Faculdade de Tecnologia de Ribeirão Preto

Programação Linear

Notas de Aula 1

Apresentação do Curso e Introdução à Otimização

Prof. Me. Júnior César Bonafim

junior.bonafim@fatec.sp.gov.br

1º semestre 2024

Conteúdo

Apresentação da Disciplina

Conceitos Básicos

Exemplo de Modelagem

Softwares de Otimização

- Estudar modelos e métodos de Otimização usados em Pesquisa Operacional para apoio à tomada de decisão com foco em programação linear;

- Estudar modelos e métodos de Otimização usados em Pesquisa Operacional para apoio à tomada de decisão com foco em programação linear;

- Abordar aspectos teóricos e práticos para a solução de problemas;

- Estudar modelos e métodos de Otimização usados em Pesquisa Operacional para apoio à tomada de decisão com foco em programação linear;
- Abordar aspectos teóricos e práticos para a solução de problemas;
- Fornecer ao aluno conhecimentos básicos na área de otimização.

Ementa

Ementa

- Conceitos básicos em otimização

Ementa

- Conceitos básicos em otimização
- Método gráfico

Ementa

- Conceitos básicos em otimização
- Método gráfico
- Método simplex

Ementa

- Conceitos básicos em otimização
- Método gráfico
- Método simplex
- Análise de sensibilidade

Ementa

- Conceitos básicos em otimização
- Método gráfico
- Método simplex
- Análise de sensibilidade
- Método branch-and-bound

Ementa

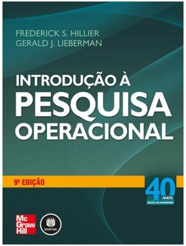
- Conceitos básicos em otimização
- Método gráfico
- Método simplex
- Análise de sensibilidade
- Método branch-and-bound
- Aplicações

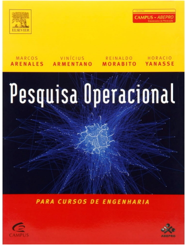
Materiais da disciplina no Teams

- Notas de aula
- Listas de exercício
- Trabalhos
- Materiais complementares

Avaliação

- Duas notas N_1 2 N_2 (10,0 pontos cada)
- N_1 : Atividades (3,0 pontos) + Prova (7,0 pontos)
- N_2 : Trabalho final (10,0 pontos)
- Média final $= \dfrac{N_1 + N_2}{2}$
- Prova substitutiva valendo 10,0 pontos





- LACHTERMACHER, G. **Pesquisa operacional na tomada de decisões**. 5ª ed. Rio de Janeiro : LTC, 2016.
- HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à pesquisa operacional**. 9ª ed. Porto Alegre: AMGH, 2012.
- ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R.; YANNASSE, H. **Pesquisa operacional**: para cursos de engenharia. 2ª ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015.

- Otimização: Sub-área da Matemática Aplicada

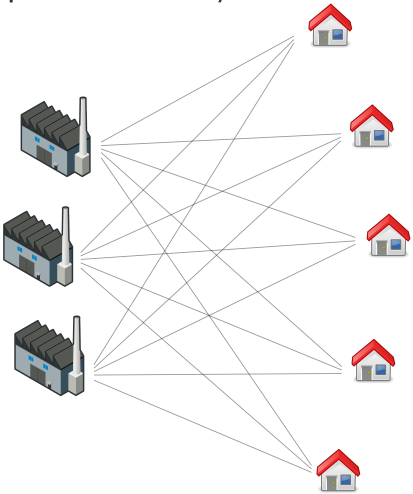
- Otimização: Sub-área da Matemática Aplicada
  - Determinar melhor solução para um dado problema

- Otimização: Sub-área da Matemática Aplicada
  - Determinar melhor solução para um dado problema
- Pesquisa Operacional: Conjunto de ferramentas científicas para apoio à tomada de decisão

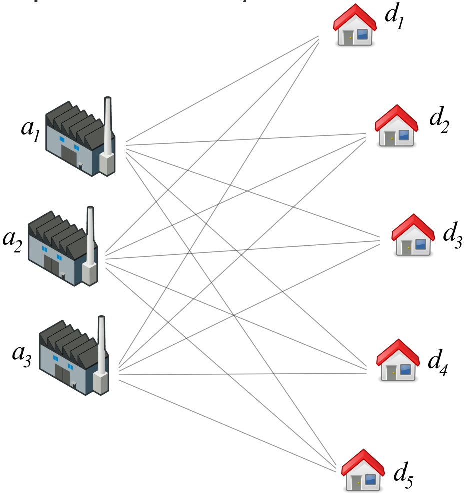
- Otimização: Sub-área da Matemática Aplicada
  - Determinar melhor solução para um dado problema
- Pesquisa Operacional: Conjunto de ferramentas científicas para apoio à tomada de decisão
  - Inclui-se aqui as técnicas de otimização, dentre outras ferramentas

- Otimização: Sub-área da Matemática Aplicada
  - Determinar melhor solução para um dado problema
- Pesquisa Operacional: Conjunto de ferramentas científicas para apoio à tomada de decisão
  - Inclui-se aqui as técnicas de otimização, dentre outras ferramentas
- Programação Linear é uma das técnicas de otimização, assim como Programação Inteira, Programação Mista, Programação Não Linear, Simulação, ...

Exemplo: Distribuição de Produtos

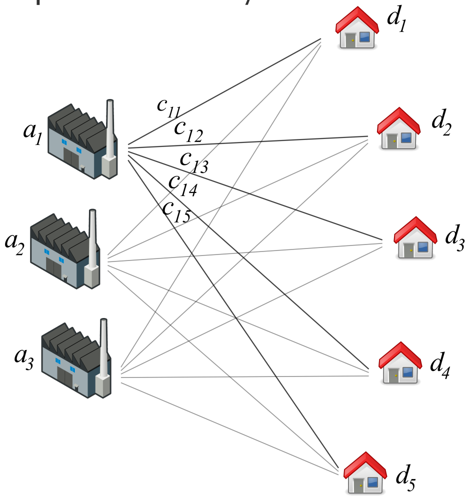


Exemplo: Distribuição de Produtos



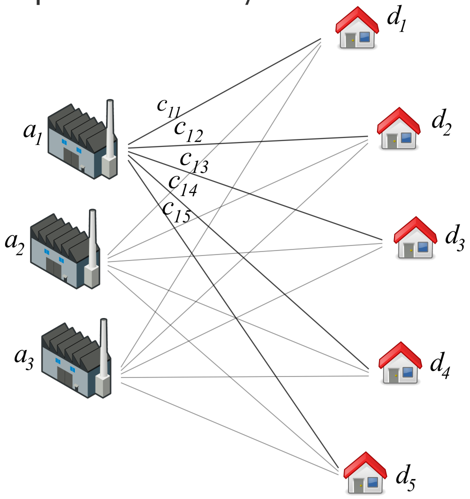
- a_i capacidade produtiva da fábrica i
- d_j demanda do centro consumidor j

Exemplo: Distribuição de Produtos



- a_i capacidade produtiva da fábrica i
- d_j demanda do centro consumidor j
- c_{ij} custo de transporte da fábrica i para o centro consumidor j

Exemplo: Distribuição de Produtos



- a_i capacidade produtiva da fábrica i
- d_j demanda do centro consumidor j
- c_{ij} custo de transporte da fábrica i para o centro consumidor j
- Quanto transportar de cada fábrica para cada centro consumidor de modo a minimizar o custo total de transporte?

Modelo Matemático

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} & \\
\text{s.a} \quad & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq a_i, & i = 1, ..., n \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = d_j, & j = 1, ..., m \\
& x_{ij} \geq 0, & i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., m
\end{aligned}
$$

Onde x_{ij} é a quantidade transportada do centro de produção i para o centro consumidor j.

Exemplo: Horário das disciplinas Fatec Ribeirão Preto

Exemplo: Horário das disciplinas Fatec Ribeirão Preto

Principais problemas a serem resolvidos:

Exemplo: Horário das disciplinas Fatec Ribeirão Preto

Principais problemas a serem resolvidos:

- Satisfazer a disponibilidade de horário dos docentes

Exemplo: Horário das disciplinas Fatec Ribeirão Preto

Principais problemas a serem resolvidos:

- Satisfazer a disponibilidade de horário dos docentes
- Respeitar carga de trabalho máxima diária

Exemplo: Horário das disciplinas Fatec Ribeirão Preto

Principais problemas a serem resolvidos:

- Satisfazer a disponibilidade de horário dos docentes
- Respeitar carga de trabalho máxima diária
- Respeitar 11 horas de descanso entre turnos de trabalho

Exemplo: Horário das disciplinas Fatec Ribeirão Preto

Principais problemas a serem resolvidos:

- Satisfazer a disponibilidade de horário dos docentes
- Respeitar carga de trabalho máxima diária
- Respeitar 11 horas de descanso entre turnos de trabalho

Constrói-se o modelo com estas (e outras) restrições

Implementação e resultado

grade2.py

```python
model.objective = maximize(xsum(score[professores.index(disciplinas[i][profe

# Separa as disciplinas por semestre, curso e período
for p in periodos:
    for c in cursos:
        for s in semestres:
            for j in range(len(dias)):
                for k in range(len(horarios)):
                    model += xsum(x[i][j][k] for i in range(N) if disciplina

# terceiro horário noturno durante a semana não é permitido
for j in range(len(dias)-1):
    gen = (i for i in range(N) if disciplinas[i][periodo] == 'Noite')
    for i in gen:
        model += x[i][j][2] == 0

#  não alocar disciplinas aos sábados para cursos manhã e tarde
for k in range(len(horarios)):
    gen = (i for i in range(N) if disciplinas[i][periodo] != 'Noite')
    for i in gen:
        model += x[i][5][k] == 0
```

```
Grade Horária v 1.3

Alocação ideal: 480 horas
Total alocado: 466 horas

Disciplinas alocadas fora da disponibilidade do docente:
ED - ADS Noite - Quinta horário 1
ED - ADS Noite - Quinta horário 2
ED - ADS Manhã - Quinta horário 1
ED - ADS Manhã - Quinta horário 2
PROG WEB - ADS Manhã - Sexta horário 2
PROG WEB - ADS Manhã - Sexta horário 3
PROSP B INF TEC - GNI Noite - Sexta horário 2


Horário Gerado
```

ADS Manhã semestre 1

Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
--------------	--------------	ALG L P - Lucas	A O COMP - Carlos D	--------------	--------------
MAT DISC - André	PROG M I - Geraldo	ALG L P - Lucas	A O COMP - Carlos D	ADM GERAL - Suzana	--------------
MAT DISC - André	PROG M I - Geraldo	INGLÊS I - Anna	LAB HARD - Carlos D	ADM GERAL - Suzana	--------------

ADS Manhã semestre 2

Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
LING PROG - Perez	CONTAB - Silvânia	--------------	INGLÊS II - Cláudia	CÁLCULO - Júnior	--------------
LING PROG - Perez	COM EXP - Carlos	SIST INF - Carlos D	ENG SOFT I - Plotze	CÁLCULO - Júnior	--------------
--------------	COM EXP - Carlos	SIST INF - Carlos D	ENG SOFT I - Plotze	--------------	--------------

ADS Manhã semestre 3

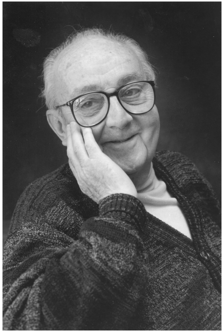
Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
ECON FIN - Fernandina	--------------	ENG SOFT II - Plotze	ED - Ricardo	--------------	--------------
ESTAT AP - Valéria	SO I - Marco	ENG SOFT II - Plotze	ED - Ricardo	--------------	--------------
ESTAT AP - Valéria	SO I - Marco	SOC TEC - Clóvis	INGLÊS III - Anna	IHC - Fabrício	--------------

ADS Manhã semestre 4

Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
INGLÊS IV - Priscilla	P DISP MO - Plotze	--------------	--------------	PROG O O - Livre 1	--------------
BD - Geraldo	P DISP MO - Plotze	ENG SOFT III - Fabrício	SO II - Marco	PROG O O - Livre 1	--------------
BD - Geraldo	MPCT - Anna	ENG SOFT III - Fabrício	SO II - Marco	--------------	--------------

All models are wrong, but some are useful

Geroge Box



Modelos

Modelos

- Dado um problema de otimização, constrói-se o modelo matemático associado

Modelos

- Dado um problema de otimização, constrói-se o modelo matemático associado
- O modelo é a representação formal do problema que permite a solução e análise por meio de técnicas científicas

Modelos

- Dado um problema de otimização, constrói-se o modelo matemático associado
- O modelo é a representação formal do problema que permite a solução e análise por meio de técnicas científicas
- Esta solução/análise auxilia na tomada de decisão

Modelos

Modelos

- Modelos são descrições aproximadas da realidade

Modelos

- Modelos são descrições aproximadas da realidade
- Devem conter características relevantes para o propósito desejado

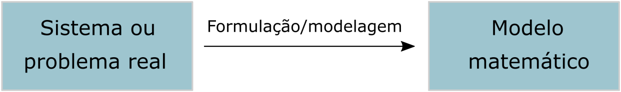
Modelos

- Modelos são descrições aproximadas da realidade
- Devem conter características relevantes para o propósito desejado
- Vantagem: grande quantidade de ferramentas matemáticas disponíveis para a análise e solução

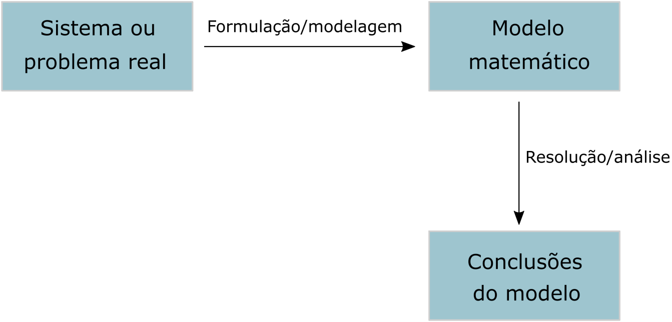
Processo de modelagem e resolução

Sistema ou problema real

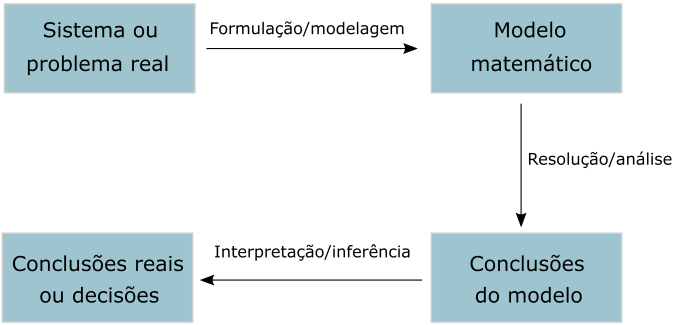
Processo de modelagem e resolução



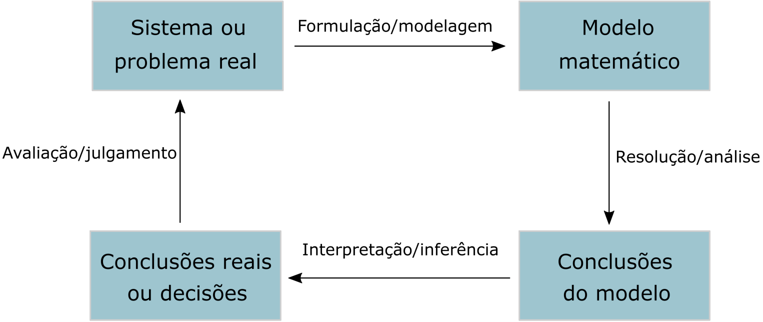
Processo de modelagem e resolução



Processo de modelagem e resolução



Processo de modelagem e resolução



Definição 1 (Problema de otimização)

Matematicamente, um problema de otimização é definido como

$$\underset{(\text{maximizar})}{\text{minimizar}}\; f(x) \;\text{sujeito a}\; x \in \mathcal{X}.$$

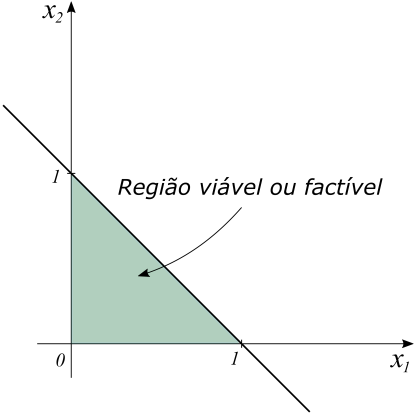
- x: *variável de decisão. Em geral* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.
- $\mathcal{X}$: *conjunto factível (domínio, restrições). Contém todas as alternativas viáveis do problema.*
- $f(x)$: *função objetivo. Determina o critério de escolha.*

Exemplo

$$\max \quad f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.a} \quad x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Dado o problema de otimização

$$\underset{\text{(maximizar)}}{\text{minimizar}}\ f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}.$$

- Uma solução $\bar{x}$ é *factível* quando satisfaz todas as restrições do problema, ou seja, $\bar{x} \in \mathcal{X}$. Caso contrário, $\bar{x}$ é chamado *infactível*.

Dado o problema de otimização

$$\underset{\text{(maximizar)}}{\text{minimizar}}\ f(x) \text{ sujeito a } x \in \mathcal{X}.$$

- Uma solução $\bar{x}$ é *factível* quando satisfaz todas as restrições do problema, ou seja, $\bar{x} \in \mathcal{X}$. Caso contrário, $\bar{x}$ é chamado *infactível*.
- Uma solução $\bar{x}$ é *ótima* quando for factível e resultar no melhor valor para a função objetivo, isto é, $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in \mathcal{X}$ (minimização) ou equivalentemente $f(\bar{x}) \geq f(x), \forall x \in \mathcal{X}$ (maximização).

- Se $\mathcal{X} = \emptyset$, então o problema é *infactível*.

- Se $\mathcal{X} = \emptyset$, então o problema é *infactível*.

- Se para toda solução $\bar{x} \in \mathcal{X}$ existir uma outra solução $\tilde{x} \in \mathcal{X}$ tal que $f(\tilde{x}) \leq f(\bar{x})$ (minimização) ou $f(\tilde{x}) \geq f(\bar{x})$ (maximização), então o problema é *ilimitado*.

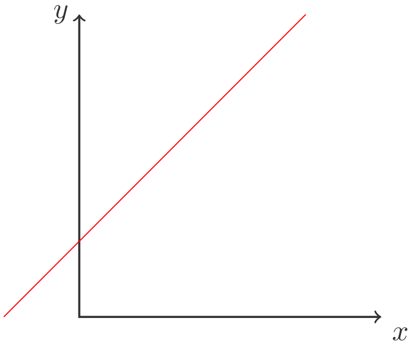
Os modelos de otimização podem ser classificados como:

- lineares ou não-lineares;
- contínuos ou discretos;
- determinísticos ou estocásticos.

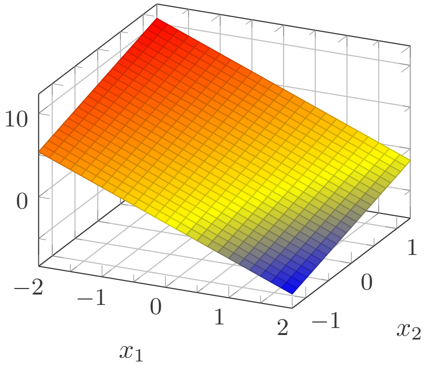
Modelo linear

É descrito por meio de funções e expressões lineares

$f(x) = ax + b$



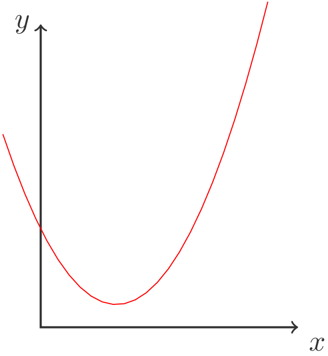
$f(x_1, x_2) = -3x_1 + 2x_2 + 2$



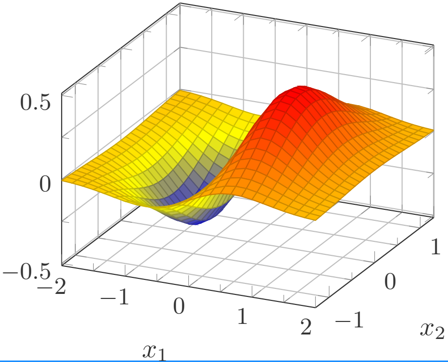
Modelo não-linear

É descrito por meio de funções e expressões não-lineares

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$



$$f(x_1, x_2) = x_1 e^{-x_1^2 - x_2^2}$$



Modelo contínuo

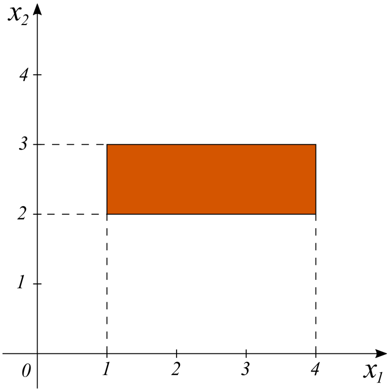
Um modelo é contínuo quando seu conjunto factível contém todos os pontos interiores à sua fronteira, ou seja, as variáveis de decisão podem assumir valores reais.

Modelo discreto

Um modelo é discreto quando seu conjunto factível é constituído por pontos isolados, ou seja, as variáveis de decisão assumem apenas valores inteiros.

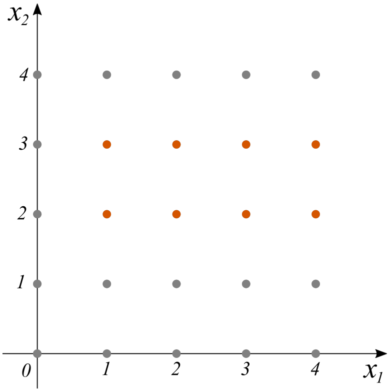
Modelo contínuo

$$\mathcal{X} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x_1 \leq 4, 2 \leq x_2 \leq 3\}$$



Modelo discreto

$$\mathcal{X} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2; 1 \leq x_1 \leq 4, 2 \leq x_2 \leq 3\}$$



Modelo determinístico

Um modelo é determinístico quando os dados de entrada são conhecidos com certeza.

Por exemplo, a demanda de uma dado produto para os três próximos meses é 150, 185 e 220 unidades.

Modelo estocástico

Um modelo é estocástico quando há incerteza sobre os dados de entrada, por exemplo, a demanda para os próximos meses não é conhecida, apenas possíveis cenários e suas probabilidades de ocorrência.

Nomenclatura

- Programação Linear: modelo linear contínuo determinístico;

Nomenclatura

- Programação Linear: modelo linear contínuo determinístico;
- Programação Inteira: modelo linear discreto determinístico;

Nomenclatura

- Programação Linear: modelo linear contínuo determinístico;
- Programação Inteira: modelo linear discreto determinístico;
- Programação Estocástica: modelo linear contínuo estocástico;

Nomenclatura

- Programação Linear: modelo linear contínuo determinístico;
- Programação Inteira: modelo linear discreto determinístico;
- Programação Estocástica: modelo linear contínuo estocástico;
- Programação Não-linear: modelo não-linear contínuo determinístico;

Nomenclatura

- Programação Linear: modelo linear contínuo determinístico;
- Programação Inteira: modelo linear discreto determinístico;
- Programação Estocástica: modelo linear contínuo estocástico;
- Programação Não-linear: modelo não-linear contínuo determinístico;
- ...

Para cada tipo de modelo existem métodos (algoritmos) que ajudam a analisar e obter solução.

- Programação Linear: *método simplex* ou *método de pontos interiores*

Métodos de solução

Para cada tipo de modelo existem métodos (algoritmos) que ajudam a analisar e obter solução.

- Programação Linear: *método simplex* ou *método de pontos interiores*
- Programação Inteira: *método branch-and-bound*
- ...

- Modelo de otimização linear contínuo determinístico.

- Modelo de otimização linear contínuo determinístico.
- Minimizar ou maximizar uma função linear

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

- Modelo de otimização linear contínuo determinístico.
- Minimizar ou maximizar uma função linear

$$f(x_1, \ldots, x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

- sujeito a um domínio contínuo representado por um sistema de equações e/ou inequações lineares, por exemplo:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n \leq b_3$$

- Modelo de otimização linear contínuo determinístico.
- Minimizar ou maximizar uma função linear

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

- sujeito a um domínio contínuo representado por um sistema de equações e/ou inequações lineares, por exemplo:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n \leq b_3$$

- OBS: não é permitido "$<$" nem "$>$".

Nomenclatura

- $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ são as variáveis de decisão

Nomenclatura

- $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ são as variáveis de decisão
- $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ são os coeficientes de custo

Nomenclatura

- $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ são as variáveis de decisão
- $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ são os coeficientes de custo
- $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$ é restrição do problema ($\leq$ou $\geq$)

Nomenclatura

- $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ são as variáveis de decisão
- $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ são os coeficientes de custo
- $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$ é restrição do problema ($\leq$ou $\geq$)
- $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ são so coeficientes do vetor de recursos

Nomenclatura

- $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ são as variáveis de decisão
- $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ são os coeficientes de custo
- $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$ é restrição do problema ($\leq$ou $\geq$)
- $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ são so coeficientes do vetor de recursos
- $a_{11}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{R}$ são os coeficientes da matriz de recursos

Nomenclatura

O modelo pode ser:

- Factível e ter solução ótima;

Nomenclatura

O modelo pode ser:

- Factível e ter solução ótima;
- Factível e ilimitado;

Nomenclatura

O modelo pode ser:

- Factível e ter solução ótima;
- Factível e ilimitado;
- Infactível.

Nomenclatura

O modelo pode ser:

- Factível e ter solução ótima;
- Factível e ilimitado;
- Infactível.

O foco do curso no que diz respeito a métodos de solução será Programação linear.

Exemplo 1. Uma metalúrgica produz dois tipos de ligas metálicas. Cada liga é composta de proporções diferentes de cobre, zinco e chumbo, os quais estão disponíveis em quantidades limitadas em estoque. Deseja-se determinar quanto produzir de cada liga, de modo a maximizar a receita bruta, satisfazendo as seguintes composições das ligas e a disponibilidade de matéria-prima em estoque:

Matéria-prima	Liga 1	Liga 2	Estoque
Cobre	50%	30%	3 ton
Zinco	10%	20%	1 ton
Chumbo	40%	50%	3 ton
Preço de venda	3 mil	2 mil	(R$ por ton)

- Variáveis de decisão

- Variáveis de decisão

  x_1: quantidade a ser produzida da liga 1

- Variáveis de decisão

x_1: quantidade a ser produzida da liga 1

x_2: quantidade a ser produzida da liga 2

- Variáveis de decisão

  x_1: quantidade a ser produzida da liga 1

  x_2: quantidade a ser produzida da liga 2

- Função objetivo

- Variáveis de decisão

  x_1: quantidade a ser produzida da liga 1

  x_2: quantidade a ser produzida da liga 2

- Função objetivo

  Maximizar $3x_1 + 2x_2$

- Variáveis de decisão

  x_1: quantidade a ser produzida da liga 1

  x_2: quantidade a ser produzida da liga 2

- Função objetivo

  Maximizar $3x_1 + 2x_2$

- Restrições

- Variáveis de decisão

  x_1: quantidade a ser produzida da liga 1

  x_2: quantidade a ser produzida da liga 2

- Função objetivo

  Maximizar $3x_1 + 2x_2$

- Restrições

  Estoque de cobre:

- Variáveis de decisão

  x_1: quantidade a ser produzida da liga 1

  x_2: quantidade a ser produzida da liga 2

- Função objetivo

  Maximizar $3x_1 + 2x_2$

- Restrições

  Estoque de cobre: $0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$

- Variáveis de decisão

  x_1: quantidade a ser produzida da liga 1

  x_2: quantidade a ser produzida da liga 2

- Função objetivo

  Maximizar $3x_1 + 2x_2$

- Restrições

  Estoque de cobre: $0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$

  Estoque de zinco:

- Variáveis de decisão

  x_1: quantidade a ser produzida da liga 1

  x_2: quantidade a ser produzida da liga 2

- Função objetivo

  Maximizar $3x_1 + 2x_2$

- Restrições

  Estoque de cobre: $0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$

  Estoque de zinco: $0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$

- Variáveis de decisão

x_1: quantidade a ser produzida da liga 1

x_2: quantidade a ser produzida da liga 2

- Função objetivo

Maximizar $3x_1 + 2x_2$

- Restrições

Estoque de cobre: $0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$

Estoque de zinco: $0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$

Estoque de chumbo:

- Variáveis de decisão

  x_1: quantidade a ser produzida da liga 1

  x_2: quantidade a ser produzida da liga 2

- Função objetivo

  Maximizar $3x_1 + 2x_2$

- Restrições

  Estoque de cobre: $0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$

  Estoque de zinco: $0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$

  Estoque de chumbo: $0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3$

- Variáveis de decisão

  x_1: quantidade a ser produzida da liga 1

  x_2: quantidade a ser produzida da liga 2

- Função objetivo

  Maximizar $3x_1 + 2x_2$

- Restrições

  Estoque de cobre: $0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$

  Estoque de zinco: $0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$

  Estoque de chumbo: $0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3$

  Quantidades não-negativas:

- Variáveis de decisão

  x_1: quantidade a ser produzida da liga 1

  x_2: quantidade a ser produzida da liga 2

- Função objetivo

  Maximizar $3x_1 + 2x_2$

- Restrições

  Estoque de cobre: $0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$

  Estoque de zinco: $0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$

  Estoque de chumbo: $0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3$

  Quantidades não-negativas: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Modelo

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
& 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
& 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$\square$

Modelo algébrico (genérico)

Modelo algébrico (genérico)

n ligas

Modelo algébrico (genérico)

n ligas

m matérias-primas

Modelo algébrico (genérico)

n ligas

m matérias-primas

- Variáveis

  x_i : quantidade em toneladas a ser produzida da liga i, com $i = 1, \ldots, n$

Modelo algébrico (genérico)

n ligas

m matérias-primas

- Variáveis

  x_i : quantidade em toneladas a ser produzida da liga i, com $i = 1, \ldots, n$

- Parâmetros

Modelo algébrico (genérico)

n ligas

m matérias-primas

- Variáveis

  x_i : quantidade em toneladas a ser produzida da liga i, com $i = 1, \ldots, n$

- Parâmetros

  R_i : receita por tonelada da liga i, com $i = 1, \ldots, n$

Modelo algébrico (genérico)

n ligas

m matérias-primas

- Variáveis

  x_i : quantidade em toneladas a ser produzida da liga i, com $i = 1, \ldots, n$

- Parâmetros

  R_i : receita por tonelada da liga i, com $i = 1, \ldots, n$

  D_j : disponibilidade da matéria-prima j, com $j = 1, \ldots, m$

Modelo algébrico (genérico)

n ligas

m matérias-primas

- Variáveis

  x_i : quantidade em toneladas a ser produzida da liga i, com $i = 1, \ldots, n$

- Parâmetros

  R_i : receita por tonelada da liga i, com $i = 1, \ldots, n$

  D_j : disponibilidade da matéria-prima j, com $j = 1, \ldots, m$

  P_{ji} : percentual da matéria-prima j presente na liga i, com $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$

Modelo algébrico

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & \sum_{i=1}^{n} R_i x_i & \\
\text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^{n} P_{ji} x_i \leq D_j & j = 1, \ldots, m \\
& x_i \geq 0 & i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Exemplo 2. Suponha que no exemplo anterior as ligas produzidas são vendidas em barras de 1 tonelada. Elabore o modelo de programação matemática que maximize a receita bruta na venda das barras.

Exemplo 2. Suponha que no exemplo anterior as ligas produzidas são vendidas em barras de 1 tonelada. Elabore o modelo de programação matemática que maximize a receita bruta na venda das barras.

Modelo

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\
& 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\
& 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & \sum_{i=1}^{n} R_i x_i \\
\text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^{n} P_{ji} x_i \leq D_j \qquad j = 1, \ldots, m \\
& x_i \in \mathbb{Z}_+ \qquad\qquad i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Existem vários softwares de otimização disponíveis, por exemplo:

Existem vários softwares de otimização disponíveis, por exemplo:

- Excel - Solver (nativo) e outros suplementos mais eficientes (OpenSolver e SolverStudio);

Existem vários softwares de otimização disponíveis, por exemplo:

- Excel - Solver (nativo) e outros suplementos mais eficientes (OpenSolver e SolverStudio);
- lp_solve - livre;

Solução de problemas com uso de softwares

Existem vários softwares de otimização disponíveis, por exemplo:

- Excel - Solver (nativo) e outros suplementos mais eficientes (OpenSolver e SolverStudio);
- lp_solve - livre;
- CPLEX (IBM) - comercial;

Existem vários softwares de otimização disponíveis, por exemplo:

- Excel - Solver (nativo) e outros suplementos mais eficientes (OpenSolver e SolverStudio);
- lp_solve - livre;
- CPLEX (IBM) - comercial;
- Gurobi - comercial;

Existem vários softwares de otimização disponíveis, por exemplo:

- Excel - Solver (nativo) e outros suplementos mais eficientes (OpenSolver e SolverStudio);
- lp_solve - livre;
- CPLEX (IBM) - comercial;
- Gurobi - comercial;
- COIN - OR - livre (boa alternativa aos softwares comerciais)

Existem vários softwares de otimização disponíveis, por exemplo:

- Excel - Solver (nativo) e outros suplementos mais eficientes (OpenSolver e SolverStudio);
- lp_solve - livre;
- CPLEX (IBM) - comercial;
- Gurobi - comercial;
- COIN - OR - livre (boa alternativa aos softwares comerciais)

Para trabalhar com problemas de grande porte, é importante que o software permita a entrada do modelo utilizando alguma linguagem de modelagem algébrica.

- São exemplos de algumas linguagens de modelagem:

- São exemplos de algumas linguagens de modelagem:
  - GAMS, AMPL, GMPL, OPL, etc

Solução de problemas com uso de softwares

- São exemplos de algumas linguagens de modelagem:
  - GAMS, AMPL, GMPL, OPL, etc
- Permitem entrar com o modelo algébrico

- São exemplos de algumas linguagens de modelagem:
  - GAMS, AMPL, GMPL, OPL, etc
- Permitem entrar com o modelo algébrico
- Em geral são utilizadas dentro de um software de modelagem que tipicamente leva o mesmo nome da linguagem

- São exemplos de algumas linguagens de modelagem:
  - GAMS, AMPL, GMPL, OPL, etc
- Permitem entrar com o modelo algébrico
- Em geral são utilizadas dentro de um software de modelagem que tipicamente leva o mesmo nome da linguagem
- Por exemplo, a linguagem GAMS é usada dentro do software GAMS para a modelagem. O GAMS não resolve o problema. Serve apenas como interface para a modelagem chamando outros softwares para a resolução do problema, CPLEX, por exemplo

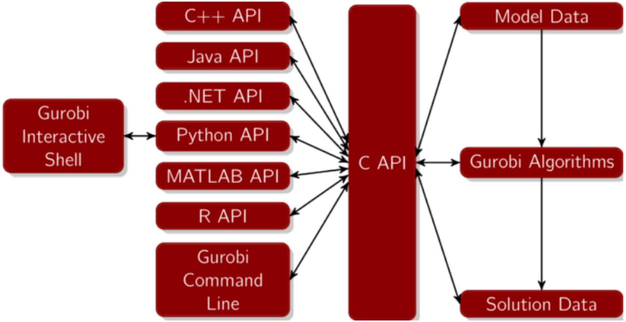
- Utilizaremos durante este curso o *solver* Gurobi e escreveremos os modelos em Python

Solução de problemas com uso de softwares

- Utilizaremos durante este curso o *solver* Gurobi e escreveremos os modelos em Python
- Para este fim, utilizaremos a biblioteca Gurobipy

- Utilizaremos durante este curso o *solver* Gurobi e escreveremos os modelos em Python
- Para este fim, utilizaremos a biblioteca Gurobipy
- Você pode utilizar uma versão limitada do Gurobi (2 mil variáveis de decisão e 2 mil restrições) ou requisitar uma licença acadêmica (e-mail fatec)

- Utilizaremos durante este curso o *solver* Gurobi e escreveremos os modelos em Python
- Para este fim, utilizaremos a biblioteca Gurobipy
- Você pode utilizar uma versão limitada do Gurobi (2 mil variáveis de decisão e 2 mil restrições) ou requisitar uma licença acadêmica (e-mail fatec)
- Documentação: www.gurobi.com/documentation



Problema das ligas metálicas no Google Colab:

Ligas Metálicas - Resolução

Resolva os exercícios presentes na lista 1.