# Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

27 e 31 marzo 2023

## Proprietà e teoremi principali sul prodotto scalare

**Nota.** Nel corso del documento, per $V$ si intenderà uno spazio vettoriale di dimensione finita $n$ e per $\varphi$ un suo prodotto scalare. Analogamente si intenderà lo stesso per $V'$ e $\varphi'$.

**Proposizione** (formula delle dimensioni del prodotto scalare)**.** Sia $W \subseteq V$ un sottospazio di $V$. Allora vale la seguente identità:

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V + \dim(W \cap V^\perp).$$

*Dimostrazione.* Si consideri l'applicazione lineare $a_\varphi$ introdotta precedentemente. Si osserva che $W^\perp = \operatorname{Ker}(i^\top \circ a_\varphi)$, dove $i : W \to V$ è tale che $i(\underline{w}) = \underline{w}$. Allora, per la formula delle dimensioni, vale la seguente identità:

$$\dim V = \dim W^\perp + \operatorname{rg}(i^\top \circ a_\varphi). \tag{1}$$

Sia allora $f = i^\top \circ a_\varphi$. Si consideri ora l'applicazione $g = a_\varphi \circ i : W \to V^*$. Sia ora $\mathcal{B}_W$ una base di $W$ e $\mathcal{B}_V$ una base di $V$. Allora le matrici associate di $f$ e di $g$ sono le seguenti:

(i) $M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_W^*}(f) = M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_W^*}(i^\top \circ a_\varphi) = \underbrace{M^{\mathcal{B}_V^*}_{\mathcal{B}_W^*}(i^\top)}_{A} \underbrace{M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_V^*}(a_\varphi)}_{B} = AB,$

(ii) $M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_V^*}(g) = M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_V^*}(a_\varphi \circ i) = \underbrace{M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_V^*}(a_\varphi)}_{B} \underbrace{M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_V}(i)}_{A^\top} = BA^\top \overbrace{=}^{B^\top = B} (AB)^\top.$

Poiché $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^\top)$, si deduce che $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(g) \implies \operatorname{rg}(i^\top \circ a_\varphi) = \operatorname{rg}(a_\varphi \circ i) = \operatorname{rg}(a_\varphi|_W) = \dim W - \dim \operatorname{Ker} a_\varphi|_W$, ossia che:

$$\operatorname{rg}(i^\top \circ a_\varphi) = \dim W - \dim(W \cap \underbrace{\operatorname{Ker} a_\varphi}_{V^\perp}) = \dim W - \dim(W \cap V^\perp). \quad (2)$$

Si conclude allora, sostituendo l'equazione (2) nell'equazione (1), che $\dim V = \dim W^\top + \dim W - \dim(W \cap V^\perp)$, ossia la tesi. $\square$

**Osservazione.** Si identifica $\underline{w}^\perp$ come il sottospazio di tutti i vettori di $V$ ortogonali a $\underline{w}$. In particolare, se $W = \operatorname{Span}(\underline{w})$ è il sottospazio generato da $\underline{w} \neq \underline{0}$, $\underline{w} \in V$, allora $W^\perp = \underline{w}^\perp$. Inoltre valgono le seguenti equivalenze: $\underline{w} \notin W^\perp \iff \operatorname{Rad}(\varphi|_W) = W \cap W^\perp = \{\underline{0}\} \iff \underline{w}$ non è isotropo $\iff V = W \oplus W^\perp$.

**Definizione.** Si definisce **base ortogonale** di $V$ una base $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_n}$ tale per cui $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = 0 \impliedby i \neq j$, ossia una base per cui la matrice associata del prodotto scalare è diagonale.

**Proposizione** (formula di polarizzazione)**.** Se $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$, un prodotto scalare è univocamente determinato dalla sua forma quadratica $q$. In particolare vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \frac{q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w})}{2}.$$

*Dimostrazione.* Si osserva che $q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = 2\varphi(\underline{v}, \underline{w})$, e quindi, poiché 2 è invertibile per ipotesi, si deduce che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \frac{q(\underline{v}+\underline{w})-q(\underline{v})-q(\underline{w})}{2}$. $\square$

**Teorema** (di Lagrange)**.** Ogni spazio vettoriale $V$ su $\mathbb{K}$ tale per cui $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$ ammette una base ortogonale.

*Dimostrazione.* Si dimostra il teorema per induzione su $n := \dim V$. Per $n \leq 1$, la tesi è triviale (se esiste una base, tale base è già ortogonale). Sia allora il teorema vero per $i \leq n$. Se $V$ ammette un vettore non isotropo $\underline{w}$, sia $W = \operatorname{Span}(\underline{w})$ e si consideri la decomposizione $V = W \oplus W^\perp$. Poiché $W^\perp$ ha dimensione $n-1$, per ipotesi induttiva ammette una base ortogonale. Inoltre, tale base è anche ortogonale a $W$, e quindi l'aggiunta di $\underline{w}$ a questa base ne fa una base ortogonale di $V$. Se invece $V$ non ammette vettori non isotropi, ogni forma quadratica è nulla, e quindi il prodotto scalare è nullo per la proposizione precedente. Allora in questo caso ogni base è una base ortogonale, completando il passo induttivo, e dunque la dimostrazione. $\square$

**Nota.** D'ora in poi, nel corso del documento, si assumerà $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$.

**Teorema** (di Sylvester, caso complesso)**.** Sia $\mathbb{K}$ un campo i cui elementi sono tutti quadrati di un altro elemento del campo (e.g. $\mathbb{C}$). Allora esiste una base ortogonale $\mathcal{B}$ tale per cui:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

*Dimostrazione.* Per il teorema di Lagrange, esiste una base ortogonale $\mathcal{B}'$ di $V$. Si riordini allora la base $\mathcal{B}'$ in modo tale che la forma quadratica valutata nei primi elementi sia sempre diversa da zero. Allora, poiché ogni elemento di $\mathbb{K}$ è per ipotesi quadrato di un altro elemento di $\mathbb{K}$, si sostituisca $\mathcal{B}'$ con una base $\mathcal{B}$ tale per cui, se $q(\underline{v_i}) = 0$, $\underline{v_i} \mapsto \underline{v_i}$, e altrimenti $\underline{v_i} \mapsto \frac{\underline{v_i}}{\sqrt{q(\underline{v_i})}}$. Allora $\mathcal{B}$ è una base tale per cui la matrice associata del prodotto scalare in tale base è proprio come desiderata nella tesi, dove $r$ è il numero di elementi tali per cui la forma quadratica valutata in essi sia diversa da zero. □

**Osservazione.**
▶ Si può immediatamente concludere che il rango è un invariante completo per la congruenza in un campo $\mathbb{K}$ in cui tutti gli elementi sono quadrati, ossia che $A \cong B \iff \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$, se $A$ e $B$ sono matrici simmetriche con elementi in $\mathbb{K}$.

Ogni matrice simmetrica rappresenta infatti un prodotto scalare, ed è pertanto congruente ad una matrice della forma desiderata nell'enunciato del teorema di Sylvester complesso. Poiché il rango è un invariante della congruenza, si ricava che $r$ nella forma della matrice di Sylvester, rappresentando il rango, è anche il rango di ogni sua matrice congruente.

In particolare, se due matrici simmetriche hanno lo stesso rango, allora sono congruenti alla stessa matrice di Sylvester, e quindi, essendo la congruenza una relazione di equivalenza, sono congruenti a loro volta tra di loro.

▶ Due matrici simmetriche in $\mathbb{K}$ con stesso rango, allora, non solo sono SD-equivalenti, ma sono anche congruenti.

▶ Ogni base ortogonale deve quindi avere lo stesso numero di vettori isotropi, dal momento che tale numero rappresenta la dimensione del radicale $V^\perp$.

**Definizione** (somma diretta ortogonale)**.** Siano i sottospazi $U$ e $W \subseteq V$ in somma diretta. Allora si dice che $U$ e $W$ sono in **somma diretta ortogonale** rispetto al prodotto scalare $\varphi$ di $V$, ossia che $U \oplus W = U \oplus^{\perp} W$, se $\varphi(\underline{u}, \underline{w}) = 0 \;\forall\, \underline{u} \in U,\, \underline{w} \in W$.

**Definizione** (cono isotropo)**.** Si definisce **cono isotropo** di $V$ rispetto al prodotto scalare $\varphi$ il seguente insieme:

$$\mathrm{CI}(\varphi) = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0\},$$

ossia l'insieme dei vettori isotropi di $V$.

**Nota.** La notazione $\varphi > 0$ indica che $\varphi$ è definito positivo (si scrive $\varphi \geq 0$ se invece è semidefinito positivo). Analogamente $\varphi < 0$ indica che $\varphi$ è definito negativo (e $\varphi \leq 0$ indica che è semidefinito negativo).

**Esercizio 1.** Sia $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$. Siano $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k} \in V$ e sia $M = \Big(\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j})\Big)_{i,j=1—k} \in M(k, \mathbb{K})$, dove $\varphi$ è un prodotto scalare di $V$. Sia inoltre $W = \operatorname{Span}(\underline{v_1}, ..., \underline{v_k})$. Si dimostrino allora le seguenti affermazioni.

(i) Se $M$ è invertibile, allora $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ sono linearmente indipendenti.

(ii) Siano $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ linearmente indipendenti. Allora $M$ è invertibile $\iff$ $\varphi|_W$ è non degenere $\iff$ $W \cap W^{\perp} = \{\underline{0}\}$.

(iii) Siano $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ a due a due ortogonali tra loro. Allora $M$ è invertibile $\iff$ nessun vettore $\underline{v_i}$ è isotropo.

(iv) Siano $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ a due a due ortogonali tra loro e siano anche linearmente indipendenti. Allora $M$ è invertibile $\implies$ si può estendere $\mathcal{B}_W = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_k}\}$ a una base ortogonale di $V$.

(v) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sia inoltre $\varphi > 0$. Allora $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ sono linearmente indipendenti $\iff$ $M$ è invertibile.

(vi) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sia ancora $\varphi > 0$. Allora se $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ sono a due a due ortogonali e sono tutti non nulli, sono anche linearmente indipendenti.

*Soluzione.*

(i) Siano $a_1$, ..., $a_k \in \mathbb{K}$ tali che $a_1\underline{v_1} + \ldots + a_k\underline{v_k} = 0$. Vale in particolare che $\underline{0} = \varphi(\underline{v_i}, \underline{0}) = \varphi(\underline{v_i}, a_1\underline{v_1} + \ldots + a_k\underline{v_k}) = \sum_{j=1}^{k} a_j \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) \;\forall\, 1 \leq i \leq k$. Allora $\sum_{j=1}^{k} a_j M^j = 0$. Dal momento che $M$ è invertibile, $\operatorname{rg}(M) =$

$k$, e quindi l'insieme delle colonne di $M$ è linearmente indipendente, da cui si ricava che $a_j = 0 \; \forall \, 1 \leq j \leq k$, e quindi che $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ sono linearmente indipendenti.

(ii) Poiché $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ sono linearmente indipendenti, tali vettori formano una base di $W$, detta $\mathcal{B}$. In particolare, allora, vale che $M = M_{\mathcal{B}}(\varphi|_W)$. Pertanto, se $M$ è invertibile, $\mathrm{Rad}(\varphi|_W) = \mathrm{Ker}\, M = \{\underline{0}\}$, e dunque $\varphi|_W$ è non degenere. Se invece $\varphi|_W$ è non degenere, $\{\underline{0}\} = \mathrm{Rad}(\varphi|_W) = W \cap W^\perp$. Infine, se $W \cap W^\perp = \{\underline{0}\}$, $\{\underline{0}\} = W \cap W^\perp = \mathrm{Rad}(\varphi|_W) = \mathrm{Ker}\, M$, e quindi $M$ è iniettiva, e dunque invertibile.

(iii) Dal momento che $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ sono ortogonali tra loro, $M$ è una matrice diagonale. Pertanto $M$ è invertibile se e solo se ogni suo elemento diagonale è diverso da 0, ossia se $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_i}) \neq 0 \; \forall \, 1 \leq i \leq k$, e dunque se e solo se nessun vettore $\underline{v_i}$ è isotropo.

(iv) Se $M$ è invertibile, da (ii) si deduce che $\mathrm{Rad}(\varphi|_W) = W \cap W^\perp = \{\underline{0}\}$, e quindi che $W$ e $W^\perp$ sono in somma diretta. Inoltre, per la formula delle dimensioni del prodotto scalare, $\dim W + \dim W^\perp = \dim V + \underbrace{\dim(W \cap V^\perp)}_{\leq \dim(W \cap W^\perp) = 0} = \dim V$. Pertanto $V = W \oplus^\perp W^\perp$.

Allora, dacché $\mathrm{char}\, \mathbb{K} \neq 2$, per il teorema di Lagrange, $W^\perp$ ammette una base ortogonale $\mathcal{B}_{W^\perp}$. Si conclude dunque che $\mathcal{B} = \mathcal{B}_W \cup \mathcal{B}_{W^\perp}$ è una base ortogonale di $V$.

(v) Se $M$ è invertibile, da (i) $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ sono linearmente indipendenti. Siano ora invece $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ linearmente indipendenti per ipotesi. Siano $a_1$, ..., $a_k \in \mathbb{K}$ tali che $a_1 M^1 + \ldots + a_k M^k = 0$, allora $a_1 \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_1}) + \ldots + a_k \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_k}) = 0 \; \forall \, 1 \leq i \leq k$. Pertanto, detto $\underline{v} = a_1 \underline{v_1} + \ldots + a_k \underline{v_k}$, si ricava che:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_j \, \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = 0.$$

Tuttavia questo è possibile solo se $\underline{v} = a_1 \underline{v_1} + \ldots + a_k \underline{v_k} = 0$. Dal momento che $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ sono linearmente indipendenti, si conclude che $a_1 = \cdots = a_k = 0$, ossia che le colonne di $M$ sono tutte linearmente indipendenti e quindi che $\mathrm{rg}(M) = k \implies M$ è invertibile.

(vi) Poiché $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ sono ortogonali a due a due tra loro, $M$ è una matrice diagonale. Inoltre, dacché $\varphi > 0$ e $\underline{v_i} \neq \underline{0}$ $\forall 1 \leq i \leq k$, gli elementi diagonali di $M$ sono sicuramente tutti diversi da zero, e quindi $\det(M) \neq 0 \implies M$ è invertibile. Allora, per il punto (v), $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k}$ sono linearmente indipendenti.

**Definizione** (indici e segnatura)**.** Data una base ortogonale $\mathcal{B}$ di $V$ rispetto al prodotto scalare $\varphi$, si definiscono i seguenti indici:

$$\iota_+(\varphi) = \max\{\dim W \mid W \subseteq V \text{ e } \varphi|_W > 0\}, \qquad (\textbf{indice di positività})$$
$$\iota_-(\varphi) = \max\{\dim W \mid W \subseteq V \text{ e } \varphi|_W < 0\}, \qquad (\textbf{indice di negatività})$$
$$\iota_0(\varphi) = \dim V^\perp. \qquad (\textbf{indice di nullità})$$

Quando il prodotto scalare $\varphi$ è noto dal contesto, si semplifica la notazione scrivendo solo $\iota_+$, $\iota_-$ e $\iota_0$. In particolare, la terna $\sigma(\varphi) = \sigma = (i_+, i_-, i_0)$ è detta **segnatura** del prodotto $\varphi$.

**Teorema** (di Sylvester, caso reale)**.** Sia $\mathbb{K}$ un campo ordinato i cui elementi positivi sono tutti quadrati (e.g. $\mathbb{R}$). Allora esiste una base ortogonale $\mathcal{B}$ tale per cui:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{\iota_+} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_{\iota_-} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \cdot I_{\iota_0} \end{array}\right).$$

Inoltre, per ogni base ortogonale, esistono esattamente $\iota_+$ vettori della base con forma quadratica positiva, $\iota_-$ con forma negativa e $\iota_0$ con forma nulla.

*Dimostrazione.* Per il teorema di Lagrange, esiste una base ortogonale $\mathcal{B}'$ di $V$. Si riordini la base in modo tale che la forma quadratica valutata nei primi elementi sia strettamente positiva, che nei secondi elementi sia strettamente negativa e che negli ultimi sia nulla. Si sostituisca $\mathcal{B}'$ con una base $\mathcal{B}$ tale per cui, se $q(\underline{v_i}) > 0$, allora $\underline{v_i} \mapsto \frac{\underline{v_i}}{\sqrt{q(\underline{v_i})}}$; se $q(\underline{v_i}) < 0$, allora $\underline{v_i} \mapsto \frac{\underline{v_i}}{\sqrt{-q(\underline{v_i})}}$; altrimenti $\underline{v_i} \mapsto \underline{v_i}$. Si è allora trovata una base la cui matrice associata del prodotto scalare è come desiderata nella tesi.

Sia ora $\mathcal{B}$ una qualsiasi base ortogonale di $V$. Siano inoltre $a$ il numero di vettori della base con forma quadratica positiva, $b$ il numero di vettori con forma negativa e $c$ quello dei vettori con forma nulla. Si consideri $W_+ = \operatorname{Span}(\underline{v_1}, ..., \underline{v_a})$, $W_- = \operatorname{Span}(\underline{v_{a+1}}, ..., \underline{v_b})$, $W_0 = \operatorname{Span}(\underline{v_{b+1}}, ..., \underline{v_c})$.

Sia $M = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Si osserva che $c = n - \text{rg}(M) = \dim \text{Ker}(M) = \dim V^\perp = \iota_0$. Inoltre $\forall \underline{v} \in W_+$, dacché $\mathcal{B}$ è ortogonale, $q(\underline{v}) = q(\sum_{i=1}^a \alpha_i \underline{v_i}) = \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 q(\underline{v_i}) > 0$, e quindi $\varphi|_{W_+} > 0$, da cui $\iota_+ \geq a$. Analogamente $\iota_- \geq b$.

Si mostra ora che è impossibile che $\iota_+ > a$. Se così infatti fosse, sia $W$ tale che $\dim W = \iota_+$ e che $\varphi|_W > 0$. $\iota_+ + b + c$ sarebbe maggiore di $a+b+c = n := \dim V$. Quindi, per la formula di Grassman, $\dim(W + W_- + W_0) = \dim W + \dim(W_- + W_0) - \dim(W \cap (W_- + W_0)) \implies \dim(W \cap (W_- + W_0)) = \dim W + \dim(W_- + W_0) - \dim(W + W_- + W_0) > 0$, ossia esisterebbe $\underline{v} \neq \{\underline{0}\} \mid \underline{v} \in W \cap (W_- + W_0)$. Tuttavia questo è assurdo, dacché dovrebbe valere sia $q(\underline{v}) > 0$ che $q(\underline{v}) < 0$, $\lightning$. Quindi $\iota_+ = a$, e analogamente $\iota_- = b$. $\square$

**Definizione.** Si dice **base di Sylvester** una base di $V$ tale per cui la matrice associata di $\varphi$ sia esattamente nella forma vista nell'enunciato del teorema di Sylvester. Analogamente si definisce tale matrice come **matrice di Sylvester**.

**Osservazione.**

▶ Come conseguenza del teorema di Sylvester reale, si osserva che la segnatura di una matrice simmetrica reale è invariante per cambiamento di base, se la base è ortogonale.

▶ La segnatura è un invariante completo per la congruenza nel caso reale. Se infatti due matrici hanno la stessa segnatura, queste sono entrambe congruenti alla stessa matrice di Sylvester, e quindi, essendo la congruenza una relazione di equivalenza, sono congruenti tra loro. Analogamente vale il viceversa, dal momento che ogni base ortogonale di due matrici congruenti deve contenere gli stessi numeri $\iota_+$, $\iota_-$ e $\iota_0$ di vettori di base con forma quadratica positiva, negativa e nulla.

▶ Se $\underline{w_1}$, ..., $\underline{w_k}$ sono tutti i vettori di una base ortogonale $\mathcal{B}$ con forma quadratica nulla, si osserva che $W = \text{Span}(\underline{w_1}, ..., \underline{w_k})$ altro non è che $V^\perp$ stesso.

Infatti, come visto anche nella dimostrazione del teorema di Sylvester reale, vale che $\dim W = \dim \text{Ker}(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = \dim V^\perp$. Sia allora la base $\mathcal{B} = \{\underline{w_1}, \ldots, \underline{w_k}, \underline{v_{k+1}}, \ldots, \underline{v_n}\}$ un'estensione di $\{\underline{w_1}, \ldots, \underline{w_k}\}$. Se $\underline{w} \in W$ e $\underline{v} \in V$, $\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = \varphi(\sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{w_i}, \sum_{i=1}^k \beta_i \underline{w_i} + \sum_{i=k+1}^n \beta_i \underline{v_i}) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_i q(\underline{w_i}) = 0$ (dove $\alpha_i$ e $\beta_i \in \mathbb{K}$ rappresentano la $i$-esima coordinata di $\underline{w}$ e $\underline{v}$ nella base

$\mathcal{B}$), e quindi $W \subseteq V^\perp$. Si conclude allora, tramite l'uguaglianza dimensionale, che $W = V^\perp$.

▶ Poiché $\dim \operatorname{Ker}(\varphi) = \iota_0$, vale in particolare che $\operatorname{rg}(\varphi) = n - \iota_0 = \iota_+ + \iota_-$ (infatti vale che $n = \iota_+ + \iota_- + \iota_0$, dal momento che $n$ rappresenta il numero di elementi di una base ortogonale).

▶ Se $V = U \oplus^\perp W$, allora $\iota_+(\varphi) = \iota_+(\varphi|_V) + \iota_+(\varphi|_W)$. Analogamente vale la stessa cosa per gli altri indici. Infatti, prese due basi ortogonali $\mathcal{B}_U$, $\mathcal{B}_W$ di $U$ e $W$, la loro unione $\mathcal{B}$ è una base ortogonale di $V$. Pertanto il numero di vettori della base $\mathcal{B}$ con forma quadratica positiva è esattamente $\iota_+(\varphi|_V) + \iota_+(\varphi|_W)$.

**Definizione** (isometria tra due spazi vettoriali)**.** Dati due spazi vettoriali $(V, \varphi)$ e $(V', \varphi')$ dotati di prodotto scalare sullo stesso campo $\mathbb{K}$, si dice che $V$ e $V'$ sono **isometrici** se esiste un isomorfismo $f$, detto *isometria*, che preserva tali che prodotti, ossia tale che:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi'(f(\underline{v}), f(\underline{w})).$$

**Esercizio 2.** Sia $f : V \to V'$ un isomorfismo. Allora $f$ è un'isometria $\iff$ $\forall$ base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ di $V$, $\mathcal{B}' = \{f(\underline{v_1}), \ldots, f(\underline{v_n})\}$ è una base di $V'$ e $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j}))\ \forall\, 1 \leq i, j \leq n$ $\iff$ $\exists$ base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ di $V$ tale che $\mathcal{B}' = \{f(\underline{v_1}), \ldots, f(\underline{v_n})\}$ è una base di $V'$ e $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j}))\ \forall\, 1 \leq i, j \leq n$.

*Soluzione.* Se $f$ è un'isometria, detta $\mathcal{B}$ una base di $V$, $\mathcal{B}' = f(\mathcal{B})$ è una base di $V'$ dal momento che $f$ è anche un isomorfismo. Inoltre, dacché $f$ è un'isometria, vale sicuramente che $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j}))\ \forall\, 1 \leq i, j \leq n$.

Sia ora assunto per ipotesi che $\forall$ base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ di $V$, $\mathcal{B}' = \{f(\underline{v_1}), \ldots, f(\underline{v_n})\}$ è una base di $V'$ e $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j}))\ \forall\, 1 \leq i, j \leq n$. Allora, analogamente a prima, detta $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ una base di $V$, $\mathcal{B}' = f(\mathcal{B})$ è una base di $V'$, e in quanto tale, per ipotesi, è tale che $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j}))\ \forall\, 1 \leq i, j \leq n$.

Sia infine assunto per ipotesi che $\exists$ base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ di $V$ tale che $\mathcal{B}' = \{f(\underline{v_1}), \ldots, f(\underline{v_n})\}$ è una base di $V'$ e $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j}))\ \forall\, 1 \leq i, j \leq n$. Siano $\underline{v}$, $\underline{w} \in V$. Allora $\exists\, a_1$, ..., $a_n$, $b_1$, ..., $b_n \in \mathbb{K}$ tali che $\underline{v} = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n}$ e $\underline{w} = b_1\underline{v_1} + \ldots + b_n\underline{v_n}$. Si ricava pertanto che:

$$\varphi'(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j\, \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j})) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j\, \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}),$$

da cui la tesi.

**Proposizione.** Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(i) $V$ e $V'$ sono isometrici;

(ii) $\forall$ base $\mathcal{B}$ di $V$, base $\mathcal{B}'$ di $V'$, $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ e $M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$ sono congruenti;

(iii) $\exists$ base $\mathcal{B}$ di $V$, base $\mathcal{B}'$ di $V'$ tale che $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ e $M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$ sono congruenti.

*Dimostrazione.* Se $V$ e $V'$ sono isometrici, sia $f : V \to V'$ un'isometria. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ una base di $V$. Allora, poiché $f$ è anche un isomorfismo, $\mathcal{B}' = f(\mathcal{B})$ è una base di $V$ tale che $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j}))\ \forall\, 1 \leq i, j \leq n$. Pertanto $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$. Si conclude allora che, cambiando base in $V$ (o in $V'$), la matrice associata al prodotto scalare varia per congruenza dalla formula di cambiamento di base per il prodotto scalare, da cui si ricava che per ogni scelta di $\mathcal{B}$ base di $V$ e di $\mathcal{B}'$ base di $V'$, $M_{\mathcal{B}}(\varphi) \cong M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$. Inoltre, se tale risultato è vero per ogni $\mathcal{B}$ base di $V$ e di $\mathcal{B}'$ base di $V'$, dal momento che sicuramente esistono due basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ di $V$ e $V'$, vale anche (ii) $\implies$ (iii).

Si dimostra ora (iii) $\implies$ (i). Per ipotesi $M_{\mathcal{B}}(\varphi) \cong M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$, quindi $\exists\, P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \mid M_{\mathcal{B}'}(\varphi') = P^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi) P$. Allora $\exists\ \mathcal{B}''$ base di $V'$ tale che $P = M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$, da cui $P^{-1} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}(\varphi)$. Per la formula di cambiamento di base del prodotto scalare, $M_{\mathcal{B}''}(\varphi) = (P^{-1})^\top M_{\mathcal{B}'} P^{-1} = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Detta $\mathcal{B}'' = \{\underline{w_1}, \ldots, \underline{w_n}\}$, si costruisce allora l'isomorfismo $f : V \to V'$ tale che $f(\underline{v_i}) = \underline{w_i}\ \forall\, 1 \leq i \leq n$.. Dal momento che per costruzione $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}''}(\varphi')$, $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(\underline{w_i}, \underline{w_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j}))\ \forall\, 1 \leq i, j \leq n$. Si conclude dunque che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi'(f(\underline{v}), f(\underline{w}))\ \forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V$, e dunque che $f$ è un'isometria, come desiderato dalla tesi. □

**Proposizione.** $(V, \varphi)$ e $(V', \varphi')$ spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ sono isometrici $\iff$ $\varphi$ e $\varphi'$ hanno la stessa segnatura.

*Dimostrazione.*

($\implies$) Per la precedente proposizione, esistono due basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, una di $V$ e una di $V'$, tali che $M_{\mathcal{B}}(\varphi) \cong M_{\mathcal{B}'}(\varphi)$. Allora queste due matrici condividono la stessa segnatura, e così quindi anche $\varphi$ e $\varphi'$.

( $\Longleftarrow$ ) Se $\varphi$ e $\varphi'$ hanno la stessa segnatura, esistono due basi $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ e $\mathcal{B}' = \{\underline{w_1}, \ldots, \underline{w_n}\}$, una di $V$ e una di $V'$, tali che $M = M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}'}(\varphi')$ e che $M$ è una matrice di Sylvester. Allora si costruisce $f : V \to V'$ tale che $f(\underline{v_i}) = \underline{w_i}$. Esso è un isomorfismo, e per costruzione $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi'(\underline{w_i}, \underline{w_j}) = \varphi'(f(\underline{v_i}), f(\underline{v_j}))\ \forall\, 1 \leq i, j \leq n$, da cui si conclude che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi'(f(\underline{v}), f(\underline{w}))\ \forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V$, e quindi che $V$ e $V'$ sono isometrici. $\square$

**Definizione** (sottospazio isotropo)**.** Sia $W$ un sottospazio di $V$. Allora $W$ si dice **sottospazio isotropo** di $V$ se $\varphi|_W = 0$.

**Osservazione.**
▶ $V^\perp$ è un sottospazio isotropo di $V$.
▶ $\underline{v}$ è un vettore isotropo $\iff$ $W = \operatorname{Span}(\underline{v})$ è un sottospazio isotropo di $V$.
▶ $W \subseteq V$ è isotropo $\iff$ $W \subseteq W^\perp$.

**Proposizione.** Sia $\varphi$ non degenere. Se $W$ è un sottospazio isotropo di $V$, allora $\dim W \leq \frac{1}{2} \dim V$.

*Dimostrazione.* Poiché $W$ è un sottospazio isotropo di $V$, $W \subseteq W^\perp \implies \dim W \leq \dim W^\perp$. Allora, poiché $\varphi$ è non degenere, $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$, $\dim W \leq \dim V - \dim W$, da cui $\dim W \leq \frac{1}{2} \dim V$. $\square$

**Definizione** (indice di Witt)**.** Si definisce **indice di Witt** $W(\varphi)$ di $(V, \varphi)$ come la massima dimensione di un sottospazio isotropo.

**Osservazione.**
▶ Se $\varphi > 0$ o $\varphi < 0$, $W(\varphi) = 0$.

**Proposizione.** Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sia $\varphi$ non degenere e sia $\sigma(\varphi) = (\iota_+(\varphi), \iota_-(\varphi), 0)$. Allora $W(\varphi) = \min\{\iota_+(\varphi), \iota_-(\varphi)\}$.

*Dimostrazione.* Senza perdità di generalità si assuma $\iota_-(\varphi) \leq \iota_+(\varphi)$ (il caso $\iota_-(\varphi) > \iota_+(\varphi)$ è analogo). Sia $W$ un sottospazio con $\dim W > \iota_-(\varphi)$. Sia $W^+$ un sottospazio con $\dim W^+ = \iota_+(\varphi)$ e $\varphi|_{W^+} > 0$. Allora, per la formula di Grassmann, $\dim W + \dim W^+ > n \implies \dim W + \dim W^+ > \dim W + \dim W^+ - \dim(W \cap W^+) \implies \dim(W \cap W^+) > 0$. Quindi $\exists\, \underline{w} \in W$, $\underline{w} \neq \underline{0}$ tale che $\varphi(\underline{w}, \underline{w}) > 0$, da cui si ricava che $W$ non è isotropo. Pertanto $W(\varphi) \leq \iota_-(\varphi)$.

Sia $a := \iota_+(\varphi)$ e sia $b := \iota_-(\varphi)$. Sia ora $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_a}, \underline{w_1}, \ldots, \underline{w_b}\}$ una base tale per cui $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è la matrice di Sylvester per $\varphi$. Siano $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_a}$ tali che $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_i}) = 1$ con $1 \leq i \leq a$. Analogamente siano $\underline{w_1}$, ..., $\underline{w_b}$ tali che $\varphi(\underline{w_i}, \underline{w_i}) = -1$ con $1 \leq i \leq b$. Detta allora $\mathcal{B}' = \{\underline{v_1}' := \underline{v_1} + \underline{w_1}, \ldots, \underline{v_b}' := \underline{v_b} + \underline{w_b}\}$, sia $W = \operatorname{Span}(\mathcal{B}')$.

Si osserva che $\mathcal{B}'$ è linearmente indipendente, e dunque che $\dim W = \iota_-$. Inoltre $\varphi(\underline{v_i}', \underline{v_j}') = \varphi(\underline{v_i} + \underline{w_i}, \underline{v_j} + \underline{w_j})$. Se $i \neq j$, allora $\varphi(\underline{v_i}', \underline{v_j}') = 0$, dal momento che i vettori di $\mathcal{B}$ sono a due a due ortogonali tra loro. Se invece $i = j$, allora $\varphi(\underline{v_i}', \underline{v_j}') = \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_i}) + \varphi(\underline{w_i}, \underline{w_i}) = 1 - 1 = 0$. Quindi $M_{\mathcal{B}'}(\varphi|_W) = 0$, da cui si conclude che $\varphi|_W = 0$. Pertanto $W(\varphi) \geq i_-(\varphi)$, e quindi $W(\varphi) = i_-(\varphi)$, da cui la tesi. $\square$