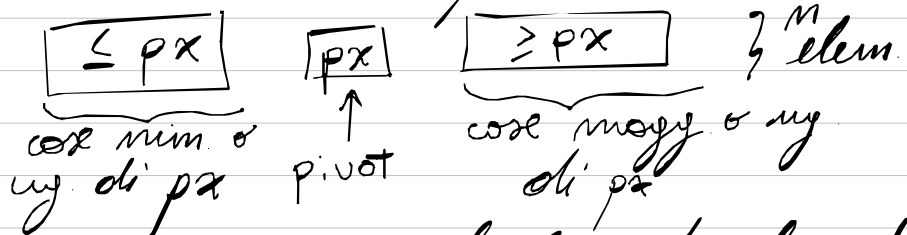


Quick sort

Rispetto al selection sort e all'insertion sort, il quick sort usa il procedimento **DIVIDE ET IMPERA**, ossia divide il problema in sottoproblemi che può risolvere e poi li usa per ottenere la soluzione finale (for di "impero").

Ades consideriamo ordinare una lista in tre partizioni:



Questo possiamo farlo facilmente prendendo due indici i, j , spostando px in fondo e:

- a ogni step, fanno andare avanti da $A[0]$, j verso destra (i verso sinistra da $A[n-2]$) fino a incontrare i t.c. $A[i] > px$ e j t.c. $A[j] < px$ e scambiano $A[i]$ e $A[j]$.

- mi fermiamo non appena $i > j$ e
rispetto px .

Posiamo quindi a ogni passo
scegliere un pivot px ,
partizionare l'array come
appena sotto (for di
DIVIDE) e applicare ricorsiv.
l'alg. sulle porzioni estreme,
incolandole alle fine
(for di IMPERA).

Il partizionamento effettuato in qst
modo è $O(n)$ — con
n lunghezza dell'array.

Il caso pessimo è $O(n^2)$, se
i pivot presi sono
quasi massimi/minimi dei sempre
(ovvero moralmente un
selection sort). Il caso medio
è però $O(n \cdot \log n)$.

Scelta del pivot

Non c'è un modo efficiente e strettamente deterministico di scegliere i pivot. Possiamo quindi provare a scegliere il pivot randomizzando (QuickSort randomizzato) supponendo di avere una funzione $\text{random}(a, b)$ che restituisce un num. in $[a, b]$ con prob. $1/(b-a+1)$. Questo mette a garantire ancora un caso medio $O(n \cdot \log n)$, ma in una classe "più probabile" di problemi.

Sia X il numero di confronti nel QS randomizzato. Allora X è una v.a. t.c.

$$X = \sum_{i < j} X_{ij}, \quad \text{sorted}(A) = (z_i)$$

$$X_{ij} = \begin{cases} 0 & z_i, z_j \text{ non confrontati} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Infatti i e j vengono confrontati al più una volta e una volta deve essere il pivot dell'altro.

Inoltre $z_i, z_j \in \text{partizione} \Rightarrow$
 $\rightarrow z_i, z_{i+1}, \dots, z_{j-1}, z_j \in \text{partiz.}$

Da questo:

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \sum_{i < j} E[X_{ij}] = \sum_{i < j} P(X_{ij} = 1) \stackrel{(*)}{\leq} \\
 &\leq \sum_{i < j} \frac{2}{j-i+1} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{2}{j-i+1} = \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=2}^{n-i+1} \frac{2}{k} \sim \underbrace{n \cdot \log(n)}_{\substack{\text{ciclo} \\ \text{esterni}}} \quad \sum_i \frac{1}{i} \sim \log(n)
 \end{aligned}$$

(*) è dovuto al fatto che
 $P(X_{ij} = 1)$ è dunque la prob.
 che z_i o z_j siano pivot
 dell'altro — e contenendo
 la partiz. $z_i, z_{i+1}, \dots, z_{j-1}, z_j$ ed
 essendo P unip. —
 è quindi $\leq P(z_i \text{ pivot di } z_j) +$
 $+ P(z_j \text{ pivot di } z_i) \leq$
 $\leq \frac{1}{j-i+1} + \frac{1}{j-i+1}.$