TD 17 Esapces vectoriels de dimension finie

Exercice 1: ★★

On considère dans $M_{1,3}(\mathbb{R})$ les vecteurs $u = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix}3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

(1) La famille (u, v) est-elle une base de $M_{1,3}(\mathbb{R})$?

(2) La famille (u, v) est-elle une base du sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}\{u, v\}$?
Quelle est la dimension de F ?

(3) Le vecteur $x = \begin{pmatrix}1 & 4 & 7\end{pmatrix}$ appartient-il à F ?
Si c'est le cas, quelles sont ses coordonnées sur la base (u, v) ?

(4) Le vecteur $y = \begin{pmatrix}-1 & 6 & 9\end{pmatrix}$ appartient-il à F ?
Si c'est le cas, quelles sont ses coordonnées sur la base (u, v) ?

Exercice 2: ★★

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 rapporté à une base (e_1, e_2, e_3).

Déterminer m pour que les trois vecteurs $u = 3e_1 + e_2 + 6e_3$, $v = e_1 + e_2 + 4e_3$ et $w = e_1 + me_3$ de E soient linéairement indépendants.

Exercice 3: ★★

Déterminer le rang des familles $((6, 3, 0); (1, -1, 3); (0, 2, -4); (3, 1, 1))$ et $((a, 1, 1); (1, a, 1); (1, 1, a))$ où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 4: ★★

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $a = (0, 1, -1, 2)$, $b = (1, 3, 0, 2)$, $c = (2, 1, -3, 4)$, $d = (0, 0, 2, 1)$ et $e = (-1, 1, 0, 3)$. On pose $F = \text{Vect}(a, b, c)$ et $G = \text{Vect}(d, e)$. Déterminer les dimensions de $F, G, F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 5: ★★★

Soit E un K-e.v. de dimension finie et F un sous-e.v. de E. On se donne $(e_1, \dots, e_k)$ une base d'un supplémentaire de F.

(1) Soient $a \in F$, $G_a = \text{Vect}(a + e_1, \dots, a + e_k)$. Montrer que G_a est un supplémentaire de F dans E.

(2) En déduire que si F est un sous-e.v. strict de E non réduite à $\{0\}$, F admet une infinité de supplémentaires dans E.

Exercice 6: ★★

On définit f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 pour tout réel strictement positif x par :

$$f_1(x) = \ln(x);\ f_2(x) = x;\ f_3(x) = e^x;\ f_4(x) = e^{x+3};\ f_5(x) = \frac{1}{x}.$$

(1) La famille $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ est-elle une famille libre de l'espace des applications de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$?

(2) Déterminer une base de $\text{Vect}((f_1, f_2, f_3, f_4, f_5))$.

Exercice 7: ★★★

Déterminer les dimensions possibles de l'intersection de deux hyperplans de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 8: ★★★

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Montrer que deux sous-espaces vectoriels de E ont même dimesnsion si et seulement s'ils ont un supplémentaire commun.

Exercice 9: ★★★

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et E l'ensemble des suites complexes p-périodiques, c'est-à-dire satisfaisant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n.$$

Montrer que E est un espace vectoriel de dimension finie et déterminer une base de E constituée de suites géométriques.