mellom to påføglende ledd er

$$d = I_1 - I_0 = I_1 = \int_0^\pi \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x} \,\mathrm{d}x = \pi$$

og dette fullfører beviset. □

En triviell triviell generalisering følger fra **??**.

$$\ell_2(m) = \int_{m\pi}^{n\pi} \left(\frac{\sin kx}{\sin x} \right)^2 \mathrm{d}x = \int_{m\pi}^{n\pi} \frac{1 - \cos kx}{1 - \cos x} \,\mathrm{d}x = |knm|\pi \,, \tag{2.55}$$

hvor $k, n, m \in \mathbb{Z}$. Men dette ser bare mer rotete ut. Fra resultatene ovenfor kan det være fristende å spørre seg om

$$\ell_k(m) = \int_0^\pi \left(\frac{\sin mx}{\sin x} \right)^k$$

har en pen lukket form, eller en lukket form i det hele tatt. Vi legger merke til at integralet er null når potensen er odde og integranden jevn

$$\ell_{1,3,5,\cdots,k}(2m) = 0 \,,$$

hvor $k \in 2\mathbb{N} - 1$ og $m \in \mathbb{Z}$. Via tilsvarende regning som ovenfor kan en vise at

$$\begin{aligned}
\ell_3(k) &= \frac{\pi}{4} \left(1 + 3k^2\right) \\
\ell_4(m) &= \frac{\pi}{3} m \left(1 + 2m^2\right) \\
\ell_5(k) &= \frac{\pi}{192} \left(27 + 50k^2 + 115k^4\right) \\
\ell_6(m) &= \frac{\pi}{20} m \left(4 + 5m^2 + 11m^4\right) \,.
\end{aligned}$$

Hvor igjen $n \in 2\mathbb{N} - 1$ Derimot å vise den generelle formen

$$\ell_m(n) = \int_0^\pi \left(\frac{\sin nx}{\sin x} \right)^m \mathrm{d}x = \pi \sum_{k=0}^{\lfloor m(1-1/n)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{\frac{m}{2}(n+1) - kn - 1}{m - 1}$$

http://math.stackexchange.com/questions/478121/can-we-simplify-int-0-pi-left-frac-sin-nx-sin-x-rightmdx

er utenfor denne bokens hensik,t for et bevis se [5] . Her betegner $\lfloor x \rfloor$ *gulvfunksjonen* (floor function) som vi vil få et gjennsyn med i del III. Kort fortalt rundet denne funksjonen ethvert tall ned til det nærmeste heltallet $\lfloor 3.7 \rfloor = 3$, $\lfloor 0.5 \rfloor = 0$ også videre.

2.9.2 Nyttig funksjonallikning

Lemma 2.9.2. *Gitt at $R(x)$ er en funksjon slik at*

$$R\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2} = R(x)$$

og $f(x)$ en vilkårlig funksjon, da holder følgende

$$\int_0^\infty R(x)f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 R(x)\big(f(x)+f(1/x)\big)\,\mathrm{d}x$$

Bevis. Lemmaet følger direkte fra proposisjon (2.4.2) eller likning (2.21) med $g(x) = R(x)f(x)$ og $S = 1$.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty R(x)f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 R(x)f(x) + f(1/x)R(1/x)/x^2\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 R(x)\big(f(x)+f(1/x)\big)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

som ønsket. Vi kan og følge samme fremgangsmåte som i proposisjonen og dele opp integralet

$$\begin{aligned}\int_0^\infty R(x)f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 R(x)f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty R(x)f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 R(x)f(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^0 \frac{R(1/y)}{y^2}f(1/y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 R(x)f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 R(y)f(1/y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 R(x)\big(f(x)+f(1/x)\big)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

og i nest siste overgng $y \mapsto 1/x$ benyttet og at $R(1/y)/y^2 = R(y)$. Som vist før. □

Fra dette følger følgende vidunderlige theorem.

Teorem 2.9.1. *Gitt at $R(x)$ er en rasjonell funksjon som tilfredstiller funksjonal-likningen*

$$R\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2} = R(x)\,, \tag{2.56}$$

da holder følgende

$$\int_0^\infty R(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 R(x) \tag{2.57}$$

$$\int_0^\infty R(x)\log x\,\mathrm{d}x = 0 \tag{2.58}$$

$$\int_0^\infty \frac{R(x)}{x^r+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty R(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.59}$$

$$\int_0^\infty R(x)\arctan x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty R(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.60}$$

Hvor $r \in \mathbb{R}$. Likning (2.58) er gyldig viss og bare viss $\int_0^\infty R(x)\,\mathrm{d}x$ konvergerer.

Bevis. Velger å vise likning (2.59) og (2.60), hvor de to første likningene blir overlatt til leser. Merk at alle likningene vises på samme måte ved å benytte lemma (2.9.2). Ved å bruke lemmaet med $f(x) = 1/(x^b + 1)$ fås

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{R(x)}{x^b+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 R(x)\left(\frac{1}{x^b+1} + \frac{1}{(1/x)^b+1}\cdot\frac{x^b}{x^b}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 R(x)\left(\frac{1}{x^b+1} + \frac{x^b}{1+x^b}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 R(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty R(x)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Beviset for siste likning gjøres nesten tilsvarende igjen ved bruk av lemma (2.9.2) nå med $f(x) = \arctan x$.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty R(x)\arctan x\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 R(x)\left(\arctan x + \arctan\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^1 R(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty R(x)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Der likning (2.57) og $\arctan x + \arctan 1/x = \pi/2$ ble benyttet fra **??**. □

Korollar 2.9.1. *Dersom $R(x)$ tilfredstiller $R(x) = R(1/x)/x^2$ så tilfredstiller også $r(x) = (\log x)^2 R(x)$ funksjonallikningen. Spesielt så er*

$$\int_0^\infty (\log x)^{2n-1} R(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

For alle $n \in \mathbb{N}$, gitt at $\int_0^\infty R(x)\,\mathrm{d}x$ konvergerer.

Bevis. Siden $(\log 1/x)^2 = (-\log x)^2 = (\log x)^2$ følger det direkte at

$$r\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2} = \left(\log\frac{1}{x}\right)^2 R\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2} = (\log x)^2 R(x) = r(x)$$

Vi bruker induksjon for å vise siste del av korollaret. Grunntilfellet $n = 1$, $\int_0^\infty R(x)\log x\,\mathrm{d}x = 0$ følger fra likning (2.58). Vi antar så at det stemmer for

$$\int_0^\infty (\log x)^{2k-1} R(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Altså at det eksisterer en eller annen funksjon som tilfredstiller $R(x) = R(1/x)/x^2$ slik at integralet ovenfor er null. Vi ønsker å vise at dette medfører at det stemmer for $2(k+1) - 1 = 2k + 1$. Ved å skrive om har vi

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (\log x)^{2k+1} R(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty (\log x)^{2k-1}\left[(\log x)^2 R(x)\right]\mathrm{d}x\\ &= \int_0^\infty (\log x)^{2k-1} r(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Fra første del av korollaret så er $r(x) = (\log x)^2 R(x)$ en rasjonell funksjon som tilfredstiller $r(1/x)/x^2$ og resten følger ved induksjon. □

Teorem (2.9.1) kan benyttes til å tygge igjennom en betraktelig andel av vanskelige integral. For eksempel følger lemma (2.8.1) direkte fra (2.58).

Eksempel 2.9.2. La oss vende tilbake til en gammel klassiker

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+(\tan\theta)^b} = \frac{\pi}{4} \tag{2.61}$$

hvor $b \in \mathbb{R}$. Ved å bruke substitusjonen $x \mapsto \tan\theta$ fås

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+(\tan\theta)^b} = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^b)} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

I andre overgang ble likning (2.59) ble benyttet og $R(x) = 1/(1+x^2)$ tilfredstiller selvsagt $R(1/x)/x^2 = R(x)$.

Et utvalg av funksjoner som tilfredstiller likningen er eksempelvis

$$R(x) \equiv \frac{1}{x} \equiv 1 + \frac{1}{x^2} \equiv \frac{x}{(1+x^2)^2} \equiv \frac{1}{x^2+x+1} \equiv \frac{1}{1+x^2}$$

Spørsmålet blir da, hvordan en kan finne flere funksjoner som tifredstiller likningen? En kan for eksempel legge merke til at

$$R(x) = \frac{h(x) + h(1/x)}{x},$$

tilfredstiller likningen hvor h er en rasjonell funksjon. Tilsvarende så funger

$$R(x) = \frac{g\big(h(x) + h(1/x)\big)}{x}$$

også hvor igjen g og h er rasjonelle funksjoner. En annen måte å konstruere slike polynom på er å studere indeksene til polynomene, ved å skrive ut

$$\frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2}{x^4+2x^2+1}$$

Her er koeffisientene til telleren (1), mens i nevneren så er koeffisientene $(1,2,1)$. Altså er indeksene det samme om de leses fra høyre eller venstre. En definisjon av polynom med denne egenskapen er følgende

Definisjon 2.9.1. Et polynom $q(x)$ er symmetrisk[19] med indeks k dersom

$$p(x) = x^k p(1/x)$$

Eksempelvis er indeksen til $q(x) = x^3 + x$ lik 4. Følgende proposisjon[20] da vises.

[19]Slike polynom betegnes gjerne som palindom også. Det kan og opplyses om at alle av like grad polynomer som er symmetrisk har komplekse røtter som ligger på enhetssirkelen. En kan lese mer om dette her http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/galoistheory/numbersoncircle.pdf.

[20]Takk til flounderer for denne observasjonen. Beviset kan leses her.

Proposisjon 2.9.3. *La $p(x)$ og $q(x)$ være to polynomer, hvor $p(x)$ er symmetrisk med indeks $k-2$ og $q(x)$ er symmetrisk med indeks k. La $R(x)$ være definert*

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Da tilfredstiller R funksjonallikningen

$$R\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2} = R(x)$$

for alle x.

Dette gir oss for eksempel direkte at

$$R(x) = \frac{x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x}{\pi x^7 - x^4 - x^3 + \pi}$$

tilfredstiller likningen.

Oppgaver

1. Vis at følgende funksjon

$$R(x) = \left(\frac{x^2}{x^4 + 2ax^2 + 1}\right)^r \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

   tilfredstiller differensiallikningen $R(1/x)/x^2 = R(x)$. Her er $r > 1$ og $a \in \mathbb{R}$.

2. Vis at

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 3\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{3}{2}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

3. Bestem integralet $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^a - x^b}{(1+x^a)(1+x^b)} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$, hvor $a, b \in \mathbb{R}$

4. Vis at

$$I = \int_0^{\infty} (\log x)^2 \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} \frac{(x\log x)^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} \frac{(\log x)^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

2.9.3 Integral par

I denne delen skal vi se nærmere på et av favorittintegralene til forfatter. Teknikken som benyttes er relativt enkel å forstå; anta en har to integral

$$J = \int f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{og} \qquad K = \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

som hver for seg er vanskelig å beregne. Målet blir nå å konstruere et likningsett av to uavhengige lineærkombinasjoner av J og L

$$\begin{aligned} u_1(x) &= a_{11}J + a_{12}L \\ u_2(x) &= a_{21}J + a_{22}K \end{aligned}$$

på en slik måte at likningsettet er enklere å løse enn J og K hver for seg.

Eksempel 2.9.3. Integralene som ønskes å beregne er

$$J = \int \cos\log x\,\mathrm{d}x \qquad \text{og} \qquad K = \int \sin\log x\,\mathrm{d}x$$

som en har sett før, kan delvis kanselering være gull verdt. Dette gis en sjangse og en beregner $J + K$

$$J + K = \int \cos\log x + \sin\log x\,\mathrm{d}x$$

Det brukes nå delvis integrasjon på $\sin\log x$ med $u = \sin\log x$ og $v' = 1$, så $v = x$ og $u' = 1/x \cdot \cos\log x$. Innsatt fås da

$$\int \cos\log x\,\mathrm{d}x + \left[x\sin\log x - \int x \cdot \frac{\cos\log x}{x}\,\mathrm{d}x\right] = \sin\log x + \mathcal{C}$$

Tilsvarende for tilfellet for $J - K$ kan integralet skrives som

$$J - K = \int \cos\log x - \sin\log x\,\mathrm{d}x$$

ved samme fremmgangsmåte som før benyttes delvis integrasjon på $\cos\log x$. Hvor $u = \cos\log x$, $u' = -(1/x)\sin\log x$ og $v' = 1$, $v = x$.

$$\int -\sin\log x\,\mathrm{d}x + \left[x\cos\log x - \int x \cdot \frac{-\sin\log x}{x}\,\mathrm{d}x\right] = \cos\log x + \mathcal{C}$$

Ved å bruke disse to opplysningene har en altså likningssettet

$$x\sin\log x = J + K \tag{I}$$
$$x\cos\log x = J - K \tag{II}$$

Ved å ta gjennomsnittet av likningene får en

$$J = \frac{x\sin\log x + x\cos\log x}{2}$$

og ved å ta $(I - II)/2$ har en også

$$K = \frac{x \sin \log x - x \cos \log x}{2}$$

Dermed har en at

$$\int \cos \log x \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} \sin \log x + \frac{x}{2} \cos \log x + \mathcal{C}$$
$$\int \sin \log x \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} \sin \log x - \frac{x}{2} \cos \log x + \mathcal{D}$$

som var det en ønsket å beregne.

Merk at det finnes mange alternative måter å beregne integralet på. Ved å sette $u = \log x$ fås

$$J = \int e^x \sin x \, \mathrm{d}x \qquad \text{og} \qquad K = \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x \, .$$

Herfra kan en enten benytte delvis integrasjon på gammlemåten på hvert integral. En kan benytte teknikken med integral-par på J og K. Ellers kan en og skrive om J og K til kompleks form. Merk at alle disse metodene krever noe mer innsats enn metoden ovenfor

Dessverre finnes det ikke mange integraler denne metoden er nyttig for, og derfor ender den opp som mer et stillig triks enn en nyttig teknikk.

Oppgaver

1. Bestem integralene

$$I_+ = \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x \qquad \text{og} \qquad I_- = \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$$

2. Bestem integralet

$$I = \int \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} \, \mathrm{d}x$$

Ved å finne et passelig J og benytte deg av et velkjent indianertriks. Via samme fremgangsmåte bestem også integralet

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{a \cos x - b \sin x}{b \sin x + a \cos x} \, \mathrm{d}x \, .$$

3. Bestem integralet

$$I = \int \frac{3e^x + 5 \sin x + 10 \cos x}{e^x + 4 \sin x + 3 \cos x} \, \mathrm{d}x$$

.

2.10 Oppgavesamling II

2.10.1 Integral

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$

4. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}}{x^{7/2}}\,\mathrm{d}x$

5. $\displaystyle\int \frac{-1}{x^3+x^7}\,\mathrm{d}x$

6. $\displaystyle\int_0^{e^\pi} \sin(\log x)\,\mathrm{d}x$

7. $\displaystyle\int \frac{4a^3}{x^4-a^4}\,\mathrm{d}x$

8. $\displaystyle\int \ln x \cdot e^x + \frac{1}{x}e^x\,\mathrm{d}x$

9. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x$

10. $\displaystyle\int \frac{x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$

11. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$

12. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{-1+\sqrt[n]{x}}}$

13. $\displaystyle\int \frac{\sinh x + \cosh x}{\cosh x - \sinh x}\,\mathrm{d}x$

14. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$

15. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^7-x}$

16. $\displaystyle\int_0^\pi x\cos^4(x)\,\mathrm{d}x$

17. $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\,\mathrm{d}x$

18. $\displaystyle\int \frac{(x+2)^2}{(x+7)^5}\,\mathrm{d}x$

19. $\displaystyle\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+e^{\sin x}}$

20. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$

21. $\displaystyle\int \frac{1+x^4}{1+x^6}$

22. $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-2x+2}}$

23. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^{2014}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$

24. $\displaystyle\int_0^\pi \sin x \sin 2x \sin 3x\,\mathrm{d}x$

25. $\displaystyle\int_3^4 \frac{\sqrt[7]{x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt[7]{7-x}+\sqrt[7]{x}}$

26. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+10}$

27. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}$

28. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+1}{x^3}}\,\mathrm{d}x$

29. $\displaystyle\int \frac{x^2(\log x - 1)}{x^4-(\log x)^4}\,\mathrm{d}x$

30. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(2x)}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$

31. $\displaystyle\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{4+2^x}$

32. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(x-1)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2^x-1}\,\log(2^x-1)}$

33. $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x - 1}{x^2-(\log x)^2}\,\mathrm{d}x$

34. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2^x 3^x}{9^x-4^x}\,\mathrm{d}x$

35. $\displaystyle\int \frac{x^5+x}{x^8+1}\,\mathrm{d}x$

36. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{\left(x^2-a^2\right)^2+x^2}\,\mathrm{d}x$

37. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

38. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x}{x+1} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x$

39. $\displaystyle\int \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x$

40. $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \frac{x\sin x \arctan e^x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

41. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\log\tan x} + \frac{1}{1-\tan x}\,\mathrm{d}x$

42. $\displaystyle\int_0^{\log 2} \frac{\sqrt{e^{2x}-2+e^{-2x}}}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$

43. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(\sin x) + \cos^2(\cos x)\,\mathrm{d}x$

44. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\csc x - \sin x}\,\mathrm{d}x$

45. $\displaystyle\int 2\sin\sqrt{x} + x\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

46. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\,\mathrm{d}x$

47. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{1-x^7} - \sqrt[7]{1-x^3}\,\mathrm{d}x$

48. $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \frac{\sin x}{e^x - \sin x - \cos x}$

49. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{8x^3\cos^4 x\cdot\sin^2 x}{\pi^2-3\pi x+3x^2}\,\mathrm{d}x$

50. $\displaystyle\int_{3/7}^1 \frac{1-x^2}{x^3\sqrt{2x^4-2x^2+1}}\,\mathrm{d}x$

51. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{y\,\mathrm{d}y}{(1+y^2)\,(y^4+y^2+1)}$

52. $\displaystyle\int_{\sqrt{\log 2}}^{\sqrt{\log 3}} \frac{x\sin x^2\,\mathrm{d}x}{\sin x^2+\sin(\log 6 - x^2)}$

53. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x^7-3x^5+7x^3-x+1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

2.10.2 Oppgaver

1. Vis at integralene

$$I_1 = \int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \quad \text{og} \quad I_2 = \int_0^1\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

er ulike.

2. I denne oppgaven skal vi se nærmere på integralet i første oppgave, samt noen liknende integral

a) La $a, y \in \mathbb{R}$, slik at $a > 0$, vis at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-y^2}{(y^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

b) Vis videre at vi har

$$\int_0^a \frac{x^2-y^2}{(y^2+x^2)^2}\log x\,\mathrm{d}x = \frac{a\log a}{y^2+a^2} - \frac{1}{y}\arctan\left(\frac{a}{y}\right) \tag{2.62}$$

og drøft tilfellene $a = 0$, $a = 1$ og $a \to \infty$. Det kan være fordelaktig å bruke resiltatet fra lemma (2.6.1). Bruk likning (2.62) til å bestemme

$$\int_a^\infty \frac{x^2-y^2}{(y^2+x^2)^2}\log x\,\mathrm{d}x$$

c) Det påfølgende integralet blir ofte trukket frem for å vise nytten til kompleks analyse. Men som vi skal se kan det og beregnes mer elementært. Bestem

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \tag{2.63}$$

Hvor en kan få bruk for en eller flere tidligere deloppgaver.

3. I denne oppgaven skal vi ta et nostalgisk tilbakeblikk. Oppgaven består i å bestemme buelengden til $r(t) = (t\cos t, t\sin t)$ fra $t_1 = 0$ til $t_2 = \frac{m}{2} - \frac{1}{2m}$. Merk at fra avsnitt (1.10.1) så blir buelengden til en parameterfremstilling

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Se spesielt korollar (1.10.1). Oppgaven blir å vise at buelengden til $r(t)$ er

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{m^2}{a} - \frac{1}{am^2} + b\log m\,. \tag{2.64}$$

og bestemme de reelle konstantene a og b. Selvsagt er $m \in \mathbb{R}_{>0}$.

4. Beregn dobbeltintegralet

$$\mathfrak{K} = \int \int_1^{x+\sqrt{x^2+a^2}} \frac{\mathrm{d}t}{t}\,\mathrm{d}x\,,$$

hvor $a \in \mathbb{R}$. Og vis at løsningen kan skrives som

$$\mathfrak{K} = x \cdot \operatorname{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + x\log a - \sqrt{x^2+a^2} + \mathcal{C}\,,$$

bla ved å bruke definisjonen $\sinh = [\exp(-x) + \exp(x)]/2$.

5. Drøft integralet

$$\int_0^\pi \frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{r^2+R^2-2Rr\cos\theta}}\,,$$

for tilfellene når $r > R > 0$ og $R > r > 0$.

6. Bestem følgende integral

$$\int_1^{\sqrt{3}} x^{2x^2+1} + \log\left(x^{2x(2x^2+1)}\right)\mathrm{d}x$$

7. En definisjon av naturlige logaritmen er gitt som arealet under $1/t$ fra $t = 0$ til $t = x$.

$$\log x := \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

a) Vis ved å bruke definisjonen ovenfor at logaritmefunksjonen har følgende egenskaper:

- $\log 1 = 0$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log x = \frac{1}{x}$
- $\log a^r = r \log a$
- $\log ab = \log a + \log b$

b) Som en ekstra utfordring vis at

$$\log(1 + x^\alpha) \leq \alpha x \,, \quad x \geq 0 \,,\ \alpha \geq 1$$

med likhet hvis og bare hvis $\alpha = 1$.

8.

a) La $\alpha \in \mathbb{R}$ være ett reelt tall. Bestem

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \log\left(\frac{1 + x^\alpha}{2}\right) \frac{\mathrm{d}x}{\log x(1 + x^2)} \,.$$

b) Vis at

$$\int_0^\infty \frac{\log\left(\dfrac{1 + x^{4+\sqrt{15}}}{1 + x^{2+\sqrt{5}}}\right)}{1 + x^2} \frac{\mathrm{d}x}{\log x} = \frac{\pi}{4}\left(2 + \sqrt{6}\sqrt{3 - \sqrt{5}}\right)$$

Hvor en kan få bruk for første deloppgave.

c) Konvergerer følgende integral?

$$\int_0^\infty \frac{\log\left(1 + x^\alpha\right)}{1 + x^2} \frac{\mathrm{d}x}{\log x}$$

9. Gitt at a og b er to reelle tall slik at $a^2 + b^2 = 5^2$ og

$$\tan\theta = \int_a^b \frac{2ab}{x^3} - \frac{x}{ab} \,\mathrm{d}x$$

Vis at $\cos 2\theta$ kan skrives på formen $-8\beta^2 + 8\beta - 1$, hvor $\beta = ka$, $k \in \mathbb{R}$. Finn også $\cos\theta$ uttrykt ved a.

10. Vis at t må være periodisk for at

$$\int_0^t e^x \sin x \,\mathrm{d}x = \int_0^t e^x \cdot \cos x + \frac{1}{t} \,\mathrm{d}x$$

11. Vis at

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x \,\mathrm{d}x}{1 \pm \cos x \sin x} = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x \,\mathrm{d}x}{1 \pm \cos x \sin x}$$

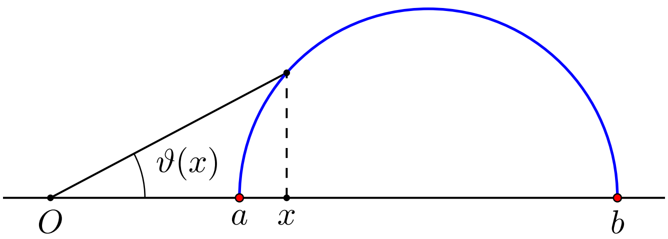
og bestem verdien av integralet.

12. Løs integralet

$$\int_0^1 \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^4}} \,\mathrm{d}x$$

med og uten bruk av substitusjonen $\sqrt{1 + x^4} = (1 + x^2) \cdot \cos\theta$.

13. **(American Mathematical Monthly # 11457)**
Vinkelen $\vartheta(x)$ er definert utifra følgende figur



Vis at den gjennomsnittlige verdien for ϑ er gitt som

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b \vartheta(x) \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{b - a}{b + a}$$

der $0 < a < b$. Virker utrykket logisk for grensetilfellene $a \to 0$ og $b \to \infty$? Argumenter. Hint: 1) I den delvise integrasjonen er det fordelaktig å sette $u = \vartheta(x)$ og $v = x - ab/(a + b)$.

14. Gitt funksjonen $f(x) = \arccos x + \arcsin x$. Vis at $f'(x) = 0$ og bestem integralet, $\int_D f(x) \,\mathrm{d}x$ hvor D er hele definisjonsmengden til $f(x)$. (Altså alle lovlige x-verdier.)

15. Bestem integralet

$$I = \int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{(1 + \sin x)^{1 + \cos x}}{1 + \cos x} \right) \mathrm{d}x\,,$$

og vis at svaret er positivt.

16. Vis at

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(1 + \alpha^{\sin x})(1 + \beta^{\cos x})} \qquad \alpha, \beta > 0$$

er uavhengig av α, β og bestem integralet. Hva er problemet når $\alpha, \beta \to 0$?

17.

a) Vis at

$$\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1} = \left(\int_0^1 Ax^2 + Bx + C \,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{Ax^2+Bx+C}\right),$$

og bestem dermed koeffisientene A,B og C. Hva blir integralet?

b) Bruk **a)** til å bestemme integralene

$$I_0 = \int_0^\infty \frac{x^4}{1+x^6}\,\mathrm{d}x \quad \text{og} \quad I_4 = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^6}$$

Merk det er ikke nødvendig å ha klart **a)**.

18. Bestem følgende integral

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2(tx)}\,\mathrm{d}t$$

19. La f og g være to integrerbare funksjoner på $[-8,8]$ og la

$$I = \int_{-8}^4 4f(x) - 8g(x)\,\mathrm{d}x + \int_8^4 8g(x) - 4f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Vis at $I = 2^a$, når det oppgis at f er en likefunksjon, g er en oddefunksjon og gjennomsnittsverdien av f og g på $[0,8]$ er 1.

20. La f være en strengt voksende og kontinuerlig deriveerbar funksjon på $[1,5]$ slik at: $f(1) = 0$ og $f(5) = 10$. Anta at $\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 7$, bestem integralet

$$\int_0^{10} f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x$$

der f^{-1} betegner inversen til f.

21. Bestem $\dfrac{\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{\sqrt{2}+1}\,\mathrm{d}x}{\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{\sqrt{2}-1}\,\mathrm{d}x}$

22. Vis at $\displaystyle\int_a^b \frac{2x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}$ er uavhengig av a og b. Hvor $a,b\in\mathbb{R}$.

23. Bruk følgende integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ til å vise at $\dfrac{22}{7} > \pi$. Vis så at

$$\frac{22}{7} - \frac{1}{630} < \pi < \frac{22}{7} - \frac{1}{1260}$$

ved å for eksempel benytte seg av at $1 < 1+x^2 < 2$ når $x \in (0,1)$.

24. Bestem følgende integral

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt[\phi]{x}\,\arctan x}{(1+x^\phi)^2}\,\mathrm{d}x$$

Hvor ϕ er det gylne snittet, gitt som $2\phi = 4\sin(3\pi/10) = 1+\sqrt{5}$. Vis og at følgende ulikhet holder $1/3 < I < 1/2$. Hvor det kan være fornuftig å benytte seg av tilnærmingene fra forrige opgave.

25. Bestem monster-integralet

$$\int_0^t \left[\frac{(1-x^2)\ln(1+x^2)+(1+x^2)-(1-x^2)\ln(1-x^2)}{(1-x^4)(1+x^2)}\right] x e^{\frac{x^2-1}{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$$

hvor $t \in (0,1)$.

26. Beregn integralet

$$\iint_S \arctan e^{xy}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

hvor $D\,:\,\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4x\}$. Hint: En god tegning gjør ofte susen

27. Vi lar $\mathcal{D} = \displaystyle\int_{3/4}^{4/3} \frac{2x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$. Vis at $e^{\mathcal{D}}$ kan skrives på formen m^2 hvor $m \in \mathbb{Q}$

28. En har tidligere sett at

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{2\pi}\big(\cos(ax)+1\big) & \text{når} \quad -\dfrac{\pi}{a} \leq x \leq \dfrac{\pi}{a} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Er en sannsynlighetsfordeling. Altså at integralet over $\mathbb{R}$ er lik 1. I denne oppgaven blir det sett nærmere på den *moment-genererende funksjonen* til fordelingen f. Den er gitt som

$$M_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f(x)\,\mathrm{d}x$$

for en kontinuerlig sannsynlighetsfordeling og kommer igjen i mange sammenhenger. Vis at den momentgenererende funksjonen til f kan skrives som

$$M_f(t) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sinh(\pi\rho)}{\rho(1+\rho^2)}$$

Der $\rho = t/a$. Vis videre at

$$\lim_{t\to 0}\big(M_f(t)\big)' = \mathbf{E}(x) \quad \text{og} \quad \lim_{t\to 0}\big(M_f(t)\big)'' = \mathrm{Var}(x)$$

Hvor

$$\mathbf{E}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{og} \quad \mathrm{Var}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \big(x-\mathbf{E}(x)\big)^2 f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Stemmer resultatet generelt? Argumenter.

29. Vis at[21]

$$\int_0^{\pi/3} \left((\sqrt{3}\cos\vartheta - \sin\vartheta)\sin\vartheta\right)^{1/2} \cos\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = \frac{\pi}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

30. Vis at integralene er like

$$I_n = \int_0^{\pi} x(\cos x)^{2n}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} x(\sin x)^{2n}\,\mathrm{d}x$$

og bestem verdien av integralene gitt at $n \in \mathbb{N}$ er et naturlig tall.

31. Vis at dersom $a \in \mathbb{N}$ er et naturlig tall så er

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi}{4}$$

32. I denne oppgaven skal vi se på en rekke relaterte integral. Vi begynner i det små. Vi definerer funksjonene K og K^* som

$$K(m,n) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^m x\,\mathrm{d}x}{\sin^n x + \cos^n x} \quad \text{og} \quad K^*(m,n) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^m x\,\mathrm{d}x}{\sin^n x + \cos^n x}$$

Hvor $n, m \in \mathbb{N}$.

a) Bestem uttykk for $K(1,3)$ og $K^*(1,3)$.

b) Vis at $K(n,m) = K^*(n,m)$ for alle $n, m \in \mathbb{R}$. Hva er $K(n,n)$?

c) Bestem følgende integral

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(\sin x)^{2014}}{(\sin x)^{2014} + (\cos x)^{2014}} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \alpha^x}$$

Hvor α er en reell konstant.

33. Vis de fire likhetene

$$\begin{array}{ccc}
\displaystyle\int_{ma}^{na} \frac{\log(x-a)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x & \Leftrightarrow & \displaystyle\int_{a/n}^{a/m} \frac{\log(x+a)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \\
\displaystyle\frac{\log 2a^2}{2a}\left(\arctan n - \arctan m\right) & \Leftrightarrow & \displaystyle\frac{\log 2a^2}{2a}\left(\arctan 1/m - \arctan 1/n\right),
\end{array}$$

holder for alle reelle positve tall a, n, m som tilfredstiller $nm = n + m + 1$.

[21] Beviset tilegnes Rob Johnson og kan leses her.

34. Gitt at $4c - b^2 = \pi^2/100$ vis at

$$\int_{-b/2}^{a/2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + bx + c} = 5\,,$$

hvor $a/2 = (\pi - 10b)/20$.

35. Dette blir et av de ytters få ubestemt integralene som studeres i denne delen. La

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{x + 2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x - 2\sqrt{2x-4}}}$$

og bestem integralene $\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ og $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

36.

a) Bestem følgende ubestemte integral

$$I = \int \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} \Big/ \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

b) Finn konstanter a og b slik at

$$\int_a^b \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} \Big/ \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}} = 0\,,$$

og $b > a$. Merk at integralene i **a)** og **b)** er hårfint forskjellige.

37. Vis at integralet $\mathcal{I}$ kan skrives som

$$\mathcal{I} = \int \left(\frac{\arctan x}{x - \arctan x} \right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{\tan(\beta - \tan\beta)} + \mathcal{C}$$

hvor β er en funksjon som avhengiger av x. Det kan være nyttig å bruke

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \tag{2.65}$$

som er sumformelen for tangens.

38. Dersom $f(0) = 1\,,\ f(2) = 3$ og $f'(2) = 5$, bestem

$$I = \int_0^1 x f''(2x)\,\mathrm{d}x$$

39. Integralet $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin(2x)^3 \cos(3x)^2\,\mathrm{d}x$ kan skrives som $\left(\frac{a}{b}\right)^b$. Bestem $\sqrt{a^b + b^a + 1}$

40. La f og g være to funksjoner som har kontinuerlige første og andrederiverte på $[5,7]$. Anta videre at funksjonene er integrerbare på intervalet. Beregn

$$I := \int_5^7 f(x)g''(x)\,\mathrm{d}x$$

når det oppgis følgende:

(i)	$f(x),\ f''(x) > 0$ for alle $x \in [5,7]$.
(ii)	Funksjonen f/g har kritiske punkt i 5 og 7.
(iii)	For alle $x \in [5,7]$ så er $g''(x) = 1/f''(x)$.
(iv)	$g(x) = 2g''(x) - f(x)[g''(x)]^2$ for alle $x \in [5,7]$.

41. Bestem a og b slik at

$$I = \int_a^b \left[(\sin\left(\arccos\sqrt{x}\,\right)\right]^2 \mathrm{d}x$$

oppnår sin maksimale verdi. Hvor stor kan I bli?

42. Vis at dersom $f(x) = \cos(\log x)$ og $g(x) = \sin(\log x) + \cos(\log x)$ så er

$$\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)^2\,\mathrm{d}x$$

43. Vis at $J = \displaystyle\int_0^1 (1-y)\left(\frac{2+\sqrt{1-y}}{2-\sqrt{1-y}}\right)\mathrm{d}y = 2\int_1^3 (y-2)^3 \log y\,\mathrm{d}y$

44. Bestem integralet $\displaystyle\int e^A \left[\int 4xe^{2x^2}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x$, der $A = \displaystyle\int_0^x \frac{8t}{4t^2+1}\,\mathrm{d}t$

45. Vis at $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{29}}{(5x^2+49)^{17}}\,\mathrm{d}x = \frac{14!}{2\cdot 49^2\cdot 5^{15}\cdot 16!}$.

46. La oss ta enda en liten digresjon til numerisk integrasjon. For å beregne et integral kan en dele opp intervalet i n deler og konstruere et trapes på hver del. Dette gir følgende formel

$$T(n) = \frac{h}{2}\big[f(a) + f(b)\big] + h\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)$$

a og b er henholdsvis nedre og øvre grense, n er antall interval, $h = (b-a)/n$, og $x_k = a + hk$. La oss bruke trapesmetoden til å beregne integralet

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

gitt at integralet er begrenset, og f er en kontinuerlig funksjon. I tillegg opplyses det om at

$$f(x) + f(a+b-x)\,,$$

er konstant for alle x i intervalet. Vis at

$$\begin{array}{lrcl}
\textbf{1)} & \lim_{\ell\to\infty} T(\ell) & = & T(1) \\
\textbf{2)} & T(\ell) & = & T(1)\,\forall\,\ell\in\mathbb{N} \\
\textbf{3)} & \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x & = & T(1)
\end{array}$$

Dette fungerer ikke bare for trapesmetoden, men enhver metode som bruker lik steglengde for hele intervalet. Eksempelvis midtpunktmetoden, Riemansummer, Simpsons metode og også høyrer ordens metoder. Dermot fungerer det ikke for Romberg integrasjon, eller Gauss-kvadraturer.

47. Anta at en har en beholder som er fyllt med en liten mengde vann. Vi øker så temperaturen i beholderen. Målet er studere hvordan det molare metningstrykket (heretter kalt damptrykket) varierer som en funksjon av en rekke kjente parameter. For å gjøre dette lager en en enkel model ved hjelp av *Clausius-Clapeyron's ligning*

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta S}{\Delta V}$$

Denne beskriver hvor raskt damptrykket forandrer seg, altså $\mathrm{d}p/\,\mathrm{d}t$ Her er ΔS forandring i entropien[22] og gitt som $\Delta S = n Ł_f/t$ hvor $Ł_f$ er smeltevarme (når vann går over til damp), n er antall mol og T er temperaturen. Videre så er ΔV forandringen i volumet og gitt som $\Delta V = V_g - V_e$. Hvor V_g er gassvolumet og V_e er væskevolumet. Tilnærmelsen $\Delta V \approx V_g$ kan benyttes da det antas en har mye mer gass enn væske. Gassen antas å følge ideel gasslov $pV = nRT$, hvor n er mol, R er gasskonstanten og T er temperaturen.

a) Vis at *Clausius-Clapeyron's ligning* kan omskrives til

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\Big(\log p\Big) = \frac{L_f}{T^2 R}$$

[22] Entropi gir et mål på hvor mye uorden eller kaos som er i et system

Det å anta at smeltetemperaturen L_f ikke avhengig av tempereturen er ganske tåpelig. I stedet så er det rimelig å anta at L_f avtar lineært med temperaturen for lave temperaturer. $280\,\mathrm{K} < T < 440\,\mathrm{K}$.

$$L_f(T) = \alpha - \beta T\,.$$

Bruk vannets trippelpunkt som refferanse $P_0 = 611\,\mathrm{Pa}$ ved $T_0 = 273.16\,\mathrm{K}$ og uttrykket for smeltevarmen til å vise at $p(T)$ kan skrives som

$$p(t) = K \cdot T^{-\mu} \exp\{-Z/T\}$$

og kartlegg dermed konstantene Z, K og μ.

48. I denne oppgaven skal en studere nærmere Ω konstanten[23], og noen av dens egenskaper. Omega konstanten er definert slik at den oppfyller

$$\Omega e^{\Omega} = 1\,.$$

a) Vis at Ω konstanten er unikt definert. Vis altså at likningen $xe^x = 1$ har *nøyaktig* en løsning

I resten av oppgaven skal en se nærmere på funksjonene $f(x) = x$ og $g(x) = x^2 \cdot \log x$.

b) Vis at skjæringspunktene mellom f og g er henholdsvis $x_0 = 0$ og $x_1 = e^{\Omega}$.

c) Vis at arealet avgrenset av f, g, x_0 og x_1 kan uttrykkes via Ω konstanten som

$$A = \frac{1}{6}e^{2\Omega} + \frac{1}{9}e^{3\Omega} = \frac{1}{6\Omega^2} + \frac{1}{9\Omega^3}$$

Hvor det kan bli nyttig å benytte seg av definisjonen til Ω.

d) Omega konstanten kan og defineres rekursivt via

$$\Omega_{n+1} = \frac{1 + \Omega_n}{1 + e^{\Omega_n}}$$

med startverdi Ω_0. Bruk startverdien $\Omega_0 = 0$ og to iterasjoner til å anslå integralet. En bedre startverdi er $\Omega_0 = \log 2$, bruk denne og at $e \approx 8/3$ til å anslå integralet. Benytt nå *en* iterasjon.

[23]Omega funksjonen betegnes og ofte som `LambertW(1)`, og en lengre artikkel finnes på wikipedia http://en.wikipedia.org/wiki/Omega_constant.

49. Gitt at $a = 1$ og $b^2 = 1 - 1/2 \log 1/2$, der $b > 0$. Vis at

$$I := \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x = A \log(2) \cdot (1 + \log 2) + B$$

og kartlegg dermed konstantene A og B. Her er f er implisitt gitt som

$$x^2 + f e^f = 1\,, \qquad f > -1\,.$$

Hint: Det kan lønne seg å benytte delvis integrasjon for å oppnå x^2 for deretter å bruke substitusjon.

50. I denne oppgaven skal en så vidt være innom kvantefysikk. Merk at ingen forkunnskaper utover integrasjon er nødvendig. Oppgaven dreier seg i praksis om Carbon-14 datering, men som sagt fokuserer en her på det matematiske. Når et C_{14} atom henfaller, (brytes ned) skiller det ut blant annet ut en α partikkel, (alfa-stråling). Denne α partikkelen har da et potensial

$$V(r) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Radien til partikkelen er gitt som r_1, mens strålingen fra partikkelen når til til radien $r_2 \gg r_1$, Energien til partikkelen en da være

$$E = V(r_2) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

og tilslutt så er hvor mye stråling som blir avgitt fra partikkelen gitt som

$$T \cong \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m\big[V(r) - E\big]}\,\mathrm{d}r \right)$$

a) Vis at en kan skrive $V(r) = Er_2/r$ og at $\log T$ kan uttrykkes som

$$\log T \cong -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2mE}\,r_2 \int_{r_2/r_1}^{1} \sqrt{\frac{1}{x} - 1}\,\mathrm{d}x$$

Videre så ønsker en å undersøke hvordan $\log T$ øker når E avtar.

b) Forklar hvordan en kan skrive om integralet til

$$I = \int_{r_1/r_2}^{1} \sqrt{\frac{1}{x} - 1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x} - 1}\,\mathrm{d}x - \int_0^{r_1/r_2} \sqrt{\frac{1}{x} - 1}\,\mathrm{d}x\,,$$

og, beregn integralet eksakt.

c) For lettere regning kan en benytte seg av en frekk tilnærming. Det første integralet er lik $\pi/2$, og for det andre integralet har en at $x < r_1/r_2 \ll 1$ slik at faktoren 1 bidrar tilnærmet ingenting, så $x^{-1} - 1 \sim x^{-1}$. Bestem nå et tilnærmet uttrykk for I og $\log T$.

d) Tilslutt leker en oss litt med algebra. Vis at

$$\log T \cong -2\left[K_1 \frac{Z}{\sqrt{E}} - K_2\sqrt{Zr_1}\right]$$

hvor verdiene for K_1 og K_2 er henholdsvis

$$K_1 \equiv \pi \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}\sqrt{2mc^2} \quad \text{og} \quad K_2 \equiv 4\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}}\sqrt{\frac{mc^2}{\hbar c}}$$

III

3.1 INTRODUKSJON III

I første del dyppet du forsiktig tærne ned i innsjøen av integrasjonsteknikker. Mens i andre del lærte du, og forhåpentligvis mestret en rekke teknikker for å holde deg flytende. Men jeg håper du er god til å holde pusten for nå skal vi dykke dypt, dypt ned i mørket av integrasjonsmetoder. Denne delen vil ha fokus på to hovedområder, spesielle funksjoner og spesielle teknikker. Videre vil du finne flere eksempler på hvor disse to områdene virker i skjønn harmoni for å løse vanskelige integral. Vi vil studere rekkeutvikling, kompleks anaylyse, integraltegnet, omskrivninger til dobbel integraler og mye mer.

3.2 Viktige konstanter

I denne seksjonen blir et knippe viktige konstanter tatt opp. Det er viktig å huske på at det å oppgi svaret som $\zeta(3)$ eller $\Gamma(1/4)$ ikke er noe forskjellig fra et svar som π eller e. Forskjellen kommer i hva en legger i et elementært uttrykk. Herfra blir et par konstanter nevnt, som forfatter mener er elementære.

3.2.1 Euler–Mascheroni konstanten

$$\gamma = 0.577\,215\,664\,901\,532\,860\,606\,512\,090\,082\,402\,431\,042\,159\,335\,939\,92$$

Definisjon 3.2.1. *Euler's konstant* ble først introdusert av Leonard Euler (1707 – 1783) i 1734 som

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log(n) \right) \tag{3.1}$$

Grunnen til at konstanten ofte omtales som Euler–Mascheroni er at selv om det var Euler som først studerte grensen var det Lorenzo Mascheroni (1750 – 1800) som fra 1790 skrev flere utdypende papir om konstanten, og dermed grunnlaget for videre studier.

Nøyaktig når notasjonen γ, ble kom i bruk er uvist, men det som er sikkert er at navnet er valgt grunnet konstantens nære relasjon til Gammafunksjonen

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-z/n} \right] \tag{3.2}$$

hvor beviset kommer vi tilbake til senere. Formelen gir oss og med en gang relasjonen $\Gamma'(1) = \psi_0(1) = -\gamma$.

Det er fortsatt ukjent om γ er et *algebraisk* eller *trancendentalt*. Faktisk vet en ikke engang om γ er irrasjonelt, selv om det er sterke antakelser om det. Foruten om å være nært tilknyttet gammafunksjonen spiller og funksjonen en viktig rolle innen Analyse (Bessel funksjoner, eksponensial-integral, summer, osv), og dukker og hyppig opp i *Tallteori*.

Det er liten tvil om at selv om konstanten ikke er like kjent som π eller e så er den en av de aller viktigste matematiske konstantene vi har i dag.

Integral-representasjoner av gamma

$$\begin{aligned}
\gamma &= -\int_0^\infty e^{-x} \log x \,\mathrm{d}x = -4\int_0^\infty x e^{-x^2} \log x \,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 \log\log\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 H_x \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x e^x} \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\log x} + \frac{1}{1-x} \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1+x^k} - e^{-x} \right) \mathrm{d}x \quad \forall\, k > 0
\end{aligned}$$

Som eksempel velger vi her å vise følgende

Eksempel 3.2.1.

$$\gamma = -\int_0^1 \log\log\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = -\int_0^\infty e^{-x} \log x \, \mathrm{d}x$$

Bevis. For å bevise følgende trengs definisjonen av $\Gamma(x)$ som dessverre kommer først senere og er gitt som

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

Merker oss at ved å derivere likningen fås

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Gamma(x) &= \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \log t \, \mathrm{d}t \\ \Gamma'(1) &= \int_0^\infty e^{-t} \log t \, \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dersom vi nå benytter oss av substitusjonen $x \mapsto \log(1/t)$ i likning (3.3) fås

$$\Gamma'(1) = \int_0^1 \log\log\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \tag{3.4}$$

Å vise at $\Gamma'(1) = -\gamma$ kan gjøres ved å studere se på logartimen av likning (3.2), også derivere. Men for øyeblikket overlates dette til leser. Vi har altså

$$\gamma = -\Gamma'(1) = -\int_0^1 \log\log\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{x} \log x \, \mathrm{d}x$$

som var det vi ønsket å vise. □

Vi kommer tilbake til $\Gamma'(1)$ når vi diskuterer digamma-funksjonen.

3.2.2 Catalan's Konstant

$$G = 0.915\,965\,594\,177\,219\,015\,054\,603\,514\,932\,384\,110\,774$$

Catalans konstant er navngitt etter Eugène Charles Catalan (1814-1894) og er definert som

$$G := \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots$$

Konstanten dukker hyppig opp i problemer innne kombinatorikk, og inneholder mange fine identiter. Det er ikke kjent hvorvidt G er irrasjonell, eller trancendental og noen ganger betegnes og konstanten som `Catalan`.

Noen viktige identiter

$$
\begin{aligned}
G = \beta(2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \\
&= \int_0^1 \frac{\arctan t}{t} \, \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \arctan e^{-t} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/4} \log \cot t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} \log \tan t \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/4} \log(\sin 2t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/4} \log(\cos 2t) \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y}{1 + x^2 y^2} \\
&= \int_0^1 \frac{\log t}{1+t^2} \, \mathrm{d}t = \int_1^{\infty} \frac{\log t}{1+t^2} \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{t \, \mathrm{d}t}{\sin t \cos t}
\end{aligned}
$$

hvor β er *Dirichlet beta funksjonen*.

Eksempel 3.2.2. I *Del II* ble følgende resultat bevist

$$
\int_0^{\infty} \frac{\log ax}{x^2 + b^2} = \frac{\pi}{2b} \log\left(\frac{a}{b}\right)
$$

ved å bruke at

$$
\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2 + 1} = 0
$$

Dette så vi ved å legge merke til at arealet fra 0 til 1 var like stort som fra 1 til ∞. Noe merkelig var at verdien av disse integralene aldri ble vist! Fra tabellen over ser vi at integralene er lik G, og dette viser vi nå med rekkeutvikling.

Bevis. □

3.2.3 Glaisher–Kinkelin konstanten

3.3 Spesialfunksjoner

3.3.1 Gulv og tak-funksjonene

I matematikk og Informattik brukes *gulv* (floor) og *tak* (ceiling) til å mappe et reelt tall til det største tidligere heltallet eller minste påfølgende heltall.

Definisjon 3.3.1. La $m \in \mathbb{Z}$ og $x \in \mathbb{R}$. Da er

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor &= m && \text{dersom} \quad m \leq x \leq m+1 \\ \lceil x \rceil &= m+1 && \text{dersom} \quad m \leq x \leq m+1 \end{aligned}$$

Definisjonen ovenfor kan også skrives som $\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$ og $\lfloor x \rfloor = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid m \geq x\}$. Definisjonen ovenfor vil derimot være noe mer anvenbart I tilleg har vi fraktal delen $\{x\}$.

Definisjon 3.3.2. La $x \in \mathbb{R}$. Da er fraktaldelen av x gitt som

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$$

for alle x i $0 \leq \{x\} \leq 1$.

x	$\lfloor x \rfloor$	$\lceil x \rceil$	$\{x\}$
1	1	1	0
0.5	0	1	0.5
π	3	4	$0.141592\ldots$

Eksempel 3.3.1.

I forhold til integrasjon er gulv og tak-funksjonene ofte brukt som en enkel måte å bytte mellom integraler og summer. Som et trivielt eksempel har en

$$\int_0^n \lceil x \rceil \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} k \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

hvor $n \in \mathbb{N}$. Altså kan vi skrive summen av de n første heltallene som et integral.

Proposisjon 3.3.1. *La $x \in \mathbb{R}$ da er*

$$\int_0^x \lfloor t \rfloor \,\mathrm{d}t = \frac{\lfloor x \rfloor \lfloor x-1 \rfloor}{2} + \lfloor x \rfloor \{x\} \tag{3.5}$$

$$\int_0^x \{t\} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2 - \frac{\lfloor x \rfloor \lfloor x-1 \rfloor}{2} - \lfloor x \rfloor \{x\} \tag{3.6}$$

Bevis. Her trenger vi bare vise første likning siden $\int_0^x \{t\} \,\mathrm{d}t = \int_0^x t - \lfloor t \rfloor \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2 - \int_0^t \lfloor t \rfloor \,\mathrm{d}t$. La nå $p = \lfloor x \rfloor$, da er

$$\begin{aligned} \int_0^x [t] dt &= \sum_{k=0}^{p-1} \int_k^{k+1} [t] \,\mathrm{d}t + \int_p^x [t] \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{p-1} \int_k^{k+1} k \,\mathrm{d}t + \int_p^x p \; dt \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} k + p(x-p) = \frac{p(p-1)}{2} + p(x-p) \end{aligned}$$

Som var det vi ville vise siden $\lfloor x \rfloor \pm n = \lfloor x \pm n \rfloor$, $n \in \mathbb{N}$ og $x - p = x - \lfloor x \rfloor = \{x\}$. □

Proposisjon 3.3.2. *La $x \in \mathbb{R}_+$ da er*

$$\int_0^x \left\{ \frac{1}{t} \right\} \mathrm{d}t = 1 - \gamma + \log x + H_\rho - \frac{1}{\rho} \tag{3.7}$$

Hvor $\rho = \lfloor 1/x \rfloor + 1$ og H_n er summen av de n første leddene i den harmoniske rekken.

Korollar 3.3.1. *La $x \geq 1$ da er*

$$\int_0^x \left\{ \frac{1}{t} \right\} \mathrm{d}t = 1 - \gamma + \log x \tag{3.8}$$

og spesielt så er

$$\int_0^1 \left\{ \frac{1}{t} \right\} \mathrm{d}t = 1 - \gamma \tag{3.9}$$

for $x = 1$.

Bevis. Korollaret følger direkte. Å vise dette overlates derfor til leser. For å vise proposisjonen setter vi $y \mapsto 1/t$ og $\rho = \lfloor 1/x \rfloor$.

$$\int_0^x \left\{ \frac{1}{t} \right\} \mathrm{d}t = \int_{1/x}^\infty \frac{\{y\}}{y^2} \mathrm{d}y = \left(\sum_{k=\rho}^\infty \int_k^{k+1} \frac{x-k}{x^2} \mathrm{d}y \right) + \int_{1/x}^\rho \frac{y - (\rho - 1)}{y^2} \mathrm{d}y \tag{3.10}$$

Integralet kan skrives som

$$\int_{1/x}^\rho \frac{y + 1 - \rho}{y^2} = \left(\frac{1}{\rho} - x \right) + \log \rho + \log(x)$$

Ved å skrive ut summen får vi en teleskoperende sum

$$\sum_{k=\rho}^\infty \int_k^{k+1} \frac{x-k}{x^2} \mathrm{d}y = \sum_{k=\rho}^\infty \log(k+1) - \log(k) - \frac{1}{1+k} = H_\rho - \log \rho - gamma$$

ved å sette sammen de to forrige likningene får vi altså

$$\int_0^x \left\{ \frac{1}{t} \right\} \mathrm{d}t = (\rho - 1) \left(\frac{1}{\rho} - x \right) + \log(x) + H_\rho == 1 - \gamma + \log x + H_\rho - \frac{1}{\rho}$$

som var det som skulle vises. □

Teorem 3.3.1. *La f være en stykkevis kontinuerlig funksjon for $x \in (0,1)$ slik at $\int_0^1 |f(x)|/x \,\mathrm{d}x < \infty$ er endelig. Da har en*

$$\int_0^1 f\left\{ \frac{1}{x} \right\} \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \int_0^1 \frac{f(x)}{x} \mathrm{d}x$$

hvor $\{x\}$ fortsatt betegner fraktal delen av x.

Bevis. Dette beviset tillegnes Olivier Oloa og kan leses i sin opprinnelige form her. Som før er første steg å skrive om integralet til en sum

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 f\left\{\frac{1}{x}\right\}\frac{\mathrm{d}x}{1-x} &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{1/(1+k)}^{1/k} f\left(\{1/x\}\right)\frac{\mathrm{d}x}{1-x}\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1} f\{u\}\,\frac{\mathrm{d}u}{u(u-1)}\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1} f\left(u-k\right)\,\frac{\mathrm{d}u}{u(u-1)}\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{1} f\left(v\right)\,\frac{\mathrm{d}v}{(v+k)(v+k-1)}\\
&= \int_0^{1} f\left(v\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(v+k)(v+k-1)}\,\mathrm{d}v\\
&= \int_0^{1} f(v)\frac{\mathrm{d}v}{v}
\end{aligned}
$$

Hvor bytte av summasjonstegnet og integraltegnet følger fra dominererende konverges theoremet. La $v \in (0,1)$, og la $N \to \infty$, en har da

$$
\sum_{k=1}^{N}\frac{f(v)}{(v+k)(v+k-1)} = f(v)\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{v+k-1}-\frac{1}{v+k}\right) = \frac{f(v)}{v}-\frac{f(v)}{v+N}
$$

Som går mot $f(v)/v$ når $N \to \infty$. Mer at $1 = (v+k)-(v+k-1)$ for å se delbrøksoppspaltingen. For å teste at summen virkelig konvergerer har vi

$$
\left|f\left(v\right)\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(v+k)(v+k-1)}\right| = \left|\frac{f(v)}{v}-\frac{f(v)}{v+N}\right| = \frac{|f(v)|}{v}-\frac{|f(v)|}{v+N} \leq \frac{|f(v)|}{v}
$$

som følger fra antakagelsen om at $\int_0^1 |f(x)|/x\,\mathrm{d}x$ var endelig. Siden absollutt konvergens impliserer konvergens fullfører dette beviset. □

Både i beviset ovenfor og i theorem 4.22 ble $f\{x\} = f(\{x\})$ brukt, for å få litt penere notasjon.

Proposisjon 3.3.3. *La a være et reelt tall, da holder*

$$
\int_0^1 \sqrt{\frac{\{1/x\}}{1-a^2\{1/x\}}}\,\frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \frac{2\arcsin a}{a}
$$

for alle $a \in (0,1]$.

Proposisjon 3.3.4.

$$
\int_0^1 \sqrt[n]{\frac{\{1/x\}}{1-\{1/x\}}}\,\frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \frac{\pi}{\sin(\pi/n)}
$$

for all $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

Korollar 3.3.2.

$$\int_0^1 \sqrt[n]{\frac{\{1/x\}}{1-\{1/x\}}}\,\frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \pi$$

Bevis. Dette integralet følger fra **??** med $a = 1$ eller proposisjon (3.3.4) med $n = 2$. □

3.3.2 Gammafunksjonen

I denne delen skal vi se nærmere på Γ-funksjonen og noen av dens egenskaper. For et historisk perspektiv anbefalles artikkelen [5] på det sterkeste, og for en mer utfyllende introduksjon anbefales [3] – denne delen er hovedsaklig basert på disse kildene.

Det finnes mange funksjoner innen matematikk som bare er definert for hele tall[1]. Eksempelvis så kan summmen av de n første naturlige tallene skrives som

$$T\,:\,\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N} \quad T(n) = \sum_{k=1}^{n} = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$$

ved hjelp av enkel algebra kan summen skrives på lukket form som

$$T(n) = \frac{n(n+1)}{2} \tag{3.11}$$

Nå er formelen bare gyldig for naturlige tall. Men likevel gir formelen en mulig definisjon av hva det vil si og legge sammen de $5\frac{1}{2}$ første naturlige tallene. En naturlig fortsettelse til det å legge sammen de n første tallene, vil være å gange sammen de n første tallene

$$T : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N} \quad T(n) = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n = n!$$

Det ble lenge lett etter et lukket uttrykk for produktet slik som likning (3.11) gir en naturlig utvidelse for addisjon av de naturlige tallene. Motivasjonen er altså å gi mening til $n!$ når n ikke er et heltall.

Leonard Euler viste heldigvis at det var mulig å konstruere en slik funksjon som følger

Definisjon 3.3.3. La $s = \sigma + it$, hvor $\sigma, t \in \mathbb{R}$. Vi definerer Γ-funksjonen for $\sigma > 0$ som

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Dette integralet betegnes også noen ganger som Eulers første integral, eller det Euleriske integralet (The Eulerian integral). Å vise at denne funksjonen konvergerer dersom $\sigma > 0$ er vist i lemma (C.1.4) i Appendix C. Et sterkere resultat er å vise at Γ-funksjonen er analytisk for $\sigma > 0$, dette er og vist i appendiks C (se lemma 34.15) i For nå begrenser vi oss til å vise at denne funksjonen virkelig er en utvidelse av fakultetsfunksjonen. Vi ønsker altså å vise at

[1] Slike funksjoner kalles gjerne for *aritmetiske*- eller *tallteoretiske*-funksjoner.

Proposisjon 3.3.5. Γ-*funksjonen tilfredstiller*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{3.12}$$

og dersom $n \in \mathbb{N}$ *så er* $\Gamma(n+1) = n!$ *med* $\Gamma(1) = 1$.

Bevis. Ved å bruke delvis integrasjon så kan vi skrive

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[t^x e^{-t}\right]_\infty^0 - \int_0^\infty -xt^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x)$$

Hvor e^t vokser raskere enn $t^x\,\forall, x > 0$ slik at $t^x e^{-t} \to 0$ når $t \to \infty$. Ved å anta at $n \in \mathbb{N}$ fås

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1)\\ &= n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1\cdot\Gamma(1)\\ &= n!\cdot\Gamma(1)\end{aligned}$$

og det er trivielt å vise at $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$. □

Å finne funksjoner slik at $f(1) = 1$ og at $f(x+1) = xf(x)$ er ikke spesielt vanskelig og det finnes hele funksjonsgrupper som tilfredstiller disse kravene. Eksempelvis har vi

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(1-x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-x}{2}\right)}\right)$$

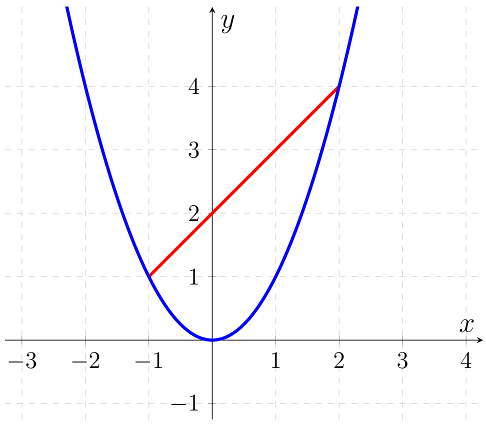
eller

$$f(x) = e^{g(z)}\cdot\left[z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-z/m}\right]^{-1}$$

Hvor i siste definisjon så er g alle funksjoner som tilfedstiller $g(z+1) - g(z) = \gamma + 2k\pi i \quad k \in \mathbb{Z}$. Som en artig kuriositet fås gammafunksjonen ved å velge den enkleste funksjonen g som $g(z) = \gamma z$. Enda mer tåpelige eksempler inneholder eksempelvis

$$G(x) = \begin{cases} 1/x & 0 < x \leq 1\\ 1 & 1 < x \leq 2\\ x-1 & 2 < x \leq 3\\ (x-1)(x-2) & 3 < x \leq 4\\ \vdots & \end{cases}$$

Så hvorfor velges utvidelsen av fakultetfunksjonen til å være akkuratt lik definisjon (3.3.3)? Svaret på spørsmålet får en kanskje fra at gammafunksjonen er logaritmisk konveks. At en funksjon er konveks betyr dette at funksjonen er synkende for alle verdier. Eventuelt dra et linjestykke mellom to vilkårlige punkt på funksjonen, da vil alle punkt på linjestykket ligge over funksjonen. Dette kan formelt skrives som



Figur 3.1: x^2 er konveks da alle punkter på den rød linjen ligger over funksjonen.

Definisjon 3.3.4. En funksjon $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ er kalt konveks hvis for ethvert par $x, y \in (a, b)$ så gjelder ulikheten

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

for alle $\lambda \in (0, 1)$.

Merk at kravet om logaritmisk konveksitet er langt kraftigere en kravet om at en funksjon er konveks. At en funksjon er logaritmisk koveks betyr at den vokser svært raskt på området. For eksempel er x^2 konveks mens $\log(x^2) = x \log x$ er ikke konveks. Ingen polynomer vokser raskt nok, og et eksempel som er logaritmisk konveks er e^{x^2}. Gammafunksjonen vokser altså like raskt eller raskere enn e^{x^2}.

For å gi litt trening i å bruke Γ-funksjonen velger vi å bevise at den er logaritmisk konveks. Til det trengs følgende ulikhet

Lemma 3.3.1. (Hölder's ulikhet). *La p,q være to positive reelle tall slik at $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Da for alle integrerbare funksjoner $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, så har vi*

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \left(\int_a^b |f|^p\,\mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^q\,\mathrm{d}x \right)^{1/q}$$

Et bevis for ulikheten finnes i [15, thm. 3.5] eller [3, Lem. 4.4], men theoremet holder og under mer generelle forutsetninger[2]. For flere slike integralulikheter anbefales [18, p. 206-211].

Proposisjon 3.3.6. *Γ-funksjonen $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ er logaritmisk konveks.*

[2] Vi har $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$, hvor $1/p + 1/q = 1$ se [12] eller igjen [15, thm. 3.8] for et bevis. Her betegner $\|g\|_p$ normen til g i L_p vektorrometet.

Bevis. La $p \in (1, \infty)$ og $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Herfra ser vi på

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) &= \int_0^\infty t^{(x/p+y/q-1)} e^{-t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty t^{x/p} t^{y/q} t^{-1/p} t^{-1/q} e^{-t/p} e^{-t/q} \,\mathrm{d}t \quad \text{siden} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\
&\leq \int \left(t^{x-1} e^{-t}\right)^{1/p} \left(t^{y-1} e^{-t}\right)^{1/q} \mathrm{d}t \\
&\leq \left(\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t\right)^{1/p} \left(\int_0^\infty t^{y-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t\right)^{1/p} \\
&= \Gamma(x)^{1/p} \Gamma(y)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Dersom vi nå lar $\lambda = 1/p$ og dermed $1 - \lambda = 1/q$ så har en at $\lambda \in (0, 1)$ og

$$\begin{aligned}
\Gamma\big(\lambda x + (1-\lambda) y\big) &\leq \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda} \\
\log\Big[\Gamma\big(\lambda x + (1-\lambda) y\big)\Big] &\leq \log\Big[\Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda}\Big] \\
&= \lambda \log \Gamma(x) + (1-\lambda) \log \Gamma(y)\,.
\end{aligned}$$

for enhver $x, y \in (0, \infty)$. At $\log \Gamma(x)$ er konveks følger dermed direkte fra definisjon (3.3.4). □

Hva dette i praksis vil si for Γ-funksjonen er at vi kan etablere en rekke ulikheter, og egenskaper til gammafunksjonen da den oppfører seg relativt sett pent. Kanskje det viktigste egenskapen er at gammafunksjonen er den eneste funksjonen som har disse egenskapene. Altså

Teorem 3.3.2. (Bohr–Mollerup) *Gitt en funksjon* $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *som tilfredstiller*

1. $f(1) = 1$
2. $f(x+1) = x f(x)$
3. $\log f$ *er konveks.*

Da følger det at $f(x) = \Gamma(x)\ \forall\, x \in (0, \infty)$.

Vi har allerede vist at $\Gamma(s)$ tilfredstiller kravene ovenfor, men å vise at envher funksjon som tilfredstiller kravene er identisk lik Γ krever mer spissfindighet. Beviset er relativt elementært men noe langt, og bevises derfor heller i avsnitt (C.3). Igjennom beviset viser en at Γ-funksjonen kan skrives på følgende form

Proposisjon 3.3.7. *La* $s = it + \sigma$*, da er*

$$\Gamma(s) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! \cdot n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)} \tag{3.13}$$

forutsatt at $\sigma > 0$

Denne proposisjonen er definert for alle $s \neq 0, -1, -2, \ldots$, og er identisk lik $\Gamma(s)$, når $\sigma > 0$. Siden funksjonen er definert i det negative planet beskriver vi likning (3.13) som en *anlytisk utvidelse* av $\Gamma(s)$. Senere skal vi se at likning (3.13) er en meromorf funksjon i det komplekse planet. Grovt sagt at polene – punktene hvor funksjonen er udefinert – er enkle.

Her viser vi proposjonen på en mer moderne måte, og tar utgangspunkt i følgende lemma

Lemma 3.3.2. (Produkt representasjonen av Γ-funksjonen)

$$\Gamma(s) = \lim_{n \to \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1} \, \mathrm{d}t$$

dersom $s = it + \sigma$, hvor $\sigma > 0$ og $t \in \mathbb{R}$.

Som er vist på side (261). Selv uten bevis virker lemmaet intuitivt siden vi har $e^{-x} = \lim_{x \to \infty}(1 - x/n)^n$.

Bevis. Ved å ta utgangspunkt I lemmaet ovenfor har vi

$$\begin{aligned}
\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1} \, \mathrm{d}t &= n^s \int_0^1 (1-u) u^{s-1} \, \mathrm{d}t \\
&= n^s \left(\left[\frac{u^s (1-u)^n}{s} \right]_0^1 + \frac{n}{s} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^s \, \mathrm{d}u \right) \\
&= n^s \left(\frac{n}{s} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^s \, \mathrm{d}u \right) \\
&= \cdots \\
&= n^s \frac{n(n-1)\cdots 1}{s(s+1)\cdots(s-1+n)} \int_0^1 u^{(s-1)+n} \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{n!}{s(s+1)\cdots(s+n)} n^s
\end{aligned}$$

og å ta grensen når $n \to \infty$ på begge sider av likheten fullfører beviset. $\square$

Ved å bruke likning (3.13) kan følgende theorem utledes

Teorem 3.3.3. *Weiserstrass produktet er definert som*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} := z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right) \tag{3.14}$$

for alle $z \in \mathbb{C}$ forutenom $z \in -\mathbb{N}$.(Altså polene $-1, -2, \ldots$ til gammafunksjonen.)

Dette er og en analytisk utvidelse av $\Gamma(s)$ og er kjent som et av Weierstrass produktene. Under følger et kort bevis

Bevis. Vi tar utgangspunkt i likning (3.13) og ser på inversen.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(z)} &= \lim_{n\to\infty} n^{-z}\left[\frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{1\cdot 2\cdots(n-1)\cdot n}\right] \\
&= z\lim_{n\to\infty} n^{-z}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{z+k}{k}\right) \\
&= z\lim_{n\to\infty} e^{-z\log n}\prod_{k=1}^{n} e^{z/k}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k} \\
&= z\lim_{n\to\infty} e^{-z\log n}e^{z(1+1/2+1/3+\ldots)}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k} \\
&= z\lim_{n\to\infty} e^{-z(H_n-\log(n))}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k} \\
&= ze^{-\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}
\end{aligned}$$

Hvor H_n er de n første tallene i den harmoniske serien. □

det andre Weiestrassproduktet definerer $\sin \pi x$ og er gitt som

$$\sin \pi z = \pi z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \tag{3.15}$$

Som kan bevises formelt via *Weierstrass faktoriserings teorem* ellers kan en anta at $\sin \pi z$ kan skrives som et produkt av alle sine nullpunkter, ved å gange sammen røttene på en smart måte fås teoremet. For nå tar vi det for gitt at likning (3.15) stemmer, og ønsker heller å vise følgende teorem.

Teorem 3.3.4. (Euler's refleksjons formel) *For alle $s \in (0,1)$, så holder identeiteten*

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \tag{3.16}$$

Å vise denne sammenhengen uten Weierstrass' produktene er noe trasig, men kan gjøres ved å skrive om høyresiden til et integral som løses via kompleks analyse eller å vise at $\phi(x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x)$ oppfyller en bestemt differensiallikning hvor løsningen gir oss resultatet.

Bevis. Ved å ta utgangspunkt i likning (3.13) så har vi likning (3.14) så har vi at $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = -z\Gamma(-z)\Gamma(z)$ og

$$\begin{aligned}
\Gamma(s)\Gamma(-s) &= \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{s(s+1)\cdots(s+n)}n^{s}\frac{n!}{-s(-s+1)\cdots(-s+n)}n^{-s} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{-s^2\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{s}{n}\right)\left(1-\frac{s}{n}\right)} = -\frac{\pi}{\sin \pi s}
\end{aligned}$$

Her ble likning (3.14) brukt i siste overgang. Beviset fullføres nå ved å gange med $-s$ på begge sider og bruke $-s\Gamma(-s) = \Gamma(1-s)$. Som følger direkte fra proposisjon (3.3.5). □

Ved å bruke resultatet ovenfor kan vi eksempelvis utlede følgende

Lemma 3.3.3.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

Bevis. Ved å sette $z = 1/2$ inn i likning (3.16) fås

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} \;\Rightarrow\; \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$$

Herfra ser vi at $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Videre ved å bruke selve definisjonen av gammafunksjonen så har vi at

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{(1/2-1)}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

Via substitusjonen $t \mapsto u^2$. Å kombinere dette resultatet med uttrykket for $\Gamma(1/2)$ fullfører beviset. □

Som er et svært viktig resultat innen statistikk og sannsynlighetsregning.

Proposisjon 3.3.8. (Dobbel Identiten) *For alle s slik at $s, s+1/2 \neq 0$ så er*

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2s}\pi^{1/2}\Gamma(2s) \tag{3.17}$$

Vi skal senere se på et enklere bevis for denne identiten ved bruk av betafunksjonen, men inntil da blir beviset noe tungt

Bevis. Teknikken blir å bruke et nyttig uttrykk for $\Gamma(2s)$, vi kan skrive

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(s)\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(2s)} &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n!n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)}\,\frac{n!n^{s/2}}{(s+\frac{1}{2})\cdots(s+\frac{1}{2}+n)}\right.\\
&\quad\times\left.\frac{2s(2s+1)\cdots(2s+2n)}{(2n)!(2n)^{2s}}\right\}\\
&= \frac{1}{2^s}\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n!)^2n^{1/2}2^{2n+1}}{(2n)!(s+n+\frac{1}{2})}\right\}\\
&= \frac{1}{2^s}\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n)!n^{1/2}(1+\frac{s}{n}+\frac{1}{2n})}\right\}\\
&= \frac{1}{2^s}\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n)!n^{1/2}}\right\}
\end{aligned}$$

For å vise identiteten må vi altså bestemme den siste grensen. For enkelhetensskyld defineres

$$C = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n)!n^{1/2}}\right\}$$

Uttrykket må holde for alle s, det må eksempelvis holde for $s = 1/2$. Innsetning gir da

$$C = \frac{\Gamma(s)\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(2s)} 2^{2s} = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1)}{\Gamma(1)} 2 = 2\sqrt{\pi}$$

hvor $\Gamma(1) = 1$, og $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ fra lemma (3.3.3) ble brukt. Å sette inn uttrykket for C, og å gange med $\Gamma(2s)$ fullfører beviset. □

Til slutt regner vi ut to siste integral herfra blir resten av resultatene knyttet til gammafunksjonen tatt i oppgavedelen. Vi ønsker å vise følgende

Vi har tidligere sett at de logaritmiske egenskapene til gammafunksjonen er svært viktige. Bla gir har vi et resultat som sier at

Teorem 3.3.5. (Stirrlings approximasjon) *Gitt følgende grense*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

så er

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

for store n.

Stirrlings approximasjon eller formel, kan og skrives som, $\log(n!) \sim \sqrt{2\pi n} + n\log n - n$. Resultatet kan selvsagt generaliseres for gammafunksjonen. Et forenklet bevis for overnevnte finnes i oppgavesammlingen under. Vi velger heller å prøve å vise følgende

Proposisjon 3.3.9.

$$\int_0^1 \log\Gamma(x) = \log\sqrt{2\pi}$$

Bevis. Beviset begynner med å skrive følgende integral

$$\int_0^1 \log\Gamma(x)\Gamma(1-x)\,\mathrm{d}x \tag{3.18}$$

På den ene siden kan integralet deles opp, slik at

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log\Gamma(x)\Gamma(1-x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \log\Gamma(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \log\Gamma(1-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \log\Gamma(x)\,\mathrm{d}x - \int_1^0 \log\Gamma(y)\,\mathrm{d}y \\ &= 2\int_0^1 \log\Gamma(x)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Alternativt kan integralet og skrives om ved å bruke Eulers refleksjonsformel, så

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log\Gamma(x)\Gamma(1-x)\,\mathrm{d}x &= \int \log\left(\frac{\pi}{\sin(\pi x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \log\pi - \int_0^1 \log\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &= \log\pi + \log(2)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

For å se det siste integralet kan substitusjonen $y \mapsto \pi x$ bli brukt så da fås

$$\int_0^1 \log\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \log(\sin y)\,\mathrm{d}y$$

som er et standard integral som har blitt beregnet før, se proposisjon (2.7.3). Ved sammenlikning har en nå at

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log\Gamma(x)\Gamma(1-x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \log\Gamma(x)\Gamma(1-x) \\ 2\int_0^1 \log\Gamma(x)\,\mathrm{d}x &= \log\pi + \log(2) \\ \int_0^1 \log\Gamma(x)\,\mathrm{d}x &= \log\sqrt{2\pi}\end{aligned}$$

som var det vi ønsket å vise. □

Oppgaver

1. Vis at $\Gamma(n) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^x+nx}\,\mathrm{d}x$, hvor $n \in \mathbb{N}$.

2. I denne oppgaven skal vi kartlegge en tilnærmelse til $\Gamma(x)$, også bedre kjent som Stirrling's formel. Vi utvikler bare rekken til andre ledd, da videre utvikling krever mer arbeid. Bestem et lukket uttrykk for

$$S = \sum_{i=1}^{N} \log i\,,$$

og videre vis at S tilnærmet er en Riemansum til integralet

$$S \approx C \cdot \int_1^n \log x\,\mathrm{d}x\,.$$

Bruk uttrykket for S og integralet til å bekrefte at

$$N! \approx C\left(\frac{N}{e}\right)^N$$

for store N, der C er konstant.

3. I denne oppgaven er ikke integrasjon i fokus. Men heller det å bli mer stø i å bruke $\Gamma(x)$ funksjonen. Uansett er det sterkt anbefalt å prøve seg på følgende oppgaver. Vi tar atter en gang og dypper fingrene ned

i kvantevannet, merk som vanlig at målet å lære matematikken og ikke fysikken, men litt forklaring trengs likevell. Et kvantifisert magnetisk moment har 2 kvantetilstander som betegnes med verdiene $s = \pm 1$. Avhengig av om det magnetiske momentet peker med eller mot påsatt magnetfelt. Tenkt på en magnet med $+$ og $-$. Vi betrakter et stort antall N slike magnetiske moment. Hvor N_+ har verdien $s = +1$ og $N_- = -1$. Videre så er $N_+ + N_- = N$. Tilslutt så er det totale magnetiske momentet gitt som $m = (N_+ - N_-)/N$. Målet med blir å bestemme Entropien S (uorden eller kvantevillskapen") til systemet. Stefan-Boltzans lov at entropien i et slikt magnetisk system er gitt som

$$S = k \log\left(\frac{N!}{N_-!N_+!}\right)$$

a) Bruk uttrykket for Entropen og Stirllings formel (se forrige oppgave) til å vise at entropien S kan skrives som

$$S = Nk\big[A - B(1+m)\log(1+m) - C(1-m)\log(1-m)\big]$$

og kartlegg dermed konstantene A, B og C.

4. Bestem følgende integral

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x^{\rho+1}}$$

der a,b positive konstanter, og $\rho < 1$. Integralet refferes noen ganger til som et generalisert frullani integral, der det klassiske frullani integralet fås ved å studere grensetilfellet $\rho \to 1$, som vi skal studere senere.

5. Definer følgende funksjoner

$$f(x) := \int_0^1 \log\Gamma(x+t)\,\mathrm{d}x \quad \text{og} \quad g(x) := \int_0^t \log x\,\mathrm{d}x\,,$$

vis differansen mellom f og g er høyst en konstant, og kartlegg konstanten[3]. Bruk dette til å bestemme integralet

$$\int_0^1 \log\Gamma(x+t)\,\mathrm{d}x\,.$$

Å derivere høyresiden kan være noe keitete, det anbefales derfor å bruke en luddig substitusjon for deretter å benytte seg av

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{g(t)}^{h(t)} f(x)\,\mathrm{d}x = f(h(t))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}h(t) - f(g(t))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(t) \tag{3.19}$$

[3] Merk denne metoden bare er derivering under integraltegnet i forkledning. Denne metoden skal granskes nærmere senere.

den fundamentale kalkulussetningen i skjønn harmoni med produktregelen. Følgende integral

$$\int_u^{u+1} \log\left(\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}\right) \mathrm{d}x = u \log u - u \tag{3.20}$$

kan og benyttes til å bestemme integralet relativt enkelt.

Likning (3.20) betegnes ofte som *Raabes formel* [13]. Bevis Raabes formel uten bruk av derivasjon.

3.3.3 Betafunksjonen

Integralet som vi studerte i forrige seksjon er også kjent som *Euler's andre integral* og i denne seksjonen skal vi se nærmere på *Euler's første integral*, kanskje bedre kjent som betafunksjonen og er definert som følger

Definisjon 3.3.5. For alle $x, y > 0$ så defineres

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \, \mathrm{d}t \tag{3.21}$$

Tilsvarende som for gammaintegralet er det viktig å vite at integralet virkelig er konvergent for alle $x, y > 0$. Eksempelvis om $x < 1$ så vil integranden gå mot uendelig når vi nærmer oss origo. Tilsvarende så vil integranden blåse opp for $t = 1$ når $y < 1$.

beta- og gammafunksjonen er svært nært knyttet til hverandre og vi har følgende resultat.

Teorem 3.3.6. *La $B(x, y)$ være definert som*

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \, \mathrm{d}t$$

Da har vi for alle $x, y \in$ hvor $\operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0$ relasjonene

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{3.22}$$

$$= \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} \, \mathrm{d}t \tag{3.23}$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1} \, \mathrm{d}\theta \tag{3.24}$$

Beviset for likning (3.22) overlates til leser se oppgave (3), da igjen gir det god trening i både bevisføring, algebra, og å komfortabel med beta og Γ-funksjonens egenskaper. Senere skal vi bevise relasjonen både med laplacetransformasjoner og kompleks analyse. Men for nå velger vi heller å vise likning (3.23) og (3.24).

Bevis. Tar utganspunkt i definisjonen

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} \, \mathrm{d}t \tag{3.25}$$

Vi benyttes oss av subtitusjonen $x \mapsto t/(1-t)$ som gir $t \in [0, \infty)$, slik at

$$B(a,b) = \int_0^\infty \left(\frac{x}{1+x}\right)^{a-1} \left(\frac{1}{1+x}\right)^{b-1} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\,\mathrm{d}x$$

dette beviser likning (3.23). For å vise likning (3.24) bruker vi substitusjonen $t \mapsto (\sin\theta)^2$ på likning (3.25) og får følgende uttrykk

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2\theta\right)^{x-1}\left(1-\sin^2\theta\right)^{y-1} 2\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

som fullfører beviset. □

Eksempel 3.3.2. Vi ønsker å vise at

$$\mathcal{M}\left\{\frac{1}{1+u^\beta}\right\}(\alpha) := \int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u}{1+u^\beta} = \frac{\pi/\beta}{\sin(\pi\eta)}\,, \tag{3.26}$$

hvor $\beta, \alpha > 1$, er reelle konstanter og $\eta = \alpha/\beta$.

Bevis. Vi betegner integralet som I og benytter oss av substitusjonen $x \mapsto 1 + u^\beta \;\Rightarrow\; u = (x-1)^{1/\beta}$ slik at

$$I = \int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{1+u^\beta}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\beta}\int_1^\infty \frac{(x-1)^{(\alpha-1)/\beta}}{x}(x-1)^{(1/\beta)-1}\,\mathrm{d}x$$

Settes nå $x \mapsto 1/v$ fås

$$\frac{1}{\beta}\int_0^1 v^{-\alpha/\beta}(1-v)^{-1+\alpha/\beta}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{\beta}B\left(1-\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$$

Ved å nå benytte seg av definisjonen til betafunksjonen, og Eulers refleksjonsformel får vi

$$\int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u}{1+u^\beta} = \frac{1}{\beta}\frac{\Gamma(1-\alpha/\beta)\,\Gamma(\alpha/\beta)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi/\beta}{\sin(\pi\eta)}$$

som var det vi ønsket å vise. □

Resultatet kan og vises ved å ta utgangspunkt i likning (3.23), via substitusjonen $t \mapsto x^\beta$. Som gir

$$B(a,b) = \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\,\mathrm{d}t = \beta\int_0^\infty \frac{t^{a\beta-1}}{(1+x^\beta)^{a+b}}\,\mathrm{d}t$$

og resultatet følger ved å dele likningen på β og sette $b + a = 1$, $a \cdot \beta = \alpha$ så

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^\beta}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\beta}B\left(\frac{\alpha}{\beta}, 1-\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\pi/\beta}{\sin(\pi\alpha/\beta)}$$

tilsvarende som før[4].

[4]Merk at betafunksjonen er en symmetrisk funksjon, $B(x,y) = B(y,x)$.

Korollar 3.3.3. *Gitt at $n \in \mathbb{R}$ så er*

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+x^{n-2}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} = \int_0^\infty \frac{x^{n-2}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi/n}{\sin \pi/n} \tag{3.27}$$

Beviset uttelates, men følger direkte fra likning (3.23) og lemma (2.5.1). En svak generalisering av likning (3.26) er følgende

$$\int_0^\infty \frac{b^2+u^{\alpha-1}}{a^2+u^\beta}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{\beta}a^{2(-1+1/\beta)}\left(\frac{b^2}{\sin(\pi/\beta)} + \frac{a^{2(1-\alpha)/\beta}}{\sin(\pi\alpha/\beta)}\right) \tag{3.28}$$

hvor $\eta = \alpha/\beta$, men dette overlates til leser. Dette resultatet gir blant annet

$$\int_0^\infty \frac{1+u^{\alpha-1}}{1+u^\beta}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{\beta}\left(\frac{1}{\sin(\pi/\beta)} + \frac{1}{(\sin \pi\eta)}\right) \tag{3.29}$$

ved å sette $a = b = 1$ i (3.28). Leser kan selv sjekke at likning (3.29) reduseres til (3.27) i tillfellet hvor $\alpha - 1 = \beta - 1$. Integraler på denne formen har blitt studert i forrige seksjon, og vil igjen bli studert i delen med kompleks analyse.

Oppgaver

1. Bevis korollar (3.3.3)

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+x^{n-2}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} = \int_0^\infty \frac{x^{n-2}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi/n}{\sin \pi/n}\,,$$

ved å kun bruke likning (3.26). Unngå altså å bruke lemma (2.5.1).

2. Bestem følgende integral $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{nx}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$ når $n \in [0,1]$.

3. Vi skal i denne oppgaven bevise relasjonen mellom beta- og gammafunksjonen

$$B(x,y) := \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

og til dette benyttes følgende funksjon

$$\phi(x) := \frac{B(x,y)\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}\,.$$

Vis at $\phi(x)$ oppfyller følgende egenskaper

1) $\phi(1) = 1$

2) $\phi(x+1) = x \cdot \phi(x)$

3) $\log \phi(x)$ er konveks

og benytt Bohr-Mullerup teoremet til å fullføre beviset.

4. I denne oppgaven ønsker vi å bevise av multiplikasjons theoremet bedre kjent som Legendre's dobbel formel (Legendre's duplication formula").

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{z}\,\Gamma(2z)\,.$$

Vis først at

$$B(a,a) = 2^{1-2a}B\left(a,\frac{1}{2}\right)$$

og bruk dette til å bevise Legendre's dobbel formel. Vis og at identiteten kan skrives som

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!}\,. \tag{3.30}$$

dersom $n \in \mathbb{N}$.

5. Wallis integralene er nesten like kjent som Wallis produktet og er definert som

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n \,\mathrm{d}x\,.$$

Vis at integralene er like og bestem verdien til til W_n for odde og like n. Du kan fritt benytte deg av Legendre's form fra forrige oppgave.

3.3.4 Digamma-funksjonen

I denne delen skal vi se nærmere på digammafunksjonen (psi)

Definisjon 3.3.6. Digammafunksjonen er definert som følger

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \log \Gamma(z)$$

også kjent som den logaritmisk-deriverte av gammafunksjonen. Noen ganger betegnes også funksjonen som ψ_0, som vi skal senere. For nå beholdes den originale notasjonen for enkelhetens skyld. Et viktig resultat er følgende

$$\psi(1-z) - \psi(z) = \pi \cot(\pi z) \tag{3.31}$$

Bevis. Resultatet ligner veldig på Eulers refleksjonsformel. Så en naturlig start er å derivere formelen, vi har da

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\pi}{\sin(\pi x)} \\
\Gamma'(x)\Gamma(1-x) - \Gamma(x)\Gamma'(1-x) &= -\pi^2 \frac{1}{\sin(\pi z)}\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \\
\psi(z)\Gamma(z)\Gamma(1-z) - \Gamma(z)\psi(1-z)\Gamma(1-z) &= -\pi^2 \frac{1}{\sin(\pi z)} \cot(\pi z) \\
\Gamma(z)\Gamma(1-z)\big[\psi(1-z) - \psi(z)\big] &= \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right) \pi \cot(\pi z) \\
\psi(1-z) - \psi(z) &= \pi \cot(\pi z)
\end{aligned}$$

som var det vi ønsket å vise. Her ble det brukt at $\Gamma'(x) = \psi(x)\Gamma(x)$, Eulers refleksjonsformel, og noen velkjente trigonometriske identiter. □

Enda en viktig identitet er følgende

$$\psi(1+z) - \psi(z) = \frac{1}{z} \tag{3.32}$$

Bevis. Vi starter med følgende likning

$$\frac{\Gamma(1+z)}{\Gamma(z)} = z\,. \tag{3.33}$$

Dette følger selvsagt direkte fra at per definisjon så er $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Derivasjon av begge sider gir

$$\frac{\Gamma(1+z)}{\Gamma(z)}\big(\psi(1+z) - \psi(z)\big) = 1$$

og beviset fullføres ved å bruke likning (3.33) også dele begge sider på z. Her ble det ikke brukt noe mer enn kvotientregelen og definisjonen av digammafunksjonen. □

Vi tar et raskt lite eksempel for å vise hvor kraftig disse enkle relasjonene kan være

Eksempel 3.3.3. Vis at

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}$$

Bevis. Vi begynner med å definere følgende integral

$$I(a) := \int_0^\infty \frac{x^a}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

Der vi legger merke til at integralet vi ønsker å bestemme er $I'(0)$. Hvorfor vi har lov til å bytte om integral og derivasjonstegnet kommer senere, men for nå holder det å si at dette er lovlig da funksjonen er begrenset. Utregningen av $I(a)$ går som følger

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^\infty \frac{x^a}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{t^\beta}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}x \qquad \left(t = x^2\ ,\ \beta = \frac{a+1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}B\left(\frac{a+1}{2}, 2-\frac{a+1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{a+1}{2}\right) \end{aligned}$$

Dersom vi nå deriverer $I(a)$ med hensyn på a fås

$$I'(a) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{a+1}{2}\right)\left[\psi\left(\frac{a+1}{2}\right) - \psi\left(2-\frac{a+1}{2}\right)\right]$$

settes nå $a = 0$ fås

$$I'(0) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left[\psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{3}{2}\right)\right] = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)(-2) = -\frac{\pi}{4}$$

og vi er ferdige. □

Under blir noen av detaljene i beviset gjennomgått

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\pi}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\,,$$

hvor $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ble benyttet. Tilslutt så er

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{3}{2}\right) = -\left[\psi\left(1+\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right)\right] = -\frac{1}{2^{-1}} = -2\,,$$

hvor likning (3.32) benyttet.

La oss vise en annen representasjon av $\psi(x)$, nemlig

$$\psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} - \frac{1}{n+z} \tag{3.34}$$

Bevis. Snur vi oppmerksomheten vår mot likning (3.14) og tar logaritmen får vi

$$\log\left(\frac{1}{\Gamma(z)}\right) = \log\left(ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)\exp\left(-\frac{z}{n}\right)\right)$$
$$\log\left(\frac{1}{\Gamma(z)}\right) = \log\exp\{\gamma z\} + \log z + \sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{z}{n}\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\log\exp\left\{\frac{z}{n}\right\}$$

Brukes nå at $\log 1/A = -\log A$ og begge sider ganges med -1 kan vi skrive uttrykket på en enkel deriverbar form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log\Gamma(z)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(-\gamma\cdot z - \log z + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{z}{n} - \log\left(1+\frac{z}{n}\right)\right]\right)$$
$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{1+z}\right)$$

som var det som skulle vises. □

Overgangen fra sum til logaritme kan virke noe underlig, vi ser på produktet a_n/b_n og tar logaritmen

$$\begin{aligned} K = \log\left(\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}\right) &= \log\left(\frac{a_1\cdot a_2\dots}{b_1\cdot b_2\cdot\dots}\right) \\ &= (\log a_1 + \log a_2 + \dots) - (\log b_1 + \log b_2 + \dots) \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n\right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n\right) \end{aligned}$$

hvor tilsvarende utregning kan bli brukt på produktet i likning (3.2).

Fra denne likningen kan vi enkelt finne et par konkrete verdier for digamma-funksjonen.

$$\begin{aligned} \psi(1) &= \Gamma'(1) = -\gamma \\ \psi\left(\frac{1}{2}\right) &= -\gamma - 2\log 2 \\ \psi\left(\frac{1}{3}\right) &= -\gamma - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2}\log 3 \\ \psi\left(\frac{1}{4}\right) &= -\gamma - \frac{\pi}{2} - 3\log 2 \end{aligned}$$

Disse kan utledes ved å studere likning (3.34) nøyere. Første verdi faller direkte ut da

$$\psi(1) = -\gamma - 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = -\gamma$$

Siden rekken er teleskoperende så har en at

$$
\begin{aligned}
S_k &:= \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{k+1}\,.
\end{aligned}
$$

Slik at når $k \to \infty$ så vil $S \to 1$. Bruksområdene til digammafunksjonen og ulike integralrepresentasjoner vil komme i form av små drypp fremmover når vi utforsker ulike integrasjonsteknikker. For nå begrenser vi oss til å skrive opp noen grunnleggende identiter.

Noen viktige identiter

$$
\begin{aligned}
\psi(z+1) &= -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{z+k} \\
\psi(z+1) &= -\gamma + \int_0^1 \frac{1-t^z}{1-t}\,\mathrm{d}t \\
\psi(z) &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\,\mathrm{d}t \\
\psi'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+z)^2} \\
\psi'(1) &= \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}
$$

Oppgaver

1. Vis følgende

$$\frac{\partial}{\partial x} \log B(x,y) = \psi(x) - \psi(x+y)$$

2. Vis følgende

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -2\log 2 - \gamma$$

og bruk resultatet til å beregne integralet

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}\,(1-t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

3. Bestemm integralet

$$I(m) = \int_0^1 \psi(x) \sin 2\lambda\pi x\,\mathrm{d}x$$

hvor $\lambda \in \mathbb{Z}$. Hva skjer når $\lambda \to \infty$? Strider dette mot Rieman-Lesgue lemmaet, hvorfor/hvorfor ikke?

3.3.5 Polygamma-funksjonen

Denne seksjonen blir noe kort, da polygamma-funksjonen ikke er like nyttig som digamma funksjonen. Funksjonen er defiert som følger

$$\psi_m(z) = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\psi(x) = \frac{\mathrm{d}^{m+1}}{\mathrm{d}z^{m+1}}\log\Gamma(z)\,.$$

altså er $\psi_0(z) = \psi(z)$ fra forrige seksjon. De fleste identitetene som holdt for digammafunksjonen holder og for polygammafunksjonen, eksempelvis

$$\psi_m(z+1) - \psi_m(z) = (-1)^m \frac{m!}{z^{m-1}}$$

som kan vises via induksjon da $\psi(z+1) - \psi(z) = 1/x$, som vi har vist før.For trigammafunksjonen ψ_1 får vi eksempelvis

$$\psi_1(z+1) - \psi_1(z) = -\frac{1}{z^2}$$

Videre så gjelder fortsatt refleksjonsformelen slik at

$$(-1)^m\psi_m(1-z) - \psi_m(z) = \pi\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\cot(\pi z)$$

hvor vi får igjen eksempelvis har at for ψ_1 så er

$$\psi_1(1-z) + \psi_1(z) = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2$$

Dersom vi ser bort i fra $\psi(x)$ så kan vi for alle $m > 0$ skrive polygammafunksjonen som følgende sum

$$\psi_m(z) = (-1)^{m+1}m! \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z+k)^{m+1}} = (-1)^{m+1}m! \cdot \zeta(m+1, z)$$

Der $\zeta(s, z)$ er Hurwitz zeta funksjonen som vi snart skal se på.

3.3.6 Riemann zeta funksjonen

Riemann zeta funksjonen er en av de viktigste og mest fascienerende funksjonene innen moderne matematikk. Måten funksjonen oppstår på er veldig naturlig da den dreier seg om potenserekker av naturlige tall

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\,, \text{ usw.}$$

Definisjon 3.3.7. Riemann Zeta funksjonen er definert som

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \quad \text{for } \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Her er s et komplekst tall med real del større enn 1. Men vi skal bare se på tilfellet der s er reell. Som vanlig var det Euler som først betraktet funksjonen, men det var Bernhard Riemann ($1826 - 1866$) som innså viktigheten av å bektrakte s som kompleks.

Det var Euler som kartla verdien av $\zeta(2n)$ hvor n er et naturlig tall. Men før vi ser på det trengs en kort introduksjon av Bernoulli tallene.

Bernoulli tallene Jacob Bernoulli ($1654 - 1705$) var opptatt med å bestemme en formel for

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k$$

hvor $k \in \mathbb{N}$ og $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Ved lave verdier er det relativt enkelt å finne et uttrykk for summen

$$S_2(n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

som kjent fra før. Utrolig nok fant bernoulli ut at

$$S_k(n) = \frac{1}{1+k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j} \,.$$

der B_j står for det j'te *Bernoulli tallet*. Tallene kan bli beskrevet rekursivt som

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j = 0\,, \ k \geq 1$$

med initalverdi $B_0 = 1$. På magisk vis oppstår og Bernoulli tallene i taylorutviklingen av visse funsjoner. Eksempelvis

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{1}{1!} \cdot \frac{z}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{z^6}{6} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{z^4}{-30} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$$

i tabbel 1 er de første bernoulli-tallene oppført.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$\frac{691}{2730}$

Proposisjon 3.3.10. *La $\zeta(z)$ betegne Riemann zeta funksjonen da er*

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} \, \mathrm{d}t\,,$$

hvor $\mathrm{Re}(z) > 1$.

Bevis. Vi har fra den geometriske rekken

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1$$

Ved å sette $r = e^{-z}$ fås

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k \cdot z} = \frac{1}{1 - e^{-z}} = \frac{e^z}{e^z - 1}$$

Ved å bruke dette resultatet kan integralet nå beregnes

$$\begin{aligned}\zeta(z)\Gamma(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z} \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\infty \left(\frac{t}{k}\right)^{z-1} e^{-t} \frac{\mathrm{d}t}{k}\end{aligned}$$

Ved å bruke substitusjonen $u = t/n$ får vi nå

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^\infty (u)^{z-1}\, e^{-ku}\, \mathrm{d}u \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^\infty u^{z-1} e^{-u} e^{-ku}\, \mathrm{d}u \\ &= \int_0^\infty u^{z-1} e^{-u} \left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-ku}\right) \mathrm{d}u \\ &= \int_0^\infty u^{z-1} e^{-u} \left(\frac{1}{1-e^{-u}}\right) \mathrm{d}u \\ &= \int_0^\infty \frac{u^{z-1}}{e^u - 1}\, \mathrm{d}u \end{aligned}$$

som var det vi ønsket å vise. □

3.3.7 Hurwitz zeta function

3.3.8 Polylogaritmen

Som vi har sett tidligere så er Rieman-zet funksjonen svært viktig innen matematikk. I denne delen studerer vi en lignende funksjon. Polylogaritmen er også kjent som Jonquière's function og betegnes som $\mathrm{Li}_s(z)$, hvor s er graden. $\mathrm{Li}_2(z)$ betegnes som dilogaritmen, $\mathrm{Li}_3(z)$ som trilogaritmen usw. Per definisjon så er

Definisjon 3.3.8. Polylogaritmen er definert som følger

$$\mathrm{Li}_(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s} = z + \frac{z^2}{2^s} + \frac{z^3}{3^s}$$

Fra definisjonen ser vi at

$$\mathrm{Li}_n(1) = \sum_k = \frac{1}{k^n} = \zeta(n)$$

hvor notasjonen $\sum_k$ er kortformen av $\sum_{k=1}^{\infty}$. Dette viser sammenhengen mellom polylogaritmen og zetafunksjonen. For dilogaritmen $n = 2$ har en

$$\mathrm{Li}_2(1) = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

som vi kommer mer tilbake til senere. Legg merke til at for $n = 1$ så har en

$$\mathrm{Li}_1(z) = \sum_k \frac{z^k}{k} = -\log(1-z)$$

som vi gjennkjente som maclaurinrekken til $\log(1-z)$ mer generelt så har vi følgende theorem.

Teorem 3.3.7. *for $n \in \mathbb{N}$ så kan polylogaritmen defineres rekursivt som*

$$\mathrm{Li}_{n+1}(z) = \int_0^z \frac{\mathrm{Li}_n(t)}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Bevis. Vi tar utgangspunkt i høyresiden og bruker definisjon (3.3.8) så

$$\begin{aligned}
\int_0^z \frac{\mathrm{Li}_n(t)}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^z \frac{1}{t}\left(\sum_k \frac{t^k}{k^n}\right)\mathrm{d}t \\
&= \sum_k \frac{1}{k^n}\int_0^z t^{k-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_k \frac{1}{k^n}\left[\frac{t^k}{k}\right]_0^z \\
&= \sum_k \frac{z^k}{k^{n+1}} \\
&= \mathrm{Li}_{n+1}(z)
\end{aligned}$$

□

Derivasjon av teorem (3.3.7) gir nå

$$z\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{Li}_{n+1}(z) = \mathrm{Li}_n(z)$$

som er en nyttig identitet.

3.3.9 Dilogaritmen

Av alle polylogaritmene er nok kanskje $\mathrm{Li}_2(z)$ den mest nyttige, noen ganger er funksjonen og kjent som *Spence's funksjon* etter den skotske matematikkeren William Guthrie Spence (1846–1926), som gjorde en systematisk studie av funksjonen på begynnelsen av 1900-tallet. Vi tar utgangspunkt i følgende definisjon for dilogarithmen

Definisjon 3.3.9. Dilogaritmen er definert som følger

$$\mathrm{Li}_2(z) = \sum_k \frac{z^k}{k^2} = -\int_0^z \frac{\log(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

for alle $z < 1$.

Den første identiteten vi skal vise er tillegn Abel, og refferes noen ganger som Pentagon Identiteten.

Teorem 3.3.8. (Abels identitet) *Gitt at* $x, y \neq\in [1, \infty)$ *da er*

$$\log(1-x)\log(1-y) = \mathrm{Li}_2(u) + \mathrm{Li}_2(v) - \mathrm{Li}_2(uv) - \mathrm{Li}_2(x) - \mathrm{Li}_2(y) \tag{3.35}$$

hvor $u = x/(1-y)$ *og* $v = x/(1-y)$.

Beviset går ut på å først derivere høyre og venstre side av identiteten og vise at disse er like. Integrasjon gir da at høyre og venstre side *høyst* kan være forskjellige ved en konstant. Beviset fullføres ved å vise at konstanten er null. Ved å fullføre omskrivningen av likning (3.35) fås

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_2(u) + \mathrm{Li}_2(v) = \mathrm{Li}_2(uv) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{u(1-v)}{1-uv}\right) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{v(1-u)}{1-uv}\right) \\ + \log\left(\frac{1-u}{1-uv}\right)\log\left(\frac{1-v}{1-uv}\right)\end{aligned} \tag{3.36}$$

som ofte reffereres til som *pentagon identiteten*. Ved hjelp av Abels theorem og vanlig derivasjon kan en vise at dilogaritmen tilfredstiller en rekke funksjonallikninger

Proposisjon 3.3.11.

$$\mathrm{Li}_2(z) + \mathrm{Li}_2(1-z) = \frac{\pi^2}{6} - \log z \log(1-z) \quad \textit{(Refleksjonsformelen)} \tag{3.37}$$

$$\mathrm{Li}_2(z) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\log^2(-z) \quad \textit{(Inversjonsformelen)} \tag{3.38}$$

$$\mathrm{Li}_2(-z) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{z}{1+z}\right) = -\frac{1}{2}\log^2(z+1) \quad \textit{(Landen's Identitet)} \tag{3.39}$$

$$\mathrm{Li}_2(z) + \mathrm{Li}_2(-z) = \frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(z^2) \quad \textit{(Kvadrat identiteten)} \tag{3.40}$$

Bevis. Velger her å vise første og andre identitet. Setter vi $x = z$ og $y = 1 - z$ i likning (3.35) fås

$$\begin{aligned}\log(1-z)\log(z) &= \mathrm{Li}_2(1) - \mathrm{Li}_2(z) - \mathrm{Li}_2(1-z) \\ \mathrm{Li}_2(z) - \mathrm{Li}_2(1-z) &= \frac{\pi^2}{6} - \log z \log(1-z)\end{aligned}$$

der det ble benyttet at $\mathrm{Li}_2(1) = \zeta(2) = \pi^2/6$, dette viser *Eulers refleksjonsformel*. □

Bevis. Ønsker så å vise *Inversjonsformelen*. Ved å derivere $\mathrm{Li}_2(-1/z)$ fås

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{Li}_2\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^2}\left(-\frac{\log\left(1+\frac{1}{z}\right)}{-1/z}\right) = \frac{\log(1+z) - \log z}{z}$$

Integrasjon med hensyn på z gir nå at

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_2\left(-\frac{1}{z}\right) &= \int_0^z \frac{\log(1+t)}{t} - \frac{\log z}{z}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{-z} \frac{\log(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\log^2(z) + \mathcal{C} \\
&= \mathrm{Li}_2(-z) - \frac{1}{2}\log^2(z) + \mathcal{C}
\end{aligned}$$

for å bestemme konstanten settes $z = 1$ så $\mathcal{C} = 2\,\mathrm{Li}_2(-1)$. Men vi har at

$$\mathrm{Li}_2(-1) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

setter vi nå inn dette og lar $z = -z$ får vi

$$\mathrm{Li}_2(z) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\log^2(-z)\,,$$

som ønsket. □

Ved samme metode kan *Landens Identitet* bestemmes, ta utgangspunkt i $\mathrm{Li}_2[z/(z-1)]$ og derivere, men å vise dette og kvadrat identiten overlates til leser.

Selv om digammafunksjonen tilfredstiller en rekke funksjonallikninger er det dessverre bare en håndfull verdier som kan regnes ut eksplisitt. Disse er

$$0\,, \qquad \pm 1\,, \qquad \pm 1 \pm \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

hvor vi gjennkjenner sistnevnte som det gylne snittet. Merk at $\varphi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.6180\ldots > 1$ slik at $\mathrm{Li}_2(\varphi)$ divergerer. Derimot så konvergerer den konjugerte $\Psi = 1 - \varphi$ som vi skal se i det påfølgende eksempelet.

Eksempel 3.3.4. Vis at

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) &= \frac{\pi^2}{10} - \log^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \\
\mathrm{Li}_2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) &= \frac{\pi^2}{15} - \log^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \\
\mathrm{Li}_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) &= -\frac{\pi^2}{15} + \frac{1}{2}\log^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Bevis. La oss for enkelhetensskyld definere

$$\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,,$$

da kan vi enten se eller regne ut at α er en løsning av $x^2 + x = 1$. Bedre kjent som den konjugerte av det gylne snittet, heldigvis så er $\sqrt{5} > 1$ så $\alpha < 1$, og integralene konvergerer. Videre så er

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -\alpha \quad \text{og} \quad \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 - \alpha$$

Ved å sette $x = y = 1 - \alpha$ inn i Abels Identitet (3.35) fås nå

$$2\,\mathrm{Li}_2(\alpha) - 3\,\mathrm{Li}_2(1-\alpha) = \log^2\alpha \tag{3.41}$$

der det ble benyttet at $\alpha^2 = 1 - \alpha$. Via refleksjonsformelen fra likning (3.37) med $z = \alpha$ fås

$$\mathrm{Li}_2(\alpha) + \mathrm{Li}(1-\alpha) = \frac{\pi^2}{6}\log\alpha\log(1-\alpha) = \frac{\pi^2}{6} - 2\log^2\alpha \tag{3.42}$$

Og sist men ikke minst ved å bruke kvadrat identiteten fra likning (3.40) fås

$$\mathrm{Li}_2(\alpha) + \mathrm{Li}_2(-\alpha) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Li}_2(1-\alpha) \tag{3.43}$$

hvor det ble brukt igjen at $\alpha^2 = 1 - \alpha$. Ved å betegne

$$A = \mathrm{Li}_2(\alpha)\,, \qquad B = \mathrm{Li}_2(1-\alpha)\,, \qquad C = \mathrm{Li}_2(-\alpha)$$

gir likningene (3.41) til (3.43) følgende likningssett

$$\begin{aligned}
2A \; - \; 3B &= \log^2\alpha \\
A \; + \; B &= \frac{\pi^2}{6} - 2\log^2\alpha \\
A \; + \; C &= \frac{1}{2}B
\end{aligned}$$

løser en dette settet for A, B, C fås

$$\begin{aligned}
A = \mathrm{Li}_2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) &= \frac{\pi^2}{10} - \log^2\alpha \\
B = \mathrm{Li}_2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) &= \frac{\pi^2}{15} - \log^2\alpha \\
C = \mathrm{Li}_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) &= -\frac{\pi^2}{15} + \frac{1}{2}\log^2\alpha
\end{aligned}$$

som var det vi ønsket å vise. □

1. Vis Abels identitet via derivasjon

$$\log(1-x)\log(1-y) = \mathrm{Li}_2(u) + \mathrm{Li}_2(v) - \mathrm{Li}_2(uv) - \mathrm{Li}_2(x) - \mathrm{Li}_2(y)$$

hvor $u = x/(1-y)$ og $v = x/(1-y)$.

2. Vis Kvadrat identiten og Landen's identitet

3.3.10 Dilogaritmen

3.3.11 Elliptiske Integral

På begynnelsen av 1900-tallet var studiet av kurver og buelengden av disse et av de sentrale områdene som ble studert. Sinus og cosinus kunne brukes til å beregne buelengden av sirkler, og buelengden av hyperbolske kurvene kunne beregnes tilsvarende med de hyperbolske trigonometriske funksjonene ($\sinh$ og $\cosh$). elliptiske funksjonene ble innført for å beregne buelengden av ellitptiske kurver, og fullførte dermed treenigheten. Studiet av disse funksjonene var lenge svært sentralt og ble studert allerede av Gauss, som vi skal se senere.

Innen moderne matematikk defineres et elliptisk integral som alle funksjoner f som kan skrives på formen

$$f(x) := \int_c^x R\left(t, \sqrt{P(t)}\right) \mathrm{d}t$$

hvor R er en rasjonell funksjon, og P er et polynom av enten grad 3 eller 4, og c er konstant. Her skal vi bare studere komplette elliptiske integral og disse skrives som $f(\pi/2)$ med $c =$. Det er som regel tre integral som forbinnes med elliptiske funksjoner, disse er

Definisjon 3.3.10. Det første komplette elliptiske integralet er definert som

$$\mathbf{K}(k) := \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(t)}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

Definisjon 3.3.11. Det andre komplette elliptiske integralet er definert som

$$\mathbf{E}(k) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t$$

Definisjon 3.3.12. Det tredje komplette elliptiske integralet er definert som

$$\mathbf{K}(k) := \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{(1+n\sin^2 t)\sqrt{1-k^2\sin^2(t)}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1-n^2x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

Hvor k kalles *modulusen* og $k' = \sqrt{1-k^2}$ kalles den komplimentære modulusen. Slik at $k^2 + (k')^2 = 1$.

Generelt sett så kan ikke de elliptiske integralene utregnes eksplisitt i form av mer kjente funksjoner, men la oss vise et lite knippe

Eksempel 3.3.5.

$$\mathbb{K}\left(\sqrt{-1}\right) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$$

Bevis. Ved å sette inn og bruke substitusjonen $y \mapsto x^4$ fås

$$\mathbb{K}\left(\sqrt{-1}\right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4}\int y^{-3/4}(1-y)^{-1/2}\,\mathrm{d}y = \frac{\Gamma(1/4)\Gamma(1/2)}{4\Gamma(3/4)}$$

herfra så er $\Gamma(1/4)\Gamma(3/4) = \pi\sqrt{2}$, ved å bruke eulers-refleksjonsformel med $a = 1/4$. Tilsvarende så er $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ og dette fullfører beviset. □

Vi kan vise et par tilsvarende former for de elliptiske integralene, men først trengs følgende lemma.

Lemma 3.3.4. *La f være en funksjon med odde periode a. Da er*

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{a}\int_0^{a/2} f(x)\cot\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x \tag{3.44}$$

Bevis. Vi begynner beviset med å dele integralet inn i perioder på a altså

$$\int_0^\infty = \int_0^a + \int_a^{2a} + \int_{2a}^{3a} + \cdots$$

ved å gjøre dette kan integralet skrives som

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^\infty \int_{ak}^{a(k+1)} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^\infty \int_0^a \frac{f(u+ak)}{u+ak}\,\mathrm{d}u\,.$$

Der substitusjonen $x \mapsto u + ak$ ble brukt i siste overgang. Siden f har en periode på a så er $f(x+ak) = f(x)$ for alle $k \in \mathbb{Z}$. Vi deler atter en gang opp integralet slik at

$$\sum_{k=0}^\infty \left[\int_0^a \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{x+ak} + \int_{a/2}^a \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{x+ak}\right] = \int_0^a f(x)\sum_{k=0}^\infty\left[\frac{1}{x+ka} - \frac{1}{(k+1)a-x}\right]\mathrm{d}x \tag{3.45}$$

Der substitusjonen $x \mapsto u - a/2$ ble brukt i siste overgang. Ved litt smart algebra-magi så har vi at summen kan skrives som

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{x+ka} - \frac{1}{(k+1)a-x} &= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{x+ka} + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{x-ka}\\ &= \sum_{k=-\infty}^\infty \frac{1}{x+ka}\\ &= \frac{1}{a}\sum_{k=-\infty}^\infty \frac{1}{k+x/a}\\ &= \frac{\pi}{a}\cot\left(\frac{\pi x}{a}\right)\end{aligned} \tag{3.46}$$

Der det ble benyttet at

$$\pi\cdot\cot(\pi x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^N \frac{1}{x+n} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^\infty \frac{2x}{x^2-n^2}$$

Ved nå å sette likning (3.46) inn i likning (3.45) og sette konstantleddet utenfor fås

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty f(x)\frac{\pi}{a}\cot\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{a}\int_0^{a/2} f(x)\cot\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x$$

som var det som skulle vises. □

Korollar 3.3.4. *La f være en like-funksjon med periode a. Da er*

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{a} \int_0^{a/2} f(x) \, \mathrm{d}x$$

og spesielt så er

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x} \sin x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(x) \, \mathrm{d}x$$

Bevis. Ved å benytte oss av lemma (3.3.4) på funksjonen $f(x) = \sin(\pi x/a)$ som er odde med periode $2a$. Videre så gir halv-vinkel formlene våre

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + cosx}$$

ved å sette inn får vi nå

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{f(x)}{x} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \mathrm{d}x &= \frac{\pi}{a} \int_0^{a/2} f(x) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cot\left(\frac{\pi x}{a}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{a} \int_0^{a/2} f(x) \left[1 + \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right] \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{a} \int_0^{a/2} f(x)
\end{aligned}$$

Nå siden $\cos(\pi x/a)$ er en odde funksjon omkring $a/4$ så er integralet null. □

SOMETHING DARK SIDE

Som en liten digresjon avslutningsvis tar vi og ser på to integral som likner på Elliptiske integral, men kan bestemmes eksplisitt.

Eksempel 3.3.6. For alle $b \in (0, 1)$ så er

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t \, \mathrm{d}t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} &= \frac{\arcsin k}{k} \\
\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t \, \mathrm{d}t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} &= \frac{1}{2b} \log\left(\frac{1+b}{1-b}\right)
\end{aligned}$$

Bevis. Vi kaller integralene henholdsvis for $F_1(k)$ og $F_2(k)$. Via substitusjonen $x \mapsto k \sin t$ så er

$$F_1(b) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t \, \mathrm{d}t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = \frac{1}{b} \int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\arcsin k}{k}$$

der substitusjonen $x \mapsto \sin y$ fullfører beviset. La oss løse $F_2(b)$ noe liknende, ved å la $k* = \sqrt{1 - k^2}$, da er $k^2 + k*^2$. Videre så er $1 - k^2 \sin^2 t = 1 - (1 - k*^2) \sin^2 t = k *^2 + k^2 \cos^2 t$. Siden $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ fra pytagoras. Nå er

$$F_2(b) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t \, \mathrm{d}t}{\sqrt{b *^2 + k^2 \cos^2 t}} = \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{k *^2 + x^2}} = \frac{1}{k} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{k}{k*}\right)$$

Der substitusjonen $x = k \sin t$ ble brukt, også $x \mapsto k * y$. Per definisjon så er $\operatorname{arcsinh} = \log \left[1 + \sqrt{1 + u^2}\,\right]$, via litt algebra så er nå $1 + k^2/k*^2 = 1/b*^2$ slik at

$$F_2(b) = \frac{1}{b} \log \frac{1+k}{k*} = \frac{1}{b} \log \frac{1+k}{(1-k^2)^{1/2}} = \frac{1}{b} \log \frac{(1-k^2)^{1/2}}{(1-k^2)^{1/2}}$$

det å bruke at $a \log b = \log b^a$ fullfører nå beviset. $\square$

3.4 Transformasjoner

En *integral transformasjon* kan bli sett på som en type operator som virker på en funksjon f. Transformasjonen eller avbildningen skrives gjerne som

$$F(x) = \int_a^b K(x,t) f(t) \, \mathrm{d}t$$

hvor $K(x,t)$ betegner kernelen. En av de viktigste egenskapene med integral transformasjonen er at det er en lineær operator[5].

Definisjon 3.4.1. En lineær transformasjon mellom to vektorrom V og W er en avbildning $T : V \mapsto W$ slik at

$$T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2)\,,$$

holder for alle vektorer v_1 og v_2 i V og for enhver skalar $\alpha \in \mathbb{R}$.

Setter vi den formelle notasjonen til side er motivasjonen for slike tranfornsfjormasjoner lett å forstå. Det eksisterer mange klasser av problemer som er vanskelig, eller umulig å løse algebraisk - i deres opprinnelige form. En integraltranformasjoner avbilder en likning fra dets opprinnelige området til et annet området. Likningen i det nye området kan være langt enklere å behandle. Deretter kan en mappe funksjonen tilbake til det opprinnelige området ved å bruke den inverse av integral-tranformasjonen. Dette gjelder integraler og. For en lengre liste over ulike integral-transformasjoner anbefales [9].

Direkte relatert til integral transformasjoner er *konvolusjoner*. Dersom F og G er integral transformasjonene til f og g, så er konvolusjonen $f * g$ lik funksjonen som har transformasjonen FG. Konvolusjonen uttrykkes ofte som et integral med hensyn på f og g, men ikke nødvendigvis kernelen $K(x,t)$.

3.4.1 Laplace transformasjonen

Laplace transformasjonen er en av de mest brukte integral-transformasjonene innen matematikk og har flere bruksomåder innen fysikk og ingeniørvitenskap. Den blir brukt til å beregne differensiallikninger, funksjonallikninger, og visse integral. For et historisk perspektiv anbefales artikklene [6, 7] fra Michael A. B. Deakin varmt.

Definisjon 3.4.2. La $F(t)$ være en funksjon av t. *Laplace Transformasjonen* av F er da definert som $\mathscr{L}$

$$\mathscr{L}\big(f(t)\big) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \, \mathrm{d}t$$

Noen ganger skrives også $\mathscr{L}_f(s)$ for å vise at vi tar laplace transformasjonen av funksjonen f. Ellers brukes og den tosidide laplace-transormasjonen

$$\mathscr{L}^2\big(F(t)\big) = \int_{-\infty}^\infty e^{-st} F(t) \, \mathrm{d}t$$

[5]Kjært barn har mange navn. Alternative navn er en lineær transformasjon, lineær mapping, lineær funksjon osv.

Den inverse $\mathscr{L}$-transformasjonen betegnes som $\mathscr{L}^{-1}(f(t)$ eller $\mathscr{L}_f^{-1}(s)$, og kan skrives som et kontur-integral

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F\}(t) = \mathcal{L}_s^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{st} F(s)\,\mathrm{d}s\,,$$

men det er ofte langt enklere å bruke tabell (3.1) til å bestemme inversene.

Proposisjon 3.4.1. *Transformasjonen $\mathscr{L}$ er en lineær transformasjon*

Bevis. Dette følger fra at selve integralet danner en lineær-transformasjon $K(f) = \int f$, men dette glemmer vi for nå. Direkte innsetning gir

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big) &= \int_0^\infty (\alpha f(t) + \beta g(t)) e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \alpha f(t) e^{-st}\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty \beta g(t) e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \alpha \int_0^\infty f(t) e^{-st}\,\mathrm{d}t + \beta \int_0^\infty g(t) e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \alpha\mathscr{L}\big(f(t)\big) + \beta\mathscr{L}\big(f(t)\big)
\end{aligned}$$

som ønsket. □

Vi har allerede sett på laplace-transformasjonen av $F(t,x) = t^{s-1}$, da dette nesten er Γ-funksjonen. En rekke slike integral er vist i tabell (3.1). merk at

Tabell 3.1: Et utvalg $\mathscr{L}$-transformasjoner av elementære funksjoner.

$f(t)$	$\mathscr{L}_f(s)$	Betingelser
1	$1/s$	
t^a	$\Gamma(a+1)/s^{a+1}$	$\mathrm{Re}(a) > -1$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\omega \in \mathbb{R}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$s > \lvert\mathrm{Im}(\omega)\rvert$
$\cosh\omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$s > \lvert\mathrm{Re}(\omega)\rvert$
$\sinh\omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$s > \lvert\mathrm{Im}(\omega)\rvert$
$\sigma(t-a) = e^{-as}$		
$H[c](t)$	$\begin{cases} 1/s & \text{om} \quad c \le 0 \\ e^{cs}/s & \text{om} \quad c > 0 \end{cases}$	

transformasjonen av de trigonometriske integralene er vist i lemma (3.8.2) og proposisjon (2.6.1). Uttrykkene i tabellen er ikke vanskelig å utlede å utelates derfor. I tabellen ble to nye funksjonen innført Heavyside funksjonen H_c og Dirac delta funksjonen δ, disse er definert som følger

Definisjon 3.4.3. Dirac delta funksjonen δ er definert som

$$\sigma(x) = \begin{cases} +\infty & \text{dersom} \quad x = 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

og tilfredstiller

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Definisjon 3.4.4. Heavyside funksjonen er definert som

$$H[n] = \begin{cases} 0 & \text{dersom} \quad n < 0 \\ 1 & \text{dersom} \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Mer spennende er det å studere egenskapene Laplace Transformasjonen har, enn spesfifikke verdier. tabell (3.2) viser et utvalg egenskaper laplace transformasjonen har. Vi skal se nærmere på et par av disse egenskapene.

Tabell 3.2: Noen av de mest kjente egenskapene til $\mathscr{L}$-transformasjonen.

tdomenet	$s$domenet
$af(t) + bf(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{k-1} f^{(n-k)}(0)$
$f(t)/t$	$\int_s^\infty F(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$
$\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$F(s)/s$
$f(a)t$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} F\left(\frac{s}{a}\right)$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$F(t-a)H(t-a)$	$e^{-as} f(s)$

Proposisjon 3.4.2.

$$G(s) = \mathscr{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty F(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$$

Hvor $\mathscr{L}\big(f(t)\big) = F(\sigma)$.

Bevis. Vi begynner med å sette inn definisjonen av Laplace-transformasjonen på høyre side

$$\int_s^\infty F(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = \int_s^\infty \left(\int_0^\infty f(t)e^{-\sigma t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\sigma = \int_0^\infty \int_s^\infty f(t)e^{-\sigma t}\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t$$

I siste overgang byttet vi om integrasjonsrekkefølgen. Dette følger fra fubinis sats siden vi krever at $|f(t)e^{-\sigma t}|$ skal være begrenset. Siden $f(t)$ ikke er avhengig av σ kan vi sette ledddet utenfor integrasjonen

$$\int_s^\infty F(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^\infty f(t)\int_s^\infty e^{-\sigma t}\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t)\frac{e^{-st}}{t}\mathrm{d}t = \mathscr{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)$$

som var det som skulle vises. □

Korollar 3.4.1.

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} = \int_0^\infty F(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$$

Korolaret faller ut direkte ved å sette $s = 0$ i proposisjon (3.4.2).

Eksempel 3.4.1. Fra korolaret følger Dirichlet integralet nesten direkte.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} = \pi$$

Siden integranden er symmetrisk trenger vi bare se på området $\omega > 0$. Ved å bruke korollar (3.4.1) med $f(t) = \sin t$ har vi

$$\int_0^\infty \frac{f(\omega)}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = \int_0^\infty \mathscr{L}\left(\sin t\right)\mathrm{d}s = \int_0^\infty \frac{1}{s^2+1^2}\,\mathrm{d}s$$

Hvor laplace transformasjonen av $\sin x$ ble tatt fra tabell (3.1) mens utledningen finnes i lemma (3.8.2) og proposisjon (2.6.1). Altså har vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{s^2+1^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\Big[\arctan s\Big]_0^\infty = \pi$$

Eksempel 3.4.2. Bestem den inverse $\mathscr{L}$-transformasjonen av funksjonene

$$F(s) = \frac{1}{s(1+s)(1+s^2)}$$

via standard delbrøksoppspalting kan F skrives som

$$F(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+s} + \frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1+s}{1+s^2}$$

Vi kan nå sammenlikne med tabellen og ser at $\mathscr{L}(1) = 1/s$, siden $\int_0^\infty e^{-sx}\,\mathrm{d}x = 1/s$. Dette betyr at $\mathscr{L}^{-1}(1/s) = 1$. Videre kan det siste uttrykket deles opp i to deler

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1+s}{1+s^2}\right) = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{1+s^2}\right) + \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{s}{1+s^2}\right) = \cos t + \sin t$$

Som følger fra at både $\mathscr{L}$ og $\mathscr{L}$-transformasjonen lineære transformasjoner. For det siste leddet kan vi bruke faseforskyvnings egenskapene $\mathscr{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a)$. Vi har at $F(s) = 1/s$, og $F(s+1) = 1/(1+s)$ slik at

$$\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{1+s}\right) = e^{-s}\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = e^{-s}$$

oppsumert har en altså

$$\mathscr{L}^{-1}\big(F(s)\big) = 1 - \frac{e^{-t}}{2} - \frac{\cos t + \sin t}{2}$$

som var det som skulle bestemmes.

Hovedsaklig blir $\mathscr{L}$-transformasjoner brukt til å forenkle eller løse differensiallikninger. Men de kan og brukes for å evaluere visse integral. Under er et eksempel hvor det er enklere å beregne $\mathscr{L}$-transformasjonen av integralet, enn integralet i seg selv.

Eksempel 3.4.3.

$$\int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}$$

Bevis. Vi kaller integralet for I og beregner i stedet først $\mathscr{L}(I)$, for så å ta den inversee $\mathscr{L}$-transformasjonen. Dette gir

$$\mathscr{L}f(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2}e^{-sx}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$

Det neste steget blir å bytte om grensene. At integralet fortsatt tar samme verdi følger fra fubinis sats siden absoluttverdien av integralet konvergerer[6]

$$= \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\int_0^\infty \cos(xt)e^{-sx}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\frac{s}{s^2+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Bruker vi delbrøksoppspalting på den gjennstående integranden fås

$$= \frac{s}{1-s^2}\int_0^\infty \left(\frac{1}{s^2+t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{s}{1-s^2}\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{s}-1\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+s}.$$

Vi har nå altså beregnet $\mathscr{L}$-transformasjonen av integralet vårt

$$\mathscr{L}\left(\int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+s}$$

ved å ta den inverse $\mathscr{L}$-transformasjonen på begge sider av likningen fås

$$\int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+s}\right) = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}$$

som var det som skulle beregnes. Grunnen til at vi skriver $|x|$ er fordi vi ønsker at svaret skal holde for alle x. Siden $\cos x$ er en likefunksjon så er $\cos(-xt) = \cos(xt)$, så vi får samme uttrykk for negative x. □

Konvolusjon

Konvolusjon er en måte å definere en relasjon mellom to funksjoner på. Akkuratt som en definerer addisjon og subtraksjon danner en operasjon på de reelle tallene. For integraler og spesielt laplace-transformasjoner er følgende definisjon viktig

Definisjon 3.4.5. La $f(t)$ og $g(t)$ være to funksjoner av t. Vi definerer operasjonen $(f*g)(t)$ som følger

$$f*g = \int_{-\infty}^\infty f(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

som og er en funksjon avhengig av t.

Proposisjon 3.4.3. *Dersom f og g er en-sidede funksjoner, så er*

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

[6] Siden $|\cos(xt)| < 1$ har vi at

$$|I| \leq \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-sx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \left[\frac{\pi}{2}e^{-sx}\right]_0^\infty \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\pi}{2s}e^{-sx}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2s}$$

som komvergerer.

Altså at $f(t) = a(t)H(t)$ og $g(t) = b(t)H(t)$, der H igjen betegner heavyside funksjonen og a og b er funksjoner av t. Det interessante er hva som skjer når vi tar $\mathscr{L}$-transformasjonen av $f * g$.

Proposisjon 3.4.4. *La $f, g : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ være to en-sidede funksjoner, og la $F(s)$ og $G(s)$ betegne deres respektive $\mathscr{L}$-transformasjoner. Da er*

$$\mathscr{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s) \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f * g)(t)$$

Proposisjonen kan og skrives som

$$\mathscr{L}(f * g) = \mathscr{L}(f) \cdot \mathscr{L}(g)$$

som noen ganger er en hendigere form. Her ser vi altså operasjonen $*$ gjør $\mathscr{L}$-transformasjonen til en komplett-multiplikativ funksjon[7].

Bevis. Vi begynner med å skrive om $F(s)G(s)$ som dobbeltintegralet

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(x+y)} f(x)g(y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,.$$

Ved å bruke substitusjonen $t \mapsto x + y$ også $y = \tau$ får vi at integralet kan skrives

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty \int_\tau^\infty e^{-st} f(t - \tau)g(\tau) \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}\tau \,.$$

Herfra snur vi integrasjonsrekkefølgen, og at dette er lov følger igjen fra fubinis sats.

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(t - \tau)g(\tau) \,\mathrm{d}\tau \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f(t - \tau)g(\tau) \,\mathrm{d}\tau \right] \mathrm{d}t \,.$$

Ved å innfører notasjonen $h(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) \,\mathrm{d}\tau$ har en nå vist

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st} h(t) \,\mathrm{d}t = \mathscr{L}\{(f * g)(t)\} \,,$$

som ønkset. For å vise den andre likheten tar en invers $\mathscr{L}$-transformasjon av likningen over. Dette fullfører beviset. □

Tanken er nå at i stedet for å beregne integralet $f * g$ kan en i stedet beregne den inverse $\mathscr{L}$-transformasjonen av produktet av F og G

$$\int_0^t f(t - \tau)g(\tau) \,\mathrm{d}\tau = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}$$

la oss vise et tilfellet hvor dette er nyttig.

Eksempel 3.4.4. Vi ønsker å vise bevise teorem (3.3.6) ved hjelp av konvolusjons-theoremet. Altså at

$$B(x, y) = \int_0^1 s^{x-1}(1 - s)^{y-1} \,\mathrm{d}s = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}$$

holder for alle komplekse x,y med realdel større enn null.

[7] Altså at $f(n * m) = f(n)f(m)$ holder. For tallteoretiske funksjoner har vi en tilsvarende konvolusjonen nemlig Dirichlet konvolusjonen.

Bevis. Vi velger $f(t) = t^x$ og $g(t) = t^y$. Ved å beregne $f * g$ har vi

$$(t^x * t^y) = \int_0^t s^x (t-s)^y \,\mathrm{d}s$$

som nesten er definisjonen av beta-integralet. På den ene siden så er $\mathscr{L}(t^x * t^y) = \mathscr{L}(t^x)\mathscr{L}(t^y)$, slik at

$$\mathscr{L}(t^x * t^y) = \mathscr{L}(t^x)\mathscr{L}(t^y) = \frac{x! \cdot y!}{s^{x+y+2}}$$

Fra konvolusjons-theoremet har vi da at

$$\int_0^t s^x (t-s)^y \,\mathrm{d}s = \mathscr{L}^{-1}\left(\frac{x! \cdot y!}{s^{x+y+2}}\right) = x! \cdot y! \frac{t^{x+y+1}}{(x+y+1)!} \tag{3.47}$$

hvor det ble brukt at $\mathscr{L}^{-1}\left[\Gamma(a+1)/s^{a+1}\right] = t^a$ igjen fra tabell. Ved å sette inn $x = x-1$, $y = y-1$ og $t = 1$ kan likning (3.47) skrives som

$$\int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{y-1} \,\mathrm{d}s = \frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

hvor $n! = \Gamma(n+1)$. Dette fullfører beviset. □

1. La f være en funksjon med periode T. Vis at

$$\mathscr{L}_f(s) = \frac{1}{1-e^{-Ts}} \int_0^T f(t) e^{-st} \,\mathrm{d}t$$

2. La f være en funksjon slik at $\mathscr{L}$-transformasjonen av f eksisterer. Vis at

$$\mathscr{L}\left(\int_0^t f(w) \,\mathrm{d}w\right) = \frac{1}{s} F(s)$$

3.4.2 Fourier-transformasjon

Parseval og Plancherel

Teorem 3.4.1. (Parseval's identitet) *La f og g være kvadratisk integrerbare funksjoner $f, g \in L^2$ slik at indreproduktet er definert. Da holder*

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)} \,\mathrm{d}x = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$$

Korollar 3.4.2. (Plancherels Theorem) *Spesielt dersom $f = g$ i teorem (3.4.1), så er*

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(x)\right|^2 \mathrm{d}x = \|\hat{f}\|_2^2$$

3.4.3 Mellin transformasjonen

Mellin transformasjonen er en multiplikativ transformasjon og er relatert til den tosidige laplace transformasjonen. Integralet er dypt knyttet til Dirichlet rekker, og sentral innen analytisk tallteori.

Definisjon 3.4.6. Mellin transformasjonen av f er definert som

$$\mathcal{M}(f(x)) = \varphi(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Som før kommer vi enten til å skrive $\mathcal{M}_f(s)$ eller $\varphi(s)$ dersom det er innlysende hvilken funksjon vi tar transformasjonen av. Som et grunleggende og viktig eksempel innen tallteori så er $\mathcal{M}$-transformasjonen av $f(x) = e^{-x}$ lik Γ-funksjonenen. Mellin-transformasjonen er faktisk en Fourier-transformasjon, som kan vises ved en substitusjon. Merk at bruksområdene til Fouerier og Mellin-transformasjonene er noe forskjellig.

Proposisjon 3.4.5. *Gitt at f er en kontinuerlig funksjon på $(0,\infty)$, at $f(t) \leq Ct^{-\alpha}$ for $\alpha \in \mathbb{R}$ når $t \to 0$, og at $f(t)$ går mot null raskere enn enhver potens av t når $t \to \infty$. Så holder følgende*

1. *Mellin-transformasjonen av f konvergerer absolutt for $\mathrm{Re}(s) > \alpha$ og definerer en holomorf funksjon i det halvplanet.*
2. *La $s = \sigma + iT$, hvor $\sigma > \alpha$ og la*
$$g_\sigma(t) = e^{-2\pi\sigma t} f\big(e^{-2\pi t}\big)$$
3. *Den inverse mellin-transformasjonen er definert som et komplekst linjeintegral og konvergerer for alle $\sigma > \alpha$ for alle $x > 0$*
$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - iT}^{\sigma iT} x^{-s} \mathcal{M}_f(s)\,\mathrm{d}s$$
når $T \to \infty$.

3.4.4 Landen's transformasjon

Som introduksjon forklares først hva det aritmetiske-geometriske snittet er.

Definisjon 3.4.7. (Aritmetiske-geometriske snittet) For to positive reelle tall x og y definer som følger

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}(a+b) \\ b_1 &= \sqrt{ab} \end{aligned}$$

Der a_1 er den aritmetriske middelverdien av a, b og b_1 er den geometriske middelverdien av a, b. Deniner så følgen

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}\,(a_n + b_n) \\ g_{n+1} &= \sqrt{a_n \cdot b_n} \end{aligned}$$

Følgene konvergerer mot samme verdi og kalles det *aritmetiske-geometriske snittet* av a og b. Der snittet som $M(a,b)$ eller $\mathrm{Agm}(a,b)$.

Eksempelvis så er $\operatorname{Agm}(1,2) \approx 1.45679$ og $\operatorname{Agm}(1.5) \approx 2.604008$. La oss først vise et lemma som relaterer det ellitpiske integralet, og $\operatorname{Agm}(x,y)$.

Lemma 3.4.1. *Integralet*

$$I(a,b) := \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}$$

er uforandret om a og b byttes ut sitt aritmetriske og geometriske snitt

$$I(a,b) = I\left(\frac{1}{2}(a+b), \sqrt{ab}\right).$$

Bevis. Benytter substitusjonen $\tan\theta = x/b$ så $\mathrm{d}\theta = \cos^2(\theta)/b$ så

$$I(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}$$

Benyttes nå substitusjonen $x = t + \sqrt{t^2+ab}$ fås

$$= \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{\left(t^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)(t^2+ab)}}$$

$$= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\left(t^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)\left(t^2 + (\sqrt{ab})^2\right)}}$$

Kvadratroten ble skrevet om som følger

$$\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = 2x\sqrt{t^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$$

og $\mathrm{d}x = (x/\sqrt{t^2+ab})\,\mathrm{d}t$. □

Tidlig på 1800-tallet var Gauss interest i lengden av leminskater altså kurver som ligner på ∞. Etter en numerisk beregning av en spesiell leminskate observerte han at

$$\frac{1}{\operatorname{Agm}(1,\sqrt{2})} \qquad \text{og} \qquad \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$$

stemte til 11 desimaler. Med forbausende klarsyn deduserte Gauss følgende theorem

Teorem 3.4.2.

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} = \frac{\pi}{2\operatorname{Agm}(a,b)} \tag{3.48}$$

Bevis. Siden $I(a,b) = I\left(\frac{1}{2}(a+b), \sqrt{ab}\right)$ så har vi altså

$$I(a,b) = I(a_1,b_1) = I(a_2,b_2) = \cdots = I\big(M(a,b), M(a,b)\big)$$

Setter vi dette inn i likningen fås

$$I = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+M(a,b)^2)(x^2+M(a,b)^2)}} = \frac{1}{M(a,b)}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \frac{\pi}{2M(a,b)}$$

der substitusjonen $x \mapsto M(a,b)y$ ble benyttet. □

At dette integralet er nært knyttet til de elliptiske integralene er allerde hintet til i starten, via substitusjonen $b^2 = a^2(1-k^2)$ fås

$$I = \frac{1}{a}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \frac{1}{a}F\left(\frac{\pi}{2},k\right) = \frac{1}{a}K(k) \tag{3.49}$$

Settes likning (3.48) inn i likning (3.49) og løser med hensyn på K fås

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\frac{a}{\mathrm{Agm}(a, a\sqrt{1-k^2})}\,.$$

fordelen med dette er at iterasjonen av $\mathrm{Agm}(x,y)$ konvergerer kvadratisk, altså dobbles antall rette siffer per iterasjon. Dette er altså *særs* nyttig for å tilnærme lengden av ellptiske kurver.

3.4.5 Cauchy-Schlömilch transformasjonen

Utledningene og informasjonen her er stort sett hentet fra [2] og mer utdyppende informasjon finnes der. Teknikken vi skal se på her ble popularisert av Oscar Xavier Schlömilch (1823-1901), men kan finnes i notater til Cauchy tidligere, derav navnet.

Eksempel 3.4.5. Først tar vi en titt på et klassisk integral fra P.Laplace.

$$\int_0^\infty \exp\left(-ax^2 - bx^{-2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-2\sqrt{ab}}$$

Bevis. For å beregne integralet fullføres kvadratet slik at

$$\int_0^\infty \exp(-ax^2-bx^{-2}) = e^{-2\sqrt{ab}}\int_0^\infty e^{-(\sqrt{a}\,x-\sqrt{b}\,/x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Definerer så siste integral som K så

$$K := \int_0^\infty e^{-(\sqrt{a}\,x-\sqrt{b}\,/x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Benyttes nå substitusjonen $t = \frac{1}{x}\sqrt{b/a}$ fås

$$K = \sqrt{\frac{b}{a}}\int_0^\infty e^{-(\sqrt{a}\,x-\sqrt{b}\,/x)^2}\,\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\,.$$

Tar en gjennomsnittet av disse to integralene fås

$$K = \frac{1}{2\sqrt{a}}\int_0^\infty e^{-(\sqrt{a}\,x-\sqrt{b}\,/x)^2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\,/x^2\right)\mathrm{d}x\,. \tag{3.50}$$

Substitusjonen $y \mapsto \sqrt{a}\,x - \sqrt{b}\,/x$ gir så

$$K = \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

og dette fullfører beviset da

$$\int_0^\infty \exp\left(-ax^2 - bx^{-2}\right)\mathrm{d}x = Ke^{-2\sqrt{ab}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-2\sqrt{ab}}\,.$$

□

Teknikken om blir brukt her ble utvidet av O.Schlömilch til følgende theorem.

Teorem 3.4.3. (Cauchy-Schlömilch) *Gitt* $a, b > 0$ *og* f *en kontinuerlig funksjon da er*

$$\int_0^\infty f\left((ax - b/x)^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_0^\infty f(y^2)\,\mathrm{d}y\,, \tag{3.51}$$

gitt at integralene i likning (3.51) konvergerer.

Bevis. Benytt substitusjonen $t \mapsto b/(ax)$ så

$$I := \int_0^\infty f\left((ax - b/x)^2\right)\mathrm{d}x = \frac{b}{a}\int_0^\infty f\left((at - b/t)^2\right)\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

Ved å ta gjennomsnittet av disse to integralene fås

$$= \frac{1}{a}\int_0^\infty \left(a + \frac{b}{t^2}\right) f\left((at - b/t)^2\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_0^\infty f(y^2)\,\mathrm{d}y$$

Der substitusjonen $y \mapsto at - b/t$ ble brukt i siste overgang. Dette fullfører beviset. □

Denne relativt enkle transformasjonen kan løse langt vanskeligere integral enn hva dagens symbolske kalkulatorer klarer. Her sammenlikner vi med Maple 14.

Eksempel 3.4.6.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-(x - b/x)^{2n}\right\} = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)$$

Bevis. Tar utgangspunkt i likning (3.51) med $f(x) = e^{-x^n}$ slik at

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-(x - b/x)^{2n}\right\}\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^{2n}}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-t}t^{1/(2n)-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{2n}\right)\end{aligned}$$

der substitusjonen $t \mapsto y^{2n}$ ble brukt i andre overgang. At e^{-x^2} er symmetrisk omkring origo, og definisjonen av gammafunksjonen ble benyttet til å fullføre beviset. □

I det neste theoremet ser vi på en naturlig utivdelse av Cauchy-Schlömilch transformasjonen

Teorem 3.4.4. *La s være en kontinuerlig synkende funksjon fra $\mathbb{R}^+$ til $\mathbb{R}^+$. Anta at s er sin egen invers, altså at $s^{-1}(x) = s(x)\,\forall\, x \in \mathbb{R}^+$ da er*

$$\int_0^\infty f\left([ax - s(ax)]^2\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_0^\infty f(y^2)\,\mathrm{d}y \tag{3.52}$$

der $a > 0$ og gitt at integralene konvergerer.

Bevis. La først $t \mapsto ax$ og bytt tilbake til x som integrasjonsvariabel da fås

$$I = \int_0^\infty f\left([ax - s(ax)]^2\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_0^\infty f\left([x - s(x)]^2\right) \mathrm{d}x$$

Videre la $t \mapsto s(x)$, dette gir

$$I = \frac{1}{a}\int_0^\infty f\left([x - s(x)]^2\right) \mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\int_0^\infty f\left([s(t) - t]^2\right) s'(t)\,\mathrm{d}t$$

Gjennomsnittet av disse to integralene gir

$$\frac{1}{2a}\int_0^\infty f\left([x - s(x)]^2\right)\left(1 - s'(t)\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_0^\infty f(y^2)\,\mathrm{d}y$$

der substitusjonen $y \mapsto x - s(x)$ ble benyttet i siste overgang. Dette fullfører beviset. $\square$

Det finnes flere funksjoner som er sin egen invers, den enkleste $f(x) = 1/x$ har vi sett grundigere på før. I følgende eksempel vises noen andre slike funksjoner

Eksempel 3.4.7. En nyttig funksjon som er sin egen invers er

$$s(x) = x - \frac{1}{\alpha}\log\left(e^{\alpha x} - 1\right)$$

ved å benytte oss av likning (3.52) fås

$$\int_0^\infty f\left(\frac{1}{\alpha^2}\log^2\left(e^{\alpha x} - 1\right)\right) \mathrm{d}x = \int_0^\infty f(y^2)\,\mathrm{d}y$$

Interessant! Ved nå og sette $f(x) = e^{-x}$ fås

$$\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\log^2\left(e^{\alpha x} - 1\right)\right) \mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

merk og at integralet kan løses ved å forenkle høyresiden, dette gir

$$\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\log^2\left(e^{\alpha x} - 1\right)\right) \mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{(x-1/\alpha)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

via $y \mapsto x - 1/\alpha$, uansett er dette en artig generalisering.

3.4.6 Diverse transformasjoner

I denne delen skal vi blant annet beregne

$$I(a,b;r) := \int_0^\infty \left(\frac{x^2}{x^4 + 2ax + 1} \right)^r \frac{x^2+1}{x^b+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

og noen spesialtilfeller. For å løse oppgaven innledningsvis trengs følgende omskrivning

Lemma 3.4.2.

$$\int_0^\infty f\left(\frac{x^2}{x^4 + 2ax^2 + 1} \right) \mathrm{d}x = \int_0^\infty f\left(\frac{1}{x^2 + 2(a+1)} \right) \mathrm{d}x$$

for alle funksjoner f med $a > 0$.

Bevis. Ved å dele på x^2 og faktorisere gir

$$J = \int_0^\infty f\left(\frac{x^2}{x^4 + 2ax^2 + 1} \right) \mathrm{d}x = \int_0^\infty f\left(\frac{1}{(x - x^{-1})^2 + 2(a+1)} \right) \mathrm{d}x$$

La oss nå benytte Cauchy-Schlömilc transformasjonen fra teorem (3.4.3) til å beregne integralet. Her settes $f(t) = g\big(1/(t^2 + 2a + 2)\big)$. Da har vi

$$\int_0^\infty g\left(\frac{1}{(ax - b/x)^2 + 2(a+1)} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \int_0^\infty g\left(\frac{1}{y^2 + 2(a+1)} \right) \mathrm{d}y$$

og beviset fullføres ved å sette $a = b = 1$. □

Vi er endelig klar til å gyve løs på problemet innledningsvis, nå med barsk og bram.

Teorem 3.4.5. (V.Moll's MasterTheorem) *La*

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\infty \left(\frac{x^2}{x^4 + 2ax^2 + 1} \right)^r \cdot \frac{x^2+1}{x^b+1} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \\
I_2 &= \int_0^\infty \left(\frac{x^2}{x^4 + 2ax^2 + 1} \right)^r \cdot \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \\
I_3 &= \int_0^\infty \left(\frac{x^2}{x^4 + 2ax^2 + 1} \right)^r \mathrm{d}x \\
I_4 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{x^2}{x^4 + 2ax^2 + 1} \right)^r \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Da er $I_1 = I_2 = I_3 = I_4$ og verdien er

$$I(a,b;c) = \frac{2^{-(1+\lambda)}}{(1+a)^\lambda} B\left(\lambda, \frac{1}{2} \right) \tag{3.53}$$

der $\lambda = r - 1/2$.

Bevis. Heldigvis så tilfredstiller

$$R(x) = \left(\frac{x^2}{x^4 + 2ax^2 + 1}\right)^r \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

funksjonallikningen $R(y) = R(1/y)/y^2$, og fra teorem (2.9.1) så er $R(x)/(x^b + 1)$ uavhengig av b. Settes $b = 2$ fås I_2, $b = -2$ gir I_3. For å vise I_4 kan en enten sette $b = 0$ i I_1 eller ta gjennomsnittet av I_2 og I_3. Dette viser at integralene er like. For å beregne integralet tar en utgangspunkt i lemma (3.4.2) med $f(u) = u^r$ dette gir

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(\frac{x^2}{x^4 + 2ax^2 + 1}\right)^r \mathrm{d}x &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{x^2 + 2(a+1)}\right)^r \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\big[2(a+1)\big]^{-r+1/2} \int_0^1 u^{r-3/2}(1-u)^{-1/2} \\
&= \frac{2^{-1-r+1/2}}{(1+a)^{r-1/2}} B\left(r - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{2^{-(1+\lambda)}}{(1+a)^\lambda} B\left(\lambda, \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Der substitusjonen $u = \frac{2(a+1)}{x^2+2(a+1)}$ ble benyttet i andre overgang. Avslutningvis ble definisjonen av betafunksjonen benyttet og $\lambda = r - 1/2$. □

Herfra følger par eksempler på spesialtilfeller av dette integralet

Eksempel 3.4.8. Ved $a = 7$ og $r = 5/4$ i I_2 fås

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x^4 + 14x^2 + 1)^{5/4}} = \frac{\Gamma^2(3/4)}{4\sqrt{2\pi}}$$

Et par flere eksempler fås ved å derivere med hensyn på variablene i likning (3.51). Eksempelvis ved å sette $a = 1/2$ og derivere med hensyn på r fås

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left(\frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}\right)^r \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(r)} \\
&\int_0^\infty \left(\frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}\right)^r \log\left(\frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}\right) \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(r)} \cdot \big(\psi(\lambda) - \psi(r)\big)
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Hvor $\lambda = r - 1/2$ og $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$.

Eksempel 3.4.9. I dette eksempelet setter vi inn tre verdier for r i likning (3.54). $r = 1$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x}{(x^4 - x^2 + 1)^{3/2}} \log\left(\frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}\right) &= \sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\left(\psi(\frac{1}{2}) - \psi(1)\right) \\
&= -\pi \log 2
\end{aligned}$$

Hvor det ble benyttet at $\psi(1) = -\gamma$, $\psi(1/2) = -\gamma - 2\log 2$ og $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
Via tilsvarende regning fås

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^4 - x^2 + 1}\right)^{3/4} \log\left(\frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}\right) &= -\sqrt{\frac{\pi}{4}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\left(\psi\left(1 - \frac{1}{4}\right) - \psi\left(\frac{1}{4}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)\end{aligned}$$

for $r = 3/4$. Her ble det brukt at $\psi(1-z) - \psi(z) = \pi\cot(\pi z) \Rightarrow \psi(3/4) - \psi(1/4) = \pi$ og $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \pi/\sin(\pi z) \Rightarrow 1/\Gamma(3/4) = \Gamma(1/4)\sin(\pi/4)/\pi$. Dette klarte ikke `Maple 14` å beregne.

3.5 Diverse applikasjoner

Teorem 3.5.1. *Anta f er en kontinuerlig, deriverbar*[8]*og strengt økende funksjon på $[a, b]$. Let $m = (a + b)/2$ være midpunktet, da har $g(x) = \int_a^b |f(t) - x|\,dt$ et unikt minimum over $x \in \mathbb{R}$. Minumumet er*

$$\int_m^b f(t)\,dt - \int_a^m f(t)\,dt$$

and skjer ved $x = f(m)$.

Bevis. Dersom $x < f(a)$ eller $x > f(b)$ så er

$$\int_a^b |f(t) - x|\,\mathrm{d}t > \int_a^b |f(t) - f(c)|\,\mathrm{d}t,$$

hvor c er a dersom $x < f(a)$ og b dersom $x > f(b)$. Et minimum må altså skjer i for $f(a) \leq x \leq f(b)$. Fra middelverdi setningen (B.1.2) så eksisterer det en $x = f(\xi)$ hvor $\xi \in [a, b]$. Så

$$\int_a^b |f(t) - f(\xi)|\,\mathrm{d}t = \int_a^\xi f(\xi) - f(t)\,\mathrm{d}t + \int_\xi^b f(t) - f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Legg merke til at $f(\xi)$ er konstant og kan beregnes. Ved å snu grensene i siste integral får en da

$$= \big(2\xi - (a + b)\big)f(\xi) + \int_\xi^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^\xi f(t)\,\mathrm{d}t \tag{3.55}$$

Siden vi har antatt at f er deriverbar så kan vi trygt derivere likning (3.55).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\int_a^b |f(t) - f(\xi)|\,\mathrm{d}t = \big(2\xi - (a + b)\big)f'(\xi) = 0$$

Nå siden f er strengt økende på intervalet medfører dette at $f'(\xi) > 0$ for alle $\xi \in [a, b]$. Så den deriverte er null når $\xi = (a + b)/2$. Den dobbelderiverte er negativ ved $x = \xi$ slik at ξ virkelig er et minimum.

La oss nå vise at ξ virkelig er et unikt minimum. Siden ingenting forandres ved å legge til en konstant til f, eller skalere intervalet skalerer vi slik at $a = -a$ og $f(0) = 0$. Da er

$$\int_{-b}^b |f(t) - f(\zeta)|\,\mathrm{d}t - \int_{-b}^b |f(t) - f(\xi)|\,\mathrm{d}t = 2\big(\zeta f(\zeta) - \xi f(\xi)\big) - 2\int_\xi^\zeta f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dersom vi velger $\xi = 0$ så blir differansen

$$2\zeta f(\zeta) - 2\int_0^\zeta f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\zeta f(\zeta) - f(t)\,\mathrm{d}t > 0,$$

og tilsvarende om vi velger $\zeta = 0$, så blir den

$$-2\xi f(\xi) - 2\int_\xi^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_\xi^0 f(\xi) - f(t)\,\mathrm{d}t < 0,$$

dette viser at $x = f(m)$ virkelig gir et unikt globalt minimum. □

[8]Kravet om deriverbarhet er ikke nødvendig, men det forenkler beviset noe.

3.5.1 Gulv og tak-funksjoner

3.5.2 Itererte integral

3.6 DERIVASJON UNDER INTEGRALTEGNET

> One thing I never did learn was contour integration. I had learned to do integrals by various methods shown in a book that my high school physics teacher Mr. Bader had given me. That book also showed how to differentiate parameters under the integral sign—it's a certain operation. It turns out that's not taught very much in the universities; they don't emphasize it.
>
> But I caught on how to use that method, and I used that one damn tool again and again. So because I was self-taught using that book, I had peculiar methods of doing integrals. The result was, when guys at MIT or Princeton had trouble doing a certain integral, it was because they couldn't do it with the standard methods they had learned in school. If it was contour integration, they would have found it; if it was a simple series expansion, they would have found it. Then I come along and try differentiating under the integral sign, and often it worked. So I got a great reputation for doing integrals, only because my box of tools was different from everybody else's, and they had tried all their tools on it before giving the problem to me. (Feynman [8, s47-48])

Metoden som Mr. Feynman i denne passasjen refferer til går ofte under navnet *derivasjon under integraltegnet*, *derivasjon med hensyn til en parameter*, eller til og med *Feynman integrasjon*. Uansett hvordan en ønsker å navngi metoden, så ligger appelen og skjønnheten i at metoden kan bli benyttet til å beregne tilsynelatende umulige integral, uten bruk av mer enn elementær kalkulus[9].

Vi skal studere hvilke situasjoner følgende likhet (som vi inderlig ønsker skal være sann) holder

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_Y \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,. \tag{3.56}$$

Ved å bruke definisjonen av den deriverte ser vi at utsagnet er ekvivalent med følgende

$$\lim_{x\to n}\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_Y \lim_{x\to a} f(x,y)\,\mathrm{d}y \tag{3.57}$$

Følgende teorem viser når utsagnet stemmer.

Teorem 3.6.1. (Elementær form). *La $f : [a,b]\times Y \to \mathbb{R}$ være en funksjon, der $[a,b]$ er et lukket interval og Y er et kompakt underrom av $\mathbb{R}^n$. Da er*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_Y \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Dersom både $f(x,y)$ og $\partial f(x,y)/\partial x$ er kontinuerlige for alle x,y og $\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y$ en kontinuerlig, deriverbar funksjion med hensyn på $x\in[a,b]$.

[9] Om en ser bort fra den lille desjen med målteori som er nødvendig for å bevise teorem (3.6.2)

Et bevis av overnevnte ville brukt mye vanskelig notasjon og teoremer fra funksjonalanalysen. Så det droppes for leserens helse og velbehag. I korte trekk vil et bevis ta i bruk at Y er kompakt, som impliserer uniform konvergens. (Selve definisjonen av kompakthet). Herfra kan det å bytte om grenseverdien og integralet rettferdigjøres.

Dessverre så er denne definisjonen ofte noe snever, da vi gjerne vil se på områder som ikke er kompakte. Eksempelvis halvåpne interval $[x, \infty)$, eller åpne interval $(-\infty, \infty)$. Heldigvis finnes det en mer generell verisjon av teorem (3.6.1). Som bruker enda mer abstrakt notasjon, mer spesifikt målteori.

Teorem 3.6.2. (Målteori utgave) *La X være et åpent underrom av $\mathbb{R}$ og la Ω være et målrom. Anta $f : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ tilfredstiller følgende betingelser*

1. *$f(x, \omega)$ er en Lebesgue-integrerbar funksjon av ω for enhver $x \in X$.*
2. *For nesten alle $\omega \in \Omega$, så eksisterer den deriverte $\partial f(x, \omega)/\partial x$ for enhver $x \in X$.*
3. *Def finnes en integrerbar funksjon $\Theta : \Omega \to R$ slik at $|\partial f(x, \omega)/\partial x| \leq \Theta(\omega)$ for enhver $x \in X$.*

Da for enhver $x \in X$ så er

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{\Omega} f(x, y) \, \mathrm{d}\omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \, \mathrm{d}\omega \, .$$

Dette teoremet gis oss og grunnlaget for ikke bare å deriverre under integraltegnet når området er Y er endelig, men og for $Y = (0, \infty)$ gitt at kravene ovenfor holder.

For leserens trygghet holder heldigvis de to første kravene for nesten alle integraler. Om funksjonen er kontinuerlig eller glatt, eksisterer den deriverte for alle verdier. Om funksjonen konvergerer absolutt er den Lebesgue integrerbar, eller om funksjonen er Riemann integrerbar på et endelig intervall. Det som stort sett må sjekkes er at både integranden, og dens deriverte er bundet på intervalet. For enkelhetens skyld gis og følgende teorem som konkretiserer dette

Teorem 3.6.3. *Begge sider av likningen*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{Y} f(x, y) \, \mathrm{d}y = \int_{Y} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \, \mathrm{d}y \, .$$

eksisterer og er like i et punkt $t = t_0$ gitt at følgende to krav holder

1. *$f(x, t)$ og $\partial f(x, t)/\partial t$ begge kontinuerlige når $x \in Y$ og t befiner seg i et lite omhegn innenfor t_0*
2. *Det eksisterer funksjoner slik at $\big|f(x, t)\big| \leq A(x)$ og $\big|\partial f(x, t)/\partial t\big| \leq B(x)$ som er uavhengig av t slik at $\int_a^b A(x) \, \mathrm{d}x$ og $\int_a^b B(x) \, \mathrm{d}x$ konvergerer.*

Teoremet noe svakere (Det gjelder ikke for Lebesgue-integral), men holder for de funksjonene som blir studert her. Men nå har det vært fryktelig mye snakk, vi slår til med barsk og bram for å vise hvor nyttig denne teknikken kan være

Eksempel 3.6.1. Vi ønsker å bestemme følgende integral

$$\int_0^1 \frac{x^2-1}{\log x}\,\mathrm{d}x$$

Integralet har ingen kjent antiderivert, og vi må derfor ty til andre metoder. Den vante leser vil kanskje legge merke til enten at integralet kan skrives som et dobbeltintegral, eller at det er et frullani integral i forkledning ($u \mapsto \log x$). Men dette sparer vi til en senere annledning. Vi trenger noe å derivere med hensyn på, og innfører *paramteren* $a > 0$ som følger

$$I(a) = \int_0^1 \frac{x^a-1}{\log x}\,\mathrm{d}x$$

Her vil selvsagt $I(2)$ gi oss integralet vi er ute etter. Derivasjon med hensyn på a gir

$$I'(a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_0^1 \frac{x^a-1}{\log x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a}\frac{x^a-1}{\log x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^a\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+a}$$

Integrasjon gir oss at

$$I(a) = \log(1+a) + \mathcal{C}$$

Konstanten kan bestemmes ved å betrakte $a = 0$. Da er $I(0) = 0$ og $\log(1) = 0$ slik at $\mathcal{C} = 0$. Vi får da altså at

$$\int_0^1 \frac{x^2-1}{\log x}\,\mathrm{d}x = I(2) = \log(1+2) = \log 3$$

som var det vi ønsket å finne.

Teorem 3.6.4. (Dirichlet integral) *er definert som følger*

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2}$$

Dette integralet vil dukke opp gjentatte ganger videre og er svært viktig innen signalanalyse. Ofte blir forkotelsen $\mathrm{sinc}(x) = \sin(x)/x$ benyttet. En alternativ definisjon er å først normalisere funksjonen slik at $\mathrm{sinc}(x) = \sin(\pi x)/\pi x$, som har en rekke kjente definisjoner.

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = \frac{1}{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)}$$

Har en noe kjennskap til laplacetransformasjoner eller singnalanalyse vil følgende utregning av integralet gi mer mening. Vi prøver først å innføre variabelen a som følger.

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,\mathrm{d}x$$

Men ved derivasjon fås $I'(a) = \cos(ax)$ som ikke konvergerer! La oss heller se på følgende metode

Bevis. Vi definerer følgende funksjon

$$I(b) := \int_0^\infty \operatorname{sinc}(x) \cdot e^{-bx} \,\mathrm{d}x$$

Dette er faktisk laplce-transformasjonen av $\operatorname{sinc}(x)$ som vi skal se senere. Herfra ses at det originale integralet oppstår ved å la $b = 0$. Derivasjon gir

$$I'(b) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial b} e^{-bx} \operatorname{sinc}(x) \,\mathrm{d}x = -\int_0^\infty e^{-bx} \sin x \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{1+b^2} + \mathcal{C}$$

Hvor det siste integralet har blitt løst flere ganger før. Enten skriv om integralet til kompleks form, eller benytt delvis integrasjon to ganger. Integrasjon gir nå

$$I(b) = \mathcal{C} - \arctan(b)$$

Igjen gjennstår det å beregne konstanten $\mathcal{C}$. Dersom vi lar $b \to \infty$ så vil $I(b) \to 0$ og $\arctan b \to \pi/2$. Som medfører at

$$I(b) = \frac{\pi}{2} - \arctan(b)$$

Ved å la $b = 0$ får vi vårt originale integral, slik at

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x} = 2 \cdot I(0) = \pi$$

som var det vi ønsket å finne. □

Et annet forholdsvis klassisk eksempel er følgende integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x} \,\mathrm{d}x = \pi \log \sqrt{2}$$

som kan løses ved å betrakte følgende integral

$$I(b) = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan(b \arctan x)}{\tan x} \,\mathrm{d}x$$

Der $I(1)$ gir oss vårt opprinnelige integral. Mellomregningene overlates til leser og i neste seksjon vil integralet beregnes ved å skrive ut taylorrekka til $\tan x$.

Vi snur derimot oppmerksomheten vår mot et moteksempel. I påfølgende eksempel viser det seg at høyre og venstre side i likning (3.56) ikke nødvendigvis er like.

Eksempel 3.6.2. For alle $x, t \in \mathbb{R}$, så definerer vi følgende funksjon

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xt^3}{(x^2+t^2)^2} & \text{hvis } x = 0 \quad \text{eller} \quad t \neq 0, \\ 0 & \text{hvis } x = 0 \quad \text{og} \quad t = 0. \end{cases}$$

La videre

$$F(t) := \int_0^1 f(x, t) \,\mathrm{d}x \,.$$

Integralet beregnes for $t = 0$ og $t \neq 0$ som følger

$$F(0) = \int_0^1 f(x,0)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0$$

$$F(t) = \int_0^1 \frac{xt^3\,\mathrm{d}x}{\left(x^2+t^2\right)^2} = \int_{t^2}^{1+t^2} \frac{t^3\,\mathrm{d}u}{2u^2} = \frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}$$

Formelen er og gyldig for $t = 0$. Ved derivasjon fås

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t) = \frac{1}{2}\frac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

På den andre siden så er $f(0,t) = 0\,\forall t$, slik at $\partial f(0,t)/\partial x = 0$. Når $x \neq 0$ så blir den deriverte

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x,t) = \frac{\left(x^2+t^2\right)^2\left(3xt^2\right) - xt^3 \cdot 4t\left(x^2+t^2\right)}{\left(x^2+t^2\right)^4} = \frac{xt^2\left(3x^2-t^2\right)}{\left(x^2+t^2\right)^3}$$

Kombineres resultatet får vi altså at

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x,t) = \begin{cases} \frac{xt^2\left(3x^2-t^2\right)}{\left(x^2+t^2\right)^3} & \text{hvis} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{hvis} \quad x = 0 \end{cases} \tag{3.58}$$

Som motbevis til likning (3.56) benyttes heller den tilsvarende definisjonen vist i likning (3.57) hvor vi ser på $a = 0$. Da er

$$\lim_{t\to 0}\int_0^1 \frac{xt^3}{\left(x^2+t^2\right)^2} = F'(0) = \frac{1}{2} \qquad \text{og} \qquad \int_0^1 \lim_{t\to 0} f(x,t) = 0$$

Altså er grensene ulike! Dette gjelder uansett om $x = 0$ eller ei. Problemet er er at $\partial f(x,t)/\partial t$ ikke er en kontinuerlig funksjon, spesifikt blåser den opp i origo.

Som et aller siste eksempel så studerer vi enda en gang det Gaussiske integralet. Det finnes enklere metoder å beregne integralet på enten via dobbeltintegraler se spesifikt eksempel (3.8.2) og (3.8.3). Eller ved gammafunksjonen som vist i **??**.

Eksempel 3.6.3. Vi skal vise det liknende resultatet

$$\int_0^\infty e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

og får å få det klassiske gaussiske integralet kan resultatet ovenfor benyttes via substitusjonen $u = \sqrt{2}\,x$. Vi definerer følgende integral for $t > 0$

$$A(t) := \left(\int_0^t e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\right)^2 .$$

Hvor vi får vårt ønsekede integral ved å la $t \to \infty$ også ta kvadratroten. Derivasjon med hensyn på t gir oss

$$A'(t) = 2\left(\int_0^t e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\right)e^{-t^2/2} = 2e^{-t^2/2}A(t)$$

Benyttes substitusjonen $x = ty$ nå fås

$$A'(t) = 2e^{-t^2/2} \int_0^1 te^{-t^2y^2/2}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 2te^{-(1+y^2)t^2/2}\,\mathrm{d}y$$

Funksjonen er nå enkel å bestemme den antideriverte med hensyn på t, da fås

$$A'(t) = \int_0^1 -\frac{\partial}{\partial t}\frac{2e^{-(1+y^2)t^2/2}}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = -2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 \frac{e^{-(1+y^2)t^2/2}}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$$

For nå definerer vi integralet som en ny funksjon så

$$B(t) := \int_0^1 \frac{e^{-(1+y^2)t^2/2}}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$$

Slik at vi har likningen $A'(t) = -2B'(t)\ \forall\, t > 0$. Integrerer vi begge sider ser vi at det finnes en konstant $\mathcal{C}$ slik at

$$A(t) = -2B(t) + \mathcal{C} \qquad \forall\, t > 0\,. \tag{3.59}$$

Lar vi nå $t \to 0^+$ får vi at $A(t) \to 0$ mens $B(t) \to \int_0^1 \big(\mathrm{d}y/(1+y^2)\big) = \pi/4$. Altså så er

$$0 = -2(\pi/4) + \mathcal{C} \ \Rightarrow\ \mathcal{C} = \pi/2\,.$$

Lar vi nå $t \to \infty$ i likning (3.59) fås

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\left(\int_0^t e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\right)^2 &= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{e^{-(1+y^2)t^2/2}}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\right) \\ \left(\int_0^\infty e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\right)^2 &= \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \lim_{t\to\infty}\frac{e^{-(1+y^2)t^2/2}}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{3.60}$$

Ved å benytte oss av likning (3.57). Herfra ser vi at høyresiden går mot $\pi/2$ da $e^{-ax} \to 0$ når $x \to \infty\,\forall a > 0$. Slik at

$$\int_0^\infty e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,,$$

da integralet må være positivt.

Det finnes mange flere integral som kan løses ved hjelp av derivasjon under integraltegnet men disse blir plassert som oppgaver for leser, både her og på slutten av dokumentet.

1. Bruk integralet

$$F(t) := \int_0^\infty e^{-tx}\,\mathrm{d}x$$

til å vise at

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

hvor $n \in \mathbb{N}$.

2. Bestem og integralet

$$F(t) := \int_0^\infty \frac{x^a - x^b}{\log x}\,\mathrm{d}x$$

via derivasjon under integraltegnet. Vis og at derivasjonen er lovlig.

3. Vis at

$$J(a,b) := \int_0^\infty \frac{1}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$$

og bruk dette til å beregne

$$I := \int_0^\infty \frac{1}{\left(a\cos^2 x + b\sin^2 x\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

. Her er a og b reelle tall.

4. Bestem følgende integral

$$\varphi(\alpha) := \int_0^\pi \log\left(1 - 2\alpha\cos(x) + \alpha^2\right)\,,$$

hvor $|\alpha| \neq 1$ og $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. Vi definerer følgende integral

$$T(u) = \int_0^1 \frac{\arctan(u\sqrt{2+x^2}\,)}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Bruk dette integralet til å vise at

$$\int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{2+x^2}}{(1+x^2)\sqrt{2+x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{5\pi^2}{96}\,.$$

Dette integralet kalles for *Ahmeds* Integral [1], og senere skal vi og se på generaliseringer av integralet.

3.7 Uendelige rekker

Ofte er kan integraler forenkles betraktelig om en kan omskrive integralet til en sum. En vanlig måte å gjøre dette på er å skrive ut taylorrekka til hele eller deler av integranden. For å konkretisere la oss se på følgende integral, som kanskje mange kjenner igjen fra tidligere

$$\int_0^1 \frac{\log(1-z)}{z}\,\mathrm{d}z\,.$$

Dette har blitt beregnet før som $-\operatorname{Li}_2(1)$. La oss nå heller skrive ut taylorrekka til logaritmen slik at vi får

$$\int_0^1 \frac{\log(1-z)}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \frac{1}{z}\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\right)\mathrm{d}z = -\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n+1}\,\mathrm{d}z$$

Som vi ser hadde det vært veldig behagelig å kunne nå bytte rekkefølge på summasjonen og integrasjonen. Følgende teorem gir oss en grunn når vi kan gjøre dette

Teorem 3.7.1. (Monoton konvergens teoremet) *Anta at funksjonene* $f_1, f_2, f_3, \ldots$ *er positive på et interval* (a, b) *(Altså at* $f_k \geq 0$ *for enhver* x*). Da er*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

som har gyldighet for negative funksjoner.

Ved å bruke teoremet får vi nå relativt direkte at

$$\int_0^1 \frac{\log(1-z)}{z}\,\mathrm{d}z = -\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{z^n}{n+1}\,\mathrm{d}z = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}$$

Ved å sammenligne med verdien vi fikk tidligere for $\operatorname{Li}_2(1)$ kan vi anta at bytte var lovlig. For å være sikker ser vi at $x^n/n+1$ er positiv for alle verdier, og vi kan puste lettet ut.

Eksempel 3.7.1. Vi ser nå på et liknende integral hvor $a > 0$

$$I := \int_0^1 \log\left(1 + e^{-ax}\right)\mathrm{d}x$$

hvor $a > 0$. Vi ser herfra på taylorrekka til $\log(1+x)$ som konvergerer for $|x| < 1$.

Heldigvis så er $e^{-ax} < 1$ på $x \in [0,1]$ når $a > 0$. Direkte får vi da

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty \log\left(1+e^{-ax}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n\cdot ax} \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left[-\frac{e^{-n\cdot ax}}{na}\right]_0^\infty \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} (0-1) \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) \\
&= \frac{\pi^2}{12a}
\end{aligned}$$

Eksempel 3.7.2.

$$I := \int_0^1 \log(1-z)\log z \,\mathrm{d}z = 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

Bevis. Skriver ut taylorrekka til $\log(1-z)$ slik at integralet kan skrives som

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \log z \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n}\right) \mathrm{d}z \\
&= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \int_0^1 z^n \cdot \log z \,\mathrm{d}z \\
&= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \left\{ \left[\frac{z^{n+1}\log z}{z+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{z^n}{n+1} \,\mathrm{d}z \right\} \\
&= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(n+1)^2} \\
&= \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(-\frac{1}{(0+1)^2} + \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&= 1 + 1 - \zeta(2) = 2 - \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

Her ble det brukt i andre overgang at taylorrekka til $\log(1-z)$ er analytisk på $(0,1)$ og i siste mellomregning ble det benyttet at første sum er en teleskoperende rekke slik at

$$\begin{aligned}
S &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

slik at når $k \to \infty$ så vil $S \to 1$. I siste sum brukte en at $S(1) = -a_0 + S(1)$. $\square$

I gjennom denne delen har vi gjentatte ganger benyttet oss av Basel problemet, mer eller mindre bevisst. Problemet går ut på å bestemme følgende sum

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right)$$

men det blir først i neste seksjon at vi viser en måte å bestemme summen på. Her nøyer vi med å avslutte med et lemma som vil hjelpe oss senere.

Lemma 3.7.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Bevis. Vi begynner å kalle summen for S og deler den i odde og like ledd

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Herfra ser vi nærmere på første sum, så

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{S}{4}$$

Bruker vi dette i forrige likning får vi nå at

$$S = \frac{1}{4} S + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \;\Rightarrow\; S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

som var det vi ønsket å vise. □

Oppgaver

1. Bestem integralet $\displaystyle\int_0^{\infty} \left|\cos \log x\right| \, \mathrm{d}x$.

3.8 Dobbel Integraler

I denne delen skal vi fokusere hovedsaklig på dobbeltintegral og se hvordan de kan hjelpe å løse vanskelige integral. Metoden kan delvis bli sammenliknet med å derivere under integraltegnet.

Det kanskje viktigste theoremet når det kommer til evalueringen av slike dobbeltintegraler er følgende.

Teorem 3.8.1. (Fubini's Teorem.) *Anta at X og Y er to lukkede målbare rom. Anta videre at $f(x,y)$ er $X \times Y$ målbart. Da er*

$$\iint_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

hvis og bare hvis følgende gjelder

1. $\displaystyle\int\int_{X\times Y} \big|f(x,y)\big|\mathrm{d}(x,y) < \infty$

Her kan gjerne X og Y eksempelvis være relle interval $X = [0,1]$. Men theoremet holder og for mye mer abstrakte rom. Dette theoremet er langt mer abstrakt enn hva vi trenger, og et bevis kan finnes i [15, s. 163]. Essensen er at vi ikke kan bytte om integralgrensene når det passer oss. Et enkelt eksempel på dette vist under

Eksempel 3.8.1. La oss først se på følgende funksjon

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

og integralet over enhetskuben $S = [0,1] \times [0,1]$. Ved å regne ut absoluttverdien av funksjonen fås

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left[\int_0^y \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x + \int_y^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{2y} - \frac{1}{y^2+1}\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Slik at absoluttverdien av integralet går mot uendelig. For å gå mellomregningene litt mer i sømmene kan en se på likning (2.36) Her får en at

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{y}{x^2+y^2} \\
\int \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{x}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

Dermed så blir

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left[\frac{y}{x^2+y^2}\right]_0^1 \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \\
\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]_1^0 \mathrm{d}y = -\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

At vi får to ulike verdier kommer av at absoluttverdien ikke er endelig. Akkuratt i dette eksempelet så er absoluttverdien av integralet ikke endelig fordi funksjonen har en singularitet i origo. Ved å forandre på grensene forandrerer en også hvordan en nærmer seg dette punktet med sine riemansummer.

Oppsumert kan en altså si at hvis

$$\iint_{\mathcal{S}} |f(x,y)|\,\mathrm{d}(x,y) = \infty$$

(der $\mathcal{S} = [a,b] \times [c,d]$) så kan godt

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \quad \text{og} \quad \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ha ulike verdier.

Som en apèrtiff på det som kommer senere, tar vi atter en kikk på det klassiske Gaussiske integralet

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 1\,,$$

Som er essensiel innen blant annet sannsynlighetsregning. Fra før har vi allerede vist integralet ved hjelp av gamma og betafunksjonen. Den klassiske utledningen er derimot ved dobbeltingralet og vist i det påfølgende eksempelet

Eksempel 3.8.2. Vi definerer følgende integral, og ser på kvadratet.

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)$$

Variabelnavnet har ingenting å si når vi integrer, så vi lar heller y være integrasjonsvariabelen i siste integral og får

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Merk her ble integrasjonsrekkefølgen byttet, og i følge Fubinis sats er dette ikke lov om ikke absoluttverdien av integralet konvergerer. Videre regning gir

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Herfra bytter vi til polarkoordinater, hvor $x^2 + y^2 = r^2$ og $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} = \pi$$

Slik at vi får $I = \sqrt{\pi}$ som ønsket. At vi kan bytte om grensene følger fra at funksjonen er absolutt konvergent. For å se dette så kan vi benytte at $e^{-\mu} >$

$0 \; \forall \, \mu \in \mathbb{R}$ så

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-x^2} \right| \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{-1} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{-\infty}^{-1} -x \cdot e^{-x^2} \, \mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} e^{0} \, \mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} x \cdot e^{-x^2} \, \mathrm{d}x \\
&= 2 + e^{-1}
\end{aligned}
$$

Og siden $2 + e^{-1} < \infty$ så konvergerer integralet absolutt. Her ble det bla brukt at funksjonen er symmetrisk og synkende.

I videre utledninger vil det stort sett *ikke* bli vist at integralet konvergerer absolutt. Da det antas fremmover at integralene konvergerer absolutt om ikke annet blir sagt. Men det er noe å ha i tankende, og uten tvil en god øvelse å vise at integralet konvergerer absolutt.

Eksempel 3.8.3. En alternativ måte å beregne integralet på er å studere følgende integral

$$
J = \iint_{S} x \exp\left\{-x^2(y^2+1)\right\} \mathrm{d}(x,y)
$$

hvor $S = [0,\infty) \times [0,\infty)$. På den ene siden så er

$$
J = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x \exp\left\{-x^2(y^2+1)\right\} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y
$$

ved å bruke substitusjonen $u = x^2(y^2+1)$ fås

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} \right) \left(\int_0^{\infty} e^{-u} \, \mathrm{d}u \right) \\
&= \frac{1}{2} \big[\arctan y \big]_0^{\infty} \cdot \big[e^{-u} \big]_{\infty}^{0} \\
&= \frac{1}{2} \big[\frac{\pi}{2} - 0 \big] \cdot \big[1 - 0 \big] \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Beregner vi derimot integralet ved å ha motsatte grenser via $t = xy$ fås

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x \exp\left\{-x^2(y^2+1)\right\} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp\left\{-t^2 - x^2\right\} \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x \\
&= \left(\int_0^{\infty} \exp\left\{-t^2\right\} \mathrm{d}t \right) \cdot \left(\int_0^{\infty} \exp\left\{-x^2\right\} \mathrm{d}x \right) \\
&= \left(\frac{I}{2} \right)^2
\end{aligned}
$$

Slik at $I = \sqrt{\pi}$ som før.

Det å anta at et integral er et dobbelintegral, som har blitt integrert feil veier mye brukt. Altså at en har integrert først x også med hensyn på y i stedefor motsatt. Teknikken blir da å skrive om integralet som et dobbeltintegral igjen, snu grensene og beregne det forhåpentligvis enklere integralet. Dette blir forhåpentligvis klarere i det følgende eksempelet

I forbindelse med gamma- og betafunksjonene ble følgende integral betraktet

$$I = \int_0^\infty \frac{\exp(-ax) - \exp(-bx)}{x^n}\,\mathrm{d}x$$

Her vil vi studere spesialtilfellet hvor $n = 1$, da har vi

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty \frac{\exp(-ax) - \exp(-bx)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \int_a^b e^{-y\cdot x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \int_0^\infty e^{-y\cdot x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_a^b \left[\frac{e^0}{y} - \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-xy}}{y}\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{y} \\
&= \log\left(\frac{a}{b}\right)
\end{aligned}$$

Tilsvarende metode kan bli benyttet på en rekke integral. Faktisk har vi følgende teorem

Teorem 3.8.2. (Frullani's Theorem). *La* $f \in C^1$ *(kontinuerlig deriverbar), og la* $f(\infty), f(0) \in \mathbb{R}$. *Da er*

$$\int \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \big(f(0) - \ell\big)\log\left(\frac{b}{a}\right), \qquad \forall\, a, b \in (0, \infty)\,,$$

der $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$ *og* $\lim_{x\to 0} = f(0)$.

Bevis. Theoremet gjelder under svakere betingelser, men gitt de ovenfor kan et artig dobbeltintegral benyttes. Vi definerer

$$Y = \iint_D -f'(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

der $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\,, a \leq y \leq b\big\}$. Vi beregener integralet begge veier. På den ene siden så er

$$\begin{aligned}
Y &= \int_a^b \left(\int_0^\infty -f'(xy)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\frac{f(xy)}{y}\right]_\infty^0 \mathrm{d}y \\
&= \int_a^b \frac{f(0) - \ell}{y}\,\mathrm{d}y = \big(f(0) - \ell\big)\log\left(\frac{b}{a}\right)
\end{aligned}$$

Ved å bytte om integrasjons rekkefølgen fås derimot

$$Y = \int_0^\infty \left(\int_a^b -f'(xy)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^\infty \left[\frac{f(xy)}{x} \right]_b^a \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$$

og vi er ferdige. For at bytte av integrasjonsrekkefølgen skal være lovlig må vi ha at $|f'(xy)| < 0$ hvor $y \in [a,b]$ og $x \in (0,\infty)$. □

Flere steder blir teoremet gitt med at $\ell = 0$, men det er ikke vanskelig å finne eksempler på hvor $f(0) = 0$ og $\ell \neq 0$.

Eksempel 3.8.4.

$$\int_0^\infty \frac{\arctan(px) - \arctan(qx)}{x} = \left(0 - \frac{\pi}{2}\right) \log\left(\frac{q}{p}\right) = \frac{\pi}{2} \log\left(\frac{p}{q}\right)$$

Hvor $f(0) = \arctan 0 = 0$ og $\ell = \arctan(\infty) = \pi/2$.

Nå har vi tatt for oss *Fubini* og *Frullani* integral, så da er det passende at vi tar for oss *Fresnel* integralene avslutningsvis.

Teorem 3.8.3. (Fresnel's Integral) *er definert som følger*

$$\int_{-\infty}^\infty \sin x^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty \cos x^2\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

Dette kan bevises ved hjelp av eksempelvis kompleks analyse, men her brukes selvsagt dobbeltintegralet. Men for å vise dette trengs et par lemma først:

Lemma 3.8.1.

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-tx^2}\,\mathrm{d}x$$

Bevis. Bruk substitusjonen $u = \sqrt{t}\,x \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = \mathrm{d}u/\sqrt{t}$, da fås direkte

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-tx^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Der det ble benyttet at verdien av det gaussiske integralet over $\mathbb{R}$ er $\sqrt{\pi}$ som ble vist i eksempel (3.8.2) og eksempel (3.8.3). □

Lemma 3.8.2.

$$\int_0^\infty e^{-tx^2} \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^4} \quad \textit{og} \quad \int_0^\infty e^{-tx^2} \cos t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{1+x^4}$$

Bevis. Det har blitt vist i Del II (proposisjon (2.6.1)) at

$$\begin{aligned} I &= \int e^{-\alpha t} \sin \beta t\,\mathrm{d}t = -\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}\left[\alpha \sin \beta t + \beta \cos \beta t\right] \\ J &= \int e^{-\alpha t} \cos \beta t\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}\left[\beta \sin \beta t - \alpha \cos \beta t\right] \end{aligned}$$

Resutatet kan vises ved å skrive om på kompleks form eller via delvis integrasjon. Med innsatte grenser fås[10]

$$I = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \sin \beta t \, \mathrm{d}t = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \tag{3.61}$$

$$J = \int_0^\infty e^{-\alpha t} \cos \beta t \, \mathrm{d}x = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \tag{3.62}$$

og beviset fullføres ved å sette $\beta = 1$ og $\alpha = x^2$. □

Lemma 3.8.3.

$$\int_0^\infty \frac{1}{1 + x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$$

Bevis. En mer generell form er vist før i likning (3.26), men vi gjennomgår likevell beviset i korte trekk. Ved å bruke substitusjonen $x \mapsto 1 + u^\beta \ \Rightarrow \ u = (x-1)^{1/\beta}$ kan integralet skrives som

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{1 + u^n} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{\beta} \int_1^\infty \frac{1}{x} (x-1)^{(1/n)-1} \, \mathrm{d}x$$

hvor β er et reellt positivttall og substitusjonen Settes nå $x = 1/v$ fås

$$I = \frac{1}{n} \int_0^1 v^{-1/n} (1-v)^{-1+1/n} \, \mathrm{d}v = \frac{1}{n} B\left(-\frac{1}{n} + 1, \frac{1}{n} \right)$$

Ved å benytte seg av definisjonen til betafunksjonen, og Eulers refleksjonsformel fås

$$I = \frac{1}{n} \frac{\Gamma\left(1 - 1/n\right) \Gamma\left(1/n\right)}{\Gamma\left(1\right)} = \frac{\pi/n}{\sin\left(\pi/n\right)}$$

og dette fullfører beviset. □

Alternativt er integralet lik Mellin-transformasjonen av $f(x) = x^n + 1$ med $s = 1$.

Bevis. Vi er nå endelig klar til å beregne Fresnel integralene, definerer som følgende

$$F_1 := \int_{-\infty}^\infty \sin x^2 \, \mathrm{d}x \quad \text{og} \quad F_2 := \int_{-\infty}^\infty \cos x^2 \, \mathrm{d}x$$

Via substitusjonen $t = x^2$ omskrives integralene til

$$F_1 = \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t \,, \qquad F_2 = \int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t$$

Benyttes nå lemma (3.8.1) fås dobbeltintegralene

$$F_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-tx^2} \sin t \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t \,, \qquad F_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-tx^2} \cos t \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$

[10] Disse likningene beskriver altså laplace-transformasjonen av $\sin \beta t$ og $\cos \beta t$.

Snus grensene og lemma (3.8.2) benyttes så fås

$$F_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-tx^2} \sin t \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$$
$$F_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-tx^2} \sin t \,\mathrm{d}t \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} \,\mathrm{d}x$$

Det første integralet kan beregnes, men det vises først at

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \int_0^\infty \frac{x^2 \,\mathrm{d}x}{1+x^4} \;\Rightarrow\; \int_0^\infty \frac{x^2 \,\mathrm{d}x}{1+x^4} - \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = 0$$

For å se dette kan vi enten bruke lemma (2.5.1) med $n = 4$ eller legge merke til at

$$\int_1^\infty \frac{x^2-1}{1+x^4} \,\mathrm{d}x = \int_1^0 \frac{(1/u)^2 - 1}{1+(1/u)^4} \left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2} \right) = -\int_0^1 \frac{u^2-1}{1+u^4} \,\mathrm{d}u$$

Ved nå å dele integralet i to så har en

$$\int_0^1 \frac{x^2-1}{1+x^4} \,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{x^2-1}{1+x^4} \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2-1}{1+x^4} \,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{u^2-1}{1+u^4} \,\mathrm{d}u$$

Så $I = 0$ som ønsket. Dette medfører at $F_1 = F_2$ og

$$F_1 = F_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi/4}{\sin(\pi/4)} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

Hvor lemma (3.8.3) ble benyttet. Dette fullfører beviset. □

Som lovet i forrige del tar vi avslutningsvis og ser på følgende problem.

Eksempel 3.8.5. (*Basel problemet*) Problemet er gammelt og ber oss beregne summen av inversen av alle kvadrattallene. Det var først Euler som klarte å bestemme summen

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \,,$$

gjennom forholdsvis lange utregninger som kan være noe vanskelig å henge med på. Vi fokuserer heller på et bevis som kom senere av J.D Harper.

Bevis. Vi tar utgangspunkt i følgende integral

$$J := \iint_D \frac{x}{(1+x^2)\,(1+x^2y^2)} \mathrm{d}(x,y)$$

hvor $D \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\, 0 \leq y \leq 1 \right\}$. På den ene siden har vi at integralet kan skrives som

$$J = \int_0^\infty \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)\,(1+x^2y^2)} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{x(1+x^2)} \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{(1/x)^2 + y^2} \right) \mathrm{d}x$$

det innerste integralet kan løses via substitusjonen $y = x^{-1}\tan u$ som gir

$$J = \int_0^\infty \left[\frac{\arctan(xy)}{1+x^2}\right]_0^1 \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2} = \left[\frac{\arctan^2 x}{2}\right]_0^\infty = \frac{\pi^2}{8}$$

Bruker vi nå fubinis sats og regner ut integralet ved motsatte grenser fås

$$J = \int_0^\infty \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+x^2y^2)} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Det innerste integralet kan løses via delbrøkoppspalting som gir gir

$$\begin{aligned}\frac{x}{(1+x^2)(1+x^2y^2)} &= \frac{1}{2(y^2-1)}\left\{\frac{2y^2x}{1+x^2y^2} - \frac{2x}{1+x^2}\right\}\\ &= \frac{1}{2(y^2-1)}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log\left(1+x^2y^2\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log\left(1+x^2\right)\right\}\end{aligned}$$

Der y ble betraktet som en konstant. Setter vi inn og forenkler, skrives integralet om til

$$J = \int_0^\infty \frac{1}{2(y^2-1)}\left[\log\left(\frac{1+x^2y^2}{1+x^2}\right)\right]_0^\infty \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\log y}{y^2-1}\,\mathrm{d}y$$

Hvor det ble benyttet at når $x \to \infty$ så vil $\log\big((x^{-2}+y^2)/(x^{-1}+1)\big) \to \log(y^2/1) = 2\log y$ og $x \to 0$ så vil $\log(1/1) = 0$. Vi har altså nå vist at

$$\int_0^1 \frac{\log y}{y^2-1}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{8}$$

Som ikke var akkuratt det vi skulle ha... En kan nå legge merke til at $y^2 < 1$ for $y \in (0,1)$ slik at vi kan rekkeutvikle $1/(1-y^2)$ som en geometrisk serie. Da fås

$$\int_0^1 -\frac{\log y}{1-y^2}\,\mathrm{d}y = -\int_0^1 \log y \sum_{n=0}^\infty y^{2n} = -\sum_{n=0}^\infty \int_0^1 y^{2n}\log y\,\mathrm{d}y = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}$$

benyttes nå lemma (3.7.1) får vi at

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} &= \frac{\pi^2}{8}\\ \frac{4}{3}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} &= \frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8}\\ \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

som var det vi ønsket å vise. □

Oppgaver

1. Beregn følgende integral

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{x}\log\left(\frac{p+qe^{-ax}}{p+qe^{-bx}}\right)\mathrm{d}x$$

hvor $p, q \in \mathbb{R}$.

2. Beregn følgende integral

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin(px) \cdot \sin(qx)}{2} \,\mathrm{d}x$$

hvor $p, q \in \mathbb{R}$.

3. Vis at

$$\int_0^\infty \frac{e^{2x} - e^x}{x(e^x + 1)(e^{2x} + 1)} \,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} \,\mathrm{d}x$$

og bestem integralet.

3.8.1 Typer integraler

La oss først ta to små lemma som vil hjelpe oss å regne ut de ulike typene integral

Lemma 3.8.4. (M-L ulikheten) *La f være en kompleks, kontinuerlig funksjon på konturen Γ og dersom absoluttverdien $|f(z)|$ er mindre enn en konstant M for alle z på Γ da er*

$$\left| \int_\Gamma F(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq M \cdot \ell(\Gamma)\,.$$

Hvor $\ell(\Gamma)$ betegner buelengden til Γ og $M = \sup_{z\in\Gamma} |f(z)|$[11].

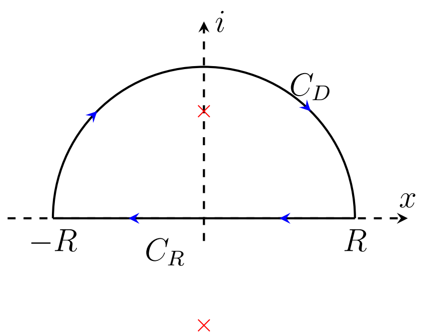
Bevis. Fra den kontinuerlige trekantulikheten har en at

$$\left| \int f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

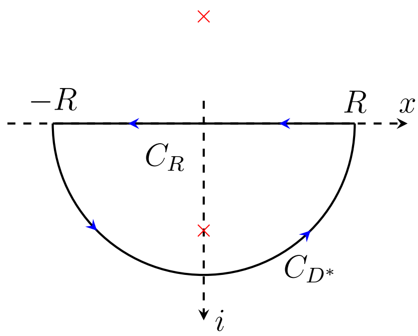
fra dette følger det at integralet kan skrives om som

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z)\,\mathrm{d}z \right| &= \left| \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t \right| \\ &\leq \int_a^b \left| f\big(\gamma(t)\big)\right| \left|\dot{\gamma}(t)\right| \mathrm{d}t \leq M \int_a^b \left|\dot{\gamma}(t)\right| \mathrm{d}t = M \int_C \mathrm{d}z = ML \end{aligned}$$

hvor kurven ble parametrisert via $\gamma(t)$, og M er den maksimale teoretiske verdien $f(\gamma)$ kan ha. I andre overgang ble det brukt direkte at $|a \cdot b| \leq |a|\,|b|$ $\square$



(a) Illustrasjonen av konturen i det øvre halvplanet



(b) Illustrasjonen av konturen i det nedre halvplanet

Figur 3.2

[11] Dersom et maksimum eksisterer så vil supremum og maksimum være like. Derimot så er det noen ganger maksimum ikke eksisterer, men det likevell er ønskelig å prate om en minste teoretisk øvre grense. Et klassisk eksempel er mengden $S = \{0 < r < \sqrt{2}\,, r = \mathbb{Q}\}$, her finnes ikke noe maksimum siden en alltid kan finne et litt større rasjonellt tall 1.4, 1.41, 1.414, … Følgen går mot $\sqrt{2}$, men aldri helt kommer dit så $\sup S = \sqrt{2}$.

Rasjonale funksjoner

Teorem 3.8.4. *La $P(x)$ og $Q(x)$ være polynomer slik at $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$ da er*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\left[\frac{P(x)}{Q(x)}, z_k\right]$$

hvor $z_1, \ldots, z_m$ er singularitene til $P(x)/Q(x)$ i det øvre halvplanet $y > 0$.

Bevis. Her gis en kort skisse av et bevis for theoremet. Beviset deles inn i tre deler. (1) vi viser at integralet konverger. (2) Vi lager en kontur i det komplekse planet, og viser at 'bue'-integralet er null. (3) For å avslutte beviset brukes residue theoremet.

(1) For det første har ikke $Q(x)$ noen nullpunkter på den reelle aksen, slik at $P(x)/Q(x)$ er definert på hele $\mathbb{R}$. Vi ser først på om integralet konvergerer absolutt, for dette impliserer konvergens. For store verdier av x, så domineres polynomene av deres første ledd, så

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{P(x)}{Q(x)}\right| \leq \int \frac{C|x|^{n-2}}{D|x|^{n}}\,\mathrm{d}x$$

og siden integralet på høyre side konvergerer, konvergerer også integralet vårt. For å være helt formelle burde vi ha delt opp integralet i to, og vist at integralet over $(0,\infty)$ og $(-\infty,0)$ konvergerer hver for seg.

(2) Vi integrerer funksjonen langs konturen vist i figur neger, for så å la $R \to \infty$. Da er integralet

$$\int_C \frac{P(x)}{Q(x)} = \int_R \frac{P(x)}{Q(x)} + \int_{C_1} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Målet er nå å vise at integralet i det komplekse planet, som følger kurven Γ er null. Ved å bruke ML-ulikheten så er

$$\int_{C_1} \frac{P(x)}{Q(x)} \leq \pi R \sup_{z\in\Gamma} \frac{P(x)}{Q(x)} \leq \pi R \frac{C|z|^{n-2}}{D|z|^{n}} \leq \pi R \frac{C}{DR^2}$$

som går mot null når $R \to \infty$.

(3) Fra Cauchys integral formel har en nå

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty}\left(\oint_C \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}z - \int_{C_1} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}z\right)\\ &= \lim_{R\to\infty} \oint_C \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}z - 0 = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\left[\frac{P(x)}{Q(x)}, z_k\right]\end{aligned}$$

som var det som skulle vises. □

Integralet over $P(x)/Q(x)$ konvergerer også dersom $\deg P + 1 \leq \deg Q$, men ulempen er da at integralet over halvsirkelen ikke går mot null. Da må en beregne dette integralet eksplisitt, og det kan være vanskeligere enn det opprinnelige integralet.

Dersom både graden til P og Q er partall, så er P/Q like. Ved å bruke symmetrien omkring x-aksen får en da

$$\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\left[\frac{P(x)}{Q(x)}, z_k\right]$$

slik at vi ikke bare kan beregne integraler over R, men også R_+ og R_-.

Theoremet sier at vi må studere polene til P/Q i det øvre halvplanet, men en kunne like gjerne studert polene i det nedre halvplanet. Da må en integrere 'motsatt' vei, og fra omløpstallet får en et negativt bidrag fra hver pol, slik at

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = -2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[\frac{P(x)}{Q(x)}, z_k\right]$$

hvor z_n er polene i det *nedre* halvplanet. En kan altså fritt velge det halvplanet som har færrest eller penest singulariter. Merk og at det ikke er nødvendig at P og Q er polynomer, men at det holder at P er analytisk i det halvplanet en studerer.

Eksempel 3.8.6. I dette eksempelet skal vi beregne følgende integral

$$\int_0^\infty \frac{x^2+2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$$

ved hjelp av kompleks analyse. Integralet er et spesialtilfellet av **??**, men brukes her for å vise frem kompleks integrasjon. Siden teller er av grad 4, mens nevner er av grad 2, medfører at integralet konvergerer. Videre så er integralet symetrisk omkring x aksen, eller like så

$$\int_0^\infty \frac{x^2+2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2+2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x \tag{3.63}$$

Slik at vilkårene for å benytte seg av teorem (3.8.4) er oppfyllt. Integralet er dermed likt

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2+2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\left[\frac{P(x)}{Q(x)}, z_k\right] \tag{3.64}$$

Singuaritenene til funksjonen er hvor $z^4 = -1$, nå kan en skrive $-1 = e^{i(\pi + 2\pi k)}$ så røttene blir

$$\begin{array}{rclcrcl} z_0 & = & e^{i\pi/4} & & z_1 & = & e^{i3\pi/4} \\ z_2 & = & e^{i5\pi/4} & & z_2 & = & e^{i7\pi/4} \end{array}$$

Av disse ligger bare z_0 og z_1 i det øvre halvplanet og i tillegg er de enkle singulariterer. Ved å bruke **??** fra **??** kan residyene skrives som

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z^2+2}{z^4+1}, z_k\right] = \lim_{z \to z_k} \frac{z^2+2}{4z^3} = \frac{1}{4z_k} + \frac{1}{2z_k^3}$$

Ved å dele likning (3.64) på 2, og så benytte seg av likning (3.63) har en at

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^2+2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x &= \pi i\left(\operatorname{Res}\left[\frac{P(x)}{Q(x)}, z_0\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{P(x)}{Q(x)}, z_1\right]\right) \\ &= \pi i\left[\left(\frac{1}{4z_0} + \frac{1}{2z_0^3}\right) + \left(\frac{1}{4z_1} + \frac{1}{2z_1^3}\right)\right]\end{aligned}$$

Merk at nå kan en utnytte symmetrien til enhetsrøttene en har at $z_1^3 = z_0$ og at $z_0^3 = z_1$. Dette gir at

$$\int_0^\infty \frac{x^2+2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \pi i\left[\left(\frac{1}{4z_0} + \frac{1}{2z_1}\right) + \left(\frac{1}{4z_1} + \frac{1}{2z_0}\right)\right] = \frac{3\pi}{4} i\left[\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_0}\right]$$

Ved å skrive om røttene til deres real og kompleks del ved hjelp av av eulers formel $e^{i\omega} = \cos\omega + i\sin\omega$ fås

$$\int_0^\infty \frac{x^2+2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4} i\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$$

som var det som skulle vises. For å gå detaljene litt i sømmene så har en at

$$z_1^3 = e^{i9\pi/4} = e^{-2\pi i} e^{i9\pi/4} = e^{\pi/4} = z_0$$

og tilsvarende så er $z_0^3 = e^{i3\pi/4} = z_1$ som en og kan se siden røttene er symmetrisk om den imaginære aksen. Ved å regne ut røttene eksplisitt får en fra eulers formel

$$\begin{aligned}\frac{1}{z_0} &= e^{-i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{z_1} &= e^{-i3\pi/4} = \cos\frac{3\pi}{4} - \sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\,.\end{aligned}$$

For å bestemme integralet noe enklere kunne en brukt symmmetrien av z_0 og z_1.

$$\int_0^\infty \frac{x^2+2}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4} i\left[\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_0}\right] = -\frac{3\pi}{4} i(2i\operatorname{Im} z_1) = \frac{3\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4}$$

som gjorde at vi bare trengte å bestemme en trigonometrisk verdi.

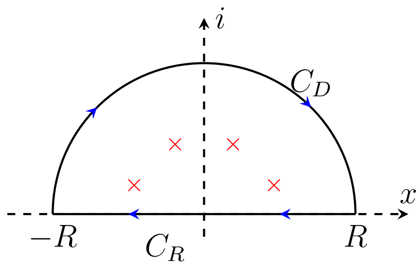
For å bestemme integralet ble det kun brukt enkel algebra, trigonometriske verdier og at $i^2 = -1$. På mange måter er dette en enklere måte å beregne integraler over brøker, enn det som ble vist i seksjon to, ulempen er selvsagt at en trenger en dypere matematisk innsikt for å bruke disse nye verktøyene

Eksempel 3.8.7. I denne delen skal vi studere et kjent integral

$$I_n = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$$

der $n \in \mathbb{N}_2$ er et partall. Igjen tar vi utgangspunkt i den kjente konturen som er vist i figur (3.3). Grunnen til at vi kan bruke denne konturen er at integralet er symmetrisk omkring origo

$$I_n = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}\,.$$



Figur 3.3: Sløyfen $C = C_R \cap C_D$, hvor polene til $1/(1+x^{10})$ i det øvre halvplan er markert.

Som følger fra at n er like. Integralet langs C_R blir som før null da graden av nevner er 2 eller høyre, mens graden til teller alltid er konstant 1. Teorem (3.8.4) gir da at

$$I_n = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \pi i \sum_{k=1}^m \mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+x^n}, z_k\right] \tag{3.65}$$

hvor vi betrakter residyene til funksjonen i det øvre halvplanet. Først må vi se hvor $x^n + 1 = 0$, og dette blir bare enhetsrøttene

$$z_k = e^{i\pi(2k+1)/n}\,, \quad 0 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$$

For å regne ut en residye kan vi igjen bruke **??** fra **??** slik at

$$\mathrm{Res}(z_k) = \lim_{z \to z_k} \frac{1}{(1+z^n)'} = -\frac{1}{n} e^{i\pi(2k+1)/n}$$

hvor minustegnet kommer av at vi betrakter residyene i det øvre halvplanet. Nå har vi at

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m \mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+x^n}, z_k\right] &= \sum_{k=0}^{n/2-1} -\frac{e^{i\pi(2k+1)/n}}{n} \\ &= -\frac{e^{i\pi/n}}{n}\sum_{k=0}^{n/2-1}\left(e^{i2\pi/n}\right)^k = -\frac{e^{i\pi/n}}{n}\left[\frac{\left(e^{i2\pi/n}\right)^{n/2} - 1}{e^{i2\pi/n} - 1}\right]\end{aligned}$$

hvor den siste overgangen følger fra den geometriske rekken. Ved å nå forenkle algebraen kan en skrive summen av residyene som

$$\sum_{k=1}^m \mathrm{Res}\,(z_k) = \frac{e^{i\pi/n}}{n}\,\frac{2}{e^{i2\pi/n} - 1} \quad = \frac{1}{in} \cdot \frac{2i}{e^{i\pi/n} - e^{-i\pi/n}} = \frac{1}{i}\,\frac{1/n}{\sin(\pi/n)}.$$

hvor bare $(z + z^{-1})/2i = (e^{iz} + e^{-iz})/2i \sin z$ ble brukt. Ved å sette inn dette i likning (3.65) får en nå

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} = \pi i \sum_{k=1}^m \mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+x^n}, z_k\right] = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}. \tag{3.66}$$

som var det som skulle vises.

Men stemmer likning (3.66) dersom n ikke er odde? Svaret er overraskende nok ja, men da må vi bruke en alternativ kontur som vi skal se på senere. Dette er fordi dersom n ikke er like, så er ikke funksjonen symmetrisk.

Den neste type integral vi skal se på er på formen $p(x)e^{iax}/q(x)$, men før det et viktig lemma

Lemma 3.8.5. (Jordan's lemma) *La f være en kontinuerlig funksjon i det komplekse planet, definert på følgende kontur*

$$C_R = \{z \ : \ z = Re^{i\theta}, \theta \in [0, \alpha]\}$$

med radius $R > 0$, $0 < \alpha \leq \pi$ og sentrum i origo. Dersom funksjonen f er på formen

$$f(z) = e^{iaz} g(z) \,, \quad z \in C_R$$

og $a > 0$, så er integralet over C_R begrenset av

$$\left| \int_{C_R} f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leq \frac{\pi}{a} \sup_{\theta \in [0,\pi]} \left| g\left(Re^{i\theta}\right) \right|$$

med likhet kun når $g(z)$ er identisk lik null.

Merk at dersom $a = 0$ følger det fra ML-ulikheten at

$$\left| \int_{C_R} f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leq \frac{2\pi R}{\alpha} \sup_{\theta \in [0,\pi]} \left| g\left(Re^{i\theta}\right) \right| \leq \pi R \sup_{\theta \in [0,\pi]} \left| g\left(Re^{i\theta}\right) \right|$$

Et helt likt argument holder for en kontur i det nedre halvplanet dersom $a < 0$. Dette er på mange måter en utvidet utgave av jordans originale lemma siden da er $\alpha = \pi$.

Bevis. Vi begynner med å bruke substitusjonen $z = Re^{i\theta} = R(\cos\theta + i\sin\theta)$, da blir grensene 0 til α.

Sett inn ref til linjeintegral

$$\begin{aligned} \int_{C_R} f(z) \, \mathrm{d}z &= \int_0^\alpha g\left(Re^{i\theta}\right) e^{iaR(\cos\theta + i\sin\theta)} iRe^{i\theta} \, \mathrm{d}\theta \\ &= R \int_0^\alpha g\left(Re^{i\theta}\right) e^{aR(i\cos\theta - \sin\theta)} ie^{i\theta} \, \mathrm{d}\theta \,. \end{aligned}$$

Vi kan nå ta absoluttverdien av integralet og bruke den kontinuerlige trekantulikheten $\left|\int f\right| \leq \int |f|$

$$\left| \int_{C_R} f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leq R \int_0^\alpha \left| g\left(Re^{i\theta}\right) \right| e^{-aR\sin\theta} \, \mathrm{d}\theta \leq RM_R \int_0^\pi e^{-aR\sin\theta} \, \mathrm{d}\theta \,. \quad (3.67)$$

Hvor det ble brukt blant annet at $|e^{iz}| = |\cos z + i \sin z| = |\cos z| = 1$. Siden integralet er positivt så betrakter vi heller området fra 0 til π. Vi innførte og

$$M_R = \sup_{\theta \in [0,\pi]} \left| g\left(Re^{i\theta}\right) \right|$$

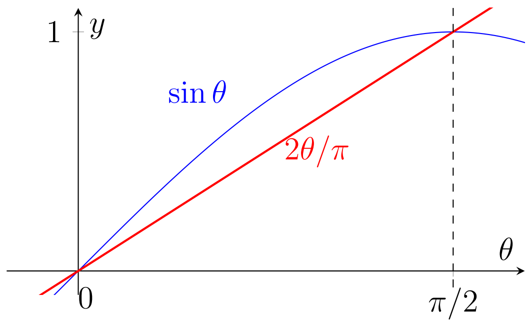
for å forenkle notasjonen litt. Da kan ulikheten skrives som

$$\left| \int_{C_R} f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leq RM_R \int_0^\pi e^{-aR\sin\theta} \, \mathrm{d}\theta \leq 2RM_R \int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta} \, \mathrm{d}\theta$$

hvor vi i siste overgang brukte symmetrien av $\sin\theta = \sin(\pi - \theta)$. Dette kan vises ved å dele intervalet i to eller bruke **??** fra **??** med $m = 0$, $n = 1$ og $f(x) = \exp(-aRx)$. Funksjonen $\sin\theta$ er konkav på intervalet $\theta \in [0, \pi/2]$. Altså at funksjonen ligger over den rette linja mellom endepunktene

$$\frac{2}{\pi}\theta \leq \sin\theta\,, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \tag{3.68}$$

dette overlates til leser å vise, men kan sees intiutivt fra figur 8. Ved å bruke



Figur 3.4: Figuren viser $f(\theta) = 2\theta/\pi$, og $g(\theta) = \sin 2\theta$

dette får vi endelig at

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq 2RM_R \int_0^{\pi/2} e^{-2aR\theta/\pi}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{a}\left(1 - e^{-aR}\right)M_R \leq \frac{\pi}{a}M_R$$

som var det som skulle vises. □

Fra dette følger det direkte at

Korollar 3.8.1. *Dersom de eneste singularitetene til $f(z)$ er poler, da er*

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} g(z)e^{iaz}\,\mathrm{d}z = 0$$

forutsatt at $a > 0$, $|f(z)| \to 0$ når $R \to \infty$.

For at linjeintegralet over $p(z)/q(z)$ skulle gå mot null, kreves det at $p(z)/q(z) \sim 1/R^2$ når $z \to \infty$. Mens her ser vi at så lenge $p(z)/q(z)$ går mot null, uansett hvor sakte så vil linjeintegralet over $p(z)e^{iz}/q(z)$ gå mot null. Dette har med hvordan e^{iz} bidrar til å tvinge funksjonen til å konverge raskere.

Proposisjon 3.8.1. *La $P(x)$ og $Q(x)$ være funksjoner slik at $\left|P(x)/Q(x)\right| \to 0$ når $x \to \pm\infty$. Da er*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{iax}\,\mathrm{d}x = 2\pi i\frac{a}{|a|}\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}\left[\frac{P(x)}{Q(x)}, z_k\right] \tag{3.69}$$

gitt at $Q(x)$ ikke har noen singulariter på den reelle aksen.

Her er $a \in \mathbb{R}/\{0\}$ er en reell konstant ulik null og $z_1, \ldots, z_m$ er singularitene til $P(x)/Q(x)$ i det øvre halvplanet dersom $a > 0$ og det nedre halvplanet dersom $a < 0$.

Dersom P og Q er polynomer må en altså ha $\deg(Q) \geq \deg(P) + 1$ for å sikre konvergens. Dette er et snillere krav enn integraler på formen P/Q, hvor vi trengte $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$ for konvergens.

Først så kommer leddet $a/|a|$ fra at i det nedre halvplanet integrerer vi 'mot-satt' vei, og får et negativt bidrag fra hver singularitet. Dette leddet defineres gjerne som $\operatorname{sign} a = a/|a|$, og gir oss fortegnet til a. En skisse for beviset gis, og fremmgangsmåten er tilsvarende som i (3.8.4).

Vi kan anta at integralet langs den reelle aksen konvergerer siden her er $|e^{iaz}| = 1$, og vi får

$$\left| \int_{-M}^{N} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} \mathrm{d}x \right| \leq \int_{-M}^{N} \left| \frac{P(x)}{Q(x)} \right| \left| e^{ix} \right| \mathrm{d}x \leq \int_{-M}^{N} \left| \frac{P(x)}{Q(x)} \right| \mathrm{d}x$$

som er samme tilfellet som i (3.8.4), og integralet konvergerer dermed. Merk at $\left|e^{ix}\right| = |\cos x + i \sin y| = |\cos x| = 1$. Vi studerer så absoluttverdien av integralet langs sirkelbuen

$$\left| \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} \,\mathrm{d}z \right| \leq \int_{C_R} \left| \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} \right| |\mathrm{d}z| \leq \pi R \sup_{z \in C_1} \left(\frac{|P(z)|}{|Q(z)|} \left| e^{iaz} \right| \right)$$

Legg merke til at $|e^{iaz}| = |e^{a(ix-y)}| = e^{-ay}$. Dermed så er

$$\left| \int_{C_1} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} \,\mathrm{d}z \right| \leq \pi R \frac{1}{R^2} \cdot e^{-ay}$$

hvor vi som før benyttet at $P/Q \sim 1/R^2$ når $R \to \infty$. For at vi skal få samme form som i likning (3.69) må integralet langs sirkelbuen gå mot null når $R \to \infty$[12]. Velger vi en halvsirkel i det øvre planet så vil $y \to \infty$ når $R \to \infty$. For her er y den største y-verdien til halvsirkelen.

Dersom $a < 0$, så vil e^{-ay} gå mot uendelig. Vi må altså velge det nedre halvplanet når $a < 0$, slik at $y \to -\infty$ når $R \to \infty$.

Eksempel 3.8.8. Et av de mest klassiske integralene på denne formen er

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2}$$

Dette integralet kan skrives som

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} \,\mathrm{d}x = \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{1 + z^2} \,\mathrm{d}z \right),$$

ved å bruke eulers formel $e^{i\omega} = \cos \omega + i \sin \omega$. Målet vil nå være å beregne integralet på høyresiden og så ta realdelen av hva det nå enn er vi får som svar. Siden $a > 0$, så ser vi på singularitene til funksjonen i det øvre halvplanet.

$$z_1 = i\,, \quad z_0 = -i\,,$$

her er det bare z_1 som ligger i øvre halvplan, så residyen blir

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^{iz}}{1 + z^2}, i \right] = \lim_{z \to i} \frac{e^{iz}}{2z} = \frac{1}{2i} e^{-1}.$$

[12]Det er ikke alltid dette er tilfellet og slike integral vil bli diskutert senere.

Ved å bruke residue theoremet så har vi at

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{1+x^2} + \int_{C_D}\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right].$$

I det øvre halvplanet går integralet over C_D mot null, mens høyresiden er gitt som $2\pi i\,\mathrm{Res}(i)$. Ved å løse likningen får en altså

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi i\,\mathrm{Res}(i) + \lim_{R\to\infty}\int_{C_D}\frac{e^{iz}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{e}.$$

Ved å ta henholdsvis realdelen og imaineær delen av likningen får en

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{e} \quad \text{og} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0\,,$$

hvor det siste integralet kunne en ha forventet da funksjonen er symmetrisk omkring origo.

Kunne vi heller ha skrevet om $2\cos z = e^{-iz} + e^{iz}$? Faktisk ikke! For å begrense veksten til e^{iaz} måtte vi taktisk velge halvplan, derimot om vi bruker $2\cos z = e^{-iz} + e^{iz}$ er det umulig å velge 'rett' halvplan siden e^{-iz} blåser opp i nedre og e^{iz} i øvre.

Hele diskusjonen med valg av plan er noe meningsløs. Anta at du skal integrere en funksjon $\cos(-x)P/Q$, da kan en helt rett velge $e^{-iz}P/Q$, men ved å bruke at $\cos(-x) = \cos x$ kunne en også like gjerne ha brukt $e^{-iz}P/Q$. Tilsvarende for $\sin x$ så er $\sin(-z)xP/Q = -\sin zxP/Q$ siden $\sin x$ er odde.

Det å velge rett kontur, og det å kunne vite når en kan velge er derimot svært viktig. Og for et knippe funksjoner så kan singularitene i det nedre halvplanet være enklere å regne ut enn i det øvre.

Trigonometriske integral

I denne delen skal vi igjen studere integraler på formen

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}z$$

og vise atter en måte å beregne disse på.

Proposisjon 3.8.2. *La $R(x,y)$ være en rasjonell funksjon, da er*

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x = \oint\limits_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

Det er noen ganger vanskelig å bestemme når det er fordelaktig å bruke Weierstrass-substitusjon eller proposisjonen ovenfor. En løs tommelfinger regel er at dersom integralet krever delbrøksoppspalting etter Weiersttrass-substitusjonen, er proposisjon (3.8.2) å foretrekke. Dersom røttene til nevner har høy multiplisitet kan likevell Weiestrass være å foretrekke.

Ved å bruke substitusjonen ovenfor så har en

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \frac{2}{i}\frac{dz}{1+4z+z^2}$$

som er mer komplisert å integrere enn fremgangsmåten i eksempel (2.4.5). Som vanlig er dette siste metode som bør testes ut for å løse slike integral, da en som regel kan finne langt mer elegante løsninger.

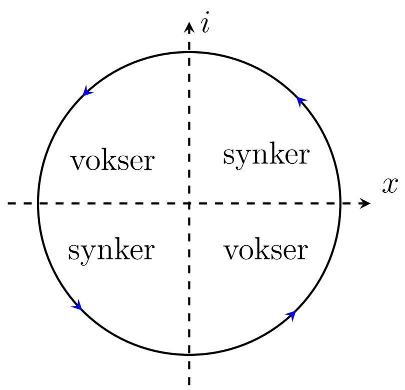
Eksempel 3.8.9. La oss bestemme integralet

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x$$

Ved å bruke proposisjon (3.8.2) kan integralet skrives som

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x &= \oint_C \left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2 \Big/ \left[2+\left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2\right]\frac{\mathrm{d}z}{iz} \\ &= \frac{i}{2}\oint_C \frac{(z^2-1)^2}{z^2(1+4z+z^2)}\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Det neste steget er å bestemme hvor residuene til $f(z)$ befinner seg. Vi ignorerer altså faktoren $i/2$ frem til slutten. Konturen C er altså med klokken omkring enhetssirkelen som vist i figur (3.5). Singularitene til funksjonen er



Figur 3.5

$$z_0 = 0\,,\ z_1 = -2+\sqrt{3}\,,\ \text{og } z_2 = -2-\sqrt{3}$$

Her er det bare z_1 og z_3, som ligger i enhetsdisken, og begge er enkle poler. Residyen til z_0 blir

$$\mathrm{Res}(0,f) = \lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^2 f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{(z^2-1)(2+3z+6z^2+z^3)}{(1+4z+z^2)^2} = -4$$

For litt pene notasjonen skriver vi $\omega = z_2$, den første singulariteten kan regnes ut som

$$\mathrm{Res}(f,\omega) = \lim_{z\to\omega}\frac{h(z)}{g'(z)} = \frac{(\omega^2-1)^2}{2\omega(1+6\omega+2\omega^2)} = -2\sqrt{3}$$

For å gå mellomregningene litt mer i sømmene har en at $1+6\omega+2\omega^2 = (1+4\omega+\omega^2)+(2\omega+\omega^2) = \omega(2+\omega)$, siden ω er en rot av $f(z) = z^2+4z+1$, så er følgelig $\omega^2+4\omega+1 = 0$. En kan da skrive om brøken som følger.

$$\frac{(\omega^2-1)^2}{\omega(1+6\omega+2\omega^2)} = \frac{1}{2}\frac{(\omega^2-1)^2}{\omega(2+\omega)} = \frac{1}{2}\frac{(\omega-1/\omega)^2}{2+\omega}$$

Beregningene fullføres nå ved å bruke at $\omega - 1/\omega = 2\mathrm{Im}\omega = 2\sqrt{3}$ og $2+\omega = \sqrt{3}$. Totalt så er altså integralet

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x &= \frac{i}{2}\oint_C \frac{(z^2-1)^2}{z^2(1+4z+z^2)}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{i}{2}\left(2\pi i\left[\mathrm{Res}(0)+\mathrm{Res}(-2+\sqrt{3})\right]\right) = 2\pi(2-\sqrt{3}) = -2\pi\omega\end{aligned}$$

som fullfører beregningene. For å beregne residuen til ω, kunne en først ha skrevet om funksjonen

$$\mathrm{Res}(\omega, f) = \lim_{z\to\omega}\frac{(z^2-1)^2/z^2}{[1+4z+z^2]'} = \frac{1}{2}\frac{(\omega-1/\omega)^2}{2+\omega} = -2\sqrt{3}$$

som før. Klart raskere, men kanskje ikke like åpenbar.

Fresnell Integralene

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Denne seksjonen er hovedsaklig basert på [16], men fremmgangsmåten er mye eldre. Det første vi gjør er å skrive om funksjonen på kompleks form, slik at

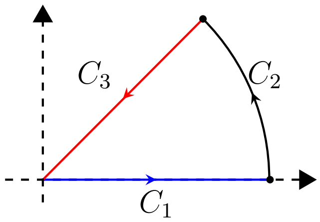
$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix^2}\,\mathrm{d}x\right) \text{ og } \int_{-\infty}^{\infty}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix^2}\,\mathrm{d}x\right)$$

Legg merke til at vi ikke uten videre kan bruke substitusjonen $-z^2 = ix^2$, siden dette ødelegger grensene helt[13].

Integralet har ingen singulariter i det komplekse planet, slik at vi ikke kan bruke den vante halvsirkelen til å beregne integralet. Et annet problem er at $f(z) = e^{iz^2}$ vokser mot uendelig når $\mathrm{Im}(f) > 0$ og $\mathrm{Re}(f) < 0$, se figur 8. Dette medfører at dersom vi bruker den vante halvsirkelen vil linjeintegralet gå mot uendelig. Vi må altså integrere e^{ix^2} over en kvadrant hvor den synker for at linjeintegralet skal konvergere. Valget blir derfor mellom I og III kvadrant. For enkelhetensskyld velges I, men akkuratt samme bevis holder og for III kvadrant. Forskjellene er at i III kvadrant må en holde tungen litt benere i munnen med tanke på fortegn. Dersom vi velger å integrere over hele første kvadrant

$$C = \{x : 0 \le x \le R\} \cap \{z : z = Re^{i\theta}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\} \cap \{y : 0 \le y \le R\} \tag{3.70}$$

[13] Se for eksempel http://math.stackexchange.com/questions/163946/are-complex-substitutions-legal-in-integration for en diskusjon av problemet. Ved å la $ix^2 \mapsto -z^2$ får en $z = \pm\sqrt{-i}\,x$, slik at en ender opp med å arbeide med to substitusjoner på en gang. Spesielt ligger problemet i at dette blir et vei integral i det komplekse planet fra $\pm\sqrt{-i}\,\infty$ til $\mp\sqrt{-i}\,\infty$ som er vanskeligere å tolke enn vårt opprinnelige integral!



Figur 3.6: Viser hvor funksjonen e^{ix^2} vokser og minker.

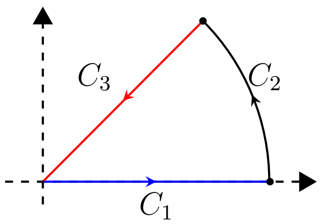
vil vi uheldigvis bare komme frem til at integralene er like[14]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$

som er nyttig og interessant i seg selv, men ikke hjelper oss beregne verdien av integralene. Vi må altså velge en mindre kontur. Ved å prøve å heller bruke halvparten av første kvadrant

$$\begin{aligned} C = \{ & \underbrace{x : 0 \leq x \leq R}_{C_1} \} \\ \cap \{ & \underbrace{z : z = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}}_{C_2} \} \cap \{ \underbrace{z : z = re^{i\pi/4}, 0 \leq r \leq R}_{C_3} \} \end{aligned} \tag{3.71}$$

så vil en klare å beregne integralet. Konturen C er vist nå i figur (3.7). Fremm-



Figur 3.7: Viser konturen $C = C_1 \cap C_2 \cap C_3$ fra likning (3.71), og polene til e^{iz} på området.

gangsmåten blir som før at vi bruker at linjeintegralet over en lukket sløyfe i det komplekse planet er lik singularitetene

$$\oint_C e^{ix^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi \sum_{k=0}^{m} \mathrm{Res}(e^{ix^2}, z_k) = 0$$

da funksjonen aldri er null i det komplekse planet. En har da at

$$\oint_{C_1} e^{ix^2}\,\mathrm{d}x + \oint_{C_2} e^{ix^2}\,\mathrm{d}x - \oint_{C_3} e^{ix^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

da $C = C_1 \cap C_2 \cap C_3$, og C_3 gå mot klokken. Vi beregner nå ett og ett integral.

[14]Dette er gitt som øvelse til leser, se oppgave 4.

C1) Vi kan parametrisere integralet ved å bruke $\gamma(t) = y \cdot 0 + t \cdot x$, fra $t = 0$ til $t = R$

$$\oint_{C_1} e^{iz^2}\,\mathrm{d}z = \int_0^R e^{it^2}\,\mathrm{d}t \tag{3.72}$$

som vi ser blir integralet vårt når $R \to \infty$.

C2) Dette integralet følger en kvartsirkel og det vil være behagelig om dette integralet går mot null når $R \to \infty$. La oss prøve å bruke ML-ulikheten direkte

$$\left|\int_{\gamma_2} e^{iz^2}\mathrm{d}z\right| \leq \frac{R\pi}{4} \sup_{\theta\in[0,\pi/4]} \left|e^{iR\exp(i2\theta)}\right| \leq \frac{R\pi}{4} \sup_{\theta\in[0,\pi/4]} \left(e^{-R^2\sin 2\theta}\right)$$

hvor det ble brukt at $z^2 = (Re^{i\theta})^2 = R^2 e^{i2+\theta}$, og Eulers formel. For $\theta \in [0, \pi/4]$ så er $\sin 2\theta$ en strengt voksende funksjon. Altså synker $e^{-R^2\sin 2\theta}$ for $\theta \in [0, 4]$ og den største verdien utrykket kan få er altså når $\theta = 0$. Dette gir

$$\left|\int_{\gamma_2} e^{iz^2}\mathrm{d}z\right| \leq \frac{R\pi}{4} e^{-R^2\sin 2\cdot 0} \leq \frac{R\pi}{4}$$

Dersom vi nå lar R gå mot uendelig har vi altså vist

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\gamma_2} e^{iz^2}\mathrm{d}z\right| \leq \lim_{R\to\infty}\frac{R\pi}{4} \leq \infty$$

som sier oss fint lite. Dersom vi i stedet hadde studert intervalet[15] $(0, \pi/4)$ så ville integralet asymptotisk gått som Re^{-R^2}, som åpenbart går mot null. Det er altså bare såvidt ML-ulikehen ikke klarer å vise dette. Vi trenger altså en skarpere ulikhet enn hva ML-ulikheten kan gi oss. La oss heller bruke samme teknikk som i beviset til Jordans lemma. Via trekant-ulikheten har vi

$$\left|\int_{C_2} e^{iz^2}\,\mathrm{d}z\right| \leq \int_{C_2}\left|e^{iz^2}\right||dz| \leq R\int_0^{\pi/4} e^{-R^2\sin 2\theta}\,\mathrm{d}\theta \tag{3.73}$$

hvor atter en gang har parametrisert integralet ved å bruke $z = Re^{i\theta}$, så $z^2 = R^2e^{i2\theta} = R^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$. Ganger en må med i, og tar absoluttverdien fås uttrykket ovenfor. Tanken er nå igjen å bruke at $\sin 2\theta$ er konkav. Ved å sette inn $\theta = 2x$ i likning (3.68) får en

$$\frac{2}{\pi}2x \leq \sin 2x\,,\ 0 \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{4}{\pi}x \leq \sin 2x\,,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

bruker vi dette i likning (3.73) får en nå

$$\left|\int_{C_2} e^{iz^2}\,\mathrm{d}z\right| \leq R\int_0^{\pi/4} e^{-R^2(4x/\pi)}\,\mathrm{d}x \leq R\cdot\frac{\pi}{4R^2}\left(1-e^{-R^2}\right) \leq \frac{\pi}{4R}$$

som heldigvis går mot null når $R \to \infty$. Dette er et eksempel på hvor ML-ulikheten ikke fungerer, men integralet likevell konvergerer mot null.

[15] Men vi kan ikke studere åpne interval! Dette medfører at sløyfen vår ikke hadde vært sammenhengene og Cauchy's integralformel ville ikke vært gyldig.

C3) For det siste integralet bruker vi følgende parametrisering

$$z(t) = e^{i(\pi/4)t} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}t\,, \quad 0 \leq t \leq t_0$$

og $\mathrm{d}z = (1+i)\,\mathrm{d}t/\sqrt{2}$. Her er t_0 valgt på en slik måte at $\sqrt{0^2 + z(t_0)^2} = R$, altså at avstanden til origo er R når $t = t_0$. Integralet kan da skrives som

$$\int_{C_r} e^{iz^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^{t_0} \exp\left\{ i\left[\frac{1+i}{\sqrt{2}}t\right]^2\right\}\mathrm{d}t = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^{t_0} \exp\left\{i^2t^2\right\}\mathrm{d}t$$

hvor det siste uttrykket selvsagt gjeennskjennes som e^{-t^2}. Ved å sette inn 25 26 og 27 inn i 47 har vi

$$\int_0^R e^{ix^2}\,\mathrm{d}x + \oint_{C_2} e^{ix^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^{t_0} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0$$

Vi kan nå la $R \to \infty$. Da vil integralet langs C_2 gå mot null, slik at

$$\int_0^\infty e^{ix^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} + i\sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

Siden $e^{ix^2} = \cos x^2 + i\sin x^2$ har vi nå

$$\int_0^\infty \cos x^2\,\mathrm{d}x + i\int_0^\infty \sin x^2\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{8}} + i\sqrt{\frac{\pi}{8}}$$

som var det som skulle vises. For å være ekstra pedantisk kan en nå ta realdelen av likningen og imagineærdelen og bruke at begge funksjonene er symmetrisk omkring origo. Men dette får leser klare på egenhånd.

Merk at vi endte opp med å bruke det gaussiske-integralet likevell. Å beregne dette integralet med kompleks integrasjon er noe vanskelig men for et slikt bevis kan en se seksjon 8 eller oppgave 4.

Det gaussiske integralet

I dette avsnittet skal vi studere følgende integral

$$\oint_{\partial D_R} \frac{e^{\pi i(z-1/2)^2}}{1 - e^{-2\pi i z}}\,\mathrm{d}z$$

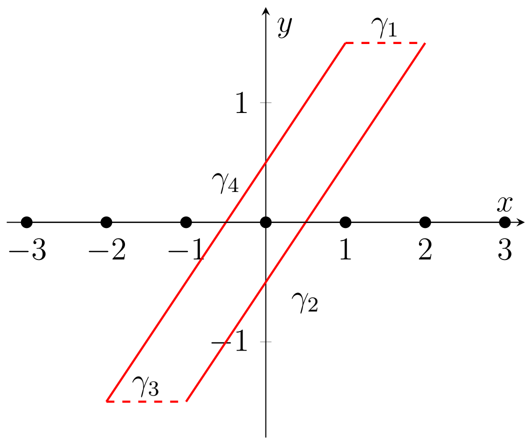
i fra Gamelin. Målet er å bruke integralet ovenfor til å vise at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\,\mathrm{d}s = \sqrt{\pi} \tag{3.74}$$

som vi har sett flere ganger før. Konturen som vi integrerer omkring er parallelogrammet D_R med sider $\pm\frac{1}{2} \pm (1+i)R$ som er vist i figur (3.8).

En skisse av beviset er som følger, integralet over hele konturen kan bestemmes fra Cauchy's residue theorem, den eneste polen er $z = 0$ slik at

$$\oint_{\partial D_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left[f(z), z = 0\right] = e^{i\pi/4} = \frac{i-1}{\sqrt{2}} \tag{3.75}$$



Figur 3.8: Illustrasjon av konturen en integrerer rundt, de stiplede linjene er henholdsvis γ_1 og γ_3.

En kan og betrakte integralet som en sum av fire linjeintegral

$$\oint_{\partial D_R} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}$$

Det kan videre vises at når $R \to \infty$ så vil integralene langs γ_2 og γ_4 gå mot null. Ved å bruke dette kombinert med likning (3.75) får en

$$\frac{i-1}{\sqrt{2}} = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Integralet langs γ_1 kan parametrises ved $z = 1/2(1+i)R$ med $-R < t < R$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{e^{\pi i (z-1/2)^2}}{1-e^{-2\pi i z}}\,\mathrm{d}z = (1+i)\int_{-R}^{R} \frac{e^{-2\pi t^2}}{1+e^{-2\pi i(1+i)t}}\,\mathrm{d}t$$

og tilsvarende kan γ_3 parametrises ved $z = -1/2(1+i)R$ for $-R < t < R$ slik at

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{R}^{-R} \frac{e^{\pi i (z-1/2)^2}}{1-e^{-2\pi i z}}\,\mathrm{d}z = (1+i)\int_{-R}^{R} \frac{e^{-2\pi i(1+i)t}e^{-2\pi t^2}}{1+e^{-2\pi i(1+i)t}}\,\mathrm{d}t$$

Ved å legge sammen disse integralene og la $R \to \infty$ får fra at

$$(i+1)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi t^2}\left(1+e^{-2\pi i(1+i)t}\right)}{1+e^{-2\pi i(1+i)t}}\,\mathrm{d}t = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

som medfører at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

som er ekvivalent med likning (3.74).

Poisson Kernel

En svært viktig funksjon innen kompleks analyse er poisson kernel, også noen ganger kjent som poisson kjernen og er en integral transformasjon på lik linje med laplace eller fourier-transformasjonene.

Lemma 3.8.6. *Poisson kernel funksjonen er definert*

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2} = \operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right), \; r \in [0,1)$$

Andre likhet følger fra substitusjonen $\varphi \to \vartheta - \varphi$ og at poisson kernel funksjonen $P_r(\theta)$ har en periode på 2π.

Definisjon 3.8.1. Poisson kernel transformasjonen er definert som

$$\tilde{h}(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} h(e^{i\varphi}) P_r(\vartheta - \varphi) \frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi} = \int_0^{2\pi} h(e^{i(\vartheta-\varphi)}) P_r(\varphi) \frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}$$

Dette er en transformasjon som tar inn en funksjon og dersom h er integrerbar på enhetssirkelen så er u harmonisk på området $D = \{z \,:\, |z| < 1\}$.

Vi skal her hovedsaklig studere ulike måter å bestemme poisson kernel transformasjonen av $h = 1$ på, altså en konstant funksjon.

Proposisjon 3.8.3. *La $R > r > 0$ da er*

$$P_{R,r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \vartheta) + r^2} \,\mathrm{d}\vartheta = 1$$

Bevis. **1)** Legg merke til at integralet ikke er akkuratt det samme som poisson transformasjonen. Det første vi gjør er å enten å bruke substitusjonen $\vartheta \to \varphi - \vartheta$ eller å se at

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = -\frac{\partial}{\partial\vartheta}$$

slik at integralet er uavhengig av φ. Videre la oss dele på R og innføre konstanten $\rho = r/R$

$$P_{R,r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\vartheta + r^2} \,\mathrm{d}\vartheta$$

fremmgangsmåten nå blir å forenkle integranden via kompleks analyse. Da er

$$\begin{aligned}
\frac{1-(r/R)^2}{1^2 - 2(r/R)\cos\vartheta + (r/R)^2} &= \frac{1-\rho^2}{(1-\rho e^{i\vartheta})(1-\rho e^{-i\vartheta})} \\
&= \frac{1}{1-\rho e^{i\vartheta}} + \frac{\rho e^{-i\theta}}{1-\rho e^{-i\vartheta}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho^{|n|} e^{in\vartheta} \\
&= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos(n\vartheta)
\end{aligned}$$

tanken er nå at når vi integrerer over $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ så vi alle integralene gå mot null. Siden vi har fra at eksempel (2.9.1) at

$$\int_0^\pi \cos nx \,\mathrm{d}x = 0\,, \quad n \in \mathbb{Z}/\{0\}$$

dermed så blir integralet

$$\begin{aligned} P_{R,r} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\vartheta + r^2}\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos(n\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \\ &= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n \int_0^{2\pi} \cos(n\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta = 1 \end{aligned}$$

som var det som skulle vises.

2) La oss og løse integralet på en litt annen måte, vi kan gjøre følgende omskrivning

$$P_{R,r} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\vartheta + r^2}\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1 - a\cos x}$$

Hvor $x = \vartheta$ og $a = 2rR/(r^2 + R^2)$. Siste integralet har vi løst i Del II, men la oss nå løse det via kompleks integrasjon. Da er

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1 - a\cos x} = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}z/zi}{1 - a(z + z^{-1})/2} = \frac{1}{\pi i}\oint_{z=1} \frac{1}{a + 2z + az^2}$$

Vi kan nå bruke residue-theoremet til å beregne integralet. Nullpunktene er $z_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{1 - a^2}\,)/a$, og det er bare z_1 som ligger i enhetssirkelen, så

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 - a\cos x} &= \frac{1}{\pi i} 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}\right) \\ &= 2\lim_{z \to z_1} \frac{1}{2 + 2az} = \frac{1}{1 + az_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} \end{aligned}$$

Ved å sette inn får en nå

$$P_{R,r} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 - a\cos x} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2}\frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} = 1$$

som før. Det siste steget er bare en rekke ufine algebraforenklinger hvor en kun bruker at $a = 2rR/(R^2 + r^2)$, men disse stegene kan leser kan få kose seg med alene. □

Logaritmer

Nøkkel konturer

3.9 Oppgavesamling III

3.9.1 Integral

1. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\log(x)\log(1-x)}{x(1-x)}\,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int_0^{\infty} 1 - e^{-1/x^2}\,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log(1/x)}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int_0^{\infty} \operatorname{LambertW}\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\log(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$

3.9.2 Oppgaver

1. Beregn Dirichlet integralet

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2}$$

ved hjelp av dobbeltintegralet

$$I = \iint_{\mathcal{D}} e^{-st}\sin t\,\mathrm{d}(s,t)$$

hvor $D = [0,\infty) \times [0,\infty)$.

2. Bestem følgende sum

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(v-u)^{2n+1}} \int_u^v (x-u)^n (v-x)^n\,\mathrm{d}x$$

hvor $v > u$.

3. **(Tom Apostol - 10.23)** Definer

$$F(y) := \int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{x\,(x^2+1)}\,\mathrm{d}x \quad \forall\, y > 0\,.$$

a) Vis at $F(y)$ tilfredstiller følgende differensiallikning

$$F''(y) - F(y) = \frac{\pi}{2}\,,$$

og bruk dette til å vise at

$$F(y) = \frac{1}{2}\pi\left(1 - e^{-y}\right)\,.$$

b) Bruk $F(y)$ til å bestemme følgende tre integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{x\,(x^2+a^2)}\,, \qquad \int_0^{\infty} \frac{\cos xy}{x^2+a^2}\,,\text{og} \qquad \int_0^{\infty} \frac{x\sin xy}{x^2+a^2}\,.$$

4. Vi skal i denne oppgaven studere følgende integral

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

hvor $n \in \mathbb{N}$.

a) Vis at $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$

b) Bestem $I_{n+1} + I_n$

c) Bestem følgende sum $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$

5. Beregn integralet

$$\int_0^{\pi} \arctan\left(\frac{\gamma \sin x}{1 - \gamma \cos x}\right) \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$$

der γ, betegner den velkjente Euler–Mascheroni konstanten. Vis at integralet kan skrives som

$$\frac{\pi}{2} \log(2 + \sqrt{3})$$

ved å benytte seg av tilnærmingen $\gamma \approx 1/\sqrt{3}$.

6. Denne oppgaven handler om gamma og beta-funksjonene.

a) Vis at

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}} \mathrm{d}x = 2^{m+n-2} B(m,n)$$

hvor $m, n > 0$.

b) Bruk forrige oppgave til å vise at

$$J = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}\right)^{\cos\alpha} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2 \sin\left(\pi \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right)} .$$

når α ikke er en multipel av π ($\alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{N}$).

7. I del II viste vi at for alle $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = \frac{\pi}{2}\,, \tag{3.76}$$

se proposisjon (2.9.1). Bruk dette til å vise at

$$I_n = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$$

går mot $\pi/2$ når $n \to \infty$.

8. Bestem følgende integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^a - x^b}{(1+x^a)(1+x^b)} \mathrm{d}x$ hvor $a, b \in \mathbb{R}$

9. I denne oppgaven skal vi studere følgende to integral

$$I_1(t) = \int_t^\infty \frac{\sin(x-t)}{x}\,\mathrm{d}x \quad \text{og} \quad I_2(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,, \tag{3.77}$$

Vis at begge integralene tilfreldstiller differensiallikningen

$$y'' + y = \frac{1}{t}\,, \quad t > 0.$$

La $I(t) = I_1(t) - I_2(t)$, og bruk differensiallikningen ovenfor til å vise at I må være på formen

$$I(t) = A\sin(t+B)$$

Bestem konstantene A og B og vis endelig at

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

10. Beregn følgende integral

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\log(1+b\sin x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

hvor $|b| \leq 1$.

11. Tidligere har en studert følgende integral

$$I_n(a,b) := \int_0^\infty \frac{1}{(a\cos^2 x + b\sin^2 x)^n}\,\mathrm{d}x$$

For $n = 1$ og $n = 2$. Anta $n > 1$ og vis at I_n tilfredstiller

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}\right) I_{n-1} = \nabla I_{n-1} = (1-n)I_n$$

hvor ∇ er summen av de partiellderiverte. Bestem og et lukket uttrykk for I_n ved hjelp av partiellderiverte. Det kan fritt benyttes at $I_1(a,b) = \pi/(2\sqrt{ab})$.

12. **(Putnam** 2008–**B**2**)** Merk, oppgaven er ikke helt den samme. La $F_0(x) = \log x$. For $n \geq 0$, defineres

$$F_{n+1} = \int_0^x F_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Bestem følgende sum

$$\lim_{n\to\infty} \bigl(\log n - n! \cdot F_n(1)\bigr)$$

13. La A være definert som følger

$$A = \int_0^\infty \frac{e^{-\varphi x} - e^{(1-\psi)x}}{x} \, \mathrm{d}x$$

Hvor ψ og φ er henholdsvis minste og største løsning av

$$x^2 + x = 1$$

Bestem uttrykk for

$$\sinh(A) \quad \text{og} \quad \cosh(A)\,,$$

og skriv de så enkelt som mulig. Hint: $\psi + \varphi = \varphi \cdot \psi$, $\varphi - \psi = \sqrt{5}$.

14. **(Putnam** $2005-$**A**5**)** Det integralet som kanskje har høstet mest oppmerksomhet gjennom Putnam's historie er følgende er følgende

$$I = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

i denne oppgaven ser vi nærmere på ulike måter å bestemme integralet på.

a) Løs integralet ved hjelp av substitusjonen $x = \tan\theta$.

b) Innfør en parameter α i teller og bestem integralet.

c) Benytt den noe uvanlige substitusjonen $(1+x)(1+y) = 2$, til å bestemme integralet.

15. I denne oppgaven skal vi se hvordan Euler kan ha kommet frem til antakelsen om at betafunksjonen var relatert til gammafunksjonen. Se på følgende integral

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

Bruk integralet til å vise hvorfor det kan være rimelig å anta at betafunksjonen kan skrives som

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \, \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,.$$

16. I forrige oppgave viste vi en måte å komme frem til å komme frem antakelsen om sammenhengen mellom betafunksjonen og gammafunksjonen. Denne sammenhengen ble vist i teorem (3.3.6) ved hjelp av *Bohr-mullerup* theoremet. Siden den gang har vi (forhåpentligvis) lært mange flere teknikker. Disse kan benyttes til å bevise sammenhengen og vi studerer nærmere to av disse.

a) Skriv $\Gamma(x)\Gamma(y)$ som et dobbeltintegral og bruk det til å bevise teorem (3.3.6).

b) Bruk konvolusjonstheoremet for laplace-transformasjoner med $f(t) = t^x$ og $g(t) = t^y$ til å bevise teorem (3.3.6).

17. Følgende likhet har tidligere blitt vist

$$\int_0^1 \log\Gamma(x+t)\,\mathrm{d}x = \log\sqrt{2\pi} + \int_0^1 x\log tx\,\mathrm{d}x \qquad \forall\, t>0$$

og kan benyttes fritt i denne oppgaven. Bestem følgende integral

$$\iint_{\mathcal{S}} B(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

hvor $\mathcal{S} = [0,1]\times[0,1]$ er enhetsfirkanten ("unit square").

18. I denne oppgaven skal en svak generalisering av Ahmed's integral

$$\int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{5\pi^2}{96}$$

studeres. Bruk at $1/q + 1/p = (p+q)/pq$ til å vise at

$$\iint_S \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(a^2+x^2)(2a^2+x^2+y^2)} + \iint_S \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(a^2+y^2)(2a^2+x^2+y^2)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{a^2+y^2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{a^2+y^2}$$

Der a er en reell konstant, og S er enhetskuben $S = [0,1]\times[0,1]$. Integralene på høyre side er like. Vis da at

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{a^2+x^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{2a^2+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{a^2}{a^2+x^2}\,\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan\sqrt{2a^2+x^2}}{\sqrt{2a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

og bruk dette til å endelig vise at

$$\int_0^1 \frac{2a^2}{a^2+x^2}\,\frac{\arctan\sqrt{2a^2+x^2}}{\sqrt{2a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x = \pi\,\arctan\frac{1}{\sqrt{2a^2+1}} - \left(\arctan\frac{1}{a}\right)^2.$$

Hvor a som før er en reell konstant.

19. Sinus funksjonen er definert som følger

$$\mathrm{Si}(z) := \int_0^z \mathrm{sinc}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^z \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,,$$

og vi ser at $\lim_{z\to\infty}\mathrm{Si}(z) = \pi/2$ gir oss *Dirichlet integralet* som har blitt studert før. I denne oppgaven skal vi studere en rekke relaterte integral.

a) Vis at

$$\int_0^\infty \mathrm{sinc}^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{sinc}(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

a) Uttrykk integralene

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{og} \quad \int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^4}\,\mathrm{d}x$$

ved hjelp av Dirichlet integralet.

20. I denne og den neste oppgaven studerer vi nærmere Wallis integralet

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{\pi}{2^{2p+1}}\binom{2p}{p} & \text{når } n = 2p \\ \frac{2^{2p}}{p+1}\Big/\binom{2p+1}{n} & \text{når } n = 2p+1 \end{cases}, \tag{3.78}$$

som vi har sett tidligere.

a) Vis først at $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n \mathrm{d}x$, og deretter at høyre og venstre side av likheten tilfredstiller differensiallikningen

$$nW_n = (n-1)W_{n-2}$$

for alle $n \geq 2$.

b) Vis følgen er synkende og at for store n så er $W_{n+1} \sim W_n$. Bruk dette til å vise at for store n så er

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\,,$$

hvor det kan være lurt å betrakte følgen $y_n = (n+1)W_n W_{n+1}$.

c) Avslutningsvis viser vi noe av nytteverdien til Wallis integralet og beregningene vi har utført. Fra tidligere har vi vist tilnærmet at

$$n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad \text{der } C \in \mathbb{R}_+ \tag{3.79}$$

også kjent som stirrlings formel. Tidligere har vi antatt at $C = 1$, men vi kan finne en enda bedre tilnærmelse for denne konstanten. Bruk tilnærmelsen for W_{2n} fra deloppgave **b)** og det eksakte uttrykket fra likning (3.78) til å bestemme C. Du kan fritt benytte deg av at likning (3.79) holder for store n.

21. I denne oppgaven skal vi se nærmere på det gaussiske integralet. La f være definert som

$$f(x,t) = x^t \cdot e^{-x^2}/\sqrt{\pi}$$

a) Vis at $f(x,0)$ er en sannsynlighetsfordeling. Altså at integralet over $\mathbb{R}$ er lik 1.

For en kontinuerlig fordelig er forventingsverdien til en sannsynlighetstetthet er gitt som

$$\mathbf{E}(x) = \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$$

og beskriver det mest sannsynlige utfallet til funksjonen. Variansen er hvor nært sentrert funksjonen er omkring funksjonen gitt som

$$\mathsf{Var}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \big(x - \mathbf{E}(x)\big)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

b) Bestem forventingsverdien og variansen til $f(x,0)$.

Videre I denne oppgaven blir det sett nærmere på den *moment-genererende funksjonen* til f. Den er gitt som

$$M_f(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xp} f(x)\mathrm{d}x$$

c) Vis at den momentgenererende funksjonen til $f(x,0)$ kan skrives som

$$M_f(p) = e^{p^2/4}\sqrt{\pi}$$

Og vis videre at

$$\lim_{t\to 0}\big(M_f(p)\big)' = \mathbf{E}(x) \quad \text{og} \quad \lim_{t\to 0}\big(M_f(p)\big)'' = \mathsf{Var}(x)$$

d) Vis at integralet

$$I(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \alpha f(x,t)\,\mathrm{d}x \tag{3.80}$$

tilfredstiller funksjonallikningen

$$I(t) = \frac{t-1}{2} I(t-1)$$

dersom t er et partall. Hva skjer dersom t er odde? Bestem integralet $I(t)$ og finn α slik at $I(t)$ blir en sannsynlighetsfordeling. Eksisterer det t-verdier slik at det er umulig for I å være en sannsynlighetsfordeling?

Denne siden er med hensikt blank, for å gi leser en pustepause og for å la forfatter slåss mot dinosaurer.

IV

Denne siden er med hensikt blank, for å gi leser en pustepause og for å la forfatter slåss mot dinosaurer.

Tillegg A

A.1 DERIVASJON

I denne delen skal vi se på definisjonen av den deriverte, samt bevise noen derivasjonsregler. Dette gjøres da vi bruker disse reglene, når vi utvikler regnereglene for integralregning. Jeg antar leser er kjent med stoffet fra før, så trenger du en grundigere innføring se kalkulus.

Definisjon A.1.1. Anta at f er definert i et omhegn om punktet a[1]. Dersom grenseverdien

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

eksisterer, sier vi at f er *deriverbar* i a. Vi skriver

$$f'(a) = \lim_{\Delta x} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \tag{A.1}$$

og kaller denne størrelsen for *den deriverte til f i punktet a.*

De deriverte av de vanligste funksjonene er kjent fra skolematematikken, men vi for ordens skyld tar med med en kort liste

Proposisjon A.1.1. *La $a \in \mathbb{R}$ være en konstant, da er*

$$\begin{aligned}
D[a] &= 0 && \text{(A.2)}\\
D[x^a] &= ax^{a-1} && \text{(A.3)}\\
D[a^x] &= a^x \log a \ (a>0) && \text{(A.4)}\\
D[e^x] &= e^x && \text{(A.5)}\\
D[\log|x|] &= \frac{1}{x} && \text{(A.6)}\\
D[\sin x] &= \cos x && \text{(A.7)}\\
D[\cos x] &= -\sin x && \text{(A.8)}\\
D[\tan x] &= \sec^2 x = 1+\tan^2 x && \text{(A.9)}
\end{aligned}$$

Hvor $\sec^2 x = 1/(\cos x)^2$.

[1] Det vil si at det eksisterer et intervall $(a-c, a+c)$, med $c>0$ slik at $f(x)$ er definert for alle x i dette intervallet.

Beviset for likning (A.2) faller ut direkte ved innsetning i likning (A.1). Likning (A.3) er nesten like triviell å vise via binomialformelen:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = x^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \tag{A.10}$$

Som kan vises med induksjon, og er intuitiv om en betrakter pascals trekant. Andre overgang følger fra trekke ut første leddet fra summen. For min egen mentale helse bytter jeg ut Δx med h i de påfølgende bevisene. Merk at dette forandrer ikke betydningen, men er bare et navnebytte. Ved å sette $f(x) = x^a$ inn i likning (A.1) får vi følgende

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^a - x^a}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{a} \binom{a}{k} x^{a-k} (h)^k \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\binom{a}{1} x^{a-1} + \binom{a}{2} x^{a-2} (h)^1 + \cdots + \binom{a}{a} x^{a-a} (h)^{a-1} \right) \\ &= a x^{a-1} \end{aligned}$$

Hvor alle leddene går mot null untatt det første. Her ble likning (A.10) brukt i tredje overgang, med $y = h$. Merk at dette beviser bare er gyldig for $a \in \mathbb{N}$, mens proposisjonen sier at resultatet holder for $a \in \mathbb{R}$. Å utvide resultatet er mulig, men er utenfor hva vi ønsker å vise her, se for eksempel 4 eller 5. Egenskapene til $\log x$ og e^x tas i en egen del, se avsnitt (A.2).

La oss nå ta et lite lemma før vi viser at $D[\sin x] = \cos x$.

Lemma A.1.1. *Vi har følgende grenser*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0 \tag{A.11}$$

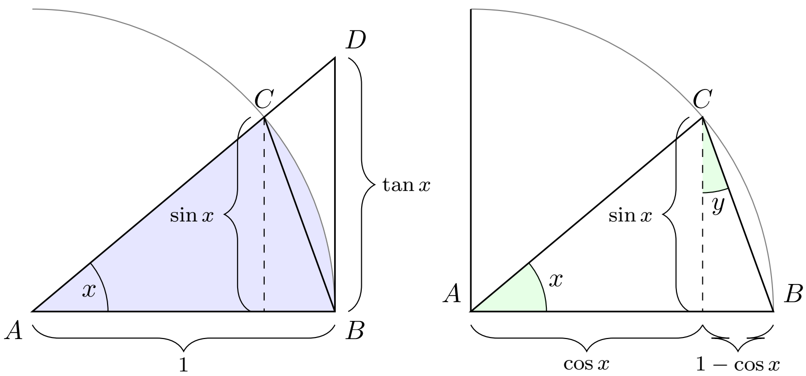
$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \tag{A.12}$$

Bevis. Disse grenesene kan vises på mange ulike måter. Spesielt enkelt er det dersom en har definert $\sin x$ og $\cos x$ ut i fra potensrekker. Dog er det langt mer naturlig å definere $\sin x$ og $\cos x$ som koordinatene til et punkt på enhetssirkelen. Dette er definisjonen vi vil bruke, og beviset vil da også benytte seg av enhetssirkelen. Det fargelagte området i **??** har et areal på $T = A \cdot x/C$ hvor A er arealet til enhetssirkelen og C er omkretsen. Arealet av det fargelagte området blir altså $T = \pi x/(2\pi) = x/2$. Arealet av trekanten ΔABC er $\frac{1}{2}\sin x$, og arealet av $\Delta ABD = \frac{1}{2}\tan x$.

$$\frac{1}{2}\tan x \geq \frac{x}{2} \geq \frac{1}{2}\sin x \tag{A.13}$$

Deler vi likning (A.13) på $\frac{1}{2}\sin x$ og snur ulikheten på hodet (vi opphøyer altså alle sidene i ulikheten med -1), får vi

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$



(a) Illustrasjon av $(\sin x)/x$ (b) Illustrasjon av $(1 - \cos x)/x$

Figur A.1: Viser første kvadrant av enhetssirkelen

Både 1 og $\cos x$ er kontinuerlige funksjoner, slik at likningen er gyldig for alle ikke null x mellom $-\pi/2$ og $\pi/2$. Ved å la $x \to 0$ får vi

$$1 \leq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Altså er $\lim_{x\to 0}(\sin x)/x = 1$ som ønsket. Vi kan føre et likende bevis for likning (A.12) ved nå å ta utgangspunkt i figur (A.1b). Tanken er nå å vise at

$$0 \leq \frac{1 - \cos x}{x} \leq \sin \frac{x}{2} \tag{A.14}$$

også la $x \to 0$. Den første uliketen følger direkte fra at vi befinner oss i første kvadrant, da er x positiv og $\cos x < 1$. Fra figur (A.1b) har vi at $y = x/2$ (hvorfor?), og dermed har vi

$$\sin y = \sin \frac{x}{2} = \frac{AD}{AB} \geq \frac{AD}{x} = \frac{1 - \cos x}{x}$$

Hvor ulikheten følger fra at $x \leq AB$, siden x er buelengden og AB er avstanden fra A til B. Grensen følger nå ved å la $x \to 0$ i likning (A.14) □

Likning (A.7) er nå klar til å bli bevist, målet er altså vise at $D[\sin x] = \cos x$. Ved å sette inn $f = \sin x$ i definisjon (A.1.1) fås

$$\begin{aligned}
D[\sin x] &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \sin h - \sin x (1 - \cos h)}{h} \\
&= \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} - \sin x \lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos h}{h}
\end{aligned}$$

Ved nå bruke lemma (A.1.1) så er $D[\sin x] = \cos x$ som ønsket. Beviset for at $D[\cos x] = \sin x$ føres helt likt, og overlates derfor til leser. For å vise at $D[\tan x] = 1 + \tan^2 x$ og $D[a^x] = a^x \log a$ trenger vi først ett lite knippe derivasjonsregler.

Proposisjon A.1.2. *Anta at f og g er deriverbare i a, og at $c \in \mathbb{R}$ er en konstant. Da er også cf, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ og f/g[2] deriverbar. De er gitt ved*

$$(cf)' = c \cdot f' \qquad \textit{(konstantregelen)} \tag{A.15}$$

$$(f+g)' = f' + g' \qquad \textit{(sumregelen)} \tag{A.16}$$

$$(f \cdot g)' = f'g + g'f \qquad \textit{(produktregelen)} \tag{A.17}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \qquad \textit{(kvotientregelen)} \tag{A.18}$$

Hvor kortnotasjonen $f' = f'(a)$ og $g' = g'(a)$ ble brukt.

Bevis. Her uttelates likning (A.15) da den følger direkte, ved innsetning. Ellers er alle likningene rett frem å vise. Likning (A.16), ved innsetning fås

$$\begin{aligned} D[f+g] &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= D[f] + D[g] \end{aligned}$$

Merk at dette beviset holder uavhengig om g, og f er positiv eller negativt. Det er derfor unødvendig å føre et bevis for $D[f-g]$, selv om det ville vært identisk med beviset ovenfor.

Likning (A.17) bevises igjen ved innsetning, dette gir

$$\begin{aligned} D[f \cdot g] &= \lim_{h\to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} + \frac{f(x+h)g(x) - f(x+h)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g(x) \cdot [f(x+h) - f(x)] + f(x) \cdot [g(x+h) - g(x)]}{h} \\ &= g(x) \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= D[f] \cdot g + D[g] \cdot f \end{aligned}$$

Hvor det kanskje mest mystiske steget er at vi legger til å trekker fra $f(x+h)g(x)$, men dette gjøres enkelt og greit fordi det fungerer. Tilsvarende kunne vi også ha lagt til $f(x)g(x+h)$ og fått samme resultatet, men dette overlates til leser.

[2] Hvor vi forter oss å påpeke at $D[f/g]$ bare eksisterer forutsatt at $g \neq 0$, for å unngå å irritere på oss kritiske matematikere.

Likning (A.18) viser vi igjen på samme måte som før, innsetning gir

$$\begin{aligned} D[f/g] &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)g(x) - g(x+h)f(x)}{g(x+h)g(x)} + \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g(x+h)g(x)}\right] \end{aligned}$$

Hvor i likhet med beviset for produktregelen så legger vi til ett ledd som er null. Dette gjøres slik at vi kan skrive om uttrykket på en luddig måte, vi har nå

$$\begin{aligned} D[f/g] &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)}\left[g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] \\ &= \frac{g \cdot D[f] - f \cdot D[g]}{g^2} \end{aligned}$$

Den siste overgangen er ikke mer enn algebraiske krumspring og omskrivninger. Disse overlater jeg til leser som en (aritg?) gymnastiskøvelse. □

Merk at bevisene ovenfor kunne vært gjort langt mer strømlinjeformet ved bruk av logaritmisk derivasjon, eller implisitt derivasjon. Men dette er begge metoder som vi ikke har lært enda. Vi kan nå ta derivasjonen av $\tan x$ som et eksempel

Eksempel A.1.1. Vis at $D[\tan x] = \sec^2 x = 1 + \tan^x$

Her vil vi bruke kvotientregelen for å vise setningen, samt de deriverte av $\sin x$ og $\cos x$. Vi har

$$D[\tan x] = D\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right] = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{(\sin x)^2 + (\cos x)^2}{(\cos x)^2}$$

Bruker vi at enhetsformelen $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ så får vi at $D[\tan x] = 1/(\cos x)^2 = (\sec x)^2$. Dersom vi i stedet deler opp utrykket og bruker at definisjonen $\tan x = \sin x/\cos x$ får vi $D[\tan x] = (\tan x)^2 + 1$.

Vi skal avslutningsvis ta et bevis for kjerneregelen, men før den tid trengs et lite hjelperesultat som er nyttig i flere sammenhenger. Merk resultatet er ikke banebrytende, men en omskrivning av definisjonen av den deriverte.

Proposisjon A.1.3. *Anta at f er deriverbar i a. Da eksisterer det en funksjon η*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \eta(h)h\,.$$

Slik at $\lim_{h\to 0}\eta(h) = 0$ *og* $\eta(0) = 0$.

Bevis. Definer funksjonen η ved

$$\eta(h) = \begin{cases} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a) & \text{når } h \neq 0 \\ 0 & \text{når } h = 0 \end{cases} \tag{A.19}$$

Siden $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$, så er $\lim_{h\to 0}\eta(h) = 0$. Løser vi likning (A.19) med hensyn på $f(a+h)$ (når $h \neq 0$), får vi

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \eta(h)h$$

og beviset er ferdig. □

Beviset er egentlig en rekkeutvikling i fåreklær og forteller oss at for små h så er $f(a+h)$ svært nær $f(a) + f'(a)h$. Dette kan for eksempel brukes til å vise

Proposisjon A.1.4. *Dersom f er deriverbar i a, er den også kontinuerlig i a.*

Bevis. Vi må vise at $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. I følge proposisjon (A.1.3) er

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0}\big(f(a) + f'(a)h + \eta(h)h\big) = f(a)$$

Dermed er setningen bevist. □

Obs: Legg merke til at det omvendte utsagnet ikke er sant. Altså dersom f er kontinuerlig, betyr dette **ikke** at f er deriverbar. Et enkelt eksempel er $f(x) = |x|$ som er kontinerlig, men ikke deriverbar i null. En har og funkskjoner og fraktaler som er kontinuerlige overalt, men ikke deriverbar noen steder[3].

Proposisjon A.1.5 (Kjerneregelen for deriverte)**.** *Anta at g er deriverbar i a og at f er deriverbar i $g(a)$. Da er den sammensatte funksjonen $h(x) = f\big(g(x)\big)$ deriverbar i a, og*

$$h'(a) = f\big(g(x)\big) \cdot g'(a)$$

Bevis. Per definisjon er

$$h'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f\big(g(a+h)\big) - f\big(g(a)\big)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(a)\big)}{x-a}$$

Lar vi nå $k = g(x) - g(a)$, så er $g(x) = g(a) + k$, og proposisjon (A.1.3) sier nå

$$\begin{aligned} f\big(g(x)\big) = f\big(g(a)+k\big) &= f\big(g(a)\big) + f'\big(g(x)\big)k + \eta(k)k \\ &= f\big(g(a)\big) + \big[f'\big(g(a)\big) + \eta(k)\big]\big[g(x) - g(a)\big] \end{aligned}$$

Hvor $\eta(k) \to 0$ når $x \to a$ (hvorfor?). Setter vi dette inn for $h'(a)$, fås

$$\begin{aligned} h'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(a)\big)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{\big[f\big(g(a)\big) + \eta(k)\big]\big[g(x) - g(a)\big]}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \big[f\big(g(a)\big) + \eta(k)\big]\frac{g(x) - g(a)}{x-a} \end{aligned}$$

I dette punktet går den første faktoren mot $f\big(g(a)\big)$, mens den andre faktoren går mot $g'(a)$. Dermed er $h'(a) = f\big(g(a)\big)g'(a)$ og beviset er ferdig. □

[3]For et pateologisk eksempel se Weierstrass funksjonen. Grunnen til bruken av ordet pateologisk, er at dette er en funksjon konstruert med det ene formålet å være kontinuerlig, men ikke deriverbar noen steder

A.2 LOGARITMER OG EKSPONONENSIALER

I denne biten skal vi komme frem til en naturlig måte å definere både eksponential og logaritmenfunksjonen. Målet er med andre ord å komme frem til en definisjon for e^x og gi en intuitiv forklaring på hvorfor

$$\log x := \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

er en god definisjon for den naturlige logaritmen. Dette gjøres ved å definere en abstrakt eksponentialfunksjon og å utlede definisjonen ovenfor. Etter vi har kommet frem til definisjonen ovenfor viser vi at funksjonen har en invers og definerer inversen som e^x. Seksjonen avrundes med en rekke oppgaver hvor en skal vise at definisjonen ovenfor tilfredsstiller de egenskapene vi forventer at logaritmefunksjonen har. Se på denne seksjonen som en øvelse, hvor du tar i bruk det du har lært etter å ha lest del I.

A.2.1 POTENSER

Før vi begynner med eksponensialfunksjonen tar vi en digresjon (som forøvrig blir en digresjon i digresjonen), for å gi ett bakteppe for den kommende definisjonen.

Kanskje startet bruken av potenser som en konsekvens av ren latskap? Det er noe kortere å skrive 2^5 enn $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ og kanskje estetisk vakrere. Uansett så er meningen klar, dersom n er et positivt heltall (som det så ofte er), og a et tall så betyr a^n

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{n\text{ganger}}$$

Når n og m er to positive heltall burde leser klare å overbevise seg selv om at

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ ganger}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m \text{ ganger}} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n+m \text{ ganger}} = a^{a+m} \tag{A.20}$$

At vi også bør definere

$$a^0 = 1 \tag{A.21}$$

faller også mer eller mindre naturlig, siden da holder likning (A.20) også når $m = 0$ eller $n = 0$. Videre definerer en $a^{1/n}$ (n'te roten til a) som det positive tallet som opphøyet i n gir a. Med andre ord

$$a^{1/n} = b \;\Leftrightarrow\; a = b^n$$

Vi blir fort enige om at $a^{m/n}$ må bety

$$a^{m/m} = a^{\overbrace{1/n + \cdots + 1/n}^{m \text{ ganger}}} = \overbrace{a^{1/n} \cdot a^{1/n} \cdots a^{1/n}}^{m \text{ ganger}} = (a^{1/m})^m$$

og en kan tilsvarende vise at $a^{m/n} = (a^{1/n})^m$ når m og n er naturlige tall. Gitt at r er et positivt tall kan vi også bli enige om at a^{-r} skal bety

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

for å være konsistent med tidligere resultater. Med dette er vi enige hva det vil si å opphøye et (positivt) tall a i en potens r, a^r så lenge r er ett rasjonalt tall. Underveis har det vært et prinsipp at likning (A.20) skal fortsette å gjelde i mer generelle former. Vi har altså

$$a^{r+s} = a^r a^s \qquad \forall\, r, s \in \mathbb{Q} \tag{A.22}$$

Men dette ber om spørsmålet hva skal $2^{\sqrt{2}}$ betyr? Merk at at det absolutt legitimt å spørre seg selv: «Hvorfor skal en gidde å bry seg om det?», du kan jo se om du klarer å kommer opp med noen gode svar selv. Hvis ikke så kan du ha det i bakhodet når du leser den påfølgende teksten.

A.2.2 Eksponensialer

Det vi har gjort over definerer hva funksjonen

$$g(u) = a^u$$

er hvis a er et positivt tall, og u er et rasjonalt tall. En måte å si det på er at definisjonsmengden til g er $D_g = \mathbb{Q}$. Vi kaller denne funksjonen *eksponentialfunksjonen* med grunntall a. Inneholdet i likning (A.20) blir da $g(u+v) = g(u)g(v)$. Når vi nå utvider g til å være definert for alle reelle tall skal vi fortsatt tviholde på likning (A.21) og (A.22) skal gjelde for generelle reelle eksponenter. Men for å få til det, blir vi nødt til å kreve litt mer av g. For eksempel *kontinuitet*. Med potenser som bakteppet lager vi følgende abstrakte definisjon:

Definisjon A.2.1. En *eksponentialfunksjon* er en *kontinuerlig* funksjon g definert for alle reelle tall ($D_g = \mathbb{R}$) som er slik at $g(0) = 1$ og

$$g(u+v) = g(u)g(v) \tag{A.23}$$

er oppfyllt for alle $u, v \in \mathbb{R}$. Dersom $g(1) = a$ sier vi at g er en eksponentialfunksjon med *grunntall* a.

La meg peke på noen enkle egenskaper ved eksponentialfunksjoner, i hele den påfølgende teksten er g selvsagt en ekspoentialfunksjon.

1. $g(nu) = g(u)^n$ for alle $u \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{N}$.

   Bevis. En enkel induksjon på n med bruk av likning (A.23). □

2. $g(u) > 0$ for alle $u \in \mathbb{R}$.

   Bevis. $g(u) = g(2 \cdot \frac{1}{2}u) = g(\frac{1}{2}u)^2 \geq 0$ Og $1 = g(0) = g(u-u) = g(u)g(-u)$, så $g(u) \neq 0$. □

3. $g(nu) = g(u)^n$ for alle $u \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{Z}$.

   Bevis. $g(-1 \cdot u) = g(u)^{-1}$ følger av forrige punkt. Så hvis $n > 0$ så blir $g(-nu) = (g(n)^n)^{-1} = g(u)^{-n}$. □

4. $g(u/n) = g(u)^{1/n}$ for alle $u \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{N}$.

5. $g(ru) = g(u)^r$ for alle $u \in \mathbb{R}$ og $r \in \mathbb{Q}$.

Beviset for de to siste punktene overlates til leseren. For de siste så skriv $r = m/n$ og kombinèr punkt 3 og (4).

Proposisjon A.2.1. *Det kan ikke finnes mer enn èn eksponentialfunksjon med et gitt grunntall a.*

Bevis. Beviset er enkelt nok. Fra punkt 4 har vi for $u = 1$ at $g(r) = g(1)^r = a^r$ for alle $r \in \mathbb{Q}$. Dersom nå g_1 og g_2 er to eksponentialfunksjoner, begge med samme grunntall a, så vil begge oppfylle likningen ovenfor. Altså $g_1(r) = g_2(r)$ for alle $r \in \mathbb{Q}$. Men to kontinuerlige funksjoner som tar samme verdier på alle de *rasjonale* tall må ta samme verdier på de reelle tallene, altså beskriver de samme funksjon. □

Vi står nå fritt til å velge en metode for å utvide definisjonen av eksponentialfunksjonen. Samme hvilken metode vi bruker, må den oppfyll betingelsene i proposisjon (A.2.1) samt definisjonen.

Det viser seg at nøkkelen til en vellykket og likefrem utvidelse viser seg å være deriverbarhet. Vi prøver å ikke bare lage en eksponentialfunksjon som ikke bare er kontinuerlig, men også deriverbar. Overraskende nok holder det å anta deriverbarhet i ett enkelt punkt: Anta nemlig at g er en eksponentialfunksjon som er deriverbar i $u = 0$, og med derivert A, det vil si at grensen

$$A = \lim_{h \to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - 1}{h} \tag{A.24}$$

eksisterer. Men da blir g deriverbar overalt, for det følger at

$$g'(u) = \lim_{h \to 0} \frac{g(u+h) - g(u)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(u)g(h) - g(u)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - 1}{h} \cdot g(u)$$

for alle $u \in \mathbb{R}$. Vi har altså vist

Proposisjon A.2.2. *Dersom en eksponentialfunksjon g er deriverbar i 0, så er også g deriverbar overalt, og*

$$g'(u) = Ag(u) \quad \textit{for alle } u \in \mathbb{R}, \ \textit{hvor } A = g'(0)\,. \tag{A.25}$$

Proposisjon A.2.3. *En deriverbar eksponentialfunksjon g oppfyller ulikheten*

$$g(u) \geq 1 + Au \qquad \textit{for alle } u \in \mathbb{R}, \ \textit{hvor } A = g'(0).$$

Ulikheten er skapr unntatt for $u = 0$ eller $A = 0$, da likhet gjelder.

Bevis. Velger å vise dette bare for $A > 0$ og $u > 0$. Vi har da

$$\frac{g(u) - 1}{h} = \frac{g(u) - g(0)}{u - 0} \overset{*}{=} g'(t) = Ag(t) > A$$

der sekantsetningen garanterer eksistensen av en t med $0 < t < u$ slik at likheten merket * holder. Den siste ulikheten følger fra at $g(u) > 0$. Det er nå lett å ordne på ulikheten og få $g(u) > 1 + Au$. De andre tilfellene overlates til leseren. □

Korollar A.2.1. *Vi har*

$$\lim_{u\to\infty} g(u) = \infty, \quad \lim_{u\to-\infty} g(u) = 0, \quad \textit{dersom } A > 0$$

De to grensene bytter plass dersom $A < 0$.

Beviset overlates til leseren. Hin: Den første grensen følger fra proposisjon (A.2.3). Den andre grensen følger av den første fordi $g(-u) = g(u)^{-1}$ (hvorfor?).

A.2.3 Logaritmer

Vi har nå vist noen enkle egenskaper til en deriverbar eksponentialfunksjon (hvis noe slikt skulle finnes), men som vi skal se viser det seg enklere å *konstruere* den inverse funksjonen (den omvendte funksjonen), også kjent som en *logaritmefunksjon*.

Fra den foregående følger det at g er strengt voksende på $\mathbb{R}_+$ og derfor har den en entydig invers f her. Forutsatt at $a = g(1) \neq 1$. (Benytt monotoniteten sammen med korollar (A.2.1) for å overbevise deg selv om det!) Ikke bare det, men den omvendte funksjonen er deriverbar. La f igjen betegne inversen til g, da har vi $g(f(x)) = x$. Ved å deriverere denne likningen får en

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

Setter vi inn $g'(u) = Ag(u)$ fra proposisjon (A.2.2) får vi

$$Ag(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

Husk at $g(f(x)) = x$. Løser vi likningen med hensyn på f' fås

$$f'(x) = \frac{1}{Ax} \tag{A.26}$$

Hvis vi ser på et lukket intervall i $\mathbb{R}_+$ har vi at $f'(x) = 1/(Ax)$ er integrerbar på intervallet (hvorfor? du kan ikke bruke at du kjenner en antiderivert til $1/x$ ennå (hvorfor ikke?)). Vi vet selvsagt også at f er en antiderivert til f'. Dermed sier analysens fundamentalsetning at

$$f(x) - f(c) = \int_c^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^x \frac{\mathrm{d}t}{At} = \frac{1}{A}\int_c^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

hvor c og x er positive tall. Vi er interessert i å finne $f(x)$. Legg merke til at likningen er sann for alle positive c. For eksempel kan vi bruke $c = 1$, og selvsagt gjøres dette valget fordi $g(0) = 1 \;\Rightarrow\; f(1) = 0$. Siden f og g er omvendte funksjoner. Alstå

$$f(x) = \frac{1}{A}\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Det aller enkleste valget her får vi ved å sette $A = 1$. Vi får da en funksjon med et navn vi kjenner fra før

Definisjon A.2.2. Den *naturlige logaritmen* er en funksjon $\log$ med definisjonsmengde $D_{\log} = \mathbb{R}_+$ som er definert ved

$$\log x := \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \tag{A.27}$$

Vi startet med nesten ingenting, og har kommet frem til en definisjon av inversen til eksponensialfunksjonen. Vi kan allerede si ganske mye om funksjonen

Proposisjon A.2.4. *Funksjonen* $\log x = \int_1^x \mathrm{d}t/t$ *har disse egenskapene:*

1. $\log 1 = 0$.
2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log x = \dfrac{1}{x}$
3. $\log xy = \log x + \log y$
4. $\log x$ *er en strengt voksende funksjon*
5. *For* $n \in \mathbb{N}$ *har vi* $\log a^n = n \log a$.
6. $\log x \to \infty$ *når* $x \to \infty$.
7. $\log \dfrac{1}{x} = -\log x$
8. $\log x \to -\infty$ *når* $x \to 0^+$
9. *For ethvert tall* $u \in \mathbb{R}$ *finnes det nøyaktig ett tall* $y \in \mathbb{R}_+$ *slik at* $\log y = u$.
10. $0 \le \log(1 + x^\alpha) \le \alpha x\,, \quad x \in \mathbb{R}_+$ *og* $\alpha \ge 1$.

Obs: Her må en passe litt på. Vi ser jo for oss at $\log x$ skal bli den inverse av en deriverbar eksponentialfunksjon, og mange av egenskapene i proposisjon (A.2.4) føler av nettopp det og egenskapene til eksponentialfunksjonen. Men dette kan vi ikke benytte oss av her, for vi holder på å konstruere eksponentialfunksjoner. Vi har enda ikke vist at de eksisterer, og spesielt kan vi jo ikke benytte oss av egenskapene til disse funksjonene – som det kunne tenkes ikke finnes – i beviset.

Legg spesielt merke til det nest siste punktet i proposisjon (A.2.4). Det sier at bildet $V_{\log}$ til $\log$ er hele tallinjen, og at $\log$ er en injektiv (en-til-en) funksjon. Dermed har $\log$ en omvendt funksjon med hele tallinjen som definisjonsområdet. (Det skal vel ikke så stor fantasi til for å se hvilken funksjon *det* er.)

Proposisjon A.2.5.

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{t} = \log|b| - \log|a| = \log\frac{b}{a}$$

hvor a *og* b *er rasjonale tall med samme fortegn.*

Merk at en ikke trenger å benytte seg av analysens fundamentalsetning for å bevise proposisjonen om en antar at a og b er positive.

A.2.4 TILBAKE TIL EKSPONENTIALFUNKSJONEN

Vi har gitt en abstrakt definisjon på hva en eksponentialfunksjon skal være for noe, vi har funnet at en deriverbar eksponentialfunksjon (om den finnes) har en omvendt funksjon som kan skrives som et bestemt integral. Vi har plukket ut den (i forfatters øyne) enkleste og kalt den resultatet $\log$. Neste post på programmet vil være å finne den inverse til $\log$, som *burde* bli en eksponentialfunksjon.

Vi gir denne et navn, nemlig $\exp$. Legg merke til at så langt er $\exp$ bare et navn! Fordi bildet til $\log$ er hele tallinjenhar vi at definisjonsmengden til $\exp$ er $D_{\exp} = \mathbb{R}$ og bildet er $V_{\exp} = \mathbb{R}_+$.

Proposisjon A.2.6. *Funksjonen* $\exp$ *er en eksponentialfunksjon. Den oppfyller*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\exp u) = \exp u$$

Bevis. Fordi $\log$ er en kontinuerlig funksjon med en positiv derivert (ikke null), vil den omvendte funksjonen $\exp$ være kontinuerlig og deriverbar.

Egenskapene 1 og 3 i proposisjon (A.2.4) gir nå henholdsvis $\exp(0) = 1$ og $\exp(u + v) = \exp(u)\exp(v)$, så betingelsene i definisjon (A.2.1) er oppfylt. Derivasjonsegenskapen følger direkte fra egenskap 2 i proposisjon (A.2.4). (Leser oppfordres til å sjekke opp detaljene.) □

Vi la ut på en reise for å generalisere konseptet om eksponentialfunksjoner, og på veien definerte vi logaritmefunksjonen som et integral. Stilig! Merk at en kunne også ha gått andre veien. Altså å tatt utgangspunkt i funksjoner som tilfredstiller $g(u + v) = g(u) + g(v)$ og funnet inversen til denne funksjonen.

Oppgaver

1. Benytt proposisjon (A.2.3) til å bestemme hva som er størst av π^e og e^π.

2. **Viktig!** Vis at $\log x$ har de ønskede egenskapene. Bevis altså alle punktene i proposisjon (A.2.4). Merk at du bør bevise punktene i tur og orden, og ikke bruke resultater du ikke har vist. For eksempel når du viser punkt 7 kan du godt benytte deg av 1, men ikke omvendt.

3. Vis proposisjon (A.2.5) for $a, b > 0$ uten bruk av analysens fundamentalsetning. Hva trengs for å vise tilfellet hvor $a, b < 0$?

4. Kan vi lage oss «logaritmefunksjoner» definert på hele tallinjen, i motsetning til bare på de positive reelle tallene? Vis at svaret er «nei». Mer spesifikt , vis at hvis f er en funksjon som har hele tallinja som definisjonsmengde, $D_f = \mathbb{R}$, og tilfredsstiller $f(xy) = f(x) + f(y)$, så må f være konstant lik null.

5. Vis at hvis g er en funksjon som har hele tallinja som definisjonsmengde $D_g = \mathbb{R}$, og tilfredsstiller $g(u + v) = g(u)g(v)$, så må enten $g(0) = 1$ eller så må g være konstant lik null.

6. Vis at dersom g_1 og g_2 er to kontinuerlige funksjoner som har hele tallinja som definisjonsmengde og som har samme funksjonsverdi for alle *rasjonale* tall, så er de samme funksjon (det vil si de har samme funksjonsverdi overalt).

Tillegg B

B.1 Riemann Integralet

I avsnitt (1.2) definerte vi integralet som en felles grense av øvre og nedre trappesummer. Denne måten å deinere integralet på går tilbake til den franske matematikeren Gaston Darboux (1842-1917), og integralet vi får på denne måten kalles stundom *Darboux-integralet* for å skille det fra andre definisjoner.

I denne seksjonen skal vi se på den klassiske definisjon som skyldes den tyske matematikeren Bernhard Riemann (1826-1866). Selv om Darboux' og Riemanns definisjoner ser forskjellige ut, skal det vise seg at de leder frem til nøyaktig det samme integralbegrepet. Fordelen med å kjenne til begge er at de egner seg til litt ulike formål – Darboux' definisjonen har en klar geometrisk profil og leder til et forholdsvis enkelt bevis for analysens fundamentalteorem, mens Riemanns definisjon er mer fleksibel og lettere å anvende i mange problemer av teoretisk og praktisk art.

Men før vi går inn på det tar vi en kort diskusjon på hvordan integrasjon bør defineres, og hvorfor Riemann integralet er en forholdsvis god definisjon

B.1.1 Hvordan bør integrasjon være definert

Analysens fundamentalteorem (1.3) sier noe om forholdet mellom derivasjon og integrasjon. Teoremet kommer i to deler, hvor første del sier noe om vi deriverer et integral, eller integrerer en derivert. For reffansens skyld sier teoremet kort sagt at

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{B.1}$$

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,\ \text{da er } G'(x) = f(x) \tag{B.2}$$

under passende restriksjoner på f. Før vi kan studerer disse likningene mer rigorøst trenger vi å bestemme en passende definisjon for $\int_a^b f$. Historisk sett ble integrasjon definert som den inverse operasjonen av derivasjon. Med andre ord, så var integralet av e funksjon f forstått til å være en funksjon F som tilfredstilte $F' = f$. Fra denne definisjonen gikk Newton og Leibniz, Fermat med fler for å utforske sammenhengen mellom antiderivasjon og å beregne arealer.

Denne fremmgangsmåten er dessverre utilfredstillende fra et matematisk perspektiv, fordi den begrenser mengden integrerbare funksjoner betraktelig.

Merk at enhver funksjon som gjør et sprang, ikke er deriverbar. Dersom vi ønsker å definere integrasjon via antiderivasjon må vi godta at selv funksjoner så enkle som

$$h(x) \begin{cases} 1 & \text{og} 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{og} 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

ikke er integrerbar på intervalet $[0, 2]$.

Et veldig interessant skifte skjedde omkring 1950 gjennom arbeidet til Cauchy, tett etterfulgt av Bernhard Riemann. Ideèn var å komplett skille integrasjon fra derivasjon og i stedet bruker begrepet «arealet under en kurve» som første byggestein i en formalisering av itnegralbegrepet. Grunnen til dette var kompliserte. På denne tiden hadde en rekke matematikkere konkurranse i å lage pedantiske funksjoner, som virkelig tøyde-funksjonsbegrepet. Her kan vi nevne erke eksempelet Weiestrass funksjonen som er kontinuerlig, men ikke deriverbar noen sted, Thomaes funksjon (en på alle de rasjonelle tallene, null ellers) eller Dirichlets funksjon (en på alle de irrasjonelle tallene, null ellers). For å takle slike funksjoner måtte integralbegrepet utvides.

Riemann integralet starter med å dele inn arealet under funksjonen i rektangler. Det er ikke vanskelig å se at tilnærmingen blir mer nøyaktig jo smalere vi gjør bredden til hvert rektangel. Når vi tar *grensen* og lar bredden gå mot null får vi Riemanns definisjon av $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Dette gir en håndfull spørsmål. Å skape en rigorøs betydning av grensen er ikke spesielt utfordrende. Hva som vil være interessant for oss – og også for Riemann – er å bestemme hvilke typer funksjoner som kan integreres ved denne prosedyren. Spesifikt hvilke betingelser på f garanterer at grensen faktisk eksisterer?

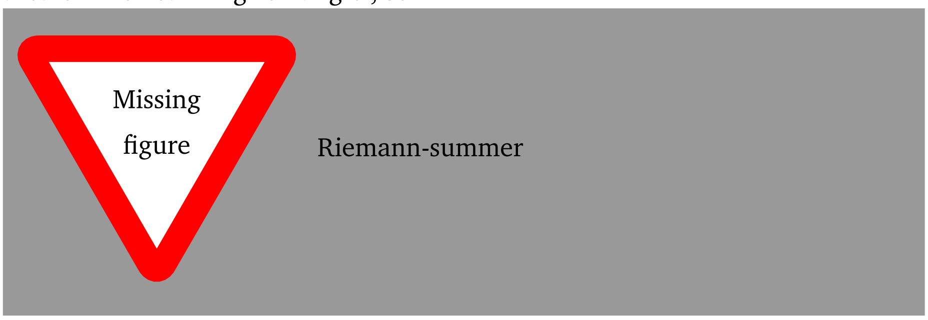
For å presentere Riemanns idè trenger vi først noen grunnleggende definisjoner.

Definisjon B.1.1. La Π være en partisjon $\Pi = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ og la U er en mengde $U = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ slik at $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ for alle i. Vi kaller U for et *utvalg* for partisjonen Π.

Definisjon B.1.2. Gitt en funksjon f, en partisjon $\Pi = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ og et utvalg $U = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ definerer vi *Riemann-summen*

$$R(\Pi, U) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

I likhet med øvre og nedre trappesummen kan Riemann-summer tolkes som arealet til en samling rektangler, se



. Legg merke til at siden $m_i \leq f(c_i) \leq M_i$, så vil Riemann-summen alltid ligge mellom nedre og øvre trappesum

$$N(\Pi) \leq R(\Pi, U) \leq Ø(\Pi)$$

Vi har allerede støtt på Riemann-summer i korollar (1.2.1) der vi så på de to valgene $c_i = x_{i-1}$ og $c_i = x_i$.

Definisjon B.1.3. Med *maskevidden* $|\Pi|$ til en partisjon $\Pi = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ skal vi mene lengden til det lengste av delintervallene $[x_{i-1}, x_i]$; altså

$$|\Pi| = \max\{x_i - x_{i-1} \colon 1| \leq i \leq n\}$$

Vi har nåd frem til Riemanns definisjon. Ideèn er at når maskevidden går mot null, må alle Riemann-summer nærme seg en felles grenseverdi, og denne grenseverdien er verdien til integralet.

Definisjon B.1.4. Funksjonen $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ er *Riemann-integrerbar* dersom det finnes et tall α slik at

$$\lim_{n\to\infty} R(\Pi_n, U_n) = \alpha$$

for alle følger $\{\Pi_n, U_n\}$ av partisjoner og utvalg slik at $|\Pi_n| \to 0$. Denne felles grenseverdien kalles *Riemann-integralet* til f over $[a, b]$.

Vi kan nå formulere teoremet som sier at Darboux' og Riemmans definisjoner bare er to måter å uttrykke det samme på. Beviset er noe kronglete, men til glede(?) for spesielt interesserte, tar vi det med til slutt i denne seksjonen.

Teorem B.1.1. *Darboux' og Riemann-integralet er det samme; en funksjon er Darboux-integrerbar hvis og bare hvis den er Riemann-integrerbar, og verdien av de to integralene er alltid den samme.*

Korollar B.1.1. *Anta at $\{\Pi_n, U_n\}$ er en følge slik at $|\Pi_n| \to 0$. Da er*

$$\lim_{n\to\infty} R(\Pi_n, U_n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Eller med andre ord

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N_n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

Hvor N_n er antall delintervaller i partisjonen Π_n.

Proposisjon B.1.1. *Anta at $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ er to integrerbare funksjoner, og at k er et reelt tall. Da gjelder:*

(i) Funksjonen kf er integrerbar, og

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(ii) Funksjonene $f+g$ og $f-g$ er integrerbare, og

$$\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

og

$$\int_a^b f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Bevis. Punkt (i). Anta at $\{\Pi_n U_n\}$ er en følge av partisjoner og utvalgt slik at $|\Pi_n| \to 0$. Det er nok å vise at Riemann-summene

$$R(\Pi_n, U_n) = \sum_{i=1}^{N_n} kf(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

til funksjonen $kf(x)$ konverger mot $k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ når $n \to \infty$ (hvorfor?). Men dette følger jo direkte

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} R(\Pi_n, U_n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N_n} kf(c_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= k \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N_n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Hvor vi brukte at $\sum_{i=1}^{N_n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ til funksjonen f konvergerer mot $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Punkt (ii). Viser bare addisjonsdelen siden beviset for subtraksjonsdelen føres identisk. Det er igjen nok å vise at

$$\lim_{n\to\infty} R(\Pi_n, U_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N_n} \big[f(c_i) + g(c_i)\big](x_i - x_{i-1})$$

til funksjonen f konverger mot $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Siden Riemann-summene $\sum_{i=1}^{N_n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ og $\sum_{i=1}^{N_n} g(c_i)(x_i - x_{i-1})$ til funksjonene f og g konverger mot henholdsvis $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ og $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, er beviset rett frem.

$$\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} R(\Pi_n, U_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N_n} \big[f(c_i) + g(c_i)\big](x_i - x_{i-1})$$

Herfra kan vi dele opp summen, slik at vi får

$$\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N_n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N_n} g(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

Siste siste leddet er jo per definisjon $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ og vi er ferdige. □

B.1.2 Analysens Fundamentalteorem

Kjært barn har mange bevis. I denne delen fører vi enda ett bevis for analysens fundamentalteorem, men nå med Riemanns integral og ikke Darboux. Dette beviser legger seg ett sted mellom ett formelt bevis, og intuitiv håndvifting. Kanskje, du som leser klarer å finne ut hvor jeg jukser? En hjørnesten i beviset er følgene setning.

Proposisjon B.1.2. (Mellomverdisetningen)
La $I = [a, b]$ være et intervall, hvor $a, b \in \mathbb{R}$. La f være en kontinuerlig reell funksjon på $[a, b]$. Dersom $k \in \mathbb{R}$ er tall slik at

$$f(a) < k < f(b) \quad \textit{eller} \quad f(a) > k > f(b)$$

da eksisterer det en konstant $a \leq c \leq b$ slik at $f(c) = k$.

At dette stemmer er ikke vanskelig å forstå. Teoremet sier at dersom vi har en kontinuerlig funksjon som har verdiene $f(a)$ og $f(b)$ i hvert endepunkt av intervallet, så tar funksjonen alle verdier mellom $f(a)$ og $f(b)$ i ett eller annet punkt i intervallet. For et bevis se for eksempel [14, thm 4.23].

Proposisjon B.1.3. (Mellomverdisetningen for integraler) *La f være en reell kontinuerlig funksjon på det lukkede intervallet $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. Da eksisterer det et reellt tall $a \leq k \leq b$ slik at*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(k)(b-a) \tag{B.3}$$

Bevis. Siden f er kontinuerlig på intervallet, følger det at den er begrenset. Altså har f både et minimum og et maksimum på intervallet. Vi definerer

$$f(m) = \min_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{og} \quad f(M) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

Vi har altså $f(m) \leq f(x) \leq f(M)$ for alle $x \in [a, b]$. Integrerer vi ulikheten fås

$$\int_a^b f(m)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(M)\,\mathrm{d}x$$

Siden $f(m)$ og $f(M)$ er konstanter kan vi dele på $b - a$ og få

$$f(m) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(M)$$

Fra mellomverdisetningen (B.1.2) har vi nå at det eksisterer en $a \leq k \leq b$ slik at

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(k)$$

Å gange likningen med $b - a$ fullfører beviset. □

Teorem B.1.2. (Analysens fundamentalteorem. - Del I)
La f være en kontinuerlig funksjon på $[a, b]$. Funksjonen g definert som

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

er da kontinuerlig på $[a, b]$, deriverbar på (a, b) og $g'(x) = f(x)$ for alle $x \in (a, b)$.

Her betegner integralet som vanlig arealet under funksjonen $f(x)$ fra a til x.

Bevis. Siden f er kontinuerlig og øvre begrenset så er også g kontinuerlig og øvre begrenset. Den deriverte av g kan da skrives som følgende grense

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \tag{B.4}$$

Vi kan skrive om teller som følger

$$g(x+h) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Siden vi har at

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Som er intuitivt fra at vi legger sammen to områder ved siden av hverandre, dette kan vises via Riemann (B.1.1) eller Darboux summer (2.2.1). Likning (B.4) blir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Tanken er nå at vi bruker mellomverdisetningen for integraler til å skrive om uttrykket. Direkte bruk av likning (B.3) fra proposisjon (B.1.3) gir da

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} f(k)[(x+h) - x] = \lim_{h \to 0} f(k)$$

For å fullføre beviset må vi bestemme k, for husk at k er avhengig av hva x er. Fra definisjonen så er $x \leq k \leq x + h$, slik at når $h \to 0$ så vil $k \to x$. Altså så er

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = f(x) \tag{B.5}$$

som var det vi ønsket å vise. $\square$

B.1.3 Darboux og Riemann integralet

Tillegg C

C.1 Konvergens

Når vi studerer integraler er spørsmålet om integralet har en verdi, minst like viktig som selve svaret. Hva er konvergens og hva menes med at integralet har en verdi?

Definisjon C.1.1. Et uegentlig integral er et integral som skrives på formen

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ , \qquad \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

eller på formen

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ , \qquad \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

Hvor grenseverdiene $f(x)$ enten er udefinert, eller går mot $\pm\infty$. En sum av uegentlige integral, er også uegentlig.

Definisjon C.1.2. Et integral kalles konvergent, dersom det kan skrives som en endelig verdi. Alle integral som ikke er konvergent, kalles divergente.

Eksempel C.1.1. For motivasjon studeres følgende integral

$$\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$$

vi velger å ignorere diskusjonen omkring integralet konverger eller ikke[1] og regner blindt ut integralet.

$$\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \Big[\log|x-1|\Big]_0^2 = \log|-1| + \log|1| = 0$$

Dette virker noe rart om en studerer grafen til funksjonen vist i figur 8. Da funksjonen klart blåser opp nære $x = 1$.

Så funksjonen ovenfor konvergerer, men vi vil gjerne skille mellom ulike typer konvergens. Vi har for eksempel Rieman-integrerbare funksjoner, Lebesgue-Integrerbare funksjoner osv. Funksjonen ovenfor konvergerer om en betrakter prinsipial verdien av integralet, men divergerer ellers. Om vi sier at en funksjon er integrerbar, vil betydningen alltid være at funksjonen er Rieman-integrerbar.

[1] Siden vi ikke engang har diskutert hva konvergens er engang!

Definisjon C.1.3. Et uegentlig integral konvergerer hvis og bare hvis integralet kan skrives som en sum av uegentlige integral, som alle konvergerer.

Ved å bruke denne definisjonen av konvergens på integralet i eksempel (C.1.1) så må både

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x-1} \quad \text{og} \quad \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$$

konvergere. Teknikken er altså å bryte opp integralet i interval (a, b) hvor kun en av grenseverdiene $\lim_{x\to a} f(x)$ eller $\lim_{x\to b} f(x)$ ikke eksisterer. I tilleg til at $f(x)$ er øvre begrenset på $[a, b]$.

Hvorfor vi velger å definere konvergens på denne måten gir mer mening når vi studerer begrepet uendelig nærmere. Uendelig er ikke noe tall, men noe vi reiser mot og aldri helt når. For å slippe hodeverk bør gjerne hastigheten på hvor raskt vi reiser ikke ha noe å si, siden vi uansett aldri kommer helt frem.

Eksempel C.1.2. La oss betrakte om følgende integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

konvergerer eller divergerer. Fra diskusjonen ovenfor er måte å studere hvordan integralet oppfører seg når vi går mot uendelig i ulikt tempo.

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \frac{2x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty} \Big[\log\left|1+x^2\right| \Big]_{-a}^{a} = 0\,.$$

Derimot om vi lar funksjonen vokse 'dobbelt' så raskt mot uendelig fås

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{2a} \frac{2x\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty} \Big[\log\left|1+x^2\right| \Big]_{-a}^{2a} = 2\log 2\,.$$

vi kan dermed konkludere med at integralet er udefinert da det er avhengig av 'hastigheten'

Dette problemet med hastigheter løses dersom en deler opp integralet i uegentlige integral. Slik at hvert integral bare har en singularitet.

P-integral

Proposisjon C.1.1. *Integralet* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ *divergerer for alle relle eller komplekse* p *mens*

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}\ ,\ p<1 \quad \textit{og} \quad \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}\ ,\ p>1$$

konvergerer.

Bevis. Dersom $p < 1$ så er

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \left[\frac{1}{1-p} x^{p-1} \right]_0^1 = \frac{1}{1-p} \lim_{x\to 0} \left(1 - c^{1-p}\right) = \frac{1}{1-p}$$

og likeledes så er

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{1}{1-p} \lim_{c\to\infty} \left(1 - c^{1-p}\right) = \infty$$

Deretter studeres tilfellet når $p > 1$ så

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim_{c\to 0} \left[\frac{1}{1-p} x^{p-1}\right]_c^1 = \frac{1}{1-p} \lim_{c\to 0} \left(1 - \frac{1}{c^{p-1}}\right) = \infty$$

og likeledes så er

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{1}{1-p} \lim_{c\to\infty} \left(1 - c^{1-p}\right) = \frac{1}{1-p}$$

Siden $(0,1)$ konvergerer for $p < 1$ og $(1,\infty)$ konvergerer for $p > 1$, så kan ikke $(0,\infty) = (0,1) \cup (1,\infty)$ konvergere når $p < 1$ eller $p > 1$. Da gjennstår det bare å teste tilfellet hvor $p = 1$.

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{x\to 0}(-\log x) + \lim_{x\to\infty} \log x = \infty$$

som begge divergerer. Dette fullfører beviset. □

Dette resultatet er svært nyttig når vi bruker det i kombinasjon med sammenliknings testen.

Proposisjon C.1.2. (Sammenliknings Testen) *La $f(x)$ og $g(x)$ være to funksjoner definert på (a,b) slik at*

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

er sant for alle $x \in [a,b]$. Dersom

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

konvergerer så konvergerer integralet over $f(x)$. Dersom integralet over $g(x)$ divergerer så divergerer integralet over $f(x)$.

Eksempel C.1.3. La oss se om følgende integral konvergerer

$$\int_0^\infty \frac{(\sin x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

dersom $x \geq 1$ så har vi at

$$\frac{(\sin x)^2}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

dermed har vi fra p-testen at integralet ovenfor konvergerer siden $p = 2 > 1$. Dersom $0 \leq x < 1$, kan vi stedet bruke følgende sammenlikning

$$\frac{(\sin x)^2}{x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

ved å gange med x^2, på begge sider så har en at $(\sin x)^2 \leq x^{3/2}$. Dette stemmer siden $\sin x \leq x \leq x^{3/2}$, for $x \geq 0$ som en for eksempel kan se fra taylorrekken til $\sin x$. Dermed konvergerer integralet fra sammenlikningstesten og vi har

$$0 \leq \int_0^\infty \frac{(\sin x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} + \int_0^\infty \frac{1}{x^2} = 3$$

som er en fin tilnærming.

En kunne fint ha fått enda strammere grenser ved å se på taylorrekken til $(\sin x)^2/x^2$, men det er helt uviktig. Legg merke til at metoden ovenfor ikke kan brukes for å vise at $(\sin x)/x$ konvergerer, selv om integralene har samme verdi.

Proposisjon C.1.3. (Grensesammenliknings Testen)
La f og g enten være to strengt positive eller strengt negative funksjoner på $[a, b]$ og la funksjonene være udefinert i punktet a. Dersom $g(x) \sim f(x)$ når $x \sim a$ så konvergerer

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \textit{ hvis og bare hvis } \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \textit{ konvergerer.}$$

Hvor $g(x) \sim f(x)$ når $x \sim c$ betyr at $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = 1$. Begge testene ovenfor krever at funksjonene f og g ikke skifter fortegn på intervalet. Så det er logisk å lure på hvordan en skal behandle integraler som ikke er strengt positive eller negative. En måte å tvinge en funksjon til å være positiv på er å ta absoluttverdien. Det er klart at både $f(x)$ og $|f(x)|$ har samme singulariter så et naturlig spørsmål er hvilken konklusjon vi kan trekke om $\int_a^b f(x)$, dersom vi vet noe om integralet $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ konvergerer, eller divergerer. Et delvis svar på spørsmålet er gitt i følgende proposisjon

Proposisjon C.1.4. *La $f(x)$ være en funksjon dersom integralet*

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

konvergerer, så konvergerer også integralet

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Merk at det kontrapositive ikke stemmer! Dersom integralet $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ divergerer betyr dette *ikke* at $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ divergerer. Et eksempel på dette er vist under

Dirichlet integralet

Lemma C.1.1. *La f være definert som følger*[2]

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \textit{dersom} \quad x \neq 0 \\ 0 & \textit{ellers} \end{cases},$$

[2]Det er i utgangspunktet ingen grunn til å definere f slik, da integralet $\int_0^\infty (\sin x)/x\,\mathrm{d}x$ er Riemann-integrerbart. Derimot er fordelen ved å definere f slik at funksjonen blir kontinuerlig, deriverbar.

da konvergerer integralet $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$ *men* <u>*ikke*</u> *absolutt.*

Bevis. Først kan en legge merke til at integralet er symmetrisk omkring origo $f(-x) = f(x)$, slik at det holder å betrakte $(0, \infty)$.

Første del av beviset vil gå ut på å vise at funksjonen ikke konvergerer absolutt, og deretter vise at $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, konvergerer. Vi betrakter først integralet av funksjonen over et endelig interval

$$\int_0^N \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x\,,$$

La nå $N \in \mathbb{N}$, da er

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi N} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{N-1} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \\
&\geq \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} |\sin x|\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi(n+1)} \int_0^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

som klart divergerer når $N \to \infty$. Dette viser at integralet *ikke* konvergerer absolutt. Å bruke testene ovenfor i kombinasjon med p-integralene er det som vil bli brukt for å vise de aller fleste integralene konvergerer.

Men dette integralet krever litt mer triksing. Trikset i denne oppgaven blir å atter en gang vende tilbake til delvis integrasjon. Vi deler igjen integralet ved $x = 1$

$$\int_1^N \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{\cos x}{x}\Big]_1^N - \int_1^N \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \cos(1) - \frac{\cos N}{N} - \int_1^N \frac{\cos x}{x^2}$$

som konvergerer når $N \to \infty$. For å vise at siste integral konvergerer kan en bruke p-testen med x^2 siden $\cos x/x^2 \leq 1/x^2$ når $x \geq 1$. Tilfellet Når $x \sim 0$ så er $\sin x \sim x$ så $(\sin x)/x \sim 1$. Så

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 1\,\mathrm{d}x$$

dette følger fra grensesammenlikningstesten og medfører konvergerens. Dette medfører også at integralet konvergerer. $\square$

At integralet ovenfor konvergerer har med flere ting å gjøre. Først så blåser ikke integralet opp nære origo da $(\sin x)/x \leq 1$ for $|x| < 1$. Faktisk så er $(\sin x)/x \leq 1\,\forall\, x \in \mathbb{R}$, siden $1/x$ 'drar' funksjonen mot null.

Funksjonen $\sin x$ bidrar til at funksjonen oscillerer over og under x-aksen, og det er kanseleringen av disse områdene som bidrar til at funksjonen konvergerer. Når en ser på absoluttverdien av funksjonen får en derimot ikke disse kanseleringene. I alle eksemplene tidligere har vi sett på funksjoner som går mot 0 når

$x \to \infty$. At dette alltid er tilfellet for konvergente integral er feil. Det eksisterer altså funksjoner hvor $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ikke eksisterer – eller går mot en verdi ulik null – men $\int_k^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergerer.

Fresnell integralene

Lemma C.1.2.

$$\textit{Integralene } S(x) = \int_0^x \sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t\,,\ C(x) = \int_0^x \cos\left(t^2\right)\mathrm{d}t \textit{ konvergerer } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lemma C.1.3.

$$\textit{Integralene } \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x \textit{ og } \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(x^2\right) \textit{ konvergerer.}$$

Å forstå hvorfor $\int_{\mathbb{R}} \sin x^2 \,\mathrm{d}x$ konvergerer og ikke $\int_{\mathbb{R}} \sin x \,\mathrm{d}x$ er ikke så veldig vanskelig. For $\sin(x^2)$ har funksjonen et en topp over x-aksen, også en bunn under x-aksen. Arealet av disse toppene og bunnene blir mindre og mindre når $x \to \infty$. Dette er ikke tilfellet for $\sin x$ som oscillerere med samme hastighet hele tiden. Fra den alternerende rekketesten konvergerer altså integralet over $\sin(x^2)$, men ikke $\sin x$.

Vi kommer kun til å bevise lemma (C.1.3) siden dette også beviser lemma (C.1.2). Selv om det er rett frem å vise at $S(x)$ og $C(x)$ konvergerer siden en integrerer en begrenset funksjon over et endelig interval.

Bevis. Funksjonene er symmetrisk omkring origo, så holder det å betrakte integralene over $(0, \infty)$. Her vil vi bare vise at integralet over $\sin(x^2)$ konvergerer, men et nøyaktig likt bevis kan føres for $\cos(x^2)$. Alternativt kan en vise først at integralene er like store, slik at det holder å vise at ett av integralene konvergerer.

$$\int_0^\infty \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x + \int_1^\infty \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x$$

Funksjonen er integrerbar på intervalet $[0, 1]$, den blåser ikke opp og har ingen singulariteter. Vi må altså vise at integralet

$$\lim_{N\to\infty} \int_1^N \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x\,,$$

konvergerer. Ved å bruk substitusjonen $t = x^2$, så $x = \sqrt{t}$ og $2\sqrt{t}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ får en

$$\int_1^N \sin\left(x^2\right)^2\mathrm{d}x = \int_1^{N^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = -\frac{\cos N^2}{2\sqrt{N}} + \frac{\cos 1}{2} - \frac{1}{4}\int_1^{N^2} \frac{\cos t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$$

siste integralet kjenner vi igjen. Ved å sammenlikne med p-integralene ser vi at integraler konvergerer, siden $3/2 > 1$ og $\cos t/t^{3/2} \leq 1/t^{3/2}$. □

Γ-funksjonen

Lemma C.1.4. $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ *konvergerer for alle* $x \in (0, \infty)$

Bevis. Først så deler vi integralet i

$$\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

og det neste steget er å vise at de uegentlige integralene på høyre side konvergerer. Fremmgangsmåten blir å finne en funksjon $f(t)$ slik at $0 \leq t^{x-1}e^{-t} \leq f(t)$, og vise at integralet over $f(t)$ er konvergerer.

For det første integralet så er $e^{-t} \leq 1$ for $t \geq 0$, slik at

$$0 \leq \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \leq \lim_{c\to 0}\int_c^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \lim_{c\to 0}\left[\frac{t^x}{x}\right]_c^0 = \lim_{c\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{c^x}{x}\right).$$

Dersom $x > 0$, så vil $a^x \to 0$ når $a \to 0^+$, så integralet konvergerer mot $1/x$. Dette viser at integralet over $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ konvergerer.

For det neste integralet vil vi bruke at $\lim_{t\to\infty} t^r e^{-t/2} = 0$ for alle $r \in \mathbb{R}$. Altså for $x > 0$ eksisterer det en $k_x \in \mathbb{R}$ slik at $0 \leq t^x e^{-t/2} \leq 1$ for $t \geq k_x$. Vi holder x konstant og deler integralet ved k_x

$$\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{k_x} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_{k_x}^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Det første integralet på høyre side er over et endelig interval og har ingen singulariter på intervalet, altså konvergerer integralet. For det neste har vi at $t \geq k_x$ slik at $t^{x-1}e^{-t} = (t^{x-1}e^{-t/2})e^{-t/2} \leq e^{-t/2}$, så

$$\int_{k_x}^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \leq \int_{k_x}^\infty e^{-t/2}\,\mathrm{d}t = \lim_{c\to\infty}\left(2e^{-k_x/2} - e^{-c/2}\right) = 2e^{-k_x/2}\,.$$

Merk at uansett hva k_x er så konvergerer integralet. Dette viser at det andre integralet er konvergent, så $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ konvergerer. Dette fullfører beviset. □

Betaintegralet

Lemma C.1.5. $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ *konvergerer for alle* $x, y \in (0,\infty)$

Bevis. Slik som beviset for konvergens av gammaintegralet deles integralet opp

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t + \int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

For det første integralet merk at $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \leq t^{x-1}$ for $0 \leq t \leq 1/2$, så

$$0 \leq \int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{1/2} t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \lim_{c\to 0}\left(\frac{(1/x)^x - c^x}{x}\right)$$

Nå, dersom $x > 0$ så vil $a^x \to 0$ når $a \to 0^+$, så det første integralet konvergerer dersom $x > 0$. Tilsvarende for det neste integralet så er $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \leq (1-t)^{y-1}$ for $1/2 \leq t \leq 1$ så

$$0 \leq \int_0^{1/2} (1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{1/2} (1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \lim_{c\to 1^-}\left(\frac{(1/2)^y - (1-c)^y}{x}\right)$$

Nå, dersom $y > 0$ så vil $(1-a)^y \to 0$ når $a \to 1^-$, så det første integralet konvergerer dersom $y > 0$. Dermed så konvergerer $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ for alle $x, y > 0$ som var det som skulle vises. □

C.1.1 Konvergensradius

C.1.2 Prinsipal verdi

Cauchys prinsippielle verdi (Cauchy principal value) er en måte å gi en verdi til integralet som i utganspunktet divergerer.

C.2 Funksjonalanalyse

Lemma C.2.1. *Anta f_n er en funksjonsfølge definert på en åpen delmengde D av $\mathcal{C}$. Dersom f_n konvergerer uniformt på ethvert kompakt (lukket og begrenset) undermengde av D til grensefunksjonen f, da er f analytisk på D. Videre så er sekvensen av deriverte f_n' konvergerer også uniformt mot f' på enhver komptakt undermengde av D.*

Lemma C.2.2. (Derivasjon under integraltegnet) *La D være en åpen mengde og la γ være en kontur av endelig lengde $L(\gamma)$. Anta $\varphi : \{\gamma\} \times D \to \mathbb{C}$ er en kontinuerlig funksjon, og definer $g : D \to \mathbb{C}$ ved*

$$g(z) = \int_\gamma \varphi(w, z)\,\mathrm{d}w$$

Da er g kontinuerlig. Videre dersom $\partial\varphi/\partial z$ eksisterer og er kontinuerlig på $\{\gamma\} \times D$ da er g analytisk med derivert

$$g'(z) = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\varphi(w, z)\,\mathrm{d}w$$

Korollar C.2.1. *La D være en åpen mengde og $\varphi : [a, \infty] \times D \to \mathbb{C}$ være en funksjon med kontinuerlig partiellderiverte $\partial\varphi/\partial z$. Dersom integralet*

$$g(z) = \int_\gamma \varphi(w, z)\,\mathrm{d}w$$

konvergerer uniformt på en kompakt delmengde av D, da definerer det en analytisk funksjon på området og har deriverte

$$g'(z) = \int_\gamma \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\varphi(w, z)\,\mathrm{d}w$$

Lemma C.2.3. (Produkt representasjonen av $\Gamma(s)$)

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}\,\mathrm{d}t$$

dersom $s = it + \sigma$, hvor $\sigma > 0$ og $t \in \mathbb{R}$.

Bevis. Vi innfører funksjonen

$$f_n(s) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}\,\mathrm{d}t$$

og ønsker å vise at $F(s) - f_n(s)$ går mot null, når $n \to \infty$. Vi kan skrive

$$\Gamma(s) - f_n(s) = \int_0^n \left(e^{-t}\left(1 - t/n\right)^n\right) t^{s-1}\,\mathrm{d}t + \int_n^\infty e^{-t} t^{s-1}\,\mathrm{d}t\,, \tag{C.1}$$

og ser at siste leddet går mot null når n vokser. Det virker rimelig at første ledd og går mot null siden første ledd blir mindre og mindre. Tanken er nå at vi ønsker å vise at

$$0 \le e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \le n^{-1}t^2 e^{-t}\,. \tag{C.2}$$

Dersom denne ulikheten stemmer så kan likning (C.1) skrives som

$$\left|\Gamma(s) - f_n(s)\right| \leq \frac{1}{n}\int_0^n e^{-t}t^{\sigma+1}\,\mathrm{d}t < \frac{1}{n}\Gamma(\sigma+2)$$

som følger fra ulikheten ovenfor. Dette uttrykket går mot null når $n \to \infty$ siden $\Gamma(\sigma+2)$ er endelig. Altså konvergerer $f_n(s)$ uniformt mot $\Gamma(s)$ som ønsket.

For å vise likning (C.2) tar vi utgangspunkt i at for $0 \leq y \leq 1$ så har vi $1 + y \leq e^y \leq (1-y)^{-1}$. For store n kan vi sette $y = t/n$, slik at

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{-n}$$

hvor vi også opphøyde ulikheten i n, så $(e^{-t/n})^n = e^{-t}$. Vi skriver om venstresiden av ulikheten ytterligere

$$\begin{aligned} 0 \leq e^{-t} - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n &= e^{-t}\left(1 - e^t\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n\right) \\ &\leq e^{-t}\left(1 - e^t\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \\ &= e^{-t}\left(1 - e^t\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right) \end{aligned}$$

Det neste steget blir å bruke at dersom $0 \leq a \leq 1$ så er $(1-a)^n \geq 1 - na$, gitt at $na < 1$. Lar vi $a = t^2/n^2$ så har vi for store n

$$1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \leq \frac{t^2}{n}$$

Dermed så har vi

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq n^{-1}t^2e^{-t}$$

og dette fullfører beviset. □

Proposisjon C.2.1. Γ*-funksjonen definert som*

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}\,\mathrm{d}t\,,$$

er analytisk for alle $\sigma > 0$.

Bevis. Først legger vi merke til at for $a > 0$ så er funksjonen $\int_a^\infty e^{-t}t^{s-1}\,\mathrm{d}t$ analytisk. For å vise dette må vi bare vise at funksjonen konvergerer unfomormt på enhver kompakt undermengde av D. Deretter kan vi bruke korollar (C.2.1) siden alle de andre vilkårene er tilfredstilt. Som forventet så dominerer eksponensialen integralet for store n

$$\left|\int_a^n e^{-t}t^{s-1}\,\mathrm{d}t - \int_a^\infty e^{-t}t^{s-1}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_n^\infty e^{-t}t^{s-1}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_n^\infty e^{-t}t^{\sigma-1}\,\mathrm{d}t$$

Funksjonen $e^{-t/2}t^{\sigma-1}$ er øvre begrenset av, som vi kan se ved å derivere og se på ekstrema. Merk at ekstrema ikke befinner seg i noen av endepunktene. Dette medfører at vi kan skrive

$$|f_n - f| \leq \max\left(e^{-t/2}t^{\sigma-1}\right)\int_n^\infty e^{-t/2}\,\mathrm{d}t \leq 2C(\sigma)e^{-n/2}$$

Hvor vi ikke bryr oss om hva C er, bare at den avhengier av σ og ikke n. Slik at når $n \to \infty$ så vil $|f_n - f| = 0$, som er selve definisjonen på uniform konvergens. Dette holder bare for $n \geq 1$, og vi ønsker å vise at funksjonen er analytisk for $\sigma \in (0, \infty)$. Vi definerer følgende funksjon

$$f_n(s) = \int_{1/n}^\infty e^{-t}t^{s-1}\,\mathrm{d}t$$

Ved argumentet ovenfor så er hver f_n analytisk. Anta at $\sigma \geq c \geq 0$. For $0 < t \leq 1$ så har vi $e^{-t} < 1$ og $t^{\sigma-1} \leq t^{c-1}$. Altså for $n > m$,

$$\left|\int_{1/n}^{1/m} e^{-t}t^{s-1}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{1/n}^{1/m} t^{c-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{m^a} - \frac{1}{n^a}\right)$$

Vi må nå vise at uttrykket ovenfor går mot null. Gitt $\varepsilon > 0$ så kan vi alltid velge $0 \leq \delta \leq 1$ slik at $(m^{-a} - n^{-a})/c \leq \epsilon$ når $\left|m^{-1} - n^{-1}\right| \leq \delta$. Altså tilfredstiller f_n Cauchys betingelse for uniform konvergens på en kompakt undermengde av det positive halvplanet $\sigma > 0$. Fra lemma (C.2.1) følger det at Γ-funksjonen er analytisk for $\sigma > 0$. $\square$

C.3 BOHR-MULLERUP THEOREMET

Beviset her baserer seg på Rudin's bevis [14, thm. 8.19] og hele kapitel 4 fra [3] se spesielt theorem 4.4. Før vi beviser theoremet trengs et lite lemma

Lemma C.3.1. *La $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ være en konveks funksjon, da holder*

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \frac{f(u) - f(s)}{u - s} \leq \frac{f(u) - f(t)}{u - t}$$

for alle $u, t, s \in (a, b)$ slik at $a < s < t < u < b$.

Bevis. La $a < s < t < u < b$ da er

$$f(\lambda s + (1 - \lambda)) \leq \lambda f(s) + (1 - \lambda) f(u) \tag{C.3}$$

siden f er konveks. Vi lar $\lambda = \frac{u-t}{u-s}$ slik at $t = 0, \lambda = 0$ og $t = s, \lambda = 1$. Da er

$$\lambda s + (1 - \lambda)u = \lambda(s - u) + u = \left(\frac{t - u}{u - s}\right)(u - s) + u = t$$

Fra dette følger det at likning (C.3) kan skrives som

$$f(t) \leq f(u) + \frac{u - t}{u - s}\big(f(s) - f(u)\big) \tag{C.4}$$

Ved å bruke at $\frac{u-t}{u-s} = 1 + \frac{s-t}{u-s}$ i likningen ovenfor får vi

$$f(t) \leq f(s) + \frac{s - t}{u - s}\big(f(s) - f(u)\big) \tag{C.5}$$

Ved å dele på $s - t$ kan likning (C.4) skrives på formen

$$\frac{f(u) - f(s)}{u - s} \leq \frac{f(u) - f(t)}{u - t} \tag{C.6}$$

Tilsvarende så kan vi skrive om likning (C.5) ved å dele ulikheten på $s - t$,

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \frac{f(u) - f(s)}{u - s} \tag{C.7}$$

altså så er

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \frac{f(u) - f(s)}{u - s} \leq \frac{f(u) - f(t)}{u - t}$$

som var det vi ønsket å vise. □

Teorem C.3.1. (Bohr–Mollerup) *Gitt en funksjon $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ som tilfredstiller*

1. $f(1) = 1$
2. $f(x + 1) = x f(x)$
3. $\log f$ *er konveks.*

Da følger det at $f(x) = \Gamma(x)\ \forall\ x \in (0, \infty)$.

Bevis. Vi vet allerede at $\Gamma(s)$ tilfredstiller punkt 1 til 3, og det gjennstår å vise at $f(x)$ er unikt definert utifra disse restriksjonene. I tillegg er det fra 2 nok å se på tilfellet hvor $x \in (0, 1)$.

Vi innfører funksjonen $\varphi = \log f$. Punkt 1 sier at $\varphi(1) = 0$, punkt 2 gir at

$$\varphi(x+1) = \varphi(x) + \log x \tag{C.8}$$

mens punkt 3 betyr at φ er konveks. La $x \in (0, 1)$, og la $n \in \mathbb{N}$. Vi bruker oss nå av første del av lemma (C.3.1), og setter $s = n$, $t = n+1$ og $u = n+1+x$ i likning (C.6)

$$\varphi(n+1) - \varphi(n) \leq \frac{\varphi(n+1+x) - \varphi(n+1)}{x}$$

Tilsvarende ved å sette inn $s = n+1$, $t = n+1+x$ og $u = n+2$ i likning (C.6) gir

$$\frac{\varphi(n+1+x) - \varphi(n+1)}{x} \leq \varphi(n+2) - \varphi(n+1)$$

Likning (C.8) sier nå at $\varphi(n+1) - \varphi(n) = \log n$, og i tillegg ved å bruke 2 har vi $\varphi(n+2) - \varphi(n+1) = \log(n+1)$. Vi kan kombinere ulikehetene til

$$\log n \leq \frac{\varphi(n+1+x) - \varphi(n+1)}{x} \leq \log(n+1) \tag{C.9}$$

Ved å bruke **??**, $n+1$ ganger på $\varphi(n+1+x)$ så får vi

$$\begin{aligned}
\varphi(x+n+1) &= \varphi(x+n) + \log(x+n) \\
&= \varphi(x+n-1)\log(x+n) + \log(x+n-1) \\
&\vdots \\
&= \varphi(x) + \log\big[(x+1)(x+n-1)\cdots(x+1)x\big]
\end{aligned}$$

Ved å sette $x = 0$ i utledningen ovenfor vår vi også $\varphi(n+1) = \log n!$ siden $n \in \mathbb{N}$. Vi kan nå skrive om likning (C.9)

$$\log n \leq \frac{\varphi(x) + \log\big[(x+1)(x+n-1)\cdots(x+1)x\big] - \log n!}{x} \leq \log(n+1)$$

Det neste steget blir å gange ulikheten med x, som er gyldig siden $x \in (0, 1)$ og å trekke fra $\log(n^x)$ fra hvert ledd

$$\begin{aligned}
0 \leq \varphi(x) + \log\big[(x+1)(x+n-1)\cdots(x+1)x\big] - \log n! - \log n^x \\
\leq \log(n+1)^x - \log n^x
\end{aligned}$$

Ved å forenkle likningen ovenfor får en

$$0 \leq \varphi(x) - \log\left[\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right] \leq x\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Dette uttrykket holder for alle n og ved å nå la $n \to \infty$ får vi

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \log\left[\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right] \tag{C.10}$$

siden $\log(1+1/n) \to \log 1 = 0$. Ved å ta $\exp$ på begge sider av likning (C.10) fås

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right]$$

siden $e^{\varphi(x)} = f(x)$. Dette viser at funksjonen f har en unik representasjon, det eksisterer altså bare en funksjon som tilfredstiller punkt 1 til 3. Siden vi vet at Γ-funksjonen også tilfredstiller punkene, må $f(x) = \Gamma(x)$. Dette fullfører beviset. $\square$

C.4 NULLPUNKTER

Denne seksjonen kommer ikke til å fokusere ekstremt sterkt på å finne den eksakte plasseringen av nullpunkt, men heller å fokusere på området røttene kan og ikke kan ligge i.

Husk at røttene til polynomer alltid kommer i komplekse par. Så dersom $a + bi$ er en rot, så er også $a - bi$ en rot.

Teorem C.4.1. Roches *La $D \in \mathbb{C}$ være et begrenset området med en stykkevis glatt rand ∂D. La $f(z)$ og. $h(z)$ være analytiske på $D \cup \partial D$. Dersom $|h(z)| < |f(z)|$ for $z \in \partial D$, da har $f(z)$ og $f(z) + h(z)$ like mange nullpunkt på D.*

Eksempel C.4.1. La oss bruke theoremet til å bestemme hvor mange nullpunkt $p(z) = z^6 + 9z^4 + 4$ i enhetsdisken. Vi ønsket å utrykke $p(z)$ på formen

$$p(z) = A(z) + b(z)\,,$$

hvor $A(z) > b(z)$ på området, og hvor det er enkelt å finne ut antall nullpunkt til $A(z)$. Vi kan her bruke $9z^4$, siden funksjonen har 4 nullpunkt på enhetssirkelen, da må $b(z) = p(z) - A(z) = z^6 + 4$. Maksimalverdien til funksjonene på randen er $|b| = |z^6 + 4| > |z|^6 + 4 = 5$, og $|A| = |9z^4| > 9|z|^4 = 9$, siden randen er $|z| = 1$.

Fra dette følger det at A har fire nuller på enhetssirkelen, så $A(z)+b(z) = p(z)$ har og fire nuller. De to siste nullene ligger da utenfor, og er komplekskonjugerte.

Korollar C.4.1. *$P(x)$ er et irreducibelt polynom av grad n, og la*

$$R = 1 + |a_n|^{-1} \max\{\,|a_0|,\,|a_1|,\ldots,a_{n-1}\}$$
$$r = \frac{|a_0|}{|a_0| + \max\{\,|a_1|,\,|a_2|,\ldots,a_{n-1}\}}$$

da ligger alle røttene til $P(z_k) = 0$ i intervalet $r \leq z_k \leq R$.

Ved å bruke korolaret på forrige eksempel får en at

$$R = 10\,,\quad \text{og} r = 4/13$$

i seg selv gir ikke dette et spesielt bra estimat på hvor røttene ligger. Men i kombinasjon med forrige eksempel så vil 4 av røttene ligge i området $4/13 < z_k < 1$.

Eksempel C.4.2. Som et siste eksempel ønsker vi å studere polynomet polynomet $f(z) = 2z^5 + 6 * z - 1$. Målet er å vise at polynomet har en rot på intervalet $0 < x < 1$, og fire røtter i annulusen $\{1 < z < 2\}$.

Vi velger først å vise at alle røttene ligger har $|z| < 2$. Bruker vi korollar (C.4.1), får vi at røttene ligger i intervalet $\{1/7 < z < 4\}$ som ikke hjelper stort her. La heller $2z^5 = A(x)$, da er $A(x) > b(x) = 6z - 1$ når $z = |2|$, siden $|A(z)| = |2z^5|| = 2 \cdot 2^5 = 64$, mens $b(z) = |6z - 1| \leq 13$. Dermed så har $A(z) + b(z) = f(z)$ fem nullpunkter for $|z| < 2$.

For å vise neste punkt viser vi at $|z| < 1$, har nøyaktig et nullpunkt når $|z| < 1$ og deretter at $0 < x < 1$. La nå $A(z) = 6z$ og $b(z) = 2z^5 - 1$. På sirkelen $|z| = 1$ så er $A(z) = |6z| = 6$, mens $|b(z)| = |2z^5 - 1| \leq 3$. Dermed så har $A(z)$ og $A(z) + b(z) = f(z)$ begge ett nullpunkt i enhetsdisken.

For å bestemme hvor dene roten ligger brukes skjærringssetningen. Nå er $f(0) = -1$ og $f(1) = 7$, og siden f er et polynom er funksjonen kontinuerlig på intervalet. Da må funksjonen krysse x-aksen minst en gang på intervalet $0 < x < 1$. Dette viser at det eksisterer en null i $0 < x < 1$, og fire nullpunkt i området $\{1 < |z| < 2\}$. Ved å igjen bruke skjæringssetningen kan en vise at funksjonen har et nullpunkt for $1/7 < x < 1/6$, men det får da være grenser hvor pinlig nøyaktig en skal være[3].

C.4.1 Enhetsrøtter

Proposisjon C.4.1. *La $n \in \mathbb{N}$ og la $0 \leq k \leq n-1$, hvor k er et heltall da er*

1. $\overline{\omega_k} = 1/\omega_k$
2. $\omega_k + \overline{\omega_k} = 2\mathrm{Re}\,(\omega_k)$ *og* $\omega_k - \overline{\omega_k} = 2\mathrm{Im}\,(\omega_k)$
3. $(z-\omega_0)(z-\omega_1)\cdots(z-\omega_{n-1}) = z^n - 1$
4. $\omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_{n-1} = 0$
5. $\omega_0\omega_1\cdots\omega_{n-1} = (-1)^{n-1}$
6. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \omega_j^k = \begin{cases} 0\,, & 1 \leq k \leq n-1 \\ n\,, & k = n \end{cases}\,.$

Sett å vise punkt 5 som en oppgave

Bevis. Det finnes ulike måter å vise punkt 5. Ved å sette inn $z = 0$ i punkt 3 får en at venstresiden kan skrives som

$$(0-\omega_0)(0-\omega_1)\cdots(0-\omega_{n-1}) = \prod_{j=0}^{n-1}(0-w_j) = (-1)^n \prod_{j=0}^{n-1} w_j$$

mens høyresiden enkelt nok blir $0^n - 1 = -1$. Dermed så er

$$(-1)^n \prod_{j=0}^{n-1} w_j = -1 \;\Rightarrow\; \prod_{j=0}^{n-1} w_j = (-1)^{n-1}$$

som ønsket. Geometrisk sett så vil det å gange to vektorer sammen være det samme som å gange sammen lengden av vektorene og legge sammen vinklene. Siden ω er enhetsrøtter har alle vektorene lengde 1 så produktet må ligge på enhetssirkelen. Vinkelen blir enten 0 eller 2π avhengig om antall røtter er like eller odde. Hver ω_k danner en vinkel $\theta_k = 2k\pi/n$ så den totale vinkelen blir

$$\theta = \sum_{k=0}^{n-1}\theta_k = \frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{2\pi}{n}\left[\frac{n(n-1)}{2}\right] = \pi(n-1)$$

[3]Faktisk kan en vise at den ene roten ligger i området

$$\frac{u}{u+1/2}\,\frac{1}{6} < x < \frac{u+1}{u+3/2}\,\frac{1}{6}\,,$$

hvor $u = 1945$ med samme fremangsmåte.

Trekker en fra antall hele rotasjoner 2π fra vinkelen får en at vinkelen blir 0 dersom n er odde, og -1 dersom n er like. Oppsumert så er

$$\prod_{j=0}^{n-1} w_j = \prod_{j=0}^{n-1} e^{2\pi ij/n} = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\sum_{j=0}^{n-1} j\right) = \exp\big(\pi i(n-1)\big) = (-1)^{n-1}$$

Her er et bevis for punkt 6 Anta først at $1 \leq k \leq n-1$ da er

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k^j = \sum_{j=0}^{n-1} [\exp(2\pi ij/n)]^k = \frac{1-[\exp(2\pi ij/n)]^n}{1-\exp(2\pi ij/n)} = 0$$

Siden teller null $\exp(2i\pi j) = 1 \; \forall j \in \mathbb{N}$. Tilfellet hvor $k = n$ må bli sett på separat da, det leder til et $0/0$ uttrykk i likningen ovenfor.

$$\sum_{k=0}^{n-1} w_k^n = \sum_{j=k}^{n-1} \exp(2\pi ik) = n$$

Hvor igjen det ble brukt at $\exp(2\pi ik) = 1$. Dette fullfører beviset. □

Teorem C.4.2. Symmetriske polynom

C.5 Kompleks Integrasjon

Lemma C.5.1. *La D være en endelig delmengde av $\mathbb{C}$ og la $C \subset D$ være en endelig parametriserbar kurve, og la $f(z)$ være en integrerbar funksjon på C, da er*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{C^*} f(z)\,\mathrm{d}z$$

hvor notasjonen C^* betegner samme kurve som C, men nå med motsatt orientasjon. En går altså 'motsatt' vei.

Bevis. Beviset er rett frem siden C er parametrisebar har en at

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t - \int_b^a f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t - \int_{C^*} f(z)\,\mathrm{d}z$$

siden en kan bruke samma parametrisering på C^* da det er samme kurve som C bare med start og endepunktene byttet om. □

Teorem C.5.1. *La f være en kompleks funksjon og la $f \in H(\Omega)$ da er følgende utsagn ekvivalente*

1. *Laurentrekken til f*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

konvergerer for alle z_0 i Ω.

2. *Funksjonen kan skrive på formen*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

hvor u *og* v *er reelle funksjoner på* $\mathbb{R}^2$ *og tilferdstiller* (Cauchy-Riemann likningene)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{og} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

for alle $z_0 =\in \Omega$.

3. *Grensen*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

eksisterer for ethvert punkt z_0 *i* Ω.

Proposisjon C.5.1. *La* $f(z)$ *være en funksjon definert på* $U/\{a\}$

1. *dersom* a *er en hevbar singularitet kan* $f(z)$ *skrives på formen*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z - a)^k$$

2. *dersom* a *er en pol av orden* m *kan* $f(z)$ *skrives på formen*

$$f(z) = \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

3. *dersom* a *er en essensiel singularitet kan* $f(z)$ *skrives på formen*

$$f(z) = \cdots \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

Altså fortsetter Laurent-rekken i positiv og negativ retning 'uendelig'

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

Dette regnes som en alternativ måte å beskrive polene på og en tungvindt måte å bestemme residyene som vi skal se på senere.

GENERELL IDÈ

C.5.1 Cauchy's Integralformel

Teorem C.5.2. (Cauchy–Goursat theorem) *La D være en åpent enkeltsammenhengende undermengde av $\mathbb{C}$ og la f være en kompleks funksjon definert på området. Dersom C er en lukket sløyfe i D så er*

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Området D trenger ikke å være globalt enkeltsammenhengende det holder at det eksisterer en lukket sløyfe C_1 som omslutter C, og at D er enkeltsammenhengende på C_1.

Intuitivt burde dette stemme dersom vi har en enkel vei C i et enkeltsammenhengende området D og f er holomorf. Så eksisterer det en funksjon F slik at $F'(z) = f(z)$ for alle $z \in D$. Altså

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_1) - F(z_0)$$

Dersom start og endepunktet er det samme $z_1 = z_0$ så er integralet null.

Proposisjon C.5.2. (Greens Theorem) *La ∂D være en positivt orienterbar, veisammenhengende lukket kurve i planet, og la D være et området innesluttet av ∂D. Dersom L og M er funksjoner av (x, y) definert på det åpne området D med kontinuerlige partiellderiverte da er*

$$\int_{\partial D} L\,\mathrm{d}x + M\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial y}\right)\mathrm{d}A$$

Poenget er at en går fra her fra å beregne et linjeintegral til å beregne arealet av et området. Beviset utelates her, men kan finnes i de fleste innføringsemner i flervariabel analyse En er nå klar til å vise **??** formelt. Sett inn refferanse

Bevis. La den enkle kurven C være parametrisert av $z = z(t)$ for $a \leq t \leq b$, for reelle a,b. Siden f er analytisk kan en parametrisere integralet som

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f\big(z(t)\big)z'(t)\,\mathrm{d}t$$

og en kan nå bruke at $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ med $z(t) = x(t) + y(t)$, så $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b (u + iv)(x' + iy')\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b ux' - vy'\,\mathrm{d}t + i\int_a^b vx' + uy'\,\mathrm{d}t \qquad \text{(C.11)}\end{aligned}$$

igjen så kan integralet parametriseres ved å brue $x'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$ og $y'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}y$ slik at likning (C.11) kan skrives som

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + i\int_C v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y$$

Begge disse funksjonene er relle og begge kan beregnes fra Greens theorem. Ved å bruke **??** kan en skrive

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}A + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}A$$

dette er lov siden f er deriverbar, og har dermed kontinuerlige partiellderiverte. Siden f er holomorf så tilfredstiller funksjonen Cauchy-Riemann likningene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{og} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

fra dette følger det at integralet over C er null

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

som var det som skulle vises. □

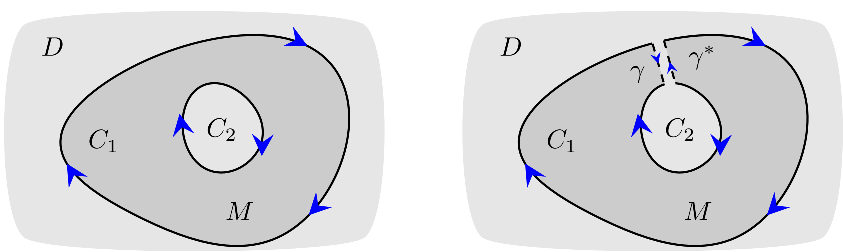
Teorem C.5.3. (Deformasjons Theoremet) *La D være en endelig delmengde av $\mathbb{C}$ og la C_2 og C_1 være to enkle sløyfer i D slik at $C_1 \subset C_2$. Kall området mellom sløyfene for M. Da er*

$$\oint C_1 f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

dersom $f(z)$ er holomorf på det dobbel sammensatte området M.

Dette theoremet impliserer altså at såfremt funksjonen f ikke blåser opp på området M så er størrelsen og formen på sløyfen C irrelevant. En helt essensiel faktor ved theoremet er at f bare trenger å være holomorf mellom C_1 og C_2, funksjonen $f(z)$ kan altså fin ha så mange singulariter den bare vil på D, og spesielt inne i sløyfen C_2.

Bevis. Målet er å vise at sløyfene C_1 og C_2 i avsnitt (C.5.1) er like. Frem-



(a) Illustrasjon av annulusen M dannet av C_1 og C_2. Her er C_2 den innerste sløyfen og C_1 den ytterste.

(b) Den stiplede kurven til venstre er γ og den stiplede kurven til høyre er γ. M er nå enkeltsammenhengende.

Figur C.1

gangsmåten er å legge inn to små veier γ og γ^* slik at vi kan bruke Cauchy–Goursat theoremet (**??**). Vi definerer kurven C i avsnitt (C.5.1) som $C =$

$C_1 \cup \gamma \cup -C_2 \cup \gamma^*$. Merk at fra lemma (C.5.1) så kanselerer integralet langs γ integralet langs γ^*, siden disse er like store og motsatt rettet.

Siden C en lukket kurve, og $f(z)$ ikke har noen singulariter på intervalet følger det fra Cauchy–Goursat theoremet at integralet langs C er null.

$$\oint Cf(z)\,\mathrm{d}z = \oint C_1 f(z)\,\mathrm{d}z + \oint -C_2 f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Dette medfører at

$$\oint C_1 f(z)\,\mathrm{d}z = \oint C_2 f(z)\,\mathrm{d}z$$

som var det som skulle vises. □

Teorem C.5.4. (Cauchy's Integralformel) *La* $f \in H(\Omega)$. *La* C *være positiv orienterbar lukket kontur som går omkring* Ω. *Dersom* z_0 *er et punkt i* Ω, *da er*

$$f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)^{m+1}}$$

hvor $m \in \mathbb{N}$. *Spesielt så*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

Bevis. Ønsker her å bevise det tilsvarende utsagnet

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi i f(z) \tag{C.12}$$

Vi definerer følgende funksjon

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

være analytisk på $g \in H(D/z_0)$, altså analytisk på hele området forutenom i punktet z_0. Fra Deformasjons theoremet (**??**) så er størrelsen på kurven irrelevant for verdien av integralet. Tanken er nå at en krymper størrelsen på sirkelen helt til null og se hva som skjer.

Ved å først krympe området ned til enhetssirkelen så kan integralet kan parametriseres som $\gamma(t) = \zeta + re^{it}$ med $t \in (0, 2\pi)$ og $\mathrm{d}\zeta = ire^{it}\,\mathrm{d}t$ ved å sette dette inn får en

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{(z + re^{it}) - z} ire^{it}\,\mathrm{d}t = i\int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\,\mathrm{d}t$$

Vi krymper intervalet videre og lar $r \to 0$, siden singulariten ligger i sentrum av C så vil den fortsette i ligge i C uansett hvor liten vi lar r bli.

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta &= \lim_{r\to 0} i\int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\,\mathrm{d}t \\
&= \quad i\int_0^{2\pi} \lim_{r\to 0} f(z + re^{it})\,\mathrm{d}t \\
&= \quad i\int_0^{2\pi} f(z)\,\mathrm{d}t \\
&= 2\pi \;\; if(z)
\end{aligned}$$

som var det som skulle vises. □

Korollar C.5.1. *Anta at* $f(z) = (z - z_0)^n$*, hvor* $z_0 \in \mathbb{N}$ *og la* C *være en sløyfe sentrert i* z_0 *med radius* $r > 0$*. da er*

$$\oint |z - z_0| = r(z_0 - a)^n \,\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i & \textit{dersom} \quad n = -1 \\ 0 & \textit{ellers} \end{cases} .$$

Bevis. Dette sier at dersom vi integrerer $(z - z_0)^n$ langs en sirkel med radius r sentrert i z_0, så er integralet null så fremt $n \neq -1$.

Dersom $n \neq 1$ så inneholder ikke $(z - z_0)^n$ noen singulariter og fra **??** er integralet null. Dersom $n = -1$ så har en at

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = 2\pi i \left(\frac{0!}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{0+1}} \,\mathrm{d}z \right) = 2\pi i \cdot f(z_0) = 2\pi i \,,$$

hvor $f(z) = 1$. Som følger direkte fra **??** som vi skal se snart er dette korollaret svært essensielt. □

I innledningen var det nevnt at et integral langs en lukket sløyfe i det komplekse planet er avhengig av de singularitetene omsluttet av sløyfen. Først skal vi se på hva en singularitet er.

Residyer

Residyer helt essensielt i kompleks analyse og kan oppsumeres i følgende theorem

Teorem C.5.5. (Residue Theoremet) *La* D *være et begrenset området i det komplekse planet med en sammenhengdende rand. Anta at* $f(z)$ *er holomorf på* $D \cup \partial D$*, untatt for et endelig antall isolerte singulariter* $z_1, \ldots, z_m$ *i* D*. Da er*

$$\int_{\partial D} f(z) \,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z = z_j} f(z) \,.$$

Metode 1: Dersom f er holomorf på området så kan en skrive f som en laurent rekke. En må da dele opp funksjonen mellom hver pol for å få en konvergerende rekke. Anta at f har en pol av orden n i punktet a. Ved å integrere funksjonen langs en lukket sløyfe fås da

$$\begin{aligned} \oint f(z) \,\mathrm{d}z &= \oint \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z - a)^n \,\mathrm{d}z \\ &= \sum_{k=-m}^{0} c_k \oint (z - a)^k \,\mathrm{d}z + \oint \frac{c_1}{z - a} \,\mathrm{d}z + \sum_{k=2}^{\infty} c_k \oint (z - a)^n \,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

En kan bytte om integral og summasjonstegnet siden f er en holomorf funksjon på området. Herfra kan en se at både første og siste sum beregnes til 0, som følger fra **??**. Slik at det eneste som overlever er det midterste leddet

$$\oint f(z) \,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot c_k$$

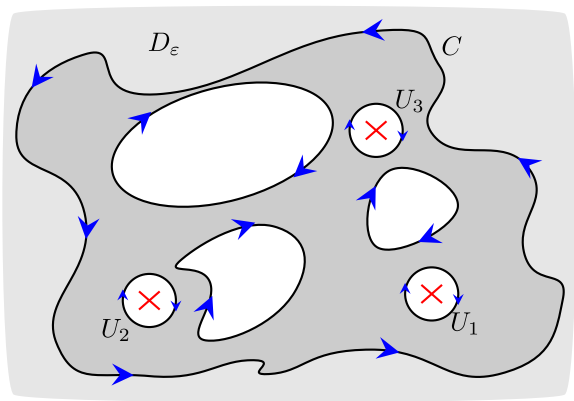
For hver singularitet funksjonen har, kan en konstruere en slik rekke og finne faktoren til leddet med potens -1.

Definisjon C.5.1. La $f(z)$ være en holomorf funksjon, la punktet a være singularitet til f. Da kalles koeffisienten til c_k leddet

$$\frac{c_k}{z-a}$$

i Laurent rekken til $f(z)$ for residyen til a.

Metode 2: En kan og skissere et bevis ved å ta utgangspunkt i **??** tanken er nå at ved å bruke Deformasjons theoremet (**??**) så kan en skrumpe inn området til isolerte sirkler omkring hver singularitet. Følgende skisse er tatt fra Gamelin sett inn refferanse
Vi tar utgangspunkt i figur (C.2) her Vi betrakter altså i stedet kurven C over



Figur C.2: Integralet langs en kurve C over et vei-sammenhengende området D.

området D_ε som er det samme som D minus singularitene. Nå siden integralet over D_ε ikke inneholder noen singulariter er så er

$$\int_{D_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

En kan betrakte området som en svak generalisering av deformasjons theoremet nå med flere omsluttede sirkler og kan vises på nøyaktig samme måte. Ved å bruke dette i kombinasjon med Cauchy Gormat følger resultatet.

Verdien av hvert av integralene omkring singularitene følger fra (**??**) og er

$$\oint_{\partial U_k} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(z_j) \tag{C.13}$$

Det totale integralet over D_{D_ε} kan altså skrives som

$$0 = \int_{D_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{D_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{j=1}^{m} \oint_{\partial U_k} f(z) = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(z_j)$$

ved å bruke likning (C.13) kombinert med likningen ovenfor får en

$$\int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(z_j)\ .$$

som var det som skulle vises.

Lemma C.5.2. (M-L ulikheten) *La f være en kompleks, kontinuerlig funksjon på konturen Γ og dersom absoluttverdien $|f(z)|$ er mindre enn en konstant M for alle z på Γ da er*

$$\left| \int_\Gamma F(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq M \cdot l(\Gamma)\,.$$

Hvor $l(\Gamma)$ betegner buelengden til Γ og $M = \sup_{z\in\Gamma} |f(z)|\,.$

C.5.2 Typer integraler

Rasjonale funksjoner

Proposisjon C.5.3. *La $P(x)$ og $Q(x)$ være polynomer slik at $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$ da er*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\left[\frac{P(x)}{Q(x)}, z_k\right]$$

hvor $z_1, \ldots z_m$ er singularitene til $P(x)/Q(x)$ i det øvre halvplanet $y > 0$.

V

5.1 Kortsvar

1.5.5

1.6.1

1.

1.7

1. $\pi/3$

1.10.1

1.11.2

1. $x + 3\ln|x| + \mathcal{C}$

27. $\sqrt{2}$

49. $2\sqrt{x} - 4\ln\left|\sqrt{x}+2\right| + \mathcal{C}$

70. π

72. $\dfrac{x^3}{3} - \log|x+1|$

1.11.3

1. 2π

2. $\pi/2$

3.

$$I = \begin{cases} \log 2 & a \neq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

4.

$$I = \begin{cases} \log 2 & a \neq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

5.

6. $\log 5$

7. $\log 5$

8. π^2

9. 6

10. 6

11. $\pi/2$

13. $\log 5$

14. $\log 2 > 1/\sqrt{2}$

2.2

1.

2.3

1. like $f(-x) = f(x)$

2. 0

3. $1/2$

4. 0

6. π

2.4

1. $\dfrac{\pi}{2cd}$

2. $\log\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$

3. Del opp og la $u = e^x$

4. $\frac{\pi}{2a}$

5. Del opp og la $u = e^x$

2.4.1

1.

2.5.2

1. $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

2. $\arctan \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

3. $\dfrac{3\pi}{2\sqrt{2}}$

2.6.1

1. $e^x \sin x + \mathcal{C}$

2. $\sqrt{\pi}/2$

3. $c = 3, k = 2$

4. $\log\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$

5. $\log\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$

2.6.2

1. $(x-1)^4 e^x + \mathcal{C}$

2. $(x-1)^4 e^x + \mathcal{C}$

3. $(x-1)^4 e^x + \mathcal{C}$

4. $(x-1)^4 e^x + \mathcal{C}$

2.7

1. $\pi/3$

2.

4. $\dfrac{\pi}{2} \cos a$

5. $\pi^2/4$

2.9.2

1. $\log\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$

2. $\log\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$

3. 0

4. $\log\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$

2.9.3

1. $4I_\pm = \sin 2x + 2x$

2. $4I_\pm = \sin 2x + 2x$

3. $4I_\pm = \sin 2x + 2x$

2.10.1

1. $\arcsin(2x-1)+\mathcal{C}$

2. $\ln(\cos x+\sin x)+\mathcal{C}$

3. 2

4. $\frac{2}{15}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3/2}\left[3\left(1+\frac{1}{x}\right)-5\right]+\mathcal{C}$

5. $\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\arctan x^2$

6. $\frac{1}{2}e^{\pi}$

7. $\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|-\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})+\mathcal{C}$

8. $\ln x\cdot e^x+\mathcal{C}$

9. $\pi/4$

10. $\pi/4$

11. $4\sqrt{1+\sqrt{x}}$

12. $n\pi$

13. $\frac{1}{2}e^{2x}+\mathcal{C}$

14. $2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}+\mathcal{C}$

15. $\frac{1}{6}\log\left|1-\frac{1}{x^6}\right|+\mathcal{C}$

16. $\frac{3\pi^2}{16}$

17. 2

18. $\frac{1}{300}\frac{(x+2)^3(x+22)}{(x+7)^4}+\mathcal{C}$

18. 2

19. π

20. 2

21. $\arctan x+\frac{1}{2}\arctan(x^3)$

22. $1Roger$

23. $\frac{1}{2013}$

24. 0

25. $\frac{1}{2}$

26. 2

27. $\frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$

28. $-2\sqrt{1+\frac{1}{x}}+2\log\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$

29. $\frac{1}{4}\log\frac{x-\log x}{x+\log x}+\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{\log x}$

30. $\frac{1}{6}\pi\ln(6)$

31. $1/2$

32. $\frac{2}{2\log^2(2)}$

33. $\frac{1}{2}\log\left(\frac{e-1}{e+1}\right)$

34. $\frac{\log 5}{2\log(2/3)}$

36. $\frac{\pi}{2}$

37. $-\frac{x}{x^5+x+1}$

38. $2\log 2 - 1$

39. $\dfrac{\pi}{2\sqrt{ab}}$

40. $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^3$

2.10.1

41. $\pi/4$

42. $\log(5/4)\mathcal{C}$

43. π

44. 2

45. $2x\sin\left(\sqrt{x}\right)+\mathcal{C}$

46. $\log\left(\dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)+\mathcal{C}$

47. 0

48. 1

49. $\pi^2/4$

50. $4^2/3^2$

51. $\dfrac{\pi}{3\sqrt{6}}$

52. $1/2\log\sqrt{3/2}$

53. 2

2.10.2

1. $I_1=\pi/4$
$I_2=-\pi/4$

2. $I_1=\pi/4$
$I_2=-\pi/4$

3. $\dfrac{m^2}{8}-\dfrac{1}{8m^2}+\log\sqrt{m}$

4. $\operatorname{arcsinh}(x)=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

5. $1/r$ når $r>R>0$,
$1/R$ når $R>r>0$

6. $I_1=\pi/4$
$I_2=-\pi/4$

7.

8. $I(\alpha)=\alpha\pi/4$

9. $\beta=a^2/5$
$\cos\theta=\dfrac{2ab}{25}$

10. $t=\dfrac{1}{2}\pi+\pi n\ n\in\mathbb{N}$

11. $\pi/\sqrt{3}$

12. $\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$

13. $t=\dfrac{1}{2}\pi+\pi n\ n\in\mathbb{N}$

14. π

15. $-1+2\log 2$

16. $-1+2\log 2$

17. $A=B=1,C=0,\pi/3$

18. $\sqrt{2}$

19. 2

20. 47

21. $2 - \sqrt{2}$

22. $I = \pi/2$

23. $I = \text{positiv} = 22/7 - \pi$

24. $\dfrac{\pi}{4\phi}$

25. $\left(\dfrac{4}{3}\right)^2$

26. π^2

27. $\left(\dfrac{4}{3}\right)^2$

30. $\dfrac{\pi^2}{2^{2n+1}}\dbinom{2n}{n}$

31. $\pi/4$

32. $\pi/4$

33. Hint: La integralene få samme grenser.

34.

35. $a = 3, b = 4$ så $\sqrt{a^b + b^a} = 12$

36. $I = \dfrac{x(x-2)}{2}, a = 0, b = 16/9$

37. $x = \tan\tan\beta$

38. 2

39. $a = 3, b = 4$ så $\sqrt{a^b + b^a} = 12$

40. 2

41. $a = 0, b = 1\, \max(I) = 1/2$

42. $\left(\dfrac{4}{3}\right)^2$

43. $\dfrac{26}{3} - \dfrac{15}{2}\log 3$

44. xe^{2*x^2}

45. hint: $u = x^2, \frac{5}{49}u = t$

46. π

47. π

48. $a = 3, b = 4$ så $\sqrt{a^b + b^a} = 12$

49. $B = 1/4,\ A = -1/4.$

50. $a = 3, b = 4$ så $\sqrt{a^b + b^a} = 12$

3.3.2

3. $\arcsin(2x-1) + \mathcal{C}$

4. $\dfrac{a^\rho - b^\rho}{\rho}\Gamma(1-\rho)$

5. $C = \log\sqrt{2\pi}\,.$

3.3.3

1. $\dfrac{\pi/n}{\sin\pi/n}$

2. $\pi/\sin\pi n$

3.3.4

3. $I(m) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} m$, $I(0) = 0$.

3.3.9

1.

2.

3.6

1. $\arcsin(2x-1)+\mathcal{C}$

2. $\arcsin(2x-1)+\mathcal{C}$

3. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$

4. $\arcsin(2x-1)+\mathcal{C}$

5. $\arcsin(2x-1)+\mathcal{C}$

3.7

3.8

1. $\log\left(\frac{2}{\pi}\right)$

2. $\log\left(\frac{2}{\pi}\right)$

3. $\log\left(\frac{2}{\pi}\right)$

3.9.1

1. $\zeta(3)$

2. $\sqrt{\pi}$

3. $\frac{\pi}{4}$

4. $\zeta(3)$

5. $\frac{1}{2}\log^2(2)-\frac{\pi^2}{12}$

3.9.2

1. $\pi/2$

2. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}-1$

3. $\pi/2$

4. $\pi/2$

5. $\pi \operatorname{arctanh}\gamma$

6. $\pi \operatorname{arctanh}\gamma$

8. Hint $x^a-x^b=(x^a+1)-(x^b+1)$

10. $\pi\arcsin b$

11. $\frac{\pi(-1)^n}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^n\frac{1}{\sqrt{ab}}$

12. $\pi/2$

13. $-2\pm\sqrt{5}$

14. $\pi/2$

15. $\pi/2$

16. $\pi/2$

17. $\log\sqrt{2\pi} + \dfrac{3}{4}$

18. $\pi/2$

19. $\log\sqrt{2\pi} + \dfrac{3}{4}$

20. $\pi/2$

A.2.4

1. $e^{\pi} > \pi^{e}$

2.

3.

4. $e^{\pi} > \pi^{e}$

5. $e^{x} \sin x + \mathcal{C}$

6. $e^{x} \sin x + \mathcal{C}$

5.39 Langsvar

1.5.5

1. Vi begynner den delvise integrasjonen med å velge u og v' som følger

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{x^2-1} & \mathrm{d}v &= 1\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x & v &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= x\sqrt{x^2-1} - \int \frac{x^2-1+1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\sqrt{x^2-1} - \int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Ved å legge til $\int \sqrt{x^2-1}$ og dele på 2, kan det ubestemte integralet skrives

$$\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x^2-1}} \tag{5.1}$$

som var det som skulle vises.

1.6.1

1. Her definerer jeg bare funksjonen $T(x) = h(g(x)) - x$ og deriverer funksjonen.

$$\lim_{h\to 0} \frac{[h(g(x)) - x] - [h(g(x+h) - (x+h)]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(g(x)) - h(g(x+h))}{h} - 1$$

2. Ved å bruke substitusjonen $u = \cos x$ så er $\mathrm{d}u = -\sin x\,\mathrm{d}x$. Altså

$$\int \cos x \sin x\,\mathrm{d}x = \int -u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}u^2 + \mathcal{C} = -\frac{1}{2}(\cos x)^2 + \mathcal{C}$$

Tilsvarende ved å bruke substitusjonen $y = \sin x$, så er $\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$ får en

$$\int \cos x \sin x\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2 + \mathcal{D} = \frac{1}{2}(\sin x)^2 + \mathcal{D}$$

Disse to antideriverte må høyst avike med en konstant, se lemma (2.2.1). Med andre ord

$$\frac{1}{2}(\sin x)^2 = -\frac{1}{2}(\cos x)^2 + \mathcal{C}$$

Ved å gange med 2 og legge til $(\cos x)^2$ på begge sider, kan likningen skrives

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = \mathcal{D} \tag{5.2}$$

Hvor igjen $\mathcal{D}$ er konstant for alle x. Spesielt må den holde for $x = 0$, så $\mathcal{D} = (\cos 0)^2 + (\sin 0)^2 = 1 + 0$. Likning (5.2) kan da skrives

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

som var det vi ønsket å vise.

1.7

1. Det logiske her blir å benytte proposisjon (2.7.1)

1.10.1

1. Den deriverte kan skrives som
$$f'(x) = \frac{\sec x \tan x}{\sec x} = \tan x\,.$$
Så $\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{1 + (\tan x)^2} = \sqrt{(\sec x)^2} = |\sec x|$. Innsatt i (1.10.2) fås da
$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \sec x\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[\log|\sec x + \tan x|\Big]_0^{\pi/4} = \log(1 + \sqrt{2})\,, \end{aligned}$$
som var det som skulle bestemmes. Her ble proposisjon (1.9.1) ble brukt for å beregne integralet, og at $|\sec x|$ er positiv på $[0, \pi/2]$.

2. Arealet T under f fra a til b er gitt som $T = \displaystyle\int_a^b \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh b - \sinh a$. Siden vi har $1 + \sinh x)^2 = (\cosh x)^2$ så kan buelengden uttrykkes som
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh x\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1 + (\sinh x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \cosh x\,\mathrm{d}x$$
som var det vi ønsket å vise. At $|\cosh x| = \cosh x$ følger fra at de hyperbolske funksjonene er positive for alle x.

3.

a)

b) Vi vet at $v(t) = r'(t)$. Videre så har vi at

$$\begin{aligned}[x_1'(t)]^2 &= \left[f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin(\theta)\right]^2 \\ &= f(\theta)^2(\sin\theta)^2 - 2f'(\theta)\cos\theta\sin\theta f(\theta) + f'(\theta)^2(\cos\theta)^2\end{aligned}$$

Tilsvarende for x_2 får vi

$$\begin{aligned}[x_2'(t)]^2 &= \left[f'(\theta)\sin\theta - f(\theta)\cos(\theta)\right]^2 \\ &= f(\theta)^2(\cos\theta)^2 + 2f'(\theta)\cos\theta\sin\theta f(\theta) + f'(\theta)^2(\sin\theta)^2\end{aligned}$$

Ved å legge sammen $[x_1'(t)]^2$ og $[x_2'(t)]^2$ så kanseleres det midterste leddet, vi får

$$[x_1'(t)]^2 + [x_2'(t)]^2 = f(\theta)^2\left[(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2\right] + f'(\theta)^2\left[(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2\right]$$

Farten blir dermed

$$|v(t)| = |r'(t)| = \sqrt{[x_1'(t)]^2 + [x_2'(t)]^2} = \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}$$

Siden enhetsformelen sier at $(\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$. Buelengden blir dermed

$$L = \int_a^b |r'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b |v(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta\,,$$

som var det vi ønsket å vise. Hastigheten er altså gitt som[1]

$$v(t) = [f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin(\theta)]\cdot\mathbf{i} + [f'(\theta)\sin\theta - f(\theta)\cos(\theta)]\cdot\mathbf{j}\,,$$

via produktregelen $(uv)' = u'v - uv'$.

c) Fra oven vet vi at $|v(t)| = \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}$. Så

$$\begin{aligned}f(\theta)^2 &= (1+\cos\theta)^2 = 1^2 + 2\cos\theta + (\cos\theta)^2 \\ f'(\theta)^2 &= (-\sin\theta)^2 = (\sin\theta)^2\end{aligned}$$

Integralet blir dermed

$$\begin{aligned}L = \int_0^{2\pi}\sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi}\sqrt{1^2 + 2\cos\theta + (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta \\ = \int_0^{2\pi}\sqrt{1 + 2\cos\theta + 1^2}\,\mathrm{d}\theta &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \qquad (5.3)\end{aligned}$$

Merk at integralet er symmetrisk omkring $\theta = \pi$, slik at integralet fra 0 til π er like stort som fra π til 2π. Selvsagt kan dette også vises direkte ved å dele integralet ved $x = \pi$ og bruke substitusjonen $u \mapsto \pi - \theta$, $\mathrm{d}u = -dT$.

$$\int_\pi^{2\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = -\int_{\pi-\pi}^{\pi-2\pi}\sqrt{1+\cos(\pi-\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \qquad (5.4)$$

[1] For å gjøre ting klarere brukte jeg den helt tilsvarende notasjonen $r = x\cdot\mathbf{i} + y\cdot\mathbf{j}$ i stede for den mer vanlige $r = (x, y)$.

Siden $-\int_b^a = \int_a^b$ og $\cos(\pi - \theta) = \cos\pi\cos\theta + \sin\pi\sin\theta = \cos\theta$. For å skrive om uttrykket videre, ganger vi så integranden med den konjugerte.

$$\sqrt{1+\cos\theta} \cdot \frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1-\cos\theta}} = \frac{\sqrt{1^2 - (\cos\theta)^2}}{\sqrt{1-\cos\theta}} = \frac{|\sin\theta|}{\sqrt{1-\cos\theta}} \tag{5.5}$$

Kombinerer vi (5.4) og (5.5) med likning (5.3) så kan buelengden skrives

$$L = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos\theta}}.$$

Hvor $|\sin\theta| = \sin\theta$ siden $\sin\theta$ er positiv når $\theta \in [0, \pi]$. Som var det som skulle vises.

d) Ved å bruke omskrivningen fra forrige oppgave kan integralet enkelt løses via substitusjonen $u \mapsto 1 - \cos\theta$, $\mathrm{d}u = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$. Grensene blir $u_1 = 1 - \cos 0 = 0$ og $u_2 = 1 - \cos\pi = 2$.

$$L = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos\theta}}. = 2\sqrt{2}\int_0^2 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{2}\Big[2\sqrt{u}\Big]_0^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$$

Siden $(\sqrt{x})' = 1/2\sqrt{x}$ må nødvendigvis $(2\sqrt{x})' = 1/\sqrt{x}$. Integralet kan selvsagt også løses uten å bruke denne omskrivningen. Her vil en bruke

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

Ved å legge til 1 på begge sider har vi altså $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$. Med andre ord

$$L = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2\cos^2(x/2)}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} |\cos(x/2)|\,\mathrm{d}\theta = 8$$

Hvor en så må dele opp integralet ut i fra hvor $\cos(x/2)$ er positiv og negativ. Men dette kan leser få kose seg med alene.

1.11.2

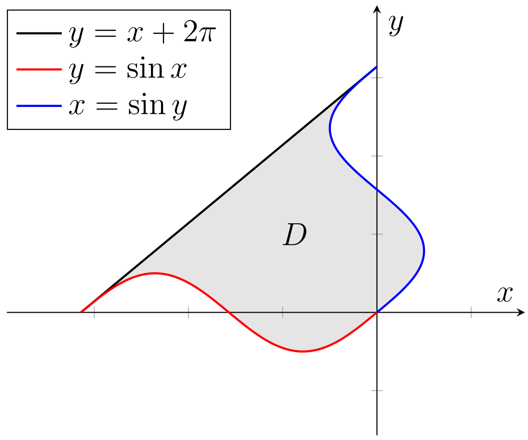
1. Vi legger merke til at vi kan dele opp integralet i to, som vist under

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+3x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{x^2}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{3x}{x^2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

The first integral kan forkortes til 1, mens i det andre kan vi sette konstantleddet utenfor, og faktorisere ut en x i teller og nevner.

$$\begin{aligned} &= \int 1\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= x + 3\ln|x| + \mathcal{C} \end{aligned}$$

Hvor vi tilslutt brukte at $(\ln x)' = 1/x$



Figur 5.1: Området D avgrenset av de tre funksjonene.

70. Dette integralet kan se noe vanskelig ut, men løses relativt greit ved substitusjon. Vi kan for eksempel velge $u \mapsto e^x$ eller $t \mapsto e^{x/2}$. Dersom vi bruker første substitusjon får vi at $\mathrm{d}u == e^x\,\mathrm{d}x = u\,\mathrm{d}x$. Videre så blir $e^{x/2} = (e^x)^{1/2} = \sqrt{u}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/2}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{u}}{1+u}\,\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}\,(1+u)}$$

som ikke virker spesielt mye enklere å integrere. La oss heller prøve den andre substitusjonen. Da er $\mathrm{d}t = \frac{1}{2}e^{x/2}\,\mathrm{d}x = \frac{t}{2}\,\mathrm{d}x$, og $e^x = (e^{x/2})^2 = t^2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/2}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{t}{1+t^2}\,\frac{2\,\mathrm{d}t}{t} = 2\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+t} = \pi$$

Mye enklere. Siden $t = e^x$ så vil $t \to \infty$ når $x \to \infty$ og $t \to 0$ når $x \to -\infty$ siden

$$t = \lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

I aller siste overgang ble integralet av arctan funksjonen brukt, se.

1.11.3

2.

5. Integralet kan beregnes ved å bruke delvis integrasjon to ganger. Vi ser først på det ubestemte integralet og får

$$\begin{aligned}
\int (x^2-1)e^{2x}\,\mathrm{d}x &= (x^2-1)\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int 2x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}(x^2-1)e^{2x} - \left[x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int e^{2x}\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{2x} + \mathcal{C}
\end{aligned}$$

I første delvise integrasjon ble $u = x^2 - 1$ brukt og $v = e^{2x}/2$. For å gjøre ting litt enklere skrives integralet om til

$$\int 2^2(x^2-1)e^{2x}\,\mathrm{d}x = \big(2x^2-2x-1\big)\,e^{2x} + \mathcal{C} = \big(2\cdot x(x-1)-1\big)e^{2x} + \mathcal{C}$$

Setter vi inn grensene våre får vi nå

$$\begin{aligned}\int_\psi^\varphi 2^2\left(x^2-1\right)e^{2x}\,\mathrm{d}x &= \Big[\big(2\cdot x(x-1)-1\big)e^{2x}\Big]_\psi^\varphi \\ &= \big(2\cdot\varphi(\varphi-1)-1\big)e^{2\varphi} - \big(2\cdot\psi(\psi-1)-1\big)e^{2\psi} \\ &= \big(2\cdot 1-1\big)e^{2\varphi} - \big(2\cdot 1-1\big)e^{2\psi} \\ &= e^{2\varphi} - e^{2\psi}\end{aligned}$$

I den andre overgangen ble det brukt at ψ og φ løser likningen $x(x-1) = 1$. Merk det var ikke nødvendig å beregne φ og φ direkte for å beregne integralet.

For å slippe den delvise integrasjonen kan vi gjøre følgende antakelse

$$\int \left(x^2-1\right)\cdot e^{2x}\,\mathrm{d}x = \left(Ax^2+Bx+C\right)\cdot e^{2x}$$

Dette virker logisk for når vi deriverer er polynom ganget med en eksponensialfunksjon, har polynomet i svaret like høy grad. $[xe^x]' = [1e^x + xex] = [1+x]e^x$ for eksempel. Da derivasjon og integrasjon er motsatte opperasjoner bør dette holde her og. Derivasjon gir

$$(x^2-1)\cdot e^{2x} = \big[2A\cdot x^2 + 2(A+B)\cdot x + (2C+B)\big]\cdot e^{2x}$$

Ved å sammenlikne koeffisientene så er $2A = 1$, $2(A+B) = 0$ og $2C + B = -1$. Slik at $A = 1/2$, $B = -A = -1/2$ og $C = (B-1)/2 = -1/4$ og

$$2^2\int (x^2-1)\cdot e^{2x}\,\mathrm{d}x = 2^2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{2x} = \big(2\cdot x(x-1)-1\big)e^{2x}$$

som før.

6. 5

7. Vi har via substitusjonen $u \mapsto 1/t$, så er $\mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}t/t^2 \;\Rightarrow \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u/u^2$.

$$f(1/x) = \int_1^{1/x}\frac{\log t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_1^x -\frac{\log 1/u}{1+(1/u)}\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \int_1^x \frac{1}{u}\frac{\log u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

Legger vi sammen funksjonenene får vi totalt sett

$$\begin{aligned}f(x)+f(1/x) &= \int_1^x\frac{\log t}{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_1^x\frac{1}{t}\frac{\log t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_1^x\frac{t\log t+\log t}{t(1+t)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^x\frac{(1+t)\log t}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t = \int_1^x\frac{\log t}{t} = \frac{(\log x)^2}{2}\end{aligned}$$

Dermed så blir $f(e) + f(1/e) = (\log e)^2/2 = 1/2$. Som ønsket.

8. Vi beregner først de to første integralene

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = 2\pi\big[-\cos\theta\big]_0^{\pi} = 2\pi\big(-\cos\pi + \cos 0\big) = 4\pi$$

Siden $\cos\pi = -1$ og $\cos 0 = 1$. Det enkleste en kan gjøre for å beregne det siste integralet er delvis integrasjon. Vi har

$$\int \frac{2r}{\left(1+r^2\right)^2} \, \mathrm{d}r = \int \frac{2r}{1} u^2 \frac{\mathrm{d}u}{2r} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{1+r^2}$$

via substitusjonen $u = 1 + r^2$, så er $\mathrm{d}u = 2r \, \mathrm{d}r$ slik at $\mathrm{d}r = \mathrm{d}u/2r$. Vi bruker nå delvis integrasjon med

$$\begin{aligned} u &= \frac{r}{2} \quad \text{og} \quad v' = \frac{2r}{\left(1+r^2\right)^2} \\ u' &= \frac{1}{2} \quad \text{og} \quad v = -\frac{1}{1+r^2} \end{aligned}$$

kan integralet skrives som

$$I = 4\pi \int_0^{\infty} \frac{2r}{\left(1+r^2\right)^2} \cdot \frac{r}{2} \, \mathrm{d}r = 4\pi \left[\frac{-r}{2\left(1+r^2\right)}\right]_0^{\infty} - 4\pi \int_0^{\infty} -\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}r}{1+r^2}$$

Den første delen av integralet går mot null slik at

$$= 4\pi \int_0^{\infty} \frac{r^2}{\left(1+r^2\right)^2} \, \mathrm{d}r = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{1+r^2} = 2\pi\big[\arctan r\big]_0^{\infty} = 2\pi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$$

der det siste integralet er den deriverte av $\arctan r$. Oppsumert så er altså

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^{\infty} \frac{r^2}{\left(1+r^2\right)^2} \, \mathrm{d}r = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{1+r^2} = \pi^2$$

som var det vi ønsket å beregne.

9. 7

10. 8

13.

14.

2.2

1. «Beviset» er rett frem. Siden f er integrerbar har vi

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t) &= F(b) - F(a)\\ &= \big(F(c) - F(a)\big) + \big(F(b) - F(c)\big) = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

som var det som skulle vises. Argumentet er sirkulært fordi korollar (1.3.1) avhengier av analysends fundamentalteorem, som igjen ble bevist nettop ved å bruke $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

2.3

2. Det er flere ulike måter å vise dette integralet på

$$\int_0^{2\pi} \log\left(\frac{(1+\sin x)^{1+\cos x}}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x = 0\,.$$

Merk at integralet blåser opp når $x = \pi$ og $x = 3\pi/2$ slik at det er naturlig å dele inn integralet som følger.

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{II}} + \underbrace{\int_{\pi}^{3\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{III}} + \underbrace{\int_{3\pi/2}^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{IV}}$$

En kort skisse av løsningene er gitt under

Løsning a) Alle integralene kan mappes til intervalet $(0, \pi/2)$, deretter fra symmetri er integralet null.

Løsning b) Integalene kan beregnes direkte

$$\begin{aligned} I &= -1 + 2\log 2\\ II + IV &= -2\log 2\\ III &= 1\end{aligned}$$

hvor en ser med en gang at summen er 0.

Løsning c) En viser at

$$\int_0^{2\pi} (1+\cos x)\log(1+\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \log(1+\cos x)\,\mathrm{d}x$$

Alle disse metodene fungerer utmerker. Her blir **a)** og **c)** studert nærmere. De individuelle integralene vil bli studert senere i heftet.

a) Begynner å mappe hvert integral på $(0, \pi/2)$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II} &= \int_{\pi/2}^{\pi} (1+\cos x)\log(1+\sin x) - \log(1+\cos x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} (1-\sin y)\log(1+\cos y) - \log(1-\sin y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

Der substitusjonen $x \mapsto y + \pi/2$ ble brukt.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{III} &= \int_{\pi}^{3\pi/2} (1+\cos x)\log(1+\sin x) - \log(1+\cos x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} (1-\cos y)\log(1-\sin y) - \log(1-\cos y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

Der substitusjonen $x \mapsto y + \pi$ ble brukt. Siste interval blir

$$
\begin{aligned}
\mathrm{IV} &= \int_{3\pi/2}^{2\pi} (1+\cos x)\log(1+\sin x) - \log(1+\cos x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} (1+\cos y)\log(1-\sin y) - \log(1+\cos y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

Med bruk av $x \mapsto 2\pi - x$. Ved å legge sammen $\mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV}$ får en

$$
\mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} = \int_0^{\pi/2} \log(1-\sin y) - \log(1-\cos y) - \sin y \log(1+\cos y)
$$

De to første leddene kanselerer hverande, som kan bli sett siden ved å bruke $z \mapsto \pi/2$ på en av de, slik at

$$
\mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} = -\int_0^{\pi/2} \log(1+\cos y)\sin y\,\mathrm{d}y = -\int_0^{\pi/2} \log(1+\sin y)\cos y\,\mathrm{d}y
$$

Igjen via enten $z \mapsto \pi/2 - y$ eller siden integralvet over $f(x)$ er likt integralet over $f(\pi - x)$ (proposisjon (2.3.1)). Ved å legge dette sammen med

$$
\mathrm{II} = \int_0^{\pi/2} (1+\cos x)\log(1+\sin x) - \log(1+\cos x)\,\mathrm{d}x
$$

får en det koselige resultatet

$$
\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV} = \int_0^{\pi/2} \log(1+\sin x) - \log(1+\cos x)\,\mathrm{d}x = 0
$$

Siden vårt originale integral var delt opp i I til IV. For å se at integralet er null kan en igjen benytte seg av enten $z \mapsto \pi/2 - y$ eller proposisjon (2.3.1).

$$
\int_0^{\pi/2} \log(1+\sin x) = -\int_{\pi/2}^{0} \log(1+\sin(\pi/2 - z))\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi/2} \log(1+\cos z)\,\mathrm{d}z\,.
$$

som ønsket.

c) Integralet kan skrives som

$$\int_0^{2\pi} (1+\cos x)\log(1+\sin x) - \log(1+\cos x)\,\mathrm{d}x$$

Målet blir nå å vise at $(1+\cos x)\log(1+\sin x) = \log(1+\cos x)$. Kall integralene for henholdsvis A og B. Ved å bruke substitusjonen $x \mapsto \pi - y$ kan første del av integralet skrives som

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} (1+\cos x)\log(1+\sin x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (1-\cos y)\log(1+\sin y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi} (1-\cos x)\log(1+\sin x)\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Der en benyttet substitusjonen $x \mapsto y + 2\pi$ ble brukt i siste overgang. Ved å ta gjennomsnittet av første og siste integral får en

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 2\log(1+\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \log(1+\cos x)\,\mathrm{d}x = B$$

Dermed så er

$$\int_0^{2\pi} (1+\cos x)\log(1+\sin - \log(1+\cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} A - B\,\mathrm{d}x = 0$$

siden $A = B$.[2]

3. En mulig fremgangsmåte er å dele integralet som

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_{-1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \tag{5.6}$$

Første integralet kan beregnes via (2.3.2) så

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(-x)^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \tag{5.7}$$

Siste integralet kan vises ved å bruke substitusjonen $y \mapsto 1/x$ slik at

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = -\int_1^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+(1/y)^2}\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} \tag{5.8}$$

Ved å sette inn likning (5.7) og (5.8) i (5.6) får en som ønsket at

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+y^2} \tag{5.9}$$

[2]Takk til Rob Johnson for denne løsningen

For å vise siste likhet kan en ta utgangspunkt i

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

Hvor igjen likning (5.7) ble benyttet i siste overgang. Ved å gange likheten ovenfor med $3/2$ så er

$$\frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 3\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_{-1}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

som var det som skulle vises. I siste overgang ble (5.9) brukt.

5. La oss benytte oss av den gamle og kjente identiteten

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x$$

slik at integralet kan skrives om som følger

$$\int_0^\pi (\pi - x) R(\sin x, \cos^2 x)\,\mathrm{d}x \tag{5.10}$$

Der det ble brukt at $\sin(\pi - x) = \sin x$ og at $\cos^2(\pi - x) = (-\cos x)^2 = \cos^2 x$. Nå er

$$\int_0^\pi xR(\sin x, \cos^2 x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \pi R(\sin x, \cos^2 x)\,\mathrm{d}x - \int_0^\pi xR(\sin x, \cos^2 x)\,\mathrm{d}x$$

Der det ikke ble gjort annet enn å dele likning (5.10) i to. Ved å legge til det opprinnelige integralet på begge sider får en

$$2\int_0^\pi xR(\sin x, \cos^2 x)\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^\pi R(\sin x, \cos^2 x)\,\mathrm{d}x$$

Beviset fullføres nå ved å dele likningen på 2. Det samme gjelder ikke for $R(\cos x, \sin^2 x)$ siden ved å bruke $\pi - x$ får en $R\big(\cos(x-\pi), \sin^2(\pi - x)\big) = R\big(-\cos x, \sin^2 x\big)$. Minustegnet ødelegger dessverre for bruken av denne teknikken.

2.4

1. Det enkleste blir å benytte seg av substitusjonen $x \to t^{-1}$.

$$\begin{aligned} J = & \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{(t-a)(t-x)}} = \int_{1/a}^{1/b} \frac{x}{\sqrt{(x^{-1}-a)(b-x^{-1})}}\,\frac{-1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ = & -\int_{1/a}^{1/b} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-xa)(xb-1)}} = \int_{1/b}^{1/a} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ab(x-b^{-1})(a^{-1}-x)}} \end{aligned}$$

Her brukte vi at $b^{-1} < a^{-1}$, og snudde grensene. Herfra innfører vi $\alpha = 1/b$ og $\beta = 1/a$ slik at

$$J = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-\alpha^{-1})(\beta^{-1}-x)}} = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}$$

hvor vi benyttet oss av eksempel (2.4.1) i siste overgang.

2. For å forenkle regningen noe innføres $g(x) = f(x + a^2/x)$. En ønsker da å vise at

$$\int_1^a g\left(t^2\right) \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^a g\left(t\right) \frac{\mathrm{d}t}{t} \,.$$

Ved å benytte seg av den logiske substitusjonen $y \mapsto t^2$ på venstre side fås

$$\frac{1}{2} \int_1^{a^2} g(y) \frac{\mathrm{d}y}{y} \,. \tag{5.11}$$

Hvor $\mathrm{d}y = 2t\,\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; \mathrm{d}t/t = \mathrm{d}y/2y$. Der siste likhet fås ved å dele på $t^2 = y$. Dette integralet kan nå deles opp på en smart måte

$$\frac{1}{2} \int_1^a g(y) \frac{\mathrm{d}y}{y} + \frac{1}{2} \int_a^{a^2} g(y) \frac{\mathrm{d}y}{y} \,, \tag{5.12}$$

og det siste integralet på høyre side kan nå skrives om via $y \mapsto a^2/t$.

$$\int_a^{a^2} g(y) \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int_1^a g(t) \frac{\mathrm{d}t}{t} \,. \tag{5.13}$$

Hvor $\mathrm{d}y = -a^2/t^2\,\mathrm{d}x$ så $-\,\mathrm{d}y/y = \mathrm{d}x/t$. Likning (5.14) skrives da om til

$$\frac{1}{2} \int_1^a g(y) \frac{\mathrm{d}y}{y} + \frac{1}{2} \int_1^a g(t) \frac{\mathrm{d}t}{t} \tag{5.14}$$

Fra dette følger det direkte at

$$\int_1^a g\left(t^2\right) \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{2} \int_1^{a^2} g(y) \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int_1^a g(y) \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

som fullfører beviset.

3. Vi deler opp integralet som følger

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\infty} f\left(x - x^{-1}\right) \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{0} f\left(x - x^{-1}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(2\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)\right) e^y \,\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{\infty} f\left(2\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)\right) e^{-y} \,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(2\sinh y\right) e^y \,\mathrm{d}y + \int_{-\infty}^{\infty} f\left(2\sinh y\right) e^{-y} \,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(2\sinh y\right) 2\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(2\sinh y\right) 2\cosh y \,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) \mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

Den første substitusjonen ble $x = e^y$ benyttet, i det andre integralet ble $x = e^{-y}$ brukt. I aller siste overgang ble $x = 2\sinh y$ slik at $\mathrm{d}x = 2\cosh y\,\mathrm{d}y$, og det fullfører beviset.

4.

Løsning 1 Legg merke til at funksjonen er symmetrisk, slik at

$$
\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}
$$

Ved nå og bruke resultatet

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x
$$

som ble vist i en tidligere oppgave har en altså at

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} \\
&= \left[\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{\pi}{2a}
\end{aligned}
$$

Løsning 2

$$\begin{aligned}
I &:= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + (x - 1/x)^2} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\left(1 + 1/x^2\right) + \left(1 - 1/x^2\right)}{a^2 + (x - 1/x)^2} \,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1 + 1/x^2}{a^2 + (x - 1/x)^2} \,\mathrm{d}x}_{A} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1 - 1/x^2}{a^2 + (x - 1/x)^2} \,\mathrm{d}x}_{B}
\end{aligned}$$

For det første integralet benyttes substitusjonen $u = x - 1/x$ så $\mathrm{d}u = (1 + 1/x^2)\,\mathrm{d}x$. Da er

$$A = \int_0^\infty \frac{1 + 1/x^2}{a^2 + (x - 1/x)^2} \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}u}{a^2 + u^2} = 2\Big[\frac{1}{u} \arctan\Big(\frac{u}{a}\Big)\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{a}$$

Videre så er $B = 0$ da integranden er odde. Alternativt la $x = -u$ i B så $-\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$,

$$B = \int_0^\infty \frac{1 - 1/(-u)^2}{a^2 + (-u - 1/u)^2} (-\mathrm{d}u) = -\int_0^\infty \frac{1 - 1/(-u)^2}{a^2 + (-1)^2\,(u - 1/u)^2} \,\mathrm{d}u = -B\,.$$

Siden $B = -B$ så er $2B = 0$ og resultatet følger. Oppsumert har en nå

$$I = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + (x - 1/x)^2} = \frac{A + B}{2} = \frac{\pi}{2a}$$

som er relativt pent svar.

5.

2.4.1

1. Ved å bruke den kjente å kjære substitusjonen $t \mapsto \tan(x/2)$ og teorem (2.4.4) får en

$$\int \frac{\mathrm{d}\theta}{a + b\sin\theta} = \int \frac{1}{a + b\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2\,\mathrm{d}t}{1 + t^2} = \int \frac{2a\,\mathrm{d}t}{(at + b)^2 + a^2 - b^2} \tag{5.15}$$

Siden $\tan(\pi/4) = 0$, $\tan(0/2) = 1$, får en

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{a + b\sin\theta} = \int_0^1 \frac{2a\,\mathrm{d}t}{(at + b)^2 + a^2 - b^2} = \int \frac{\sqrt{a^2 - b^2}\,\mathrm{d}y}{(a^2 - b^2)(1 + y^2)}$$

Via $y\sqrt{a^2 - b^2} \mapsto at + b$. Det siste integralet kjenner vi igjen som $\arctan y$, så

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{a + \sin\theta} &= \left[\frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan\left(\frac{at + b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \left[\arctan\left(\frac{a + b}{\sqrt{a^2 - 1}}\right) - \arctan\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 - 1}}\right)\right]
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Det neste steget er å bruke $\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{1+xy}$. For å forenkle regningen noe ser vi først på $x - y/(1+xy)$ med $x = (a+1)/\sqrt{a^2-b^2}$ og $y = b/\sqrt{a^2-b^2}$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} \Big/ \left(1 + \frac{a+1}{a^2-1}\right) = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \frac{a-b}{a} = \frac{a-b}{\sqrt{a^2-1}} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

Siden $(a+b)/(a^2-b^2) = 1/(a-1)$ forenkles nevner til $a/(a-b)$. Ved å bruke forrige likning og $\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{1+xy}$ på likning (5.16) får vi nå

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{a+\sin\theta} = \int_0^1 \frac{2a\,\mathrm{d}t}{(at+b)^2+a^2-b^2} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \arctan\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$$

som var det som skulle vises. Overgangen $\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{1+xy}$ er gyldig, siden $xy = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} > 1$ når $|a| > |b|$. Tilfellet hvor $a = b$ må drøftes for seg selv, og har blitt gjort tidligere. Bruker vi igjen likning (5.15) så kan det neste integralet skrives som

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a+b\sin\theta} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a\,\mathrm{d}t}{(at+b)^2+a^2-b^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{a^2-b^2}\,\mathrm{d}t}{(a^2-b^2)(1+y^2)}$$

Igjen via $y\sqrt{a^2-1} \mapsto at+1$. Nå forandres ikke grensene og vi får

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a+b\sin\theta} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

som var noe enklere å vise.

2.5.2

1. Det logiske her blir å benytte lemma (2.5.1) med $n = 3$ fra dette følger det at integralene er like, og at

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1+x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$$

En kan faktorisere teller som $x^3+1 = (x+1)(x^2-x-1)$, som medfører at

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1+x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-x-1} = \int_0^{\infty} \frac{2\,\mathrm{d}x}{(2x-1)^2+3}$$

Ved å nå bruke substitusjonen $2x-1 = \sqrt{3}\tan y$ kan integralet forenkles til

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{1+x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sec^2 y\,\mathrm{d}y}{1+(\tan y)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$$

Siden $\sec^2 y = 1+\tan^2 y$ som har blitt vist før. Oppsumert har en altså

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

som var det som skulle vises. Denne måten er noe raskere enn å beregne $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$ direkte.

3. a) En fremmgangsmåte er å dele integralet i to slik at

$$\int_0^\infty \frac{2+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1+2}{2}\int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4}$$

siden $1+1/2 = (1+2/2)$. Siste overgang følger direkte fra lemma (2.5.1) siden

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+x^{4-2}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$$

Verdien av siste integralet følger fra likning (2.34) i eksempel (2.5.7). Vi får da

$$\int_0^\infty \frac{2+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$$

som var det som skulle bestemmes. En kunne og ha delt inn integralet i

$$\int_0^\infty \frac{2+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty \frac{2\,\mathrm{d}x}{1+x^4} = 3\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$$

For deretter å ha brukt likning (2.35), uten at det ville ha gjort utregningen mer spennende eller kortere. **b)** Proposisjonen sier at

$$\int_0^\infty \frac{a+bx^{n-2}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_0^\infty \frac{1+x^{n-2}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x\,, \tag{5.17}$$

ved å sette inn $a=0, b=1$ og $b=0, a=1$ fås henholdsvis

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-2}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1+x^{n-2}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \quad \text{og} \quad \int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1+x^{n-2}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

Dette viser at lemma (2.5.1) følger fra proposisjonen. For å bevise det motsatte tilfellet, altså at proposisjonen følger fra lemmaet tar vi utgangspunkt i venstresiden av likning (5.17).

$$\int_0^\infty \frac{a+bx^{n-2}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = a\int_0^\infty \frac{x^{n-2}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x + b\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$

ved å bruke likning (2.31) fra lemmaet får vi at

$$\int_0^\infty \frac{a+bx^{n-2}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\int_0^\infty \frac{1+x^{n-2}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x + \frac{b}{2}\int_0^\infty \frac{1+x^{n-2}}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$

som var det som skulle vises.

2.6.1

1. Dette er et svært enkelt eksempel hvor delvis integrasjon kommer til nytte.

$$\begin{aligned} I &= \int e^x \sin x + e^x \cos x \,\mathrm{d}x \\ &= \left(e^x \sin x - \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x \right) + \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x \\ &= e^x \sin x + \mathcal{C} \end{aligned}$$

Hvor den den delvise integrasjonen ble utført på $e^x \sin x$. Med $v' = e^x$, $v' = e^x$ og $u = \sin x$, $u = \cos x$. Helt tilsvarende kunne en og brukt delvis integrasjon på $e^x \cos x$, men nå måtte en ha valgt $u = e^x$, $u' = e^x$ og $v' = \cos x$, $v = \sin x$.

$$\begin{aligned} I &= \int e^x \sin x + e^x \cos x \,\mathrm{d}x \\ &= \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x + \left(e^x \sin x - \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x \right) \\ &= e^x \sin x + \mathcal{C} \end{aligned}$$

Bare for å hamre inn poenget kunne en og ha brukt produktregelen baklengs

$$\int e^x \sin x + e^x \cos x \,\mathrm{d}x = \int (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' \,\mathrm{d}x = \int (e^x \sin x)' \,\mathrm{d}x$$

Som gir akkuratt det samme som før.

2. Dette problemet er hakket mer utfordrende enn forrige problem. Rett frem delvis integrasjon vil ikke fungere her. Vi kan ikke velge $v' = e^{-x^2}$ siden en da ikke klarer å finne v. En mulighet er da å velge $u = e^{-x^2}$ og $v' = x^2$. Dette gir da

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{3} x^4 e^{-x^2} \,\mathrm{d}x$$

Hvor forkortelsen $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ ble benyttet. For det første konvergerer ikke uttrykket i klammene, og for det andre er ikke det siste integralet noe enklere. Det må altså finnes en annet valg for u og v. Trikset blir nå å velge $v' = xe^{-x^2}$, $v = -e^{-x^2}/2$, og $u = x$, $u' = 1$. Dette gir det mye enklere resultatet

$$I = \int_{\mathbb{R}} x \left(-e^{-x^2}/2 \right)' \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x}{2} e^{-x^2} \right]_{\mathbb{R}} + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Hvor det oppgitte integralet ble brukt i siste overgang. For å vise grenseverdien kan en se at e^{-x^2} går mye raskere mot null enn x går mot uendelig. Alternativt l'hôpital

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{2} e^{-x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{1}{4} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x e^{x^2}} = 0$$

som blir litt meste laget å bruke mot en så søt og liten grenseverdi.

3. Anta at vi kan skrive c summen av to reelle tall $a+b$. Da kan en skrive integralet som

$$\int (x+c)\sqrt{e^x x}\,\mathrm{d}x = \int (x+a)\sqrt{e^x x}\,\mathrm{d}x + b\int \sqrt{e^x x}\,\mathrm{d}x \tag{5.18}$$

Nå kan en bruke delvis integrasjon på siste leddet med $u = \sqrt{e^x x}$, $u' = \sqrt{e^x}(1+x)/2\sqrt{x}$ og $v' = 1$, $v = x$. Dermed kan en se at $u'v = \sqrt{xe^x}(1+x)/2$ og

$$\int b\sqrt{e^x x}\,\mathrm{d}x = bx\sqrt{xe^x} - \frac{b}{2}\int \sqrt{xe^x}(1+x)\,\mathrm{d}x$$

Ved å sette dette inn i likning (5.18) får en at

$$\int (x+c)\sqrt{e^x x}\,\mathrm{d}x = bx\sqrt{xe^x} + \int \Big[(x+a) - \frac{b}{2}(1+x)\Big]\sqrt{xe^x}\,\mathrm{d}x$$

For at integralet skal skulle skrives på formen $k\sqrt{xe^x}$ må det siste integralet være null. Problemet er at en vil ende i en evig runddans med delvis integrasjon som aldri vil forenkle integralet. Eneste mulighet for at siste integralet blir null, er dersom $a = 1$ og $b = 2$ – Siden a, b ikke kan avhengige av x. En har altså at

$$\int (x+3)\sqrt{e^x x}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{e^x x}\,\mathrm{d}x$$

med valgene $c = 3$ og $k = 2$.

5. Dette er et av de morsomste integralene jeg vet om, og deler av integralet er vist på forsiden av dokumentet. Det enkleste er å først dele integralet i to biter

$$I = \int \log(\log x) + \frac{1}{\log x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\log x} - \frac{1}{(\log x)^2}\,\mathrm{d}x$$

For det første integralet kan en bruke delvis integrasjon på $\log(\log x)$ med $v' = 1$, $v = x$ og $u = \log(\log x)$, $u = 1/(x\log x)$ så

$$\int \log(\log x) + \frac{\mathrm{d}x}{\log x} = \left(x\log(\log x) - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x\log x}\right) + \int \frac{\mathrm{d}x}{\log x} = x\log(\log x)$$

Hvor konstanten ble unnlatt med vilje. Helt tilsvarende kan en bruke delvis integrasjon på det andre integralet nå med $u = 1/\log x$, $u' = -1/[x\log^2 x]$ og $v' = 1$, $v = x$.

$$\int \frac{1}{\log x} - \frac{\mathrm{d}x}{(\log x)^2} = \left(\frac{x}{\log x} + \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x\log^2 x}\right) - \int \frac{\mathrm{d}x}{\log^2 x} = \frac{x}{\log x}$$

hvor igjen konstanten ble utelatt med vilje. Ved å kombinere disse to resultatene så kan integralet skrives som

$$\int \log(\log x) + \frac{2}{\log x} - \frac{1}{(\log x)^2}\,\mathrm{d}x = x\log(\log x) + \frac{x}{\log x} + \mathcal{C}$$

Noe som er spesielt siden ingen av integralene individuelt har en elementær antiderivert.

2.6.2

1. Begynner som før med antakelsen om at svaret er et polynom av samme grad ganget med eksponensialfunksjonen. Altså at

$$\int (x^4 - 6x^2 + 8x - 3)e^{-x}\,\mathrm{d}x = (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)e^x + \mathcal{C}$$

Ved å derivere kan høyre side skrives som

$$\left[ax^4 + (4a + b)x^3 + (3b + c)x^2 + (2c + d)x + e + d\right] e^x$$

Ved å sammelikne koeffisienter på samme måte som før fås liknignssystemet.

$$\begin{aligned} 1 &= a \\ 0 &= 4a + b \\ -6 &= 3b + c \\ 8 &= 2c + d \\ -3 &= e + d \end{aligned}$$

Nest øverste øverste likning gir $b = -4a = -4$, neste gir $c = 12 - 6 = 6$. Så får en fra neste at $d = 8 - 2c = -4$, og tilslutt så er $e = 4 - 3 = 1$. Oppsumert så har en altså at

$$\begin{aligned} \int (x^4 - 6x^2 + 8x - 3)e^{-x}\,\mathrm{d}x &= (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1)e^x + \mathcal{C} \\ &= (x - 1)^4 e^x + \mathcal{C} \end{aligned}$$

Der siste likhet kan ses fra binomialformelen, og eventuelt Pascals trekant. Merk at selv større polynom løses relativt raskt. Delvis integrasjon hadde her blitt langt mer kronglete.

2. Begynner som før med antakelsen om at svaret er et polynom av

3. Begynner som før med antakelsen om at svaret er et polynom av

4. Begynner som før med antakelsen om at svaret er et polynom av

2.7

1. Det logiske her blir å benytte proposisjon (2.7.1) siden uttrykket er på formen $xR(\sin x, \cos^2 x)$. Dermed så er

$$I = \int_0^\pi x(\cos x)^2 \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi (\cos x)^2 \sin x \,\mathrm{d}x \,.$$

Det neste steget blir å bruke substitusjonen $u \mapsto \cos x$ med $\mathrm{d}u = -\sin x$. Videre så blir grensene $u = \cos 0 = 1$, $u = \cos \pi = -1$.

$$= \frac{\pi}{2}\int_1^{-1} -u^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 ,$$

hvor vi snudde grensene og brukte at x^2 er symmetrisk omkring origo. Dermed

$$\int_0^\pi x\cos^2 x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3} ,$$

som var det som skulle vises.

2. Legg først merke til at via $y \mapsto 1/x$ så kan en skrive

$$\int_1^\infty f\left(x^n + x^{-n}\right)\frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f\left(y^{-n} + y^n\right)\frac{\arctan 1/y}{y}\,\mathrm{d}y$$

Hvor det ble ble brukt at $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y/y^2 \Rightarrow \mathrm{d}x/x = -\mathrm{d}y/y$. Ved å dele opp integralet ved $x = 1$ og benytte seg av forrige resultat kan integralet skrives som

$$\int_0^1 f\left(x^n + x^{-n}\right)\frac{\arctan x + \arctan 1/x}{x}\,\mathrm{d}x \tag{5.19}$$

Beviset fullføres nå ved å benytte seg av **??**. Merk at en kunne ha fått likning (5.19) direkte ved å ha brukt proposisjon (2.4.2), med $S = 1$.

3. Det er mange måter å bestemme dette integralet på. Vi begynner med substitusjonen $x = \sin\theta$, slik at $\sqrt{1-x^2} = |\cos\theta|$ og $\mathrm{d}x = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1 - x^2(\sin\alpha)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{|\cos\theta|\cos\theta}{1-\sin^2(\theta)\sin^2(\alpha)}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{\sec^2(\theta) - \tan^2(\theta)\sin^2(\alpha)}\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

I første overgang ble grensene $\theta = \arcsin(0) = 0$ og $\theta = \arcsin(1) = \pi/2$. Videre så er $\cos\theta$ positiv på intervalet $0 \leq \theta \leq \pi/2$ så $|\cos\theta| = \cos\theta$.

Siste overgang delte vi teller og nevner på $\cos^2\theta$ og brukte at $1/\cos(\theta) = \sec(\theta)$ og $\sin\theta/\cos\theta = \tan\theta$. Videre kan vi bruke at $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$, til å skrive om nevner. Legg merke til at

$$1 + \tan^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Dette medfører at $1 = \sec^2 x - \tan^2 x$, dermed så har vi

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sec^2(\theta) - \tan^2(\theta)\big(1 - \cos^2(\alpha)\big)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 + \tan^2(\theta)\cos^2(\alpha)}$$

Herfra benyttes substitusjonen $u \mapsto \tan x$ og $\mathrm{d}u = 1 + \tan^2(x)\,\mathrm{d}x = 1 + u^2\,\mathrm{d}x$.

$$= \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}u/\left(1+u^2\right)}{1 + u^2\cos^2(\theta)\big)} = \frac{1}{1-\cos^2(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^2} - \frac{\cos^2(\theta)}{1+u^2\cos^2(\theta)}\,\mathrm{d}u$$

I siste overgang ble vanlig delbrøksoppspalting benyttet. Begge disse integralene er elementære og beregne. Merk at $1 - \cos^2(\alpha) = -\sin^2(\alpha)$ slik at

$$= \frac{1}{\sin^2(\alpha)} \left[\arctan u - \cos a \arctan\big(\cos(a)\cdot u\big)\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\sin^2(\alpha)} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\cos(\alpha)\right)$$

Dette medfører at vi kan skrive integralet vårt som

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1 - x^2(\sin\alpha)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+\cos(\alpha)} = \frac{\pi}{4\cos^2(\alpha/2)}$$

som var det som skulle vises. I den første overgangen ble det kun brukt at $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha) = 1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha \implies (1-\cos\alpha)/\sin^2\alpha = 1/(1+\cos\alpha)$. Tilsvarende i siste overgang ble dobbelidentiten $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$ brukt. Som medfører at $1 + \cos(2x) = 2\cos^2(x)$, dette er akkuratt det samme som vi har med $x = \alpha/2$. For å se delbrøksoppspaltingen kan en for eksempel gjøre det som følger

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+u^2)(1-a^2u^2)} &= \frac{1}{1-a^2}\frac{1 - a^2 + (a^2u^2 - a^2u^2)}{(1+u^2)(1+a^2u^2)} \\
&= \frac{1}{1-a^2}\frac{(1+u^2a^2) - a^2(1+u^2)}{(1+u^2)(1+a^2u^2)} \\
&= \frac{1}{1-a^2}\left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{a^2}{1+a^2u^2}\right)
\end{aligned}$$

hvor forkortelsen $a = \cos^2\alpha$ ble innført.

4. Dette integralet benytter en rekke av resultatene vi allerede har sett på. Ved å dele opp integralet fås

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\arctan x\,\mathrm{d}x}{x^2 - 2x\sin a + 1} = \int_{-\infty}^{0} \frac{\arctan x\,\mathrm{d}x}{x^2 - 2x\sin a + 1} + \int_0^{\infty} \frac{\arctan x\,\mathrm{d}x}{x^2 - 2x\sin a + 1}$$

ved å benytte substitusjonen $x \mapsto -y$ kan det integralet skrives som

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x\,\mathrm{d}x}{x^2 - 2x\sin a + 1} - \int_0^{\infty} \frac{\arctan x\,\mathrm{d}x}{x^2 + 2x\sin a + 1}$$

Begge disse integralene kan forenkles ved å dele dem opp i $(0,1) \cap (1,\infty)$

$$\int_0^1 \frac{\arctan x\,\mathrm{d}x}{x^2 \pm 2x\sin a + 1} + \int_1^{\infty} \frac{\arctan x\,\mathrm{d}x}{x^2 \pm 2x\sin a + 1} = \int_0^1 \frac{\arctan x + \arctan(1/x)\,\mathrm{d}x}{x^2 \pm 2x\sin a + 1}$$

hvor substitusjonen ble brukt $x \mapsto 1/y$ i den siste overgangen. Herfra brukes (**??**) med $\arctan x + \arctan 1/x = \pi/2$ slik at

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\arctan x \mathrm{d}x}{x^2 - 2x\sin a + 1} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 2x\sin a + 1} - \frac{1}{x^2 + 2x\sin a + 1} \mathrm{d}x$$

Resten er nå er elementær algebra. Merk at $x^2 \pm 2x\sin a + 1 = (x \pm \sin a)^2 + \cos^2 a$ dermed så er

$$J = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 \pm 2x\sin a + 1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x \pm \sin a)^2 + \cos^2 a}$$

Ved å sette $u\cos a \mapsto x \pm \sin a$ og holde fortegne bent i munnen forenkles integralet til

$$J = \pm\frac{1}{\cos a}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\cos a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\sin a \pm 1}{\cos a}\right)\right] = \frac{1}{\cos a}\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{a}{2}\right)$$

Via enten sumformelen for arctangens eller diverse trigonometriske identiteter. Settes alt sammen får en at

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\arctan x \mathrm{d}x}{x^2 - 2x\sin a + 1} = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{\cos a}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) - \frac{1}{\cos a}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{2}\frac{a}{\cos a}$$

som var det som skulle beregnes.

2.9.2

1. $\log\left(\frac{2}{\pi}\right)$

2. $\log\left(\frac{2}{\pi}\right)$

3. Legg merke til at $x^a - x^b = (1 + x^a) - (1 + x^b)$. En kan dermed skrive

$$\frac{x^a - x^b}{(1+x^a)(1+x^b)} = \frac{(1+x^a) - (1+x^b)}{(1+x^a)(1+x^b)} = \frac{1}{1+x^b} - \frac{1}{1+x^a}.$$

Integralet kan nå skrives på følgende form

$$\int_0^\infty \frac{x^a - x^b}{(1+x^a)(1+x^b)} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^b)(1+x^2)} - \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^a)(1+x^2)}.$$

Fra eksempel (2.9.2) og spesielt likning (2.61) har vi $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^a)(1+x^2)} = \frac{\pi}{4}$ for alle a. Altså er

$$\int_0^\infty \frac{x^a - x^b}{(1+x^a)(1+x^b)} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0,$$

som var det som skulle vises.

4. $\log\left(\frac{2}{\pi}\right)$

2.9.3

2.10.1

1. Begynn med substitusjonen $u = 2x - 1$ da er $\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x$ og

$$x - x^2 = \frac{1}{2}(u+1)\left[\frac{1}{2}(u+1) - 1\right] = \frac{1-u^2}{4}$$

Innsatt får en da direkte at

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}} = \int \sqrt{\frac{4}{1-u^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u = \arcsin u = \arcsin(2x-1) + \mathcal{C}$$

Om denne løsningen virker noe rar, hjelper det å fullføre kvadratet i teller. Da ser en at

$$-\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

Og dette hinter kraftig til at substitusjonen $x - 1/2 = u/2 \;\Rightarrow\; u = 2x - 1$ vil virke. Det siste integralet er standard, men alternativt kan substitusjonen $u = \sin y$ benyttes. Siden $\sqrt{1-\sin^2 y} = \cos y$ og $\mathrm{d}u = \cos \mathrm{d}y$.

2. Legg merke til at $(\cos x + \sin x)' = \cos x - \sin x$ slik at

$$I = \int \frac{(\cos x + \sin x)'}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log\left(\frac{(\cos x + \sin x)'}{\cos x + \sin x}\right)\mathrm{d}x = \log\left(\frac{(\cos x + \sin x)'}{\cos x + \sin x}\right) + \mathcal{C}$$

hvor det ble benyttet at

$$\int \frac{\overbrace{f'(x)}^{\mathrm{d}u}}{\underbrace{f(x)}_{u}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \log f(x)\,\mathrm{d}x$$

holder for alle funksjoner.

4. En kan skrive integralet som følger

$$J = \int \frac{\sqrt{x+1}}{x^{7/2}} = \int \frac{\sqrt{x+1}}{x^{1/2}}\frac{\mathrm{d}x}{x^3} = \int \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

Ved hjelp av substitusjonen $t^2 = 1 + (1/x)$ så er $2t\,\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x/x^2$ og $1/x = t^2 - 1$ innsatt fås da

$$\begin{aligned}
J &= -\int \left(t^2 - 1\right)\left(\sqrt{t^2}\,\right)2t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{3}t^2\sqrt{t^2} - \frac{2}{5}t^4\sqrt{t^2} + \mathcal{C} \\
&= \frac{2}{15}t^2\sqrt{t^2}\left(3t^2 - 5\right) + \mathcal{C} \\
&= \frac{2}{15}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3/2}\left[3\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 5\right] + \mathcal{C}
\end{aligned}$$

5. Ved faktorisering fås

$$I = \int \frac{-1}{x^3 + x^7} = -\int \frac{1 + x^4 - x^4}{x^3(1 + x^4)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1 + x^4} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$$

Sistnevnte integral er rett frem, og førstnevnte kan løses via $u = x^2$ så $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2} + \frac{2}{2x^2} = \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}\arctan\left(x^2\right) + \mathcal{C}$$

6. Dette integralet har blitt løst i eksempel (2.9.3) så

$$\int_0^{e^\pi} \sin(\log x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[x\sin\log x - x\cos\log x\Big]_0^{e^\pi} = \frac{1}{2}e^\pi$$

Alternativt kan integralet skrives ved substitusjonen $u = \log x$ til

$$I = \int_{-\infty}^{\pi} e^u \sin u\,\mathrm{d}u$$

Hvor en har lagt merke til at $e^u = x$ og at $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x/x \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = e^u\,\mathrm{d}u$. Dette er et standard integral somkan beregnes på samme måte som før ved å innføre hjelpeintegralet $e^u\cos u$, via delvis integrasjon eller ved å skrive det om på kompleks form. Legg merke til at

$$\operatorname{Im}\left(\int e^u e^{iu}\,\mathrm{d}u\right) = \operatorname{Im}\left(\int e^u\cos u + i\cdot e^u\sin u\,\mathrm{d}u\right) = \int e^u\sin u\,\mathrm{d}u$$

Der Eulers identitet

$$e^{i\omega x} = \cos\omega x + i\sin\omega x$$

ble benyttet. På den andre siden så er Dette oppnås ved å benytte seg av at $i^2 = -1$ og å gange med den konjugerte.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(\int e^u e^{iu}\,\mathrm{d}u\right) &= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{i+1}\cdot\frac{i-1}{i-1}e^{iu}e^u\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2}\,(1-i)\,(\cos u + i\sin u)e^u\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2}\Big[\sin u + \cos u\Big]e^u + i\cdot\frac{1}{2}\Big[\sin u - \cos u\Big]e^u\right) \\
&= \frac{1}{2}\Big[\sin u - \cos u\Big]e^u
\end{aligned}
$$

Ved å sammenlikne de reelle delene i stedet ville en fått integralet av $e^u \cos u$. En får nå at integralet kan skrives som

$$
\int_{-\infty}^{\pi} e^u \sin u\,\mathrm{d}u = \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\pi} e^u e^{iu}\,\mathrm{d}u\right) = \left[\frac{1}{2}\Big[\sin u - \cos u\Big]e^u\right]_{-\infty}^{\pi} = \frac{1}{2}e^{\pi}
$$

som vist før.

9. Det er flere måter å angripe dette integralet på. Det letteste er nok å bruke korollar (2.3.3) med $f(x) = \sin x$, $a = 0$ og $b = \pi/2$. Da får en direkte

$$
\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin(\pi/2 - x) + \sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi/2}{2} = \frac{\pi}{4}\,,
$$

Som ønsket. Integralet kan og beregnes ved å bruke teorem (2.3.1) siden $g(x) + g(\pi/2 - x)$ er konstant. Helt elementært kan en og ta utgangspunkt i

$$
\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x\,.
$$

Slik at integralet kan skrives som

$$
\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos x + \sin x} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\,(\pi/2 - x)\,\mathrm{d}x}{\cos\,(\pi/2 - x) + \sin\,(\pi/2 - x)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x}\,.
$$

Dobbler en integralet vårt får en at

$$
\begin{aligned}
2I &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Slik at en får da direkte at

$$
\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x
$$

Som vist før.

14.

Det er flere måter å angripe denne sauen i fåreklær.

Løsning 1 Vi prøver seg på den virkelige vågale substitusjonen

$$u = \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}\ , \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)'}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}$$

Altså ser en at

$$\int \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}} + \mathcal{C}$$

Alternativt kan en benytte seg av substitusjonen da har en videre at

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{u}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$$

Altså bli integralet vår følgende

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x =& 2\int \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x \\ =& 2\int \mathrm{d}u = 2u = 2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}} + \mathcal{C}\end{aligned}$$

Moralen er ikke vær redd for å benytte vågale substitusjoner. For kompletthet så går en derivasjonen av u nærmere i sømmene. Ved bruk av kjerneregelen så er $\left(g(x)^{1/2}\right)' = 1/2 g(x)^{1/2-1} \cdot g'(x) = \frac{1}{2}\frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}}$ så

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}} &= \frac{1}{2}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}} = \frac{1}{2}\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}} \cdot \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

Som var det en ønsket å vise.

Løsning 2 Vi benytter seg av den litt mindre vågale substitusjonen

$$u = x + \sqrt{x^2+1}\ , \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Så integralet vårt kan bli omformet som følger

$$\begin{aligned}I = \int \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{u} = 2\int \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} \\ &= 2\sqrt{u} + \mathcal{C} = 2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}} + \mathcal{C}\end{aligned}$$

Her ble det implisitt brukt at

$$\frac{\sqrt{u}}{u} = \frac{\sqrt{u}}{u}\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{u}} \text{ og } \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

15. Integralet kan bli løst på flere ulike metoder, den antakeligvis mest kreative metoden er vist under.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^7 - x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^7\left(1 - \frac{1}{x^6}\right)} \\
u &= 1 - \frac{1}{x^6}\,, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{6}{x^7} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = \frac{6}{x^7}\,\mathrm{d}x \\
I &= \frac{1}{6}\int \frac{1}{1 - \frac{1}{x^6}} \cdot \frac{6}{x^7}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{6}\log|u| + \mathcal{C} \\
I &= \frac{1}{6}\log\left|1 - \frac{1}{x^6}\right| + \mathcal{C}
\end{aligned}$$

16. Den slaviske metoden blir å først bestemme integralet av $\cos^4(x)$ for deretter å bruke delvis integrasjon.

her vil vi heller benytte proposisjon (2.7.1)

$$\int_0^\pi xR(\sin x, \cos^2 x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi R(\sin x, \cos^2 x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Heldigvis kan integralet vårt skrives på denne formen siden $\cos^4(x) = (\cos^2(x))^2$. Dermed så er

$$I = \int_0^\pi x\cos^4(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \cos^4(x)\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi/2} \cos^4(x)\,\mathrm{d}x$$

Hvor en kan se siste overgang enten fra symmetri, eller ved å dele integralet ved $\pi/2$. Det finnes uttallige måter å beregne det siste integralet på. Det raskeste er nok å gjennskjenne det som et av Wallis' integral

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}$$

som gir oss svaret direkte. Vi velger dog å vise integralet på et mer elementært vis. Via symmetri eller substitusjonen $x \mapsto \pi/2 - x$ har vi

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^4(x)\,\mathrm{d}x$$

Dermed så kan integralet nå skrives som

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \cos^4(x) + \sin^4(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}\int_0^\pi 3 + \cos(4x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}\int_0^\pi 3\,\mathrm{d}x$$

Siste integralet er enkelt å regne ut. Dette gir dermed

$$\int_0^\pi x\cos^4(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}\int_0^\pi 3\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{16}$$

som var det som skulle vises. Vi går så mellomregningene litt nærmere i sømmene. For å se den trigonometriske omskrivningen har vi

$$\begin{aligned}\cos^4(x) + \sin^4(x) &= \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2(2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) = \frac{3+\cos 4x}{4}\end{aligned}$$

Å se at det siste integralet er null kan enten sees ved direkte regning eller symmetri. Vi velger dog (som vanlig) en litt annen vri. La $f(x) = \cos(x)$ eller $f(x) = \sin x$ da er

$$\int_0^{2\pi n} f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

siden vi integrerer over hele perioder. Ved å bruke substitusjonen $x = 2n$ så har vi

$$\int_0^\pi f(2nu)\,\mathrm{d}u = 0$$

som ønsket. For å få integralet vårt setter vi $f(x) = \cos x$ og $n = 2$.

17. Løsning: 1 Her velger en å benytte seg av delvis integrasjon med

$$u = \log(x)^2\,,\ v' = \frac{1}{x^2}\,,\ u' = 2\frac{\log x}{x}\,,\ v = -\frac{1}{x}$$

Dette gir seg at

$$\int \left(\frac{\log x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\log(x)^2 + 2\int \frac{\log x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Igjen bruker en delvis integrasjon hvor

$$u = \log x\,,\ v' = \frac{1}{x^2}\,,\ u' = \frac{1}{x}\,,\ v = -\frac{1}{x}$$

Så dette gir seg at det ubestemte integralet kan skrives som

$$\int \left(\frac{\log x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = -\frac{\log(x)^2}{x} - 2\frac{1}{x}\log x - \int -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Med innsatte grenser gir dette seg

$$\int_1^\infty \left(\frac{\log x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \left[-\frac{\log(x)^2}{x} - 2\frac{\log x}{x} - \frac{2}{x}\right]_1^\infty = 2$$

Den siste grensen kan for eksempel vises via rekkeutvikling, eller L'hôptial. La $f(x) = \log(x)^a/x$ hvor $a > 1$ da har en

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)^a}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{a\dfrac{\log(x)^{a-1}}{x}}{1} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{a!\dfrac{\log(x)^{a-a}}{x}}{1} = 0$$

Hvor en benyttet seg av L'hôptial, a antall ganger da en har et ∞/∞ uttrykk hver gang.

Løsning: 2 Uten videre lar en $t = \log x$ så $x = e^t$ og $\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ innsetning gir da

$$\int_1^\infty \left(\frac{\log x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_0^\infty e^{-t}t^2\,\mathrm{d}t = 2!$$

Den siste likheten kommer fra gammafunksjonen, som er definert som følger. La nå z være et positivt heltall, da er

$$\int_0^\infty e^{-t}t^z\,\mathrm{d}t = z!$$

Denne funksjonen er bevist i Del I, og gjør en sterk tilbakekomst i Del III.

18.

$$I = \int \frac{(x+2)^2}{(x+7)^5}\,dx = \int \left(\frac{x+2}{x+7}\right)^2 \frac{1}{(x+7)^3}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{La nå } u = \frac{x+2}{x+7}\,,\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{5}{(x+7)^2}$$

$$= \frac{1}{5}\int \left(\frac{x+2}{x+7}\right)^2 \left(\frac{1}{x+7}\right) \frac{5}{(x+7)^2}\,\mathrm{d}x$$

Nå trenger en å uttrykke $\frac{1}{x+7}$ via u, Legg merke til at $1 - u = \frac{5}{x+7}$, slik at

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5}\int u^2 \cdot \left(\frac{1-u}{5}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{25}\left[\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4\right] + \mathcal{C} \\
&= \frac{1}{25}\frac{1}{12}u^3\left[4 - 3u\right] + \mathcal{C} \\
&= \frac{1}{300}\left(\frac{x+2}{x+7}\right)^3 \left[4 - 3\left(\frac{x+2}{x+7}\right)\right] + \mathcal{C} \\
&= \frac{1}{300}\left(\frac{x+2}{x+7}\right)^3 \left(\frac{22+x}{x+7}\right) + \mathcal{C}
\end{aligned}$$

$$\int \frac{(x+2)^2}{(x+7)^5}\,dx = \frac{1}{300}\frac{(x+2)^3(22+x)}{(x+7)^4} + \mathcal{C}$$

20. Legg merke til at

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2}\sqrt{2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\left|\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\right|\mathrm{d}x\\ &= \sqrt{2}\left[2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right]_0^{\pi/2} = 2\sqrt{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin(0)\right] = 2\end{aligned}$$

Den vanskeligste overgangen er nok den første, den er vist i større detalj under. Vi har

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - \left(1-\cos^2 x\right) = 2\cos(x)^2 - 1$$

Legger en til 1 på begge sider, og setter $x = t/2$ får en

$$\cos t + 1 = 2\cos\left(\frac{1}{2}t\right)^2$$

som var det en ønsket å vise. Den neste tingen som kan virke uklart er hvorfor en fjerner absoluttegnet og dette er enkelt og greit fordi $\cos(x/2) > 0$ når $x \in [0,\pi/2]$. Videre i utregningen blir det kun brukt kjente ting som at $(\sin x)' = \cos x,\ \sin(0) = 0,\ \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ osv.

23. Fra tidligere vet en at

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x) + f(-x)\,\mathrm{d}x \tag{5.20}$$

Ved innsetning får en da at

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{x^{2012}}{1+e^x} + \frac{(-x)^{2012}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \frac{x^{2012}}{1+e^x} + \frac{\left((-x)^2\right)^{1006}}{1+e^{-x}}\,\frac{e^x}{e^x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \frac{x^{2012}}{1+e^x} + \frac{e^x\cdot x^{2012}}{e^x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \frac{x^{2012}\left(1+e^x\right)}{1+e^x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 x^{2012}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2013}\cdot x^{2013}\right]_0^1 = \frac{1}{2013}\end{aligned}$$

24.

Løsning 1 Vi legger merke til at integralet er odde omkring $x = \pi/2$, og derfor null.

Løsning 2 En helt tisvarende metode er å bruke substitusjonen $u = \pi - x$. Vi har vist tidligere at

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x$$

Dette gir seg på vårt integral at

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi \sin x \sin 2x \sin 3x \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi \sin(\pi - x)\sin(2(\pi - x))\sin(3(\pi - x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi (-\sin x)(-\sin 2x)(-\sin 3x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^\pi \sin x \sin 2x \sin 3x \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Dobbler en integralet vårt får en at

$$\begin{aligned}
2I &= \int_0^\pi \sin x \sin 2x \sin 3x \,\mathrm{d}x - \int_0^\pi \sin x \sin 2x \sin 3x \,\mathrm{d}x \\
2I &= 0 \\
I &= 0
\end{aligned}$$

Nå var en svært nøye i utledningen vår her. Men det er nok å si at dersom $I = -I$ så er $I = 0$.

28. Småkjip oppgave, legg merke til at

$$\sqrt{\frac{1+x}{x^3}} = \sqrt{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1+x}{x}} = \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}} \tag{5.21}$$

Herfra benytter en seg av substitusjonen

$$\begin{aligned}
& u = 1 + \frac{1}{x}\ ,\ x = \frac{1}{u-1} \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x^2}\ \Rightarrow\ x\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\ \Rightarrow\ & \frac{1}{u-1}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Integralet vår kan dermed skrives som

$$I = \int \sqrt{\frac{x+1}{x^3}}\,\mathrm{d}x = -\int \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \tag{5.22}$$

$$= -\int \frac{\sqrt{u}}{u-1}\,\mathrm{d}u \tag{5.23}$$

29. Legg merke til at en kan skrive om integranden som følger

$$\frac{x^2(\log x - 1)}{x^4 - (\log x)^4} = \frac{\left(\frac{x}{\log x}\right)^2}{\left(\frac{x}{\log x}\right)^4 - 1} \cdot \frac{\log x - 1}{\log^2 x}$$

Dette hinter kraftig til at substitusjonen $\gamma = x/\log x$ vil virke. Da får en fra kvotientregelen

$$\gamma = \frac{x}{\log x} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}\gamma = \frac{\log x - 1}{\log^2 x}\,\mathrm{d}x$$

Innsatt får en da direkte at integralet kan skrives som

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x^2(\log x - 1)}{x^4 - (\log x)^4}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\left(\frac{x}{\log x}\right)^2}{\left(\frac{x}{\log x}\right)^4 - 1} \cdot \frac{\log x - 1}{\log^2 x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\gamma^2}{\gamma^4 - 1}\,\mathrm{d}\gamma \\
&= \int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\gamma - 1} - \frac{1}{\gamma + 1}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{1+\gamma^2} \\
&= \frac{1}{4}\log\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right) + \frac{1}{2}\arctan(\gamma) + \mathcal{C} \\
&= \frac{1}{4}\log\left(\frac{x - \log x}{x + \log x}\right) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{\log x}\right) + \mathcal{C}
\end{aligned}$$

Og en er ferdige. Oppspaltingen av brøken kan eksempelvis gjennomføres slik

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{x^4 - 1} &= \frac{1}{2}\frac{(x^2 - 1) + (x^2 + 1)}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2 + 1} \\
&= \frac{1}{4}\frac{(x+1) - (x-1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}
\end{aligned}$$

32. Begynn med substitusjonen $z = 2^x - 1$ så $x = \log(1+z)/2$. Integralet blir da

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty \frac{x - 1}{\sqrt{2^x - 1}\,\log(2^x - 1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\log^2(2)}\int_0^\infty \frac{\log(z+1)}{z^{1/2}(1+z)\log(z)}\,\mathrm{d}z$$

Deler nå integralet opp fra $(0,1)$ til $(1,\infty)$. I det siste integralet blir variabelskifte $z \to 1/y$ benyttet så

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\log^2(2)}\int_0^1 \frac{\log(1+z)}{z^{1/2}(1+z)\log(z)}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{\log^2(2)}\int_0^1 \frac{\log(1+1/y)}{y^{-1/2}(1+1/y)(-\log(y))}\,\frac{\mathrm{d}y}{y^2}$$

Ved å bytte tilbake fra dummy-variablenen y tilbake til z i det siste integralet og forenkle integranden kan uttrykket forenkles til

$$= \frac{1}{\log^2(2)} \int_0^1 \frac{\log(1+z)}{z^{1/2}(1+z)\log(z)}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{\log^2(2)} \int_0^1 \frac{\log z - \log(1-z)}{z^{1/2}(1+z)\log(z)}\,\mathrm{d}z$$
$$= \frac{1}{\log^2(2)} \int \frac{\mathrm{d}z}{z^{1/2}(1+z)} = \frac{1}{\log^2(2)} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}r}{1+r^2} = \frac{\pi}{2\log^2(2)}$$

Hvor i nest siste linje ble substitusjonen $r \mapsto z^{1/2}$ og $z = r^2$.

35. Hej Hej

37. Et forholdsvis tøft integral om en ikke ser crux'et. Legg merke til at

$$4x^5 - 1 = x \cdot (x^5 + x + 1)' - x' \cdot (x^5 + x + 1)$$

ved nå og bruke kvotientregelen som en har sett nøyere på før

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = -\frac{uv' - u'v}{v^2}$$

baklengs. Kan integralet skrives som

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^5 - 1}{(x^5 + x + 1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x \cdot (x^5 + x + 1)' - x' \cdot (x^5 + x + 1)}{(x^5 + x + 1)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int \left(\frac{x}{x^5 + x + 1}\right)' \mathrm{d}x \\ &= -\frac{x}{x^5 + x + 1} + \mathcal{C} \end{aligned}$$

og en er ferdige.

38. Vi studerer først det ubestemte integralet og legger merke til at første del kan enkelt integreres.

$$\int \frac{x}{x+1} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x = x - \log x - \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x$$

Hvor det ble brukt at $x/(x+1) = 1 - 1/(x+1)$. Det siste integralet kan enten løses ved å først sette $u^2 = (x-1)/(x+1)$ eller via delvis integrasjon

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x = (x+1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - \int \frac{x+1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$$

Hvor $u = \sqrt{(x-1)/(x+1)}$ og $v = x + 1$ ble brukt. det siste integralet har blitt regnet ut før, og første del kan forenkles til $\sqrt{x^2-1}$, oppsumert har en

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2-1} - \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

Ved å bruke dette resultatet og sette inn grenesene bir det opprinnelige integralet

$$\int_1^\infty \frac{x}{x+1} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x = \left[x - \log(x+1) - \sqrt{x^2-1} + \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right]_1^\infty$$

Å sette inn $x = 1$ gir ingen problemer ovenfor og blir $1 - \log 2$, mens tilfellet hvor $x \to \infty$ må behandles med større omhu. Heldigvis kan grensen deles opp og en kan vise følgende

$$\lim_{x\to\infty} x - \sqrt{x^2-1} = 0 \text{ og } \lim_{x\to\infty} -\log(x+1) + \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = \log 2$$

For å vise første grenseverdi ganger vi med den konjugerte

$$\lim_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^2-1})\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} = 0$$

hvor konjugatsetningen $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ ble brukt. For å vise siste grenseverdi kombineres logaritmene, for deretter å bruke l'hôpital

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \log\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+1}\right) &= \log\left(\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+1}\right) \\
&= \log\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1 + x/\sqrt{x^2-1}}{1}\right) = \log 2
\end{aligned}$$

siden $x/\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^2/(x^2-1)} = \sqrt{1 + 1/(x^2-1)} \sim 1$ når $x \to \infty$. Oppsumert har en altså at

$$\int_1^\infty \frac{x}{x+1} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x = \log 2 - (1 - \log 2) = 2\log 2 - 1$$

som var det som skulle beregnes.

40. Dette er et noe langt integral. Begynner med å dele opp integralet i to deler

$$I = \underbrace{\int_{-\pi}^{0} \frac{x \sin x \arctan e^x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x}_{A} + \underbrace{\int_{0}^{\pi} \frac{x \sin x \arctan e^x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x}_{B}$$

Ved å sette $x \mapsto -t$ i integralet A fås

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-\pi}^{0} \frac{x \sin x \arctan e^x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\pi}^{0} \frac{(-t)\sin(-t)\arctan e^{-t}}{1+\cos^2(-t)}(-\,\mathrm{d}t) \\
&= \int_{0}^{\pi} \frac{t \sin t \arctan e^{-t}}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Ved å legge sammen A og B og benytte at $\arctan x + \arctan 1/x = \pi/2$ kan det opprinnelige integraler skrives som

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \frac{t \sin t \,(\arctan e^x + \arctan 1/e^x)}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{t \sin t}{1+\cos^2 t} \end{aligned}$$

Husk at $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$, eksempelvis via $x \mapsto a+b-u$. Slik at

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{t \sin t}{1+\cos^2 t} = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{(\pi - t)\sin(\pi - t)}{1+\cos^2(\pi - t)} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{(\pi - t)\sin t}{1+\cos^2 t} = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\pi \sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t - I \end{aligned}$$

Dermed så er

$$I = \frac{\pi}{4} \int_0^\pi \frac{\pi \sin t}{1+\cos^2 t} = \frac{\pi^2}{4} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \frac{\pi^3}{8} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3$$

Som var det som skulle beregnes.

2.10.1

41. Før vi begynner med løsningen minner vi på at $\cot x$ er definert som $\cot x = 1/\tan x$. Som vil bli mye brukt fremmover, dette fører direkte til at $1 = \cot x \tan x$. Ved å bruke subtitusjonen $x \mapsto \pi/2 - u$ eller $(\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^a f(a) + f(a - x)\,\mathrm{d}x)$ fås

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\log \tan x} + \frac{1}{1-\tan x} + \frac{1}{\log \cot x} + \frac{1}{1-\cot x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Hvor det kun ble brukt at $\tan(\pi/2 - x) = \frac{\sin(\pi/2-x)}{\cos(\pi/2-x)} = \frac{\cos x}{\sin x} = 1/\tan x = \cot x$. Tanken er nå at vi kan forenkle uttrykket ved å kombinere logaritmene

$$\frac{1}{\log \tan x} + \frac{1}{\log \cot x} = \frac{\log \cot x + \log \tan x}{(\log \tan x)(\log \cot x)} = \frac{\log(\cot x \tan x)}{(\log \tan x)(\log \cot x)} = 0$$

siden $\cot x \tan x = 1$ og $\log 1 = 0$. Tilsvarende for de to siste leddene får vi

$$\frac{1}{1-\tan x} + \frac{1}{1-\cot x} = \frac{2 - \cot x - \tan x}{(1-\tan x)(1-\cot x)} = 1$$

Siden $(1-\tan x)(1-\cot x) = 2\cot x \tan x + \cot x - \tan x = 2 - \cot x - \tan x$. Integralet forenkles dermed ned til

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\log \tan x} + \frac{1}{1-\tan x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\log \tan x} + \frac{1}{1-\tan x} + \frac{1}{\log \cot x} + \frac{1}{1-\cot x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 0 + 1\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

som var det som skulle vises.

42. Integralet kan forenkles ved å se at telleren danner et perfekt kvadrat

$$e^{2x} - 2 + e^{-2x} = (e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + \left(e^{-x}\right)^2 = \left(e^x - e^{-x}\right)^2$$

Integralet kan da skrives som

$$\int_0^{\log 2} \frac{\sqrt{\left(e^x - e^{-x}\right)^2}}{e^x + e^{-x}} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\log 2} \frac{|e^x - e^{-x}|}{e^x + e^{-x}} \, \mathrm{d}x = \int_0^{\log 2} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \, \mathrm{d}x$$

siden $e^x - e^{-x} > 0$ når $x > 0$. Heretter kan substitusjonen $u \mapsto e^x + e^{-x}$ brukes. Da er $\mathrm{d}u = [e^x - e^{-x}] \, \mathrm{d}x$ og grensene blir $e^0 + e^{-0} = 2$ og $e^{\log 2} - e^{-\log 2} = 5/2$.

$$\int_0^{\log 2} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \, \mathrm{d}x = \int_2^{5/2} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \log(5/2) - \log(2) = \log(5/4)$$

som ønsket.

43. Integralet minner nesten om enhets identiteten $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Dessverre har vi $\sin^2 u + \cos^2 v$, $u = \sin x$ og $v = \cos x$. Vi har derimot Bruker vi $x \mapsto \pi/2 - y$ fås

$$\begin{aligned} I &= -\int_{\pi/2}^{0} \sin^2(\sin \pi/2 - y) + \cos^2(\cos \pi/2 - y) \, \mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^2(\cos y) + \cos^2(\sin x) \, \mathrm{d}y \end{aligned}$$

Siden $\cos \pi/2 - y = -\sin y$ og $\sin \pi/2 - y = \cos y$. Ved å ta gjennomsnittet av dette integralet med vårt originalet fås

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2(\sin x) + \cos^2(\sin x) + \sin^2(\cos x) + \cos^2(\cos x) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 1 + 1 \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Siden argumentene er like følger resultatet fra enhetsformelen.

47. 0

48. Vi definerer de ubestemte integralene

$$J = \int \frac{\sin x \, \mathrm{d}x}{e^x - \sin x - \cos x} \quad \text{og} \quad I = \int \frac{e^x - \cos x}{e^x - \sin x - \cos x} \, \mathrm{d}x.$$

Der valget av I er valgt slik at

$$J - I = \int -\frac{e^x - \sin x - \cos x}{e^x - \sin x - \cos x} \, \mathrm{d}x = -x$$

og heldigvis så er også $J+I$ rimelig pen å beregne

$$J+I=\int \frac{(-e^x+\sin x+\cos x)'}{-e^x+\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x=\log|-e^x+\sin x+\cos x|$$

Ved å løse systemet så er altså

$$\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{e^x-\sin x-\cos x}=-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\log|-e^x+\sin x+\cos x|$$

Setter en nå inn grensene kan integralet skrives som

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{e^x-\sin x-\cos x}=-\frac{\pi}{2}+\log\left|\frac{e^{2\pi}-1}{e^{\pi}+1}\right|=-\frac{\pi}{2}+\log\left(e^{\pi}-1\right)$$

som var det som skulle bestemmes. Tilslutt noteres det at nevneren er positiv når $x>0$ slik at det ikke er noen problem med singulariter. I siste overgang ble det benyttet at $\log(x^2-1)=\log(x-1)+\log(x+1)$.

52. Ved å bruke substitusjonen $x^2\mapsto t$ så er $2x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ slik at integralet forenkles til

$$I=\frac{1}{2}\int_{\log 2}^{\log 3}\frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{\sin t+\sin(\log 6-t)}$$

Ved nå og bruke enten å bruke proposisjon (2.3.1), eller substitusjonen $y\mapsto a+b-x$ har en at

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)$$

Hvor $a+b-x=\log 6-x$. Ved å bruke dette på vårt integral fås

$$I=\frac{1}{2}\int_{\log 2}^{\log 3}\frac{\sin(\log 6-t)\,\mathrm{d}t}{\sin(\log 6-t)+\sin t}$$

Gjennomsnittet av disse to integralene blir følgelig

$$\begin{aligned}
I&=\frac{1}{4}\int_{\log 2}^{\log 3}\frac{\sin t}{\sin t+\sin(\log 6-t)}+\frac{\sin(\log 6-t)}{\sin(\log 6-t)+\sin t}\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{4}\int_{\log 2}^{\log 3}\frac{\sin t+\sin(\log 6-t)}{\sin t+\sin(\log 6-t)}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{4}\big(\log 3-\log 2\big)=\frac{1}{2}\log\sqrt{3/2}
\end{aligned}$$

Merk at etter substitusjonen $x^2\mapsto t$ kunne teorem (2.3.1) blitt benyttet direkte siden $f(x)-f(a+b-x)$ er konstant på intervalet.

53. La $f(x)=x^7-3x^5+7x^3-x+1$. Da er $f(-x)=-(x^7-3x^5+7x^3-x+1)+2$, som er det samme som at $f(x)+f(-x)=2$. Interesant! For å forenkle integralet benyttes substitusjonen nå $y\mapsto -x$, så $\mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}y$, $x=\pm\pi/4\Rightarrow y=\mp\pi/4$.

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{f(x)}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=-\int_{\pi/4}^{-\pi/4}\frac{f(-y)}{\cos^2(-y)}\,\mathrm{d}y=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{f(-x)}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

Ved å ta gjennomsnittet av disse to uttrykkene for integralet fås da

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{f(x)+f(-x)}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = 2\Big[\tan x\Big]_0^{\pi/4} = 2$$

Som var den en ønsket å bestemme. Hvor det ble brukt at $f(x)+f(-x)=2$, og at $(\tan x)' = 1/\cos^2 x$. Pent!

2.10.2

1. Ve

2.

a) Vi ønsker å vise at integralet over $(-\infty,\infty)$ er null. Ved å bruke at integranden er symmetrisk, og substitusjonen $x \mapsto yt$ så er

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-y^2}{(y^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} \frac{(yt)^2-y^2}{(y^2+(yt)^2)^2}\,y\,\mathrm{d}t = 2y\int_0^{\infty} \frac{t^2-1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$$

Legg nå merke til at integralet over $(1,\infty)$ kan skrives som

$$\int_0^{\infty} \frac{t^2-1}{((1/x)^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^{0} \frac{t^2-1}{((1/x)^2+1)^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{-x^2} = -\int_0^{1} \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

via substitusjonen $t \mapsto 1/x$. Dette medfører at

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x + 2\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x = 0\end{aligned}$$

som var det som skulle vises. Her ble forkortelsene $f(x,y) = (x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2$ og $f(x,1) = f(x)$ innført.

$$2\int_1^{\infty} \frac{x^2-y^2}{(y^2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_1^{0} \frac{(1/u)^2-y^2}{(y^2+(1/u)^2)^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{-u^2} = -2\int_0^{1} \frac{u^2-y^2}{(y^2+u^2)^2}\,\mathrm{d}u$$

b)

c) Den første likheten kan etableres ved å dele opp integralet og bruke inversjonen $u \mapsto 1/x$ på siste integral. Vi har

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^0 \frac{\log 1/u}{(1+[\frac{1}{u}]^2)^2}\frac{\mathrm{d}u}{-u^2} = -\int_0^1 \log u \frac{u^2}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u$$

via $u \mapsto 1/x$. Deler vi opp integralet og bruker likningen ovenfor fås

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\log x\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\log x\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\log x\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\log x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \log x \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\log x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

som var det som skulle vises.

b) For å løse integralet som innvolverer logritmer har vi ikke så mange verktøy tilgjengelig. Senere vil vi få flere, men så langt har vi stort sett bare delvis integrasjon. Vi velger

$$v' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \quad \text{og} \quad u = \log x$$

Husker vi tilbake har en allerede regnet ut v', se lemma (2.6.1) med $x = 1$.

$$v = \frac{x}{1+x^2} \quad \text{og} \quad u' = \frac{1}{x}$$

Alternativt så kan vi beregne integralet som følger

$$\int \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int -\frac{(1/x+x)'}{(1/x+x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1/x+x} = \frac{x}{x^2+1}$$

Via $u \mapsto 1/x + x$ siden $(-1/u^2)' = 1/u$. Ved å sette inn har vi nå

$$I = \int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\log x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{1+x^2}\log x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Første del beregnes til null siden $x \log x \to 0$ når $x \to 0$. Siste integral er elementert

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\log x\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

som var det som skulle beregnes.

3. Første steg blir å derivere og kvadrere $y(t)$ og $x(t)$

$$\begin{aligned}x'(t)^2 &= (\cos t - t\sin t)^2 = (\cos t)^2 - 2t\sin t\cos t + (t\sin t)^2 \\ y'(t)^2 &= (\sin t + t\cos t)^2 = (\sin t)^2 + 2t\cos t + (t\cos t)^2\end{aligned}$$

Buelengden til $r(t)$ kan dermed skrives som

$$
\begin{aligned}
L &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[(\cos t)^2 + (t\sin t)^2] + [(\sin t)^2 + (t\cos t)^2]} \\
&= \sqrt{[(\cos t)^2 + (\sin t)^2]\,(1+t^2)} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

som var første del av det vi skulle vise siden $(\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$. Vi ønsker så

$$
\int_0^{g(m)} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{m^2}{a} + \frac{1}{am^2} + b\log m\,, \tag{5.24}
$$

der funksjonen $g(m) = (m/2) - 1/(2m)$ ble innført. Å vise denne likheten krever noe mer arbeid. Den feigeste måten er å først vise at de deriverte er like, siden da kan sidene høyst avike med en konstant. Ved å bruke analysens fundamentaltheorem i kombinasjon med kjerneregelen, eventuelt eksempel (1.3.2) kan venstresiden av (5.24) skrives som

$$
h(m) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m} \int_0^{g(m)} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = g'(m)\sqrt{1+g(m)^2}
$$

Leser kan nå overbevise seg selv om at $1 + g(m)^2 = (1+1/m)^2/4$, slik at

$$
h(m) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2m^2}\right)\cdot\left(\frac{m}{2} + \frac{1}{2m}\right) = \frac{m}{4} + \frac{1/4}{m^3} + \frac{1/2}{m} \tag{5.25}
$$

Tilsvarende når en deriverer høyresiden av likning (5.24) så får en

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\left(\frac{m^2}{a} - \frac{1}{am^2} + b\log m\right) = \frac{m}{a/2} + \frac{2/a}{m^3} + \frac{b}{m} \tag{5.26}
$$

Ved å sammenlikne likning (5.25) og (5.26) ser en at $a = 8$ og $b = 1/2$. Siden de deriverte nå er identiske kan uttrykkene høyst avike med en konstant. Men en kan se at både høyre og venstresiden av likning (5.24) er null når $m = 0$, siden $g(1) = 1/2 - 1/2 = 0$. Konstanten er dermed null og uttrykkene er like. Å ta utgangspunkt i det vi skal vise er feigt, og ville ikke fungert om vi ikke viste hva vi skulle frem til. Under vises to substitusjoner for å beregne det ubestemte integralet $\int \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ direkte.

Den første substitusjonen som blir brukt er $t \mapsto \tan x$, $\mathrm{d}u = 1 + (\tan x)^2 = (\sec x)^2$. Ved å sette inn får vi altså

$$
\int \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \sqrt{1+(\tan x)^2}\,(\sec x)^2\,\mathrm{d}x = \int |\sec x|(\sec x)^2\,\mathrm{d}x
$$

Dersom en nå bare antar at $\sec x$ er positiv på integrasjonsområdet så får vi $\int (\sec x)^3\,\mathrm{d}x$. Dette integralet har blitt beregnet før, se eksempel (2.7.1).

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\sec x\tan x + \frac{1}{2}\log|\tan x + \sec x| + C_1 \\
&= \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\log\left|t + \sqrt{1+t^2}\right| + \mathcal{C}
\end{aligned}
$$

Siden $x = \arctan t$, og $\tan \arctan t = t + \pi n$. Siden πn er en konstant blir den slukt av C. Videre så er $\sec \arctan t = \sqrt{1+t^2}$ fordi $\sec t = \sqrt{1+(\tan t)^2}$. Herfra er det bare å sette inn grensene. Problemet med å bruke substitusjonen $t \mapsto \tan x$ er at $\tan x$ hverken er en-til-en eller kontinuerlig på intervalet vi integrerer over (forutsatt at vi velger store nok m). Videre er det heller ikke sikkert at $|\sec x| = \sec x$ på området vi integrerer over, og det anbefales derfor å benytte en annen substitusjon.

Den andre substitusjonen vi benytter er $t \mapsto \sinh u$, da der $\mathrm{d}t = \cosh u$ så

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= \int |\cosh u| \cosh u \,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int 1 + \cosh 2t \,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sinh 2t = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\cosh t \sinh t + C\end{aligned}$$

Hvor vi bare brukte et utvalg hyperbolske identiter. Merk at $\cosh t$ og $\sinh t$ er strengt voksende for $t > 0$ så vi får her ingen problemer med integrasjonen. Integralet blir dermed

$$\int \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh} t + \frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} = \frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \log\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$$

Igjen siden $\cosh t = \sqrt{1+(\sinh t)^2}$. Å finne inversen til $\sinh t$ er heller ikke vanskelig. Dette er samme svaret som før, men en kan nå rettferdigjøre overgangene. Ved å nå igjen bruke at $1 + g(m)^2 = (1+1/m)^2/4$ får vi

$$\begin{aligned}L &= \int_0^{g(m)} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}g(m)\sqrt{1+g(m)^2} + \log\sqrt{g(m) + \sqrt{1+g(m)^2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{2m}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{m}\right) + \log\sqrt{\frac{1}{2}\left(m - \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \\ &= \frac{m^2}{8} - \frac{1}{8m^2} + \frac{1}{2}\log m\end{aligned}$$

Ved å sammenlikne ser vi at $a = 8$ og $b = 1$, som var det vi ønsket å vise.

4. Vi beregner først det innerste integralet relativt enkelt og får

$$\begin{aligned}\mathfrak{K} &= \int \Big[\log t\Big]_1^{x+\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \log\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

hvor det ble brukt at $\log 1 = 0$. En løsning videre er å bruke delvis integrasjon med $v = 1$ og $e^u = x + \sqrt{x^2+a^2}$. Slik at

$$\begin{aligned}&= x\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) - \int x \cdot \left(\frac{1 + \frac{(x^2)'}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{x + \sqrt{x^2+a^2}}\right)\mathrm{d}x \\ &= x\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= x\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) - \sqrt{x^2+a^2} + \mathcal{C}\end{aligned}$$

som ønsket. Den siste algebra-transformasjonen kan en se eksempelvis slik

$$
\begin{aligned}
\frac{1+\dfrac{(x^2)'}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}} &= \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}
\end{aligned}
$$

og endelig så ble det siste integralet bergnet via substitusjonen $u = x^2 + a^2$ så $\mathrm{d}u/2 = x\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{u} + \mathcal{C} = \sqrt{x^2+a^2} + \mathcal{C}$$

For å vise siste likheten bestemmer en først et uttrykk for arcsinh(x). Vi har

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
2ye^x &= (e^x)^2 - 1 \\
0 &= u^2 - 2yu - 1 \\
u &= \frac{2y \pm \sqrt{(2y)^2 - 4(1)(-1)}}{2} \\
u &= y \pm \sqrt{y^2+1}
\end{aligned}
$$

Siden $u = e^x$ og $\sinh(x) > 0\,\forall\,x$ så er

$$
\begin{aligned}
x &= \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) \\
\text{arcsinh}(x) &= \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)
\end{aligned}
$$

Til slutt legger en merke til at

$$
\begin{aligned}
\text{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + \log a &= \log\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}\right) + \log a \\
&= \log\left(\frac{1}{a}\cdot x + \frac{1}{a}\sqrt{x^2+a^2}\right) + \log a \\
&= \log\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + \log a^{-1} + \log a
\end{aligned}
$$

Hvor en benyttet seg av at $\sqrt{x^2/a^2+1} = \sqrt{x^2/a^2 + a^2/a^2} = \sqrt{x^2+a^2}/\sqrt{a^2}$ og at $\log a^{-1} + \log a = -\log a + \log a = 0$ eller $\log a^{-1} + \log a = \log a^{-1}a = \log 1 = 0$. Uansett, en nå skrive integralet som

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{K} &= \int \Big[\log t\Big]_1^{x+\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= x\log\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) - \sqrt{x^2+a^2} + \mathcal{C} \\
&= x\left[\text{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + \log a\right] - \sqrt{x^2+a^2} + \mathcal{C} \\
&= x\cdot\text{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + x\log a - \sqrt{x^2+a^2} + \mathcal{C}
\end{aligned}
$$

som var det en ønsket å vise. Alternativt kan en benytte omskrivningen før en beregner integralet. Da får en nesten tilsvarende

$$\begin{aligned}
\mathfrak{K} &= \int \Big[\log t\Big]_1^{x+\sqrt{x^2+a^2}} \,\mathrm{d}x \\
&= \int \log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int \operatorname{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + \log a \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Første integralet beregnes ved delvis integrasjon hvor $u = 1$ og $\sinh v' = x/a$, og siste integralet er trivielt.

$$\begin{aligned}
&= x\log a + \left[x \cdot \operatorname{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right) - \int x \cdot \frac{\left(\frac{x}{a}\right)'}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}}\,\mathrm{d}x\right] \\
&= x \cdot \operatorname{arcsinh} + x\log a - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= x \cdot \operatorname{arcsinh} + x\log a - \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

som ønsket.

5. Velger å først løse det ubestemte ved å prøve den noe vågale substitusjonen

$$u = \sqrt{r^2+R^2-2Rr\cos\theta} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}u}{2Rr} = \frac{\sin\theta}{2\sqrt{r^2+R^2-2Rr\cos\theta}}\,\mathrm{d}\theta$$

Dermed så kan integralet skrives om til

$$I = \int \frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{r^2+R^2-2Rr\cos\theta}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{Rr} = \frac{\sqrt{r^2+R^2-2Rr\cos\theta}}{Rr}$$

det bestemte integralet kan nå skrives som

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{r^2+R^2-2Rr\cos\theta}} &= \left[\frac{\sqrt{r^2+R^2-2Rr\cos\theta}}{Rr}\right]_0^\pi \\
&= \frac{\sqrt{(R+r)^2}}{Rr} - \frac{\sqrt{(R-r)^2}}{Rr} \\
&= \frac{R+r}{Rr} - \frac{|R-r|}{Rr}
\end{aligned}$$

Hvor fortegnet på $|R-r|$ avhengier av om $R > r$ eller om $R < r$. Siden $|x| = x$ når $x > 0$ og $|x| < -x$ når $x < 0$. For $R > r$ fås

$$\frac{R+r}{Rr} - \frac{|R-r|}{Rr} = \frac{R+r}{Rr} - \frac{R-r}{Rr} = \frac{2}{r}$$

Og for $R < r$ fås

$$\frac{R+r}{Rr} - \frac{|R-r|}{Rr} = \frac{R+r}{Rr} + \frac{|R-r|}{Rr} = \frac{2}{R}$$

Integralet blir dermed

$$\int_0^\pi \frac{\sin\theta \,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{r^2+R^2-2Rr\cos\theta}} = \begin{cases} 2/r & \text{når} \quad R \geq r \\ 2/R & \text{når} \quad R < r \end{cases}$$

6. Ve

7.

d) Uten videre så har en at

$$\log 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 0\,,$$

da det ikke er noe areal å beregne. Første del av*analysens fundamentalteorem* sier at la $f : [a,b] \to \mathrm{R}$ være en kontinuerlig funksjon. La F være funksjonen definert for x i $[a,b]$ ved

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}t$$

da er

$$F'(x) = f(x)$$

ved å bruke dette så får en direkte at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

Rimelig standard. Neste integral er ikke like bent frem her har en

$$\log a^r = \int_1^{a^r} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^a r\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = r\int_1^a \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = r\log a$$

Via substitusjonen $t \mapsto u^r$. Derivasjon gir

$$\begin{aligned} \mathrm{d}t &= r \cdot u^{r-1}\,\mathrm{d}u = r \cdot u^r u^{-1}\,\mathrm{d}u \\ \mathrm{d}t &= r \cdot t\,\mathrm{d}u/u \\ \mathrm{d}t/t &= r\,\mathrm{d}u/u \end{aligned}$$

For grensene har en at $t = a^r \Leftrightarrow u^r = a^r \Rightarrow u = a$ og tilsvarende for nedre grense $t = 1 \Leftrightarrow u^r = 1 \Rightarrow u = \sqrt[r]{1} = 1$. For det siste integralet får en

$$\log(ab) = \int_1^{ab} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^a \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_a^{ab} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^a \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^b \frac{\mathrm{d}u}{u} = \log a + \log b$$

hvor $t \in [1,ab] = t \in [1,a] \cup [a,ab]$ og substitusjonen $t \mapsto au$ ble benyttet på siste integralet. Da er $\mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}u$ og ved å dele på t fås $\mathrm{d}t/t = a\,\mathrm{d}u/au = \mathrm{d}u/u$.

e) Vi begynner med spesialtilfellet $\alpha = 1$. En frekk løsning[3] blir å bruke l'hopital så

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/(1+x)}{1} = 1$$

Alternativt kan vi løse oppgaven som følger. La $f(x) = \log(x)$, da er

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - \log(1)}{x} \\ = \lim_{x\to 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} \quad = f'(1) = 1 \end{aligned}$$

Hvor kun definisjonen av den deriverte ble brukt. En siste metode før vi går videre

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_1^{1+x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \lim_{x\to 0} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+xu} = \int_0^1 \mathrm{d}u = 1$$

Via $t \mapsto xu$. For $\alpha > 1$ så deriveriverer vi begge sider for å se på vekstraten

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log(1+x^\alpha) &\leq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\alpha x) \\ \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1+x^\alpha} &\leq \alpha \\ x^{\alpha-1} &\leq x^\alpha + 1 \\ x^{\alpha-1}(1-x) &\leq 1 \end{aligned}$$

Dersom $\alpha \geq 1$ og $x > 1$ så holder den siste ulikheten trivielt. Ved å ta stegene i motsatt rekkefølge har vi vist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log(1+x^\alpha) \leq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\alpha x)$$

hvorpå integrasjon gir oss ulikheten vår. Konstanten bestemmes av spesialtilfellet $\alpha = 1$.

8. I utgangspunktet et heselig integral, men forenkles raskt ned til noe mer håndterlig. La $f(x)$ betegne integranden da er

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} f(1/x) &= \frac{1}{x^2} \log\left(\frac{1+(1/x)^\alpha}{2}\right) \frac{1}{\log 1/x(1+(1/x)^2)} \\ &= -\log\left(\frac{1+x^\alpha}{2x^\alpha}\right) \frac{1}{\log x(1+x^2)} \end{aligned}$$

[3] Begge metodene vist her bruker nesten sirkulær logikk. Da grensen ofte brukes til å definere den deriverte av logaritmefunksjonen. Vi kan altså ikke bruke den deriverte til å bestemme grensen. Dog går det fint siden vår definisjonen av logaritmen var gitt som et integral, altså følger den deriverte direkte fra analysens fundamentalteorem. Dette er en av fordelene med integraldefinisjonen.

Fra proposisjon (2.4.2) eller ved å dele integralet ved $x = 1$ og benytte $x \mapsto 1/u$ på siste integral har vi at $\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t) + f(1/t)/t^2\,\mathrm{d}t$. Dermed så er

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_0^1 \left[\log\left(\frac{1+x^\alpha}{2}\right) - \log\left(\frac{1+x^\alpha}{2x^\alpha}\right)\right] \frac{\mathrm{d}x}{\log x(1+x^2)} \\ &= \int_0^1 [\log x^\alpha] \frac{\mathrm{d}x}{\log x(1+x^2)} = \int_0^1 \frac{\alpha\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}\alpha \end{aligned}$$

Siden $\log \frac{1+x^\alpha}{2x^\alpha} = \log \frac{1+x^\alpha}{2} - \log x^\alpha$. Mycket pent svar!

f) Legg merke til at

$$\log\left(\frac{1+x^a}{1+x^b}\right) = \log\left(\frac{1+x^a}{2}\right) - \log\left(\frac{1+x^b}{2}\right)$$

Dette medfører at vi kan skrive

$$J(a,b) = \int_0^\infty \frac{\log\left(\frac{1+x^a}{1+x^b}\right)}{1+x^2} \frac{\mathrm{d}x}{\log x} = I(a) - I(b) = \frac{\pi}{4}(a-b)$$

Ved å sette inn verdiene våre i likningen over får vi

$$\int_0^\infty \frac{\log\left(\dfrac{1+x^{4+\sqrt{15}}}{1+x^{2+\sqrt{3}}}\right)}{(1+x^2)\log x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\left(2+\sqrt{15}-\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{4}\left(2+\sqrt{6}\sqrt{3-\sqrt{5}}\right).$$

Å se den siste algebraovergangen er noe vanskelig, men kan for eksempel føres

$$\begin{aligned} \sqrt{15}-\sqrt{3} &= \sqrt{\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\sqrt{15}^3 - 2\sqrt{3}\sqrt{15} + \sqrt{3}^2} = \sqrt{18-6\sqrt{5}} = \sqrt{6}\sqrt{3-\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Siden $\sqrt{3}\sqrt{15} = \sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$. Som var det vi ønsket å vise.

g) Nei, integralet konvergerer ikke. Det blåser opp ved $x = 1$, faktoren $1/2$ (eller en annen vilkårlig konstant større enn 1) er altså helt sentral for å sikre seg konvergens.

9. Begynner med å først finne $\cos 2\theta$. Legg merke til at

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \text{ og } \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

Ved å dele disse på hverandre fås

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta} \;\Rightarrow\; \cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

Uttrykket for $\tan^2\theta$ kan regnes ut eksakt som

$$\tan^2(\theta) = \left(\int_a^b \frac{2ab}{x^3} - \frac{x}{ab}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \left[\frac{ba}{x^2} + \frac{x^2}{2ab}\right]_b^a = \frac{1}{4}\left(\frac{b^2}{a^2} - 2 + \frac{a^2}{b^2}\right)$$

Ved nå og sette inn verdier kan $\cos 2\theta$ skrives som

$$\begin{aligned}
\cos 2\theta &= \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} \\
&= \frac{1-(b/a-a/b)^2/4}{1+(b/a-a/b)^2/4} \\
&= \frac{4-(b/a-a/b)^2}{(b/a+a/b)^2} \\
&= \left[\frac{4b^2a^2}{b^2a^2} - \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2b^2}\right]\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} \\
&= \frac{1}{25^2}\left[4a^2(25-a^2) - \big(a^2-(25-a^2)\big)^2\right] \\
&= -\frac{8}{625}a^4 + \frac{8}{25}a^2 - 1 = -8\beta^2 + 8\beta - 1
\end{aligned}$$

hvor vi i siste overgang innførte $\beta = a^2/5$. Tar først noen hjelperesultater før en finner $\cos\theta$ uttrykt via. En har

$$\tan^2(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1$$

og

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + 1 + \left(\frac{a}{2b}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \underbrace{2\left(\frac{b}{2a}\right)\left(\frac{a}{2b}\right)}_{1} + \left(\frac{a}{2b}\right)^2 = \left(\frac{a}{2b} + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{(a^2+b^2)^2}{4a^2b^2}$$

Dermed så kan en skrive om integralet som

$$\begin{aligned}
\tan^2(\theta) &= \left(\int_a^b \frac{2ab}{x^3} - \frac{x}{ab}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right)^2 \\
\frac{1}{\cos^2(\theta)} - 1 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{1}{2} + \left(\frac{a}{2b}\right)^2 \\
\frac{1}{\cos^2(\theta)} &= \frac{(a^2+b^2)^2}{4a^2b^2} \\
\cos\theta &= \frac{2ab}{a^2+b^2} = \frac{2ab}{25} = \frac{2a\sqrt{25-a^2}}{25}
\end{aligned}$$

som var det en ønsket å bestemme.

10. Før en gjør noen antakelser om t prøver en å benytte seg av delvis integrasjon. Med $u = e^x$ og $v' = \sin x$ fås

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I} &= \int_0^t e^x \sin x \,\mathrm{d}x \\
&= [e^x \cos x]_t^0 + \int_0^t e^x \cos x \,\mathrm{d}x \\
&= 1 - e^t \cos t + \int_0^t e^x \cos x \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Herfra bør en legge merke til at $\int_0^t 1/t \,\mathrm{d}x = 1$ så

$$= -e^t \cos t + \int_0^t e^x \cdot \cos x + \frac{1}{t} \,\mathrm{d}x$$

Til slutt så må $e^t \cos t = 0$ for at uttrykkene skal være like. Dette skjer hvis og bare hvis t kan skrives som $t = \pi n - \frac{\pi}{2}$ for alle $n \in \mathbb{Z}$. Altså må t være periodisk.

11. For å se første likhet kan substitusjonen $x \mapsto \pi - u$ benyttes, eller identiteten $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x$. Begge metodene gir at

$$\int_0^\pi \frac{\cos^2 x \,\mathrm{d}x}{1 + \cos x \sin x} = \int_0^\pi \frac{\cos^2(\pi - u)\,\mathrm{d}x}{1 + \cos(\pi - u)\sin(\pi - u)} = \int_0^\pi \frac{\cos^2 x \,\mathrm{d}x}{1 - \cos x \sin x}$$

Helt tilsvarende kan en gjøre med sinus integralene. Neste likhet kan være noe vanskeligere å se, men det finnes flere fremmgangsmåter. For eksempel så kan vi vise at

$$J = \int_0^\pi \frac{(\cos x)^2}{1 + \cos x \sin x} - \frac{(\sin x)^2}{1 + \cos x \sin x} \,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{\cos(2x)}{1 + \frac{1}{2}\sin(2x)} \,\mathrm{d}x = 0$$

Via $u \mapsto 2x$ og $\mathrm{d}u/2 = \mathrm{d}x$ får en

$$J == \int_0^{2\pi} \frac{\cos u}{1 + \frac{1}{2}\sin u} \frac{\mathrm{d}u}{2} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos u}{2 + \sin u} \,\mathrm{d}u$$

Herfra kan en enten benytte seg av wiesrtrass substitusjonen $t \mapsto \tan(u/2)$ (teorem (2.4.4)) eller kompleks analyse for å beregne intgralet.[4] Første metode gir da

$$\begin{aligned} J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{2 + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - t^2}{(t^2 + 1 + t)(t^2 + 1)} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + 2t}{1 + t + t^2} - \frac{2t}{t^2 + 1} \,\mathrm{d}t = 0 \end{aligned}$$

Siste overgang kan vi enkelt se ved å bruke substitusjonen $2t \mapsto 2u + 1$ på siste integralet.

Alternativt. Siden begge integrande har periode π holder det å vise at identiten holder på et vilkårlig intervall med lengde π. Via $u \mapsto x - \pi/2$ kan integralet skiftes til $[-\pi/2, \pi/2]$. Siden funksjonene er symmetriske holder det å betrakte identiteten over $[0, \pi/2]$. Å vise dette følger via $x \mapsto \pi/2 - u$.

[4]Ved å bruke de komplekse formene (se avsnitt (3.8.1)) kan integralet skrives som

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos u}{2 + \sin u} \,\mathrm{d}u = -\frac{i}{4} \oint_{|z|=1} \frac{z + z^{-1}}{1 + \frac{1}{4i}(z - z^{-1})} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \oint_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z} \frac{z^2 + 1}{z^2 + 4iz - 1}$$

Polenene til integranden befinner seg ved $z = 0$ og $z = -(2 - \sqrt{3})i$, med henholdsvs residue -1 og 1. Det følger da fra residue theoremet (**??**) at integralet er null.

Å beregne selve integralet er rett frem

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{(\cos x)^2}{1+\cos x \sin x} + \frac{(\sin x)^2}{1+\cos x\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x/2}{1+\frac{1}{2}\sin(2x)}$$

Benytter så $u \mapsto 2x$ og $t \mapsto \tan(u/2)$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin u} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2+2t/(1+t^2)}\frac{2t\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}$$

En kan fullføre kvadratet og få $t^2+1+t = (t+1/2)^2+3/4$. Så hefra bruker en $\sqrt{3/4}\,u \mapsto t+1/2$ så

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{(\cos x)^2}{1+\cos x\sin x} &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+1/2)^2+3/4}\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\frac{3}{4}(u^2+1)}\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

og vi er ferdig. Siden verdien av det siste integralet er π.

12.

Løsning 1 Velger å benytte den oppgitte substitusjonen, da er

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{1+x^4}}{1+x^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{2x(1-x^2)}{\sqrt{1+x^4}\,(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

Ved å bruke at $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ kan en skrive om $\sin\theta$ som følger

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{\sqrt{2}\,x}{1+x^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2}}$$

For å bestemme grensene har en at

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{1+x^4}}{1+x^2}\right)$$

Så $\theta = \arccos(0) = 0$ og $\theta = \arccos(1/\sqrt{2}) = \pi/4$. Integralet forenkles dermed dramatisk til

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

og dette fullfører regningen.

Løsning 2 Ved å dele teller og nevner på x^2 kan integralet skrives om til

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-1/x^2}{(x+1/x)\sqrt{(x+1/x)^2-(\sqrt{2})^2}}\,\mathrm{d}x$$

Ved å nå sette $y \mapsto x+1/x$ og $\mathrm{d}t(1-1/x^2)\,\mathrm{d}x$ blir integralet

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x = \int_1^0 \frac{1}{y\sqrt{y^2-(\sqrt{2})^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\operatorname{arcsec}\left(\frac{x+1/x}{\sqrt{2}}\right)\right]_1^0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\,.\end{aligned}$$

som er det samme som før.

13. Merk at det spiller ingen rolle hvordan en uttrykker vinkelen. Her velger vi å benytte oss av $\arccos$ slik at

$$\vartheta(x) = \arccos\left(\frac{x}{H}\right)$$

Altså hosliggende over hypotenusen. For å finne hyptenusen benyttes pytagoras, men først må høyden fra x til sirkelen beregnes. Formelen for øvre halvdel med radius r og sentrum c er gitt som $y = \sqrt{r^2-(x-c)^2}$. Slik at

$$y = \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2} = \sqrt{-x^2+x(a+b)-ab}\,,$$

dermed kan hypotenusen uttrykkes som

$$H = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x(a+b)-ab}\,.$$

Integralet blir nå følgelig

$$I(a,b) := \int_a^b \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x(a+b)-ab}}\right)\mathrm{d}x\,.$$

Men merk helt tilsvarende kunne en vist at

$$\vartheta = \arcsin\left(\sqrt{\frac{(x-a)(b-x)}{x(a+b)-ab}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{x}\sqrt{(x-a)(b-x)}\right)$$

Men vi holder oss som sagt til $\arccos$, samme fremmgangsmåte funger uansett hvordan en definerer vinkelen. For å begynne å beregne dette 'beistet' benyttes delvis integrasjon med
$u = \arccos(x/\sqrt{(a+b)x-ab})$ og $v = x - ab/(a+b)$ som i hintet.

$$\int_a^b \vartheta(x)\,\mathrm{d}x = \Big[v\cdot\vartheta(x)\Big]_a^b + \int_a^b \frac{(a+b)x-2ab}{2(a+b)\sqrt{(b-x)(x-a)}}\,\mathrm{d}x$$

Fra figur så er vinkelen null når $x = a$ og $x = b$. Dette medfører at første del kollapser til null, som en og kan se via innsetning siden $\arccos(1) = 0$. For å beregne det gjennstående integralet brukes følgende substitusjon

$$w = \frac{2x - (a+b)}{b-a}$$

Så $x = a \to w = -1$ og $x = b \to w = 1$, og $\mathrm{d}x/\sqrt{(b-x)(x-a)} = \mathrm{d}w/\sqrt{1-w^2}$. Substitusjonen mapper $[a,b]$ til $[-1,1]$ og er generelt en nyttig greie. Integralet blir dermed

$$\int_{-1}^{1} \frac{(b^2-a^2)w + (b-a)^2}{4(a+b)\sqrt{1-w^2}}\,\mathrm{d}w = A\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{1-w^2}} + B\int_{-1}^{1} \frac{w\,\mathrm{d}w}{\sqrt{1-w^2}}$$

Hvor $A = (b-a)^2/4(a+b)$ og $B = (b^2-a^2)/4(a+b)$ er konstanter. Legg merke til at siste integralet er null da $w/\sqrt{1-w^2}$ er en odde funksjon. Det første integralet kan eksempelvis løses ved å sette $w = \sin x$ slik at $\mathrm{d}w = \cos x\,\mathrm{d}x$. Med $\sqrt{1-w^2} = \cos x$. Så $\mathrm{d}w/\sqrt{1-w^2} = \mathrm{d}x$.

$$A\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{1-w^2}} = 2A\int_{0}^{\pi/2} \mathrm{d}x = A\pi\,.$$

Da integranden er symmetrisk omkring origo. Dette unngår problemet med fortegnet av $\sqrt{1-w^2}$. Ved og sette inn får en endelig at

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \vartheta(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\,\frac{1}{4}\,\frac{(b-a)^2}{a+b}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{1-w^2}} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{b-a}{b+a}$$

Som var det som skulle vises. Omformingen av integranden kan eksempelvis gjøres slik

$$\begin{aligned}
\frac{(a+b)x - 2ab}{2(a+b)\sqrt{(b-x)(x-a)}} &= \left(\frac{x}{2} - \frac{ab}{a+b}\right)\frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \\
&= \left[\frac{1}{4}\left(b+a-w(b-a)\right) - \frac{ab}{a+b}\right]\frac{1}{\sqrt{(1-w^2}} \\
&= \left[\frac{(b+a)^2 - 4ab - w(b^2-a^2)}{4(a+b)}\right]\frac{1}{\sqrt{(1-w^2}} \\
&= \frac{(b-a)^2 - w(b^2-a^2)}{4(a+b)\sqrt{(1-w^2}}
\end{aligned}$$

I første overgang ble det brukt at $x = [b+a-w(b-a)]/2$, i andre at at $(b+a)(b-a) = b^2 - a^2$. I aller siste overgang så er $(b+a)^2 - 4ab = b^2 - 2ab + a^2 = (b-a)^2$. La oss avslutningsvis se nærmere på den den delvise integrasjonen.

$$\vartheta'(x)\cdot v = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}}\left(\frac{x(a+b)-ab}{a+b}\right)\,. \tag{5.27}$$

Hvor $g(x) = x/\sqrt{(a+b)x-ab}$. Hvor det ble brukt at $[\arccos u]' = u'/\sqrt{1-u^2}$. Herfra har en

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{1}{(a+b)x-ab}\left[\sqrt{(a+b)x-ab} - \frac{x(a+b)}{2\sqrt{(a+b)x-ab}}\right] \\
&= \frac{x(a+b)-2ab}{2(a+b)x-ab)\sqrt{(a+b)x-ab}}
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Nevneren kan skrives om som følger

$$\frac{1}{\sqrt{1-g(x)^2}} = \left[1 - \frac{x^2}{(a+b)x-ab}\right]^{-1/2} = \frac{\sqrt{(a+b)x-ab}}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \tag{5.29}$$

Ved å sette inn likning (5.29) og (5.28) inn i (5.27) kan $\vartheta'(x)v$ uttrykes som

$$\left(\frac{x(a+b)-2ab}{2\big[(a+b)x-ab\big]\sqrt{(a+b)x-ab}}\right)\left(\frac{\sqrt{(a+b)x-ab}}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\right)\left(\frac{(a+b)x-ab}{a+b}\right)$$

Etter en serie dramatiske forkortningen forenkles utrrykket ned til

$$\vartheta'(x)\cdot v = \frac{(a+b)x-2ab}{2(a+b)\sqrt{(b-x)(x-a)}}$$

Dette fullfører sagaen om det delvis vanskelige integralet.

14. Viser at funksjonen er en konstant, slik at integralet blir trivielt. Velger å bestemme den deriverte av $y = \arcsin x$ først

$$\begin{aligned} y &= \arcsin x \\ \sin y &= x \end{aligned}$$

Deriverer begge sider implisitt med tanke på y, og får

$$\begin{aligned} \cos y &= 1 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} \end{aligned}$$

Herfra har en fra enhetssirkelen og pytagoras at $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, bruker en $x = \arcsin y$ fås $\big[\cos\arcsin y\big]^2 + \big[\sin\arcsin y\big]^2 = 1$ slik at $\cos(\arcsin y) = 1/\sqrt{1-y^2}$. Dermed så blir den deriverte

$$y = \arcsin x \;\Rightarrow\; y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Tilsvarende kan det vises at

$$y = \arccos x \;\Rightarrow\; y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

følgelig så er $f'(x) = 0$. Siden den deriverte er null, betyr dette at $f(x)$ er en konstant. Eksempelvis så er $f(0) = \pi/2$. Dermed så er $f(x) = \pi/2$ for alle x. Videre så er $-1 \le \cos x \le 1$ og tilsvarende for $\sin x$, slik at definisjonsmenden til f er $D = [-1, 1]$. Integralet vårt er dermed høyde gange bredde eller $\mathfrak{I} = h \cdot b = (\pi/2) \cdot 2 = \pi$. Noe mer formelt kan det og føres som

$$\mathfrak{I} = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

som ønsket.

15. Det enkleste blir å først se at på intervalet $(0, \pi/2)$ er både $\sin x$ og $\cos x$ strengt positive. Vi står altså fritt til å dele opp integranden.

$$I = \int_0^{\pi/2} (1+\cos x)\log(1+\sin x) - \log(1+\cos x)\,\mathrm{d}x\,,$$

Ved å bruke substitusjonen $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ eller symmetrien mellom $\sin x$ og $\cos x$ har en også at I kan skrives på formen

$$I = \int_0^{\pi/2} (1+\sin x)\log(1+\cos x) - \log(1+\sin x)\,\mathrm{d}x\,,$$

Ved å ta gjennomsnittet av disse to integralene får en

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin x\log(1+\cos x) + \cos x\log(1+\sin x)\,\mathrm{d}x\,,$$

Dermed så har en

$$I = \int_0^{\pi/2} \log(1+\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \log(x+1)\,\mathrm{d}x = \Big[(y\log y) - y\Big]_1^2$$

I regningen ovenfor ble først symmetrien mellom $\sin x$ og $\cos x$ brukt se . Begge integralene er like store, og vi trenger bare å beregne ett av dem. Dette kan og sees ved å dele integralet i to og bruke substitusjonen $v \mapsto 1+\cos x$ på første integral og $w \mapsto 1+\sin x$ på andre.

I andre overgang ble substitusjonen $u \mapsto \cos x$ brukt og i siste ble $y \mapsto x+1$ brukt. Sammen med $\int \log x\,\mathrm{d}x = x\log x - x + \mathcal{C}$. Altså har en

$$\int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{(1+\sin x)^{1+\cos x}}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \log(x+1)\,\mathrm{d}x = -1 + 2\log 2$$

som var det som skulle bestemmes.

17.

a) Legg merke til x^6+1 og x^2+1 deler samme nullpunkt, nemlig $x = \pm i$. Polynomdivisjon gir da

$$\begin{array}{r|l}
 & x^4 - x^2 + 1 \\ \hline
x^2+1 & x^6 \qquad\qquad +1 \\
 & -x^6 - x^4 \\ \hline
 & -x^4 \\
 & x^4 + x^2 \\ \hline
 & x^2 + 1 \\
 & -x^2 - 1 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

Dermed så er $x^6+1=(1+x^2)(x^4-x^2+1)$. Ved innsetning ser en da at

$$\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{(1+x^2)(x^4-x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1}$$

Første integralet er trivielt, og siste kan løses ved å sette $u \mapsto x^3 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}u$. Videre så blir $x=0 \mapsto u=0$ og $x=1 \mapsto u=1$ så grensene blir som før.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \left(\int_0^1 1+x^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\right)$$

For å se omskrivningen av $4/3$ kan en eksempelvis tenke på følgende måte

$$\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} = \left[x + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \int_0^1 1+x^2\,\mathrm{d}x$$

Der cruxet er å se andre overgang. Å beregne selve integralet blir nå enkelt siden

$$\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{4}{3}\Big[\arctan x\Big]_0^1 = \frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$$

b) Integralene er like store som følger fra lemma (2.5.1) med $n=6$. Alternativt er det like enkelt å vise via substitusjonen $x \mapsto 1/u$.

$$\int_0^\infty \frac{x^4}{1+x^6}\,\mathrm{d}x = -\int_\infty^0 \frac{(1/u)^4}{1+(1/u)^6}\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^6}$$

som ønsket. Her en i siste overgang byttet tilbake til x som integrasjonsvariabel. Legger en sammen integralene eller bruker lemma (2.5.1) har en

$$\int_0^\infty \frac{x^4}{1+x^6}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^6} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+x^4}{1+x^6}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+x^4}{1+x^6}\,\mathrm{d}x$$

I den siste overgangen ble likning (2.57) fra teorem (2.9.1) brukt. At integranden tilfredstiller likning (2.56) kan sees ved direkte utregning

$$R\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2} = \frac{1+(1/x)^4}{1+(1/x)^6}\frac{1}{x^2} = \frac{1+x^4}{1+x^6} = R(x)$$

eller ved å bruke at $1+x^4$ er symmetrisk med indeks 4 og $1+x^6$ er symmetrisk med indeks 6 (proposisjon (2.9.3)). Ved å bruke **a)** har vi da

$$\int_0^\infty \frac{x^4}{1+x^6}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^6} = \left(\int_0^1 1+x^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

som var det som skulle vises.

18. Dette integralet faller direkte ut fra Riemann-Lebesgue lemmaet (**??**). Lemmaet kan benyttes siden $1/(1+cos^2 x)$ er en periodisk, kontinuerlig funksjon og funksjonen $\sin x$ er og kontinuerlig, og deriverbar.

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2(tx)}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t}\right)\left(\int_0^\pi \sin t dt\right)$$

Dette integralet kan for eksempel løses ved Weiestrass substitusjon, settes $u \mapsto \tan(t/2)$ så er

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^2} \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_0^\infty \frac{1+u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u$$

som kommer i fra teorem (2.4.4). Dette integralet ble studert i eksempel (2.5.7), så

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t} = \int_0^\infty \frac{1+u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Dette integralet kan løses noe mer intuitivt via substitusjonen $u = \tan t$. Siden $\tan x$ går mot uendelig når $x \to \pi/2$ benytter en at funksjonen er like omkring $x = \pi/2$, så

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t} = \int_0^{\pi/2} \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t}$$

ved å bruke substitusjonen så er $\cos^2 t = 1/(1+u^2)$ og $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/(1+u^2)$ slik at

$$\int_0^\infty \frac{2}{1+1/(1+u^2)} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+(u/\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

I andre overgang ble substitusjonen $y = u/\sqrt{2}$ brukt, og deretter at $\sqrt{2}/2 = 1/\sqrt{2}$. Det neste integralet er mye enklere

$$\int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t = \Big[\cos t\Big]_\pi^0 = \cos 0 - \cos\pi = 2$$

Slik at

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^\pi \frac{\sin t}{1+\cos^2(tx)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)2 = \sqrt{2}$$

19. Siden gjennomsnittsverdien av f og g er 1, la oss for enkelhetensskyld sette $h \equiv g \equiv f$ et øyeblikk så

$$1 = \frac{1}{8-0}\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad \int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = 8$$

Dette vil komme til nytte snarlig, forenkling av integralet gir

$$I = \int_{-8}^4 8f(x) - 4g(x)\,\mathrm{d}x + \int_8^4 4g(x) - 8f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ved å bruke at $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^a -f(x)\,\mathrm{d}x$ bytter grensene i siste integral plass.

$$= \int_{-8}^4 8\cdot f(x) - 4g(x)\,\mathrm{d}x + \int_4^8 8f(x) - 4g(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

Integralene kan nå slås sammen. Siden $g(x)$ er odde, er integralet over $(-a, a)$ null

$$I = \int_{-8}^{8} 8f(x) - 4g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-8}^{8} 8f(x)\,\mathrm{d}x = 16\int_{0}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x = 128$$

Slik at $I = 2^7$. Dermed så er $a = 7$ som var det som skulle bestemmes.

20. Benytt substitusjonen $f^{-1}(x) = y$ slik at $f(y) = x$. Da funksjonen er strengt voksende, kontinuerlig og deriverbar så er $\mathrm{d}x = f'(y)$. Dermed så er

$$\int_{0}^{10} f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{5} yf'(y)\,\mathrm{d}t$$

Benyttes nå delvis integrasjon med $u = y$ og $v = f(y)$ blir integralet

$$\int_{1}^{5} yf'(y)\,\mathrm{d}t = \left(\Big[yf(y)\Big]_1^5 - \int_{1}^{5} f(y)\,\mathrm{d}y\right) = \big(5f(5) - f(1)\big) - 7 = 47\,.$$

Tislutt så er $f(5) = 10$ og $f(1) = 0$.

21. La oss begynne med å kalle integralene for henholdsvis J og K.

$$J = \int_{0}^{\pi/2} (\sin x)^{a+1}\,\mathrm{d}x \;\; \text{og} \;\; K = \int_{0}^{\pi/2} (\sin x)^{a-1}\,\mathrm{d}x\,,$$

Hvor $a = \sqrt{2}$. Målet blir nå å finne en sammenheng mellom integralene, noe som kan gjøres ved eksempelvis delvis integrasjon. Ved å se på J med $u = (\sin x)^a$ og $v = -\cos x$ har en

$$\begin{aligned} J &= \Big[-\cos x \sin(x)^a\Big]_0^{\pi/2} + \int_{0}^{\pi/2} a\cos^2 x \sin(x)^{a-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{\pi/2} a\left(1 - \sin^2 x\right)\sin(x)^{a-1}\,\mathrm{d}x \\ &= a\int_{0}^{\pi/2} \sin(x)^{a-1}\,\mathrm{d}x - a\int_{0}^{\pi/2} \sin(x)^{a+1}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Hvor en kan gjennkjenne de to siste integralene som henholdsvis K og J. Likningen $J = aK - aJ$ kan løses for J/K , det er jo dette vi ønske å finne slik at

$$\frac{J}{K} = \frac{a}{2+a} = \frac{2a - a^2}{4 - a^2}$$

Der teller og nevner ble ganget med $2 - a$. Ved å sette inn har en altså

$$\frac{\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{\sqrt{2}+1}\,\mathrm{d}x}{\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{\sqrt{2}-1}\,\mathrm{d}x} = \frac{2\sqrt{2} - (\sqrt{2})^2}{4 - (\sqrt{2})^2} = 2 - \sqrt{2}$$

og dette fullfører utregningene.

22. En kan først forenkle integralet noe via $y \mapsto x^2$. Da er $\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}x$ og

$$\int_a^b \frac{2x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}} = \int_{a^2}^{b^2} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(y-a^2)(b^2-y)}} = \int_u^v \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(y-u)(v-y)}}$$

Hvor i siste overgang variablene $u = a^2$ og $v = b^2$ ble innført. For å vise at integralet er uavhengig av a og b, beregnes

$$K = \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

eksplisitt. Her kan en for eksempel benytte substitusjonen

$$x \mapsto a\cos^2\phi + b\sin^2\phi\,,$$

med $\mathrm{d}x = 2(b-a)\cos\phi\sin\phi$. Når $x = a$ blir $\phi = 0$ og når $x = b$ blir $\phi = \pi/2$. Innsetning gir da

$$\begin{aligned}
K &= \int_0^{\pi/2} \frac{2(b-a)\cos\phi\sin\phi\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{\left(a\cos^2\phi + b\sin^2\phi - a\right)\left(b - a\cos^2\phi - b\sin^2\phi\right)}} \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{2(b-a)\cos\phi\sin\phi\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{\left(b\sin^2\phi - a(1-\cos^2\phi)\right)\left(b(1-\sin^2\phi) - a\cos^2\phi\right)}} \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{2(b-a)\cos\phi\sin\phi\,\mathrm{d}\phi}{\sqrt{\sin^2\phi\cos^2\phi\,(b-a)\,(b-a)}}
\end{aligned}$$

Hvor det ble brukt at $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, to ganger. Legg merke til at både $\sin\phi$ og $\cos\phi$ er positive på intervalet så fortegnet blr positivt når vi tar roten. Tilsvarende er selvsagt $(b-a)^2$ positivt siden $b > a$.

Integralet forenkles da dramatisk til

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2(b-a)\cos\phi\sin\phi\,\mathrm{d}\phi}{(b-a)\sin\phi\cos\phi} = \int_0^{\pi/2} 2\,\mathrm{d}x = \pi$$

Oppsumert så er altså

$$\int_a^b \frac{2x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}} = \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(x-y)}} = \pi$$

som var det som skulle vises. Merk integralet kunne og vært vist ved en litt mindre vill substitusjon. Ved å gange ut teller får en

$$K = \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-\left(x^2-(a+b)x+ab\right)}} = \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a-b)^2/4 - \left(x-(b+a)/2\right)^2}}$$

Hvor kvadratet ble fullført i andre overgang. Ved å bruke substitusjonen $u \mapsto x-(b+a)/2$ nå blir integralet

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} \frac{2\,\mathrm{d}u}{\sqrt{(a-b)^2-4u^2}}$$

Utregningen fullføres ved en siste substitusjon $u \mapsto (a-b)\sin(v)/2$ som gir

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{(a-b)\cos v \,\mathrm{d}v}{\sqrt{(b-a)^2\cos^2 v}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

som før.

23. Legg først merke til at integralet er positivt siden $1 + x^2 > 0$ når $x > 0$. Videre så er teller positiv da $x^4 > 0$. Tislutt er $(1-x)^4 > 0$ om enn synkende på $x \in [0,1]$. Vi noterer først at $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1)$ og skriver ut teller

$$\begin{aligned} x^4(1-x)^4 &= x^4 - 4x^5 + 6x^6 - 4x^7 + x^8 \\ &= (x^6 - 4x^5 + 5x^4) + (5x^6 - 4x^7 + x^8) - 4x^4 + 4 - 4 \\ &= x^4(x^2 - 4x + 5) + x^4 \cdot x^2(x^2 - 4x + 5) - 4(x^4 - 1) - 4 \\ &= x^4(x^2 - 4x + 5)(1 + x^2) - 4(x^2+1)(x^2-1) - 4 \end{aligned}$$

Ved å nå dele begge sider av likningen på $x^2 + 1$ fås endelig

$$\frac{x^4(1-x)^4}{x^2+1} = x^4(x^2 - 4x + 5) - 4(x^2 - 1) - \frac{4}{1+x^2}$$

Alternativt så gir tidenes lengste polynomdivisjon

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & x^6 & -4x^5 & +5x^4 & & -4x^2 & +4 & \\ \hline
x^2+1 & x^8 & -4x^7 & +6x^6 & -4x^5 & +x^4 & & \\
 & -x^8 & & -x^6 & & & & \\ \cline{2-4}
 & & -4x^7 & +5x^6 & -4x^5 & & & \\
 & & 4x^7 & & +4x^5 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & 5x^6 & & +x^4 & & \\
 & & & -5x^6 & & -5x^4 & & \\ \cline{4-6}
 & & & & & -4x^4 & & \\
 & & & & & 4x^4 & +4x^2 & \\ \cline{6-7}
 & & & & & & 4x^2 & \\
 & & & & & & -4x^2 & -4 \\ \cline{7-8}
 & & & & & & & -4
\end{array}$$

Uansett så kan integralet nå skrives som

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^4 - 4x^5 + 6x^6 - 4x^7 + x^8}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^7}{7} - \frac{2x^6}{3} + x^5 - \frac{4x^3}{3} + 4x - 4\arctan x\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 4 - \pi \end{aligned}$$

Siden $\arctan(1) = \pi/4$ og $\arctan(0) = 0$

$$= \frac{22}{7} - \pi.$$

Siden integralet vårt er positivt følger det at

$$I > 0 \;\Rightarrow\; \frac{22}{7} - \pi > 0 \;\Rightarrow\; \frac{22}{7} > \pi$$

som ønsket. Siden $2 < 1 + x^2 < 1$ når $x \in (0, 1)$ har en at

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1}\,\mathrm{d}x < \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{2}\,\mathrm{d}x$$

Ved å opphøye ulikheten i -1. Integralet kan beregnes forholdsvis enkelt

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^4(1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + \frac{6}{7} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{630} \end{aligned}$$

Dermed så er

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{1}{630} & < & \dfrac{22}{7} - \pi & < & \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{630} \\ \dfrac{22}{7} - \dfrac{1}{630} & < & \pi & < & \dfrac{22}{7} - \dfrac{1}{1260} \end{array}$$

24. Siden ϕ er en løsning av $1 = x^2 - x$ medfører dette at $\phi - 1 = 1/\phi$. Dermed så kan en skrive

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt[\phi]{x}\arctan x}{(1+x^\phi)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x^\phi \arctan x}{(1+x^\phi)^2}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Ved å substituere $u = 1/x$ fås

$$\int_\infty^0 \frac{(1/u)^\phi \arctan 1/u}{(1+(1/u)^\phi)^2}(-u)\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty \frac{x^\phi \arctan 1/x}{(1+x^\phi)^2}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Ved å ta gjennomsnittet av disse integralene og bruke at $\arctan x + \arctan 1/x = \pi/2$ forenkles integralet betraktelig.

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^\phi(\arctan x + \arctan 1/x)}{(1+x^\phi)^2}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty \frac{x^\phi}{(1+x^\phi)^2}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Neste steg blir å benytte seg av substitusjonen $y \mapsto x^\phi$ som gir

$$I = \frac{\pi}{4\phi}\int_0^\infty \frac{y}{(1+y)^2}\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\pi}{4\phi}\left[-\frac{1}{1+y}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{4\phi}$$

For å gå den siste substitusjonen litt nærmere i sømmene. Derivasjon gir

$$\mathrm{d}y = \phi x^{\phi-1}\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; \frac{1}{\phi}\,\mathrm{d}y = x^\phi\frac{\mathrm{d}x}{x} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\phi}\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Hvor det ble benyttet at $x^{a+b} = x^a x^b$ og i siste overgang at $x^\phi = y$. Dermed så er

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt[\phi]{x}\arctan x}{(1+x^\phi)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4\phi}$$

Som var det som skulle vises. Nå gjenstår det bare å vise at $2 < 6I < 3$ eller

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{1}{3} & < & \dfrac{\pi}{4}\dfrac{2}{1+\sqrt{5}} & < & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2}{3}(1+\sqrt{5}) & < & \pi & < & 1+\sqrt{5} \end{array}$$

Velger først å vise ulikheten til venstre, altså at $2(1+\sqrt{5}) < 3\pi$. Ved å bruke at $1+\sqrt{5} = 4\sin(3\pi/10)$ fås direkte at.

$$2(1+\sqrt{5}) = 8\sin(3\pi/10) < 8\sin(5\pi/10) = 8$$

Siden $8 < 3\cdot 3 < 3\pi$ stemmer ulikheten. For å se første ulikheten legg merke til at $\sin x$ stiger på $x \in (0,\pi/2)$ så er $\sin(3\pi/10) < \sin(5\pi/10)$. For å vise den neste ulikheten krever litt mer spissfindighet. La oss først benytte oss av at $22/7 > \pi$, som ble vist i forrige oppgave. Fra taylorutvikling så er

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} + \cdots$$

Så lenge $|x| < 1$. Siden rekka konvergerer så er første ledd $x/2$ et overslag andre ledd $x^2/8$ et underslag for den egentlige verdien osv. Dermed så er

$$\sqrt{5}+1 = 1 + 2\sqrt{1+\frac{1}{4}} > 1 + 2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{4^1} - \frac{1}{8}\frac{1}{4^2}\right) = 3 + \frac{15}{64}$$

Da er en egentlig ferdig siden

$$\sqrt{5}+1 > 3 + \frac{15}{64} > \frac{22}{7} > \pi$$

Den midterste ulikheten kan en enkelt se ved å førskt skrive om $22/7$ til $3 + 1/7$. Ved å trekke fra 3 fra begge sider av ulikheten fås $15/64 > 1/7 \;\Rightarrow\; 105 > 64$. Via kryssmultiplikasjon. Oppsumert har en altså vist at

$$\frac{1}{3} \;<\; \frac{\pi}{4}\frac{2}{1+\sqrt{5}} \;<\; \frac{1}{2}\,,$$

som ønsket.

25. Vi noen raske omskrivninger kan integralet skrives på formen

$$\begin{aligned}
I &= \int \left[\frac{(1-x^2)\ln(1+x^2) + (1+x^2) - (1-x^2)\ln(1-x^2)}{(1-x^4)(1+x^2)} \right] x e^{\left[\frac{x^2-1}{x^2+1}\right]}\, \mathrm{d}x \\
&= -\int \left[\frac{(1-x^2)\ln\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right) - (1+x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^2)} \right] x \exp\left[-\frac{1-x^2}{1+x^2}\right] \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{4}\int \left[\frac{(1-x^2)\ln\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right) - (1+x^2)}{(1-x^2)} \right] \frac{2x}{1+x^2} \exp\left[-\frac{1-x^2}{1+x^2}\right] \frac{2\,\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
&= -\frac{1}{4}\int \left[\ln\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) - \frac{1+x^2}{1-x^2} \right] \frac{2x}{1+x^2} \exp\left[-\frac{1-x^2}{1+x^2}\right] \frac{2\,\mathrm{d}x}{1+x^2} \qquad (5.30)
\end{aligned}$$

Videre så benyttes weierstrass-substitusjonen fra teorem (2.4.4).

$$x = \tan\frac{t}{2}\ , \ \sin t = \frac{2x}{1+x^2}\ , \ \cos t = \frac{1-x^2}{1+x^2}\ , \ \text{og} \ \ \mathrm{d}t = \frac{2\,\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

Dette gjør at likning (5.30) skrives om til

$$I = -\frac{1}{4}\int \left[\ln(\cos t) - \frac{1}{\cos t} \right] \sin t\, e^{-\cos t}\, \mathrm{d}t. \qquad (5.31)$$

Videre så kan vi la $y = \cos t \ \Rightarrow \ \mathrm{d}y = -\sin t\,\mathrm{d}t$ slik at

$$I = \frac{1}{4}\int \left[\ln y - \frac{1}{y} \right] e^{-y}\, \mathrm{d}y = \frac{1}{4}\left[\int e^{-y}\ln y\, dy - \int \frac{e^{-y}}{y}\, dy \right]. \qquad (5.32)$$

Dette integralet kan løses via delvis kanselering, avsnitt (2.6.1). Med $u = e^{-y} \Rightarrow \mathrm{d}u = -e^{-y}\,\mathrm{d}y$ og

$$\int \frac{e^{-y}}{y}\, dy = e^{-y}\ln y + \int e^{-y}\ln y\, dy \qquad (5.33)$$

Setter vi nå likning (5.33) inn i (5.32) kan integralet skrives som

$$I = \frac{1}{4}\left[\int e^{-y}\ln y\, dy - \left(e^{-y}\ln y + \int e^{-y}\ln y\,\mathrm{d}y \right) \right] = -\frac{1}{4}e^{-y}\ln y + \mathcal{C}.$$

Oppsumert vil integralet vårt dermed bli

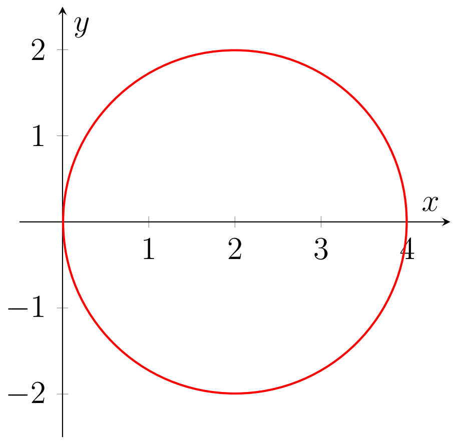
$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left[\frac{(1-x^2)\ln(1+x^2) + (1+x^2) - (1-x^2)\ln(1-x^2)}{(1-x^4)(1+x^2)} \right] x \exp\left[\frac{x^2-1}{x^2+1} \right] \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{4}\exp\left[-\frac{1-t^2}{1+t^2} \right] \ln\left| \frac{1-t^2}{1+t^2} \right| + C
\end{aligned}$$

som var det vi ønsket å vise.

26. Begynner med å legge merke til at området en integrerer over kan skrives om som følger

$$x^2 + y^2 - 4x \leq 0 \;\Rightarrow\; (x-2)^2 + y^2 \leq 2^2 \tag{5.34}$$

Altså beskriver D en disk med sentrum i $(2, 0)$ og radius 2. Dette kan en og se fra å tegne $x^2 + y^2 - 4x = 0$.



Vi kan da beskrive området via dobbeltintegralet

$$\int_0^4 \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} \arctan e^{xy} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

Vi integrerer altså først langs y-aksen fra bunnen av sirkelen til toppen. Deretter integrer vi langs x-aksen som går fra 0 til 4. Integralet kan nå deles opp i to deler

$$\int_0^4 \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{0} \arctan e^{xy} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x + \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} \arctan e^{xy} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

Ved å bruke substitusjonen $y \mapsto -y$ i det første integralet får en

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} \arctan e^{-xy} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x + \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} \arctan e^{xy} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

Dette forenkler integranden betraktelig da en kan slå sammen integralene og benytte **??**

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} \arctan e^{-xy} + \arctan e^{xy} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

Altså at $\arctan x + \arctan 1/x = \pi/2$. Integralet beskriver nå bare arealet av en halvsirkel med radius 2 slik at arealet blir

$$\iint_S \arctan e^{xy} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi \cdot 2^2}{2} \right) = \pi^2$$

Som ønsket. Her ble det brukt at arealet av en halvsirkel er $\pi r^2/2$. Merk en kunne og ha beregnet integralet direkte, med noe mer grisete regning.

$$\begin{aligned}\iint_S \arctan e^{xy}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \frac{\pi}{2}\int_0^4\int_0^{\sqrt{4x-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^4 \sqrt{4-(x-2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\sqrt{4-4\sin^2 u}\cos u\,\mathrm{d}u \\ &= \pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 u\,\mathrm{d}u = \pi^2\end{aligned}$$

samme som før. I andre overgang ble substitusjonen $x-2 \mapsto 2\sin u$ benyttet med $\mathrm{d}x = 2\cos u\,\mathrm{d}u$. Videre så er $\cos^2 x$ positiv på $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ slik at $\sqrt{\cos^2 x} = \cos x$. Integralet over $\cos^2 x$ er som før lik halve området så $1 \cdot (\pi/2 + \pi/2)/2$. Alternativt

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2 u\,\mathrm{d}u = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 u\,\mathrm{d}u + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 u\,\mathrm{d}u = \left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

Siden området over $\cos^2 x$ og $\sin^2 x$ er like store. Dette står det mer om på slutten av avsnitt (2.3).

29. For enklere notasjon byttes ϑ til θ, og vi kaller integralet for I. Vi har at $2\cos(\pi/3) = 1$ og $2\sin(\pi/2) = \sqrt{3}$ slik at

$$\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta = 2\sin(\pi/2)\cos(\theta) - 2\cos(\pi/3)\sin(\theta) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right) \tag{5.35}$$

Hvor identiteten $2\sin(A+B) = \cos A\sin B + \cos B + \sin A$ ble brukt. Via flere identiter så har vi

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta\right)\sin\theta &= 2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\cos\theta \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right) - \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - 2\sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

Ved å bruke disse frekke omskrivingene får vi

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\pi/3}\left((\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta)\sin\theta\right)^{1/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/3}\left(\frac{1}{2} - 2\sin^2\theta\right)^{1/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\left(1-4\sin^2\theta\right)^{1/2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Hvor likning (5.35) ble brukt i første overgang og substitusjonen $\theta \to \theta + \pi/6$ i siste overgang. Tanken er videre at vi kan bruke $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ på siste leddet.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \left(1 - 4\sin^2(\theta)\right)^{1/2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta) - \frac{1}{2}\sin(\theta)\right) \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \left(1 - 4\sin^2(\theta)\right)^{1/2} \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{5.36}$$

Tanken er nå at vi ønsker å bruke $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$, da dette vil kanselere bort rottegnet. For å gjøre dette benyttes enkelt og greit $\sin x \mapsto \frac{1}{2}\sin u$. Selve integralet blir da

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \left(1 - 4\sin^2(\theta)\right)^{1/2} \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 - \sin^2(\theta)\right)^{1/2} \cos u\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}u = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Ved å sette inn $\pi/4$ i likning (5.36) får en som ønsket

$$\int_0^{\pi/3} \left((\sqrt{3}\cos\vartheta - \sin\vartheta)\sin\vartheta\right)^{1/2} \cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Dette fullfører beviset.

30. En frekk løsning her blir å benytte to trigonometriske substitusjoner. som var det som skulle vises.

31. En frekk løsning her blir å benytte to trigonometriske substitusjoner.

$$I = \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x + \sqrt{a^2 - x^2}}$$

Ved å la $x = a\cos u$, og $\mathrm{d}x = -a\sin u\,\mathrm{d}u$. Grensene blir så $x = a \to u = 0$ og $x = 0 \to u = \pi/2$. Dermed så er

$$I = \int_{\pi/2}^{0} \frac{-a\sin u\,\mathrm{d}u}{a\cos u + \sqrt{a^2 - a^2\cos^2 u}} = \frac{1}{a}\int_0^{\pi/2} \frac{a\sin u\,\mathrm{d}u}{\cos u + \sin u}$$

Hvor det blant annet ble benyttet at $a^2 - a^2\cos u = a^2(1 - \cos^2 u) = a^2\sin^2 u$. Videre så ble grensene snudd og $\sin u$ er positiv fra 0 til $\pi/2$. Derimot om substitusjonen $x = a\sin u$ fås

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{a\cos u\,\mathrm{d}u}{a\sin u + \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 u}} = \frac{1}{a}\int_0^{\pi/2} \frac{a\cos u\,\mathrm{d}u}{\cos u + \sin u}$$

Hvor $\mathrm{d}x = a\cos u\,\mathrm{d}u$. Grensene blir så $x = a \to u = \pi/2$ og $x = 0 \to u = 0$. Ved samme argument som før, velger den positive roten siden $\cos u$ er positv for alle $u \in (0, \pi/2)$. Ved å ta gjennomsnittet av disse to integralene fås

$$\frac{1}{2a}\int_0^{\pi/2} \frac{a\cos u}{\cos u + \sin u} + \frac{a\sin u}{\cos u + \sin u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos u + \sin u}{\cos u + \sin u}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}$$

som var det som skulle vises.

32.

a) Vi har at for alle a, b så er

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$$

Ved å bruke dette så er

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\pi/2 - x)\,\mathrm{d}x}{\sin^3(\pi/2 - x) + \cos^3(\pi/2 - x)} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\cos^3 x + \sin^3 x}$$

Slik at $K(1,3) = K^*(1,3)$. Integralene kan dermed skrives som

$$K(1,3) = \frac{K(1,3) + K^*(1,3)}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\,\mathrm{d}x \tag{5.37}$$

Merk at enten fra pascals trekant eller binomialformelen så er

$$\frac{a^n + b^n}{a + b} = a^{n-1} - ba^{n-2} + \ldots - b^{n-2}a + b^{n-1}$$

Slik at

$$\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^x + \cos x} = \sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x$$

Ved å sette dette inn i likning (5.37) fås

$$K(3,1) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1 - \frac{1}{2}\sin 2x} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2 - \sin x}$$

Der substitusjonen $u \mapsto 2x$ ble brukt i siste overgang[5]. Dette integralet kan løses for eksempel via Weiestrass-subtitusjonen $t = \tan(x/2)$ så

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2 - \sin x} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y^2 - y + 1} = \int_0^{\infty} \frac{2\,\mathrm{d}y}{(2y-1)^2 + 3}$$

[5]Det er ikke noe problem å benytte seg av Weiestrass-substitusjonen direkte, men regningen blir noe mer grisete. Prøv selv for å se hva jeg mener.

I andre overgang ble teorem (2.4.4) benyttet og litt opprydning i algebra. Tilslutt så fullføres kvadratet. Ved å benytte seg av substitusjonen $2y - 1 = \sqrt{3}\tan t$ blir så integralet

$$= \int_{-\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sqrt{3}\sec t \,\mathrm{d}t}{3\tan^2 t + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$$

Her ble det blant annet brukt at $\sec x = 1 + \tan^2 x$, $\arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6$ og $\arctan x \to \pi/2$ når $x \to \infty$.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \,\mathrm{d}x}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \,\mathrm{d}x}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

b) Vi har at for alle a, b så er

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a + b - x)\,\mathrm{d}x$$

slik at

$$K(n,m) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^m(\pi/2 - x)\,\mathrm{d}x}{\sin^n(\pi/2 - x) + \cos^n(\pi/2 - x)} = K^*(n,m)$$

Dermed så er $K(n,m) = K^*(n,m)$ og

$$K(n,m) = \frac{K(n,m) + K^*(n,m)}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^m x + \cos^m x}{\sin^n x + \cos^n x}\,\mathrm{d}x$$

for alle n, m. Dersom $n = m$ har en at

$$K^*(n,n) = K(n,n) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x + \cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

c) Dette integralet kan først forenkles ved å benytte seg av proposisjon (2.3.2) eller *dette spørsmålet*. Siden $K(2014, 2014)$ er en likefunksjon. Slik at La nå for enkehletensskyld

$$f(x) = \frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}$$

da er

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{f(x)}{1 + \alpha^x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{f(x)}{1 + \alpha^x}\,\mathrm{d}x + \frac{f(-x)}{1 + \alpha^{-x}}\frac{\alpha^x}{\alpha^x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Siden $f(x) = f(-x)$ da f er en likefunksjon. Dermed så er

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{f(x)}{1 + \alpha^x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x = K(2n, 2n) = \frac{\pi}{4}$$

Spesielt så er

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(\sin x)^{2014}}{(\sin x)^{2014} + (\cos x)^{2014}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\alpha^x} = \frac{\pi}{4}$$

33. Velger først å numerere ekvivalensene som følger

$$\begin{array}{ccc}
\displaystyle\int_{ma}^{na} \frac{\log(x-a)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x & \overset{(1)}{\Leftrightarrow} & \displaystyle\int_{a/n}^{a/m} \frac{\log(x+a)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \\
(2) \Updownarrow & & \Updownarrow (4) \\
\dfrac{\log 2a^2}{2a}(\arctan n - \arctan m) & \underset{(3)}{\Leftrightarrow} & \dfrac{\log 2a^2}{2a}\left(\arctan \dfrac{1}{m} - \arctan \dfrac{1}{n}\right) \\
 & & ,
\end{array}$$

Da dette vil gjøre utregningen noe ryddigere. Begynner å vise (1). Ved å skrive om $nm = n + m + 1$ fås $n = (m+1)/(m-1)$. I første integral, benyttes substitusjonen $u = x/a$. Så $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x/a$.

$$I_1 = \int_{ma}^{na} \frac{\log(x-a)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \int_m^n \frac{\log(ax-a)}{(ax)^2+a^2} a\,\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\int_m^n \frac{\log a + \log(u-1)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

For vårt andre integral benyttes substitusjonen $u = a/x$, så $\mathrm{d}u = -a\,\mathrm{d}x/x^2$. Dette kan skrives om til $\mathrm{d}x = -(x^2/a)\,\mathrm{d}u = -a\,\mathrm{d}u/u^2$.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{a/n}^{a/m} \frac{\log(x+a)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a^2}\int_{a/n}^{a/m} \frac{\log a + \log(1+x/a)}{(x/a)^2 + 1^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_m^n \frac{\log a + \log(1+1/u)}{u^2+1}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Vi ønsker nå å vise at $I_1 - I_2 = 0$, addisjon gir

$$\begin{aligned}
I_1 - I_2 &= \frac{1}{a}\int_m^n \frac{\log(u+1) - \log u - \log(u-1)}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{a}\int_m^{\frac{m+1}{m-1}} \frac{\log\left(\frac{u+1}{u-1}\right) - \log u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Skriver om uttrykket via substitusjonen $y = (u+1)/(u-1)$, videre så er $\mathrm{d}y = -2\,\mathrm{d}u/(u-1)^2 = -(y-1)^2\,\mathrm{d}y/2$. Mer regning gir da

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a}\int_{\frac{m+1}{m-1}}^{m} -\frac{\log\left(\frac{y+1}{y-1}\right) - \log y}{\left(\frac{y+1}{y-1}\right)^2 + 1}\left(-2\frac{\mathrm{d}y}{(y-1)^2}\right) \\
&= -\frac{1}{a}\int_m^{\frac{m+1}{m-1}} \frac{\log\left(\frac{y+1}{y-1}\right) - \log y}{y^2+1}\,\mathrm{d}y \\
&= -(I_1 - I_2)
\end{aligned}$$

Og nå siden $I_1 - I_2 = -(I_1 - I_2)$ så er $I_1 - I_2 = 0$ som ønsket.

Velger å vise ekvivalens (2) nå, altså

$$I_2 = \int_{a/m}^{a/n} \frac{\log(x+a)}{x^2+a^2} = \frac{\log(2a^2)}{a^2}\big[\arctan\frac{1}{m} + \arctan\frac{1}{n}\big]$$

Ved å faktorisere litt så kan en se at substitusjonen

$$x = a\frac{t+a}{t-a} \quad \text{og} \quad \mathrm{d}x = \frac{-2a^2}{(a-t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Ved å utføre litt mer mellomregninger så er

$$x^2 + a^2 = 2a^2\left[\frac{t^2+a^2}{(a-t)^2}\right]$$

Som gjør at uttrykket $\mathrm{d}x/(x^2+a^2) = -\,\mathrm{d}t/(t^2+a^2)$. En annen ting som gjør at denne substitusjonen ble forsøkt, er at den er sin egen invers. Ved å sette inn fås

$$I_1 = \int_{na}^{ma} \frac{\log(x-a)\,\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \int_{ma}^{na} \frac{\log\big[2a^2/(t-a)\big]}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t = \int_{na}^{ma} \frac{\log(2a^2)}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t - I_1$$

Legg merke til at vi ender opp med vårt opprinnelige integral på høyresiden og ved å løse for I_1 forenkles integralet til

$$I_1 = \frac{\log(2a^2)}{2}\int_{ma}^{na} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)} = \frac{\log(2a^2)}{2a}\int_{m}^{n} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}$$

Der substitusjonen $t \mapsto au$ ble brukt. Siste integralet er bare den antideriverte av $\arctan x$, så en får

$$\int_{na}^{ma} \frac{\log(x-a)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\log 2a^2}{2a}\big(\arctan n - \arctan m\big)$$

som var det som skulle vises. Vi viser så (3), ved å gange begge sider med $2a/\log(2a^2)$ fås

$$\arctan n - \arctan m = \arctan\frac{1}{m} - \arctan\frac{1}{n}$$

som selvsagt holder da en kan skrive den om som

$$\arctan n + \arctan\frac{1}{n} = \arctan\frac{1}{m} + \arctan m$$

og både høyre og venstre side er nå lik $\pi/2$ fra **??**. Alternativt kan en og trekkke sammen begge sidene ved å bruke

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

som er sum formelen for tangens, og deretter bruke at $nm = n + m + 1$ men det overlates til lese. For å vise (4) går en frem på samm måte som i (1)

$$I_2 = \int_{a/n}^{a/m} \frac{\log(x+a)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$$

For å løse dette integralet så kan følgende substitusjon benyttes

$$x = a\frac{a-t}{a+t}$$

Tanken er igjen å dele integralet og få $-I_2$ på høyre side. Som før så er

$$\frac{\mathrm{d}x}{a^2+t^2} = -\frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2}$$

og når $x = a/m$ så er $t = a(-1+m)/(1+m) = a/n$ og tilsvarende når $x = a/n$ så er $t = a(-1+n)/(1+n) = 1/m$. Endelig så kan integralet skrives som

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{a/n}^{a/m} \frac{\log(x+a)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{a/m}^{a/n} \frac{\log[2a^2/(a+t)]}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t = \int_{a/n}^{a/m} \frac{\log(2a^2)}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t - I_2 \end{aligned}$$

Dette er en likning som kan løses med hensyn på I_2 slik at

$$I_2 = \frac{\log(2a^2)}{2}\int_{a/n}^{a/m} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} = \frac{\log(2a^2)}{2a}\int_{1/n}^{1/m} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

Via den kjære substitusjonen $t \mapsto au$. Integranden er den deriverte av tangens, slik at en får

$$\int_{a/n}^{a/m} \frac{\log(x+a)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\log(2a^2)}{2a}\left[\arctan\frac{1}{m} + \arctan\frac{1}{n}\right]$$

som var det som skulle vises. Dette fullfører den noe lange oppgaven. Merk at en også kunne ha brukt teorem (2.8.1) fra begynnelsen, men dette ville kanskje ikke gitt den samme insikten.

34. Noe problematisk oppgave om en ikke holder tungen bent i munnen. Ved å gange med $4/4$ og så fullføre kvadratet fås

$$\frac{1}{x^2+bx+c} = \frac{4}{(2x+b)^2+4c-b^2} = \frac{4}{(2x+b)^2+(\pi/10)^2}$$

Hvor det i siste overgang ble benyttet at $4c - b^2 = \pi^2/100$. Ved å sette inn i integralet kan en nå benytte substitusjonen $u \mapsto 2x+b$ så $\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-b/2}^{a/2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+bx+c} \\ &= 2\int_{-b/2}^{a/2} \frac{2\,\mathrm{d}x}{(2x+b)^2+(\pi/10)^2} \\ &= 2\int_{0}^{\pi/10} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+(\pi/10)^2} \\ &= \frac{2}{\pi/10}\left[\arctan\left(\frac{x}{\pi/10}\right)\right]_0^{\pi/10} \\ &= \frac{20}{\pi}\left[\arctan(1) - \arctan(0)\right] \\ &= \frac{20}{\pi}\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = 5 \end{aligned}$$

Hvor det ble benyttet at

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \arctan\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

Som er et kjent integral og kan eksempelvis vises via $x = \arctan u$.

35. Oppgaven er egentlig algebra og elementær faktorisering i forkledning. På samme måte som en kan se at

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{1^2 - 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} = 1 - \sqrt{2}\,,$$

kan en og forenkle røttene i integranden. Faktorisering av kvadratrøttene gir som følger

$$\begin{aligned} x + 2\sqrt{2x-4} &= (\sqrt{x-2})^2 + 2\sqrt{2x-4} + (\sqrt{2})^2 = \left(\sqrt{x-2} + \sqrt{2}\right)^2 \\ x - 2\sqrt{2x-4} &= (\sqrt{x-2})^2 - 2\sqrt{2x-4} + (\sqrt{2})^2 = \left(\sqrt{x-2} - \sqrt{2}\right)^2 . \end{aligned}$$

Ved å sette dette inn i det ubestemte integralet fås da

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \sqrt{\sqrt{\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right)^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \sqrt{\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right) + \left|\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right|}\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Herfra ser en at $\sqrt{x-2} - \sqrt{2} < 0$ når $x \in [2,4]$ og positiv når $x > 4$. Så

$$\left|\sqrt{x-2} - \sqrt{2}\right| = \begin{cases} \sqrt{2} - \sqrt{x-2} & \text{når} \quad x \in [2,4] \\ \sqrt{x-2} - \sqrt{2} & \text{når} \quad x > 4 \end{cases}$$

Siden $|x| = x$ når $x > 0$ og $|x| = -x$ når $x < 0$ naturligvis. Ser først på tilfellet når $x \in [2,4]$ da er

$$\int \sqrt{\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{2}-\sqrt{x-2}\right)}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{2\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x = 2^{3/4}x + \mathcal{C}_1$$

Når $x > 4$ så kan integralet skrivet som

$$\int \sqrt{\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right)}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{2}\,(x-2)^{1/4}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{5}\sqrt{2}\,(x-2)^{5/4} + C_2$$

For at funksjonen skal være kontinerlig så må konstantene være like i punktet $x = 4$ så

$$8\sqrt{2} + C_1 = \frac{8}{5} 2^{3/4} + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = \frac{8\sqrt{2}}{5}\left(\sqrt[4]{2} - 5\right) + C_1$$

Ved å legge sammen alt dette fås endelig

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{\sqrt{x + 2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x - 2\sqrt{2x-4}}}\,\mathrm{d}x \\ &= \begin{cases} 4\sqrt{2}\,(x-2)^{5/4}/5 + C_1 & \text{når} \quad x \geq 4 \\ 2^{3/4}x + 8\sqrt{2}\,\big(\sqrt[4]{2} - 5\big)/5 + C_1 & \text{når} \quad x \in (2,4) \end{cases} \end{aligned}$$

som var det en ønsket å beregne. Det bestemte integralet blir så

$$\int_2^4 \sqrt{\sqrt{x + 2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x - 2\sqrt{2x-4}}}\,\mathrm{d}x = \int_2^4 2^{3/4}x\,\mathrm{d}x = 2^{7/4}$$

Som er et søtt lite svar på et stort stygt beist.

36.

h) Legg merke til at vi har $x^2 - \sqrt{x} = \sqrt{x}\Big((\sqrt{x})^3 - 1\Big)$. Ved å bruke at $a^3 - 1 = (a-1)(a^2+a+1)$ så kan vi gjøre følgende omskrivning

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} \Big/ \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}} &= \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}\Big((\sqrt{x})^3 - 1\Big) \\ &= \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x}-1)\sqrt{x}\big(x + \sqrt{x} + 1\big) \end{aligned}$$

Ved å bruke at $\sqrt{x}\big(x + \sqrt{x} + 1\big) = x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}$ forenkles nå integralet ned til

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} \Big/ \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int \big(\sqrt{x}+1\big)\big(\sqrt{x}-1\big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int x - 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 - x = \frac{x(x-2)}{2} + \mathcal{C} \end{aligned}$$

i) Helt tilsvarende som i forrige deloppgave får vi

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} \Big/ \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \sqrt{x}\,\big(\sqrt{x}-1\big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b x - \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[x\left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}\sqrt{x}\right)\right]_a^b \end{aligned}$$

Vi ser at uttrykket i parentesen er null når $x = 0$, en mulighet er altså at $a = 0$ eller $b = 0$. Den andre muligheten for at uttrykket i klammene er null, da er

$$\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}\sqrt{x} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{4}x^2 - \frac{4}{9}x = 0 \;\Rightarrow\; x - \frac{16}{9} = 0$$

så $x = 16/9$. Altså er

$$\int_0^{16/9} \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} \Big/ \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 0$$

og $a = 0$, $b = 16/9$ siden $a > b$.

37. Dette er en øvelse i delvis integrasjon. Telleren hinter om at delvis integrasjon vil hjelpe med å velge

$$v = \frac{1}{x - \arctan x}\,. \tag{5.38}$$

For at dette skal gå må det finnes to funksjoner u og $\mathrm{d}v$ slik at

$$u\,\mathrm{d}v = \left(\frac{\arctan x}{x - \arctan x}\right)^2 \tag{5.39}$$

Disse er heldigvis ikke vanskelige å finne. Ved å derivere likning (5.38) fås en mulig $\mathrm{d}v$, og ved å dele denne funksjonen på begge sider av likning (5.39) fås u

$$\mathrm{d}v = -\frac{x^2}{1+x^2}\frac{1}{(x - \arctan x)^2} \quad \text{og} \quad u = -\frac{1+x^2}{x^2}(\arctan x)^2\,.$$

Overraskende nok så blir også u' relativt pen

$$u' = \frac{2\arctan x}{x^3})(\arctan x - x)\,.$$

Ved å bruke den kjære formelen for delvis integrasjon

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int u'v\,,$$

kan integralet $\mathcal{I}$ skrives som

$$\int \left(\frac{\arctan x}{x - \arctan x}\right)^2 \mathrm{d}x = -\frac{(1+x^2)(\arctan x)^2}{x^2(x - \arctan x)} + \int \frac{2\arctan x}{x^3}\,\mathrm{d}x\,. \tag{5.40}$$

Det siste integralet kan igjen løses ved å sette $u = \arctan x$ og $\mathrm{d}v = 2x^{-3}$ så

$$\begin{aligned}
\int \frac{2\arctan x}{x^3}\,\mathrm{d}x &= -\frac{\arctan x}{x^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x^2)} \\
&= -\frac{\arctan x}{x^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} - \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
&= -\frac{\arctan x}{x^2} - \frac{1}{x} - \arctan x + \mathcal{C}\,.
\end{aligned}$$

Delbrøksoppspaltingen kan for eksempel bli sett ved å legge til og trekke fra x^2 i teller. For å få det endelige svaret er resten bare faktorisering. La oss først skrive om det siste integralet, ved å gange med $x - \arctan x$ i teller og nevner

$$\begin{aligned}
\int \frac{2\arctan x}{x^3}\,\mathrm{d}x &= \left(-\frac{\arctan x}{x^2} - \frac{1}{x} - \arctan x\right)\frac{x - \arctan x}{x - \arctan x} \\
&= \left[\frac{\arctan x^2}{x^2} + (\arctan x)^2 - 1 - x\arctan x\right] \Big/ (x - \arctan x) \\
&= \frac{(1+x^2)(\arctan x)^2}{x^2(x - \arctan x)} - \frac{1 + x\arctan x}{x - \arctan x}\,.
\end{aligned}$$

Hvor konstanten ble droppet av praktiske grunner. Ved å sette dette uttrykket for integralet inn i likning (5.40) får en endelig at

$$\int \left(\frac{\arctan x}{x - \arctan x} \right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1 + x \arctan x}{\arctan x - x} + \mathcal{C} \,. \tag{5.41}$$

som er nesten det vi ønsket å vise. Ved å snu likning (2.65) på hodet, altså å opphøye begge sider i -1 så er sumformlene for tangens er gitt som

$$\frac{1}{\tan(a-b)} = \frac{1 + \tan a \tan b}{\tan a - \tan b} \,.$$

For at høyresiden i denne likningen skal være lik høyresiden av likning (5.41) så må vi ha at $\tan a = x$ og at $\tan b = \arctan x$. Dette gir som ønsket

$$\int \left(\frac{\arctan x}{x - \arctan x} \right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{\tan(\beta - \tan \beta)} \,,$$

hvor $x = \tan \tan \beta$ eller $\beta = \arctan(\arctan x)$.

38. Teknikken en bruker her blir selvsagt delvis integrasjon. Vi velger her

$$\begin{aligned} u &= x & v' &= f''(2x) \\ u' &= 1 & v &= \frac{1}{2} f'(2x) \end{aligned}$$

Slik at en får

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \left(\frac{1}{2} f'(2x) \right)' \mathrm{d}x &= \left[\frac{x}{2} f'(2x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} f'(2x) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} f'(2) - \left[\frac{1}{4} f(2x) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} f'(2) - \frac{1}{4} \big(f(2) - f(0) \big) = 2 \end{aligned}$$

I siste linje ble det brukt at $f(0) = 1 \,,\ f(2) = 3$ og $f'(2) = 5$.

40. At f/g har et kritisk punkt betyr at den deriverte er null, altså

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{f'g - g'f}{g^2} = 0 \,,$$

for $x = 5$ og $x = 7$. Siden $g^2 > 0$ medfører dette at

$$f'g - g'f = 0 \,, \quad \text{for} \quad x = 5, 7 \,. \tag{5.42}$$

Dette blir lagt litt i bakhodet, mens en tar fatt på selve integralet. For enkelhetens skyld blir det videre skrevet $f(x) = f$ og $g''(x) = g$. Først benyttes delvis integrasjon to ganger som gir

$$\int_5^7 f g'' \, \mathrm{d}x = \left[f g' \right]_5^7 - \int_5^7 f' g' \, \mathrm{d}x = -\left[f'g - g'f \right]_5^7 + \int_5^7 f'' g \, \mathrm{d}x$$

En kan skrive om $f''g$ ved å benytte (iii) og (iv) så

$$f''g = \big[\overbrace{2g'' - f\cdot\big[g''\big]^2}^{(iv)}\big]\cdot\overbrace{1/g''}^{(iii)} = 2 - fg''$$

Innsetning gir nå at

$$\begin{aligned}
\int_5^7 fg''\,\mathrm{d}x &= -\Big[f'g - g'f\Big]_5^7 + \int_5^7 f''g\,\mathrm{d}x\\
\int_5^7 fg''\,\mathrm{d}x &= 0 + \int_5^7 2x - fg''\,\mathrm{d}x\\
2\int_5^7 fg''\,\mathrm{d}x &= 2\int_5^7 x\,\mathrm{d}x\\
\int_5^7 fg''\,\mathrm{d}x &= 2
\end{aligned}$$

I første overgang ble likning (5.42) benyttet og at $f''g = 2 - fg''$.

41. Legg merke til at $\arccos(x)$ bare er definert for $x \in [-1,1]$ og siden en har $\sqrt{x}$, så må $0 \leq a \leq b \leq 1$. Da integralet vårt er positivt, og en ønsker å maksimere I, må en la integralet vårt gå over det maksimale intervallet. Altså er $a = 0$ og $b = 1$. Vi har at $\sin(u)^2 + \cos(u)^2 = 1$, la nå $u = \arccos(\sqrt{x})$ da har en

$$\begin{aligned}
\big[\sin\big(\arccos\sqrt{x}\,\big)\big]^2 + \big[\cos\big(\arccos\sqrt{x}\,\big)\big]^2 &= 1\\
\big[\sin\big(\arccos\sqrt{x}\,\big)\big]^2 &= 1 - x
\end{aligned}$$

Altså er

$$I = \int_0^1 \big[\sin\big(\arccos\sqrt{x}\,\big)\big]^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1 - x = \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

42. Det er ikke videre vanskelig å se at

$$g(x)^2 = \big[\sin(\log x) + \cos(\log x)\big]^2 = 1 + \sin(2\log x)$$

Hvor en i siste uttrykk benyttet seg av $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ og $\sin(2x) = 2\cos x \sin x$. Vi ønsker altså å vise at

$$\int_0^1 \cos^2(\log x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1 + \sin(2\log x)\,\mathrm{d}x$$

For å stadfeste denne likheten benytter en seg av delvis integrasjon med $u = \cos^2(\log x)$ og $v' = 1$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)^2 \,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \cos^2(\log x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[x\cos(\log x)\Big]_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{-1}{x}\sin(2\log x)\,\mathrm{d}x \\ &= 1 + \int_0^1 \sin(2\log x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 1+\sin(2\log x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 g(x)^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Som var det en ønsket å vise. Legg for ordens skyld merke til at det ikke var nødvendig og beregne integralene for å vise likheten. For å fylle på litt mer detaljer: I den delvise integrasjonen ble det benyttet at $v' = 1$, $v = x$ og

$$u' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cos^2(\log x)\right]^2 = \frac{2}{x}\cos(\log x)[-\sin(\log x)] = -\frac{1}{x}\log(2\sin x)$$

og grenseverdien kan eksempelvis vises slik

$$L = \lim_{n\to 0}\Big[x\cos(\log x)\Big]_n^1 = 1 - \lim_{n\to 0} n\cos(\log n)$$

Siden $1\cos(\log 1) = \cos 0 = 1$. Det er flere måter å vise den siste grensen på. En metode er å legge merke til at $\lim_{x\to 0} xf(x) = 0$, dersom det eksisterer en K slik at $|f(x)| \leq K$. En måte å tenke på dette som er at om f ikke vokser mot uendelig, så vil x før eller siden dra grensen mot null. I dette tilfellet er $K = 1$, siden $\cos x$ oscillerer mellom -1 og 1 for alle x.

Alternativt så kan en definere $L = x\sin(\log x)$ og $R = x\cos(\log x)$. Da er $L^2 \geq 0$ og $R^2 \geq 0$ for alle x. Videre så er $L^2 + R^2 = x^2$, slik at når x går mot null så *må* L og R og gå mot null.

43. Det første steget vi gjør blir å bruke substitisjonen $x \mapsto 1-y$, altså at $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)$

$$J = \int_0^1 (1-y)\log\left(\frac{2+\sqrt{1-y}}{2-\sqrt{1-y}}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\log\left(\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$$

Vi kan så dele J inn i følgende to integral

$$J = \int_0^1 x\log\left(2+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x - \int_0^1 x\log\left(2-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$$

Vi kan bruke substitusjonen $y \mapsto 2+\sqrt{x}$ på første integralet og $y \mapsto 2+\sqrt{x}$ på andre integralet slik at

$$J = \int_2^3 2(y-2)^3\log y\,\mathrm{d}y - \int_2^1 2(y-2)^3\log y\,\mathrm{d}y$$

dette medfører som ønsket at

$$\int_0^1 (1-y)\left(\frac{2+\sqrt{1-y}}{2-\sqrt{1-y}}\right)\mathrm{d}y = 2\int_1^3 (y-2)^3 \log y \,\mathrm{d}y$$

Å beregne integralet nå er ikke spesielt vanskelig.

45.

Løsning 1 Det fine med dette integralet er at det kan løses ved hjelp av en serie mer eller mindre normale substitusjoner. Vi velger her å først bruke

$$\begin{aligned}
u &= x^2 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \\
I &= \int_0^\infty \frac{x^{29}}{(5x^2+49)^{17}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\left(x^2\right)^{14}}{(5x^2+49)^{17}} 2x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{u^{14}}{(5u+49)^{17}}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Videre ønsker en å forenkle nevner, og bruker derfor substitusjonen

$$\begin{aligned}
u &= \frac{49}{5}t \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{49}{5}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\left(\frac{49}{5}t\right)^{14}}{\left(5\left(\frac{49}{5}t\right)+49\right)^{17}}\left(\frac{49}{5}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{49}{5}\right)^{14}\left(\frac{49}{5}\right)\int_0^\infty \frac{t^{14}}{49^{17}(t+1)^{17}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\cdot 5^{15}\cdot 49^2}\int_0^\infty \frac{t^{14}}{(t+1)^{17}}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Det siste integralet har en vært borte i før, men velger å ta det igjen. Vi skriver om

$$\frac{t^{14}}{(t+1)^{17}} = \left(\frac{t}{t+1}\right)^{14}\frac{1}{(t+1)^3}$$

Vi lar $y = \dfrac{t}{t+1}$ og legger merke til at $1 - y = \dfrac{1}{1+t}$ så

$$
\begin{aligned}
y = \frac{t}{t+1} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{(t+1)^2} \Rightarrow \mathrm{d}y = \frac{1}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2 \cdot 5^{15} \cdot 49^2} \int_0^\infty \frac{t^{14}}{(t+1)^{17}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2 \cdot 5^{15} \cdot 49^2} \int_0^\infty \overbrace{\left(\frac{t}{t+1}\right)^{14}}^{y} \overbrace{\left(\frac{1}{t+1}\right)}^{1-y} \overbrace{\left(\frac{1}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t\right)}^{\mathrm{d}y} \\
&= \frac{1}{2 \cdot 5^{15} \cdot 49^2} \int_0^1 y^{14}(1-y)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2 \cdot 5^{15} \cdot 49^2} \left[\frac{1}{15} y^{15} - \frac{1}{16} y^{16}\right]_0^1 \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2 \cdot 5^{15} \cdot 49^2 \cdot 15 \cdot 16} \\
\int_0^\infty \frac{x^{29}}{(5x^2+49)^{17}}\,\mathrm{d}x &= \frac{14!}{2 \cdot 5^{15} \cdot 49^2 \cdot 16!}
\end{aligned}
$$

Som var det en ønsket å vise =)

46. Det enkleste er å beregne $T(1)$ først, da har en

$$
T(1) = \frac{h}{2}\big[f(a) + f(b)\big] + 0 = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\,.
$$

Siden f er kontinuerlig og integralet er begrenset betyr dette at $T(n)$ konvergerer mot A. Så

$$
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\ell\to\infty} T(\ell)
$$

La oss regne ut høyresiden eksplisitt. Ved å sette inn uttrykket for trapesmetoden fås

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} T(n) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{h}{2}\big[f(a)+f(b)\big] + h\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(x_k\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(x_k\right) + f(x_{n-k})
\end{aligned}
$$

I siste overgang legger vi sammen siste elementet med første, nest siste med andre osv. Virker dette ulogisk, så bare skriv ut et par ledd og sammenlign. En har også at

$$
f(x) + f(a+b-x) = f(a) + f(b) = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{5.43}
$$

Siden $f(x) + f(a + b - x)$ er konstant for alle $x \in [a, b]$. Ved å sette $x = a$ eller $x = b$ fås første likhet, og ved å sette $x = (a + b)/2$ fås andre. Målet er å bruke dette for å forenkle summen, dette kan bli gjort ved å skrive om

$$
\begin{aligned}
x_{n-k} &= a + \frac{b-a}{n} \cdot (n-k) \\
&= a + b - \left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \\
&= a + b - x_k
\end{aligned}
$$

Ved å bruke dette i summen vår får en nå at

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} T(n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(x_k\right) + f(x_{n-k}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(x_k\right) + f(a+b-x_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} f(a) + f(b) \\
&= \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\
&= (b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]
\end{aligned}
$$

Der første del av likning (5.43) ble benyttet. Videre ble $f(a) + f(b)$ satt utenfor summen siden dette er en konstant. Tilslutt så ble grensen beregnet som følger

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} (\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n-1 \text{ ganger}}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(n-1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)
$$

som går mot 1 når $n \to \infty$. Dette viser punkt 1 og punkt 3 siden

$$
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\ell\to\infty} T(\ell) = T(1)
$$

da gjenstår det bare å vise punkt 2. Merk at selv om $T(n)$ konvergerer mot $T(1)$ kan det være at $T(10) > T(1)$, $T(15) < T(1)$ osv. For å vise det for alle k kan en enten benytte seg av induksjon, eller eksplisitt regning

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \frac{h}{2}\big[f(a)+f(b)\big] + h\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \\
&= \frac{h}{2}\big[f(a)+f(b)\big] + \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(x_{2n-1-k}) \\
&= \frac{h}{2}\big[f(a)+f(b)\big] + \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(a+b-x_k) \\
&= \frac{h}{2}\big[f(a)+f(b)\big] + \frac{h}{2}(n-1)[f(a)+f(b)] \\
&= \frac{hn}{2}\big[f(a)+f(b)\big] = (b-a)\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]
\end{aligned}
$$

Siden $h = (b-a)/n$ så $hn = b-a$. Videre ble de fleste triksene fra forrige del benyttet.

47. Ved å bruke antagelsene kan en skrive om som følger

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{n \cdot l_f / T}{V_g}$$

Deler en nå begge sider av likningen på p fås

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} &= \frac{n \cdot l_f / T}{pV_g} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\Big(\log p\Big) &= \frac{n \cdot l_f / T}{nRT} = \frac{L_f}{T^2 R}
\end{aligned}
$$

som ønsket.

b) Ved innsetning fås nå

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\Big(\log p\Big) &= \frac{\alpha - \beta T}{T^2 R} \\
\int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\Big(\log p\Big)\,\mathrm{d}T &= \frac{1}{R}\int_{T_0}^{T} \frac{\alpha}{T^2} - \frac{\beta}{T}\,\mathrm{d}T \\
\log\left(\frac{p}{p_0}\right) &= -\frac{1}{R}\left\{\beta \log\frac{T}{T_0} + \alpha\left[\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right]\right\} \\
p = p_0 \exp\left\{-\log\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\beta/R}\right\} &\cdot \exp\left\{\alpha\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right\} \\
p(T) = p_0\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\beta/R} &\exp\left\{-\frac{\alpha}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

48. a) Første metode er å se at både x og e^x er strengt voksende funksjoner, slik at xe^x også må være strengt voksende. Altså er $f(x) = xe^x$ injektiv. Siden

x og e^x kontinuerlige, så er f kontinuerlig. Tilslutt legges det merke til at $f(0) = 0e^0 = 0$, og $f(1) = e > 2$. Så dermed finnes det en *unik* konstant $0 < \Omega < 1$ slik at $f(\Omega) = 1$. På bakgrunn av at funksjonen er kontinuerlig, strengt voksende.

Alternativt anta at likningen $xe^x = 1$ har to løsninger Ω_1 og Ω_2. Siden nå $e^x = 1/x$ så er

$$e^{\Omega_1} = e^{\Omega_2} \quad \text{og} \quad \frac{1}{\Omega_1} = \frac{1}{\Omega_2}$$

og begge likningene gir at $\Omega_1 = \Omega_2$, så igjen så er Ω unikt definert.

b) Ønsker å løse likningen $f = g$, da fås

$$x = x^2 \log x \;\Leftrightarrow\; 0 = x(1 - x \log x)$$

Slik at enten så er $x = 0$ eller så er $x \log x = 1$, en ser videre på siste løsning.

$$\begin{aligned} 1 &= x \log x \\ 1/x &= \log x \\ e^{1/x} &= e^{\log x} \\ \frac{1}{x} e^{1/x} &= 1 \end{aligned}$$

Sammenlikner en nå med definisjonen av Ω konstanten ser en at $\frac{1}{x} = \Omega$ så

$$x = \frac{1}{\Omega} = e^{\Omega}$$

Hvor den siste likheten ble tatt fra definisjonen av Omega, altså $\Omega e^{\Omega} = 1 \;\Rightarrow\; e^{\Omega} = 1/\Omega$.

c) Her ønsker en å beregne integralet

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\exp(\Omega)} \int_f^g 1 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\exp(\Omega)} x - x^2 \log x \, \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\exp(\Omega)} - \left\{ \left[\frac{1}{3} x^3 \log x \right]_0^{\exp(\Omega)} - \int_0^{\exp(\Omega)} \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \right\} \\ &= \frac{1}{2} e^{2\Omega} - \frac{1}{3} e^{3\Omega} \log e^{\Omega} + \frac{1}{9} e^{3\Omega} \\ &= \frac{1}{2} e^{2\Omega} - \frac{1}{3} e^{2\Omega} \cdot \Omega e^{\Omega} + \frac{1}{9} e^{3\Omega} \\ &= \frac{1}{6} e^{2\Omega} + \frac{1}{9} e^{3\Omega} \\ &= \frac{1}{6\Omega^2} + \frac{1}{9\Omega^3} \end{aligned}$$

som var det en ønsket å vise. I siste overgang ble igjen egenskapen at $\Omega e^{\Omega} = 1$ benyttet, og at $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$.

d) Første iterasjon med $\Omega_0 = 0$ gir seg $\Omega_1 = \frac{1+0}{1+1} = \frac{1}{2}$. Den neste iterasjonen gir $\Omega_2 = \frac{1+1/2}{1+e^{1/2}}$. Slik at

$$\frac{1}{\Omega_2} = \frac{2}{3}\left(1+\sqrt{e}\right)$$

Innsatt i nederste uttrykk for arealet fås da

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{6\Omega^2} + \frac{1}{9\Omega^3} \\ &= \left(\frac{1}{\Omega}\right)^2 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9}\frac{1}{\Omega}\right) \\ &\approx \left[\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{e}\right)\right]^2 \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{e}\right)\right] \\ &\approx \frac{8}{243}\left(1+\sqrt{e}\right)^2 \left(\frac{13}{4} + \sqrt{e}\right) \end{aligned}$$

Dette er bare en halvgod tilnærming da $\Omega_2 e^{\Omega_2} \neq 1$ altså stemmer ikke tilnærmingen som ble benyttet i **c**). Ω konstanten lengre. En kan bruke et tidligere uttrykk for arealet, for høyere nøyaktighet. Men det får være opp til leser. Benytter i stedet initialverdien $\Omega_0 = \log 2$ fås

$$\Omega_1 = \frac{1}{3}\left(1+\log 2\right) \quad \text{og} \quad \exp\left(\Omega_1\right) = \exp\left(\frac{1}{3}\log 2e\right) = \sqrt[3]{2e}$$

Setter en inn dette i det andre uttrykket en har for arealet fås

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{6}e^{2\Omega} + \frac{1}{9}e^{3\Omega} = e^{3\Omega}\left[\frac{1}{6}\frac{1}{e^{\Omega}} + \frac{1}{9}\right] \\ &= 2e\left[\frac{1}{6\sqrt[3]{2e}} + \frac{1}{9}\right] = 2e\left[\frac{1}{6}(2e)^{-1/3} + \frac{1}{9}\right] \end{aligned}$$

Benytter en seg nå av tilnærmingen $e \sim 8/3$ fås

$$= \frac{2^3}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2^4}{3}\right)^{1/3} + \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{9} = \left(\frac{3}{2}\right)^{5/3} + \frac{16}{27}$$

For en endelig tilnærming kan en se at $(3/2)^5 = 32/243 \sim 30/240 = 1/8$ så $(3/2)^{5/3} \approx 1/2$ og da blir $A = 1 + 5/54$.

49.

$$x^2 + ye^y = 1\,, \quad y > -1 \tag{5.44}$$

Velger først benytte delvis integrasjon slik at integralet kan skrives som

$$\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 f(x)\right]_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x$$

Ved å sette inn henholdsvis$x = a$ og $x = b$ i likning (5.44) og løse med hensyn på ye^y, kan både $f(a)$ og $f(b)$ bestemmes. Dette gir

$$f(a)e^{f(a)} = 0 \quad \text{og} \quad f(b)e^{f(b)} = \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\,.$$

Slik at $f(a) = 0$ og $f(b) = \log 1/2$, som kan sjekkes via innsetning. Ved å bruke den anbefalte substitusjonen $u = e^{f(x)}$ så er $f(x) = \log u$, og

$$\mathrm{d}u = f'(x)e^{f(x)}\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}u}{u} = f'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Tilslutt så kan x^2 skrives som $x^2 = 1 - f(x)e^{f(x)} = 1 - u\log u$, ved å bruke likning (5.44). Integralet kan nå skrives som

$$\begin{aligned}
I &= \left[\frac{1}{2}x^2 f(x)\right]_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b x^2 f'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}b^2 f(b) - \frac{1}{2}\int_{\exp(f(a))}^{\exp(f(b))} (1 - u\log u)\frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&= \frac{1}{2}b^2 f(b) + \frac{1}{2}\Big[(u-1)\log(u) - u\Big]_1^{1/2} \\
&= -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\log 2\right)\log 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2 - (1)\right] \\
&= -\frac{1}{4}\log(2)\cdot(1 + \log 2) + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Som var det som skulle vises. Her er $B = 1/4$ og $A = -B$.

50. a) Første del så har en at

$$V(r) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_2}\frac{r_2}{r} = \frac{r_2}{r}E$$

som ønsket. Videre så vil integralet kunne skrives som

$$\begin{aligned}
T &\cong \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{2m\big[V(r) - E\big]}\,\mathrm{d}r\right) \\
\log T &\cong -\frac{2}{\hbar}\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{2m\left[\frac{r_2}{r}E - E\right]}\,\mathrm{d}r \\
\log T &\cong -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2mE}\int_{r_1}^{r_2}\sqrt{\frac{r_2}{r} - 1}\,\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

Herfra benyttes substitusjonen $r = r_2 x$ så $\mathrm{d}r = r_2\,\mathrm{d}x$.

$$\log T \cong -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2mE}\,r_2\int_{r_1/r_2}^{1}\sqrt{\frac{1}{x} - 1}\,\mathrm{d}x$$

som ønsket.

3.3.2

5. Via substitusjonen $y \mapsto x + t$ kan integralet skrives på formen

$$\int_0^1 \log\Gamma(x+t)\,\mathrm{d}x = \int_t^{t+1} \log\Gamma(y)\,\mathrm{d}y$$

For enkelhet byttes det nå tilbake til x som integrasjonsvariabel. Ved å bruke likning (3.19) kan den deriverte med hensyn på t skrives som

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_t^{t+1} \log\Gamma(y)\,\mathrm{d}y = \log\Gamma(1+t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t+1) - \log\Gamma(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t$$

Ved nå og anvende $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ kan den deriverte forenkles til

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_t^{t+1} \log\Gamma(y)\,\mathrm{d}y = \log\big(\Gamma(t+1)/\Gamma(t)\big) = \log t$$

Tilsvarende ved å derivere høyresiden fås

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{t} \log x\,\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial t}\Big[t\log t - 1\Big] = \log t$$

Siden de deriverte er like *må* f og g avike med høyst en konstant. Anta at f og g aviker med mer en enn konstant så f kan skrives som $f(x) = g(x) + h(x)$ hvor $h'(x) \neq 0$. Derivasjon gir at $f'(x) = g'(x) + h'(x)$, som er en motsigelse siden $f'(x) = g'(x)$, dermed så må $h'(x) = 0$ og $h = C$.

For å bestemme konstanten kan vi se på grensetilfellet når $t \to 0$. Da er

$$\lim_{t\to 0}\int_0^1 \log\Gamma(x+t)\,\mathrm{d}x = \mathcal{C} + \lim_{t\to 0}\int_0^t \log x\,\mathrm{d}x$$

Integralet på høyre side går mot null, og på venstre side står en igjen med det klassiske $\log\Gamma(x)$ integralet som ble vist i proposisjon (3.3.9). Dermed så er $C = \log\sqrt{2\pi}$ og

$$\int_0^1 \log\Gamma(x+t)\,\mathrm{d}x = \log\sqrt{2\pi} + \int_0^t \log x\,\mathrm{d}x$$

som ønsket.

La oss nå ta utgangspunkt i Raabes formel, en liten omskrivning gir

$$\int_u^{u+1} \log\Gamma(x)\,\mathrm{d}x = u\log u - u + \log\sqrt{2\pi} \tag{5.45}$$

som er formen som vil bli vist her. Ved å dele opp integralet kan det skrives som

$$\begin{aligned}\int_u^{u+1} \log\Gamma(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{u+1} \log\Gamma(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{u} \log\Gamma(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{1} \log\Gamma(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^{u+1} \log\Gamma(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{u} \log\Gamma(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \log\sqrt{2\pi} + \int_0^{u} \log\Gamma(x+1)\,\mathrm{d}x - \int_0^{u} \log\Gamma(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Hvor det i siste overgang ble brukt proposisjon (3.3.9) og i midterste integralet ble substitusjonen $x \mapsto y+1$ brukt. Legg nå merke til at siden $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ så er $x = \Gamma(x+1)/\Gamma(x)$. Ved innsetning så er

$$\begin{aligned}\int_u^{u+1} \log\Gamma(x)\,\mathrm{d}x &= \log\sqrt{2\pi} + \int_0^u \log\big(\Gamma(x+1)/\Gamma(x)\big)\,\mathrm{d}x \\ &= \log\sqrt{2\pi} + \int_0^u \log x\,\mathrm{d}x = u\log u - u + \log\sqrt{2\pi}\end{aligned}$$

Ved nå å trekke fra logaritmen på begge sider får en som ønsket Raabes formel.

3.3.3

1. Det enkleste blir å benytte seg av substitusjonen som før. Her ble korollar (3.3.3) brukt i andre overgang. i andre overgang.

2. Det enkleste blir å benytte seg av substitusjonen $t \mapsto e^x$ da fås

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{nx}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{t^{n-1}}{1+t}\,\mathrm{d}x = B(n, 1-n) = \Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin \pi n}$$

Her ble Eulers refleksjonsformel teorem (3.3.4) brukt i siste overgang. Alternativt kan og substitusjonen$u \mapsto e^x$ benyttes, da er

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{nx}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^{1/n}} = \frac{1}{n}\,\frac{\pi/(1/n)}{\sin \pi n} = \frac{\pi}{\sin \pi n}$$

som før. Her ble korollar (3.3.3) brukt i andre overgang. i andre overgang.

3. Vi velger å definere følgende funksjon

$$\varphi(x) := \frac{B(x,y)\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}$$

og målet med beviset blir å vise at $\varphi(x) = \Gamma(x)$, ved å benytte seg av Bohr-mullerup teoremet. Vi går igjennom punkt for punkt **1.** $\varphi(1) = 1$.

Her har vi fra gammafunksjonen at $\Gamma(1+y) = y\Gamma(y)$. For betafunksjonen fås

$$B(1,y) = \int_0^1 t^{1-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \int_1^0 u^{y-1}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^y}{y}\right]_0^1 = \frac{1}{y}$$

Ved innsetning fås nå at

$$\varphi(1) = \frac{B(1,y)\Gamma(1+y)}{\Gamma(y)} = \frac{\frac{1}{y}\cdot y\Gamma(y)}{\Gamma(y)} = 1$$

som ønsket. Videre så må vi vise at **2.** $\varphi(x+1) = x\varphi(x)$. Ved å ta utgangspunkt i $B(x+1,y)$ og delvis integrasjon fås

$$\begin{aligned} B(x+1,y) &= \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^x (1-t)^{x+y-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^x(1-t)^y}{x+y}\right]_1^0 - \int_0^1 -\frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\cdot\frac{xt^{x-1}}{(1-t)^{x+1}} \\ &= \frac{x}{x+y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x}{x+y}B(x,y) \end{aligned}$$

Ved innsetning ser vi nå at

$$\varphi(x+1) = \frac{\Gamma(x+y+1)}{\Gamma(y)}B(x+1,y) = \frac{(x+y)\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)}\cdot\frac{x}{x+y}B(x,y) = x\varphi(x)$$

Vi mangler nå bare å vise at $\log\varphi$ er konveks. Ved å bruke blant annet lemma (3.3.1) som før. La $p \in (0,\infty)$ og velg q slik at $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Da har vi at

$$\varphi\left(\frac{u}{p} + \frac{v}{q}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{u}{p} + \frac{v}{q}\right)}{\Gamma(y)} B\left(\frac{u}{p} + \frac{v}{q}, y\right)$$

For betafunksjonen har vi at

$$\begin{aligned} B\left(\frac{u}{p} + \frac{v}{q}, y\right) &= \int_0^1 t^{(u/p+v/q-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left\{t^u(1-t)^{y-1}\right\}^{1/p}\left\{t^v(1-t)^{y-1}\right\}^{1/q}\mathrm{d}t \\ &\le \left(\int_0^1 t^u(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_0^1 t^v(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t\right)^{1/q} \\ &= B(u,y)^{1/p}B(v,y)^{1/q} \end{aligned}$$

Ved å gjennomføre akkuratt den samme utregningen fås ulikheten

$$\Gamma\left(\frac{u}{p} + \frac{v}{q} + y\right) \le \Gamma(u+y)^{1/p}\Gamma(v+y)^{1/p}$$

Dermed får vi at følgende ulikhet gjelder

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{u}{p} + \frac{v}{q}\right) &\le \frac{\{\Gamma(u+y)B(u,y)\}^{1/p}\{\Gamma(v+y)B(v,y)\}^{1/q}}{\Gamma(y)} \\ &= \left\{\frac{\Gamma(u+v)}{\Gamma(y)}B(u,y)\right\}^{1/p}\left\{\frac{\Gamma(v+v)}{\Gamma(y)}B(v,y)\right\}^{1/q} \\ &= \big[\varphi(u)\big]^{1/p}\big[\varphi(v)\big]^{1/q} \end{aligned}$$

Dersom vi nå lar $\lambda = 1/p$ og dermed $1 - \lambda = 1/q$. Hvor $\lambda \in (0,1)$ får vi

$$\begin{aligned}\varphi\big(\lambda u + (1-\lambda)v\big) &\leq \varphi(u)^\lambda \varphi(v)^{1-\lambda} \\ \log\varphi\big(\lambda u + (1-\lambda)v\big) &\leq \lambda \log\varphi(u) + (1-\lambda)\log\varphi(v)\end{aligned}$$

for alle par $u, v \in (0, \infty)$. Dermed så er $\log\varphi$ er konveks og da følger det fra Bohr–Mollerup theoremet at $\varphi(x) = \Gamma(x)$, følgelig så er

$$\varphi(x) = \frac{B(x,y)\Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} \;\Rightarrow\; B(x,y) = \frac{\varphi(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

som var det vi ønsket å vise.

3.3.4

3.3.9

1.

Bevis. Gjennom hele beviset antas det at vi deriverer med hensyn på x uten tap av generalitet. og et identitsk bevis kan føres hvor en deriverer med hensyn på y. Her har vi først at

$$1 - u = \frac{1-x-y}{1-y}, \qquad 1 - v = \frac{1-x-y}{1-x}, \qquad 1 - uv = \frac{1-x-y}{(1-x)(1-y)}$$

Ved å derivere polylogaritmen fås

$$[\mathrm{Li}_2(f)]' = L_2'(f)\cdot f' = -\frac{\log(1-f)}{f}\cdot f' = -\log(1-f)\cdot\log'(f)$$

der det ble brukt at f var en kontinuerlig funksjon. Den deriverte av polylogaritmen fikk vi fra analysens fundamentalteorem. Nå regner vi først ut de enkle logaritmisk deriverte så

$$\log'(u) = \frac{1}{x}, \qquad \log'(v) = \frac{1}{1-x}, \text{ og} \qquad \log'(u\cdot v) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$$

For klarhet regner vi ut èn og èn derivert da er

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \mathrm{Li}_2(x) = -\frac{\log(1-x)}{x} \\
\frac{\partial}{\partial x} &= \mathrm{Li}_2(y) = -\frac{\log(y-x)}{y}\cdot 0 = 0 \\
\frac{\partial}{\partial x} &= \mathrm{Li}_2(u) = -\log(1-u)\log(u)_x = \frac{\log(1-x-y)-\log(1-y)}{x} \\
\frac{\partial}{\partial x} &= \mathrm{Li}_2(u) = -\log(1-u)\log(u)_x = -\frac{\log(1-x-y)-\log(1-x)}{1-x} \\
\frac{\partial}{\partial x} &= \mathrm{Li}_2(uv) = \log(1-uv)(\log u + \log v)' \\
&= \big[\log(1-x-y) - \log(1-x) - \log(1-y)\big]\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{Li}_2(u) + \frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{Li}_2(v) - \frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{Li}_2(x) - \frac{\log(1-y)}{1-x}\,.
\end{aligned}$$

Addisjon gir oss nå endelig at den deriverte kan skrives som

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{Li}_2(u) + \mathrm{Li}_2(v) - \mathrm{Li}_2(uv) - \mathrm{Li}_2(x) - \mathrm{Li}_2(y)\right) \\
&= -\frac{\log(1-y)}{1-x}
\end{aligned}
$$

Deriverer vi nå venstresiden ser vi at

$$
\frac{\partial}{\partial x} \log(1-x)\log(1-y) = -\frac{\log(1-y)}{1-x}
$$

slik at høyre og venstre side i likning (3.35) er ulike med høyst en konstant C. Altså

$$
\log(1-x)\log(1-y) = \mathrm{Li}_2(u) + \mathrm{Li}_2(v) - \mathrm{Li}_2(x) - \mathrm{Li}_2(y) - \mathrm{Li}_2(uv) + C\,,
$$

settes $x = 0$, $y = 0$ så er $u = 0$ og $v = 0$ slik at

$$
\log^2(1) = \mathrm{Li}_2(0) + \mathrm{Li}_2(0) - \mathrm{Li}_2(0 \cdot 0) - \mathrm{Li}_2(0) - \mathrm{Li}_2(0) + C
$$

som medfører at $C = 0$. Dette fullfører beviset. $\square$

2. Velger å vise først Landen's identitet. Derivasjon med hensyn på $\mathrm{Li}_2[z/(z-1)]$ gir

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{z}{z-1}\right) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_0^{z/(z-1)} \frac{\log(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(z-1)^2}\left(\frac{\log\left(1-\frac{z}{z-1}\right)}{z/(z-1)}\right) = \frac{\log(1-z)}{1-z} + \frac{\log(1-z)}{z}
\end{aligned}
$$

Integrasjon gir nå direkte at

$$
\mathrm{Li}_2\left(\frac{z}{z-1}\right) = -\frac{1}{2}\log^2(1-z) - \mathrm{Li}_2(z) + \mathcal{C}
$$

konstanten bestemmes ved å sette $z = 0$ så $\mathcal{C} = 0$. Ved å la $z = -z$ fås

$$
\mathrm{Li}_2(-z) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{z}{1+z}\right) = -\frac{1}{2}\log^2(z+1)
$$

som vi kjenner igjen som *Landen's identitet*.

1. Dette integralet er allerede vist i oppgave (**??**), men gengis i korte trekk her. Vi deler funksjonen i perioder på T siden $f(x+T) = f(x)$ for alle x. Vi har altså

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_f(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^\infty \int_0^T e^{-s(nT+w)} f(w+nT)\,\mathrm{d}w = \sum_{n=0}^\infty e^{-nTs}\int_0^T e^{-sw} f(w)\,\mathrm{d}u \\
&= \left(\sum_{n=0}^\infty \left(e^{-Ts}\right)^n\right)\int_0^T e^{-sw} f(w)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Via $x \mapsto nt + w$. For å se at $f(x + nT) = f(x)$ kan en for eksempel bruke samme induksjonsargument som i beviset for **??** på side (**??**). Beviset fullføres ved å bruke sumformelen for den geometriske rekken $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$.

2. Ved å sette inn definisjonen av $\mathscr{L}$-transformasjonen fås

$$\mathscr{L}_f(s) = \mathscr{L}\left(\int_0^t f(w)\,\mathrm{d}w\right) = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(w)\,\mathrm{d}w\right) e^{st} dt$$

Tanken er nå å bruke delvis integrasjon, med

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= f(t)\,\mathrm{d}t & u &= \int_0^t f(w)\,\mathrm{d}w \\ \mathrm{d}v &= e^{-st}\,\mathrm{d}t & v &= -\frac{1}{s}e^{-st} \end{aligned}$$

Dette fører til at integralet blir

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_f(s) &= \left[\frac{e^{-st}}{s}\int_0^t f(w)\,\mathrm{d}w\right]_\infty^0 - \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{s}\left(\lim_{t\to\infty} e^{-st}\int_0^t f(w)\,\mathrm{d}w\right) + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Siden $\int_0^0 f(w)\,\mathrm{d}w = 0$ så forsvinner første del. Når $t \to \infty$ så vil e^{-st} dominere integralet såfremt $s > 0$. Dermed vil grensen gå mot null for alle s hvor $\mathscr{L}$-transformasjonen av f er definert. Siste integralet kjenner vi igjenn og vi får

$$\mathscr{L}_f(s) = \mathscr{L}\left(\int_0^t f(w)\,\mathrm{d}w\right) = -0 + \frac{1}{s}F(s)$$

som var det som skulle vises.

3.6

3.7

3.8

3.9.1

1. La I betegne integralet og benytt substitusjonen $x = 1 - u$, så $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}u$ så

$$I := \int_0^{1/2} \frac{\log(x)\log(1-x)}{x(1-x)}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^1 \frac{\log(1-u)\log(u)}{(1-u)u}\,\mathrm{d}u\,.$$

Ved nå og ta gjennomsnittet av disse integralene fås

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\log(x)\log(1-x)}{x(1-x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

En kan nå eksemeplvis legge merke til at

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)\log x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\log(1-x)\log x}{1-x}\,\mathrm{d}x\,, \tag{5.46}$$

ved enten å bruke at $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$, eller substitusjonen $1-x=u$. Uansett vender vi tilbake til vårt opprinnelige integral, og bruker delbrøkoppspalting fås

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\log(x)\log(1-x)}{x(1-x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \log(x)\log(1-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{\log(x)\log(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

hvor vi benyttet oss av likning (5.46). Nå er integralet relativt simpelt å løse Enten kan vi huske på definisjonen av dilogaritmen $\mathrm{Li}_2(z)$ og benytte oss av delvis integrasjon Dette gir at

$$I = -\Big[\log x\,\mathrm{Li}_2(x)\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_2(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Li}_3(1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} = \zeta(3)$$

Som var det vi ønsket å finne. I den delvise integrasjonen ble $v = \mathrm{Li}_2(z)$ og $u = \log(x)$ brukt videre så ble den rekursive definisjonen av polylogaritmen benyttet og at $\mathrm{Li}_n(1) = \zeta(n)$. Alternativt kan en og løse siste integral uten bruk av dilogaritmer

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{\log(x)\log(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 \frac{\log x}{x}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{x} + \cdots\right)\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 \log x\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots\right)\mathrm{d}x \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\int_0^1 \log(x)x^n\,\mathrm{d}x\right) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\cdot\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^3} \end{aligned}$$

hvor vi kjenner igjen siste sum som Apierys konstant $\zeta(3)$.

2. Vi bruker substitusjonen $x = t^{-1}$ slik at

$$\int_0^{1/2} 1 - e^{-1/x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Herfra defineres følgende funksjon

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2} \,\mathrm{d}x$$

hvor vi legger merke til at $I(1)$ er integralet vi ønsker. Derivasjon under integral-tegnet gir

$$\begin{aligned} I'(a) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2} \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a} \frac{e^{-ax^2}}{x^2} \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty e^{-ax^2} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^\infty e^{-y^2} \,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \end{aligned}$$

Hvor i siste overgang ble det klassiske gaussiske integralet benyttet. Et bevis for dette finnes flere steder i heftet, blant annet **??**. Integrasjon gir nå at

$$I(a) = \sqrt{a\pi} + \mathcal{C}$$

siden $I(0) = 0$ er konstanten null, og vi får dermed at

$$\int_0^{1/2} 1 - e^{-1/x^2} \,\mathrm{d}x = I(1) = \sqrt{\pi}$$

Og dette fullfører oppgaven.

3. Integralet her kan regnes ut utelkukkende ved hjelp av en serie elementære substitusjoner og omskrivninger. Likevell er det å komme på disse såpass krevende at integralet havner i denne delen. Første steg er å dele opp intervalet $(0, \infty)$ til $(0, 1)$ og $(1, \infty)$. Deretter mappes $(1, \infty)$ på $(0, 1)$ via $x \mapsto 1/x$, som er blitt gjort mange ganger før

$$\int_0^\infty \frac{\log x \,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \int_0^1 \frac{\log x \,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} + \int_1^\infty \frac{\log x \,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \log x \,\mathrm{d}x$$

Legg nå merke til at

$$\int \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \,\mathrm{d}x = \int -\frac{(1/x+x)'}{(1/x+x)^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{1/x+x} = \frac{x}{x^2+1}$$

Via $u \mapsto 1/x + x$ siden $(-1/u^2)' = 1/u$. Siden første del er integrerbar virker det svært fristende å benytte seg av delvis integrasjon. Dette gir

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \log x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x \log x}{x^2+1} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{x}{x^2+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = 0 - \frac{\pi}{4}$$

Siste integralet er bare $\arctan x$, og første leddet går mot null. Nevner går mot null og teller er begrenset. Alternativt via L'hoptial så er

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log x}{1/x} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{'1/x^2} = -x$$

Der $[\infty/\infty]$ betyr at både teller og nevner går mot og en kan derivere. Merk at den deriverte av teller vokser proposjonalt med $\log x$, og teller synker proposjonalt med x^3 så når $x \to \infty$ vil uttrykke gå mot null.

4. Begynn med substitusjonen

5. En kan legge merke til at vi kan skrive $\log(1-x)$ om til et integral som følger

$$\log(1-x) = \int_0^{-x} \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}m}{m-1}$$

via substitusjonen $u \mapsto -m$. Integralet kan nå skrives om som følger

$$I = \int_0^1 \frac{\log(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^x \frac{\mathrm{d}m\,\mathrm{d}x}{(m-1)(1+x)} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x}{(ux-1)(1+x)}$$

der substitusjonen $m \mapsto ux$ ble benyttet i siste overgang. Siden $x = (x+1) - 1$ skrives integralet om til

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x}{(ux-1)(1+x)} = \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x}{(ux-1)}}_{A} - \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x}{(ux-1)(1+x)}}_{B}$$

Siden vi har følgende delbrøkoppspalting

$$\frac{1}{(ux-1)(1+x)} = \frac{u}{(ux-1)(u+1)} - \frac{1}{(x+1)(u+1)}$$

så kan B skrives som

$$\begin{aligned} B &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x}{(ux-1)(1+u)} - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x}{(1+u)(1+x)} \\ &= I - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x}{(1+u)(1+x)} \\ &= I - \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u}\right)\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}\right) \\ &= I - \log^2(2) \end{aligned}$$

For A så har en

$$A = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x}{(ux-1)} = \int_0^1 \frac{\log(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u = -\int_0^1 \frac{\log(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Siste overgang kan sees ved å skrive ut maclaurinrekka til $\log(x+1)$ som konvergerer da $x \in (0,1)$. Siste sum har vært beregnet gjentatte ganger og er $\zeta(2) = \pi^2/6$. Eventuelt kan en legge merke til at integralet er polylogaritmen $\mathrm{Li}_2(1)$, som en og har sett og regnet på før. Legger vi sammen alt dette fås

$$I = A - B = -\frac{\pi^2}{6} - \left(\log^2(2) - I\right) \Rightarrow 2I = \log^2(2) - \frac{\pi^2}{6}$$

og dette fullføret beviset da

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log^2(2) - \frac{\pi}{12}$$

som var det som skulle beregnes.

3.9.2

1. Vi beregner integralet begge veier

$$I_1 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st}\sin t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{1+s^2} = \Big[\arctan s\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$
$$I_2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st}\sin t\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \sin t \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

som var det vi ønsket å vise. Hvor da selvsagt

$$\int_0^\infty e^{-st}\sin t\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{1+s^2}$$

2. En begynner med å skrive om integralet via $t \mapsto -x + (u+v)/2$ så

$$\int_u^v (x-u)^n(v-x)^n\,\mathrm{d}x = -\int_{-a}^a (a-t)^n(a+t)\,\mathrm{d}t$$

Hvor forenklingen $a = (u+v)/2$ ble innført. Benyttes nå substitusjonen $t \mapsto (1-2y)a$ så blir integralet

$$\begin{aligned}\int_u^v (x-u)^n(v-x)^n\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (2a)^n y^n (2a)^n (1-y)^n 2a\,\mathrm{d}y \\ &= (u+v)^{2n+1}\int_0^1 y^n(1-y)^n\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Dette medfører at vi kan skrive om summen som følger

$$\begin{aligned}S &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(v-u)^{2n+1}}\int_u^v (x-u)^n(v-x)^n\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^1 y^n(1-y)^n\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Siden $y \in [0,1)$ så vil og $y(1-y) \in [0,1)$ og en kan benytte seg av summen av den geometriske serien.

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{y(1-y)}{1-y(1-y)}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1-y(1-y)}\,\mathrm{d}t - 1 \\
&= \int_0^1 \frac{1}{3/4+(y-1/2)^2}\,\mathrm{d}y - 1 \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{t^2+3/4}\,\mathrm{d}y - 1 \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 1 \\
&= \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{4}{3}} - 1
\end{aligned}
$$

Hvor det ble brukt blant annet at

$$
\int_{-b}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{2}{a}\arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}\ \forall\, x \in [0,1)
$$

4.

a) Legg merke til at for $x \in [0,1]$ så er

$$
\left|\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_0^1 \frac{x^n}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\frac{1}{n}\right|
$$

Siden $1/n \to 0$ når $n \to \infty$ har vi fra skviseteoremet at

$$
\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,\mathrm{d}x = 0
$$

som var det som skulle vises. Den første ulikheten kan for eksempel vised ved at $x^n \cdot x \leq x^n(x+1)$ og ved å kryssdele får en $x^n/(x+1) \leq x^n/x$.

b) Elementært

$$
I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}
$$

c) Ved en smart omskriving har vi

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} &= \frac{1}{0+1} - \frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+1} - \cdots + \frac{1}{n+1} \\ &= (I_0 + I_1) - (I_1 + I_2) + (I_2 + I_3) - \cdots + (I_n + I_{n+1}) \\ &= I_0 + I_{n+1}\end{aligned}$$

Hvor resultatet fra **b)** ble brukt $I_n + I_{n+1} = 1/(n+1)$. Ved å la $n \to \infty$ har vi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \lim_{n\to\infty} I_0 + I_{n+1} = I_0 + I_\infty = I_0$$

Hvor resultatet fra **a)** ble brukt. Siden $I_0 = \int_0^1 \mathrm{d}x/(x+1) = \log 2$ har vi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{x^0}{x+1}\,\mathrm{d}x + \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,\mathrm{d}x = \log 2$$

som var det som skulle vises. Dette fullfører oppgaven.

5. Begynn med substitusjonen

6. Tanken er å bruke en fiffig substitusjon for å vise identiten. La $y \mapsto \frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)}$ da er $1 - y = \frac{(1-x)^2}{2(1+x^2}$ og $\mathrm{d}y = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 2y^{1/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

$$\begin{aligned}I &= \int_{-1}^{1} \frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (2y)^{m-\frac{1}{2}} \cdot \big(2(1-y)\big)^{n-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1+x^2}\big(2y^{\frac{1}{2}}(1-y)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1+x^2}\big)^{-1} \mathrm{d}y \\ &= 2^{m+n-2} \cdot \int_0^1 y^{m-1} \cdot (1-y)^{n-1} \mathrm{d}y \\ &= 2^{m+n-2} \cdot B(m,n)\end{aligned}$$

Begynner med substitusjonen $x = \tan u$ og husker på at $1 + \tan^2 u = \sec^2 u$.

$$\begin{aligned}2^{m+n-2} B(m,n) &= \int_{-1}^{1} \frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{(1+\tan u)^{2m-1}(1-\tan u)^{2n-1}}{\sec^{2(m+n)}(u)}\,\sec^2(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos u + \sin u)^{2m-1}(\cos u - \sin u)^{2n-1}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}\right)^{\cos\alpha}\end{aligned}$$

Hvor vi i siste overgang satt $m = \frac{1+\cos\alpha}{2}$ og $n = \frac{1-\cos\alpha}{2}$. Dermed så er så kan integralet skrives som

$$J = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \right)^{\cos\alpha} \mathrm{d}x \qquad = 2^{-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)}{\Gamma(1)}$$

$$= 2^{-1}\Gamma\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1 - \frac{1+\cos\alpha}{2}\right)$$

$$= 2^{-1}\frac{\pi}{\sin\left(\pi\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)}$$

$$= \frac{\pi}{2\sin\left(\pi\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)}$$

som var det som skulle vises.

7. Ved å bruke substitusjonen $x = (2n+1)t$ så kan I_n skrives som

$$I_n = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,\mathrm{d}t$$

Tanken er nå at vi betrakter $\pi/2 - I_n$, og bruker likning (3.76) til å skrive om $\pi/2$. Altså har vi

$$H_n = \frac{\pi}{2} - I_n = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \sin(2n+1)x\,\mathrm{d}x$$

Videre bruker vi at $f(x) = 1/\sin x - 1/x$, går mot null når $x \to 0$, slik at $f(0) \sim 0$. Funksjonen f har altså en kontinuerlig begrenset derivert på intervalet $(0, \pi/2)$ og vi kan trygt bruke delvis integrasjon

$$H_n = \left[\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) \cos(2n+1)x \right] + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} f'(x)\cos(2n+1)x\,\mathrm{d}x$$

Første del av uttrykket går mot null siden $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ og at $\cos(2n+1)\pi/2 = -\sin\pi n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Ved å la $n \to \infty$ så ser en at $H_n \to 0$, siden integralet er begrenset. Dette medfører at $I_n \to \pi/2$ og

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

som var det som skulle vises. For å vise at H_n faktisk konvergerer kan vi for eksempel se at

$$\begin{aligned} |H_n| &= \left| \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} f'(x)\cos(2n+1)x\,\mathrm{d}x \right| \\ &\leq \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} |f'(x)|\,|\cos(2n+1)x|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \cdot 1\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{\pi/2 - 1}{2n+1} \end{aligned}$$

som går som $\mathcal{O}(1/n)$ når $n \to \infty$.

9. Ved å bruke substitusjonen $x = (2n+1)t$ så kan I_n skrives som

10. Integralet kan løses på flere metoder, den enkle b'en hinter mot at derivasjon under integraltegnet kan benyttes. Vi definerer

$$I(b) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\log(1 + b\sin x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Derivererer en begge sider av denne likningen med hensyn på b fås

$$I'(b) = \frac{\partial}{\partial b}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\log(1 + b\sin x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1 + b\sin x}\,. \tag{5.47}$$

Det siste integralet er langt enklere å beregne, og kan løses med å bruke weierstrass-substitusjonen $t = \tan x/2$. Da fås

$$I'(b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + 2bt/(1+t^2)}\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+b)^2 + 1 - b^2}\,.$$

Ved å bruke substitusjonen $t + b = \sqrt{1-b^2}\tan y$ så blir integralet

$$I'(b) = \int_{pi/2}^{\pi/2} \frac{\sqrt{1-b^2}\sec^2 y\,\mathrm{d}t}{(1-b^2)(\tan^2 y + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}y = \frac{\pi}{\sqrt{1-b^2}}\,.$$

Neste steg blir å integrerer begge sider av likning (5.47) fra 0 til b

$$\int_0^b I'(b)\,\mathrm{d}b = \int_0^b \frac{\pi}{\sqrt{1-b^2}}\,\mathrm{d}b\,,$$

og siden $I(b) = 0$ kan en skrive venstresiden som $I(b) - I(0) = I(b)$. Høyresiden blir så

$$I(b) = \int_0^b \frac{\pi}{\sqrt{1-b^2}}\,\mathrm{d}b = \pi \arcsin b\,,$$

siden $\arcsin 0 = 0$. Dette var det som skulle vises, men vi har nå vist integralet for $|b| < 1$, siden substitusjonenene vi benyttet bare er gyldige for $|b| < 1$. Det som gjenstår er å vise at resultatet stemmer i grensetilfellet $b = 1$, dersom $b = 1$ så er

En kunne og ha brukt kompleks integrasjon og proposisjon (3.8.2) til å beregne integralet over $1/(1 + b\sin x)$. Siden vi integrerer over $[-\pi/2, \pi/2]$ og ikke $(-\pi, \pi)$, så blir integralet halvparten av integralet over enhetssirkelen[6].

$$I(b) = \frac{1}{2}\oint\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}x}{1 + b(z - z^{-1})/2i}\frac{\mathrm{d}z}{iz} = \pi i \sum_{k=0}^{m} \operatorname{Res}\left[\frac{2}{bz^2 + 2iz - b}, z_k\right]$$

[6] Å vise at

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sin x} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + b\sin x}$$

overlates til leser, både for å spare plass å gi leser en meningsfyllt fritidssyssel.

Nevner har to singulariter, men bare $z_0 = \left[-i + \sqrt{b^2-1}\right]/b$ ligger i enhetsdisken.

$$I(b) = \pi i \operatorname{Res}(z_0) = \pi i \lim_{z\to z_0} \frac{2}{(bz^2+2iz-b)'} = \frac{i\pi}{i+bz_0} = \frac{\pi}{\sqrt{1-b^2}}$$

som vist før. Den siste overgangen virker kanskje noe rar, men følger direkte fra at $2bz_0 = -i + \sqrt{b^2-1} = i(-1+\sqrt{1-b^2})$, så $i + bz_0 = i\sqrt{1-b^2}$.

11. Ved å regne ut de partiellderiverte til I_n fås

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} I_n = -\int_0^{2\pi} \frac{n\cos^2 x}{(\alpha\cos^2 x + \beta \sin^2 x)^{n+1}}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta} I_n = -\int_0^{2\pi} \frac{n\sin^2 x}{(\alpha\cos^2 x + \beta \sin^2 x)^{n+1}}$$

Addisjon av de partiellderiverte gir da

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\alpha}\right) I_1 = \nabla I_n = -n\int_0^{2\pi} \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)\mathrm{d}x}{(\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x)^2} = -nI_{n+1} \tag{5.48}$$

hvor ∇ operatoren ble brukt. Dette gir

$$\nabla I_{n-1} = (1-n)I_n\,, \tag{5.49}$$

som var det som skulle vises. Ved å skrive om likning (5.49) fås

$$I_n = -\frac{1}{n-1}\nabla I_{n-1}$$

Bruker vi denne likningen n ganger med initalverdien $I_1 = \pi/(2\sqrt{ab})$ får en følgende relasjon

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\nabla I_1 = -2\pi\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}\right)\frac{1}{\sqrt{ab}} \\
I_3 &= -\frac{1}{2}\nabla I_2 \\
&= \frac{2\pi}{1\cdot 2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial\alpha\beta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)\frac{1}{\sqrt{ab}} \\
&= \frac{2\pi}{1\cdot 2}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}\right)^2\frac{1}{\sqrt{ab}} \\
I_4 &= -\frac{1}{3}\nabla I_3 \\
&= -\frac{2\pi}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3} + 3\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\partial\beta} + +3\frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\beta^2} + \frac{\partial^3}{\partial\beta^3}\right)\frac{1}{\sqrt{ab}} \\
&= -\frac{2\pi}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\alpha}\right)^3\frac{1}{\sqrt{ab}} \\
&\vdots \\
I_n &= \frac{2\pi}{(-1)2(-3)(4)\cdots}\left(\frac{\partial^n}{\partial\alpha^n} + n\frac{\partial^n}{\partial\alpha^{n-1}\partial\beta} + \cdots + \frac{\partial^n}{\partial\beta^n}\right)\frac{1}{\sqrt{ab}} \\
&= \frac{2\pi}{n!}(-1)^n\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}\right)^n\frac{1}{\sqrt{ab}}
\end{aligned}$$

for teste om dette faktisk er en løsning, kan en se om uttrykket oppfyller likning (5.49), men dette overlates til leser. En kan og uttrykke differensialoperatorene som en sum

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\frac{\partial^{n-k}}{\partial\alpha^{n-k}}\left(\frac{\partial^k}{\partial\beta^k}\right)\right]=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n}{\partial\alpha^{n-k}\partial\beta^k}$$

uten at dette gjør regningen noe enklere. For alle praktiske hensyn er det enklere å benytte seg av likning (5.49) for å regne ut I_n. Men litt algebramagi har aldri skadet noen.

13. Legg merke til at integralet er et frullani integral og fra teorem (3.8.2) har en at

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = f(0)\log\frac{b}{a}$$

Dermed så kan A skrives som

$$A=\int_0^\infty \frac{e^{-\varphi x}-e^{(\psi-1)x}}{x}\,\mathrm{d}x=\log\left(\frac{1-\psi}{\varphi}\right)$$

Med $f(x)=\exp(-x)$ og $f(0)=1$. Før vi setter inn kan det være lurt å forenkle uttrykket for A. Siden $x^2+x=1$ så er $1/x=x+1$. Dermed så er $1/\phi=1+\phi$.

$$A=\log\left(\frac{1-\psi}{\varphi}\right)=\log\left(1+\varphi-\frac{\psi}{\varphi}\right)=\log\left(2+\varphi-\psi\right)=\log\left(2+\sqrt{5}\right)$$

Der det ble benyttet at $\psi/\varphi=\psi-1$ og at $\varphi-\psi=\sqrt{5}$. Første likhet kommer fra $\psi+\varphi=\psi\varphi$, ved å dele på φ og isolere ψ/φ på høyre side fås likheten. Husk at de hyperbolske funksjonene er definert som

$$\sinh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\quad\text{og}\quad\cosh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

Ved å legge sammen og trekke fra likningene og sette inn $x=A$ fås følgende likningsett

$$\begin{aligned}\sinh A+\cosh A&=e^{A}&&=\sqrt{5}+2\\ \sinh A-\cosh A&=e^{-A}&&=\sqrt{5}-2\end{aligned}$$

Ved å ta gjennomsnittet av likningene får en et uttrykk for $\sinh A$, subtraksjon gir $\cosh A$ så

$$\sinh A=2\quad\text{og}\quad\cosh A=\sqrt{5}$$

Hvor $\exp(-A)$ ble regnet ut på følgende måte

$$\exp(-A)=[\exp(\log 2+\sqrt{5})]^{-1}=\frac{1}{\sqrt{5}+2}\,\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}=\frac{\sqrt{5}-2}{5-4}$$

Det er selvsagt fullt mulig å sette rett inn i de hyberbolske funksjonene, men undertegnede er dessverre allergisk mot brøker.

15. Å regne ut I er ikke spesielt vanskelig, og kan gjøres via substitusjonen $x = \sin u$. Vi viser først at

$$\pi = \frac{\pi}{\sin(\pi/2)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}$$

Dette kan vi sette inn i I, for å omforme integralet bruker vi $u = 1 - x^2$ så $\mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x$ som gir

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \\ &= -\int_1^0 \frac{1}{2\sqrt{u}\sqrt{1-u}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)} \\ &= \int_0^1 u^{1-1/2}(1-u)^{1-1/2}\,\mathrm{d}u = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

på bakgrunn av dette så kan det være rimelig å anta at

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\,.$$

A.2.4

1. Et enkelt eksempel på hvor nyttig proposisjon (A.2.3) kan være. Vi vet at $\pi > e$ siden $e < 3$ og $\pi > 3$. Dermed så er

$$e^{\pi/e-1} > \frac{\pi}{e}$$

Hvor jeg lot $u = \pi/e - 1$ i (A.2.3) (hvorfor er dette en gyldig u?). Bruker vi at $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ (siden $\exp(x)$ er en eksponentialfunksjon), fås

$$\frac{e^{\pi/e}}{e} > \frac{\pi}{e}$$

Ganger vi nå likningen med e og opphøyer begge sider i e får vi

$$e^{\pi} > \pi^{e} \tag{5.50}$$

som var det som skulle vises. Merk at ulikheten fortsetter å være skarp selv om vi ganger eller opphøyer i e, da $e > 0$. Dette er et svært kjent problem med mange løsninger. Vi kunne ha begynt med å ta logaritmen av likning (5.50)

$$\frac{\log e}{e} > \frac{\log \pi}{\pi}$$

Hvor jeg delte ulikheten på πe. Dernest kan en vise at $(\log x)/x$ oppnår sitt maksimum ved $x = e$, og vi er ferdige.

2.

1. $\log 1 = 0$

Følger fra at $\int_1^1 \mathrm{d}t/t$ er null, siden da er arealet under funksjonen $1/t$ null.

2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log x = \dfrac{1}{x}$

Følger direkte fra analysens fundamentalsetning siden $f(x) = 1/x$ er en kontinuerlig deriverbar funksjon når $x \in [1, \infty)$.

3. $\log xy = \log x + \log y$

Kanskje noe vanskelig å se, men trikset er en smart oppdeling av integralet

$$\log xy = \int_1^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_x^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \log x + \int_1^{y} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \log x + \log y$$

I tredje overgang har jeg brukt substitusjonen $u = t/x$. Husk å sjekke detaljene i utregningen. Ser du hvorfor denne substitusjonen ble brukt?

4. $\log x$ er en strengt voksende funksjon.

Her må vi vise at den deriverte er er positiv for alle x. Det følger fra punkt 2, samt at x er positiv.

5. $\log a^n = n \log a$.

En kan bruke et enkelt induksjonsbevis gitt at $n \in \mathbb{R}$. Påstanden er sann for $n = 1$: $\log a^1 = 1 \cdot \log a$. Anta at påstanden er sann for et heltall k: $\log a^k = k \log a$. Da følger det at $\log a^{k+1} = \log(a^k \cdot a) = \log a^k + \log a = k \log a + \log a = (k+1) \log a$. Her ble punkt 3 brukt. Ved induksjon er påstanden sann for alle heltall.

Vi kan føre ett generelt bevis ved følge samme fremgangsmåte som i punkt 3.

$$\log a^r = \int_1^{a^r} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{a} r \frac{\mathrm{d}u}{u} = r \int_1^{a} \frac{\mathrm{d}u}{u} = r \log a$$

Hvor en benyttet seg av $t \mapsto u^r$. Derivasjon gir da $\mathrm{d}t = r u^r u^{-1} \,\mathrm{d}u$ som medfører at $\mathrm{d}t/t = r\,\mathrm{d}u/u$, siden $u^r = t$. Dermed er $\log a^r = r \log a$, for $r \in \mathbb{R}_+$.

6. $\log x \to \infty$ når $x \to \infty$.

Dette betyr at for ethvert (stort) tall M finnes det et tall m slik at $\log x > M$ når $x > m$. Sett inn $a = 2$ i punktet over. $\log 1 = 0$, og $\log$ er strengt voksende, så $\log 2 > 0$. Hvis M er gitt kan vi derfor finne et tall n som er slik at $\log 2^n = n \log 2 > M$. Fordi $\log$ er strengt voksende har vi at $\log x > \log 2^n > M$, som var det vi trengte å vise.

7. $\log \dfrac{1}{x} = -\log x$

Bruk $0 = \log 1 = \log\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = \log x + \log \frac{1}{x}$. Utregningen fullføres ved å trekke fra $\log x$ på begge sider. Noe mer tungvindt blir å vise det via definisjonen

$$\log \frac{1}{x} = \int_1^{1/x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_x^{1} \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\int_1^{x} \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\log x$$

Hvor substitusjonen $t \mapsto u/x$ ble brukt. Dette medfører at $\mathrm{d}t/t = \mathrm{d}u/u$ siden $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/x \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{d}u(t/u) \Rightarrow \mathrm{d}t/t = \mathrm{d}u/u$ siden $1/x = t/u$. Grensene blir $t = 1/x \Rightarrow u/x = 1/x$ og $t = 1 \Rightarrow u = x$.

8. $\log x \to -\infty$ når $x \to 0^+$.

Følger direkte av de to foregående punktene.

9. For ethvert tall $u \in \mathbb{R}$ så finnes det nøyaktig ett tall $y \in \mathbb{R}_+$ slik at $\log y = u$.

La oss først vise at det eksisterer minst ett slikt tall: Vi vet at $\log x$ er en kontinuerlig funksjon (hvorfor?) Punkt 6 garanterer at det finnes et tall α med $\log \alpha < u$, mens punkt 8 garanterer at det finnes et annet tall β med $\log \beta > u$. Bruk nå skjæringssetningen til å konkluderer at det eksisterer et tall y mellom α og β slik at $\log y = u$.

At det det ikke finnes flere y som gjør samme jobb følger av at $\log$ er en strengt voksende funksjon.

10. $0 \leq \log(1 + x^\alpha) \leq \alpha x\,, \quad x \in \mathbb{R}_+$ og $\alpha \geq 1$.

For $\alpha \geq 1$ så deriverer vi begge sider for å se på vekstraten

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log(1 + x^\alpha) &\leq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\alpha x) \\
\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1 + x^\alpha} &\leq \alpha \\
x^{\alpha-1} &\leq x^\alpha + 1 \\
x^{\alpha-1}(1 - x) &\leq 1
\end{aligned}$$

Dersom $\alpha \geq 1$ og $x > 1$ så holder den siste ulikheten trivielt. Ved å ta stegene i motsatt rekkefølge har vi vist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \log(1 + x^\alpha) \leq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\alpha x)$$

hvorpå integrasjon gir oss ulikheten vår. Konstanten bestemmes av spesialtilfellet $\alpha = 1$ og $x = 0$.

3. Anta uten tap av generalitet at $a \leq b$. Videre så ser vi først på tilfellet hvor $1 < a < b$. Ved å bruke $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ har en at

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^a f(t)\,\mathrm{d}t = \log b - \log a = \log \frac{b}{a}$$

som ønsket. (Hva skjer i første overgang?) For $0 < a < b < 1$ så har en

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_b^1 f(t)\,\mathrm{d}t \\
. &= \int_1^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_1^a f(t)\,\mathrm{d}t = \log b - \log a = \log \frac{b}{a}
\end{aligned}$$

Hvor definisjon (2.2.1) ble brukt i andre overgang. Merk at her viser jeg ikke hele beviset med nedre og øvre trappesummer, eller Riemann integralet. Poenget er at jeg *kunne* gjort det. Det neste tilfellet $a < 1 < b$ kan vises tilsvarende. Derimot for $a < b < 0$ så kan vi ikke bruke definisjonen av logaritmen lengre, siden $\log x$ bare er definert for $x > 0$. Vi har dog

$$\int_{-a}^{-b} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_{a}^{b} \frac{-\,\mathrm{d}u}{-u} = \int_{a}^{b} \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

Her ble substitusjon brukt med $t \mapsto -u$ og resten følger fra første del. Merk integrasjonsteknikken substitusjon krever analysens fundamentalteorem.

4. Et enkelt eksempel på hvor nyttig

5. Dette er et svært enkelt eksempel hvor

6. Dette er et svært enkelt eksempel hvor

Denne siden er med hensikt blank, for å gi leser en pustepause og for å la forfatter slåss mot dinosaurer.

Bibliografi

[1] Zafar Ahmed, Knut Dale, and George Lamb. Definitely an integral: 10884. *The American Mathematical Monthly*, 109(7):670–671, 2002.

[2] T. Ambderberhan, M. L. Glasser, V. H. Moll M. C. Jones, R. Posey, and D. Varela. The cauchy-schlömilch transformation. http://129.81.170.14/~vhm/papers_html/schlomilch-sub.pdf, 1999.

[3] James Bonnar. *The Gamma Function*. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2 edition, Nov 2013.

[4] J. W. Brown. An extension of integration by parts. *The American Mathematical Monthly*, 67(4):327, 1960.

[5] Philip J. Davis. Leonhard euler's integral: A historical profile of the gamma function. *The American Mathematical Monthly*, 66(10):849–869, 1959.

[6] Michael A. B. Deakin. The development of the laplace transform, 1737–1937 i. euler to spitzer, 1737-1880. *Archive for History of Exact Sciences*, 25(4):343–390, jan 1981.

[7] Michael A. B. Deakin. The development of the laplace transform, 1737–1937 ii. poincar to doetsch, 1880–1937. *Archive for History of Exact Sciences*, 26(4):351–381, 1982.

[8] Richard P. Feynman. *Surely You're Joking, Mr.Feynman!* WW.Norton Company, Inc, 1985.

[9] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 7 edition, 2007.

[10] Victor. H. Moll. The integrals in gradshteyn and ryzhik. part 2: elementary logarithmic integrals. *Scientia*, (14):7–15, 2007.

[11] Roger Nelsen. Symmetry and integration. *The College Mathematics Journal*, 26(1):39–41, jan 1995.

[12] Erin Pearse. Math 209d - lecture notes. http://www.math.cornell.edu/~erin/analysis/lectures.pdf, 1999.

[13] J.L. Raabe. Angenäherte bestimmung der factorenfolge 1.2.3.4.5.... n=...(1+n)=...xne-xdx, wenn n eine sehr grosse zahl ist. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 25:146–159, 1843. URL http://eudml.org/doc/147170.

[14] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Higher Education, 3 edition, Sep 1976.

[15] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 3 edition, May 1986.

[16] David Sirajuddin. Fresnel integrals. http://www.itcanbeshown.com/integrals/Fresnel%20Integrals/fresnel_integrals.pdf, 2008.

[17] Steve Smith. Integration by parts, the tabular method, ii. http://chelseas-roost.co.uk/resources/maths/DIS_II.pdf, 1999.

[18] Daniel Zwillinger. *The Handbook of Integration*. A K Peters/CRC Pres, 1 edition, Nov 1992.