



Estadística Espacial



Kenneth Roy Cabrera Torres

18 de febrero de 2016



Tabla de contenido

Tabla de contenido

Introducción a la
Estadística Espacial

Conceptos y
supuestos

Tabla de contenido

Introducción a la Estadística Espacial

Definición

Datos de elevación

Campos aleatorios

Terminología y notación

Conceptos y supuestos

Modelo Geoestadístico

Supuestos Modelo Geoestadístico

Función de correlación Matérn

Funciones asociada a la función Matérn

Rangos prácticos

Rango práctico para función Matérn

Funciones exponencial y gaussiana

Función potencia



Tabla de contenido

**Introducción a la
Estadística Espacial**

Definición

Datos de elevación

Campos aleatorios

Terminología y
notación

Conceptos y
supuestos

Introducción a la Estadística Espacial



Definición

Tabla de contenido

Introducción a la
Estadística Espacial

Definición

Datos de elevación

Campos aleatorios

Terminología y
notación

Conceptos y
supuestos

El término *estadística espacial* se usa para describir una amplia gama de modelos estadísticos que procuran analizar datos espacialmente referenciados o georreferenciados.

La *geostatística* se refiere a modelos y métodos de datos que siguen las siguientes características:

Primero, los valores de Y_i : $i = 1, \dots, n$ son observados en un conjunto discreto de lugares x_i al interior de una región espacial A . Segundo, cada valor observado de Y_i es: ya sea una medida directa, o una estadística relacionada con, el valor de un fenómeno espacial subyacente, $S(x)$ en los correspondientes sitios de muestreo x_i .



Datos de elevación

Tabla de contenido

Introducción a la
Estadística Espacial

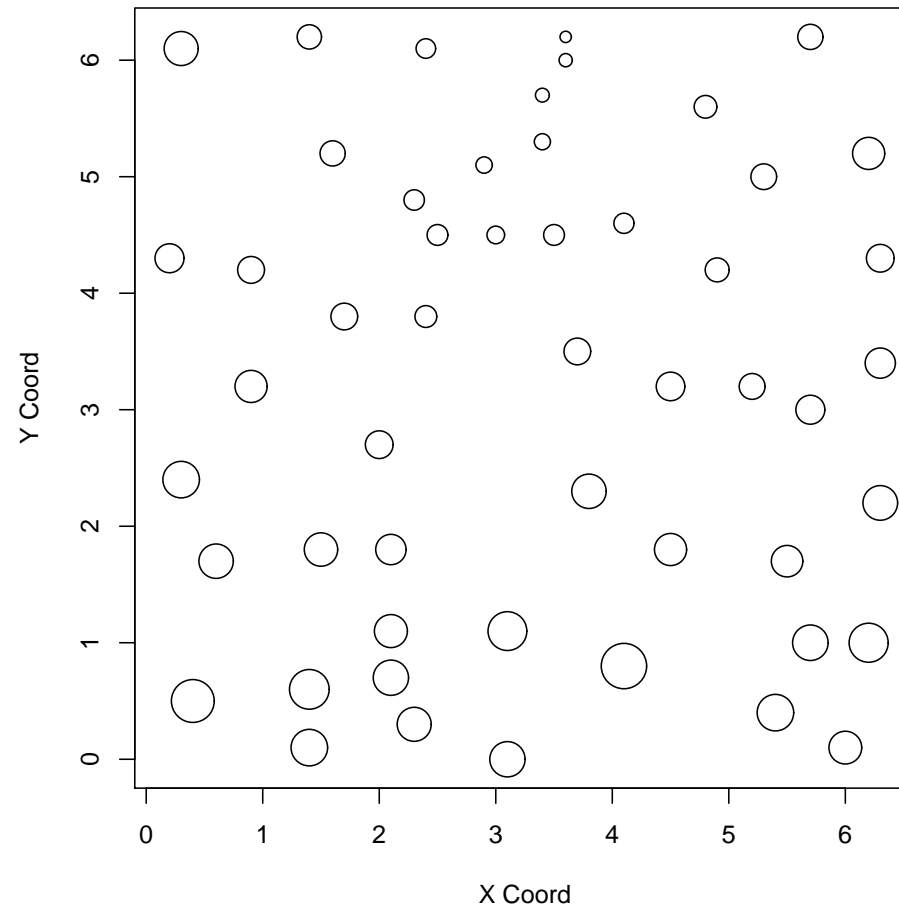
Definición

Datos de elevación

Campos aleatorios

Terminología y
notación

Conceptos y
supuestos





Distribución univariada

Tabla de contenido

Introducción a la
Estadística Espacial

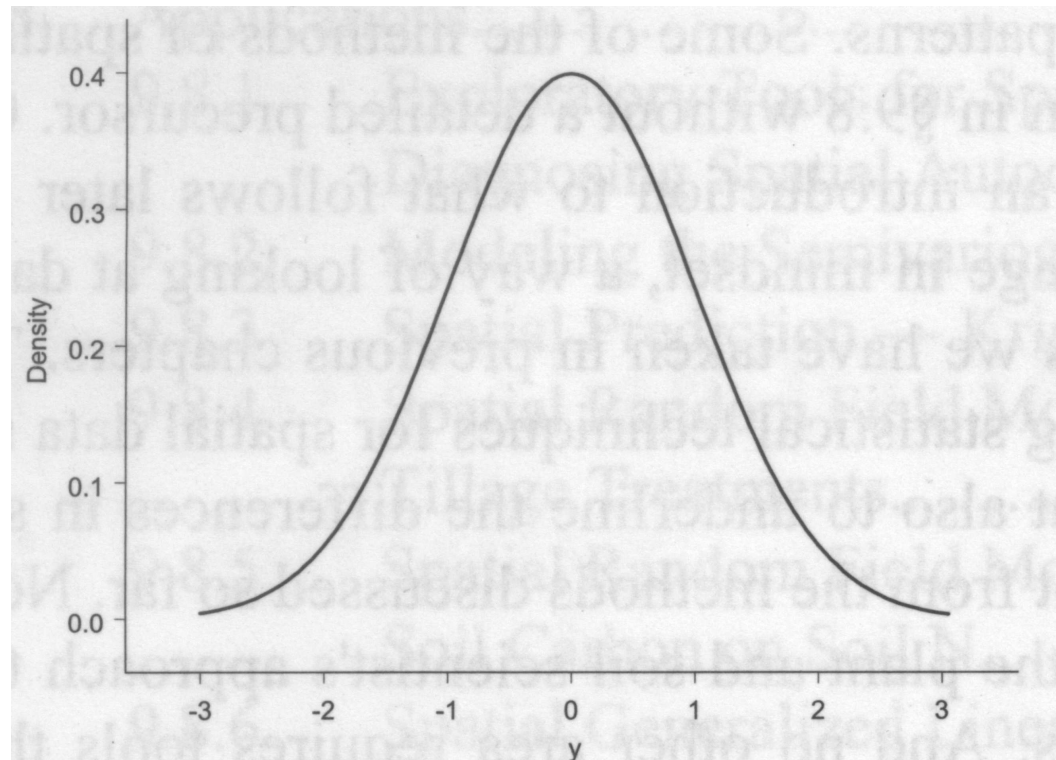
Definición

Datos de elevación

Campos aleatorios

Terminología y
notación

Conceptos y
supuestos



$$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$



Distribución bivariada

Tabla de contenido

Introducción a la
Estadística Espacial

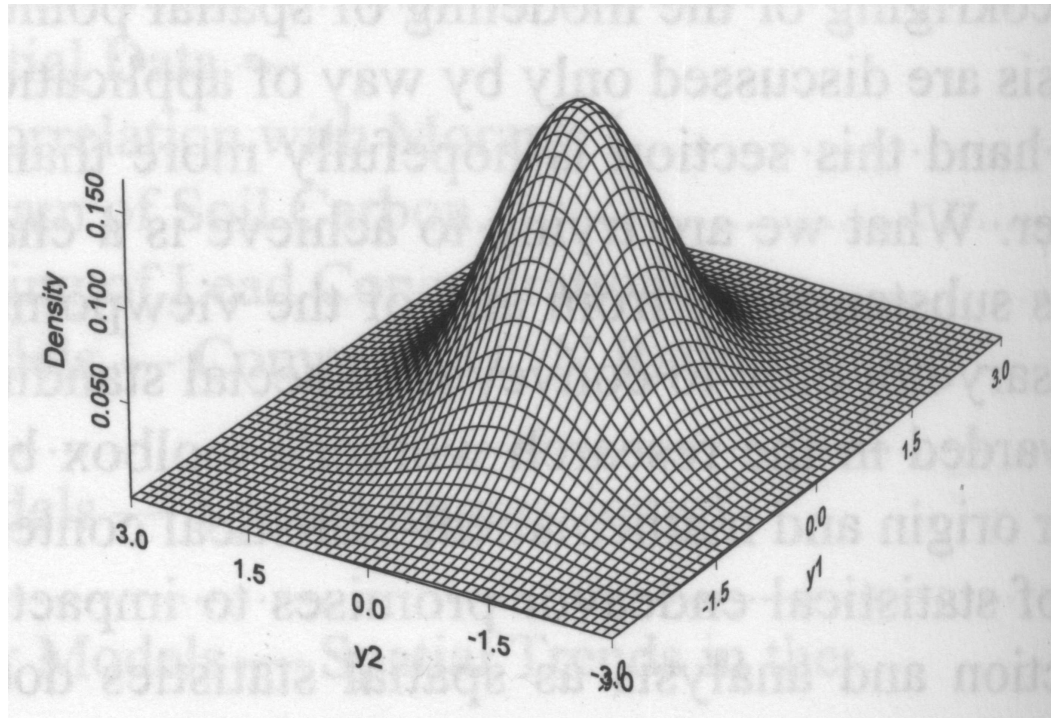
Definición

Datos de elevación

Campos aleatorios

Terminología y
notación

Conceptos y
supuestos



$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0,3 \\ 0,3 & 1 \end{bmatrix} \right)$$



Un campo aleatorio

Tabla de contenido

Introducción a la
Estadística Espacial

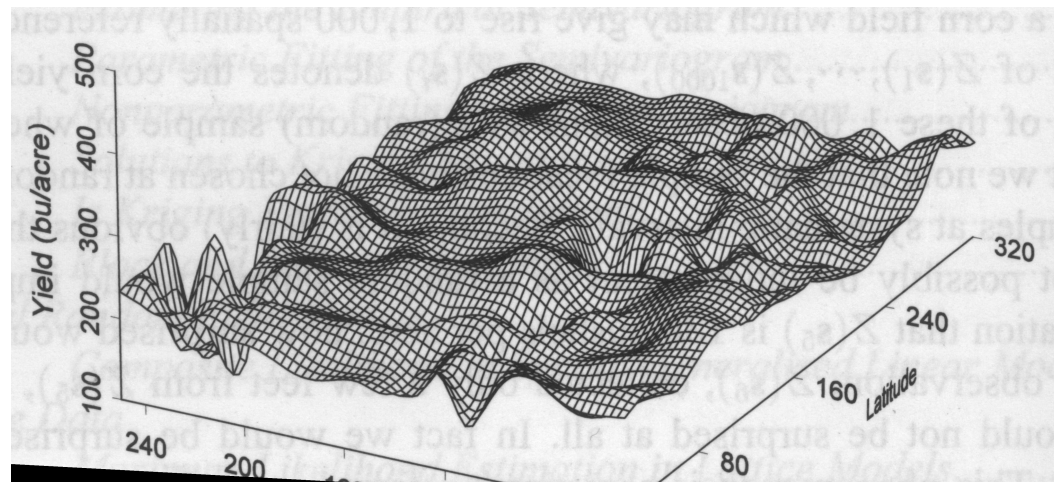
Definición

Datos de elevación

Campos aleatorios

Terminología y
notación

Conceptos y
supuestos



$$\{S(x) : x \in A \subset \mathcal{R}^2\}$$

Una sola realización



Campos aleatorios

Tabla de contenido

Introducción a la
Estadística Espacial

Definición

Datos de elevación

Campos aleatorios

Terminología y
notación

Conceptos y
supuestos

- Un conjunto de datos espaciales se consideran una realización de un experimento aleatorio. Sólo se obtiene una realización de $S(x)$ en el punto x . Esta es una realización de un campo aleatorio, es decir un proceso estocástico.
- $S(x_0)$ es una variable aleatoria si se considera la distribución de todas las realizaciones posibles en el punto x_0 .
- Cuando se muestrea un campo aleatorio, estas muestras se toman de una realización particular de un experimento aleatorio.



Realizaciones de un campo aleatorio

Tabla de contenido

Introducción a la
Estadística Espacial

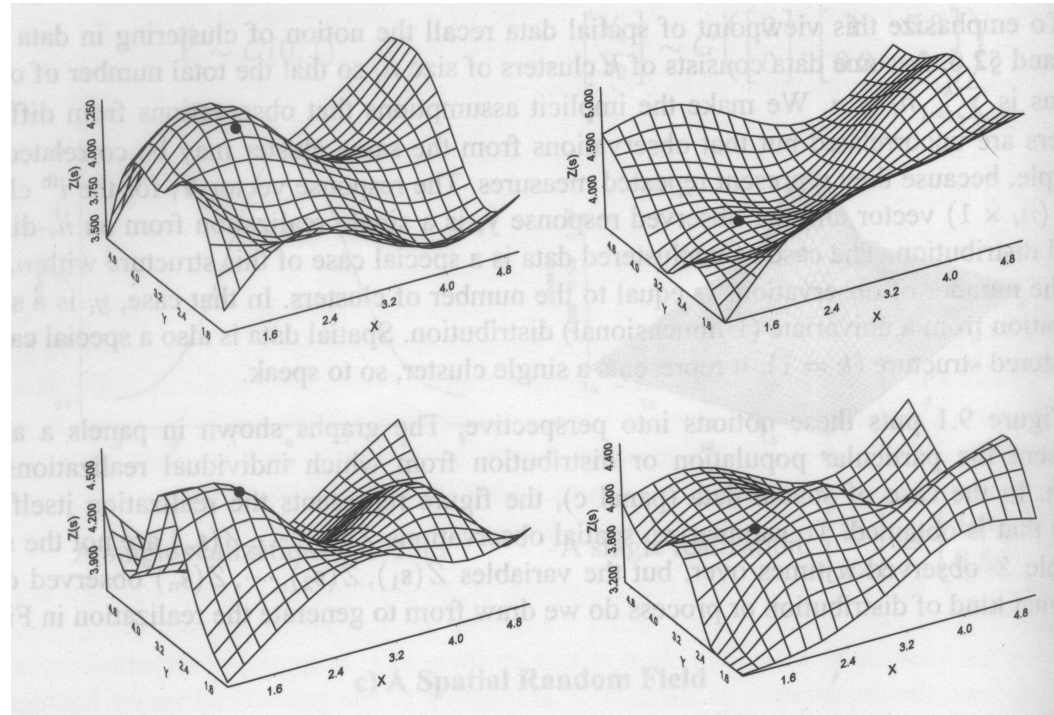
Definición

Datos de elevación

Campos aleatorios

Terminología y
notación

Conceptos y
supuestos



Cuatro realizaciones de un campo aleatorio.



Terminología y notación

Tabla de contenido

Introducción a la
Estadística Espacial

Definición

Datos de elevación

Campos aleatorios

Terminología y
notación

Conceptos y
supuestos

Para efectos prácticos los datos geoestadísticos univariados se puede tomar la siguiente notación:

$$(x_i, y_i) : i = 1, \dots, n.$$

Donde x_i denota la localización espacial (generalmente un espacio bidimensional) y y_i es un valor escalar asociado a la localización en x_i . Generalmente a y se le conoce como una variable de respuesta o variable medida.

Cada y_i es una realización de la variable aleatorio Y_i cuya distribución depende de la localización de x_i de un proceso estocástico continuo espacial subyacente $S(x)$ que no es directamente observable.

En muchos casos se puede asumir que $Y_i = S(x_i)$, pero en general no son iguales.



Tabla de contenido

Introducción a la
Estadística Espacial

Conceptos y
supuestos

Modelo
Geoestadístico
Supuestos Modelo
Geoestadístico
Función de
correlación Matérn
Funciones asociada a
la función Matérn
Rangos prácticos
Rango práctico para
función Matérn
Funciones exponencial
y gaussiana
Función potencia
Función esférica
Semivariograma
empírico
Semivariograma
teórico
Gráfica de
semivariograma
exponencial
Ejemplo sencillo

Conceptos y supuestos



Modelo Geoestadístico

Tabla de contenido

Introducción a la
Estadística Espacial

Conceptos y
supuestos

Modelo
Geoestadístico

Supuestos Modelo
Geoestadístico

Función de
correlación Matérn
Funciones asociada a
la función Matérn

Rangos prácticos

Rango práctico para
función Matérn

Funciones exponencial
y gaussiana

Función potencia

Función esférica

Semivariograma
empírico

Semivariograma
teórico

Gráfica de
semivariograma
exponencial

Ejemplo sencillo

El *Modelo Geostadístico* incorpora al menos dos elementos:

1. Un proceso estocástico real $\{S(x) : x \in A\}$ que se considera una realización parcial del proceso estocástico $\{S(x) : x \in \mathcal{R}^2\}$ en todo el plano.
2. Una distribución multivariada de la variable aleatoria $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ condicionado en $S(\cdot)$.

Se suele denominar a $S(x)$ la *señal* y a Y_i la *respuesta*. A menudo Y_i se puede pensar como una versión ruidosa de $S(x_i)$ y la Y_i se puede asumir condicionalmente independiente dado $S(\cdot)$.



Supuestos Modelo Geoestadístico

Tabla de contenido

Introducción a la
Estadística Espacial

Conceptos y
supuestos

Modelo
Geoestadístico
**Supuestos Modelo
Geoestadístico**

Función de
correlación Matérn
Funciones asociada a
la función Matérn
Rangos prácticos
Rango práctico para
función Matérn
Funciones exponencial
y gaussiana

Función potencia

Función esférica
Semivariograma
empírico

Semivariograma
teórico

Gráfica de
semivariograma
exponencial

Ejemplo sencillo

Los supuestos básico del modelo clásico son:

1. $\{S(x) : x \in \mathcal{R}^2\}$ es un proceso gaussiano con media μ , y varianza $\sigma^2 = Var\{S(x)\}$ y función de correlación $\rho(u) = Corr\{S(x), S(x')\}$, donde $u = \|x - x'\|$ y $\|\cdot\|$ denota la distancia;
2. Condicionado en $\{S(x) : x \in \mathcal{R}^2\}$, las y_i son realizaciones de variables mutuamente independientes Y_i , distribuidas normalmente con media $E[Y_i|S(\cdot)] = S(x_i)$ y varianza condicional τ^2 .

Una forma equivalente es:

$$Y_i = S(x_i) + \varepsilon_i : i = 1, \dots, n$$

donde $\{S(x) : x \in \mathcal{R}^2\}$ se define como el supuesto 1 y ε_i son variables aleatorias mutuamente independientes $\mathcal{N}(0, \tau^2)$.



Función de correlación Matérn

Tabla de contenido

Introducción a la
Estadística Espacial

Conceptos y
supuestos

Modelo
Geoestadístico
Supuestos Modelo
Geoestadístico

**Función de
correlación Matérn**

Funciones asociada a
la función Matérn

Rangos prácticos
Rango práctico para
función Matérn
Funciones exponencial
y gaussiana

Función potencia

Función esférica
Semivariograma
empírico

Semivariograma
teórico

Gráfica de
semivariograma
exponencial

Ejemplo sencillo

Una función muy común de correlación definida en geoestadística es la función Matérn definida como:

$$\rho(u; \phi, \kappa) = \{2^{\kappa-1} \Gamma(\kappa)\}^{-1} (u/\phi)^{\kappa} K_{\kappa}(u/\phi)$$

Donde $K_{\kappa}(\cdot)$ es una función de Bessel modificada de segunda clase, de orden κ . El parámetro $\phi > 0$ determina la tasa a la cual decae a cero la correlación en la medida que decrece u . El parámetro $\kappa > 0$ es el orden del modelo Matérn y está asociado a la forma del descenso de la función.



Funciones asociada a la función Matérn

Tabla de contenido

Introducción a la
Estadística Espacial

Conceptos y
supuestos

Modelo
Geoestadístico
Supuestos Modelo
Geoestadístico
Función de
correlación Matérn
**Funciones asociada a
la función Matérn**

Rangos prácticos
Rango práctico para
función Matérn
Funciones exponencial
y gaussiana

Función potencia

Función esférica
Semivariograma
empírico

Semivariograma
teórico

Gráfica de
semivariograma
exponencial

Ejemplo sencillo

Siguiendo la función Matérn se tienen dos situaciones muy comunes de funciones de correlación

- Función de correlación exponencial:

Si $\kappa = \frac{1}{2}$ entonces se tiene que la función queda reducida a:

$$\rho(u; \phi) = e^{-\frac{u}{\phi}}$$

- Función de correlación gaussiana:

Si $\kappa \rightarrow \infty$ entonces la función Matérn tiene como límite:

$$\rho(u; \phi) = e^{-\left(\frac{u}{\phi}\right)^2}$$



Rangos prácticos

Tabla de contenido

Introducción a la
Estadística Espacial

Conceptos y
supuestos

Modelo
Geoestadístico
Supuestos Modelo
Geoestadístico
Función de
correlación Matérn
Funciones asociada a
la función Matérn

Rangos prácticos

Rango práctico para
función Matérn
Funciones exponencial
y gaussiana

Función potencia

Función esférica
Semivariograma
empírico

Semivariograma
teórico

Gráfica de
semivariograma
exponencial

Ejemplo sencillo

El rango práctico se define como el valor de u en donde la función $\rho(u)$ tiene un valor de 0.05. O en otras palabras es el valor de u a partir del cual se puede considerar que $\rho(u) \approx 0$.

- Para la función exponencial se tiene el rango práctico es: $\approx 3\phi$.
- Para la función gaussiana se tiene que el rango práctico es: $\approx \sqrt{3}\phi$.



Rango práctico para función Matérn

Tabla de contenido

Introducción a la
Estadística Espacial

Conceptos y
supuestos

Modelo
Geoestadístico
Supuestos Modelo
Geoestadístico
Función de
correlación Matérn
Funciones asociada a
la función Matérn

Rangos prácticos

**Rango práctico para
función Matérn**

Funciones exponencial
y gaussiana

Función potencia

Función esférica
Semivariograma
empírico

Semivariograma
teórico

Gráfica de
semivariograma
exponencial

Ejemplo sencillo

Para la función Matérn a un rango práctico de $\rho_0 = 0,05$, se debe hallar la raíz de la siguiente ecuación:

$$\rho(u; \phi, \kappa) - \rho_0 = 0$$

$$\rho(u; \phi, \kappa) - 0,05 = 0$$

Ya que ϕ es un parámetro de escala, la solución será de la forma $r\phi$ donde r es el factor multiplicador que se halla de la solución de la ecuación:

$$\rho(u; \phi, 1) - 0,05 = 0$$



Funciones exponencial y gaussiana

Tabla de contenido

Introducción a la
Estadística Espacial

Conceptos y
supuestos

Modelo
Geoestadístico
Supuestos Modelo
Geoestadístico
Función de
correlación Matérn
Funciones asociada a
la función Matérn

Rangos prácticos
Rango práctico para
función Matérn

Funciones exponencial
y gaussiana

Función potencia

Función esférica
Semivariograma
empírico

Semivariograma
teórico

Gráfica de
semivariograma
exponencial

Ejemplo sencillo

Otra manera de expresar las funciones de correlación exponencial y gaussiana es:

■ Exponencial:

$$\rho(u; \alpha) = e^{-3\frac{u}{\alpha}}$$

■ Gaussiana:

$$\rho(u; \alpha) = e^{-3\left(\frac{u}{\alpha}\right)^2}$$

En donde α es el rango práctico.



Función potencia

Tabla de contenido

Introducción a la
Estadística Espacial

Conceptos y
supuestos

Modelo
Geoestadístico
Supuestos Modelo
Geoestadístico
Función de
correlación Matérn
Funciones asociada a
la función Matérn

Rangos prácticos
Rango práctico para
función Matérn
Funciones exponencial
y gaussiana

Función potencia

Función esférica
Semivariograma
empírico
Semivariograma
teórico
Gráfica de
semivariograma
exponencial
Ejemplo sencillo

Se define como:

$$\rho(u; \phi, \kappa) = e^{-\left(\frac{u}{\phi}\right)^\kappa}$$

Donde el parámetro de escala $\phi > 0$ y el de forma κ está limitado por $0 < \kappa \leq 2$. Note que si $\kappa = 2$ es la misma gaussiana.



Función esférica

Tabla de contenido

Introducción a la
Estadística Espacial

Conceptos y
supuestos

Modelo
Geoestadístico
Supuestos Modelo
Geoestadístico
Función de
correlación Matérn
Funciones asociada a
la función Matérn

Rangos prácticos
Rango práctico para
función Matérn
Funciones exponencial
y gaussiana

Función potencia

Función esférica

Semivariograma
empírico

Semivariograma
teórico

Gráfica de
semivariograma
exponencial

Ejemplo sencillo

Esta función se define como:

$$\rho(u; \phi) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{u}{\phi}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{\phi}\right)^3 & : 0 \leq u \leq \phi \\ 0 & : u \geq \phi \end{cases}$$

En este caso el rango absoluto es ϕ dado que si $u \geq \phi$ se tiene que $\rho(u) = 0$, por eso no tendría rango práctico.



Semivariograma empírico

Tabla de contenido

Introducción a la
Estadística Espacial

Conceptos y
supuestos

Modelo
Geoestadístico
Supuestos Modelo

Geoestadístico
Función de
correlación Matérn
Funciones asociada a
la función Matérn

Rangos prácticos
Rango práctico para
función Matérn
Funciones exponencial
y gaussiana

Función potencia

Función esférica
Semivariograma
empírico

Semivariograma
teórico
Gráfica de
semivariograma
exponencial

Ejemplo sencillo

Para un conjunto de datos $(x_i, y_i) : i = 1, \dots, n$, el *las ordenadas del variograma empírico* es el valor $v_{ij} = \frac{1}{2}(y_i - y_j)^2$. Algunos autores lo prefieren denominar *ordenadas del semivariograma*.

Si y_i es estacionario en media y varianza. El valor esperado de v_{ij} es $\sigma^2\{1 - \rho(x_i, x_j)\}$ donde σ^2 es la varianza y $\rho(x_i, x_j)$ es la correlación entre y_i y y_j .

Si y_i es un proceso estacionario, entonces $\rho(\cdot)$ depende sólo de la distancia entre x_i y x_j , y además tiende a cero a grandes distancias, entonces v_{ij} tiende a σ^2 cuando la distancia entre $u_{ij} = ||x_i - x_j||$ tiende a infinito.



Semivariograma teórico

Tabla de contenido

Introducción a la
Estadística Espacial

Conceptos y
supuestos

Modelo
Geoestadístico
Supuestos Modelo
Geoestadístico
Función de
correlación Matérn
Funciones asociada a
la función Matérn
Rangos prácticos
Rango práctico para
función Matérn
Funciones exponencial
y gaussiana
Función potencia
Función esférica
Semivariograma
empírico

**Semivariograma
teórico**

Gráfica de
semivariograma
exponencial

Ejemplo sencillo

El semivariograma de un espacio estocástico $S(x)$ es la función:

$$V(x, x') = \frac{1}{2} \text{Var}\{S(x) - S(x')\}$$

Note que

$V(x, x') = \frac{1}{2} [\text{Var}\{S(x)\} + \text{Var}\{S(x')\} - 2\text{Cov}\{S(x), S(x')\}]$. En el caso estacionario, simplifica a $V(u) = \sigma^2\{1 - \rho(u)\}$.

Recordemos que:

$$\rho(x, x') = \frac{\text{Cov}(S(x)S(x'))}{\sqrt{\text{Var}\{S(x)\}} \sqrt{\text{Var}\{S(x')\}}}$$



Gráfica de semivariograma exponencial

Tabla de contenido

Introducción a la
Estadística Espacial

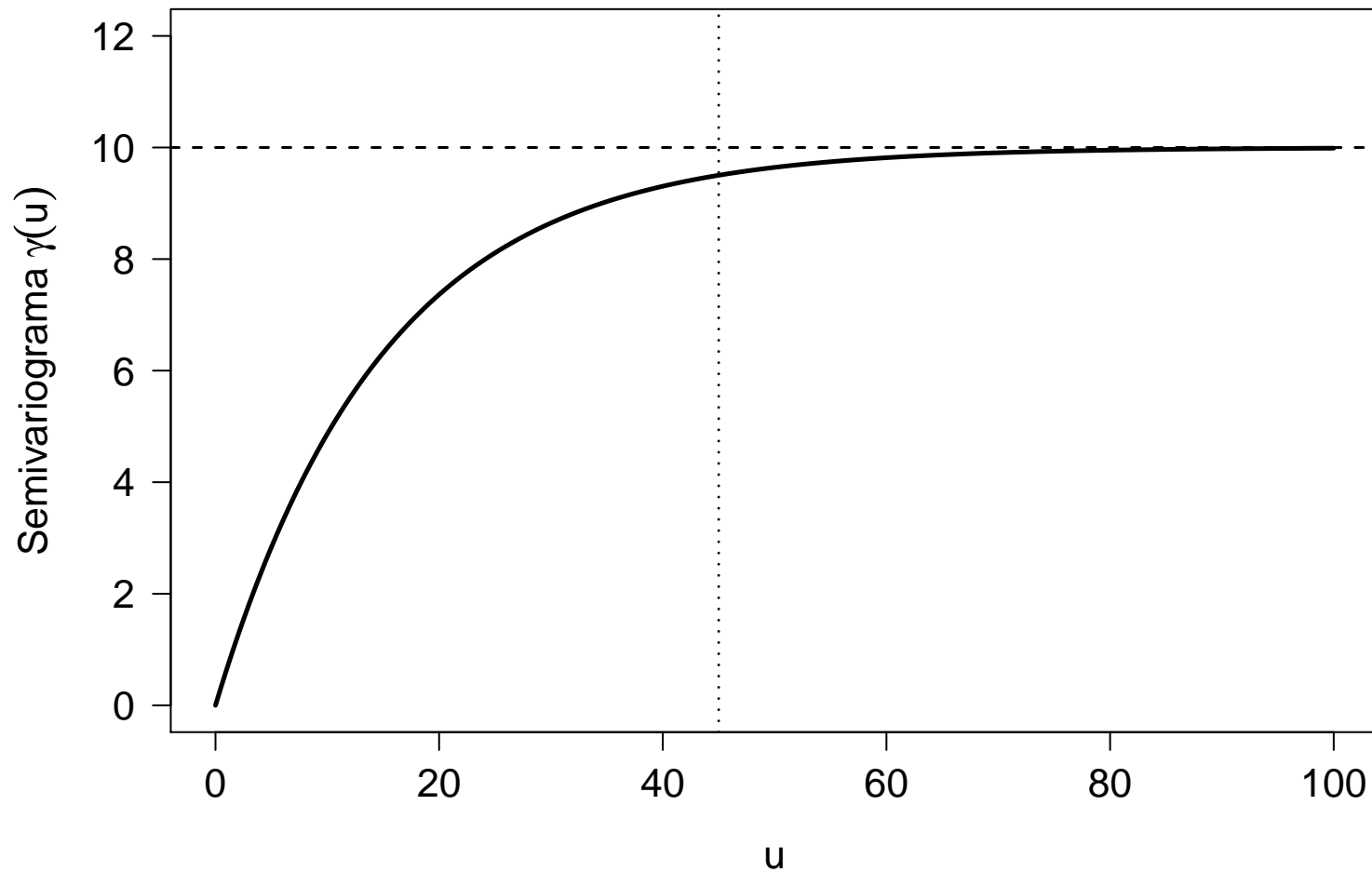
Conceptos y
supuestos

Modelo
Geoestadístico
Supuestos Modelo
Geoestadístico
Función de
correlación Matérn
Funciones asociada a
la función Matérn
Rangos prácticos
Rango práctico para
función Matérn
Funciones exponencial
y gaussiana
Función potencia
Función esférica
Semivariograma
empírico
Semivariograma
teórico

Gráfica de
semivariograma
exponencial

Ejemplo sencillo

Modelo exponencial $\sigma^2 = 10$ y $\phi = 15$





Ejemplo sencillo

Tabla de contenido

Introducción a la Estadística Espacial

Conceptos y supuestos

Modelo

Geoestadístico

Supuestos Modelo

Geoestadístico

Función de correlación Matérn

Funciones asociada a la función Matérn

Rangos prácticos

Rango práctico para función Matérn

Funciones exponencial y gaussiana

Función potencia

Función esférica

Semivariograma empírico

Semivariograma teórico

Gráfica de semivariograma exponencial

Ejemplo sencillo

		(y)			
		1	2	3	4
(x)					
1		1			4
2			2		
3		3			20