INSTITUTO TECNOLÓGICO DA AERONÁUTICA
AE-245 Elementos Finitos
Prof. Flávio Luiz de Silva Bussamra
**Solução da Lista 3**

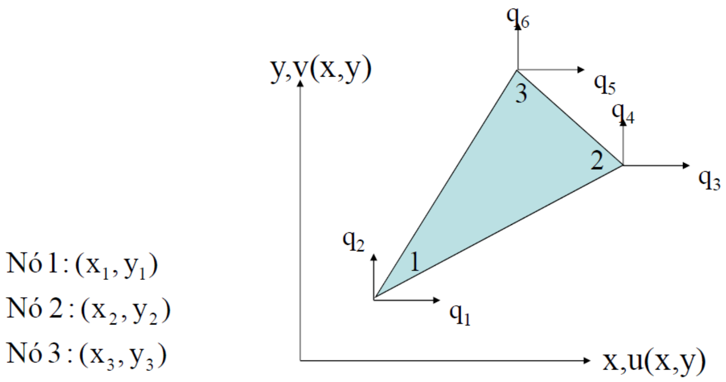
Nome: **Leonardo Barros da Luz**, **Renan Miranda Portela** e **Higor Rodrigues Paixão** Data: 29 de julho de 2021

---

**Questão 1.** Obter explicitamente a matriz de rigidez de um elemento CST, sujeito a um estado plano de tensão.

**Resposta**:

Figura 1: Ilustração de um elemento CST.




Utilizando as funções de forma para o elemento descrito na figura 1

$$f_1 = \frac{1}{|\mathbf{J}|}\left[-x(-y_2+y_3)+x_2y_3-x_3y_2+y(-x_2+x_3)\right],$$
$$f_2 = \frac{1}{|\mathbf{J}|}\left[-x(-y_3+y_1)+x_3y_1-x_1y_3+y(-x_3+x_1)\right], \text{ e}$$
$$f_3 = \frac{1}{|\mathbf{J}|}\left[-x(-y_1+y_2)+x_1y_2-x_2y_1+y(-x_1+x_2)\right]$$

onde

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

e

$$A = \frac{|\mathbf{J}|}{2} = \frac{x_1\,y_2}{2} - \frac{x_2\,y_1}{2} - \frac{x_1\,y_3}{2} + \frac{x_3\,y_1}{2} + \frac{x_2\,y_3}{2} - \frac{x_3\,y_2}{2}$$

pode-se calcular a matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial f_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial f_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial f_3}{\partial y} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial x} \end{bmatrix}$$

resultando em

$$
\mathbf{B} = \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} y_2-y_3 & 0 & y_3-y_1 & 0 & y_1-y_2 & 0 \\ 0 & x_3-x_2 & 0 & x_1-x_3 & 0 & x_2-x_1 \\ x_3-x_2 & y_2-y_3 & x_1-x_3 & y_3-y_1 & x_2-x_1 & y_1-y_2 \end{bmatrix}.
$$

Utilizando a matriz que relaciona tensões com deformações para um estado plano de tensão

$$
\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}
$$

calcula-se a matriz de rigidez do elemento através de

$$
\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\, dV = \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}At, \tag{1}
$$

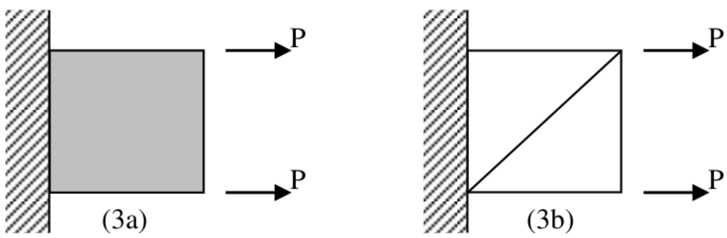
logo

$$
\mathbf{K} = \frac{E}{4A(1-\nu^2)}t \begin{bmatrix} y_2-y_3 & 0 & x_3-x_2 \\ 0 & x_3-x_2 & y_2-y_3 \\ y_3-y_1 & 0 & x_1-x_3 \\ 0 & x_1-x_3 & y_3-y_1 \\ y_1-y_2 & 0 & x_2-x_1 \\ 0 & x_2-x_1 & y_1-y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2-y_3 & 0 & y_3-y_1 & 0 & y_1-y_2 & 0 \\ 0 & x_3-x_2 & 0 & x_1-x_3 & 0 & x_2-x_1 \\ x_3-x_2 & y_2-y_3 & x_1-x_3 & y_3-y_1 & x_2-x_1 & y_1-y_2 \end{bmatrix}
$$

onde $t$ é a espessura da placa.

**Observação:** A matriz $\mathbf{K}$ resultante possui muitos termos longos na matriz, impossibilitando a inserção dela no relatório. Assim sendo, fica seu resultado implicitamente relacionado com as demais matrizes e variáveis inseridas na equação.

**Questão 2.** Seja uma chapa quadrada (Fig. 3a), com os seguintes valores adimensionais: lado $\bar{L} = 1$, $\bar{E} = 1$, $\nu = 0,3$, espessura $\bar{t} = 1$, fixa em uma extremidade, sujeita a duas cargas concentradas $\bar{P} = 1$ (material elástico linear, pequenos deslocamentos e deformações).




(3a) PROBLEMA REAL

(3b) Malha de 2 elementos

a) Utilizando dois elementos CST, conforme figura 3b, obtenha os deslocamentos nos pontos de aplicação das cargas, e as tensões ao longo da chapa;

**Resposta**: Na figura 2 encontra-se uma ilustração dos elementos utilizados e de seus respectivos nós e coordenadas.

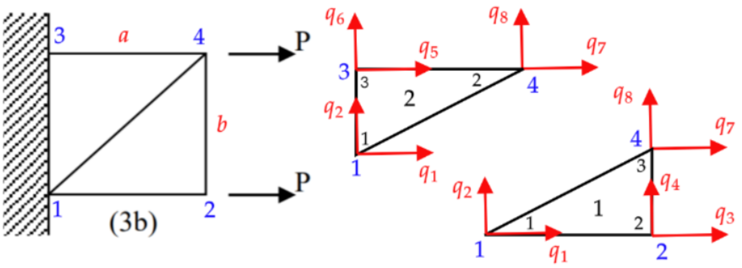



Figura 2: Ilustração dos elementos adotados para o problema.

Utilizando a ilustração como base, encontra-se a matriz de rigidez local, com a equação 1, de cada elemento

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} \frac{50}{91} & 0 & -\frac{50}{91} & \frac{15}{91} & 0 & -\frac{15}{91} \\ 0 & \frac{5}{26} & \frac{5}{26} & -\frac{5}{26} & -\frac{5}{26} & 0 \\ -\frac{50}{91} & \frac{5}{26} & \frac{135}{182} & -\frac{5}{14} & -\frac{5}{26} & \frac{15}{91} \\ \frac{15}{91} & -\frac{5}{26} & -\frac{5}{14} & \frac{135}{182} & \frac{5}{26} & -\frac{50}{91} \\ 0 & -\frac{5}{26} & -\frac{5}{26} & \frac{5}{26} & \frac{5}{26} & 0 \\ -\frac{15}{91} & 0 & \frac{15}{91} & -\frac{50}{91} & 0 & \frac{50}{91} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{26} & 0 & 0 & -\frac{5}{26} & -\frac{5}{26} & \frac{5}{26} \\ 0 & \frac{50}{91} & -\frac{15}{91} & 0 & \frac{15}{91} & -\frac{50}{91} \\ 0 & -\frac{15}{91} & \frac{50}{91} & 0 & -\frac{50}{91} & \frac{15}{91} \\ -\frac{5}{26} & 0 & 0 & \frac{5}{26} & \frac{5}{26} & -\frac{5}{26} \\ -\frac{5}{26} & \frac{15}{91} & -\frac{50}{91} & \frac{5}{26} & \frac{135}{182} & -\frac{5}{14} \\ \frac{5}{26} & -\frac{50}{91} & \frac{15}{91} & -\frac{5}{26} & -\frac{5}{14} & \frac{135}{182} \end{bmatrix},$$

a quais dão origem a matriz de rigidez global

$$\mathbf{K}_{\text{global}} = \begin{bmatrix} \frac{135}{182} & 0 & -\frac{50}{91} & \frac{15}{91} & -\frac{5}{26} & \frac{5}{26} & 0 & -\frac{5}{14} \\ 0 & \frac{135}{182} & \frac{5}{26} & -\frac{5}{26} & \frac{15}{91} & -\frac{50}{91} & -\frac{5}{14} & 0 \\ -\frac{50}{91} & \frac{5}{26} & \frac{135}{182} & -\frac{5}{14} & 0 & 0 & -\frac{5}{26} & \frac{15}{91} \\ \frac{15}{91} & -\frac{5}{26} & -\frac{5}{14} & \frac{135}{182} & 0 & 0 & \frac{5}{26} & -\frac{50}{91} \\ -\frac{5}{26} & \frac{15}{91} & 0 & 0 & \frac{135}{182} & -\frac{5}{14} & -\frac{50}{91} & \frac{5}{26} \\ \frac{5}{26} & -\frac{50}{91} & 0 & 0 & -\frac{5}{14} & \frac{135}{182} & \frac{15}{91} & -\frac{5}{26} \\ 0 & -\frac{5}{14} & -\frac{5}{26} & \frac{5}{26} & -\frac{50}{91} & \frac{15}{91} & \frac{135}{182} & 0 \\ -\frac{5}{14} & 0 & \frac{15}{91} & -\frac{50}{91} & \frac{5}{26} & -\frac{5}{26} & 0 & \frac{135}{182} \end{bmatrix}.$$

Aplicando as condições de contorno $q_1 = q_2 = q_5 = q_6 = 0$ obtém-se a matriz de rigidez reduzida para os graus de liberdade $q_3$, $q_4$, $q_7$ e $q_8$

$$\mathbf{K}_{\text{red}} = \mathbf{K}_{\text{global}}([3,4,7,8],[3,4,7,8]) = \begin{bmatrix} \frac{135}{182} & -\frac{5}{14} & -\frac{5}{26} & \frac{15}{91} \\ -\frac{5}{14} & \frac{135}{182} & \frac{5}{26} & -\frac{50}{91} \\ -\frac{5}{26} & \frac{5}{26} & \frac{135}{182} & 0 \\ \frac{15}{91} & -\frac{50}{91} & 0 & \frac{135}{182} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{F}_{\text{red}} = \mathbf{F}_{\text{global}}([3,4,7,8]) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema encontra-se os vetor de deslocamentos para esses nós

$$\mathbf{u}_{\text{red}} = \mathbf{K}_{\text{red}}^{-1}\mathbf{F}_{\text{red}} = \begin{bmatrix} 2,0391 \\ 0,4154 \\ 1,7691 \\ -0,1454 \end{bmatrix}.$$

Para obter as tensões em cada elementos basta calcular o produto das matrizes $\mathbf{D}$ e $\mathbf{B}$ locais para cada elementos e multiplicar pelos seus respectivos deslocamentos locais. Para o elementos 1 encontra-se

$$\mathbf{D}_1\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{100}{91} & 0 & \frac{100}{91} & -\frac{30}{91} & 0 & \frac{30}{91} \\ -\frac{30}{91} & 0 & \frac{30}{91} & -\frac{100}{91} & 0 & \frac{100}{91} \\ 0 & -\frac{5}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{5}{13} & \frac{5}{13} & 0 \end{bmatrix}$$

resultando em

$$\sigma_1 = \mathbf{D}_1\mathbf{B}_1\mathbf{u}([1,2,3,4,7,8]) = \begin{bmatrix} 2,0559 \\ 0,0559 \\ 0,0559 \end{bmatrix}.$$

E para o elementos 2 encontra-se

$$\mathbf{D}_2\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{30}{91} & \frac{100}{91} & 0 & -\frac{100}{91} & \frac{30}{91} \\ 0 & -\frac{100}{91} & \frac{30}{91} & 0 & -\frac{30}{91} & \frac{100}{91} \\ -\frac{5}{13} & 0 & 0 & \frac{5}{13} & \frac{5}{13} & -\frac{5}{13} \end{bmatrix}$$

resultando em

$$\sigma_2 = \mathbf{D}_2\mathbf{B}_2\mathbf{u}([1,2,7,8,5,6]) = \begin{bmatrix} 1,9441 \\ 0,5832 \\ -0,0559 \end{bmatrix}.$$

b) Utilizando um *software* de elementos finitos, faça uma análise de convergência para resolver o problema 3a, utilizando elementos triangulares apropriados. Desenhe curvas de convergência para deslocamentos e tensões máximas em função da malha. Informe o software e o elemento utilizado;

**Resposta**: Para a análise de convergência de malha utilizou-se o *software* FEMAP e para discretização da geometria do problema utilizou-se o elemento de placa triangular fornecido pelo *software*.

Para o processo de convergência de malha seguiu-se um padrão de refinamento da geometria, o qual consiste em aplicar um mesmo controle de malha em cada aresta da geometria, aplicando as mesmas divisões ao longo delas.

Assim sendo, uma malha dita N x N consiste em uma malha com controle de refinamento de N divisões ao longo de suas arestas.

Na figura 3 encontra-se os gráficos dos erros relativos para a deformação e tensão máxima entre a malha atual e a anterior. Analisando os gráficos pode-se concluir que o critério de convergência por tensão máxima é mais conservador que por deformação máxima, uma vez que o erro relativo da deformação encontra valores menores para uma mesma malha.

Figura 3: Erros relativos entre as malhas.

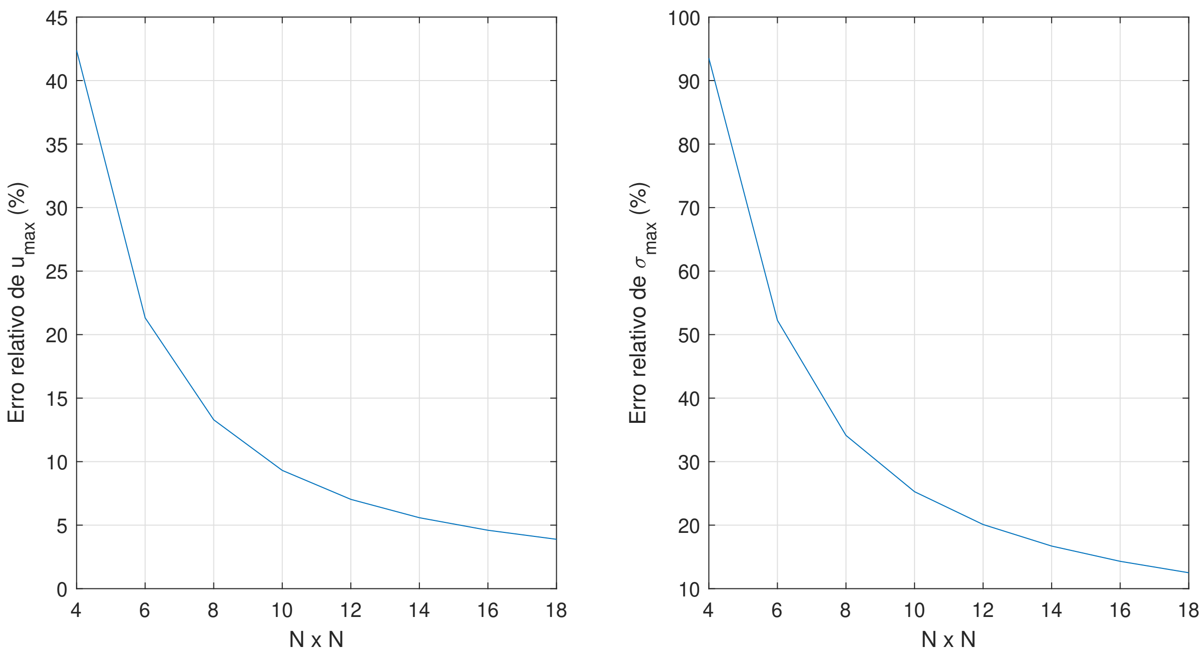
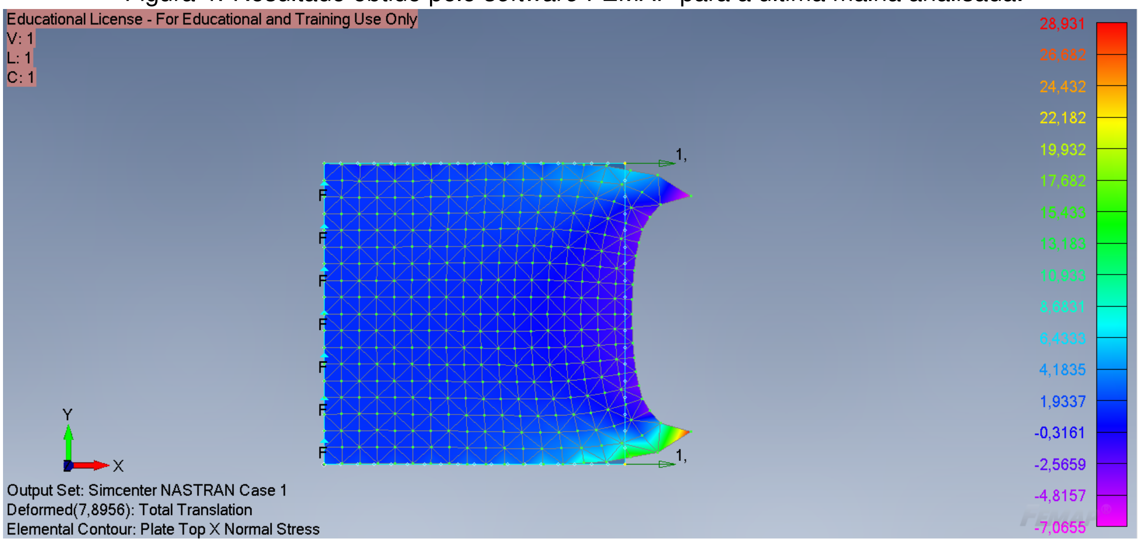


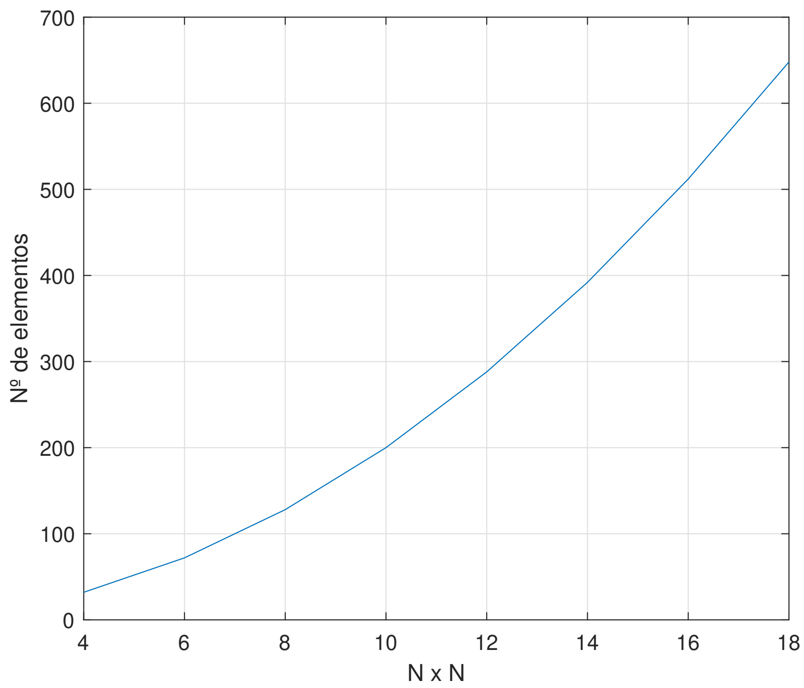

Figura 4: Resultado obtido pelo *software* FEMAP para a última malha analisada.



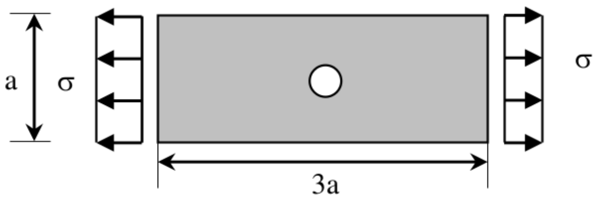

c) Comente a curva de refinamento;

**Resposta**: Para o processo de refinamento da malha optou-se por utilizar apenas os números pares de divisões, ou seja, avaliou-se os resultados para malhas com 2, 4, 6,..., 18 divisões ao longo das arestas. Analisando o gráfico da figura 5 observa-se uma relação quadrática entre o número de divisões nas arestas e o número total de elementos $N_{\text{elementos}} \simeq 2N^2_{\text{divisões}}$.

Figura 5: Número total de elementos para as diferentes malhas.




**Questão 3.** Usando um *software* de elementos finitos, obtenha o fator de concentração de tensões $k_t$ da chapa abaixo. A chapa tem espessura $t$ e comprimento $3a$, com um furo central de diâmetro $\phi = \frac{a}{4}$. Assuma material elástico linear perfeito, pequenos deslocamentos e deformações. Faça análise de convergência. Para simplificar as contas, adote valores adimensionais ($\bar{a} = 1; \bar{E} = 1, \bar{t} = 1; \bar{\sigma} = 1$) e $\nu = 0,3$. Dica: veja na literatura a definição de $k_t$ e qual seu valor exato neste problema.




**Resposta**:
Para uma placa de largura finita, o fator de concentração de tensões $k_t$ pode ser calculado como

$$k_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}}$$

onde $\sigma_{max}$ é a máxima tensão que atua numa dada seção (entalhada) e $\sigma_{nom}$ é a tensão nominal que atuaria se o entalhe não perturbasse o campo de tensões no seu entorno. $\sigma_{nom}$ pode ser definido como

$$\sigma_{nom} = \frac{W}{W-d}\sigma$$

onde $W$ é a largura da placa, $d$ o diâmetro do furo e $\sigma$ a tensão aplicada.
Utilizando o valor de tensão máxima encontrado pela simulação feita no *software* FEMAP (Figura 6) e calculando a tensão nominal para a placa, obtemos o seguinte valor para $k_t$:

$$k_t = 2,39$$

Considerando os valores da Figura 8 para $d/w = 0,25$, obtemos $k_t \approx 2,42$, uma diferença de 1,24% em relação ao valor calculado a partir da simulação.

Figura 6: Resultado do problema obtido através do *software* FEMAP.

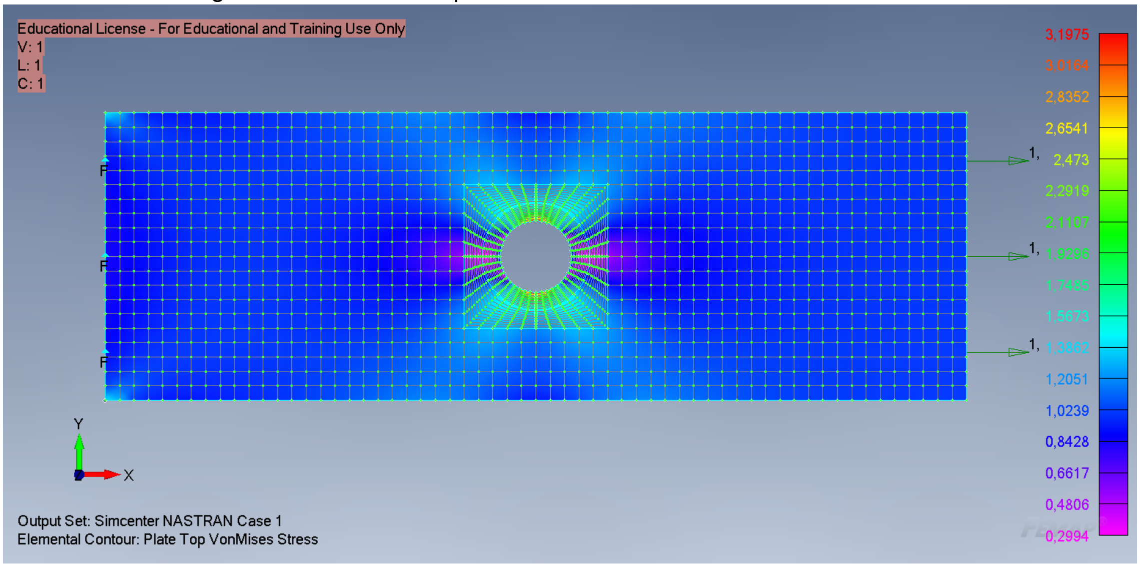



Figura 7: Resultado do problema obtido através do *software* FEMAP.

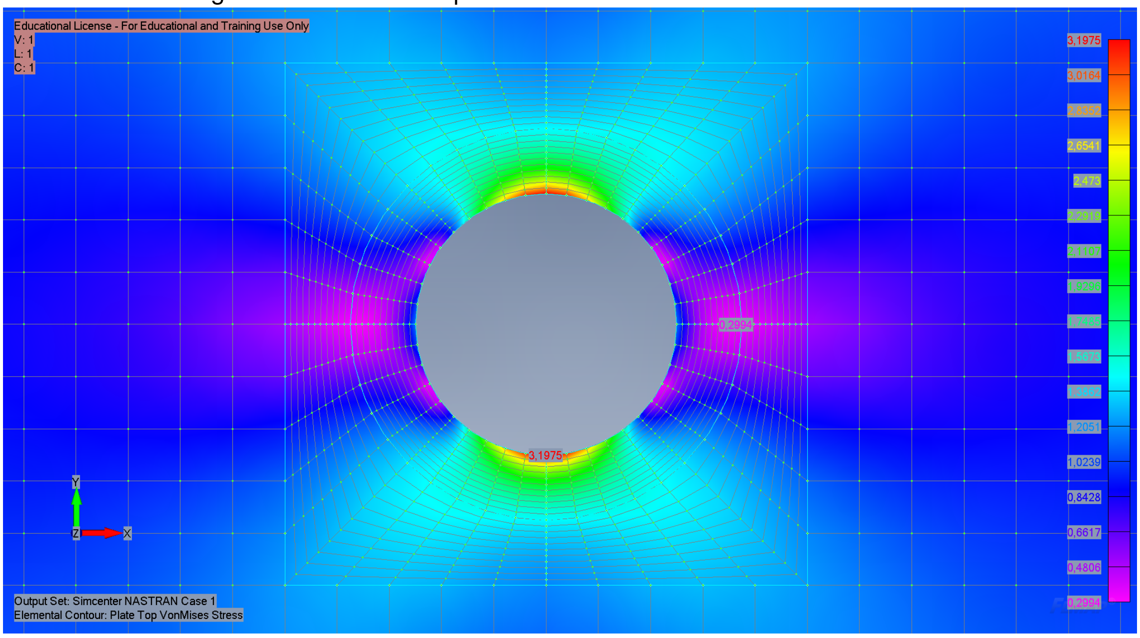
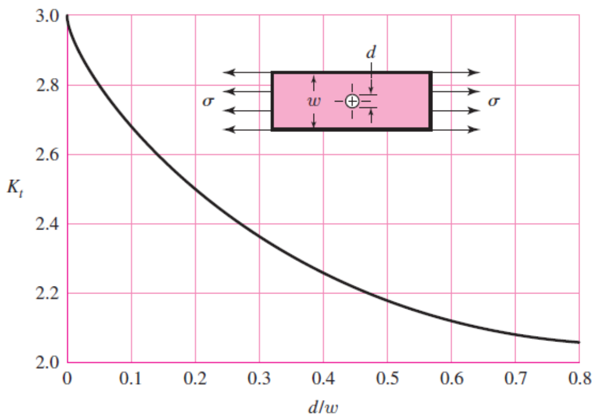



Figura 8: Ábaco para Análise de Concentradores de Tensão.

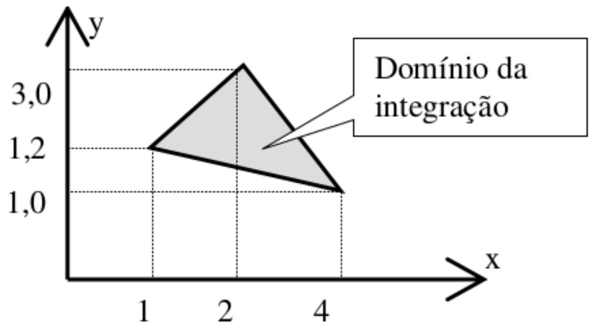



**Questão 4.** Obter a aproximação das integrais abaixo, com 4 pontos de quadratura de Gauss e, se possível, comparar com a solução exata:

a) $\int_{1,0}^{1,5} x^2 ln(x)dx$;

b) $\iiint \frac{x^2y^2}{z} dx\, dy\, dz$, no paralelepípedo dado por: $1,0 \leq x \leq 1,2; 1,0 \leq y \leq 1,3; 1,0 \leq z \leq 1,4$;

c) $\iint \frac{sen(xy)}{\sqrt{3x+2y}} dxdy$, no triângulo abaixo;




**Resposta**:

a) Observou-se que a solução por quadratura de Gauss forneceu o mesmo resultado que a solução exata.

- Solução por quadratura de Gauss:

$$\int_{1,0}^{1,5} x^2 ln(x)dx = \sum_{i=1}^{4} \xi^2 ln(\xi) w_i |J|, \quad \xi = \frac{1,5-1,0}{2} x_i + \frac{1,5+1,0}{2}, \quad |J| = \frac{1,5-1,0}{2},$$

$$\begin{aligned}
\int_{1,0}^{1,5} x^2 ln(x)dx = & \left(\frac{1,5-1,0}{2}(-0,86) + \frac{1,5+1,0}{2}\right)^2 ln\left(\frac{1,5-1,0}{2}(-0,86) + \frac{1,5+1,0}{2}\right)(0,35)|J| \\
& + \left(\frac{1,5-1,0}{2}(-0,34) + \frac{1,5+1,0}{2}\right)^2 ln\left(\frac{1,5-1,0}{2}(-0,34) + \frac{1,5+1,0}{2}\right)(0,65)|J| \\
& + \left(\frac{1,5-1,0}{2}(0,34) + \frac{1,5+1,0}{2}\right)^2 ln\left(\frac{1,5-1,0}{2}(0,34) + \frac{1,5+1,0}{2}\right)(0,65)|J| \\
& + \left(\frac{1,5-1,0}{2}(0,86) + \frac{1,5+1,0}{2}\right)^2 ln\left(\frac{1,5-1,0}{2}(0,86) + \frac{1,5+1,0}{2}\right)(0,35)|J| \\
& = 0,1923
\end{aligned}$$

- Solução exata:

$$\int_{1,0}^{1,5} x^2 ln(x)dx = \left[\frac{x^3\left(\ln(x) - \frac{1}{3}\right)}{3}\right]_{1,0}^{1,5} = \frac{9\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{8} - \frac{3}{8} + \frac{1}{9} = 0,1923$$

b) Observou-se que a solução por quadratura de Gauss forneceu o mesmo resultado que a solução exata.

- Solução por quadratura de Gauss:

$$\iiint \frac{x^2y^2}{z} dx\, dy\, dz = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} \mathscr{F}(X,Y,Z)|J| w_i w_j w_k = 0,0326$$

$$N = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} (1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\ (1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \\ (1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \\ (1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\ (1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ (1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \\ (1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \\ (1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \end{bmatrix}, B = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} +(1-\eta)(1-\zeta) & -(1+\xi)(1-\zeta) & -(1+\xi)(1-\eta) \\ +(1+\eta)(1-\zeta) & +(1+\xi)(1-\zeta) & -(1+\xi)(1+\eta) \\ -(1+\eta)(1-\zeta) & +(1-\xi)(1-\zeta) & -(1-\xi)(1+\eta) \\ -(1-\eta)(1-\zeta) & -(1-\xi)(1-\zeta) & -(1-\xi)(1-\eta) \\ +(1-\eta)(1+\zeta) & -(1+\xi)(1+\zeta) & +(1+\xi)(1-\eta) \\ +(1+\eta)(1+\zeta) & +(1+\xi)(1+\zeta) & +(1+\xi)(1+\eta) \\ -(1+\eta)(1+\zeta) & +(1-\xi)(1+\zeta) & +(1-\xi)(1+\eta) \\ -(1-\eta)(1+\zeta) & -(1-\xi)(1+\zeta) & +(1-\xi)(1-\eta) \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1,20 & 1,00 & 1,00 \\ 1,20 & 1,30 & 1,00 \\ 1,00 & 1,30 & 1,00 \\ 1,00 & 1,00 & 1,00 \\ 1,20 & 1,00 & 1,40 \\ 1,20 & 1,30 & 1,40 \\ 1,00 & 1,30 & 1,40 \\ 1,00 & 1,00 & 1,40 \end{bmatrix}, J = B^T M$$

$$X = N^T \begin{bmatrix} 1,20 \\ 1,20 \\ 1,00 \\ 1,00 \\ 1,20 \\ 1,20 \\ 1,00 \\ 1,00 \end{bmatrix}, \quad Y = N^T \begin{bmatrix} 1,00 \\ 1,30 \\ 1,30 \\ 1,00 \\ 1,00 \\ 1,30 \\ 1,30 \\ 1,00 \end{bmatrix}, \quad Z = N^T \begin{bmatrix} 1,00 \\ 1,00 \\ 1,00 \\ 1,00 \\ 1,40 \\ 1,40 \\ 1,40 \\ 1,40 \end{bmatrix}.$$

– Solução exata:

$$\int_1^{1,4}\int_1^{1,3}\int_1^{1,2} \frac{x^2y^2}{z} dx\, dy\, dz = \int_1^{1,4}\int_1^{1,3} \frac{91\, y^2}{375\, z}\, dy\, dz = \int_1^{1,4} \frac{12103}{125000\, z}\, dz = \frac{12103 \log\left(\frac{7}{5}\right)}{125000} = 0,0326$$

c) – Solução por quadratura de Gauss:

$$\iint \frac{sen(xy)}{\sqrt{3x+2y}} dxdy = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} \mathscr{F}(X,Y,Z)\frac{|J|}{2} w_i w_j$$

$$\begin{aligned}
J &= \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \\
|J| &= 5,6 \\
I &= \Big[ \frac{\sin(4 - 2\frac{1}{3} - 3\frac{1}{3})(1 + 2\frac{1}{3} + 0,2\frac{1}{3})}{\sqrt{3(4 - 2\frac{1}{3} - 3\frac{1}{3}) + 2(1 + 2\frac{1}{3} + 0,2\frac{1}{3})}} \Big( -\frac{27}{48} \Big) \\
&+ \frac{\sin(4 - 2\frac{2}{10} - 3\frac{2}{10})(1 + 2\frac{2}{10} + 0,2\frac{2}{10})}{\sqrt{3(4 - 2\frac{2}{10} - 3\frac{2}{10}) + 2(1 + 2\frac{2}{10} + 0,2\frac{2}{10})}} \Big( \frac{25}{48} \Big) \\
&+ \frac{\sin(4 - 2\frac{6}{10} - 3\frac{2}{10})(1 + 2\frac{6}{10} + 0,2\frac{2}{10})}{\sqrt{3(4 - 2\frac{6}{10} - 3\frac{2}{10}) + 2(1 + 2\frac{6}{10} + 0,2\frac{2}{10})}} \Big( \frac{25}{48} \Big) \\
&+ \frac{\sin(4 - 2\frac{2}{10} - 3\frac{6}{10})(1 + 2\frac{2}{10} + 0,2\frac{6}{10})}{\sqrt{3(4 - 2\frac{2}{10} - 3\frac{6}{10}) + 2(1 + 2\frac{2}{10} + 0,2\frac{6}{10})}} \Big( \frac{25}{48} \Big) \Big] \frac{|J|}{2} = -0,2386
\end{aligned}$$

– Solução exata:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3 \\ L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 3\,L_3 - 2\,L_2 \\ 2\,L_2 + \dfrac{L_3}{5} + 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\iint \frac{sen(xy)}{\sqrt{3x+2y}} dxdy &= \frac{|J|}{2}\int_0^1\int_0^{1-L_3} \frac{\text{sen}\left((4 - 3\,L_3 - 2\,L_2)(2\,L_2 + \frac{L_3}{5} + 1)\right)}{\sqrt{3(4 - 3\,L_3 - 2\,L_2) + 2(2\,L_2 + \frac{L_3}{5} + 1)}} dL_2 dL_3 \\
&= 2,8\int_0^1\int_0^{1-L_3} \left( -\frac{\sin\left((2\,L_2 + 3\,L_3 - 4)\left(2\,L_2 + \frac{L_3}{5} + 1\right)\right)}{\sqrt{14 - \frac{43\,L_3}{5} - 2\,L_2}} \right) \mathrm{d}L_2 \mathrm{d}L_3
\end{aligned}$$

**Observação:** Não foi possível resolver a integral de maneira exata.

**Questão 5.** Dada uma placa quadrada de lado $L = 400\,mm$, espessura $t = 1\,mm$, sujeita a uma carga uniformemente distribuída de $q = 1 \times 10^{-3}\ N/mm^2$ . A placa é de alumínio ($E = 70\,000\,N/mm^2$, $\nu = 0,3$), e está engastada em uma borda e simplesmente apoiada nas outras 3 bordas. Pedem-se:

a) Deslocamento máximo da placa previsto pela Teoria de Kirchhoff (procure na literatura);
b) Com um software comercial, obtenha a curva de convergência para o deslocamento máximo da placa, e determine qual é este deslocamento (convergido). Faça o modelo completo da placa;
c) Com a malha obtida em b) usada para determinar o deslocamento máximo (já convergido), faça um modelo que use a simetria, ou seja, a malha deve considerar apenas metade da placa e utilizar as condições de contorno adequadas;
d) Comparar e comentar os 03 resultados encontrados acima;

**Resposta**:

a) Segundo *Timoshenko* (1940), o deslocamento máximo para o caso estudado é dado pela expressão

$$w_{max} = 0,0028\frac{qL^4}{D},$$

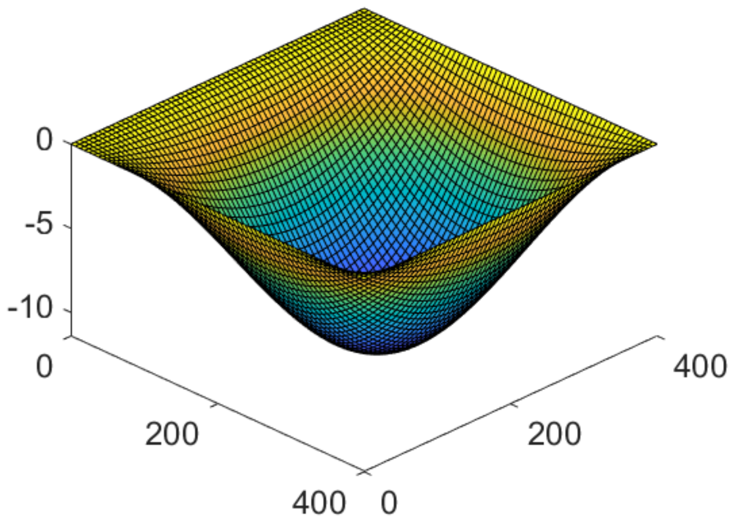
onde $D$ é a rigidez flexural da placa dado por

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{70\,000(1)^3}{12(1-0,30^2)} = 6410,26\,N\cdot mm.$$

Logo, o valor do deslocamento máximo para o caso estudado é

$$w_{max} = 0,0028\frac{(1\times10^{-3})(400)^4}{6410,26} = 11,18\,mm.$$

Figura 9: Placa de *Kirchhhoff* sujeita a um lado engastado e os outros três simplesmente apoiados.




b) No problema proposto, foi utilizado um código em *MATLAB* presente no livro do Ferreira (2009). O código apresenta dois tipos de elemento para a placa de *Kirchhoff*, um elemento não-conforme, que possui 3 graus de liberdade por nó, e um elemento conforme, com 4 graus de liberdade por nó. Ambos elementos foram utilizados para encontrar uma curva de convergência, apresentada na Figura 10. Comparando o código em *MATLAB* com o *software* comercial Abaqus, verificamos na Figura 11 que ambos convergem para a mesma solução.

| Malha | $w_{max}$ $(3\,DOF)$ | $w_{max}$ $(4\,DOF)$ |
|---|---|---|
| $2\times2$ | $15,34$ | $13,81$ |
| $4\times4$ | $12,07$ | $11,49$ |
| $8\times8$ | $11,40$ | $11,22$ |
| $16\times16$ | $11,47$ | $11,42$ |
| $32\times32$ | $11,42$ | $11,41$ |
| $64\times64$ | $11,41$ | $11,41$ |

Figura 10: Curva de convergência para o deslocamento máximo em função do número de graus de liberdade.

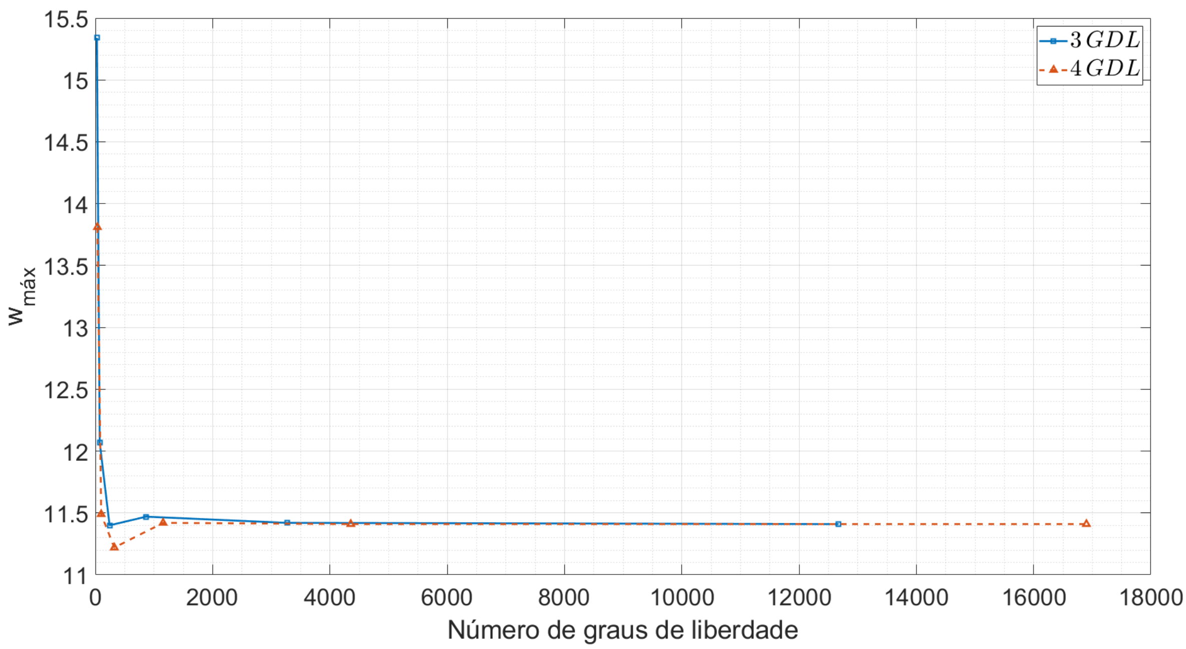
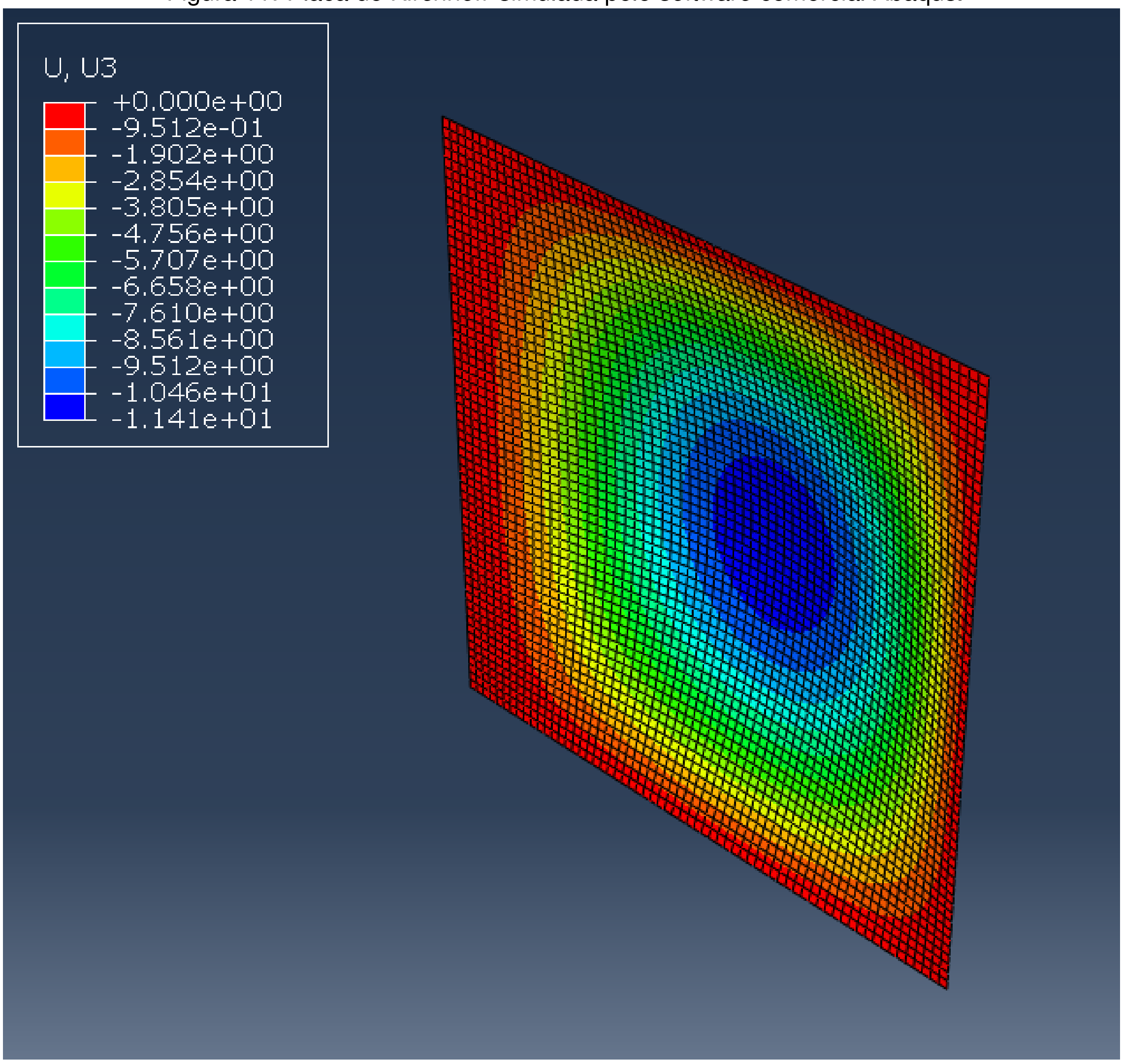


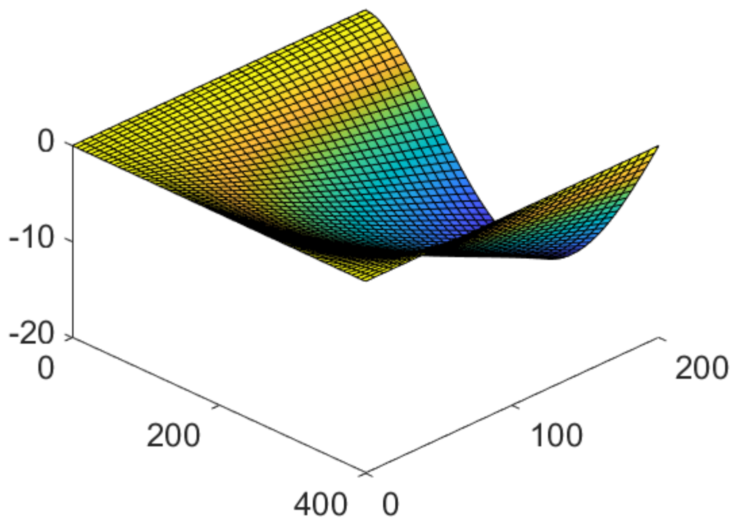

Figura 11: Placa de *Kirchhoff* simulada pelo *software* comercial Abaqus.




c) Impondo engaste em um lado da placa, apoio em outros dois lados e livre no quarto, como ilustrado na Figura 12, encontramos deslocamento máximo

$$w_{max} = 11,41\,mm.$$

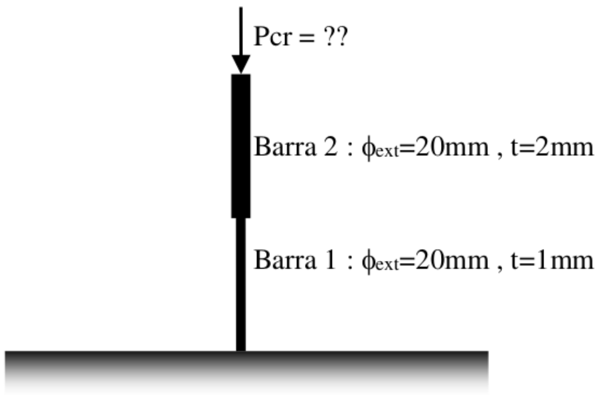
Figura 12: Placa de *Kirchhoff* modelada por simetria.



d) Comparando os três valores, verifica-se que o modelo de *Kirchhoff* faz uma boa aproximação da solução exata. Nota-se também que tanto a geometria completa quanto modelada por simetria indicam o mesmo valor.

**Questão 6.** Obtenha a carga de flambagem e o modo de flambagem da estrutura abaixo, simétrica, formada por 2 barras. As barras são tubos de aço e têm comprimento de $0,5\,m$ cada. Material: $E = 200\,GPa$, $\nu = 0,32$. Resolver:

a) Usando 2 elementos finitos (sem usar um software de MEF), com teoria de viga de Euler-Bernoulli;
b) Usando software comercial de MEF;
c) comparar e comentar eventuais diferenças;




**Resposta**:

a) Utilizando a equação para a inercia de um tubo

$$I_i = \frac{\pi(\phi_{i,\text{ext}}^4 - \phi_{i,\text{int}}^4)}{64}$$

encontra-se

$$I_1 = 2,7010 \cdot 10^{-09}, \quad I_2 = 4,6370 \cdot 10^{-09}$$

com $L_1 = L_2 = 0,5\ m$, $\phi_{1,\text{int}} = 18\ mm$ e $\phi_{2,\text{int}} = 16\ mm$.

Dadas as propriedades de cada viga encontra-se a a matriz de rigidez para cada elemento

$$[K_f]_{(1)} = \begin{bmatrix} 51858,90 & 12964,72 & -51858,90 & 12964,72 \\ 12964,72 & 4321,57 & -12964,72 & 2160,79 \\ -51858,9 & -12964,72 & 51858,9 & -12964,72 \\ 12964,72 & 2160,79 & -12964,72 & 4321,57 \end{bmatrix}$$

e

$$[K_f]_{(2)} = \begin{bmatrix} 89030,22 & 22257,56 & -89030,22 & 22257,56 \\ 22257,56 & 7419,19 & -22257,56 & 3709,59 \\ -89030,22 & -22257,56 & 89030,22 & -22257,56 \\ 22257,56 & 3709,59 & -22257,56 & 7419,19 \end{bmatrix}.$$

E as matrizes de rigidez geométrica

$$[K_{geo}]_{(1)} = [K_{geo}]_{(2)} = \begin{bmatrix} 2,4 & 0,1 & -2,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,07 & -0,1 & -0,02 \\ -2,4 & -0,1 & 2,4 & -0,1 \\ 0,1 & -0,02 & -0,1 & 0,07 \end{bmatrix}.$$

Calculadas as matrizes de rigidez locais encontra-se a matriz de rigidez geométrica global

$$[K_{geo}]_{global} = \begin{bmatrix} 4,8 & 0,0 & -2,4 & 0,1 \\ 0,0 & 0,13 & -0,1 & -0,02 \\ -2,4 & -0,1 & 2,4 & -0,1 \\ 0,1 & -0,02 & -0,1 & 0,07 \end{bmatrix}$$

e para a matrizes de rigidez global para os graus de liberdade livres

$$[K_f]_{global} = \begin{bmatrix} 140889,12 & 9292,83 & -89030,22 & 22257,56 \\ 9292,83 & 11740,76 & -22257,56 & 3709,59 \\ -89030,22 & -22257,56 & 89030,22 & -22257,56 \\ 22257,56 & 3709,59 & -22257,56 & 7419,19 \end{bmatrix}.$$

Utilizando as matrizes de rigidez globais resolve-se o problema de autovalor

$$([K_f]_{global} - \lambda[K_{geo}]_{global})\{a\} = 0$$

e encontra-se os valores de $\lambda$ para o sistema

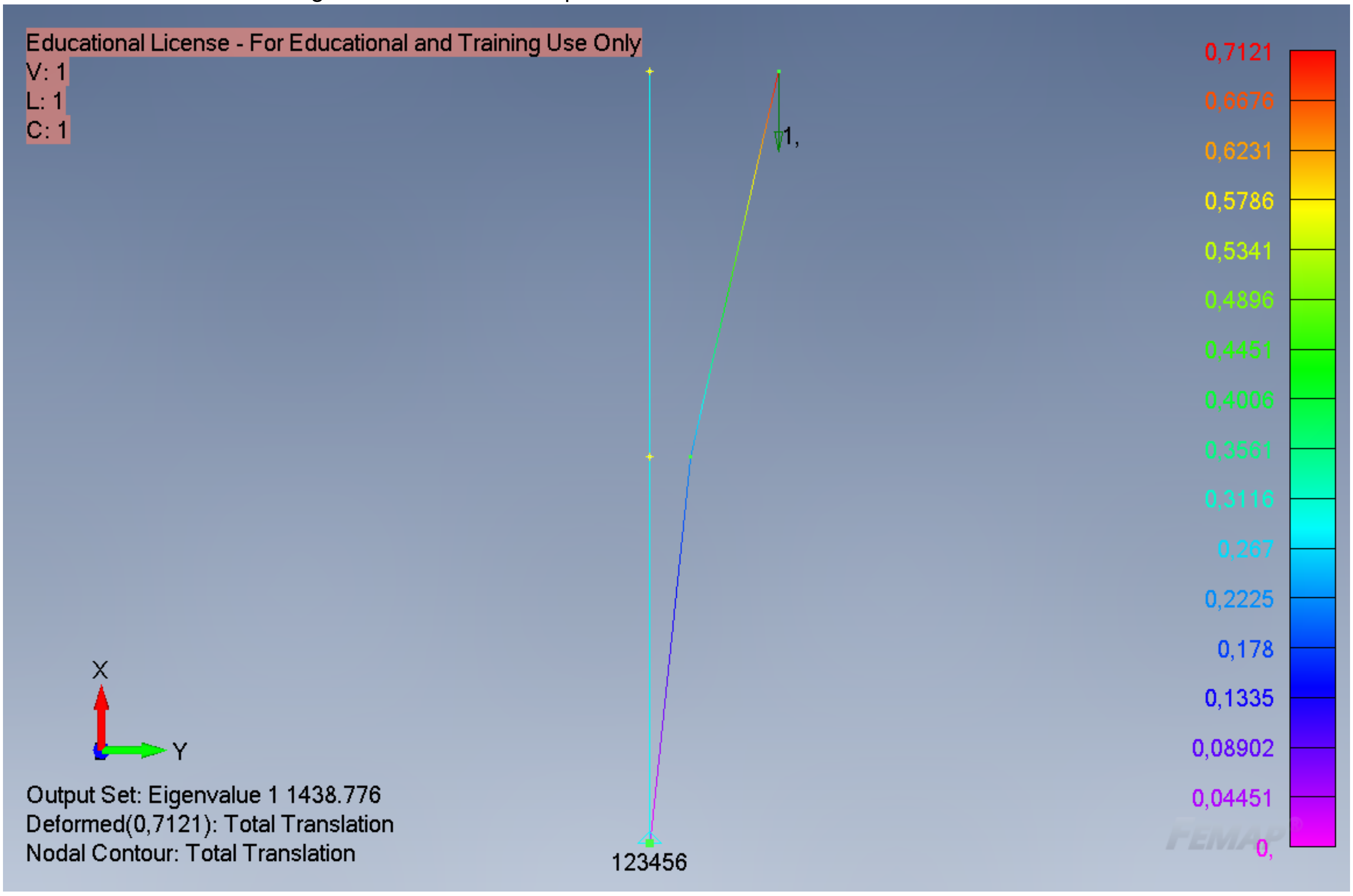
$$\lambda = \begin{Bmatrix} 1439,27 & 16442,45 & 53378,11 & 172337,04 \end{Bmatrix}$$

resultando em uma carga crítica

$$P_{cr} = \lambda_1 = 1439,27\,N.$$

b) Para resolver o problema utilizou-se o *software* FEMAP com 2 elementos de viga fornecido pelo *software*. Na figura 13 encontra-se o resultado obtido pelo *software*.

Figura 13: Resultado do problema obtido através do *software* FEMAP.




c) O resultado para a carga crítica obtido através do *software* FEMAP foi de $P_{cr} = 1438,776\,N$, representando um erro relativo em relação ao calculado no item (a) de 0,0343 %. Então, pode-se dizer que o resultado calculado no item (a) e (b) foram aproximadamente o mesmo, com pequenas diferenças que provavelmente é resultado de erros numéricos.