



# Estadística Espacial



Kenneth Roy Cabrera Torres

4 de febrero de 2016



# Tabla de contenido

## Tabla de contenido

Introducción a la  
Estadística Espacial

Conceptos y  
supuestos

## Tabla de contenido

### **Introducción a la Estadística Espacial**

Definición

Datos de elevación

Campos aleatorios

Terminología y notación

### **Conceptos y supuestos**

Modelo Geoestadístico

Supuestos Modelo Geoestadístico

Función de correlación Matérn

Funciones asociada a la función Matérn

Rangos prácticos

Rango práctico para función Matérn

Funciones exponencial y gaussiana

Función potencia



Tabla de contenido

**Introducción a la  
Estadística Espacial**

Definición

Datos de elevación

Campos aleatorios

Terminología y  
notación

Conceptos y  
supuestos

---

# Introducción a la Estadística Espacial



# Definición

Tabla de contenido

Introducción a la  
Estadística Espacial

Definición

Datos de elevación

Campos aleatorios

Terminología y  
notación

Conceptos y  
supuestos

El término *estadística espacial* se usa para describir una amplia gama de modelos estadísticos que procuran analizar datos espacialmente referenciados o georreferenciados.

La *geostatística* se refiere a modelos y métodos de datos que siguen las siguientes características:

Primero, los valores de  $Y_i$ :  $i = 1, \dots, n$  son observados en un conjunto discreto de lugares  $x_i$  al interior de una región espacial  $A$ . Segundo, cada valor observado de  $Y_i$  es: ya sea una medida directa, o una estadística relacionada con, el valor de un fenómeno espacial subyacente,  $S(x)$  en los correspondientes sitios de muestreo  $x_i$ .



# Datos de elevación

Tabla de contenido

Introducción a la  
Estadística Espacial

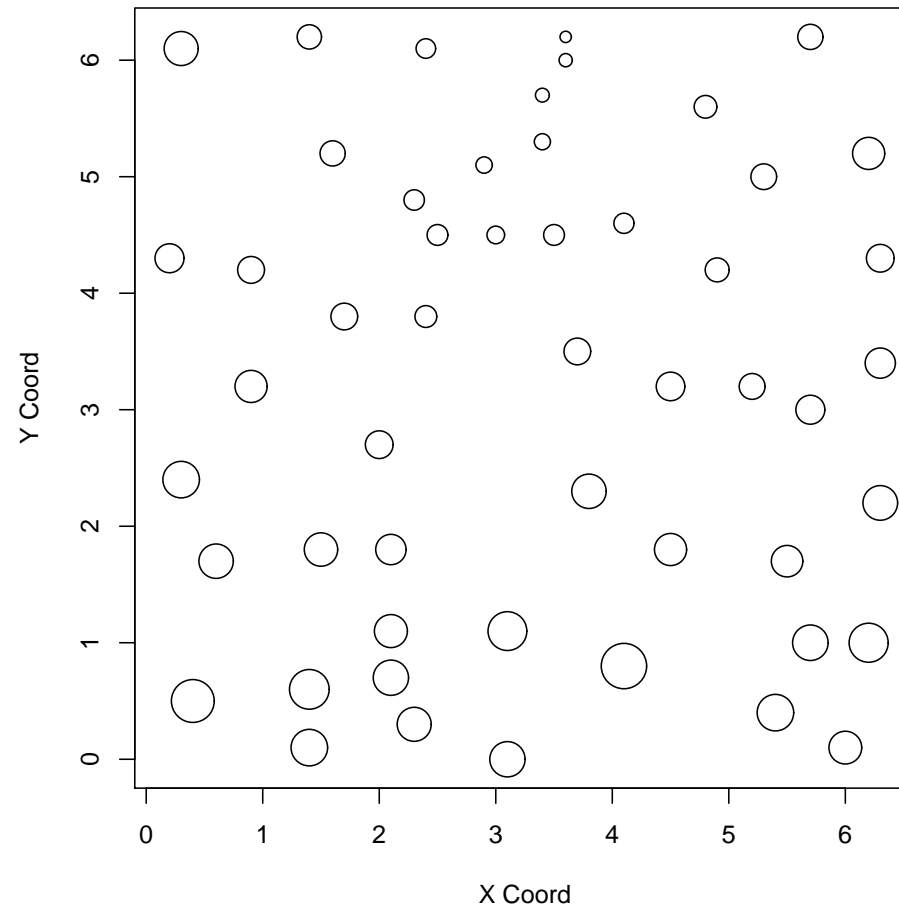
Definición

**Datos de elevación**

Campos aleatorios

Terminología y  
notación

Conceptos y  
supuestos





# Distribución univariada

Tabla de contenido

Introducción a la  
Estadística Espacial

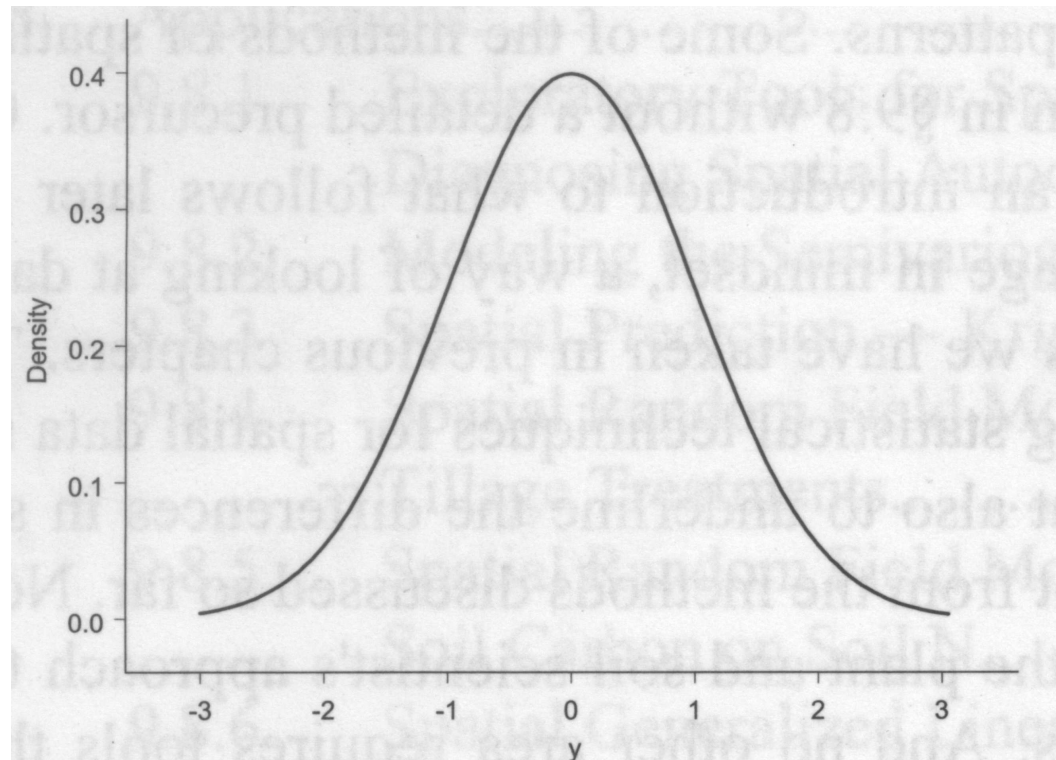
Definición

**Datos de elevación**

Campos aleatorios

Terminología y  
notación

Conceptos y  
supuestos



$$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$



# Distribución bivariada

Tabla de contenido

Introducción a la  
Estadística Espacial

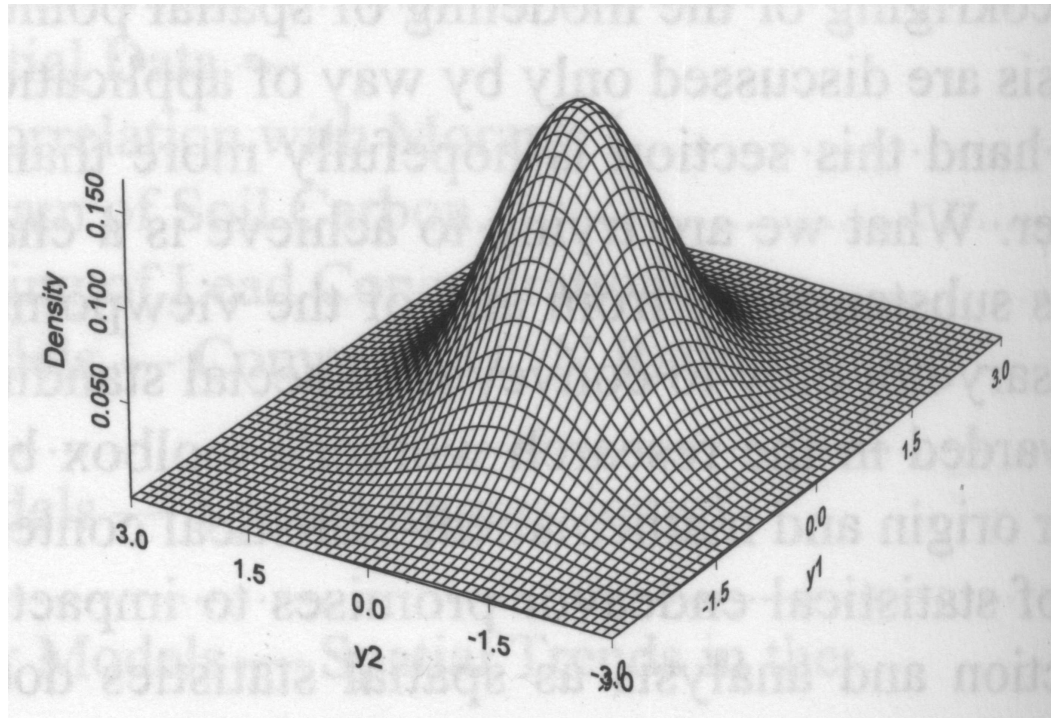
Definición

**Datos de elevación**

Campos aleatorios

Terminología y  
notación

Conceptos y  
supuestos



$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0,3 \\ 0,3 & 1 \end{bmatrix} \right)$$



# Un campo aleatorio

Tabla de contenido

Introducción a la  
Estadística Espacial

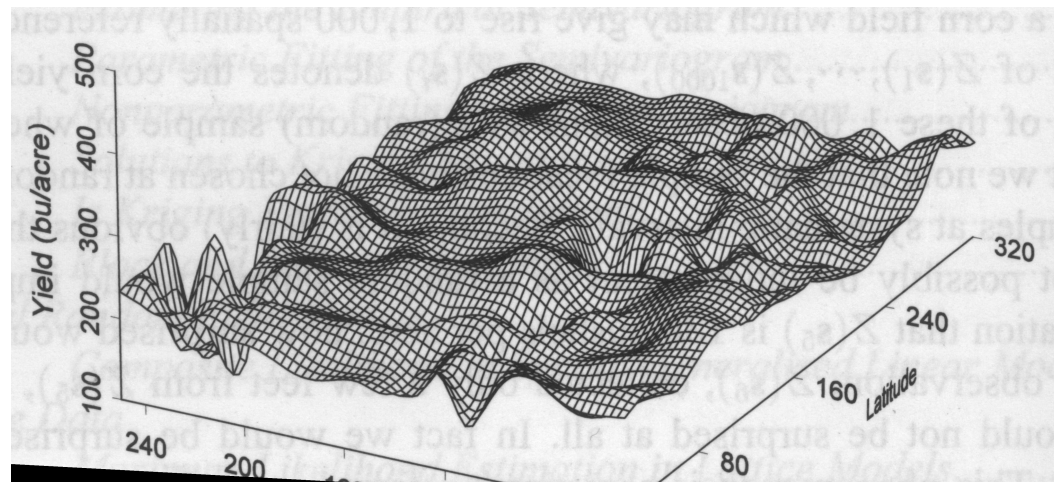
Definición

**Datos de elevación**

Campos aleatorios

Terminología y  
notación

Conceptos y  
supuestos



$$\{S(x) : x \in A \subset \mathcal{R}^2\}$$

Una sola realización





# Campos aleatorios

Tabla de contenido

Introducción a la  
Estadística Espacial

Definición

Datos de elevación

**Campos aleatorios**

Terminología y  
notación

Conceptos y  
supuestos

- Un conjunto de datos espaciales se consideran una realización de un experimento aleatorio. Sólo se obtiene una realización de  $S(x)$  en el punto  $x$ . Esta es una realización de un campo aleatorio, es decir un proceso estocástico.
- $S(x_0)$  es una variable aleatoria si se considera la distribución de todas las realizaciones posibles en el punto  $x_0$ .
- Cuando se muestrea un campo aleatorio, estas muestras se toman de una realización particular de un experimento aleatorio.



# Realizaciones de un campo aleatorio

Tabla de contenido

Introducción a la  
Estadística Espacial

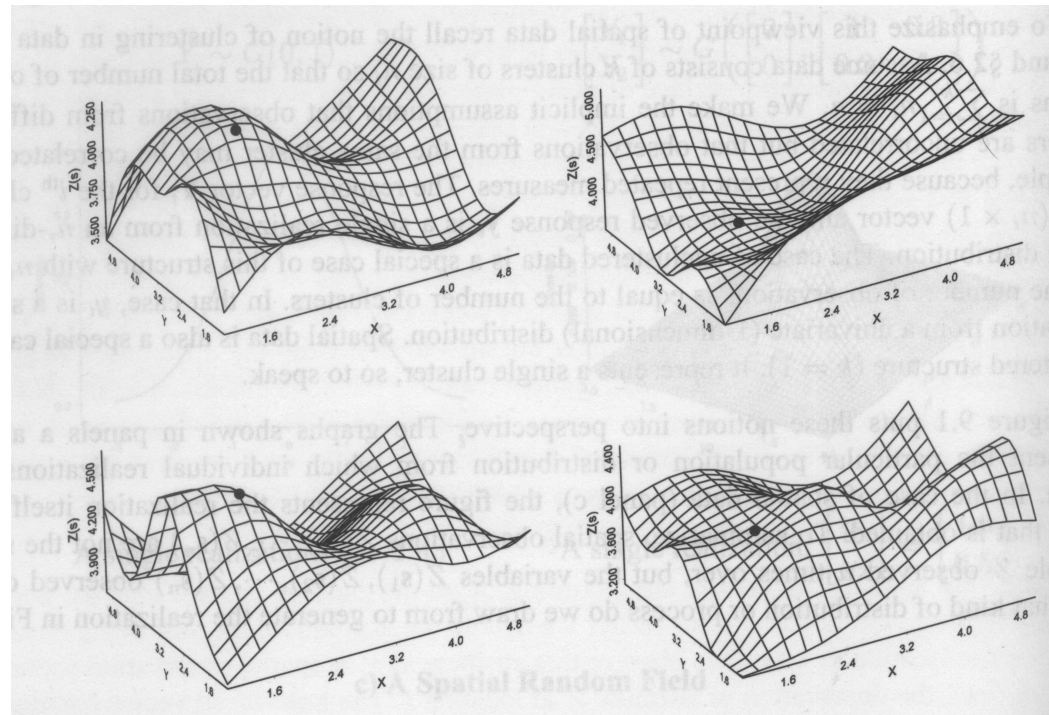
Definición

Datos de elevación

**Campos aleatorios**

Terminología y  
notación

Conceptos y  
supuestos



Cuatro realizaciones de un campo aleatorio.



# Terminología y notación

Tabla de contenido

Introducción a la  
Estadística Espacial

Definición

Datos de elevación

Campos aleatorios

Terminología y  
notación

Conceptos y  
supuestos

Para efectos prácticos los datos geoestadísticos univariados se puede tomar la siguiente notación:

$$(x_i, y_i) : i = 1, \dots, n.$$

Donde  $x_i$  denota la localización espacial (generalmente un espacio bidimensional) y  $y_i$  es un valor escalar asociado a la localización en  $x_i$ . Generalmente a  $y$  se le conoce como una variable de respuesta o variable medida.

Cada  $y_i$  es una realización de la variable aleatorio  $Y_i$  cuya distribución depende de la localización de  $x_i$  de un proceso estocástico continuo espacial subyacente  $S(x)$  que no es directamente observable.

En muchos casos se puede asumir que  $Y_i = S(x_i)$ , pero en general no son iguales.



Tabla de contenido

Introducción a la  
Estadística Espacial

Conceptos y  
supuestos

Modelo  
Geoestadístico  
Supuestos Modelo  
Geoestadístico  
Función de  
correlación Matérn  
Funciones asociada a  
la función Matérn  
Rangos prácticos  
Rango práctico para  
función Matérn  
Funciones exponencial  
y gaussiana  
Función potencia  
Función esférica  
Semivariograma  
empírico  
Semivariograma  
teórico  
Gráfica de  
semivariograma  
exponencial  
Ejemplo sencillo

# Conceptos y supuestos



# Modelo Geoestadístico

Tabla de contenido

Introducción a la  
Estadística Espacial

Conceptos y  
supuestos

Modelo  
Geoestadístico

Supuestos Modelo  
Geoestadístico

Función de  
correlación Matérn  
Funciones asociada a  
la función Matérn

Rangos prácticos

Rango práctico para  
función Matérn

Funciones exponencial  
y gaussiana

Función potencia

Función esférica

Semivariograma  
empírico

Semivariograma  
teórico

Gráfica de  
semivariograma  
exponencial

Ejemplo sencillo

El *Modelo Geostadístico* incorpora al menos dos elementos:

1. Un proceso estocástico real  $\{S(x) : x \in A\}$  que se considera una realización parcial del proceso estocástico  $\{S(x) : x \in \mathcal{R}^2\}$  en todo el plano.
2. Una distribución multivariada de la variable aleatoria  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  condicionado en  $S(\cdot)$ .

Se suele denominar a  $S(x)$  la *señal* y a  $Y_i$  la *respuesta*. A menudo  $Y_i$  se puede pensar como una versión ruidosa de  $S(x_i)$  y la  $Y_i$  se puede asumir condicionalmente independiente dado  $S(\cdot)$ .



# Supuestos Modelo Geoestadístico

Tabla de contenido

Introducción a la  
Estadística Espacial

Conceptos y  
supuestos

Modelo  
Geoestadístico  
**Supuestos Modelo  
Geoestadístico**

Función de  
correlación Matérn  
Funciones asociada a  
la función Matérn  
Rangos prácticos  
Rango práctico para  
función Matérn  
Funciones exponencial  
y gaussiana

Función potencia

Función esférica  
Semivariograma  
empírico

Semivariograma  
teórico

Gráfica de  
semivariograma  
exponencial

Ejemplo sencillo

Los supuestos básico del modelo clásico son:

1.  $\{S(x) : x \in \mathcal{R}^2\}$  es un proceso gaussiano con media  $\mu$ , y varianza  $\sigma^2 = Var\{S(x)\}$  y función de correlación  $\rho(u) = Corr\{S(x), S(x')\}$ , donde  $u = \|x - x'\|$  y  $\|\cdot\|$  denota la distancia;
2. Condicionado en  $\{S(x) : x \in \mathcal{R}^2\}$ , las  $y_i$  son realizaciones de variables mutuamente independientes  $Y_i$ , distribuidas normalmente con media  $E[Y_i|S(\cdot)] = S(x_i)$  y varianza condicional  $\tau^2$ .

Una forma equivalente es:

$$Y_i = S(x_i) + \varepsilon_i : i = 1, \dots, n$$

donde  $\{S(x) : x \in \mathcal{R}^2\}$  se define como el supuesto 1 y  $\varepsilon_i$  son variables aleatorias mutuamente independientes  $\mathcal{N}(0, \tau^2)$ .



# Función de correlación Matérn

Tabla de contenido

Introducción a la  
Estadística Espacial

Conceptos y  
supuestos

Modelo  
Geoestadístico  
Supuestos Modelo  
Geoestadístico

**Función de  
correlación Matérn**

Funciones asociada a  
la función Matérn

Rangos prácticos  
Rango práctico para  
función Matérn  
Funciones exponencial  
y gaussiana

Función potencia

Función esférica  
Semivariograma  
empírico

Semivariograma  
teórico

Gráfica de  
semivariograma  
exponencial

Ejemplo sencillo

Una función muy común de correlación definida en geoestadística es la función Matérn definida como:

$$\rho(u; \phi, \kappa) = \{2^{\kappa-1} \Gamma(\kappa)\}^{-1} (u/\phi)^{\kappa} K_{\kappa}(u/\phi)$$

Donde  $K_{\kappa}(\cdot)$  es una función de Bessel modificada de segunda clase, de orden  $\kappa$ . El parámetro  $\phi > 0$  determina la tasa a la cual decae a cero la correlación en la medida que decrece  $u$ . El parámetro  $\kappa > 0$  es el orden del modelo Matérn y está asociado a la forma del descenso de la función.



# Funciones asociada a la función Matérn

Tabla de contenido

Introducción a la  
Estadística Espacial

Conceptos y  
supuestos

Modelo  
Geoestadístico  
Supuestos Modelo  
Geoestadístico  
Función de  
correlación Matérn  
**Funciones asociada a  
la función Matérn**

Rangos prácticos  
Rango práctico para  
función Matérn  
Funciones exponencial  
y gaussiana

Función potencia

Función esférica  
Semivariograma  
empírico

Semivariograma  
teórico

Gráfica de  
semivariograma  
exponencial

Ejemplo sencillo

Siguiendo la función Matérn se tienen dos situaciones muy comunes de funciones de correlación

- Función de correlación exponencial:

Si  $\kappa = \frac{1}{2}$  entonces se tiene que la función queda reducida a:

$$\rho(u; \phi) = e^{-\frac{u}{\phi}}$$

- Función de correlación gaussiana:

Si  $\kappa \rightarrow \infty$  entonces la función Matérn tiene como límite:

$$\rho(u; \phi) = e^{-\left(\frac{u}{\phi}\right)^2}$$





# Rangos prácticos

Tabla de contenido

Introducción a la  
Estadística Espacial

Conceptos y  
supuestos

Modelo  
Geoestadístico  
Supuestos Modelo  
Geoestadístico  
Función de  
correlación Matérn  
Funciones asociada a  
la función Matérn

**Rangos prácticos**

Rango práctico para  
función Matérn  
Funciones exponencial  
y gaussiana  
Función potencia  
Función esférica  
Semivariograma  
empírico  
Semivariograma  
teórico  
Gráfica de  
semivariograma  
exponencial  
Ejemplo sencillo

El rango práctico se define como el valor de  $u$  en donde la función  $\rho(u)$  tiene un valor de 0.05. O en otras palabras es el valor de  $u$  a partir del cual se puede considerar que  $\rho(u) \approx 0$ .

- Para la función exponencial se tiene el rango práctico es:  $\approx 3\phi$ .
- Para la función gaussiana se tiene que el rango práctico es:  $\approx \sqrt{3}\phi$ .



# Rango práctico para función Matérn

Tabla de contenido

Introducción a la  
Estadística Espacial

Conceptos y  
supuestos

Modelo  
Geoestadístico  
Supuestos Modelo  
Geoestadístico  
Función de  
correlación Matérn  
Funciones asociada a  
la función Matérn

Rangos prácticos

**Rango práctico para  
función Matérn**

Funciones exponencial  
y gaussiana

Función potencia

Función esférica  
Semivariograma  
empírico

Semivariograma  
teórico

Gráfica de  
semivariograma  
exponencial

Ejemplo sencillo

Para la función Matérn a un rango práctico de  $\rho_0 = 0,05$ , se debe hallar la raíz de la siguiente ecuación:

$$\rho(u; \phi, \kappa) - \rho_0 = 0$$

$$\rho(u; \phi, \kappa) - 0,05 = 0$$

Ya que  $\phi$  es un parámetro de escala, la solución será de la forma  $r\phi$  donde  $r$  es el factor multiplicador que se haya de la solución de la ecuación:

$$\rho(u; \phi, 1) - 0,05 = 0$$



# Funciones exponencial y gaussiana

Tabla de contenido

Introducción a la  
Estadística Espacial

Conceptos y  
supuestos

Modelo  
Geoestadístico  
Supuestos Modelo  
Geoestadístico  
Función de  
correlación Matérn  
Funciones asociada a  
la función Matérn

Rangos prácticos  
Rango práctico para  
función Matérn

Funciones exponencial  
y gaussiana

Función potencia

Función esférica  
Semivariograma  
empírico

Semivariograma  
teórico

Gráfica de  
semivariograma  
exponencial

Ejemplo sencillo

Otra manera de expresar las funciones de correlación exponencial y gaussiana es:

■ Exponencial:

$$\rho(u; \alpha) = e^{-3\frac{u}{\alpha}}$$

■ Gaussiana:

$$\rho(u; \alpha) = e^{-3\left(\frac{u}{\alpha}\right)^2}$$

En donde  $\alpha$  es el rango práctico.



# Función potencia

Tabla de contenido

Introducción a la  
Estadística Espacial

Conceptos y  
supuestos

Modelo  
Geoestadístico  
Supuestos Modelo  
Geoestadístico  
Función de  
correlación Matérn  
Funciones asociada a  
la función Matérn

Rangos prácticos  
Rango práctico para  
función Matérn  
Funciones exponencial  
y gaussiana

**Función potencia**

Función esférica  
Semivariograma  
empírico  
Semivariograma  
teórico  
Gráfica de  
semivariograma  
exponencial  
Ejemplo sencillo

Se define como:

$$\rho(u; \phi, \kappa) = e^{-\left(\frac{u}{\phi}\right)^\kappa}$$

Donde el parámetro de escala  $\phi > 0$  y el de forma  $\kappa$  está limitado por  $0 < \kappa \leq 2$ . Note que si  $\kappa = 2$  es la misma gaussiana.



# Función esférica

Tabla de contenido

Introducción a la  
Estadística Espacial

Conceptos y  
supuestos

Modelo  
Geoestadístico  
Supuestos Modelo  
Geoestadístico  
Función de  
correlación Matérn  
Funciones asociada a  
la función Matérn

Rangos prácticos  
Rango práctico para  
función Matérn  
Funciones exponencial  
y gaussiana

Función potencia

**Función esférica**

Semivariograma  
empírico

Semivariograma  
teórico

Gráfica de  
semivariograma  
exponencial

Ejemplo sencillo

Esta función se define como:

$$\rho(u; \phi) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{u}{\phi}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{\phi}\right)^3 & : 0 \leq u \leq \phi \\ 0 & : u \geq \phi \end{cases}$$

En este caso el rango absoluto es  $\phi$  dado que si  $u \geq \phi$  se tiene que  $\rho(u) = 0$ , por eso no tendría rango práctico.



# Semivariograma empírico

Tabla de contenido

Introducción a la  
Estadística Espacial

Conceptos y  
supuestos

Modelo  
Geoestadístico  
Supuestos Modelo

Geoestadístico  
Función de  
correlación Matérn  
Funciones asociada a  
la función Matérn

Rangos prácticos  
Rango práctico para  
función Matérn  
Funciones exponencial  
y gaussiana

Función potencia

Función esférica  
Semivariograma  
empírico

Semivariograma  
teórico  
Gráfica de  
semivariograma  
exponencial

Ejemplo sencillo

Para un conjunto de datos  $(x_i, y_i) : i = 1, \dots, n$ , el *las ordenadas del variograma empírico* es el valor  $v_{ij} = \frac{1}{2}(y_i - y_j)^2$ . Algunos autores lo prefieren denominar *ordenadas del semivariograma*.

Si  $y_i$  es estacionario en media y varianza. El valor esperado de  $v_{ij}$  es  $\sigma^2\{1 - \rho(x_i, x_j)\}$  donde  $\sigma^2$  es la varianza y  $\rho(x_i, x_j)$  es la correlación entre  $y_i$  y  $y_j$ .

Si  $y_i$  es un proceso estacionario, entonces  $\rho(\cdot)$  depende sólo de la distancia entre  $x_i$  y  $x_j$ , y además tiende a cero a grandes distancias, entonces  $v_{ij}$  tiende a  $\sigma^2$  cuando la distancia entre  $u_{ij} = ||x_i - x_j||$  tiende a infinito.



# Semivariograma teórico

Tabla de contenido

Introducción a la  
Estadística Espacial

Conceptos y  
supuestos

Modelo  
Geoestadístico  
Supuestos Modelo  
Geoestadístico  
Función de  
correlación Matérn  
Funciones asociada a  
la función Matérn  
Rangos prácticos  
Rango práctico para  
función Matérn  
Funciones exponencial  
y gaussiana  
Función potencia  
Función esférica  
Semivariograma  
empírico

**Semivariograma  
teórico**

Gráfica de  
semivariograma  
exponencial

Ejemplo sencillo

El semivariograma de un espacio estocástico  $S(x)$  es la función:

$$V(x, x') = \frac{1}{2} \text{Var}\{S(x) - S(x')\}$$

Note que

$V(x, x') = \frac{1}{2} [\text{Var}\{S(x)\} + \text{Var}\{S(x')\} - 2\text{Cov}\{S(x), S(x')\}]$ . En el caso estacionario, simplifica a  $V(u) = \sigma^2\{1 - \rho(u)\}$ .

Recordemos que:

$$\rho(x, x') = \frac{\text{Cov}(S(x)S(x'))}{\sqrt{\text{Var}\{S(x)\}} \sqrt{\text{Var}\{S(x')\}}}$$



# Gráfica de semivariograma exponencial

Tabla de contenido

Introducción a la  
Estadística Espacial

Conceptos y  
supuestos

Modelo

Geoestadístico

Supuestos Modelo

Geoestadístico

Función de

correlación Matérn

Funciones asociada a  
la función Matérn

Rangos prácticos

Rango práctico para  
función Matérn

Funciones exponencial  
y gaussiana

Función potencia

Función esférica

Semivariograma

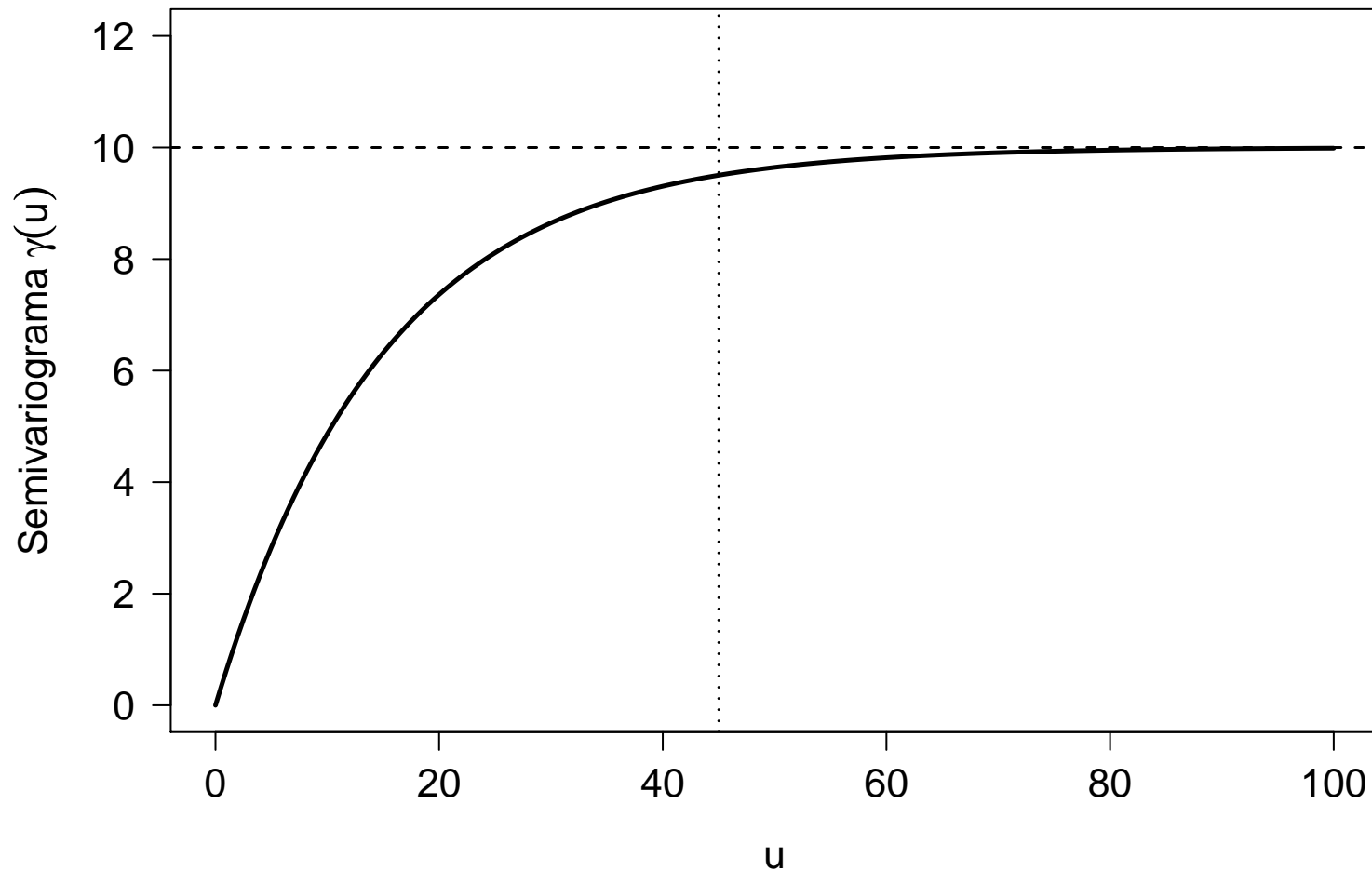
empírico

Semivariograma  
teórico

Gráfica de  
semivariograma  
exponencial

Ejemplo sencillo

Modelo exponencial  $\sigma^2 = 10$  y  $\phi = 15$







# Ejemplo sencillo

Tabla de contenido

Introducción a la Estadística Espacial

Conceptos y supuestos

Modelo

Geoestadístico

Supuestos Modelo

Geoestadístico

Función de correlación Matérn

Funciones asociada a la función Matérn

Rangos prácticos

Rango práctico para función Matérn

Funciones exponencial y gaussiana

Función potencia

Función esférica

Semivariograma empírico

Semivariograma teórico

Gráfica de semivariograma exponencial

Ejemplo sencillo

		(y)			
		1	2	3	4
(x)					
1		1			4
2			2		
3		3			20