

Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

17 e 19 aprile 2023

Prodotti hermitiani, spazi euclidei e teorema spettrale

Nota. Nel corso del documento, per V si intenderà uno spazio vettoriale di dimensione finita n e per φ un suo prodotto, hermitiano o scalare dipendentemente dal contesto.

Definizione. (prodotto hermitiano) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Una mappa $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ si dice **prodotto hermitiano** se:

- (i) φ è \mathbb{C} -lineare nel secondo argomento, ossia se $\varphi(\underline{v}, \underline{u} + \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ e $\varphi(\underline{v}, a\underline{w}) = a\varphi(\underline{v}, \underline{w})$,
- (ii) $\varphi(\underline{u}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{u})}$.

Definizione. (prodotto hermitiano canonico in \mathbb{C}^n) Si definisce **prodotto hermitiano canonico** di \mathbb{C}^n il prodotto $\varphi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tale per cui, detti $\underline{v} = (z_1 \cdots z_n)^\top$ e $\underline{w} = (w_1 \cdots w_n)^\top$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^n \overline{z_i} w_i$.

Osservazione.

- $\varphi(\underline{u} + \underline{w}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u} + \underline{w})} = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w})} = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u})} + \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})} = \varphi(\underline{w}, \underline{v}) + \varphi(\underline{u}, \underline{v})$, ossia φ è additiva anche nel primo argomento.
- $\varphi(a\underline{v}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, a\underline{v})} = \overline{a\varphi(\underline{w}, \underline{v})} = \overline{a}\varphi(\underline{v}, \underline{w})$.
- $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{v})}$, e quindi $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$.
- Sia $\underline{v} = \sum_{i=1}^n x_i \underline{v}_i$ e sia $\underline{w} = \sum_{i=1}^n y_i \underline{v}_i$, allora $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{x_i} y_j \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j)$.
- $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \iff \varphi(\underline{w}, \underline{v}) = 0$.

Proposizione. Data la forma quadratica $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ del prodotto hermitiano φ tale che $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$, tale forma quadratica individua univocamente il prodotto hermitiano φ .

Dimostrazione. Innanzitutto si osserva che:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}}{2} + \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{w}) \cdot \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}}{2}.$$

Si considerano allora le due identità:

$$q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{v})} = 2 \Re(\varphi(\underline{v}, \underline{w})),$$

$$q(i\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = -i(\varphi(\underline{v}, \underline{w}) - \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}) = 2 \Im(\varphi(\underline{v}, \underline{w})),$$

da cui si conclude che il prodotto φ è univocamente determinato dalla sua forma quadratica. \square

Definizione. Si definisce **matrice aggiunta** di $A \in M(n, \mathbb{K})$ la matrice coniugata della trasposta di A , ossia:

$$A^* = \overline{A^\top} = \overline{A}^\top.$$

Osservazione. Per quanto riguarda la matrice aggiunta valgono le principali proprietà della matrice trasposta:

- $(A + B)^* = A^* + B^*$,
- $(AB)^* = B^* A^*$,
- $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, se A è invertibile.

Definizione. (matrice associata del prodotto hermitiano) Analogamente al caso del prodotto scalare, data una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ si definisce come **matrice associata del prodotto hermitiano** φ la matrice $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j))_{i,j=1 \dots n}$.

Osservazione. Si osserva che, analogamente al caso del prodotto scalare, vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}.$$

Proposizione. (formula del cambiamento di base per i prodotto hermitiani) Siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ due basi di V . Allora vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id_V)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id_V).$$

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$. Allora $\varphi(\underline{w}_i, \underline{w}_j) = [\underline{w}_i]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}_j]_{\mathcal{B}} = \left(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(Id_V)^i \right)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(Id_V)^j = \left(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(Id_V) \right)_i^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(Id_V)^j$, da cui si ricava l'identità desiderata. \square

Definizione. (radicale di un prodotto hermitiano) Analogamente al caso del prodotto scalare, si definisce il **radicale** del prodotto φ come il seguente sottospazio:

$$V^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \ \forall \underline{w} \in V\}.$$

Proposizione. Sia \mathcal{B} una base di V e φ un prodotto hermitiano. Allora $V^\perp = [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi))^1$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ e sia $\underline{v} \in V^\perp$. Siano $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che $\underline{v} = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n$. Allora, poiché $\underline{v} \in V$, $0 = \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}) = a_1 \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_1) + \dots + a_n \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_n) = M_i[\underline{v}]_{\mathcal{B}}$, da cui si ricava che $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, e quindi che $V^\perp \subseteq [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi))$.

Sia ora $\underline{v} \in V$ tale che $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Allora, per ogni $\underline{w} \in V$, $\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = [\underline{w}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{v}]_{\mathcal{B}} = [\underline{w}]_{\mathcal{B}}^* 0 = 0$, da cui si conclude che $\underline{v} \in V^\perp$, e quindi che $V^\perp \supseteq [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi))$, da cui $V^\perp = [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi))$, ossia la tesi. \square

Osservazione. Come conseguenza della proposizione appena dimostrata, valgono le principali proprietà già viste per il prodotto scalare.

- $\det(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = 0 \iff V^\perp \neq \{0\} \iff \varphi$ è degenere,
- Vale il teorema di Lagrange, e quindi quello di Sylvester, benché con alcune accortezze: si introduce, come nel caso di \mathbb{R} , il concetto di segnatura, che diventa l'invariante completo della nuova congruenza hermitiana, che ancora una volta si dimostra essere una relazione di equivalenza.

Definizione. (restrizione ai reali di uno spazio) Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{C} con base \mathcal{B} . Si definisce allora lo spazio $V_{\mathbb{R}}$, detto **spazio di restrizione su \mathbb{R}** di V , come uno spazio su \mathbb{R} generato da $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B} \cup i\mathcal{B}$.

Esempio. Si consideri $V = \mathbb{C}^3$. Una base di \mathbb{C}^3 è chiaramente $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$. Allora $V_{\mathbb{R}}$ sarà uno spazio vettoriale su \mathbb{R} generato dai vettori $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, i\underline{e}_1, i\underline{e}_2, i\underline{e}_3\}$.

¹Stavolta non è sufficiente considerare la mappa $f : V \rightarrow V^*$ tale che $f(\underline{v}) = [\underline{w} \mapsto \varphi(\underline{v}, \underline{w})]$, dal momento che f non è lineare, bensì antilineare, ossia $f(a\underline{v}) = \bar{a}f(\underline{v})$.

Osservazione. Si osserva che lo spazio di restrizione su \mathbb{R} e lo spazio di partenza condividono lo stesso insieme di vettori. Infatti, $\text{Span}_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}) = \text{Span}_{\mathbb{R}}(\mathcal{B} \cup i\mathcal{B})$. Ciononostante, $\dim V_{\mathbb{R}} = 2 \dim V$, se $\dim V \in \mathbb{N}$.

Definizione. (complessificazione di uno spazio) Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} . Si definisce allora lo **spazio complessificato** $V_{\mathbb{C}} = V \times V$ su \mathbb{C} con le seguenti operazioni:

- $(\underline{v}, \underline{w}) + (\underline{v}', \underline{w}') = (\underline{v} + \underline{v}', \underline{w} + \underline{w}')$,
- $(a + bi)(\underline{v}, \underline{w}) = (a\underline{v} - b\underline{w}, a\underline{w} + b\underline{v})$.

Osservazione. La costruzione dello spazio complessificato emula in realtà la costruzione di \mathbb{C} come spazio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Infatti se $z = (c, d)$, vale che $(a + bi)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, mentre si mantiene l'usuale operazione di addizione. In particolare si può identificare l'insieme $iV := V \times \{0\}$ come V , mentre $\{0\} \times V$ viene identificato come l'insieme degli immaginari di $V_{\mathbb{C}}$. Infine, moltiplicare per uno scalare reale un elemento di $V \times \{0\}$ equivale a moltiplicare la sola prima componente con l'usuale operazione di moltiplicazione di V . Allora, come accade per \mathbb{C} , si può sostituire la notazione $(\underline{v}, \underline{w})$ con la più comoda notazione $\underline{v} + i\underline{w}$.

Osservazione. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V . Innanzitutto si osserva che $(a + bi)(\underline{v}, \underline{0}) = (a\underline{v}, b\underline{v})$. Pertanto si può concludere che $\mathcal{B} \times \{0\}$ è una base dello spazio complessificato $V_{\mathbb{C}}$ su \mathbb{C} .

Infatti, se $(a_1 + b_1 i)(\underline{v}_1, \underline{0}) + \dots + (a_n + b_n i)(\underline{v}_n, \underline{0}) = (\underline{0}, \underline{0})$, allora $(a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n, b_1 \underline{v}_1 + \dots + b_n \underline{v}_n) = (\underline{0}, \underline{0})$. Poiché però \mathcal{B} è linearmente indipendente per ipotesi, l'ultima identità implica che $a_1 = \dots = a_n = b_1 = \dots = b_n = 0$, e quindi che $\mathcal{B} \times \{0\}$ è linearmente indipendente.

Inoltre $\mathcal{B} \times \{0\}$ genera $V_{\mathbb{C}}$. Se infatti $\underline{v} = (\underline{u}, \underline{w})$, e vale che:

$$\underline{u} = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n, \quad \underline{w} = b_1 \underline{v}_1 + \dots + b_n \underline{v}_n,$$

allora $\underline{v} = (a_1 + b_1 i)(\underline{v}_1, \underline{0}) + \dots + (a_n + b_n i)(\underline{v}_n, \underline{0})$. Quindi $\dim V_{\mathbb{C}} = \dim V$.

Definizione. Sia f un'applicazione \mathbb{C} -lineare di V spazio vettoriale su \mathbb{C} . Allora si definisce la **restrizione su \mathbb{R}** di f , detta $f_{\mathbb{R}} : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$, in modo tale che $f_{\mathbb{R}}(\underline{v}) = f(\underline{v})$.

Osservazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di V su \mathbb{C} . Sia $A = M_{\mathcal{B}}(f)$. Si osserva allora che, se $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup i\mathcal{B}$ e $A = A' + iA''$ con $A', A'' \in M(n, \mathbb{R})$, vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}'}(f_{\mathbb{R}}) = \left(\begin{array}{c|c} A' & -A'' \\ \hline A'' & A' \end{array} \right).$$

Infatti, se $f(\underline{v}_i) = (a_1 + b_1 i)\underline{v}_1 + \dots + (a_n + b_n i)\underline{v}_n$, vale che $f_{\mathbb{R}}(\underline{v}_i) = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n + b_1 (i \underline{v}_1) + \dots + b_n (i \underline{v}_n)$, mentre $f_{\mathbb{R}}(i \underline{v}_i) = i f(\underline{v}_i) = -b_1 \underline{v}_1 + \dots - b_n \underline{v}_n + a_1 (i \underline{v}_1) + \dots + a_n (i \underline{v}_n)$.

Teorema. (di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare) Sia V uno spazio vettoriale e sia φ un suo prodotto scalare non degenerare. Allora per ogni $f \in V^*$ esiste un unico $\underline{v} \in V$ tale che $f(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \forall \underline{w} \in V$.

Dimostrazione. Si consideri l'applicazione a_{φ} . Poiché φ non è degenerare, $\text{Ker } a_{\varphi} = V^{\perp} = \{\underline{0}\}$, da cui si deduce che a_{φ} è un isomorfismo. Quindi $\forall f \in V^*$ esiste un unico $\underline{v} \in V$ tale per cui $a_{\varphi}(\underline{v}) = f$, e dunque tale per cui $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = a_{\varphi}(\underline{v})(\underline{w}) = f(\underline{w}) \forall \underline{w} \in V$. \square

Dimostrazione costruttiva. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base ortogonale di V per φ . Allora \mathcal{B}^* è una base di V^* . In particolare $f = f(\underline{v}_1)\underline{v}_1^* + \dots + f(\underline{v}_n)\underline{v}_n^*$. Sia $\underline{v} = \frac{f(\underline{v}_1)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)}\underline{v}_1 + \dots + \frac{f(\underline{v}_n)}{\varphi(\underline{v}_n, \underline{v}_n)}\underline{v}_n$. Detto $\underline{w} = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n$, si deduce che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = a_1 f(\underline{v}_1) + \dots + a_n f(\underline{v}_n) = f(\underline{w})$. Se esistesse $\underline{v}' \in V$ con la stessa proprietà di \underline{v} , $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \implies \varphi(\underline{v} - \underline{v}', \underline{w}) \forall \underline{w} \in V$. Si deduce dunque che $\underline{v} - \underline{v}' \in V^{\perp}$, contenente solo $\underline{0}$ dacché φ è non degenerare; e quindi si conclude che $\underline{v} = \underline{v}'$, ossia che esiste solo un vettore con la stessa proprietà di \underline{v} . \square

Teorema. (di rappresentazione di Riesz per il prodotto hermitiano) Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{C} e sia φ un suo prodotto hermitiano non degenerare. Allora per ogni $f \in V^*$ esiste un unico $\underline{v} \in V$ tale che $f(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \forall \underline{w} \in V$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base ortogonale di V per φ . Allora \mathcal{B}^* è una base di V^* . In particolare $f = f(\underline{v}_1)\underline{v}_1^* + \dots + f(\underline{v}_n)\underline{v}_n^*$. Sia $\underline{v} = \frac{\overline{f(\underline{v}_1)}}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)}\underline{v}_1 + \dots + \frac{\overline{f(\underline{v}_n)}}{\varphi(\underline{v}_n, \underline{v}_n)}\underline{v}_n$. Detto $\underline{w} = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n$, si deduce che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = a_1 \overline{f(\underline{v}_1)} + \dots + a_n \overline{f(\underline{v}_n)} = \overline{f(\underline{w})}$. Se esistesse $\underline{v}' \in V$ con la stessa proprietà di \underline{v} , $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \implies \varphi(\underline{v} - \underline{v}', \underline{w}) \forall \underline{w} \in V$. Si deduce dunque che $\underline{v} - \underline{v}' \in V^{\perp}$, contenente solo $\underline{0}$ dacché φ è non degenerare; e quindi

si conclude che $\underline{v} = \underline{v}'$, ossia che esiste solo un vettore con la stessa proprietà di \underline{v} . \square

Proposizione. Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare φ non degenere. Sia $f \in \text{End}(V)$. Allora esiste un unico endomorfismo $g : V \rightarrow V$, detto il **trasposto di f** e indicato con f^\top in assenza di ambiguità², tale che:

$$a_\varphi \circ g = f^\top \circ a_\varphi,$$

ossia che:

$$\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(g(\underline{v}), \underline{w}) \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V.$$

Dimostrazione. Si consideri $(f^\top \circ a_\varphi)(\underline{v}) \in V^*$. Per il teorema di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare, esiste un unico \underline{v}' tale che $(f^\top \circ a_\varphi)(\underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \implies \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \quad \forall \underline{w} \in V$. Si costruisce allora una mappa $g : V \rightarrow V$ che associa a \underline{v} tale \underline{v}' . Si dimostra che g è un'applicazione lineare, e che dunque è un endomorfismo:

- (i) Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$. Si deve dimostrare innanzitutto che $g(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = g(\underline{v}_1) + g(\underline{v}_2)$, ossia che $\varphi(g(\underline{v}_1) + g(\underline{v}_2), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, f(\underline{w})) \quad \forall \underline{w} \in V$.

Si osservano le seguenti identità:

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, f(\underline{w})) &= \varphi(\underline{v}_1, f(\underline{w})) + \varphi(\underline{v}_2, f(\underline{w})) = (*), \\ \varphi(g(\underline{v}_1) + g(\underline{v}_2), \underline{w}) &= \varphi(g(\underline{v}_1), \underline{w}) + \varphi(g(\underline{v}_2), \underline{w}) = (*), \end{aligned}$$

da cui si deduce l'uguaglianza desiderata, essendo $g(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)$ l'unico vettore di V con la proprietà enunciata dal teorema di rappresentazione di Riesz.

- (ii) Sia $\underline{v} \in V$. Si deve dimostrare che $g(a\underline{v}) = ag(\underline{v})$, ossia che $\varphi(ag(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(a\underline{v}, f(\underline{w})) \quad \forall a \in \mathbb{K}, \underline{w} \in V$. Se $a = 0$, l'uguaglianza è ovvia; altrimenti è sufficiente moltiplicare per a l'identità $\varphi(g(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$. Analogamente a prima, si deduce che $g(a\underline{v}) = ag(\underline{v})$, essendo $g(a\underline{v})$ l'unico vettore di V con la proprietà enunciata dal teorema di rappresentazione di Riesz.

²Si tenga infatti in conto della differenza tra $f^\top : V \rightarrow V$, di cui si discute nell'enunciato, e $f^\top : V^* \rightarrow V^*$ che invece è tale che $f^\top \circ g = g \circ f$.

Infine si dimostra che g è unico. Sia infatti g' un endomorfismo di V che condivide la stessa proprietà di g . Allora $\varphi(g(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(g'(\underline{v}), \underline{w})$ $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, da cui si deduce che $\varphi(g(\underline{v}) - g'(\underline{v}), \underline{w}) = 0 \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, ossia che $g(\underline{v}) - g'(\underline{v}) \in V^\perp \forall \underline{v} \in V$. Tuttavia φ è non degenere, e quindi $V^\perp = \{0\}$, da cui si deduce che deve valere l'identità $g(\underline{v}) = g'(\underline{v}) \forall \underline{v} \in V$, ossia $g = g'$. \square

Proposizione. Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{C} e sia φ un suo prodotto hermitiano. Allora esiste un'unica mappa³ $f^* : V \rightarrow V$, detta **aggiunto di f** , tale che $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$.

Dimostrazione. Sia $\underline{v} \in V$. Si consideri il funzionale σ tale che $\sigma(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$. Per il teorema di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare esiste un unico $\underline{v}' \in V$ tale per cui $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \sigma(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w})$. Si costruisce allora una mappa f^* che associa \underline{v} a tale \underline{v}' .

Si dimostra infine che la mappa f^* è unica. Sia infatti $\mu : V \rightarrow V$ che condivide la stessa proprietà di f^* . Allora $\varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\mu(\underline{v}), \underline{w}) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, da cui si deduce che $\varphi(f^*(\underline{v}) - \mu(\underline{v}), \underline{w}) = 0 \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, ossia che $f^*(\underline{v}) - \mu(\underline{v}) \in V^\perp \forall \underline{v} \in V$. Tuttavia φ è non degenere, e quindi $V^\perp = \{0\}$, da cui si deduce che deve valere l'identità $f^*(\underline{v}) = \mu(\underline{v}) \forall \underline{v} \in V$, ossia $f^* = \mu$. \square

Osservazione. L'operazione di trasposizione di un endomorfismo sul prodotto scalare non degenere φ è un'involuzione. Infatti valgono le seguenti identità $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$:

$$\begin{cases} \varphi(\underline{w}, f^\top(\underline{v})) = \varphi(f^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})), \\ \varphi(\underline{w}, f^\top(\underline{v})) = \varphi((f^\top)^\top(\underline{w}), \underline{v}) = \varphi(\underline{v}, (f^\top)^\top(\underline{w})). \end{cases}$$

Si conclude allora, poiché φ è non degenere, che $f(\underline{w}) = (f^\top)^\top(\underline{w}) \forall \underline{w} \in V$, ossia che $f = (f^\top)^\top$.

Osservazione. Analogamente si può dire per l'operazione di aggiunta per un prodotto hermitiano φ non degenere. Valgono infatti le seguenti identità $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$:

$$\begin{cases} \overline{\varphi(\underline{w}, f^*(\underline{v}))} = \varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})), \\ \overline{\varphi(\underline{w}, f^*(\underline{v}))} = \varphi((f^*)^*(\underline{w}), \underline{v}) = \varphi(\underline{v}, (f^*)^*(\underline{w})), \end{cases}$$

da cui si deduce, come prima, che $f = (f^*)^*$.

³Si osservi che f^* non è un'applicazione lineare, benché sia invece *antilineare*.

Nota. D'ora in poi, nel corso del documento, s'intenderà per φ un prodotto scalare (o eventualmente hermitiano) di V .

Definizione. (operatori simmetrici) Sia $f \in \text{End}(V)$. Si dice allora che f è **simmetrico** se $f = f^\top$.

Definizione. (applicazioni e matrici ortogonali) Sia $f \in \text{End}(V)$. Si dice allora che f è **ortogonale** se $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$. Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$. Si dice dunque che A è **ortogonale** se $A^\top A = AA^\top = I_n$.

Definizione. Le matrici ortogonali di $M(n, \mathbb{K})$ formano un sottogruppo moltiplicativo di $\text{GL}(n, \mathbb{K})$, detto **gruppo ortogonale**, e indicato con O_n . Il sottogruppo di O_n contenente solo le matrici con determinante pari a 1 è detto **gruppo ortogonale speciale**, e si denota con SO_n .

Osservazione. Si possono classificare in modo semplice alcuni di questi gruppi ortogonali per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

- $A \in O_n \implies 1 = \det(I_n) = \det(AA^\top) = \det(A)^2 \implies \det(A) = \pm 1$.
- $A = (a) \in O_1 \iff A^\top A = I_1 \iff a^2 = 1 \iff a = \pm 1$, da cui si ricava che l'unica matrice di SO_1 è (1). Si osserva inoltre che O_1 è abeliano di ordine 2, e quindi che $O_1 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2 \iff \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab + cd \\ ab + cd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = A^\top A = I_2 \iff \begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1, \\ ab + cd = 0. \end{cases}$

Si ricava pertanto che si può identificare A con le funzioni trigonometriche $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$ nelle due forme:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (\det(A) = 1, A \in SO_2),$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (\det(A) = -1).$$

Definizione. (applicazioni e matrici hermitiane) Sia $f \in \text{End}(V)$ e si consideri il prodotto hermitiano φ . Si dice allora che f è **hermitiano** se $f = f^*$. Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$. Si dice dunque che A è **hermitiana** se $A = A^*$.

Definizione. (applicazioni e matrici unitarie) Sia $f \in \text{End}(V)$ e si consideri il prodotto hermitiano φ . Si dice allora che f è **unitario** se $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$. Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$. Si dice dunque che A è **unitaria** se $A^* A = AA^* = I_n$.

Definizione. Le matrici unitarie di $M(n, \mathbb{C})$ formano un sottogruppo moltiplicativo di $GL(n, \mathbb{C})$, detto **gruppo unitario**, e indicato con U_n . Il sottogruppo di U_n contenente solo le matrici con determinante pari a 1 è detto **gruppo unitario speciale**, e si denota con SU_n .

Osservazione.

- $A \in U_n \implies 1 = \det(I_n) = \det(AA^*) = \det(A)\overline{\det(A)} = |\det(A)|^2 = 1$.
- $A = (a) \in U_1 \iff A^*A = I_1 \iff |a|^2 = 1 \iff a = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi)$, ossia il numero complesso a appartiene alla circonferenza di raggio unitario.

Definizione. (spazio euclideo reale) Si definisce **spazio euclideo reale** uno spazio vettoriale V su \mathbb{R} dotato del prodotto scalare standard $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definizione. (spazio euclideo complesso) Si definisce **spazio euclideo complesso** uno spazio vettoriale V su \mathbb{C} dotato del prodotto scalare standard $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definizione. (base ortonormale) Si definisce **base ortonormale** di uno spazio vettoriale V su un suo prodotto φ una base ortogonale $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ tale che $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \delta_{ij}$.

Proposizione. Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale e sia \mathcal{B} una base ortonormale di V . Allora $f \in \text{End}(V)$ è simmetrico $\iff M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} \iff M_{\mathcal{B}}(f)$ è simmetrica.

Dimostrazione. Si osserva che $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$. Se f è simmetrico, allora $[\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{v}]_{\mathcal{B}})^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} [\underline{w}]_{\mathcal{B}}$. In particolare, $M_{\mathcal{B}}(f)_{ij}^{\top} = [\underline{v}_i]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} [\underline{v}_j]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}_i]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{v}_j]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}(f)_{ij}$, e quindi $M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = M_{\mathcal{B}}(f)$.

Se invece $M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = M_{\mathcal{B}}(f)$, $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{v}]_{\mathcal{B}})^{\top} [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{v}]_{\mathcal{B}})^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = \varphi(f(\underline{v}), \underline{w})$, e quindi f è simmetrico. \square

Proposizione. Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale e sia \mathcal{B} una base ortonormale di V . Allora $f \in \text{End}(V)$ è ortogonale $\iff M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(f) = I_n \stackrel{\text{def}}{\iff} M_{\mathcal{B}}(f)$ è ortogonale.

Dimostrazione. Si osserva che $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$. Se f è ortogonale, allora $[\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{v}]_{\mathcal{B}})^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} =$

$[\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}$. Allora, come visto nella proposizione precedente, si ricava che $M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(f) = I_n$. Dal momento che gli inversi sinistri sono anche inversi destri, $M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = I_n$.

Se invece $M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = I_n$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{v}]_{\mathcal{B}})^{\top} (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{v}]_{\mathcal{B}})^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi)(M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$, e quindi f è ortogonale. \square

Proposizione. Sia (V, φ) uno spazio euclideo complesso e sia \mathcal{B} una base ortonormale di V . Allora $f \in \text{End}(V)$ è hermitiano $\iff M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f)^*$ $\stackrel{\text{def}}{\iff} M_{\mathcal{B}}(f)$ è hermitiana.

Dimostrazione. Si osserva che $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$. Se f è hermitiano, allora $[\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)(M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{v}]_{\mathcal{B}})^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)^* [\underline{w}]_{\mathcal{B}}$. Allora, come visto nella proposizione precedente, si ricava che $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f)^*$.

Se invece $M_{\mathcal{B}}(f)^* = M_{\mathcal{B}}(f)$, $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)(M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)^* [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{v}]_{\mathcal{B}})^* [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{v}]_{\mathcal{B}})^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = \varphi(f(\underline{v}), \underline{w})$, e quindi f è hermitiano. \square

Proposizione. Sia (V, φ) uno spazio euclideo complesso e sia \mathcal{B} una base ortonormale di V . Allora $f \in \text{End}(V)$ è unitario $\iff M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^* = M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) = I_n \stackrel{\text{def}}{\iff} M_{\mathcal{B}}(f)$ è unitaria.

Dimostrazione. Si osserva che $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$. Se f è unitario, allora $[\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{v}]_{\mathcal{B}})^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)(M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}$. Allora, come visto nella proposizione precedente, si ricava che $M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) = I_n$. Dal momento che gli inversi sinistri sono anche inversi destri, $M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^* = I_n$.

Se invece $M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^* = I_n$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{v}]_{\mathcal{B}})^* (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = (M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{v}]_{\mathcal{B}})^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)(M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$, e quindi f è unitario. \square

Proposizione. Sia $V = \mathbb{R}^n$ uno spazio vettoriale col prodotto scalare standard φ . Allora sono equivalenti i seguenti fatti:

- (i) $A \in O_n$,

- (ii) f_A è un operatore ortogonale,
- (iii) le colonne e le righe di A formano una base ortonormale di V .

Dimostrazione. Sia \mathcal{B} la base canonica di V . Allora $M_{\mathcal{B}}(f_A) = A$, e quindi, per una proposizione precedente, f_A è un operatore ortogonale. Viceversa si deduce che se f_A è un operatore ortogonale, $A \in O_n$. Dunque è sufficiente dimostrare che $A \in O_n \iff$ le colonne e le righe di A formano una base ortonormale di V .

(\implies) Se $A \in O_n$, in particolare $A \in GL(n, \mathbb{R})$, e quindi A è invertibile. Allora le sue colonne e le sue righe formano già una base di V , essendo n vettori di V linearmente indipendenti. Inoltre, poiché $A \in O_n$, $\varphi(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = \varphi(A\underline{e}_i, A\underline{e}_j)$, e quindi le colonne di A si mantengono a due a due ortogonali tra di loro, mentre $\varphi(A\underline{e}_i, A\underline{e}_i) = \varphi(\underline{e}_i, \underline{e}_i) = 1$. Pertanto le colonne di A formano una base ortonormale di V .

Si osserva che anche $A^\top \in O_n$. Allora le righe di A , che non sono altro che le colonne di A^\top , formano anch'esse una base ortonormale di V .

(\impliedby) Nel moltiplicare A^\top con A altro non si sta facendo che calcolare il prodotto scalare φ tra ogni riga di A^\top e ogni colonna di A , ossia $(A^*A)_{ij} = \varphi((A^\top)_i, A^j) = \varphi(A^i, A^j) = \delta_{ij}$. Quindi $A^\top A = AA^\top = I_n$, da cui si deduce che $A \in O_n$. \square

Proposizione. Sia $V = \mathbb{C}^n$ uno spazio vettoriale col prodotto hermitiano standard φ . Allora sono equivalenti i seguenti fatti:

- (i) $A \in U_n$,
- (ii) f_A è un operatore unitario,
- (iii) le colonne e le righe di A formano una base ortonormale di V .

Dimostrazione. Sia \mathcal{B} la base canonica di V . Allora $M_{\mathcal{B}}(f_A) = A$, e quindi, per una proposizione precedente, f_A è un operatore unitario. Viceversa si deduce che se f_A è un operatore unitario, $A \in U_n$. Dunque è sufficiente dimostrare che $A \in U_n \iff$ le colonne e le righe di A formano una base ortonormale di V .

(\implies) Se $A \in U_n$, in particolare $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$, e quindi A è invertibile. Allora le sue colonne e le sue righe formano già una base di V , essendo n vettori di V linearmente indipendenti. Inoltre, poiché $A \in U_n$, $\varphi(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = \varphi(A\underline{e}_i, A\underline{e}_j)$, e quindi le colonne di A si mantengono a due a due ortogonali tra di loro, mentre $\varphi(A\underline{e}_i, A\underline{e}_i) = \varphi(\underline{e}_i, \underline{e}_i) = 1$. Pertanto le colonne di A formano una base ortonormale di V .

Si osserva che anche $A^\top \in U_n$. Allora le righe di A , che non sono altro che le colonne di A^\top , formano anch'esse una base ortonormale di V .

(\impliedby) Nel moltiplicare A^* con A altro non si sta facendo che calcolare il prodotto hermitiano φ tra ogni riga coniugata di A^* e ogni colonna di A , ossia $(A^*A)_{ij} = \varphi((A^\top)_i, A^j) = \varphi(A^i, A^j) = \delta_{ij}$. Quindi $A^*A = AA^* = I_n$, da cui si deduce che $A \in U_n$. \square

Nota. D'ora in poi, qualora non specificato diversamente, si assumerà che V sia uno spazio euclideo, reale o complesso.

Definizione. (norma) Sia (V, φ) un qualunque spazio euclideo. Si definisce **norma** la mappa $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ tale che $\|\underline{v}\| = \sqrt{\varphi(\underline{v}, \underline{v})}$.

Definizione. (distanza tra due vettori) Sia (V, φ) un qualunque spazio euclideo. Si definisce **distanza** la mappa $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$ tale che $d(\underline{v}, \underline{w}) = \|\underline{v} - \underline{w}\|$.

Osservazione.

- Si osserva che in effetti $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}^+ \forall \underline{v} \in V$. Infatti, sia per il caso reale che per il caso complesso, φ è definito positivo.
- Vale che $\|\underline{v}\| = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$. Infatti, se $\underline{v} = \underline{0}$, chiaramente $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0 \implies \|\underline{v}\| = 0$; se invece $\|\underline{v}\| = 0$, $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$, e quindi $\underline{v} = \underline{0}$, dacché $V^\perp = \{\underline{0}\}$, essendo φ definito positivo.
- Inoltre, vale chiaramente che $\|\alpha \underline{v}\| = |\alpha| \|\underline{v}\|$.

Proposizione. (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) Vale che $\|\underline{v}\| \|\underline{w}\| \geq |\varphi(\underline{v}, \underline{w})|$, $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, dove l'uguaglianza è raggiunta soltanto se \underline{v} e \underline{w} sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione. Si consideri innanzitutto il caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, e quindi il caso in cui φ è il prodotto scalare standard. Siano $\underline{v}, \underline{w} \in V$. Si consideri la disuguaglianza $\|\underline{v} + t\underline{w}\|^2 \geq 0$, valida per ogni elemento di V . Allora

$\|\underline{v} + t\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + 2\varphi(\underline{v}, \underline{w})t + \|\underline{w}\|^2 t^2 \geq 0$. L'ultima disuguaglianza è possibile se e solo se $\frac{\Delta}{4} \leq 0$, e quindi se e solo se $\varphi(\underline{v}, \underline{w})^2 - \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 \leq 0 \iff \|\underline{v}\| \|\underline{w}\| \geq \varphi(\underline{v}, \underline{w})$. Vale in particolare l'equivalenza se e solo se $\|\underline{v} + t\underline{w}\| = 0$, ossia se $\underline{v} + t\underline{w} = \underline{0}$, da cui la tesi.

Si consideri ora il caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, e dunque il caso in cui φ è il prodotto hermitiano standard. Siano $\underline{v}, \underline{w} \in V$, e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Si consideri allora la disuguaglianza $\|\alpha\underline{v} + \beta\underline{w}\|^2 \geq 0$, valida per ogni elemento di V . Allora $\|\alpha\underline{v} + \beta\underline{w}\|^2 = \|\alpha\underline{v}\|^2 + \varphi(\alpha\underline{v}, \beta\underline{w}) + \varphi(\beta\underline{w}, \alpha\underline{v}) + \|\beta\underline{w}\|^2 = |\alpha|^2 \|\underline{v}\|^2 + \bar{\alpha}\beta \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \alpha\bar{\beta} \varphi(\underline{w}, \underline{v}) + |\beta|^2 \|\underline{w}\|^2 \geq 0$. Ponendo allora $\alpha = \|\underline{w}\|^2$ e $\beta = -\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = -\varphi(\underline{v}, \underline{w})$, si deduce che:

$$\|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^4 - \|\underline{w}\|^2 |\varphi(\underline{v}, \underline{w})| \geq 0.$$

Se $\underline{w} = \underline{0}$, la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz è già dimostrata. Altrimenti, è sufficiente dividere per $\|\underline{w}\|^2$ (dal momento che $\underline{w} \neq \underline{0} \iff \|\underline{w}\| \neq 0$) per ottenere la tesi. \square

Proposizione. (disuguaglianza triangolare)