دانشکده مهندسی
کامپیوتر و فناوری اطلاعات

10/8/2020

Homework 1

Chapter 1, 2, 3 CLRS

ALGORITHM DESIGN

۱) تابع $f(n) = n^{(2+\sin(n\pi/2))}$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم که $f(n) = \Omega(n^a)$ و $f(n)=O(n^b)$. کمترین مقدار طبیعی برای b و بیشترین مقدار طبیعی برای a را بدست بیاورید و ثابت کنید که این دو بهترین مقادیر ممکن هستند. (دقت کنید که هم باید برای درستی جواب خود اثبات بیاورید هم باید ثابت کنید که مقدار بهتری وجود ندارد. در مجموع چهار اثبات باید انجام بدهید. از تعریف هر دو نماد کمک بگیرید.)

(اثبات درست بودن اعداد بدست آمده هر کدام ۰.۷۵ نمره، اثبات نبود جواب بهتر هر کدام ۰.۵ نمره. در مجموع ۲.۵ نمره)

$*: sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \{-1,0,1\} \Rightarrow 2 + sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \{1,2,3\}$

$n^{2+\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)} \in O(n^a)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2+\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}}{n^a} = \infty \ or \ c$

$\Rightarrow 2 + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \geq a \overset{*}{\Rightarrow} \boldsymbol{a_{max} = 1}$

فرض خلف : $\exists a' > 1 \ st \ n^{2+\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)} \in O\left(n^{a'}\right)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2+\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}}{n^{a'}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2+\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}}{n^{2+\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)+\varepsilon}} = 0 ※$

a' نمیتواند از تمامی حالات $2 + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ کوچکتر باشد (حداقل از ۱ بزرگتر خواهد بود) پس **فرض خلف باطل است و** $\boldsymbol{a_{max} = 1}$

$n^{2+\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)} \in \Omega(n^b)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2+\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}}{n^b} = 0 \ or \ c$

$\Rightarrow 2 + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \leq b \overset{*}{\Rightarrow} \boldsymbol{b_{min} = 3}$

فرض خلف : $\exists b' < 3 \ st \ n^{2+\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)} \in \Omega\left(n^{b'}\right)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2+\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}}{n^{b'}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2+\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}}{n^{2+\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\varepsilon}} = \infty ※$

b' نمیتواند از تمامی حالات $2 + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ بزرگتر باشد (حداقل از ۳ کوچکتر خواهد بود) پس **فرض خلف باطل است و** $\boldsymbol{b_{min} = 3}$

۲) عبارت زیر را ثابت کنید. (تابع F(n) همان فیبوناچی n ام است؛ یعنی F(n) = F(n-1) + F(n-2) و F(1)=F(2)=1) (۱ نمره)

$$F(n)=O((\sqrt{3})^n)$$

رابطه بازگشتی: $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$

حدس: $F(n) = O\left(\left(\sqrt{3}\right)^n\right)$

فرض استقرا: $\begin{cases} F(n-2) \le d.\left(\sqrt{3}\right)^{n-2} \\ F(n-1) \le c.\left(\sqrt{3}\right)^{n-1} \end{cases}$

حکم استقرا: $F(n) \le a.\left(\sqrt{3}\right)^n$

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2) \le c.\left(\sqrt{3}\right)^{n-1} + d.\left(\sqrt{3}\right)^{n-2}$$
$$\le \frac{c}{\sqrt{3}}.\left(\sqrt{3}\right)^n + \frac{d}{3}.\left(\sqrt{3}\right)^n$$
$$\le \left(\frac{c}{\sqrt{3}} + \frac{d}{3}\right).\left(\sqrt{3}\right)^n = a.\left(\sqrt{3}\right)^n \checkmark \Rightarrow \mathbf{F(n) = O\left(\left(\sqrt{3}\right)^n\right)}$$

۳) ثابت کنید: به ازای همه مقادیر a > 0 داریم : $a^n \in o(n!)$. (یعنی n! از هر تابع پیچیدگی نمائی بدتر است.) (۱ نمره)

حل ۱

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^k a^{n-k}}{n!} \le \lim_{n\to\infty} \frac{a^k (k+1)(k+2)\dots n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^k \frac{n!}{k!}}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^k}{k!} = \frac{a^k}{k!} = c \Rightarrow \boldsymbol{a^n = O(n!)}$$

حل ۲

$n = 1$: $\begin{cases} a^1 = a \\ 1! = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{1} = a \checkmark$

فرض استقرا: $\lim_{k\to\infty} \frac{a^k}{k!} = 0 \text{ or } c \checkmark$

حکم استقرا: $\lim_{k\to\infty} \frac{a^{k+1}}{(k+1)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{a^k a}{(k+1)k!} = \lim_{k\to\infty} \overbrace{\cancel{\frac{a}{(k+1)}}}^{0} . \overbrace{\frac{a^k}{k!}}^{\text{0 or c (فرض)}} = \mathbf{0} \Rightarrow$ برقراری حکم $\Rightarrow \boldsymbol{a^n = O(n!)}$

۴) ثابت کنید: $g(n) = \Omega(f(n)) \Rightarrow g(n) = \Omega(O(f(n)))$ (۱ نمره)

$$g(n) = \Omega\big(f(n)\big) \Rightarrow g(n) = \Omega(O(f(n))) = \Omega\big(h(n)\big)$$
$$\begin{cases} O\big(f(n)\big) = \{h(n): \exists\, c, n0 > 0 \; s.t.\; \forall_{n \ge n0}: h(n) \le c.f(n)\} \\ \Omega\big(f(n)\big) = \{g(n): \exists\, d, n0 > 0 \; s.t.\; \forall_{n \ge n0}: g(n) \ge d.f(n)\} \end{cases}$$

$I: g(n) \ge d.f(n)$

$II: h(n) \le c.f(n) \Rightarrow \frac{d}{c} h(n) \le d.f(n)$

$I \,\&\, II \Rightarrow g(n) \ge \frac{d}{c} h(n) \Rightarrow g(n) \ge x.h(n) \Rightarrow g(n) = \Omega\big(h(n)\big) \Rightarrow \boldsymbol{g(n) = \Omega(O(f(n)))} \checkmark$

۵) به ازای دو عدد حقیقی a و b به طوری که $a > b > 1$ ثابت کنید: $(n > 1)$ *(۰.۵ نمره)*

$$n * \log(n, b) = \theta(n * \log(n, a))$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\log_b n}{n\log_a n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_b n}{\log_a n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\log_n b}}{\frac{1}{\log_n a}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_n a}{\log_n b} = \lim_{n\to\infty} \log_b a = \log_b a = constant$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{n\log_b n = \Theta(n\log_a n)}$$

۶) توابع زیر برابر با چه θ (theta) ای هستند؟ (اثبات لازم نیست. استفاده از درخت تصمیم‌گیری می‌تواند در حل سوالات کمک کند.) *(هر مورد ۰.۵ نمره)*

1) $T(n) = T(n/2) + 1, T(1) = 1$
2) $T(n) = 3T(n/2) + 1, T(1) = 1$
3) $T(n) = T(n-1) + n, T(1) = 1$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 = T\left(\frac{n}{4}\right) + 1 + 1 = \cdots = T\left(\frac{n}{2^k}\right) + k = \cdots = T\left(\frac{n}{2^{\lg(n)}}\right) + \lg(n) = T(1) + \lg(n) = 1 + \lg(n)$$

$$\boldsymbol{T(n) = \Theta(\lg(n))}$$

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 = 3\left(3T\left(\frac{n}{4}\right) + 1\right) + 1 = \cdots = 3^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} 3^i = \cdots = 3^{lgn}T(1) + \left(3^{\lg(n-1)} + \cdots + 1\right)$$

$$\boldsymbol{T(n) = \Theta(\lg(n))}$$

$$T(n) = T(n-1) + n = T(n-2) + (n-1) + n = \cdots = T(n-k) + kn - \sum_{i=0}^{k-1} i = \cdots$$

$$= T(1) + n(n-1) - \frac{1}{2}(n-1)(n-2) = \boldsymbol{\Theta(n^2)}$$

۷) شبه کدی با مرتبه زمانی دلخواه بنویسید که تعداد [Inversion] یک آرایه ورودی را محاسبه کند. (نوشتن قسمت گرفتن ورودی الزامی نیست) *(۰.۵ نمره)*

```
Inversion(arr)
    count = 0
    for i = 0 to arr.length
        for j = 0 to arr.length
            if arr[i]>arr[j]
                count++
    return count
```

۸) شبه کدی بنویسید که تعدادی عدد بگیرد و تمامی اعداد طبیعی کمتر از ۱۰۰۰ را محاسبه کند که بر تمامی اعداد ورودی بخش‌پذیر باشد. مرتبه زمانی کد خود را بر حسب تعداد اعداد ورودی(N) تحلیل کنید. (نوشتن قسمت گرفتن ورودی الزامی نیست) *(شبه کد ۰.۵ نمره، تحلیل مرتبه زمانی ۰.۵ نمره)*

پی‌نوشت: لینک سوال عملی برای علاقه‌مندان ☻

```
function(arr, n)
    gcd = arr[0]                      } O(1)
    mul = arr[0]
    for i = 1 to n                    }
        gcd = find_gcd(gcd, arr[i])   } O(n×(loga+logb))
        q *= arr[i]                   }
    lcm = mul / gcd                   } O(1)
    return ⌊ 1000 / lcm ⌋
```

$$\Rightarrow O(1) + O(1) + O\big(n(loga + logb)\big) = O(n(loga + logb)) \cong \boldsymbol{O(logn)}$$

۹) کامپیوتری داریم که در هر ثانیه 10^{12} عملیات انجام می‌دهد. دو الگوریتم داریم که به ازای ورودی n، به ترتیب n^2 و 2^n مرحله اجرایشان طول می‌کشد. به ازای هر الگوریتم مشخص کنید که اگر بخواهیم اجرا ۱ ثانیه و یا ۱۰۲۴ ثانیه طول بکشد، باید چه مقداری به ورودی آن بدهیم. *(برای راحتی بیشتر می‌توانید فرض کنید که 2^{40} با 10^{12} تقریباً برابر است.)* *(هر مورد ۰.۲۵، در مجموع ۱ نمره)*

n^2	$1s$	$n^2 \times \frac{1}{10^{12}} = 1s \Rightarrow n^2 = 10^{12} = (10^6)^2 \Rightarrow \boldsymbol{n = 10^6}$
	$2^{10}s$	$n^2 \times \frac{1}{10^{12}} = 2^{10}s \Rightarrow n^2 = 2^{10} \times 10^{12} \cong 2^{10+40} = (2^{25})^2 \Rightarrow \boldsymbol{n = 2^{25}}$
2^n	$1s$	$2^n \times \frac{1}{10^{12}} = 1s \Rightarrow 2^n = 10^{12} \cong 2^{40} \Rightarrow \boldsymbol{n = 40}$
	$2^{10}s$	$2^n \times \frac{1}{10^{12}} = 2^{10}s \Rightarrow 2^n = 2^{10} \times 10^{12} \cong 2^{10+40} = 2^{50} \Rightarrow \boldsymbol{n = 50}$

- مهلت ارسال تمرین ساعت ۲۳.۵۵ روز جمعه **دوم آبان** می‌باشد.
- سوالات خود را می‌توانید از طریق ایمیل زیر از تدریسیارن بپرسید.
    - parsa.abdollahi.pa@gmail.com
- ارائه پاسخ تمرین به دو روش ممکن است:
    1) تایپ داخل همین فایل و ارائه فایل Pdf
    2) پاسخ دهی به صورت دستنویس خوانا
- ارائه تمرین به روش اول شامل ۵٪ نمره امتیازی می‌گردد.
- فایل پاسخ تمرین را تنها با قالب **Algo-HW1-9531***.pdf** در مودل بارگزاری کنید.
- فایل زیپ ارسال **نکنید**.