Faculdade de Tecnologia de Ribeirão Preto

Programação Linear

Notas de Aula 2

Método Gráfico

Prof. Me. Júnior César Bonafim

junior.bonafim@fatec.sp.gov.br

1º semestre 2024

Introdução

Veremos nesta aula o método gráfico para a resolução de problemas de programação linear. O método se aplica a problemas de apenas duas variáveis, porém seu aprendizado nos fornece alguns *insights* importantes para o estudo posterior do método simplex.

Vejamos a resolução gráfica por meio de um exemplo.

Exemplo

Resolva o seguinte problema de programação linear.

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\
& x_1 \geq 1 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Plotando as restrições

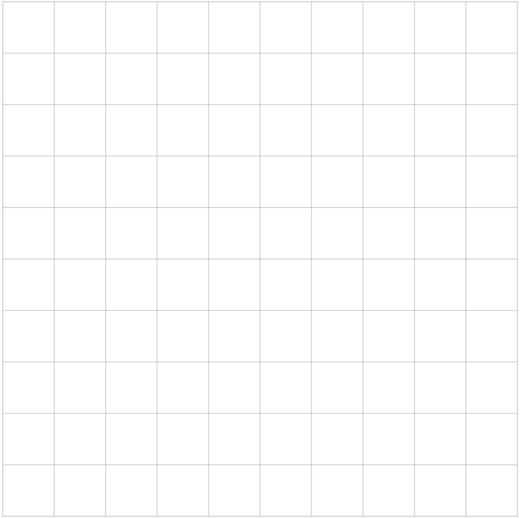
$$\max \quad 5x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.a} \quad x_1 + x_2 \leq 7$$

$$x_1 \geq 1$$

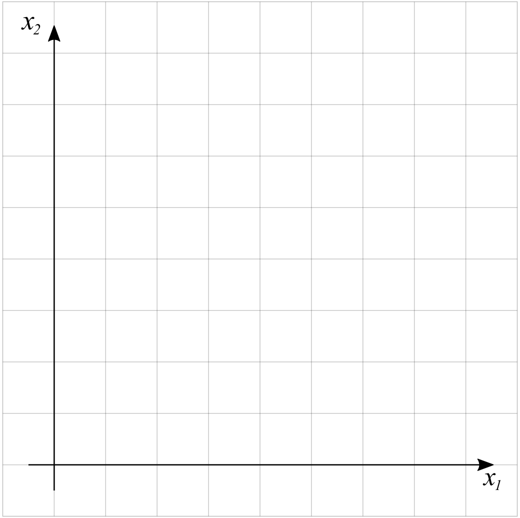
$$x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



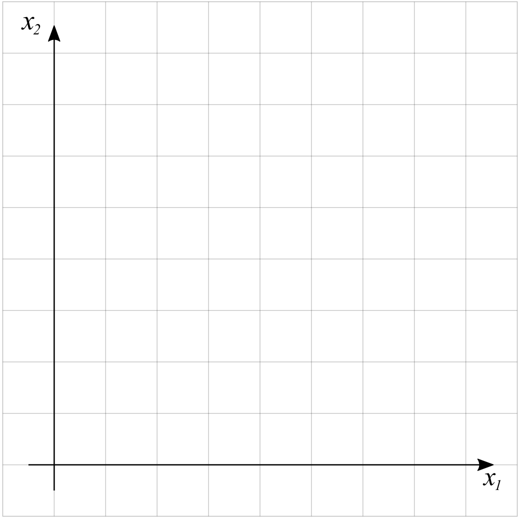
Plotando as restrições

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\
& x_1 \geq 1 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



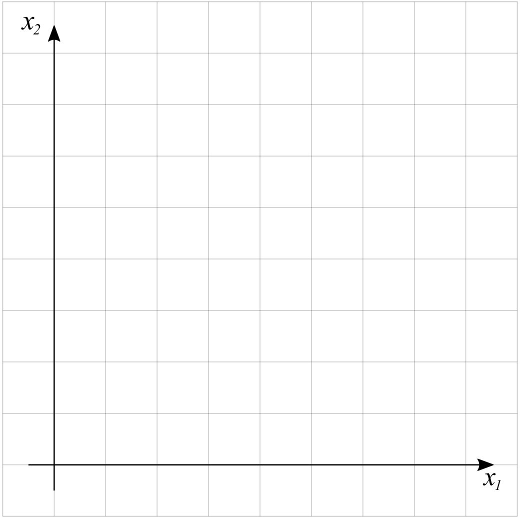
Plotando as restrições

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\
& x_1 \geq 1 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Plotando as restrições

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

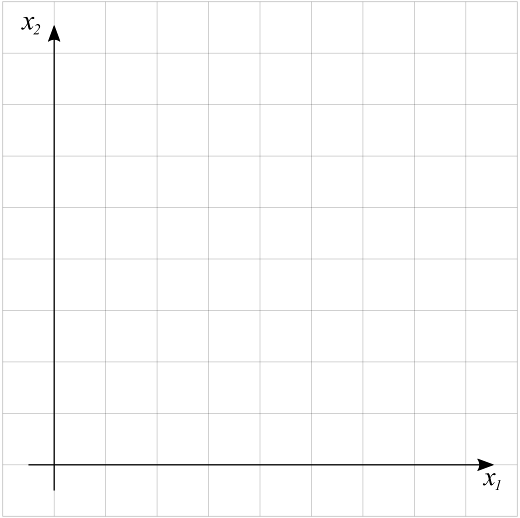


Plotando as restrições

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 + x_2 = 7$$



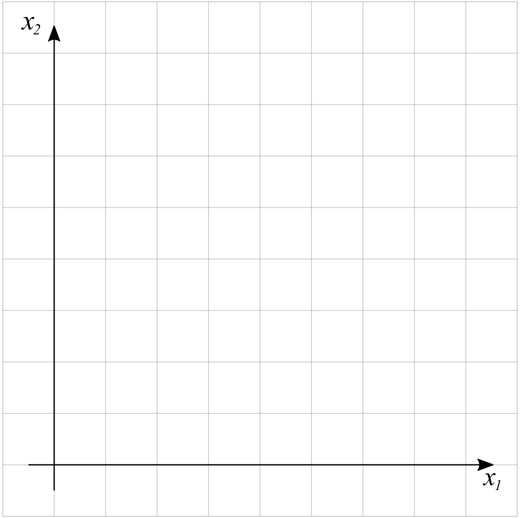
Plotando as restrições

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 + x_2 = 7$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 7 \quad (0,\ 7)$$



Plotando as restrições

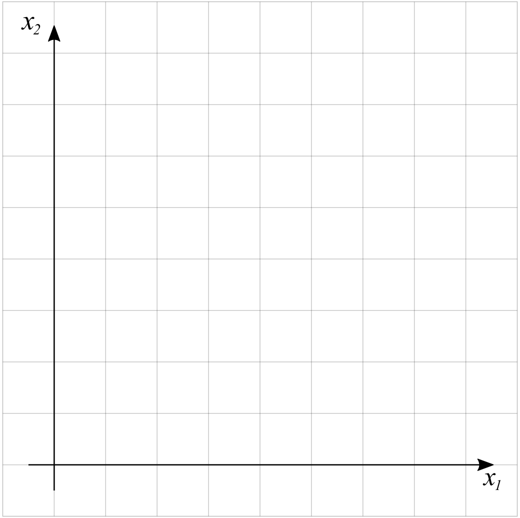
$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 + x_2 = 7$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 7 \quad (0,\ 7)$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 7 \quad (7,\ 0)$$



Plotando as restrições

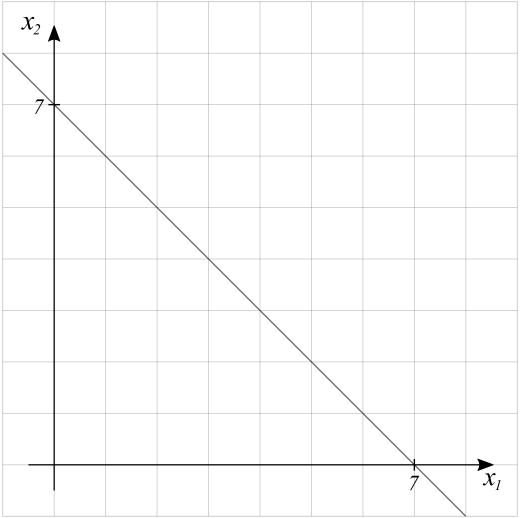
$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 + x_2 = 7$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 7 \quad (0,\ 7)$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 7 \quad (7,\ 0)$$



Plotando as restrições

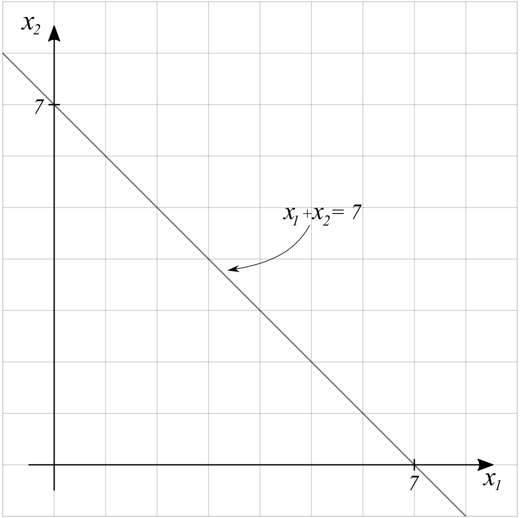
$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 + x_2 = 7$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 7 \quad (0,\ 7)$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 7 \quad (7,\ 0)$$



Plotando as restrições

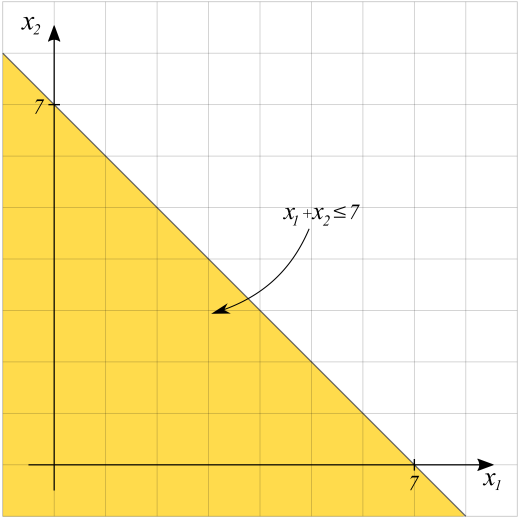
$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 + x_2 = 7$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 7 \quad (0,\ 7)$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 7 \quad (7,\ 0)$$



Plotando as restrições

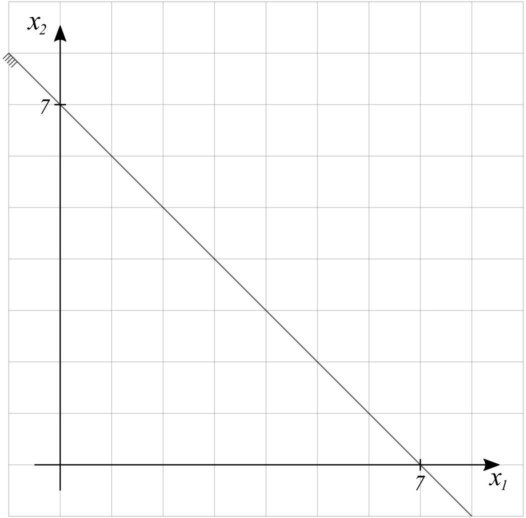
$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 + x_2 = 7$$

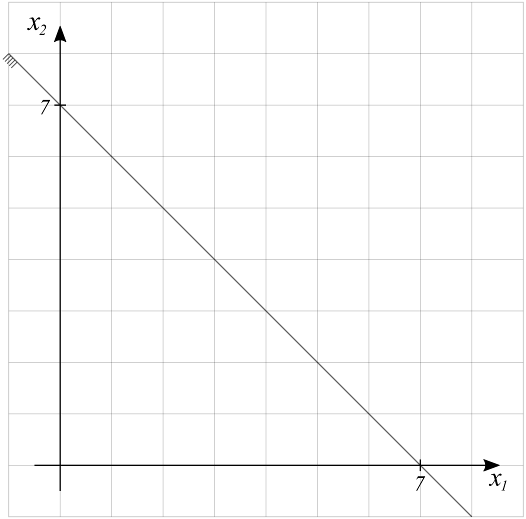
$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 7 \quad (0,\ 7)$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 7 \quad (7,\ 0)$$



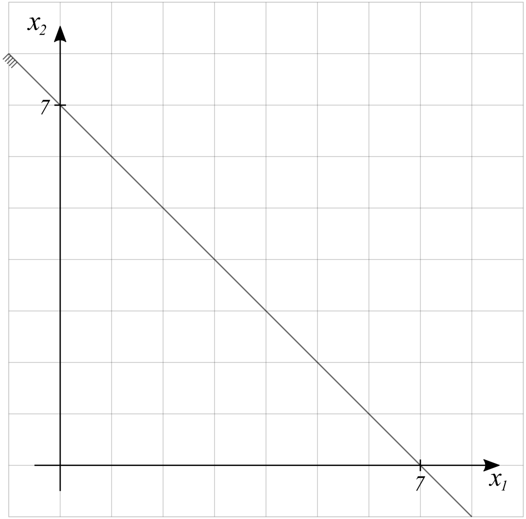
Plotando as restrições

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\
& x_1 \geq 1 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Plotando as restrições

$$x_1 \geq 1$$

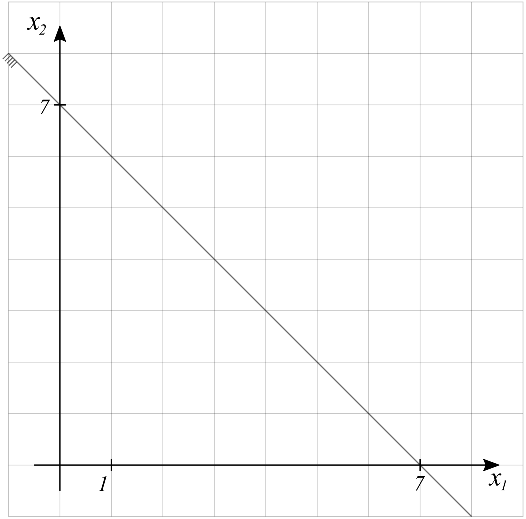


Plotando as restrições

$$x_1 \geq 1$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 = 1$$

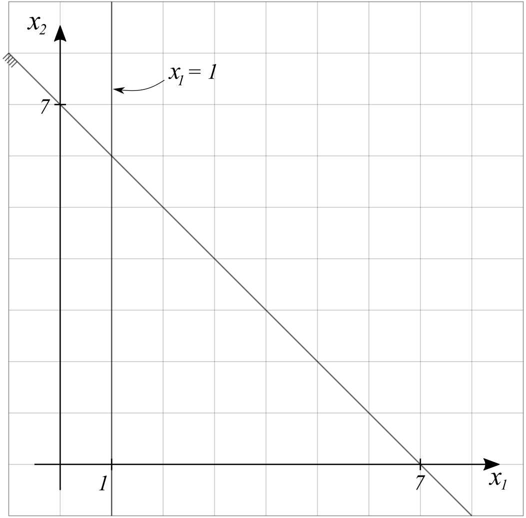


Plotando as restrições

$$x_1 \geq 1$$

$$\Downarrow$$

$$x_1 = 1$$

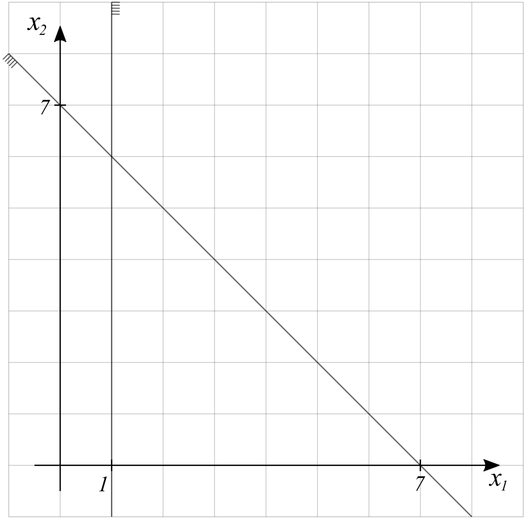


Plotando as restrições

$$x_1 \geq 1$$

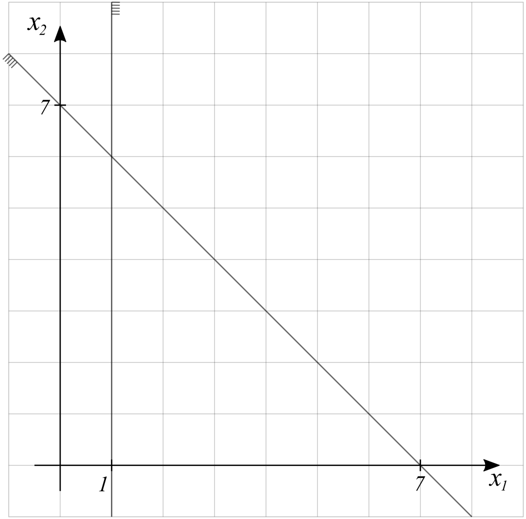
$$\Downarrow$$

$$x_1 = 1$$



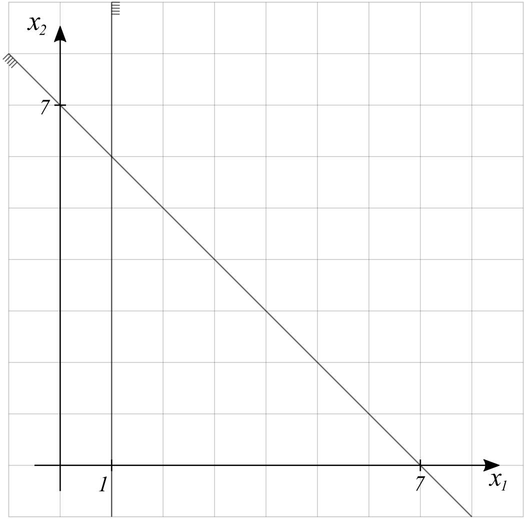
Plotando as restrições

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\
& x_1 \geq 1 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Plotando as restrições

$$x_2 \geq 2$$

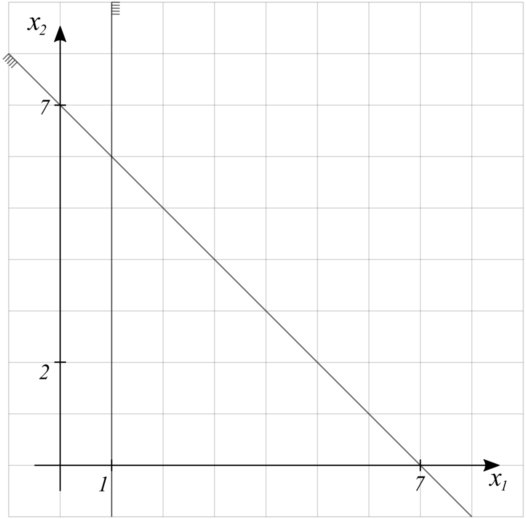


Plotando as restrições

$$x_2 \geq 2$$

$$\Downarrow$$

$$x_2 = 2$$



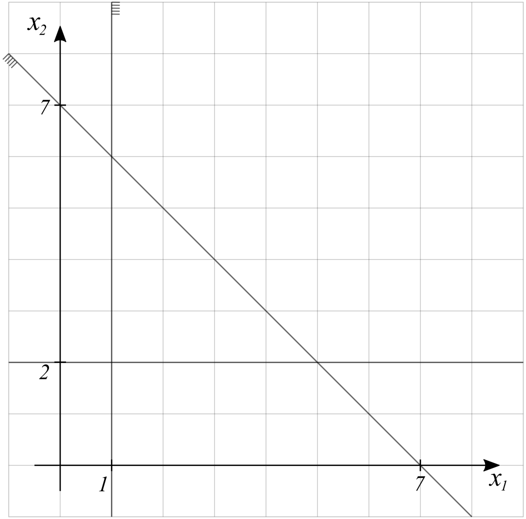
Método Gráfico

Plotando as restrições

$$x_2 \geq 2$$

$$\Downarrow$$

$$x_2 = 2$$

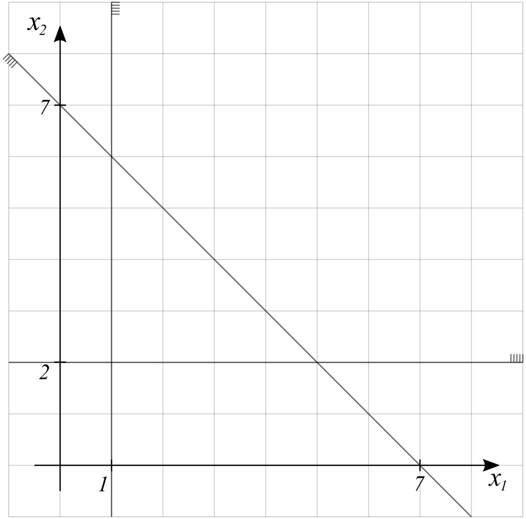


Plotando as restrições

$$x_2 \geq 2$$

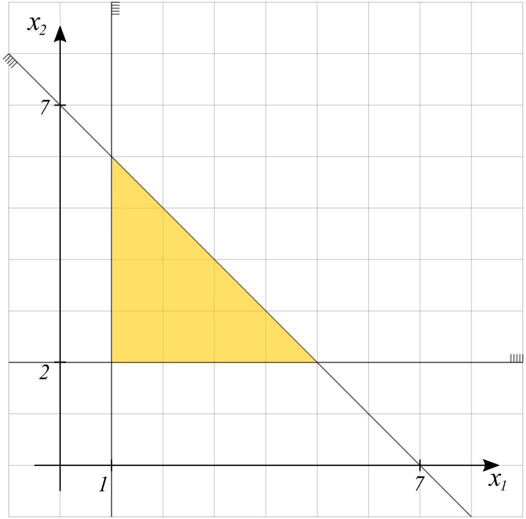
$$\Downarrow$$

$$x_2 = 2$$



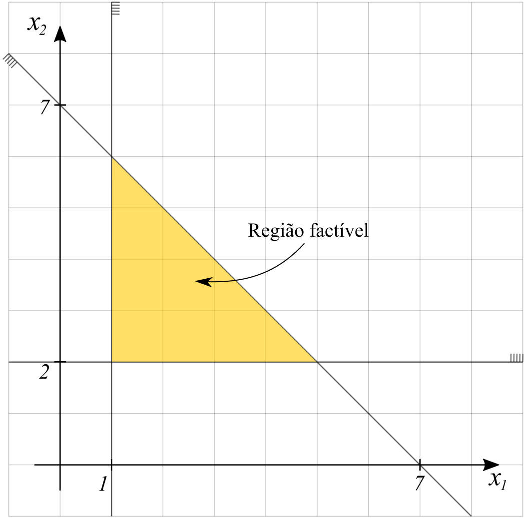
Plotando as restrições

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\
& x_1 \geq 1 \\
& x_2 \geq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



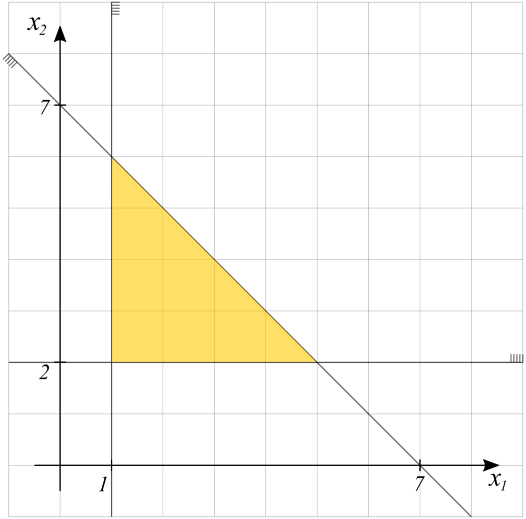
Plotando as restrições

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Plotando o vetor gradiente

$$\max \quad 5x_1 + 3x_2$$

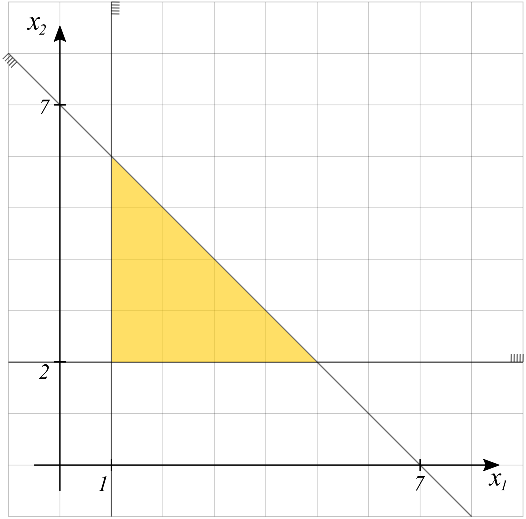


Plotando o vetor gradiente

$$\max \quad 5x_1 + 3x_2$$

$$\Downarrow$$

$$f(x_1, x_2) = 5x_1 + 3x_2$$



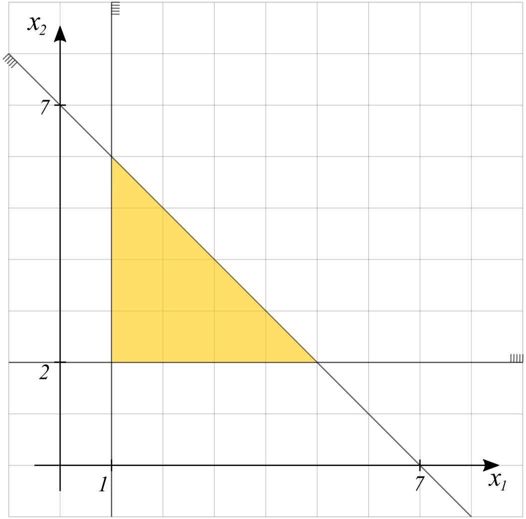
Plotando o vetor gradiente

$$\max \quad 5x_1 + 3x_2$$

$$\Downarrow$$

$$f(x_1, x_2) = 5x_1 + 3x_2$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$$



Plotando o vetor gradiente

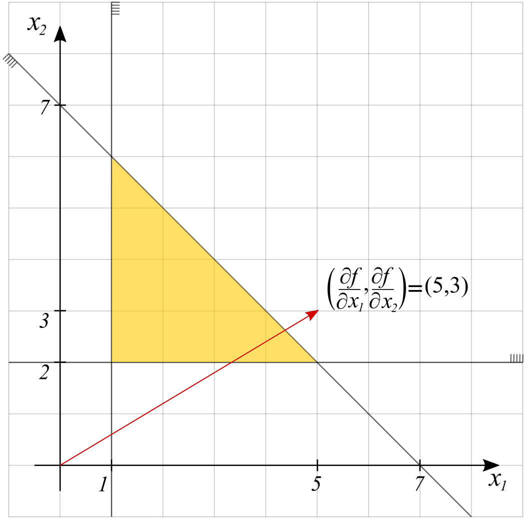
$$\max \quad 5x_1 + 3x_2$$

$$\Downarrow$$

$$f(x_1, x_2) = 5x_1 + 3x_2$$

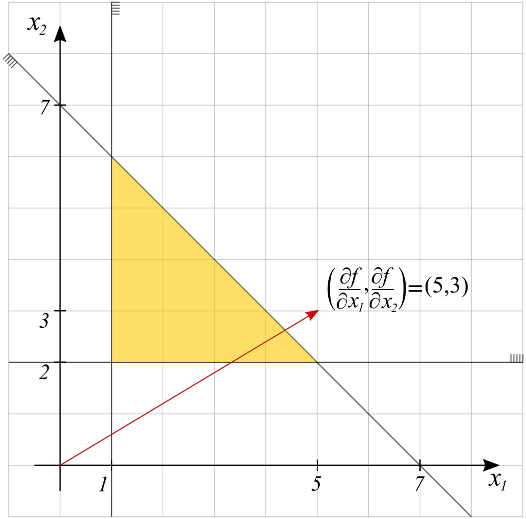
$$\nabla f(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = (5,\ 3)$$



Plotando as curvas de nível

$$\max \quad 5x_1 + 3x_2$$



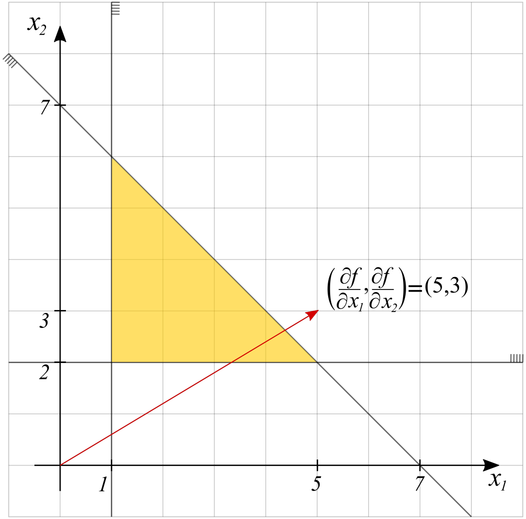
Método Gráfico

Plotando as curvas de nível

$$\max \quad 5x_1 + 3x_2$$

$$\Downarrow$$

$$f(x_1, x_2) = 5x_1 + 3x_2$$



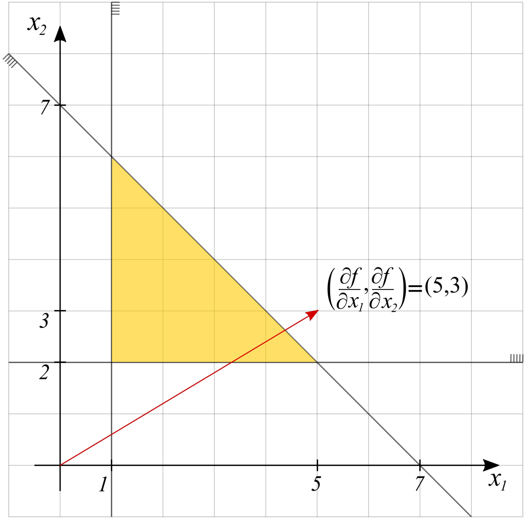
Plotando as curvas de nível

$$\max \quad 5x_1 + 3x_2$$

$$\Downarrow$$

$$f(x_1, x_2) = 5x_1 + 3x_2$$

$$f(x_1, x_2) = l, \quad l \in \mathbb{R}$$



Plotando as curvas de nível

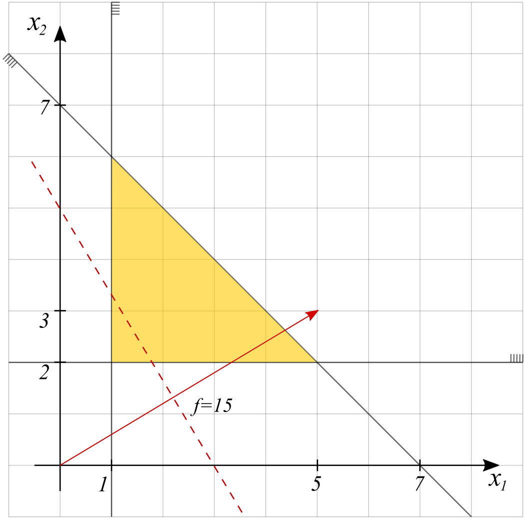
$$\max \quad 5x_1 + 3x_2$$

$$\Downarrow$$

$$f(x_1, x_2) = 5x_1 + 3x_2$$

$$f(x_1, x_2) = l, \quad l \in \mathbb{R}$$

$$f(x_1, x_2) = 15$$



Plotando as curvas de nível

$$\max \quad 5x_1 + 3x_2$$

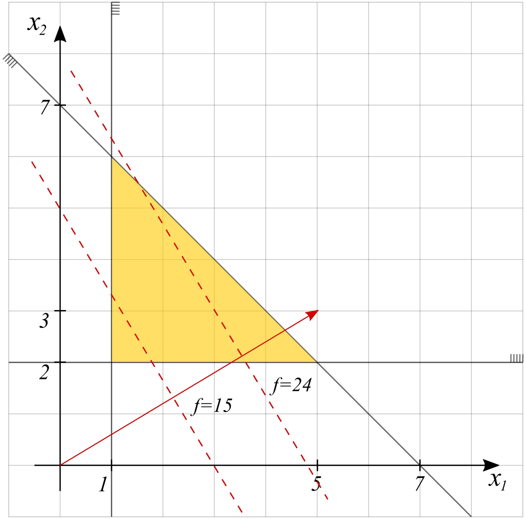
$$\Downarrow$$

$$f(x_1, x_2) = 5x_1 + 3x_2$$

$$f(x_1, x_2) = l, \quad l \in \mathbb{R}$$

$$f(x_1, x_2) = 15$$

$$f(x_1, x_2) = 24$$



Plotando as curvas de nível

$$\max \quad 5x_1 + 3x_2$$

$$\Downarrow$$

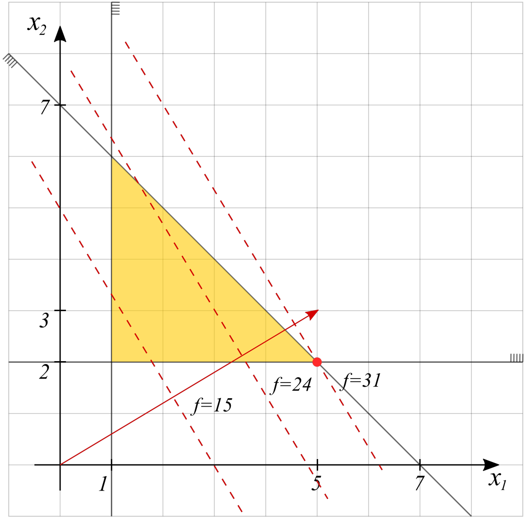
$$f(x_1, x_2) = 5x_1 + 3x_2$$

$$f(x_1, x_2) = l, \quad l \in \mathbb{R}$$

$$f(x_1, x_2) = 15$$

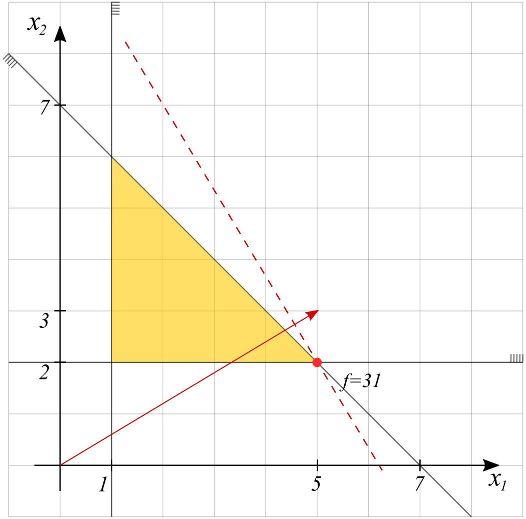
$$f(x_1, x_2) = 24$$

$$f(x_1, x_2) = 31$$



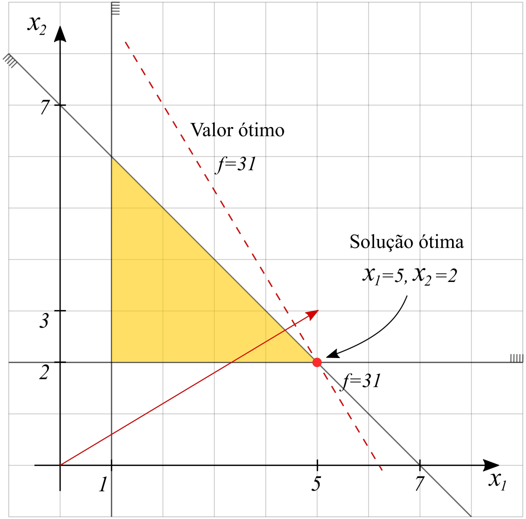
Solução ótima

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Solução ótima

$$
\begin{array}{ll}
\text{max} & 5x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 7 \\
 & x_1 \geq 1 \\
 & x_2 \geq 2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$



Assim o método gráfico nos dá

Assim o método gráfico nos dá

Solução ótima: $x_1 = 5$ e $x_2 = 2$

Assim o método gráfico nos dá

Solução ótima: $x_1 = 5$ e $x_2 = 2$

Valor ótimo: 31

Método Gráfico

Assim o método gráfico nos dá

Solução ótima: $x_1 = 5$ e $x_2 = 2$

Valor ótimo: 31

Exercício.

Resolva pelo método gráfico o exercício das ligas metálicas.

Solução

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3 \\ & 0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1 \\ & 0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Solução

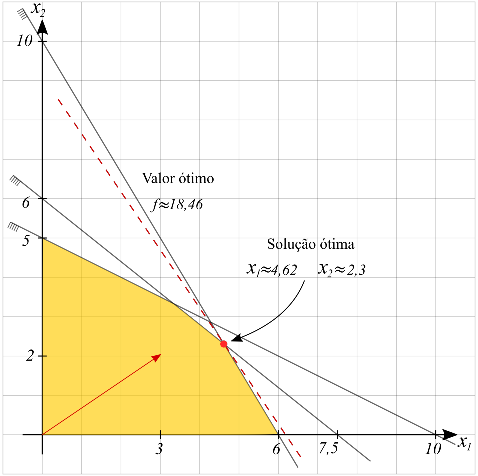
$$\max \quad 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad 0,5x_1 + 0,3x_2 \leq 3$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 1$$

$$0,4x_1 + 0,5x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Observe que a solução é determinada pela intersecção das retas suporte das restrições 1 e 3. Assim devem satisfazer o sistema linear

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,3x_2 = 3 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 = 3 \end{cases}$$

Observe que a solução é determinada pela intersecção das retas suporte das restrições 1 e 3. Assim devem satisfazer o sistema linear

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,3x_2 = 3 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

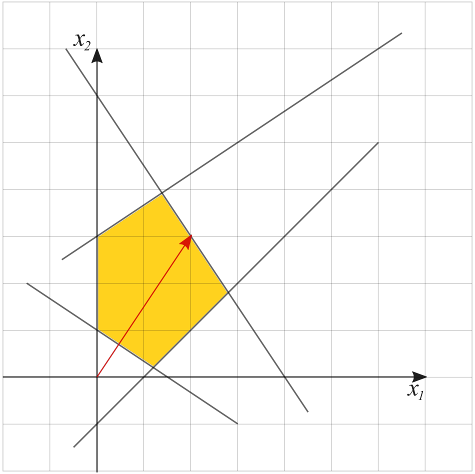
$$x_1 \approx 4,62 \qquad x_2 \approx 2,3$$

Casos particulares

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 - x_2 \leq 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\
& -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

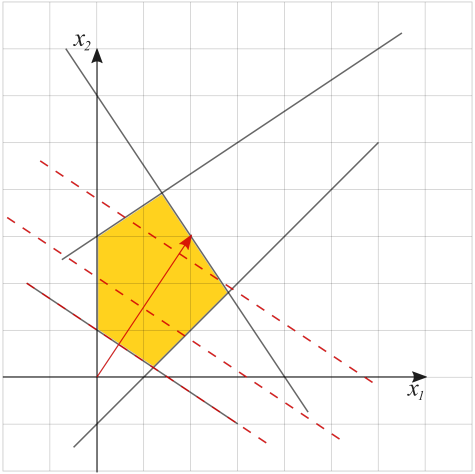
Casos particulares

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ & -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



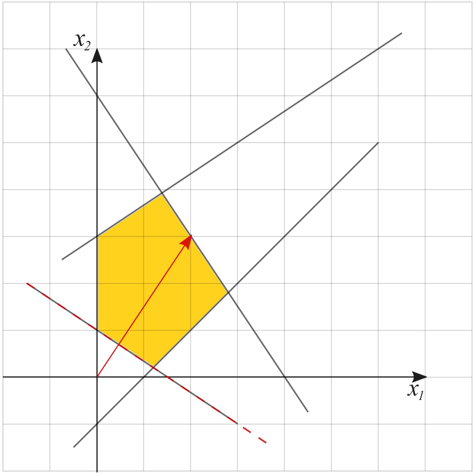
Casos particulares

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 - x_2 \leq 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\
& -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



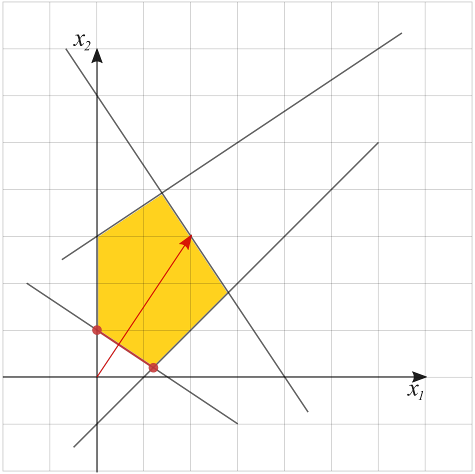
Casos particulares

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 - x_2 \leq 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\
& -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



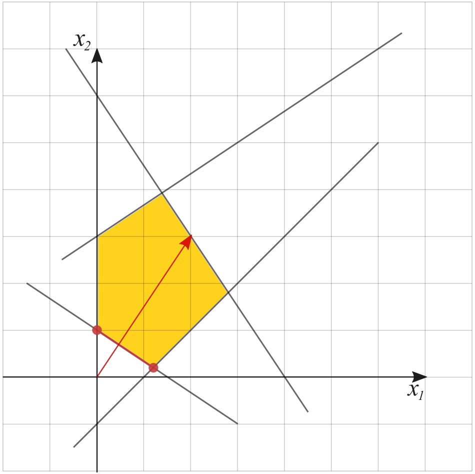
Casos particulares

$$
\begin{array}{rl}
\text{min} & 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} & x_1 - x_2 \leq 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\
& -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$



Casos particulares

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.a} \quad & x_1 - x_2 \leq 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\
& -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Múltiplas soluções ótimas

Casos particulares

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 2x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & -x_1 + x_2 \leq 3 \\
& 2x_1 - 3x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

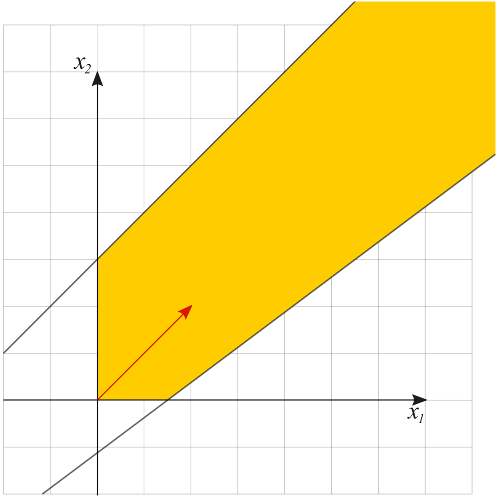
Casos particulares

$$\max \quad 2x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad -x_1 + x_2 \leq 3$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



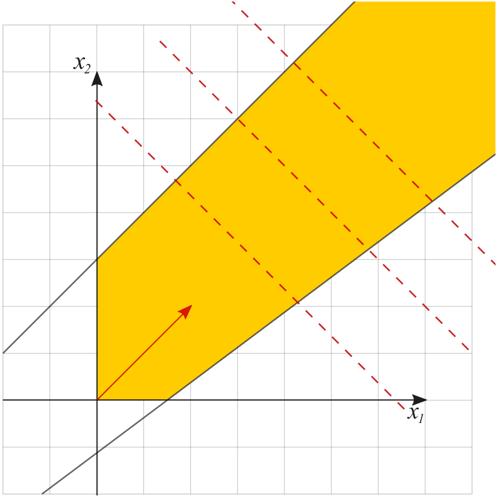
Casos particulares

$$\max \quad 2x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad -x_1 + x_2 \leq 3$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Casos particulares

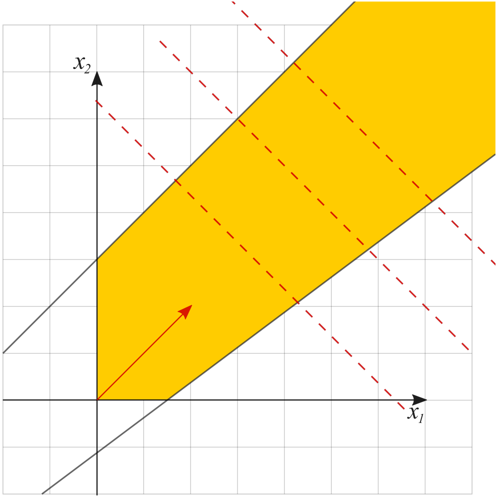
$$\max \quad 2x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.a} \quad -x_1 + x_2 \leq 3$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Problema ilimitado

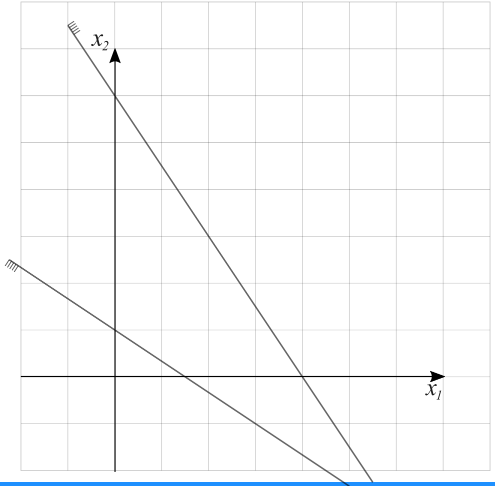


Casos particulares

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 2x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\
& 2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Casos particulares

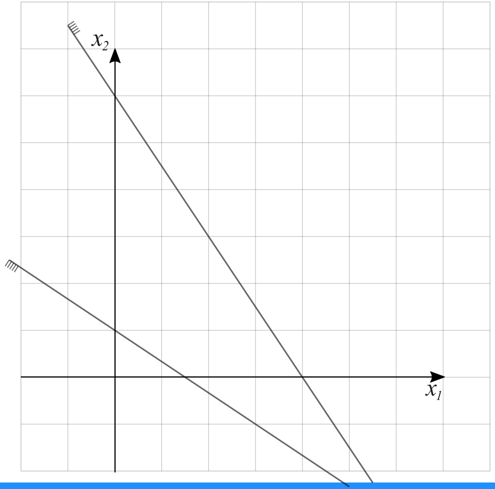
$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 2x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\
& 2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



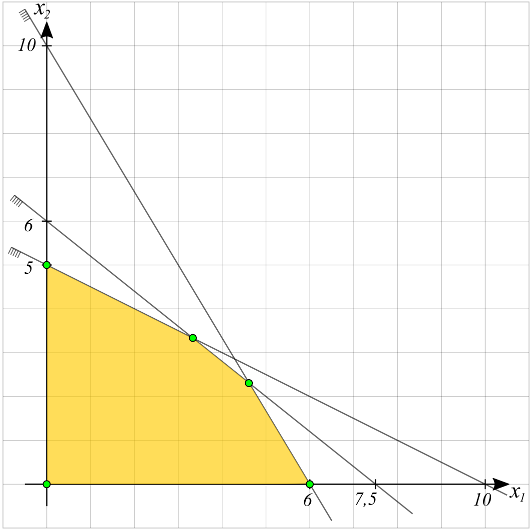
Casos particulares

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 2x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\
& 2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Problema infactível

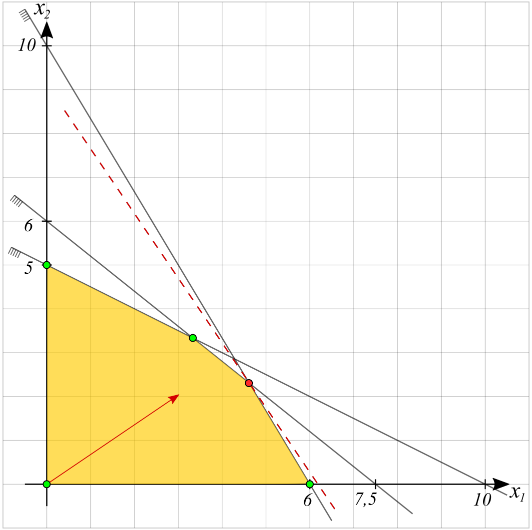


- Um ponto extremo é todo ponto na fronteira da região factível que é determinado pela intersecção de pelo menos duas retas.



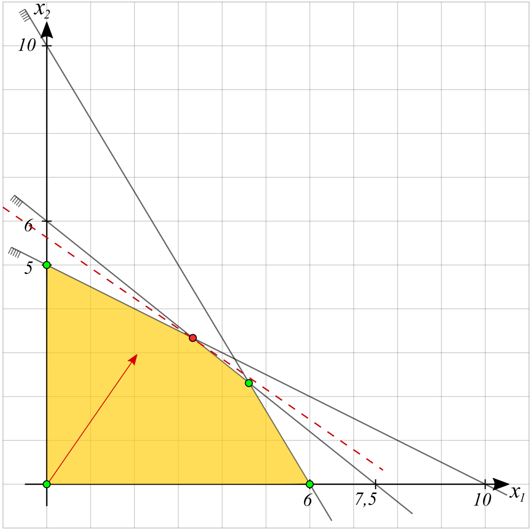
Pontos Extremos

- A toda solução ótima está associado um ponto extremo.

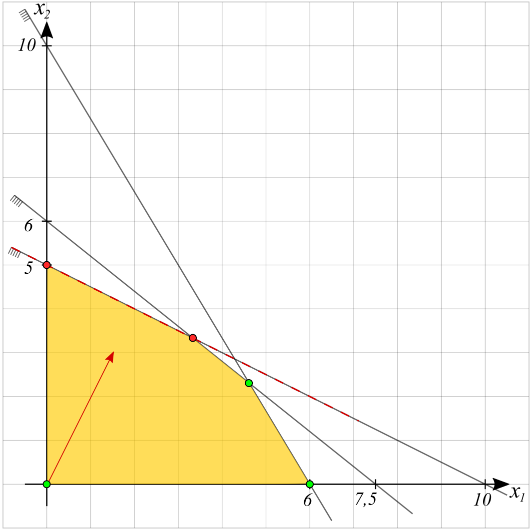


Pontos Extremos

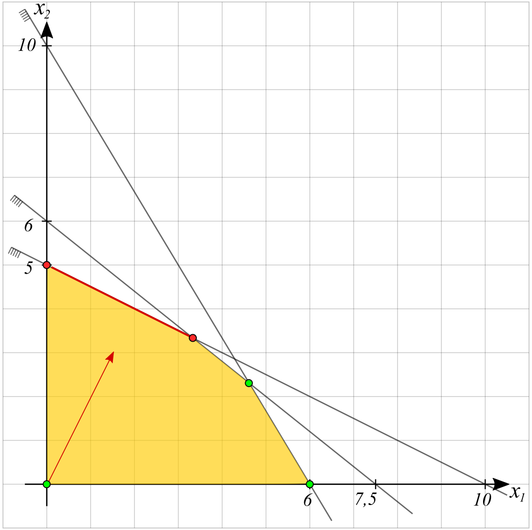
- A toda solução ótima está associado um ponto extremo.



- A toda solução ótima está associado um ponto extremo.

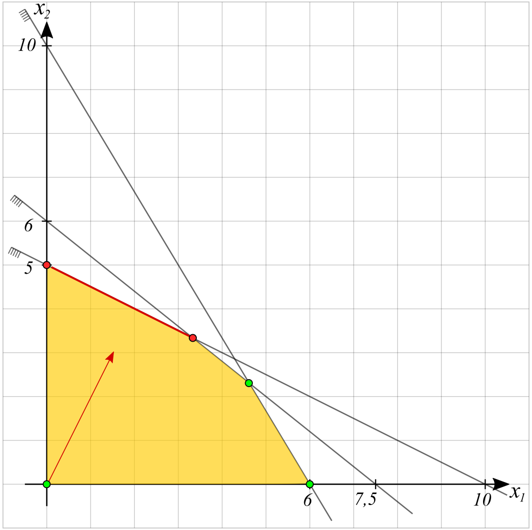


- A toda solução ótima está associado um ponto extremo.
- Se existe solução ótima, então existe um ponto extremo.



Pontos Extremos

- A toda solução ótima está associado um ponto extremo.
- Se existe solução ótima, então existe um ponto extremo.
- Isso motiva o desenvolvimento do método simplex.



Exercício

Resolva o execício 1 da segunda lista de exercícios.