

Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

17 e 19 aprile 2023

Prodotti hermitiani, spazi euclidei e teorema spettrale

Nota. Nel corso del documento, per V si intenderà uno spazio vettoriale di dimensione finita n e per φ un suo prodotto, hermitiano o scalare dipendentemente dal contesto.

Definizione. (prodotto hermitiano) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Una mappa $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ si dice **prodotto hermitiano** se:

- (i) φ è \mathbb{C} -lineare nel secondo argomento, ossia se $\varphi(\underline{v}, \underline{u} + \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ e $\varphi(\underline{v}, a\underline{w}) = a\varphi(\underline{v}, \underline{w})$,
- (ii) $\varphi(\underline{u}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{u})}$.

Definizione. (prodotto hermitiano canonico in \mathbb{C}^n) Si definisce **prodotto hermitiano canonico** di \mathbb{C}^n il prodotto $\varphi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tale per cui, detti $\underline{v} = (z_1 \cdots z_n)^\top$ e $\underline{w} = (w_1 \cdots w_n)^\top$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^n \overline{z_i} w_i$.

Osservazione.

- $\varphi(\underline{u} + \underline{w}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u} + \underline{w})} = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w})} = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u})} + \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})} = \varphi(\underline{w}, \underline{v}) + \varphi(\underline{u}, \underline{v})$, ossia φ è additiva anche nel primo argomento.
- $\varphi(a\underline{v}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, a\underline{v})} = \overline{a\varphi(\underline{w}, \underline{v})} = \overline{a}\varphi(\underline{v}, \underline{w})$.
- $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{v})}$, e quindi $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$.
- Sia $\underline{v} = \sum_{i=1}^n x_i \underline{v_i}$ e sia $\underline{w} = \sum_{i=1}^n y_i \underline{v_i}$, allora $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{x_i} y_j \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j})$.
- $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \iff \varphi(\underline{w}, \underline{v}) = 0$.

Proposizione. Data la forma quadratica $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ del prodotto hermitiano φ tale che $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$, tale forma quadratica individua univocamente il prodotto hermitiano φ .

Dimostrazione. Innanzitutto si osserva che:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}}{2} + \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{w}) \cdot \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}}{2}.$$

Si considerano allora le due identità:

$$q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{v})} = 2 \Re(\varphi(\underline{v}, \underline{w})),$$

$$q(i\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = -i(\varphi(\underline{v}, \underline{w}) - \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}) = 2 \Im(\varphi(\underline{v}, \underline{w})),$$

da cui si conclude che il prodotto φ è univocamente determinato dalla sua forma quadratica. \square

Definizione. Si definisce **matrice aggiunta** di $A \in M(n, \mathbb{K})$ la matrice coniugata della trasposta di A , ossia:

$$A^* = \overline{A^\top} = \overline{A}^\top.$$

Osservazione. Per quanto riguarda la matrice aggiunta valgono le principali proprietà della matrice trasposta:

- $(A + B)^* = A^* + B^*$,
- $(AB)^* = B^* A^*$,
- $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, se A è invertibile.

Definizione. (matrice associata del prodotto hermitiano) Analogamente al caso del prodotto scalare, data una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ si definisce come **matrice associata del prodotto hermitiano** φ la matrice $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j))_{i,j=1 \dots n}$.

Osservazione. Si osserva che, analogamente al caso del prodotto scalare, vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}.$$

Proposizione. (formula del cambiamento di base per i prodotto hermitiani) Siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ due basi di V . Allora vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id_V)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id_V).$$

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$. Allora $\varphi(\underline{w}_i, \underline{w}_j) = [\underline{w}_i]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}_j]_{\mathcal{B}} = \left(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(Id_V)^i \right)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(Id_V)^j = \left(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(Id_V) \right)_i^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(Id_V)^j$, da cui si ricava l'identità desiderata. \square

Definizione. (radicale di un prodotto hermitiano) Analogamente al caso del prodotto scalare, si definisce il **radicale** del prodotto φ come il seguente sottospazio:

$$V^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \ \forall \underline{w} \in V\}.$$

Proposizione. Sia \mathcal{B} una base di V e φ un prodotto hermitiano. Allora $V^\perp = [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi))^1$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ e sia $\underline{v} \in V^\perp$. Siano $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che $\underline{v} = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n$. Allora, poiché $\underline{v} \in V$, $0 = \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}) = a_1 \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_1) + \dots + a_n \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_n) = M_i[\underline{v}]_{\mathcal{B}}$, da cui si ricava che $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, e quindi che $V^\perp \subseteq [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi))$.

Sia ora $\underline{v} \in V$ tale che $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Allora, per ogni $\underline{w} \in V$, $\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = [\underline{w}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{v}]_{\mathcal{B}} = [\underline{w}]_{\mathcal{B}}^* 0 = 0$, da cui si conclude che $\underline{v} \in V^\perp$, e quindi che $V^\perp \supseteq [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi))$, da cui $V^\perp = [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi))$, ossia la tesi. \square

Osservazione. Come conseguenza della proposizione appena dimostrata, valgono le principali proprietà già viste per il prodotto scalare.

- $\det(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = 0 \iff V^\perp \neq \{0\} \iff \varphi$ è degenere,
- Vale il teorema di Lagrange, e quindi quello di Sylvester, benché con alcune accortezze: si introduce, come nel caso di \mathbb{R} , il concetto di segnatura, che diventa l'invariante completo della nuova congruenza hermitiana, che ancora una volta si dimostra essere una relazione di equivalenza.

Definizione. (restrizione ai reali di uno spazio) Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{C} con base \mathcal{B} . Si definisce allora lo spazio $V_{\mathbb{R}}$, detto **spazio di restrizione su \mathbb{R}** di V , come uno spazio su \mathbb{R} generato da $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B} \cup i\mathcal{B}$.

Esempio. Si consideri $V = \mathbb{C}^3$. Una base di \mathbb{C}^3 è chiaramente $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$. Allora $V_{\mathbb{R}}$ sarà uno spazio vettoriale su \mathbb{R} generato dai vettori $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, i\underline{e}_1, i\underline{e}_2, i\underline{e}_3\}$.

¹Stavolta non è sufficiente considerare la mappa $f : V \rightarrow V^*$ tale che $f(\underline{v}) = [\underline{w} \mapsto \varphi(\underline{v}, \underline{w})]$, dal momento che f non è lineare, bensì antilineare, ossia $f(a\underline{v}) = \bar{a}f(\underline{v})$.

Osservazione. Si osserva che lo spazio di restrizione su \mathbb{R} e lo spazio di partenza condividono lo stesso insieme di vettori. Infatti, $\text{Span}_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}) = \text{Span}_{\mathbb{R}}(\mathcal{B} \cup i\mathcal{B})$. Ciononostante, $\dim V_{\mathbb{R}} = 2 \dim V^2$, se $\dim V \in \mathbb{N}$.

Definizione. (complessificazione di uno spazio) Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} . Si definisce allora lo **spazio complessificato** $V_{\mathbb{C}} = V \times V$ su \mathbb{C} con le seguenti operazioni:

- $(\underline{v}, \underline{w}) + (\underline{v}', \underline{w}') = (\underline{v} + \underline{v}', \underline{w} + \underline{w}')$,
- $(a + bi)(\underline{v}, \underline{w}) = (a\underline{v} - b\underline{w}, a\underline{w} + b\underline{v})$.

Osservazione. La costruzione dello spazio complessificato emula in realtà la costruzione di \mathbb{C} come spazio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Infatti se $z = (c, d)$, vale che $(a + bi)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, mentre si mantiene l'usuale operazione di addizione. In particolare si può identificare l'insieme $V \times \{0\}$ come V , mentre $\{0\} \times V$ viene identificato come l'insieme degli immaginari iV di $V_{\mathbb{C}}$. Infine, moltiplicare per uno scalare reale un elemento di $V \times \{0\}$ equivale a moltiplicare la sola prima componente con l'usuale operazione di moltiplicazione di V . Allora, come accade per \mathbb{C} , si può sostituire la notazione $(\underline{v}, \underline{w})$ con la più comoda notazione $\underline{v} + i\underline{w}$.

Osservazione. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V . Innanzitutto si osserva che $(a + bi)(\underline{v}, 0) = (a\underline{v}, b\underline{v})$. Pertanto si può concludere che $\mathcal{B} \times \{0\}$ è una base dello spazio complessificato $V_{\mathbb{C}}$ su \mathbb{C} .

Infatti, se $(a_1 + b_1 i)(v_1, 0) + \dots + (a_n + b_n i)(v_n, 0) = (0, 0)$, allora $(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, b_1 v_1 + \dots + b_n v_n) = (0, 0)$. Poiché però \mathcal{B} è linearmente indipendente per ipotesi, l'ultima identità implica che $a_1 = \dots = a_n = b_1 = \dots = b_n = 0$, e quindi che $\mathcal{B} \times \{0\}$ è linearmente indipendente.

Inoltre $\mathcal{B} \times \{0\}$ genera $V_{\mathbb{C}}$. Se infatti $\underline{v} = (\underline{u}, \underline{w})$, e vale che:

$$\underline{u} = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n, \quad \underline{w} = b_1 \underline{v}_1 + \dots + b_n \underline{v}_n,$$

allora $\underline{v} = (a_1 + b_1 i)(\underline{v}_1, 0) + \dots + (a_n + b_n i)(\underline{v}_n, 0)$. Quindi $\dim V_{\mathbb{C}} = \dim V$.

Definizione. Sia f un'applicazione \mathbb{C} -lineare di V spazio vettoriale su \mathbb{C} . Allora si definisce la **restrizione su \mathbb{R}** di f , detta $f_{\mathbb{R}} : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$, in modo tale che $f_{\mathbb{R}}(\underline{v}) = f(\underline{v})$.

²Si sarebbe potuto ottenere lo stesso risultato utilizzando il teorema delle torri algebriche: $[V_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}] = [V : \mathbb{C}][\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2[V : \mathbb{C}]$.

Osservazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di V su \mathbb{C} . Sia $A = M_{\mathcal{B}}(f)$. Si osserva allora che, se $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup i\mathcal{B}$ e $A = A' + iA''$ con $A', A'' \in M(n, \mathbb{R})$, vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}'}(f_{\mathbb{R}}) = \left(\begin{array}{c|c} A' & -A'' \\ \hline A'' & A' \end{array} \right).$$

Infatti, se $f(\underline{v}_i) = (a_1 + b_1 i)\underline{v}_1 + \dots + (a_n + b_n i)\underline{v}_n$, vale che $f_{\mathbb{R}}(\underline{v}_i) = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n + b_1 (i\underline{v}_1) + \dots + b_n (i\underline{v}_n)$, mentre $f_{\mathbb{R}}(i\underline{v}_i) = if(\underline{v}_i) = -b_1 \underline{v}_1 + \dots - b_n \underline{v}_n + a_1 (i\underline{v}_1) + \dots + a_n (i\underline{v}_n)$.

Definizione. Sia f un'applicazione \mathbb{R} -lineare di V spazio vettoriale su \mathbb{R} . Allora si definisce la **complessificazione** di f , detta $f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$, in modo tale che $f_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}) = f(\underline{v}) + if(\underline{w})$.

Osservazione. Si verifica infatti che $f_{\mathbb{C}}$ è \mathbb{C} -lineare.

- $f_{\mathbb{C}}((\underline{v}_1 + i\underline{w}_1) + (\underline{v}_2 + i\underline{w}_2)) = f_{\mathbb{C}}((\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + i(\underline{w}_1 + \underline{w}_2)) = f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + if(\underline{w}_1 + \underline{w}_2) = (f(\underline{v}_1) + if(\underline{w}_1)) + (f(\underline{v}_2) + if(\underline{w}_2)) = f_{\mathbb{C}}(\underline{v}_1 + i\underline{w}_1) + f_{\mathbb{C}}(\underline{v}_2 + i\underline{w}_2).$
- $f_{\mathbb{C}}((a + bi)(\underline{v} + i\underline{w})) = f_{\mathbb{C}}(a\underline{v} - b\underline{w} + i(a\underline{w} + b\underline{v})) = f(a\underline{v} - b\underline{w}) + if(a\underline{w} + b\underline{v}) = af(\underline{v}) - bf(\underline{w}) + i(af(\underline{w}) + bf(\underline{v})) = (a + bi)(f(\underline{v}) + if(\underline{w})) = (a + bi)f_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}).$

Proposizione. Sia $f_{\mathbb{C}}$ la complessificazione di $f \in \text{End}(V)$, dove V è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} . Sia inoltre $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di V . Valgono allora i seguenti risultati:

- (i) $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}|_V$ assume gli stessi valori di f ,
- (ii) $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f) \in M(n, \mathbb{R})$,
- (iii) $M_{\mathcal{B} \cup i\mathcal{B}}((f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}) = \left(\begin{array}{c|c} M_{\mathcal{B}}(f) & 0 \\ \hline 0 & M_{\mathcal{B}}(f) \end{array} \right).$

Dimostrazione. Si dimostrano i risultati separatamente.

- (i) Si osserva che $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}(\underline{v}_i) = f_{\mathbb{C}}(\underline{v}_i) = f(\underline{v}_i)$. Dal momento che $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$ è \mathbb{R} -lineare, si conclude che $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$ assume gli stessi valori di f .
- (ii) Dal momento che \mathcal{B} , nell'identificazione di $(\underline{v}, 0)$ come \underline{v} , è sempre una base di $V_{\mathbb{C}}$, e $f_{\mathbb{C}}(\underline{v}_i) = f(\underline{v}_i)$, chiaramente $[f_{\mathbb{C}}(\underline{v}_i)]_{\mathcal{B}} = [f(\underline{v}_i)]_{\mathcal{B}}$, e quindi $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f)$, dove si osserva anche che $M_{\mathcal{B}}(f) \in M(n, \mathbb{R})$, essendo V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} .

- (iii) Sia $f(\underline{v}_i) = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n$ con $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Come osservato in (i), $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}|_{\mathcal{B}} = (f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}|_{\mathcal{B}}$, e quindi la prima metà di $M_{\mathcal{B} \cup i\mathcal{B}}((f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}})$ è formata da due blocchi: uno verticale coincidente con $M_{\mathcal{B}}(f)$ e un altro completamente nullo, dal momento che non compare alcun termine di $i\mathcal{B}$ nella scrittura di $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}(\underline{v}_i)$. Al contrario, per $i\mathcal{B}$, $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}(i\underline{v}_i) = f_{\mathbb{C}}(i\underline{v}_i) = if(\underline{v}_i) = a_1(i\underline{v}_1) + \dots + a_n(i\underline{v}_n)$; pertanto la seconda metà della matrice avrà i due blocchi della prima metà, benché scambiati.

□

Osservazione. Dal momento che $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f)$, $f_{\mathbb{C}}$ e f condividono lo stesso polinomio caratteristico e vale che $sp(f) \subseteq sp(f_{\mathbb{C}})$, dove vale l'uguaglianza se e solo se tale polinomio caratteristico è completamente riducibile in \mathbb{R} . Inoltre, se V_{λ} è l'autospazio su V dell'autovalore λ , l'autospazio su $V_{\mathbb{C}}$, rispetto a $f_{\mathbb{C}}$, è invece $V_{\mathbb{C}\lambda} = V_{\lambda} + iV_{\lambda}$, la cui dimensione rimane invariata rispetto a V_{λ} , ossia $\dim V_{\lambda} = \dim V_{\mathbb{C}\lambda}$ (infatti, analogamente a prima, una base di V_{λ} può essere identificata come base anche per $V_{\mathbb{C}\lambda}$).

Proposizione. Sia $f_{\mathbb{C}}$ la complessificazione di $f \in \text{End}(V)$, dove V è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} . Sia inoltre $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di V . Allora un endomorfismo $\tilde{g} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ complessifica un endomorfismo $g \in \text{End}(V) \iff M_{\mathcal{B}}(\tilde{g}) \in M(n, \mathbb{R})$.

Dimostrazione. Se \tilde{g} complessifica $g \in \text{End}(V)$, allora, per la proposizione precedente, $M_{\mathcal{B}}(\tilde{g}) = M_{\mathcal{B}}(g) \in M(n, \mathbb{R})$. Se invece $A = M_{\mathcal{B}}(\tilde{g}) \in M(n, \mathbb{R})$, si considera $g = M_{\mathcal{B}}^{-1}(A) \in \text{End}(V)$. Si verifica facilmente che \tilde{g} non è altro che il complessificato di tale g :

- $\tilde{g}(\underline{v}_i) = g(\underline{v}_i)$, dove l'uguaglianza è data dal confronto delle matrici associate, e quindi $\tilde{g}|_V = g$;
- $\tilde{g}(\underline{v} + i\underline{w}) = \tilde{g}(\underline{v}) + i\tilde{g}(\underline{w}) = g(\underline{v}) + ig(\underline{w})$, da cui la tesi.

□

Proposizione. Sia φ un prodotto scalare di V spazio vettoriale su \mathbb{R} . Allora esiste un unico prodotto hermitiano $\varphi_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ che estende φ (ossia tale che $\varphi_{\mathbb{C}}|_{V \times V} = \varphi$), il quale assume la stessa segnatura di φ .

Dimostrazione. Sia \mathcal{B} una base di Sylvester per φ . Si consideri allora il prodotto $\varphi_{\mathbb{C}}$ tale che:

$$\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v}_1 + i\underline{w}_1, \underline{v}_2 + i\underline{w}_2) = \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2) + \varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2) + i(\varphi(\underline{v}_1, \underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}_1, \underline{v}_2)).$$

Chiaramente $\varphi_{\mathbb{C}}|_{V \times V} = \varphi$. Si verifica allora che $\varphi_{\mathbb{C}}$ è hermitiano:

- $\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}, (\underline{v}_1 + i\underline{w}_1) + (\underline{v}_2 + i\underline{w}_2)) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}_1 + \underline{w}_2) + i(\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1 + \underline{w}_2) - \varphi(\underline{w}, \underline{v}_1 + \underline{v}_2)) = [\varphi(\underline{v}, \underline{v}_1) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}_1) + i(\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}, \underline{v}_1))] + [\varphi(\underline{v}, \underline{v}_2) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}_2) + i(\varphi(\underline{v}, \underline{w}_2) - \varphi(\underline{w}, \underline{v}_2))] = \varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}, \underline{v}_1 + i\underline{w}_1) + \varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}, \underline{v}_2 + i\underline{w}_2)$ (additività nel secondo argomento),
- $\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}, (a + bi)(\underline{v}_1 + i\underline{w}_1)) = \varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}, a\underline{v}_1 - b\underline{w}_1 + i(b\underline{v}_1 + a\underline{w}_1)) = \varphi(\underline{v}, a\underline{v}_1 - b\underline{w}_1) + \varphi(\underline{w}, b\underline{v}_1 + a\underline{w}_1) + i(\varphi(\underline{v}, b\underline{v}_1 + a\underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}, a\underline{v}_1 - b\underline{w}_1)) = a\varphi(\underline{v}, \underline{v}_1) - b\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) + b\varphi(\underline{w}, \underline{v}_1) + a\varphi(\underline{w}, \underline{w}_1) + i(b\varphi(\underline{v}, \underline{v}_1) + a\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) - a\varphi(\underline{w}, \underline{v}_1) + b\varphi(\underline{w}, \underline{w}_1)) = a(\varphi(\underline{v}, \underline{v}_1) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}_1)) - b(\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}, \underline{v}_1)) + i(a(\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}, \underline{v}_1)) + b(\varphi(\underline{v}, \underline{v}_1) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}_1))) = (a + bi)(\varphi(\underline{v}, \underline{v}_1) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}_1) + i(\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}, \underline{v}_1))) = (a + bi)\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v} + \underline{w}, \underline{v}_1 + i\underline{w}_1)$ (omogeneità nel secondo argomento),
- $\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v}_1 + i\underline{w}_1, \underline{v}_2 + i\underline{w}_2) = \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2) + \varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2) + i(\varphi(\underline{v}_1, \underline{w}_2) - \varphi(\underline{w}_1, \underline{v}_2)) = \overline{\varphi(\underline{v}_2, \underline{v}_1) + \varphi(\underline{w}_2, \underline{w}_1) + i(\varphi(\underline{v}_2, \underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}_2, \underline{v}_1))} = \overline{\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v}_2 + \underline{w}_2, \underline{v}_1 + \underline{w}_1)}$ (coniugio nello scambio degli argomenti).

Ogni prodotto hermitiano τ che estende il prodotto scalare φ ha la stessa matrice associata nella base \mathcal{B} , essendo $\tau(\underline{v}_i, \underline{v}_i) = \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)$ vero per ipotesi. Pertanto τ è unico, e vale che $\tau = \varphi_{\mathbb{C}}$. Dal momento che $M_{\mathcal{B}}(\varphi_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è una matrice di Sylvester, $\varphi_{\mathbb{C}}$ mantiene anche la stessa segnatura di φ . \square

Teorema. (di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare) Sia V uno spazio vettoriale e sia φ un suo prodotto scalare non degenerare. Allora per ogni $f \in V^*$ esiste un unico $\underline{v} \in V$ tale che $f(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \forall \underline{w} \in V$.

Dimostrazione. Si consideri l'applicazione a_{φ} . Poiché φ non è degenerare, $\text{Ker } a_{\varphi} = V^{\perp} = \{0\}$, da cui si deduce che a_{φ} è un isomorfismo. Quindi $\forall f \in V^*$ esiste un unico $\underline{v} \in V$ tale per cui $a_{\varphi}(\underline{v}) = f$, e dunque tale per cui $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = a_{\varphi}(\underline{v})(\underline{w}) = f(\underline{w}) \forall \underline{w} \in V$. \square

Dimostrazione costruttiva. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base ortogonale di V per φ . Allora \mathcal{B}^* è una base di V^* . In particolare $f = f(\underline{v}_1)\underline{v}_1^* + \dots + f(\underline{v}_n)\underline{v}_n^*$. Sia $\underline{v} = \frac{f(\underline{v}_1)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)}\underline{v}_1 + \dots + \frac{f(\underline{v}_n)}{\varphi(\underline{v}_n, \underline{v}_n)}\underline{v}_n$. Detto $\underline{w} = a_1\underline{v}_1 + \dots + a_n\underline{v}_n$, si deduce che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = a_1f(\underline{v}_1) + \dots + a_nf(\underline{v}_n) = f(\underline{w})$. Se esistesse $\underline{v}' \in V$ con la stessa proprietà di \underline{v} , $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \implies \varphi(\underline{v} - \underline{v}', \underline{w}) \forall \underline{w} \in V$. Si

deduce dunque che $\underline{v} - \underline{v}' \in V^\perp$, contenente solo $\underline{0}$ dacché φ è non degenerare; e quindi si conclude che $\underline{v} = \underline{v}'$, ossia che esiste solo un vettore con la stessa proprietà di \underline{v} . \square

Teorema. (di rappresentazione di Riesz per il prodotto hermitiano) Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{C} e sia φ un suo prodotto hermitiano non degenerare. Allora per ogni $f \in V^*$ esiste un unico $\underline{v} \in V$ tale che $f(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \forall \underline{w} \in V$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base ortogonale di V per φ . Allora \mathcal{B}^* è una base di V^* . In particolare $f = f(\underline{v}_1)\underline{v}_1^* + \dots + f(\underline{v}_n)\underline{v}_n^*$. Sia $\underline{v} = \frac{\overline{f(\underline{v}_1)}}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)}\underline{v}_1 + \dots + \frac{\overline{f(\underline{v}_n)}}{\varphi(\underline{v}_n, \underline{v}_n)}\underline{v}_n$. Detto $\underline{w} = a_1\underline{v}_1 + \dots + a_n\underline{v}_n$, si deduce che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = a_1f(\underline{v}_1) + \dots + a_nf(\underline{v}_n) = f(\underline{w})$. Se esistesse $\underline{v}' \in V$ con la stessa proprietà di \underline{v} , $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \implies \varphi(\underline{v} - \underline{v}', \underline{w}) \forall \underline{w} \in V$. Si deduce dunque che $\underline{v} - \underline{v}' \in V^\perp$, contenente solo $\underline{0}$ dacché φ è non degenerare; e quindi si conclude che $\underline{v} = \underline{v}'$, ossia che esiste solo un vettore con la stessa proprietà di \underline{v} . \square

Proposizione. Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare φ non degenerare. Sia $f \in \text{End}(V)$. Allora esiste un unico endomorfismo $f_\varphi^\top : V \rightarrow V$, detto il **trasposto di f** e indicato con f^\top in assenza di ambiguità³, tale che:

$$a_\varphi \circ g = f^\top \circ a_\varphi,$$

ossia che:

$$\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(g(\underline{v}), \underline{w}) \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V.$$

Dimostrazione. Si consideri $(f^\top \circ a_\varphi)(\underline{v}) \in V^*$. Per il teorema di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare, esiste un unico \underline{v}' tale che $(f^\top \circ a_\varphi)(\underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \implies \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \forall \underline{w} \in V$. Si costruisce allora una mappa $f_\varphi^\top : V \rightarrow V$ che associa a \underline{v} tale \underline{v}' . Si dimostra che f_φ^\top è un'applicazione lineare, e che dunque è un endomorfismo:

- (i) Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$. Si deve dimostrare innanzitutto che $f_\varphi^\top(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f_\varphi^\top(\underline{v}_1) + f_\varphi^\top(\underline{v}_2)$, ossia che $\varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}_1) + f_\varphi^\top(\underline{v}_2), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, f(\underline{w})) \forall \underline{w} \in V$.

³Si tenga infatti in conto della differenza tra $f_\varphi^\top : V \rightarrow V$, di cui si discute nell'enunciato, e $f^\top : V^* \rightarrow V^*$ che invece è tale che $f^\top \circ p(g) = g \circ f$.

Si osservano le seguenti identità:

$$\begin{aligned}\varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, f(\underline{w})) &= \varphi(\underline{v}_1, f(\underline{w})) + \varphi(\underline{v}_2, f(\underline{w})) = (*), \\ \varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}_1) + f_\varphi^\top(\underline{v}_2), \underline{w}) &= \varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}_1), \underline{w}) + \varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}_2), \underline{w}) = (*),\end{aligned}$$

da cui si deduce l'uguaglianza desiderata, essendo $f_\varphi^\top(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)$ l'unico vettore di V con la proprietà enunciata dal teorema di rappresentazione di Riesz.

- (ii) Sia $\underline{v} \in V$. Si deve dimostrare che $f_\varphi^\top(a\underline{v}) = af_\varphi^\top(\underline{v})$, ossia che $\varphi(af_\varphi^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(a\underline{v}, f(\underline{w})) \forall a \in \mathbb{K}, \underline{w} \in V$. È sufficiente moltiplicare per a l'identità $\varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$. Analogamente a prima, si deduce che $f_\varphi^\top(a\underline{v}) = af_\varphi^\top(\underline{v})$, essendo $f_\varphi^\top(a\underline{v})$ l'unico vettore di V con la proprietà enunciata dal teorema di rappresentazione di Riesz.

Infine si dimostra che f_φ^\top è unico. Sia infatti g un endomorfismo di V che condivide la stessa proprietà di f_φ^\top . Allora $\varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(g(\underline{v}), \underline{w}) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, da cui si deduce che $\varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}) - g(\underline{v}), \underline{w}) = 0 \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, ossia che $f_\varphi^\top(\underline{v}) - g(\underline{v}) \in V^\perp \forall \underline{v} \in V$. Tuttavia φ è non degenere, e quindi $V^\perp = \{0\}$, da cui si deduce che deve valere l'identità $f_\varphi^\top(\underline{v}) = g(\underline{v}) \forall \underline{v} \in V$, ossia $g = f_\varphi^\top$. \square

Proposizione. Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{C} e sia φ un suo prodotto hermitiano. Allora esiste un'unica mappa⁴ $f^* : V \rightarrow V$, detta **aggiunto di f** , tale che $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$.

Dimostrazione. Sia $\underline{v} \in V$. Si consideri il funzionale σ tale che $\sigma(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$. Per il teorema di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare esiste un unico $\underline{v}' \in V$ tale per cui $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \sigma(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w})$. Si costruisce allora una mappa f^* che associa \underline{v} a tale \underline{v}' .

Si dimostra infine che la mappa f^* è unica. Sia infatti $\mu : V \rightarrow V$ che condivide la stessa proprietà di f^* . Allora $\varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\mu(\underline{v}), \underline{w}) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, da cui si deduce che $\varphi(f^*(\underline{v}) - \mu(\underline{v}), \underline{w}) = 0 \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, ossia che $f^*(\underline{v}) - \mu(\underline{v}) \in V^\perp \forall \underline{v} \in V$. Tuttavia φ è non degenere, e quindi $V^\perp = \{0\}$, da cui si deduce che deve valere l'identità $f^*(\underline{v}) = \mu(\underline{v}) \forall \underline{v} \in V$, ossia $\mu = f^*$. \square

⁴Si osservi che f^* non è un'applicazione lineare, benché sia invece *antilineare*.

Osservazione. L'operazione di trasposizione di un endomorfismo sul prodotto scalare non degenera φ è un'involuzione. Infatti valgono le seguenti identità $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$:

$$\begin{cases} \varphi(\underline{w}, f^\top(\underline{v})) = \varphi(f^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})), \\ \varphi(\underline{w}, f^\top(\underline{v})) = \varphi((f^\top)^\top(\underline{w}), \underline{v}) = \varphi(\underline{v}, (f^\top)^\top(\underline{w})). \end{cases}$$

Si conclude allora, poiché φ è non degenera, che $f(\underline{w}) = (f^\top)^\top(\underline{w}) \forall \underline{w} \in V$, ossia che $f = (f^\top)^\top$.

Osservazione. Analogamente si può dire per l'operazione di aggiunta per un prodotto hermitiano φ non degenera. Valgono infatti le seguenti identità $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$:

$$\begin{cases} \overline{\varphi(\underline{w}, f^*(\underline{v}))} = \varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})), \\ \overline{\varphi(\underline{w}, f^*(\underline{v}))} = \varphi((f^*)^*(\underline{w}), \underline{v}) = \varphi(\underline{v}, (f^*)^*(\underline{w})), \end{cases}$$

da cui si deduce, come prima, che $f = (f^*)^*$.

Definizione. (base ortonormale) Si definisce **base ortonormale** di uno spazio vettoriale V su un suo prodotto φ una base ortogonale $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ tale che $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \delta_{ij}$.

Proposizione. Sia φ un prodotto scalare non degenera di V . Sia $f \in \text{End}(V)$. Allora vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^\top) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1} M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi),$$

dove \mathcal{B} è una base di V .

Dimostrazione. Sia \mathcal{B}^* la base relativa a \mathcal{B} in V^* . Per la proposizione precedente vale la seguente identità:

$$a_\varphi \circ f_\varphi^\top = f^\top \circ a_\varphi.$$

Pertanto, passando alle matrici associate, si ricava che:

$$M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(a_\varphi) M_{\mathcal{B}}(f_\varphi^\top) = M_{\mathcal{B}^*}(f^\top) M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(a_\varphi).$$

Dal momento che valgono le seguenti due identità:

$$M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(a_\varphi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi), \quad M_{\mathcal{B}^*}(f^\top) = M_{\mathcal{B}}(f)^\top,$$

e a_φ è invertibile (per cui anche $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ lo è), si conclude che:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi)M_{\mathcal{B}}(f_{\varphi}^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top}M_{\mathcal{B}}(\varphi) \implies M_{\mathcal{B}}(f_{\varphi}^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1}M_{\mathcal{B}}(f)^{\top}M_{\mathcal{B}}(\varphi),$$

da cui la tesi. \square

Corollario. Sia φ un prodotto scalare di V . Se \mathcal{B} è una base ortonormale, φ è non degenere e $M_{\mathcal{B}}(f_{\varphi}^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top}$.

Dimostrazione. Se \mathcal{B} è una base ortonormale, $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$. Pertanto φ è non degenere. Allora, per la proposizione precedente:

$$M_{\mathcal{B}}(f_{\varphi}^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1}M_{\mathcal{B}}(f)^{\top}M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top}.$$

\square

Proposizione. Sia φ un prodotto hermitiano non degenere di V . Sia $f \in \text{End}(V)$. Allora vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}}(f_{\varphi}^*) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1}M_{\mathcal{B}}(f)^*M_{\mathcal{B}}(\varphi),$$

dove \mathcal{B} è una base di V .

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Dal momento che φ è non degenere, $\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi) = V^{\perp} = \{0\}$, e quindi $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è invertibile.

Dacché allora $\varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, vale la seguente identità:

$$[f^*(\underline{v})]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [f(\underline{w})]_{\mathcal{B}},$$

ossia si deduce che:

$$[\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f^*)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}.$$

Sostituendo allora a \underline{v} e \underline{w} i vettori della base \mathcal{B} , si ottiene che:

$$\begin{aligned} (M_{\mathcal{B}}(f^*)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi))_{ij} &= [\underline{v}_i]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f^*)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{v}_j]_{\mathcal{B}} = \\ &= [\underline{v}_i]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{v}_j]_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f))_{ij}, \end{aligned}$$

e quindi che $M_{\mathcal{B}}(f^*)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f)$. Moltiplicando a destra per l'inversa di $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ e prendendo l'aggiunta di ambo i membri (ricordando che $M_{\mathcal{B}}(\varphi)^* = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, essendo φ un prodotto hermitiano), si ricava l'identità desiderata. \square

Corollario. Sia φ un prodotto hermitiano di V spazio vettoriale su \mathbb{C} . Se \mathcal{B} è una base ortonormale, φ è non degenere e $M_{\mathcal{B}}(f_{\varphi}^*) = M_{\mathcal{B}}(f)^*$.

Dimostrazione. Se \mathcal{B} è una base ortonormale, $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$. Pertanto φ è non degenere. Allora, per la proposizione precedente:

$$M_{\mathcal{B}}(f_{\varphi}^*) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1} M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}(f)^*.$$

□

Nota. D'ora in poi, nel corso del documento, s'intenderà per φ un prodotto scalare (o eventualmente hermitiano) non degenere di V .

Definizione. (operatori simmetrici) Sia $f \in \text{End}(V)$. Si dice allora che f è **simmetrico** (o *autoaggiunto*) se $f = f^{\top}$.

Definizione. (applicazioni e matrici ortogonali) Sia $f \in \text{End}(V)$. Si dice allora che f è **ortogonale** se $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$. Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$. Si dice dunque che A è **ortogonale** se $A^{\top} A = A A^{\top} = I_n$.

Definizione. Le matrici ortogonali di $M(n, \mathbb{K})$ formano un sottogruppo moltiplicativo di $\text{GL}(n, \mathbb{K})$, detto **gruppo ortogonale**, e indicato con O_n . Il sottogruppo di O_n contenente solo le matrici con determinante pari a 1 è detto **gruppo ortogonale speciale**, e si denota con SO_n .

Osservazione. Si possono classificare in modo semplice alcuni di questi gruppi ortogonali per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

- $A \in O_n \implies 1 = \det(I_n) = \det(AA^{\top}) = \det(A)^2 \implies \det(A) = \pm 1$.
- $A = (a) \in O_1 \iff A^{\top} A = I_1 \iff a^2 = 1 \iff a = \pm 1$, da cui si ricava che l'unica matrice di SO_1 è (1). Si osserva inoltre che O_1 è abeliano di ordine 2, e quindi che $O_1 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2 \iff \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab + cd \\ ab + cd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = A^{\top} A = I_2 \iff \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1, \\ ab + cd = 0. \end{cases}$

Si ricava pertanto che si può identificare A con le funzioni trigonometriche $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$ nelle due forme:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (\det(A) = 1, A \in SO_2),$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (\det(A) = -1).$$

Definizione. (applicazioni e matrici hermitiane) Sia $f \in \text{End}(V)$ e si consideri il prodotto hermitiano φ . Si dice allora che f è **hermitiano** se $f = f^*$. Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$. Si dice dunque che A è **hermitiana** se $A = A^*$.

Definizione. (applicazioni e matrici unitarie) Sia $f \in \text{End}(V)$ e si consideri il prodotto hermitiano φ . Si dice allora che f è **unitario** se $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$. Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$. Si dice dunque che A è **unitaria** se $A^*A = AA^* = I_n$.

Definizione. Le matrici unitarie di $M(n, \mathbb{C})$ formano un sottogruppo moltiplicativo di $\text{GL}(n, \mathbb{C})$, detto **gruppo unitario**, e indicato con U_n . Il sottogruppo di U_n contenente solo le matrici con determinante pari a 1 è detto **gruppo unitario speciale**, e si denota con SU_n .

Osservazione.

- $A \in U_n \implies 1 = \det(I_n) = \det(AA^*) = \det(A)\overline{\det(A)} = |\det(A)|^2 = 1$.
- $A = (a) \in U_1 \iff A^*A = I_1 \iff |a|^2 = 1 \iff a = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi)$, ossia il numero complesso a appartiene alla circonferenza di raggio unitario.

Definizione. (spazio euclideo reale) Si definisce **spazio euclideo reale** uno spazio vettoriale V su \mathbb{R} dotato del prodotto scalare standard $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definizione. (spazio euclideo complesso) Si definisce **spazio euclideo complesso** uno spazio vettoriale V su \mathbb{C} dotato del prodotto hermitiano standard $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Proposizione. Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale e sia \mathcal{B} una base ortonormale di V . Allora $f \in \text{End}(V)$ è simmetrico $\iff M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} \iff M_{\mathcal{B}}(f)$ è simmetrica.

Dimostrazione. Per il corollario precedente, f è simmetrico $\iff f = f^{\top} \iff M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top}$. \square

Proposizione. Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale e sia \mathcal{B} una base ortonormale di V . Allora $f \in \text{End}(V)$ è ortogonale $\iff M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top}M_{\mathcal{B}}(f) = I_n \stackrel{\text{def}}{\iff} M_{\mathcal{B}}(f)$ è ortogonale.

Dimostrazione. Si osserva che $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$. Se f è ortogonale, allora $[\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{v}]_{\mathcal{B}})^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}$. Allora, come visto nel corollario precedente, si ricava che $M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(f) = I_n$. Dal momento che gli inversi sinistri sono anche

inversi destri, $M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(f)^\top = I_n$.

Se invece $M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(f)^\top = I_n$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^\top [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^\top M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{v}]_{\mathcal{B}})^\top (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{v}]_{\mathcal{B}})^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi)(M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$, e quindi f è ortogonale. \square

Proposizione. Sia (V, φ) uno spazio euclideo complesso e sia \mathcal{B} una base ortonormale di V . Allora $f \in \text{End}(V)$ è hermitiano $\iff M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f)^* \stackrel{\text{def}}{\iff} M_{\mathcal{B}}(f)$ è hermitiana.

Dimostrazione. Per il corollario precedente, f è hermitiana $\iff f = f^* \iff M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f^*) = M_{\mathcal{B}}(f)^*$. \square

Proposizione. Sia (V, φ) uno spazio euclideo complesso e sia \mathcal{B} una base ortonormale di V . Allora $f \in \text{End}(V)$ è unitario $\iff M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(f)^* = M_{\mathcal{B}}(f)^*M_{\mathcal{B}}(f) = I_n \stackrel{\text{def}}{\iff} M_{\mathcal{B}}(f)$ è unitaria.

Dimostrazione. Si osserva che $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$. Se f è unitario, allora $[\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{v}]_{\mathcal{B}})^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}$. Allora, come visto nel corollario precedente, si ricava che $M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) = I_n$. Dal momento che gli inversi sinistri sono anche inversi destri, $M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^* = I_n$.

Se invece $M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^* = I_n$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{v}]_{\mathcal{B}})^* (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{v}]_{\mathcal{B}})^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$, e quindi f è unitario. \square

Osservazione. Se \mathcal{B} è una base ortonormale di (V, φ) , ricordando che $M_{\mathcal{B}}(f^\top) = M_{\mathcal{B}}(f)^\top$ e che $M_{\mathcal{B}}(f^*) = M_{\mathcal{B}}(f)^*$, sono equivalenti allora i seguenti fatti:

- $f \circ f^\top = f^\top \circ f = Id_V \iff M_{\mathcal{B}}(f)$ è ortogonale $\iff f$ è ortogonale,
- $f \circ f^* = f^* \circ f = Id_V \iff M_{\mathcal{B}}(f)$ è unitaria $\iff f$ è unitario (se V è uno spazio vettoriale su \mathbb{C}).

Proposizione. Sia $V = \mathbb{R}^n$ uno spazio vettoriale col prodotto scalare standard φ . Allora sono equivalenti i seguenti fatti:

- (i) $A \in O_n$,

- (ii) f_A è un operatore ortogonale,
- (iii) le colonne e le righe di A formano una base ortonormale di V .

Dimostrazione. Sia \mathcal{B} la base canonica di V . Allora $M_{\mathcal{B}}(f_A) = A$, e quindi, per una proposizione precedente, f_A è un operatore ortogonale. Viceversa si deduce che se f_A è un operatore ortogonale, $A \in O_n$. Dunque è sufficiente dimostrare che $A \in O_n \iff$ le colonne e le righe di A formano una base ortonormale di V .

(\implies) Se $A \in O_n$, in particolare $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$, e quindi A è invertibile. Allora le sue colonne e le sue righe formano già una base di V , essendo n vettori di V linearmente indipendenti. Inoltre, poiché $A \in O_n$, $\varphi(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = \varphi(A\underline{e}_i, A\underline{e}_j)$, e quindi le colonne di A si mantengono a due a due ortogonali tra di loro, mentre $\varphi(A\underline{e}_i, A\underline{e}_i) = \varphi(\underline{e}_i, \underline{e}_i) = 1$. Pertanto le colonne di A formano una base ortonormale di V .

Si osserva che anche $A^\top \in O_n$. Allora le righe di A , che non sono altro che le colonne di A^\top , formano anch'esse una base ortonormale di V .

(\impliedby) Nel moltiplicare A^\top con A altro non si sta facendo che calcolare il prodotto scalare φ tra ogni riga di A^\top e ogni colonna di A , ossia $(A^*A)_{ij} = \varphi((A^\top)_i, A^j) = \varphi(A^i, A^j) = \delta_{ij}$. Quindi $A^\top A = AA^\top = I_n$, da cui si deduce che $A \in O_n$. \square

Proposizione. Sia $V = \mathbb{C}^n$ uno spazio vettoriale col prodotto hermitiano standard φ . Allora sono equivalenti i seguenti fatti:

- (i) $A \in U_n$,
- (ii) f_A è un operatore unitario,
- (iii) le colonne e le righe di A formano una base ortonormale di V .

Dimostrazione. Sia \mathcal{B} la base canonica di V . Allora $M_{\mathcal{B}}(f_A) = A$, e quindi, per una proposizione precedente, f_A è un operatore unitario. Viceversa si deduce che se f_A è un operatore unitario, $A \in U_n$. Dunque è sufficiente dimostrare che $A \in U_n \iff$ le colonne e le righe di A formano una base ortonormale di V .

(\implies) Se $A \in U_n$, in particolare $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$, e quindi A è invertibile. Allora le sue colonne e le sue righe formano già una base di V , essendo n vettori di V linearmente indipendenti. Inoltre, poiché $A \in U_n$, $\varphi(e_i, e_j) = \varphi(Ae_i, Ae_j)$, e quindi le colonne di A si mantengono a due a due ortogonali tra di loro, mentre $\varphi(Ae_i, Ae_i) = \varphi(e_i, e_i) = 1$. Pertanto le colonne di A formano una base ortonormale di V .

Si osserva che anche $A^\top \in U_n$. Allora le righe di A , che non sono altro che le colonne di A^\top , formano anch'esse una base ortonormale di V .

(\impliedby) Nel moltiplicare A^* con A altro non si sta facendo che calcolare il prodotto hermitiano φ tra ogni riga coniugata di A^* e ogni colonna di A , ossia $(A^*A)_{ij} = \varphi((A^\top)_i, A^j) = \varphi(A^i, A^j) = \delta_{ij}$. Quindi $A^*A = AA^* = I_n$, da cui si deduce che $A \in U_n$. \square

Proposizione. Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale. Allora valgono i seguenti tre risultati:

- (i) $(V_{\mathbb{C}}, \varphi_{\mathbb{C}})$ è uno spazio euclideo complesso.
- (ii) Se $f \in \text{End}(V)$ è simmetrico, allora $f_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V)$ è hermitiano.
- (iii) Se $f \in \text{End}(V)$ è ortogonale, allora $f_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V)$ è unitario.

Dimostrazione. Dacché φ è il prodotto scalare standard dello spazio euclideo reale V , esiste una base ortonormale di V . Sia allora \mathcal{B} una base ortonormale di V . Si dimostrano i tre risultati separatamente.

- È sufficiente dimostrare che $\varphi_{\mathbb{C}}$ altro non è che il prodotto hermitiano standard. Come si è già osservato precedentemente, $M_{\mathcal{B}}(\varphi_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, e quindi, dacché $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$, essendo \mathcal{B} ortonormale, vale anche che $M_{\mathcal{B}}(\varphi_{\mathbb{C}}) = I_n$, ossia $\varphi_{\mathbb{C}}$ è proprio il prodotto hermitiano standard.
- Poiché f è simmetrico, $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f)^\top$, e quindi anche $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^\top$. Dal momento che $M_{\mathcal{B}}(f) \in M(n, \mathbb{R})$, $M_{\mathcal{B}}(f) = \overline{M_{\mathcal{B}}(f)} \implies M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^\top = M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^*$. Quindi $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^*$, ossia $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})$ è hermitiana, e pertanto anche $f_{\mathbb{C}}$ è hermitiano.
- Poiché f è ortogonale, $M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(f)^\top = I_n$, e quindi anche $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^\top = I_n$. Allora, come prima, si deduce che $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^\top = M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^*$, essendo $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f) \in M(n, \mathbb{R})$, da cui si ricava che

$$M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^* = M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^{\top} = I_n, \text{ ossia che } f_{\mathbb{C}} \text{ è unitario.}$$

□

Esercizio 1. Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale. Allora valgono i seguenti risultati:

- Se $f, g \in \text{End}(V)$ commutano, allora anche $f_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V_{\mathbb{C}})$ commutano.
- Se $f \in \text{End}(V)$, $(f^{\top})_{\mathbb{C}} = (f_{\mathbb{C}})^*$.
- Se $f \in \text{End}(V)$, f diagonalizzabile $\iff f^{\top}$ diagonalizzabile.

Soluzione. Dacché φ è il prodotto scalare standard dello spazio euclideo reale V , esiste una base ortonormale $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ di V . Si dimostrano allora separatamente i tre risultati.

- Si osserva che $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})M_{\mathcal{B}}(g_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(g) = M_{\mathcal{B}}(g)M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(g_{\mathbb{C}})M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})$, e quindi che $f_{\mathbb{C}} \circ g_{\mathbb{C}} = g_{\mathbb{C}} \circ f_{\mathbb{C}}$.
- Si osserva che $M_{\mathcal{B}}(f) \in M(n, \mathbb{R}) \implies M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = M_{\mathcal{B}}(f)^*$, e quindi che $M_{\mathcal{B}}((f^{\top})_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = M_{\mathcal{B}}(f)^* = M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^* = M_{\mathcal{B}}((f_{\mathbb{C}})^*)$. Allora $(f^{\top})_{\mathbb{C}} = (f_{\mathbb{C}})^*$.
- Poiché \mathcal{B} è ortonormale, $M_{\mathcal{B}}(f^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top}$. Allora, se f è diagonalizzabile, anche $M_{\mathcal{B}}(f)$ lo è, e quindi $\exists P \in \text{GL}(n, \mathbb{K}), D \in M(n, \mathbb{K})$ diagonale tale che $M_{\mathcal{B}}(f) = PDP^{-1}$. Allora $M_{\mathcal{B}}(f^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = (P^{\top})^{-1}D^{\top}P^{\top}$ è simile ad una matrice diagonale, e pertanto $M_{\mathcal{B}}(f^{\top})$ è diagonalizzabile. Allora anche f^{\top} è diagonalizzabile. Vale anche il viceversa considerando l'identità $f = (f^{\top})^{\top}$ e l'implicazione appena dimostrata.

Nota. D'ora in poi, qualora non specificato diversamente, si assumerà che V sia uno spazio euclideo, reale o complesso.

Definizione. (norma euclidea) Sia (V, φ) un qualunque spazio euclideo. Si definisce **norma** la mappa $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ tale che $\|\underline{v}\| = \sqrt{\varphi(\underline{v}, \underline{v})}$.

Definizione. (distanza euclidea tra due vettori) Sia (V, φ) un qualunque spazio euclideo. Si definisce **distanza** la mappa $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$ tale che $d(\underline{v}, \underline{w}) = \|\underline{v} - \underline{w}\|$.

Osservazione.

► Si osserva che in effetti $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}^+ \forall \underline{v} \in V$. Infatti, sia per il caso reale che per il caso complesso, φ è definito positivo.

► Vale che $\|\underline{v}\| = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$. Infatti, se $\underline{v} = \underline{0}$, chiaramente $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0 \implies \|\underline{v}\| = 0$; se invece $\|\underline{v}\| = 0$, $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$, e quindi $\underline{v} = \underline{0}$, dacché $V^\perp = \{\underline{0}\}$, essendo φ definito positivo.

► Inoltre, vale chiaramente che $\|\alpha \underline{v}\| = |\alpha| \|\underline{v}\|$.

Proposizione. (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) Vale che $\|\underline{v}\| \|\underline{w}\| \geq |\varphi(\underline{v}, \underline{w})|$, $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, dove l'uguaglianza è raggiunta soltanto se \underline{v} e \underline{w} sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione. Si consideri innanzitutto il caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, e quindi il caso in cui φ è il prodotto scalare standard. Siano $\underline{v}, \underline{w} \in V$. Si consideri la disuguaglianza $\|\underline{v} + t\underline{w}\|^2 \geq 0$, valida per ogni elemento di V . Allora $\|\underline{v} + t\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + 2\varphi(\underline{v}, \underline{w})t + \|\underline{w}\|^2 t^2 \geq 0$. L'ultima disuguaglianza è possibile se e solo se $\frac{\Delta}{4} \leq 0$, e quindi se e solo se $\varphi(\underline{v}, \underline{w})^2 - \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 \leq 0 \iff \|\underline{v}\| \|\underline{w}\| \geq \varphi(\underline{v}, \underline{w})$. Vale in particolare l'equivalenza se e solo se $\|\underline{v} + t\underline{w}\| = 0$, ossia se $\underline{v} + t\underline{w} = \underline{0}$, da cui la tesi.

Si consideri ora il caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, e dunque il caso in cui φ è il prodotto hermitiano standard. Siano $\underline{v}, \underline{w} \in V$, e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Si consideri allora la disuguaglianza $\|\alpha \underline{v} + \beta \underline{w}\|^2 \geq 0$, valida per ogni elemento di V . Allora $\|\alpha \underline{v} + \beta \underline{w}\|^2 = \|\alpha \underline{v}\|^2 + \varphi(\alpha \underline{v}, \beta \underline{w}) + \varphi(\beta \underline{w}, \alpha \underline{v}) + \|\beta \underline{w}\|^2 = |\alpha|^2 \|\underline{v}\|^2 + \bar{\alpha}\beta \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \alpha\bar{\beta} \varphi(\underline{w}, \underline{v}) + |\beta|^2 \|\underline{w}\|^2 \geq 0$. Ponendo allora $\alpha = \|\underline{w}\|^2$ e $\beta = -\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = -\overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}$, si deduce che:

$$\|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^4 - \|\underline{w}\|^2 |\varphi(\underline{v}, \underline{w})| \geq 0.$$

Se $\underline{w} = \underline{0}$, la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz è già dimostrata. Altrimenti, è sufficiente dividere per $\|\underline{w}\|^2$ (dal momento che $\underline{w} \neq \underline{0} \iff \|\underline{w}\| \neq 0$) per ottenere la tesi. Come prima, si osserva che l'uguaglianza si ottiene se e solo se \underline{v} e \underline{w} sono linearmente dipendenti. \square

Proposizione. (disuguaglianza triangolare) $\|\underline{v} + \underline{w}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|$.

Dimostrazione. Si osserva che $\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \varphi(\underline{w}, \underline{v}) + \|\underline{w}\|^2$. Se φ è il prodotto scalare standard, si ricava che:

$$\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + 2\varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \|\underline{w}\|^2 \leq \|\underline{v}\|^2 + 2\|\underline{v}\| \|\underline{w}\| + \|\underline{w}\|^2 = (\|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|)^2,$$

dove si è utilizzata la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Da quest'ultima disuguaglianza si ricava, prendendo la radice quadrata, la disuguaglianza

desiderata.

Se invece φ è il prodotto hermitiano standard, $\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + 2\Re(\varphi(\underline{v}, \underline{w})) + \|\underline{w}\|^2 \leq \|\underline{v}\|^2 + 2|\varphi(\underline{v}, \underline{w})| + \|\underline{w}\|^2$. Allora, riapplicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ottiene che:

$$\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 \leq (\|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|)^2,$$

da cui, come prima, si ottiene la disuguaglianza desiderata. \square

Osservazione. Utilizzando il concetto di norma euclidea, si possono ricavare due teoremi fondamentali della geometria, e già noti dalla geometria euclidea.

- Se $\underline{v} \perp \underline{w}$, allora $\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \overbrace{(\varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \varphi(\underline{w}, \underline{v}))}^{=0} + \|\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2$ (teorema di Pitagora),
- Se $\|\underline{v}\| = \|\underline{w}\|$ e φ è un prodotto scalare, allora $\varphi(\underline{v} + \underline{w}, \underline{v} - \underline{w}) = \|\underline{v}\|^2 - \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \varphi(\underline{w}, \underline{v}) - \|\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 - \|\underline{w}\|^2 = 0$, e quindi $\underline{v} + \underline{w} \perp \underline{v} - \underline{w}$ (le diagonali di un rombo sono ortogonali tra loro).

Osservazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è una base ortogonale di V per φ .

- Se $\underline{v} = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n$, con $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, si osserva che $\varphi(\underline{v}, \underline{v}_i) = a_i \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)$. Quindi $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)} \underline{v}_i$. In particolare, $\frac{\varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)}$ è detto **coefficiente di Fourier** di \underline{v} rispetto a \underline{v}_i , e si indica con $C(\underline{v}, \underline{v}_i)$. Se \mathcal{B} è ortonormale, $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \varphi(\underline{v}, \underline{v}_i) \underline{v}_i$.
- Quindi $\|\underline{v}\|^2 = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)^2}{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)}$. In particolare, se \mathcal{B} è ortonormale, $\|\underline{v}\|^2 = \sum_{i=1}^n \varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)^2$. In tal caso, si può esprimere la disuguaglianza di Bessel: $\|\underline{v}\|^2 \geq \sum_{i=1}^k \varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)^2$ per $k \leq n$.

Osservazione. (algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt) Se φ è non degenere (o in generale, se $\text{CI}(\varphi) = \{0\}$) ed è data una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ per V (dove si ricorda che deve valere $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$), è possibile applicare l'**algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt** per ottenere da \mathcal{B} una nuova base $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1', \dots, \underline{v}_n'\}$ con le seguenti proprietà:

- (i) \mathcal{B}' è una base ortogonale,
- (ii) \mathcal{B}' mantiene la stessa bandiera di \mathcal{B} (ossia $\text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i) = \text{Span}(\underline{v}_1', \dots, \underline{v}_i')$ per ogni $1 \leq i \leq n$).

L'algoritmo si applica nel seguente modo: si prenda in considerazione \underline{v}_1 e sottragga ad ogni altro vettore della base il vettore $C(\underline{v}_1, v_i)\underline{v}_1 = \frac{\varphi(\underline{v}_1, v_i)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)}\underline{v}_1$, rendendo ortogonale ogni altro vettore della base con \underline{v}_1 . Pertanto si applica la mappa $\underline{v}_i \mapsto \underline{v}_i - \frac{\varphi(\underline{v}_1, v_i)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)}\underline{v}_1 = \underline{v}_i^{(1)}$. Si verifica infatti che \underline{v}_1 e $\underline{v}_i^{(1)}$ sono ortogonali per $2 \leq i \leq n$:

$$\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i^{(1)}) = \varphi(\underline{v}_1, v_i) - \varphi\left(\underline{v}_1, \frac{\varphi(\underline{v}_1, v_i)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)}\underline{v}_1\right) = \varphi(\underline{v}_1, v_i) - \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i) = 0.$$

Poiché \underline{v}_1 non è isotropo, si deduce la decomposizione $V = \text{Span}(\underline{v}_1) \oplus \text{Span}(\underline{v}_1)^\perp$. In particolare $\dim \text{Span}(\underline{v}_1)^\perp = n - 1$: essendo allora i vettori $\underline{v}_2^{(1)}, \dots, \underline{v}_n^{(1)}$ linearmente indipendenti e appartenenti a $\text{Span}(\underline{v}_1)^\perp$, ne sono una base. Si conclude quindi che vale la seguente decomposizione:

$$V = \text{Span}(\underline{v}_1) \oplus^\perp \text{Span}(\underline{v}_2^{(1)}, \dots, \underline{v}_n^{(1)}).$$

Si riapplica dunque l'algoritmo di Gram-Schmidt prendendo come spazio vettoriale lo spazio generato dai vettori a cui si è applicato precedentemente l'algoritmo, ossia $V' = \text{Span}(\underline{v}_2^{(1)}, \dots, \underline{v}_n^{(1)})$, fino a che non si ottiene $V' = \{0\}$.

Si può addirittura ottenere una base ortonormale a partire da \mathcal{B}' normalizzando ogni vettore (ossia dividendo per la propria norma), se si sta considerando uno spazio euclideo.

Osservazione. Poiché la base ottenuta tramite Gram-Schmidt mantiene la stessa bandiera della base di partenza, ogni matrice triangolabile è anche triangolabile mediante una base ortogonale.

Esempio. Si consideri $V = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot \rangle)$, ossia \mathbb{R}^3 dotato del prodotto scalare standard, e si applichi l'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt sulla seguente base:

$$\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_1 = \underline{e}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_3} \right\}$$

Alla prima iterazione dell'algoritmo si ottengono i seguenti vettori:

- $\underline{v}_2^{(1)} = \underline{v}_2 - \frac{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)} \underline{v}_1 = \underline{v}_2 - \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{e}_2,$
- $\underline{v}_3^{(1)} = \underline{v}_3 - \frac{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_3)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)} \underline{v}_1 = \underline{v}_3 - \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Si considera ora $V' = \text{Span}(\underline{v}_2^{(1)}, \underline{v}_3^{(1)})$. Alla seconda iterazione dell'algoritmo si ottiene allora il seguente vettore:

- $\underline{v}_3^{(2)} = \underline{v}_3^{(1)} - \frac{\varphi(\underline{v}_2^{(1)}, \underline{v}_3^{(1)})}{\varphi(\underline{v}_2^{(1)}, \underline{v}_2^{(1)})} \underline{v}_2^{(1)} = \underline{v}_3^{(1)} - \underline{v}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e}_3.$

Quindi la base ottenuta è $\mathcal{B}' = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$, ossia la base canonica di \mathbb{R}^3 , già ortonormale.