## Il gruppo diedrale e i suoi sottogruppi

## di Gabriel Antonio Videtta

In questo documento si definisce il gruppo diedrale e si illustrano le sue proprietà principali, a partire da come sono costruiti i suoi sottogruppi.

Sia  $n \geq 3$ . Si definisce **gruppo diedrale**, denotato<sup>1</sup> come  $D_n$ , il gruppo delle isometrie del piano  $\mathbb{R}^2$  che mappano i vertici di un poligono regolare centrato nell'origine con n lati in sé stessi.

Si verifica facilmente che  $D_n$  è un gruppo:

- Ammette un'identità, che coincide con l'identità delle isometrie,
- La composizione di due isometrie che mappano i vertici del poligono in sé stessi è ancora un'isometria che lascia fissi i vertici del poligono,
- Ogni isometria per cui i vertici del poligono rimangono fissi ammette un'inversa con la stessa proprietà<sup>23</sup>.

In particolare, se  $\sigma \in D_n$ ,  $\sigma$  permuta i vertici del poligono (pertanto si può visualizzare  $D_n$  come un sottogruppo naturale di  $S_n$ ). Denotando con r la rotazione primitiva del gruppo (ossia una rotazione di  $\frac{2\pi}{n}$  gradi in senso antiorario) e con s la simmetria rispetto all'asse y, si osserva che ogni elemento della forma  $sr^k$  con  $k \in \mathbb{Z}$  è ancora una simmetria, benché non per forza rispetto all'asse  $y^4$ . In particolare, per n pari, le riflessioni di  $D_n$  sono esattamente le riflessioni rispetto alle rette passanti per i vertici o per i punti medi del poligono.

Dal momento che  $\sigma \in D_n$  è in particolare una isometria, e quindi un'applicazione lineare,  $\sigma$  è completamente determinata da  $\sigma(V_1)$  e  $\sigma(V_2)$ , dove  $V_i$  sono i vertici del poligono numerati in senso antiorario. In particolare, se  $\sigma(V_1) = V_k$ , allora  $\sigma(V_2)$ , affinché venga preservata la distanza, può valere<sup>5</sup> o  $V_{k-1}$  o  $V_{k+1}$ . Pertanto vi sono al più 2n scelte

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Alcuni testi denotano il gruppo diedrale come  $D_{2n}$ , dal momento che vale  $|D_n| = 2n$ .

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Si ricorda che ogni isometria è invertibile a prescindere.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Dal momento che  $D_n$  ha cardinalità 2n, come mostrato dopo, questa condizione è automaticamente verificata come conseguenza della finitezza di  $D_n$ .

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>La matrice associata di s nella base canonica è  $-1E_{11} + E_{22}$ , e quindi deve valere  $\det(s) = -1$ . Al contrario  $r \in SO(2)$ , e quindi  $\det(r) = 1$ . Si conclude pertanto che  $\det(sr^k) = \det(s) \det(r)^k = -1$ , e dunque che  $sr^k$  deve obbligatoriamente appartenere alla classe laterale s SO(2) delle riflessioni.

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Per semplicità si pone  $V_0 := V_n$  e  $V_{n+1} := V_1$ .

possibili di  $\sigma(V_1)$  e  $\sigma(V_2)$  (e quindi  $|D_n| \leq 2n$ ). D'altra parte si osserva che tutti gli elementi 1, r, ...,  $r^{n-1}$ , s, sr, ...,  $sr^{n-1}$  sono distinti:

- Gli  $r^k$  con  $0 \le k \le \operatorname{ord}(r) 1$  sono tutti distinti e  $\operatorname{ord}(r)$  vale esattamente n,
- Gli  $sr^k$  con  $0 \le k \le n-1$  sono tutti distinti, altrimenti la precedente osservazione sarebbe contraddetta,
- Nessun  $r^i$  coincide con un  $sr^j$ , dal momento che i loro determinanti sono diversi  $(\det(r^i) = 1, \text{ mentre } \det(sr^j) = -1).$  In particular  $r^i \in SO(2)$ , mentre  $sr^j \in$ s SO(2).

Pertanto  $|D_n| \geq 2n$ , e quindi  $|D_n| = 2n$ . Si conclude inoltre che  $D_n$  è generato da r e da s, e quindi che  $D_n = \langle r, s \rangle$ . Esistono dunque due sottogruppi naturali di  $D_n$ :

$$\mathcal{R} := \langle r \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad \langle s \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

**Proposizione.** Vale l'identità  $srs^{-1} = r^{-1}$ .

Dimostrazione. Si sviluppa  $srs^{-1}$  in termini matriciali, considerando  $s = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  e r = $\begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) - \sin(\frac{2\pi}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix}$ :

$$srs^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & \sin(\frac{2\pi}{n}) \\ -\sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix},$$

ottenendo la matrice associata a  $r^{-1}$  nella base canonica.

In generale vale dunque che  $sr^ks^{-1}=r^{-k}$ . Si deduce allora la presentazione del gruppo  $D_n$ :

$$D_n = \langle r, s \mid r^n = 1, s^2 = 1, srs^{-1} = r^{-1} \rangle.$$

Si descrivono adesso tutti i sottogruppi di  $D_n$ . Innanzitutto, in  $\mathcal{R}$  per ogni  $d \mid n$  esiste un unico sottogruppo di ordine d dal momento che  $\mathcal{R}$  è ciclico. Pertanto ogni tale sottogruppo assume la forma  $\langle r^{\frac{n}{d}} \rangle$ . Inoltre, dal momento che<sup>7</sup>  $[D_n : \mathcal{R}] = 2, \mathcal{R}$  è un sottogruppo normale di  $D_n$ . Allora, poiché  $\mathcal{R}$  è normale in  $D_n$  e ogni sottogruppo  $H \leq \mathcal{R}$ è caratteristico<sup>8</sup> in  $D_n$ , ogni sottogruppo di  $\mathcal{R}$  è normale anche in  $D_n$ .

Sia ora H un sottogruppo di  $D_n$  con  $H \not\subseteq \mathcal{R}$ . Si consideri la proiezione al quoziente mediante  $\mathcal{R}$ , ossia  $\pi_{\mathcal{R}}: D_n \to D_n/\mathcal{R}$ . Chiaramente deve valere che  $\pi_{\mathcal{R}}(H) = D_n/\mathcal{R}$ : l'unica altra possibilità è che  $\pi_{\mathcal{R}}(H)$  sia  $\{\mathcal{R}\}$ , e quindi che  $H \subseteq \operatorname{Ker} \pi_{\mathcal{R}} = \mathcal{R}, \mathcal{I}$ .

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Infatti r è rappresentato in SO(2) dalla matrice  $\binom{\cos(\frac{2\pi}{n}) - \sin(\frac{2\pi}{n})}{\sin(\frac{2\pi}{n}) \cos(\frac{2\pi}{n})}$ , che ha ordine esattamente n.

<sup>7</sup>Infatti ogni elemento di  $D_n$ , come visto prima, è della  $r^k$  o  $sr^k$ .

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>Per ogni ordine di  $\mathcal{R}$  esiste un unico sottogruppo  $H \leq \mathcal{R}$ , e quindi tale sottogruppo deve essere caratteristico.

Si consideri adesso la restrizione di  $\pi_{\mathcal{R}}$  ad H,  $\pi_{\mathcal{R}}|_{H}: H \to D_{n}/\mathcal{R}$ . Vale in particolare che Ker  $\pi_{\mathcal{R}}|_{H} = H \cap \text{Ker } \pi_{\mathcal{R}} = H \cap \mathcal{R}$  e che Im  $\pi_{\mathcal{R}}|_{H} = D_{n}/\mathcal{R}$  (da prima vale infatti che  $\pi_{\mathcal{R}}(H) = D_{n}/\mathcal{R}$ ). Allora, per il Primo teorema di isomorfismo, vale che:

$$\frac{H}{H \cap \mathcal{R}} \cong D_n/\mathcal{R},$$

da cui si deduce che  $|H| = 2|H \cap \mathcal{R}|$ . In particolare  $H \cap \mathcal{R}$  è un sottogruppo di  $\mathcal{R}$ , e quindi esiste  $d \mid n$  tale per cui  $H \cap \mathcal{R} = \langle r^d \rangle$ , con  $|H \cap \mathcal{R}| = \frac{n}{d}$ .

Sia ora  $sr^k$  una simmetria di H. Innanzitutto si osserva che  $\langle r^d \rangle$  è normale in  $D_n$  e quindi  $\langle r^d \rangle \langle sr^k \rangle$  è effettivamente un sottogruppo di  $D_n$ . Dal momento che  $\langle r^d \rangle \cap \langle sr^k \rangle = \{e\}$ , allora  $\left| \langle r^d \rangle \langle sr^k \rangle \right| = \left| \langle r^d \rangle \right| \left| \langle sr^k \rangle \right| = \frac{2n}{d}$ . Anche  $|H| = \frac{2n}{d}$  e quindi, per questioni di cardinalità,  $H = \langle r^d \rangle \langle sr^k \rangle = \langle r^d, sr^k \rangle$ .

In conclusione, ogni sottogruppo di  $D_n$  è della forma  $\langle r^d \rangle$  o della forma  $\langle r^d, sr^k \rangle$ .

 $<sup>^9 {\</sup>rm Infatti}$  l'unica rotazione che è anche una simmetria è l'identità.