

# Note del corso di Analisi Matematica 1

Gabriel Antonio Videtta

23 e 24 marzo 2023

## Proprietà principali della continuità e dei limiti di funzione

**Nota.** Nel corso del documento, per un insieme  $X$ , qualora non specificato, si intenderà sempre un sottoinsieme generico dell'insieme dei numeri reali esteso  $\overline{\mathbb{R}}$ . Analogamente per  $f$  si intenderà sempre una funzione  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .

**Proposizione.** Dati  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\bar{x}$  punto di accumulazione di  $X$  tale che  $\forall (x_n) \subseteq X \setminus \{\bar{x}\} \mid x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x}$  vale che  $f(x_n)$  converge. Allora il limite di  $f(x_n)$  è sempre lo stesso, indipendentemente dalla scelta di  $(x_n)$ .

*Dimostrazione.* Siano per assurdo  $(x_n), (y_n) \subseteq X \setminus \{\bar{x}\}$  due successioni tali che  $x_n, y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x}$  e che  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$  e  $f(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G$  con  $L \neq G$ . Si costruisce allora la successione  $(z_n) \subseteq X \setminus \{\bar{x}\}$  nel seguente modo:

$$z_n = \begin{cases} x_{\frac{n}{2}} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ y_{\frac{n-1}{2}} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

ossia unendo le due successioni  $(x_n)$  e  $(y_n)$  in modo tale che agli indici pari corrispondano gli elementi di  $x_n$  e a quelli dispari quelli di  $y_n$ .

Si mostra che  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x}$ . Sia  $I$  un intorno di  $\bar{x}$ . Allora, dal momento che  $(x_n), (y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x}$ , esistono sicuramente due  $n_x, n_y \in \mathbb{N}$  tali che  $n \geq n_x \implies x_n \in I$  e  $n \geq n_y \implies y_n \in I$ . Pertanto, detto  $n_k = \max\{n_x, n_y\}$ ,  $n \geq n_k \implies x_n, y_n \in I$ , ossia che per  $n \geq 2n_k$ ,  $z_n \in I$ . Si conclude allora che  $(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x}$ .

Tuttavia  $f(z_n)$  non può convergere a nessun limite, dal momento che le due sottosuccessioni  $f(x_n)$  e  $f(y_n)$  convergono a valori distinti ed il limite

deve essere unico. L'esistenza di tale successione contraddice allora l'ipotesi,  $\nexists$ .  $\square$

**Proposizione.** Data  $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ , definisco  $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  tale che  $f(n) := x_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Allora  $f(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L \iff x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L$ .

*Dimostrazione.* Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

( $\implies$ ) Sia  $I$  un intorno di  $L$ . Allora, poiché  $f(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L$ , esiste un intorno  $J = [a, \infty]$  tale che  $f(J \cap \mathbb{N} \setminus \{\infty\}) \subseteq I$ . Poiché  $\infty$  è un punto di accumulazione di  $\mathbb{N}$ ,  $A = J \cap \mathbb{N} \setminus \{\infty\}$  non è mai vuoto. Inoltre, poiché  $A \subseteq \mathbb{N}$ ,  $A$  ammette un minimo<sup>1</sup>, detto  $m$ . Vale in particolare che  $f(n) \in I$ ,  $\forall n \geq m$ , e quindi che  $x_n \in I$ ,  $\forall n \geq m$ , ossia che  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L$ .

( $\impliedby$ ) Sia  $I$  un intorno di  $L$ . Dal momento che  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L$ ,  $\exists n_k \in \mathbb{N} \mid n \geq n_k \implies x_n \in I$ . Allora, detto  $J = [n_k, \infty]$ , vale che  $f(J \cap \mathbb{N} \setminus \{\infty\}) \subseteq I$ , ossia che  $f(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L$ .  $\square$

**Proposizione.** Siano  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\bar{x} \in X$  punto di accumulazione di  $X$ . Allora sono fatti equivalenti i seguenti:

(i)  $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow \bar{x}]{} f(\bar{x})$ ,

(ii)  $f$  è continua in  $\bar{x}$ .

*Dimostrazione.* Sia  $I$  un intorno di  $f(\bar{x})$ . Dal momento che  $\bar{x}$  è un punto di accumulazione, si ricava allora da entrambe le ipotesi che esiste un intorno  $J$  di  $\bar{x}$  tale che  $f(J \cap X \setminus \{\bar{x}\}) \subseteq I$ , e quindi, per definizione, la tesi.  $\square$

**Osservazione.** Se  $\bar{x}$  è un punto isolato di  $X$ , allora  $f$  è continua in  $\bar{x}$ . Pertanto per rendere la proposizione precedente vera, è necessario ipotizzare che  $\bar{x}$  sia un punto di accumulazione (infatti il limite in un punto isolato non esiste per definizione, mentre in tale punto  $f$  è continua).

**Proposizione.** Siano  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\bar{x}$  punto di accumulazione di  $X$ . Siano  $L \in \overline{\mathbb{R}}$  e  $\tilde{f} : X \cup \{\bar{x}\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  tale che:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} L & \text{se } x = \bar{x}, \\ f(x) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

<sup>1</sup>Non è in realtà necessario che si consideri il minimo di tale insieme, occorre semplicemente che  $A$  sia non vuoto.

Allora  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} L \iff \tilde{f}$  è continua in  $\bar{x}$ .

*Dimostrazione.* Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

( $\implies$ ) Sia  $I$  un intorno di  $L$ . Si ricava allora dalle ipotesi che esiste sempre un intorno  $J$  di  $\bar{x}$  tale che  $f(\underbrace{J \cap X \setminus \{\bar{x}\}}_A) \subseteq I$ . Dal momento che  $\bar{x} \notin A$ , si deduce che  $f(J \cap X \setminus \{\bar{x}\}) = \tilde{f}(J \cap X \setminus \{\bar{x}\}) \subseteq I$ , ossia che  $\tilde{f}$  è continua in  $\bar{x}$ .

( $\impliedby$ ) Sia  $I$  un intorno di  $L$ . Poiché  $\tilde{f}$  è continua in  $\bar{x}$ , esiste un intorno  $J$  di  $\bar{x}$  tale che  $\tilde{f}(\underbrace{J \cap (X \cup \{\bar{x}\}) \setminus \{\bar{x}\}}_A) \subseteq I$ . Poiché  $\bar{x} \notin A$  e  $\bar{x}$  è punto di accumulazione, si deduce che  $I \supseteq \tilde{f}(J \cap (X \cup \{\bar{x}\}) \setminus \{\bar{x}\}) = f(J \cap (X \cup \{\bar{x}\}) \setminus \{\bar{x}\}) \supseteq f(J \cap X \setminus \{\bar{x}\})$ , e quindi che  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} L$ .  $\square$

**Osservazione.** Tutte le funzioni elementari (e.g.  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\exp(x)$ ,  $\ln(x)$ ,  $|x|$ ,  $x^a$ ) sono funzioni continue nel loro insieme di definizione.

**Proposizione.** Siano  $f : X \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$  e  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $\bar{x} \in X$ . Sia  $f$  continua in  $\bar{x}$  e sia  $g$  continua in  $f(\bar{x})$ . Allora  $g \circ f$  è continua in  $\bar{x}$ .

*Dimostrazione.* Sia  $I$  un intorno di  $z = g(f(\bar{x}))$ . Allora, poiché  $g$  è continua in  $f(\bar{x})$ ,  $\exists J$  intorno di  $f(\bar{x})$  |  $g(J \cap Y \setminus \{f(\bar{x})\}) \subseteq I$ . Tuttavia, poiché  $f$  è continua in  $\bar{x}$ ,  $\exists K$  intorno di  $\bar{x}$  |  $f(K \cap X \setminus \{\bar{x}\}) \subseteq J$ , da cui si conclude che  $g(f(K \cap X \setminus \{\bar{x}\})) \subseteq I$ , dacché  $\forall x \in K \cap X \setminus \{\bar{x}\}$ , o  $f(x) = f(\bar{x})$ , e quindi  $g(f(x)) = z$  chiaramente appartiene a  $I$ , o altrimenti  $f(x) \in J \cap Y \setminus \{f(\bar{x})\} \implies g(f(x)) \in g(J \cap Y \setminus \{f(\bar{x})\}) \subseteq I$ .  $\square$

**Teorema.** Sia  $f : X \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$ , sia  $\bar{x}$  punto di accumulazione di  $X$  tale che  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} \bar{y}$ . Se  $\bar{y}$  è un punto di accumulazione di  $Y$  e  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  è tale che  $\bar{y} \in Y \implies g$  continua in  $\bar{y}$  e  $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow \bar{y}} \bar{z}$ , allora  $g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} \bar{z}$ .

*Dimostrazione.* Siano  $\tilde{f} : X \cup \{\bar{x}\}$ ,  $\tilde{g} : Y \cup \{\bar{y}\}$  due funzioni costruite nel seguente modo:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \bar{y} & \text{se } x = \bar{x}, \\ f(x) & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \tilde{g}(y) = \begin{cases} \bar{z} & \text{se } y = \bar{y}, \\ g(y) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Poiché  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} \bar{y}$  e  $\bar{x}$  è un punto di accumulazione di  $X$ , per una proposizione precedente,  $\tilde{f}$  è continua in  $\bar{x}$ . Analogamente  $\tilde{g}$  è continua in  $\bar{y}$ .

Dal momento che vale che  $\tilde{f}(\bar{x}) = \bar{y}$ , per la proposizione precedente  $\tilde{g} \circ \tilde{f}$  è continua in  $\bar{x}$ , e dunque  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \tilde{g}(\tilde{f}(x)) = \tilde{g}(\tilde{f}(\bar{x})) = \bar{z}$ .

Si consideri adesso la funzione  $\widetilde{g \circ f} : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  definita nel seguente modo:

$$\widetilde{g \circ f}(x) = \begin{cases} \bar{z} & \text{se } x = \bar{x}, \\ g(f(x)) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si mostra che  $\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$ . Se  $x = \bar{x}$ , chiaramente  $\widetilde{g \circ f}(x) = \bar{z} = \tilde{g}(\tilde{f}(\bar{x}))$ . Se  $x \neq \bar{x}$ , si considera il caso in cui  $\tilde{f}(x) = f(x)$  è uguale a  $\bar{y}$  ed il caso in cui non vi è uguale.

Se  $\tilde{f}(x) \neq \bar{y}$ ,  $\tilde{g}(\tilde{f}(x)) = \tilde{g}(f(x)) \stackrel{f(x) \neq \bar{y}}{=} g(f(x)) = \widetilde{g \circ f}(x)$ . Se invece  $\tilde{f}(x) = \bar{y}$ ,  $\bar{y} \in Y$ , e quindi  $g$  è continua in  $\bar{y}$ , da cui necessariamente deriva che  $g(\bar{y}) = \bar{z}$ . Allora  $\widetilde{g \circ f}(x) = g(f(x)) = g(\bar{y}) = \bar{z} = \tilde{g}(\tilde{f}(\bar{x}))$ .

Si conclude allora che  $\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$ , e quindi che  $\widetilde{g \circ f}$  è continua in  $\bar{x}$ . Pertanto, dalla proposizione precedente,  $g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} \bar{z}$ .  $\square$

**Esercizio 1.** Mostrare che tutte le ipotesi della proposizione precedente sono necessarie, fornendo alcuni controesempi.

**Proposizione.** Date  $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$  continue in  $\bar{x}$ . Allora:

- (i)  $f_1 + f_2$  è continua in  $\bar{x}$ ,
- (ii)  $f_1 f_2$  è continua in  $\bar{x}$ .

*Dimostrazione.* Si dimostrano i due punti separatamente.

- (i) Sia  $f := f_1 + f_2$ . Poiché  $f_1, f_2$  sono continue in  $\bar{x}$ ,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid |x - \bar{x}| < \delta \implies |f_1(x) - f_1(\bar{x})|, |f_2(x) - f_2(\bar{x})| \leq \varepsilon$  (per ogni  $\varepsilon > 0$ , si prende  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , ossia il minimo delle semilunghezze degli intorno di  $\bar{x}$ ). Allora  $|f(x) - f(\bar{x})| \leq |f_1(x) - f_1(\bar{x})| + |f_2(x) - f_2(\bar{x})| \leq 2\varepsilon$ . Si conclude dunque che  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid |f(x) - f(\bar{x})| \leq 2\varepsilon$ , e quindi, poiché  $2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ , che  $f$  è continua in  $\bar{x}$ .
- (ii) Dal momento che  $f_1, f_2$  sono continue in  $\bar{x}$ ,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tale che  $|x - \bar{x}| < \delta \implies |f_1(x) - f_1(\bar{x})| < \varepsilon, |f_2(x) - f_2(\bar{x})| < \varepsilon$  (vale lo stesso ragionamento del punto (i)). Allora  $f_1(x) = f_1(\bar{x}) + e_1$  e  $f_2(x) = f_2(\bar{x}) + e_2$ , con  $|e_1|, |e_2| < \varepsilon$ . Dunque  $f_1(x)f_2(x) = f_1(\bar{x})f_2(\bar{x}) +$

$\underbrace{e_1 f_2(\bar{x}) + e_2 f_1(\bar{x}) + e_1 e_2}_e$ . In particolare, per la disuguaglianza triangolare,  $|e| \leq |e_1 f_2(\bar{x})| + |e_2 f_1(\bar{x})| + |e_1 e_2| \leq \underbrace{\varepsilon |f_2(\bar{x})| + \varepsilon |f_1(\bar{x})| + \varepsilon^2}_{\varepsilon'}$ . Poiché  $\varepsilon' \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0$ , si conclude che  $|f_1(x)f_2(x) - f_1(\bar{x})f_2(\bar{x})| = |e| \leq \varepsilon' \implies f_1(x)f_2(x)$  continua in  $\bar{x}$ .

□

**Proposizione.** Date  $f_1, f_2 : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $\bar{x}$  punto di accumulazione di  $X$ . Se  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f_1(x) = L_1 \in \mathbb{R}$  e  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f_2(x) = L_2 \in \mathbb{R}$ , allora valgono i seguenti risultati:

- (i)  $f_1(x) + f_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} L_1 + L_2$ ,
- (ii)  $f_1(x)f_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} L_1 L_2$ .

**Definizione.** (intorno destro e sinistro) Se  $\bar{x} \in \mathbb{R}$ , si dicono **interni destri** gli intervalli della forma  $[\bar{x}, \bar{x} + \varepsilon]$  con  $\varepsilon > 0$ . Analogamente, gli **interni sinistri** sono gli intervalli della forma  $[\bar{x} - \varepsilon, \bar{x}]$ .

**Definizione.** (punto di accumulazione destro e sinistro) Sia  $\bar{x} \in X$ . Si dice che  $\bar{x}$  è un **punto di accumulazione destro** di  $X$  se  $\forall I$  intorno destro di  $\bar{x}$ ,  $I \cap X \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$ . Analogamente si dice **punto di accumulazione sinistro** di  $X$  se è tale per gli interni sinistri.

**Definizione.** (limite destro e sinistro) Sia  $\bar{x}$  un punto di accumulazione destro di  $X$ . Allora  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = L \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall I$  intorno di  $L$ ,  $\exists J$  intorno destro di  $\bar{x}$  tale che  $f(J \cap X \setminus \{\bar{x}\}) \subseteq I$ . Analogamente si definisce il limite sinistro.

**Definizione.** (continuità destra e sinistra) Sia  $\bar{x} \in X$ . Allora  $f$  è continua a destra in  $\bar{x}$  se e solo se  $\forall I$  intorno di  $f(\bar{x})$ ,  $\exists J$  intorno destro di  $\bar{x}$  tale che  $f(J \cap X \setminus \{\bar{x}\}) \subseteq I$ . Analogamente si definisce la continuità a sinistra di  $f$ .

**Proposizione.** Sia  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  monotona e sia  $\bar{x}$  un punto di accumulazione destro di  $X$ . Allora esiste  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x)$ . Analogamente esiste da sinistra se  $\bar{x}$  è un punto di accumulazione sinistro di  $X$ .

**Teorema.** (della permanenza del segno) Data  $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$  tale che  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L > 0$ , allora  $(x_n)$  è positiva definitivamente. Analogamente, se  $L < 0$ ,  $(x_n)$  è negativa definitivamente.

*Dimostrazione.*

□

**Teorema.** (degli zeri) Dati  $I = [a, b]$  e  $f : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  continua tale che  $f(a)f(b) < 0$  (i.e. sono discordi), allora  $\exists c \in (a, b) \mid f(c) = 0$ .

*Dimostrazione.* Prendo  $E$  insieme dei punti in cui la funzione è negativa e dimostro che il sup di questo insieme è proprio 0 (esiste per la completezza di  $\mathbb{R}$  e mostro che  $f(\bar{x}) = 0$ ).

□

**Corollario.** (dei valori intermedi) Dati  $I = (a, b]$  e  $f : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  continua, allora  $y_1, y_2 \in f(I) \implies [y_1, y_2] \subseteq f(I)$  (ossia  $f$  assume tutti i valori compresi tra  $y_1$  e  $y_2$ ).

*Dimostrazione.*

□