Series de Números Reales.

- Sucesiones de números reales sección **4.3**.
- Series de números reales sección **4.5**.

Definición: Una Sucesión de números reales es un listado de números, dispuestos en cierto orden.

De la forma: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots.$

Por ejemplo: -2, 4, -8, 16, -32, 64, ….

Son de la forma: $a_i = (-2)^i$, $i = 1,2,3 \ldots$

- Los subíndices indican en qué posición está los términos.
- Los puntos suspensivos indican que la sucesión es *infinita*.
- Si la sucesión es *finita* (cantidad finita de términos), eso se indica mostrando el último término (ej: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{20}$)
- Si se cambian los términos de lugar se arma *otra* sucesión (ej: 4, -32, 16, -2, …).

Con ésa *formula general* podemos compactar la notación para la sucesión: -2, 4, -8, 16, -32, 64, …$= \left\{(-2)^i\right\}_{i=1}^{\infty}$

Ejemplos:

1) 4, 4, 4, 4, 4, …$= \{\, a_i = 4 \,\}_{i=1}^{\infty}$
2) 1, 2, 3, 4, 5, …$= \{a_i = i\,\}_{i=1}^{\infty}$
3) 1, 5, 25, 125, 625, …$= \left\{a_i = 5^i\,\right\}_{i=0}^{\infty}$ ← Sucesión geométrica de razón r=5 .
4) -1, $\frac{-1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{5}$, …$= \left\{a_i = \frac{-1}{i}\right\}_{i=1}^{\infty}$

<u>Definición</u>: Dada una sucesión infinita de números reales $\{ a_i \}_{i=1}^{\infty}$, se define la <u>Serie de números reales</u> a_i como la suma de todos sus términos:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \ldots.$$

Ejemplos:

a) $\{ a_i = 4 \}_{i=1}^{\infty}$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + \cdots$

b) $\{a_i = 5^i \}_{i=1}^{\infty}$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} 5^i$ = 5+ 25+ 125+ 625+ …

c) $\{a_i = (-1)^i \}_{i=0}^{\infty}$, $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$

d) $\left\{a_i = \frac{-1}{i}\right\}_{i=1}^{\infty}$, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{-1}{i}$ = -1+ $\frac{-1}{2} + \frac{-1}{3} + \frac{-1}{4} + \frac{-1}{5}$ + …

¿Cuánto *valen* esas sumas?. Tiene sentido asignarles un valor numérico?

Cuando se pueda asignar un valor numérico a una serie, se dirá que la serie *converge*.
Cuando no se pueda asignar un valor numérico a una serie, se dirá que la serie *diverge*.

Debemos definir <u>convergencia</u> de una serie..

Antes: Definición de *n-ésima suma parcial* S_n: $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$.

Definición: Sea la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ y sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, su n-ésima a suma parcial.

- Si $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, entonces la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *converge al número S*. Eso se escribe: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = S$.
- Si el límite no existe, entonces la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *diverge*. (y no se le asigna ningún valor).

Ejemplo: Analice la convergencia de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} 4$

1º) Hallamos S_n: $S_n = \sum_{i=1}^{n} 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + \cdots + 4 = 4\,n \quad \therefore \quad S_n = 4\,n.$

2º) Tomamos $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} 4\,n \to \infty \quad \therefore \quad \boxed{\sum_{i=1}^{\infty} 4 \text{ diverge.}}$

Ejemplo: Analice la convergencia de la serie geométrica $\sum_{i=1}^{\infty}\left(1/2\right)^{i}$

1º) Hallamos S_n: $S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(1/2\right)^{i} = \left(1/2\right)^{1} + \left(1/2\right)^{2} + \left(1/2\right)^{3} + \left(1/2\right)^{4} + \cdots + \left(1/2\right)^{n}.$

$$\left(1/2\right).S_n = \left(1/2\right)^{2} + \left(1/2\right)^{3} + \left(1/2\right)^{4} + \left(1/2\right)^{5} + \cdots + \left(1/2\right)^{n+1}.$$

Restando: $S_n - \left(1/2\right).S_n = \left(1/2\right)^{1} - \left(1/2\right)^{n+1}$

$$S_n.\left(1 - \left(1/2\right)\right) = \left(1/2\right)^{1} - \left(1/2\right)^{n+1} \qquad \therefore \quad S_n = \frac{\left(1/2\right) - \left(1/2\right)^{n+1}}{\left(1 - \left(1/2\right)\right)} = \frac{\left(1/2\right) - \left(1/2\right)^{n+1}}{\left(1/2\right)} = 1 - \left(1/2\right)^{n}$$

2º) Tomamos $\lim_{n\to\infty} S_n$: $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \left(1/2\right)^{n}\right) = 1$

Como existe el límite, la serie converge:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\infty}\left(1/2\right)^{i} = 1}$$

En general es muy difícil analizar el comportamiento de una serie usando la Definición de Convergencia (salvo para las Series de constantes, las Series geométricas y las Series telescópicas (pág 119)).
Es por eso que, en general, analizaremos el comportamiento de las series usando Criterios de Convergencia.

Propiedades de las series:

- Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = A$, entonces: $\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha\, a_i) = \alpha \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \alpha\, A,\qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$
- Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ diverge, entonces: $\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha\, a_i)$ diverge , $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$
- Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = A$, $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = B$, entonces: $\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha\, a_i + \beta\, b_i) = \alpha \sum_{i=1}^{\infty} a_i + \beta \sum_{i=1}^{\infty} b_i = \alpha A + \beta B$, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$
- Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = A$ y $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ diverge , entonces: $\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha\, a_i + \beta\, b_i)$ diverge , $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ y $\forall\, \beta \in \mathbb{R}_0.$
- Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ diverge y $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ diverge , entonces: $\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha\, a_i + \beta\, b_i)$ puede ser convergente o divergente.
- Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge (diverge), entonces: $\sum_{i=\boldsymbol{N}}^{\infty} a_i$ converge (diverge).

Ejemplo: Como $\sum_{i=1}^{\infty} 4$ diverge y $\sum_{i=1}^{\infty}(1/2)^i$ converge (mostrado antes), entonces: $\sum_{i=1}^{\infty}\left(4 + (1/2)^i\right)$ diverge.

Ejemplo: Como $\sum_{i=1}^{\infty}(1/2)^i = 1$ (mostrado antes), entonces: $\sum_{i=1}^{\infty} 7\,(1/2)^i = 7\sum_{i=1}^{\infty}(1/2)^i = 7.1 = 7.$

Ejemplo: Como $\sum_{i=1}^{\infty}(1/2)^i$ converge (mostrado antes), entonces: $\sum_{i=3}^{\infty}(1/2)^i$ converge. (a otro valor..)

Criterio de la Divergencia:

Dada la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, si $\lim_{i\to\infty} a_i \neq 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ diverge.

Es equivalente a la Condición Necesaria para la Convergencia, pág 120.

Ejemplo: $\sum_{i=1}^{\infty} i^2$ converge?.

Aquí $a_i = i^2$. $\lim_{i\to\infty} a_i = \lim_{i\to\infty} i^2 \to \infty$ $\therefore$ por el Criterio de la Divergencia, $\boxed{\sum_{i=1}^{\infty} i^2 \text{ diverge.}}$

Ejemplo: $\sum_{i=1}^{\infty} \cos(i)$ converge?.

Aquí $a_i = \cos(i)$. $\lim_{i\to\infty} a_i = \lim_{i\to\infty} \cos(i) \nexists$ $\therefore$ por el Criterio de la Divergencia, $\boxed{\sum_{i=1}^{\infty} \cos(i) \text{ diverge.}}$

Ejemplo: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ converge?.

Aquí $a_i = \frac{1}{i}$. $\lim_{i\to\infty} a_i = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{i} = 0$ $\longleftarrow$ No se puede aplicar el Criterio de la Divergencia…

(habrá que analizar con otro Criterio)

En el Módulo:

- El primer Tema, **Sucesiones de números reales**, está desarrollado en la sección **4.3**.

  La Definición de Sucesión está en los 2 primeros párrafos de la pág 111, y ejemplos en pág 112.
  Los temas Convergencia de sucesiones y Sucesiones monótonas (págs 113 y 114) no serán considerados.
  La sección **4.4** es de Ejercicios: Hacer sólo los ejercicios 1 y 2.

- El segundo Tema, **Series de números reales**, se desarrolla a partir de la sección **4.5**.

  La Definición de Serie está en los 2 primeros párrafos de la pág 116.
  La Definición de Convergencia de Series está en el 3º y 4º párrafo de la pág 116, con ejemplos.
  Las Propiedades de las Series están listadas en las págs 117 y 118.
  Dos tipos de series muy conocidas son las Series Geométricas y las Series Telescópicas. En las págs 118 y 119 se analiza su convergencia usando la Definición de Convergencia.

  La sección **4.6** es de Ejercicios:
  En el ejercicio 1): Cada serie es (o puede llevarse a) una serie geométrica o telescópica y usar la Definición de convergencia para estudiarlas (en 1x) y 1xi) usar, además, las propiedades de las series..).
  En los ejercicios 2,3 y 4: Primero se debe plantear la serie adecuada y después analizar su convergencia.

Como material adicional, adjuntamos 6 ejercicios resueltos: 1i), 1iii) y 2iv) de la sección **4.4**, y 1ii), 1vii) y 2) de la sección **4.6**.

→ Próxima Clase: secciones **4.7** y **4.8**.