SECCION 4.8 | HOJA (I)

1 i) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m^2-m+3}{m^2+1}$

La condicion necesaria de convergencia (pág 120) NO resulta útil para analizar el comportamiento de una serie -
Esta condición se puede reescribir en una forma que sí sea útil:

⊙ CRITERIO DE LA DIVERGENCIA:

Dada $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$; si $\lim_{m\to\infty} a_m \neq 0 \longmapsto$ la serie $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ diverge -

← USAREMOS SIEMPRE ESTA FORMA DEL CRITERIO. —

En 1 i) $a_m = \frac{2m^2-m+3}{m^2+1}$

$$\lim_{m\to\infty} a_m = \lim_{m\to\infty} \frac{2m^2-m+3}{m^2+1} = \lim_{m\to\infty} \frac{\cancel{m^2}(2-1/m+3/m^2)}{\cancel{m^2}(1+1/m^2)} = 2 \leftarrow \text{es} \neq 0 !!$$

Como $\lim_{m\to\infty} a_m \neq 0 \longmapsto \boxed{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m^2-m+3}{m^2+1} \text{ diverge}}$

NOTA 1: Este criterio, cuando puede aplicarse, sirve para justificar que una serie diverge (solamente)

NOTA 2 El criterio se podrá aplicar siempre que el $\lim_{m\to\infty} a_m \neq 0$ (no importa si el límite no existe)
por ejemplo en $\sum_{m=1}^{\infty} e^m$: $a_m = e^m$, $\underbrace{\lim_{m\to\infty} a_m \to \infty}_{\neq 0}$ ∴ $\sum_{m=1}^{\infty} e^m$ diverge

NOTA 3: Si el límite de a_m dá cero, $\lim_{m\to\infty} a_m = 0$, el criterio no brinda información (la serie podría ser convergente ó divergente).—

SECCION 4.8

HOJA (II)

9 viii) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+1}$

Usaremos el criterio de la integral: (pág 121)

Sea $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$; $a_m > 0$. Sea además $f(x)$ que cumpla:
a) $f(m) = a_m$
b) $f(x)$ continua, $x \geq 1$
c) $f(x) > 0$ y $f(x)$ decreciente para $x \geq 1$

Entonces:
- Si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge $\longmapsto \sum_{m=1}^{\infty} a_m$ converge –
- Si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverge $\longmapsto \sum_{m=1}^{\infty} a_m$ diverge. –

En $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+1}$, $a_m = \frac{1}{m^2+1}$, $m \geq 1$

Conviene definir a $f(x)$ "igual" que a_m pero con variable "x":
O sea:

$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ $\longleftarrow$ Verifica que: a) $f(m) = a_m$ ✓ ; b) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ $\therefore$ también en $x \geq 1$ ✓

c) $f(x) > 0$ y $f'(x) = \frac{-2x}{x^2+1} < 0$ si $x \geq 1$ $\therefore$ f es decreciente si $x \geq 1$ ✓.

Ahora se debe estudiar $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$

⋮

Como $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$ converge $\longmapsto$ $\boxed{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+1} \text{ converge}}$.–

Nota 1: Este criterio es útil (aunque muy trabajoso!) cuando sea sencillo el estudio de la integral impropia –

Ese es el caso de las "Series-P": $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^P}$, $P > 0$ (ver pág 122)

NOTA 2: Para estudiar $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2+1}$ serían mejores (+ rápidos) los criterios de comparación (pág 123) ó de comparación en el límite (pg 124)

3 i) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^m}$

Usaremos el <u>Criterio de Comparación</u> (pág 123):

> Sean $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ y $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ tales que: $0 \leq a_m \leq b_m$ para $m \geq 1$
>
> Entonces:
>
> I) Si $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ converge $\mapsto \sum_{m=1}^{\infty} a_m$ converge —
>
> II) Si $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ diverge $\mapsto \sum_{m=1}^{\infty} b_m$ diverge. —

Aquí deben ser siempre $a_m \geq 0$ y $b_m \geq 0$ —

Para usar éste criterio:

La idea es armar la desigualdad: $0 \leq a_m \leq b_m$ para ver "dónde" queda ubicado el término general de nuestra serie $\left(\frac{1}{2+3^m}\right)$:

Partimos de algo trivial y vamos armando:

$0 \leq 3^m \leq 3^m + 2$ (se verifica trivialmente)

$0 \leq \frac{3^m}{3^m+2} \leq 1$

$0 \leq \frac{1}{3^m+2} \leq \frac{1}{3^m} \quad \therefore \quad 0 \leq \underbrace{\frac{1}{2+3^m}}_{a_m} \leq \underbrace{\frac{1}{3^m}}_{b_m}$ ⟵ Hemos acotado "superiormente" (a los Términos de nuestra serie) con los Términos $b_m = \frac{1}{3^m}$

Entonces debemos usar la parte I del Criterio:

$\sum_{m=1}^{\infty} b_m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{3^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^m$ ⟵ serie geométrica con razón $r = \frac{1}{3} < 1$ $\therefore$ <u>convergente</u> (pág 118)

Como $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ converge $\mapsto \boxed{\sum_{m=1}^{\infty} a_m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^m} \text{ converge}}$. —

<u>NOTA</u>: Si al armar la desigualdad: $0 \leq a_m \leq b_m$; los términos de <u>nuestra serie</u> quedaran en el lugar de b_m; estaríamos acotando "<u>inferiormente</u>" con los términos a_m; y deberíamos entonces usar la parte II del Criterio (o sea, deberíamos mostrar que $\sum_{m=1} a_m$ diverge)

(ver 2º ejemplo de pág 123)

SECCION 4.8 | HOJA (IV)

4 iii) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{m}}{m+1}$

Usaremos el Criterio de Comparación en el límite (pág 124):

$\boxed{\begin{array}{l} \text{Sean } \sum_{m=1}^{\infty} a_m \text{ y } \sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{ tales que } \lim_{m\to\infty} \frac{a_m}{b_m} = L > 0. \\ \text{Entonces:} \\ \quad \text{I) Si } \sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{ converge} \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} a_m \text{ converge} \\ \quad \text{II) Si } \sum_{m=1}^{\infty} b_m \text{ diverge} \mapsto \sum_{m=1}^{\infty} a_m \text{ diverge} \end{array}}$

Aquí deben ser siempre $a_m > 0$ y $b_m > 0$ –

Para usar éste criterio:
Llamaremos **siempre** "a_m" al término general de nuestra serie –
O sea, $a_m = \frac{\sqrt{m}}{m+1}$. Hallaremos "$b_m$" reescribiendo a_m:

$$a_m = \frac{\sqrt{m}}{m+1} = \frac{\sqrt{m}\cdot 1}{m.(1+1/m)} = \frac{\sqrt{m}}{m}\ \frac{1}{(1+1/m)} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{m}}}_{b_m}\left(\frac{1}{1+1/m}\right) ; \ \frac{a_m}{b_m} = \frac{1}{1+1/m}$$

Definiendo $b_m = \frac{1}{\sqrt{m}}$; tenemos que:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{a_m}{b_m} = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{1+1/m}\right) = 1 \quad \therefore\ L = 1 > 0 \ \text{(se verifica el criterio)}$$

Como, además, la serie $\sum_{m=1}^{\infty} b_m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}}$ diverge (Pues es una "serie-p" con $p = 1/2 < 1$ (ver pág 122))

Entonces, usando la parte II del criterio:

$$\boxed{\sum_{m=1}^{\infty} a_m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{m}}{m+1} \ \text{diverge}}$$

NOTA: Este criterio es muy útil (y fácil de usar) en especial cuando al reescribir a_m podemos definir b_m como "r^m" ó "$\frac{1}{m^p}$", porque entonces la convergencia de $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ es fácil de justificar (series geométricas o series-p...)

5 ii) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2m}}{m^m}$

Usaremos el Criterio de la raíz: (pág 124)

Sea $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} a_m$, con $a_m \geq 0$, tal que $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{a_m} = L$.-

Entonces:

i) Si $L<1 \mapsto \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ converge

ii) Si $L>1 \mapsto \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ diverge

iii) Si $L=1 \mapsto$ el criterio no da información

En nuestro caso $a_m = \dfrac{e^{2m}}{m^m} = \left(\dfrac{e^2}{m}\right)^m$

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{a_m} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\left(\frac{e^2}{m}\right)^m} = \lim_{m\to\infty} \frac{e^2}{m} = 0 \text{ .— } \therefore\ L = 0 < 1$$

Como obtuvimos $L<1$, concluimos que:

$$\boxed{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{2m}}{m^m} \text{ converge}} \text{ —}$$

NOTA: Este Criterio es especialmente útil en los casos donde a_m se pueda reescribir como una potencia m-ésima -

P. ej: En una serie geométrica:

(para $r>0$) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} r^m$, $a_m = r^m$ entonces $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{a_m} = r$ $\therefore L = r$

Como $L = r$,
- Si $r<1 \mapsto$ la serie converge
- Si $r>1 \mapsto$ la serie diverge
- Si $r=1 \mapsto$ el criterio no ayuda (pero es sencillo mostrar que $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} 1^m = \sum_{m=1}^{\infty} 1$ diverg

6i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

Usaremos el <u>Criterio del Cociente</u>: (pág 125)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, con $a_n > 0$, tal que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.

Entonces i) Si $L<1 \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.—

ii) Si $L>1 \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge —

iii) Si $L=1 \longmapsto$ el criterio no decide —

Aquí $a_n > 0$ siempre

$a_n = \frac{2^n}{n!}$; $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} \cdot n!}{2^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n} 2 . \cancel{n!}}{\cancel{2^n} (n+1) . \cancel{n!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 \quad \therefore L = 0 < 1$$

Como obtuvimos $L<1 \longmapsto$ La serie converge —

O sea

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \text{ converge.—}}$$

<u>NOTA</u>: Si se obtiene $L=1$, se deberá usar otro criterio para estudi[ar] la convergencia. (ése es el caso de 6(ii)) —

7 iii) $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\ln(m)}{m}$

Usaremos el Criterio de Leibniz (pag 125):

> Sea la Serie alternada: $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} b_m$, donde $b_m > 0$.-
> Si se cumple que: (i) la sucesion $\{b_m\}$ es decreciente $(b_m \geq b_{m+1})$
> (ii) $\lim_{m\to\infty} b_m = 0$
> Entonces, la serie alternada $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} b_m$ converge

Aquí $b_m = \frac{\ln(m)}{m}$, $m \geq 1$

(i) La sucesión $\left\{b_m = \frac{\ln(m)}{m}\right\}$ es decreciente?

Una forma sencilla de mostrarlo es hallar una $f(x)$ tal que $f(m) = b_m$ y ta que esa $f(x)$ sea decreciente $(f'(x) < 0)$ a partir de "algun x"

Si $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$; ← verifica que $\left[\begin{array}{l} \cdot)\ f(m) = \frac{\ln(m)}{m} = b_m \ \checkmark \\ \cdot)\ f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2} < 0,\ \forall x > e \ \checkmark \end{array}\right.$

$\therefore \left\{b_m = \frac{\ln(m)}{m}\right\}$ es decreciente a partir de algún m $(m \geq 3)$ ← alcanza con eso

(ii) $\lim_{m\to\infty} b_m = 0$?

$\lim_{n\to\infty} b_m = \lim_{m\to\infty} \frac{\ln(m)}{m} = 0$ por orden de magnitud ($\ln x \ll x$ si x es gr

$\therefore$ Por el Criterio de Leibniz: $\boxed{\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\ln(m)}{m} \text{ converge}}$

JOTA: $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} b_m$; $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m b_m$, $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} b_m$, con $b_m \geq 0$, Son todas Series alternadas