Chapitre 3

Étude de fonctions

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 25 avril 2022

Table des matières

Étudier une fonction c'est déterminer tous les éléments (tangentes, asymptotes) qui permettent d'obtenir l'allure de la courbe représentative de la fonction.

Exemple:

$$f : x \mapsto \frac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}$$

1. On détemine le domaine de définition de la fonction f.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.

   $$x^2+2x-3=0 \iff x \in \{-3, 1\} \quad \text{car} \begin{cases} -3+1=-2=-\dfrac{b}{a} \\ -3\times 1=-3=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

   Donc f est définie sur $\mathscr{D}$ avec $\mathscr{D} =]-\infty, -3[\cup]-3, -1[\cup]-1, +\infty[$
2. Asymptotes et limites
   Soit $x \in \mathscr{D}$

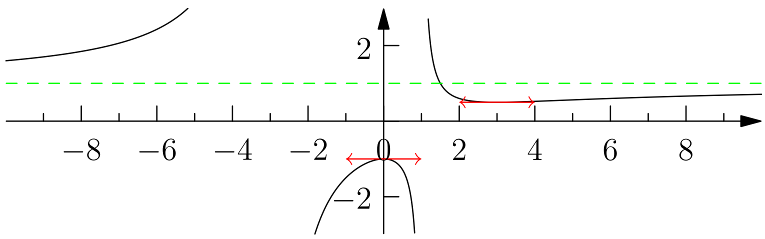
   $$f(x) = \frac{\cancel{x^2}\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1$$

   $$\left.\begin{aligned} x^2-2x+3 &\xrightarrow[x\to-3]{} 9+6+3=18 \\ x^2+2x-3 &\xrightarrow[x\to-3]{} 0 \end{aligned}\right\} \text{donc} \begin{cases} f(x) \xrightarrow[\substack{x\to-3 \\ <}]{} +\infty \\ f(x) \xrightarrow[\substack{x\to-3 \\ >}]{} -\infty \end{cases}$$

   $$\left.\begin{aligned} x^2-2x+3 &\xrightarrow[x\to1]{} 2 \\ x^2+2x-3 &\xrightarrow[x\to1]{} 0 \end{aligned}\right\} \text{donc} \begin{cases} f(x) \xrightarrow[\substack{x\to1 \\ <}]{} -\infty \\ f(x) \xrightarrow[\substack{x\to1 \\ >}]{} +\infty \end{cases}$$
3. f est dérivable sur $\mathscr{D}$ et

   $$\begin{aligned} \forall x \in \mathscr{D}, f'(x) &= \frac{2(x-1)(x^2+2x-3)-2(x^2-2x+3)(x+1)}{(x^2+2x-3)^2} \\ &= \frac{2(2x^2-6x)}{(x^2-2x+3)^2} \\ &= \frac{4x(x-4)}{(x^2-2x+3)^2} \end{aligned}$$

x	$+\infty$		-3		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1



Première partie

Calculs de limites

Rappel:
Soient f et g deux fonctions et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

On ne connaît pas, à l'avance, les limites de

— $f(x) - g(x)$ si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \end{cases}$ ("$\infty - \infty$")

— $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \end{cases}$ ("$\frac{0}{0}$")

— $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty \end{cases}$ ("$\frac{\infty}{\infty}$")

— $f(x) \times g(x)$ si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty \end{cases}$ ("$0 \times \infty$")

Exemple:
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$?

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

et

$$\begin{cases} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \end{cases}$$

donc c'est une forme indéterminée.

Proposition:
Si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1 \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty \end{cases}$ alors, on ne sait pas à l'avance calculer $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\big)^{g(x)}$. □

Définition: Soient f et g deux fonctions et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ où $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a (ou éqivalentes en a) s'il existe une fonction u telle que

$$\begin{cases} f = g \times u \\ u(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1 \end{cases}$$

On note alors $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Proposition: Un polynôme est équivalent en $\pm\infty$ à son terme de plus haut degré.

Preuve:
Soit $P : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$. On pose $Q : x \mapsto a_n x^n$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, P(x) &= a_n x^n \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k x^k}{a_n x^n}\right) \\ &= Q(x)\left(1 + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} \times \left(\frac{1}{x^{n-k}}\right)}_{u(x)}\right) \\ &= Q(x)\, u(x)\end{aligned}$$

On a $u(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1$ donc $P(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} Q(x)$. □

Proposition: Un polynôme est équivalent en 0 à sont terme de plus bas degré.

Preuve:
À faire □

Remarque:
Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a tel que

$$\forall x \in I, g(x) \neq 0$$

où I est un intervalle
— qui contient a si $a \in \mathbb{R}$,
— dont une borne est a si $a = \pm\infty$.
Alors,

$$f \underset{a}{\sim} g \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[\substack{x\to a \\ \neq}]{} 1.$$

Exemple:
$x^2 + x^3 \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ car $\dfrac{x^2+x^3}{x^2} = 1 + x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

Exemple:
Soit f une fonction.

$$f \underset{0}{\sim} 0 \iff \exists I \text{ voisinage de } a, \forall x \in I, f(x) = 0.$$

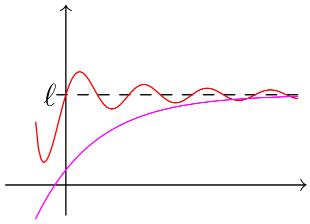
Deuxième partie

Asymptotes, branches paraboliques et prolongement par continuité

Limite en $+\infty$:

<u>Cas 1</u>

$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.



On dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une <u>asymptote</u> horizontale.

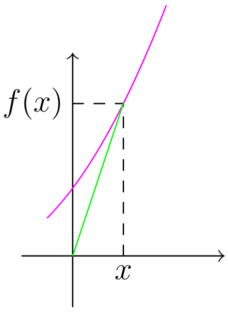
<u>Cas 2</u>

$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$ dans ce cas, on cherche $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

<u>Sous cas 1</u> $\frac{f(x)}{x}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

?

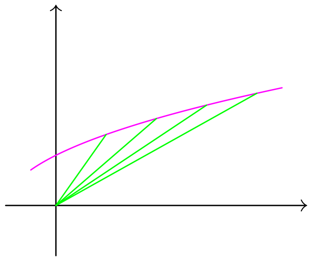
<u>Sous cas 2</u> $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.



On dit que la courbe de f présente <u>une branche parabolique</u> de <u>direction asymptotique</u> l'axe des ordonées.

$\frac{f(x)}{x}$ est la pente de la droite verte.

<u>Sous cas 3</u> $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

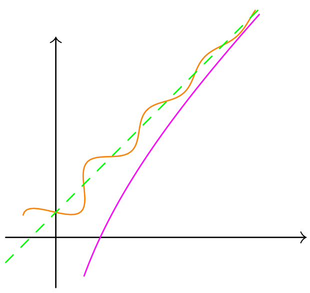


On dit que la courbe de f présente <u>une branche parabolique</u> de <u>direction asymptotique</u> l'axe des ordonées.

$\frac{f(x)}{x}$ est la pente de la droite verte.

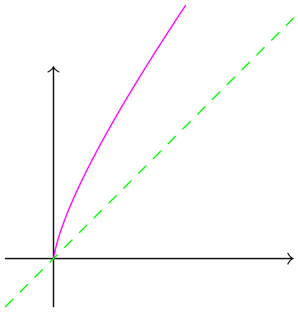
<u>Sous cas 4</u> $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}^+$. On cherche $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - \ell x\big)$.

<u>*Sous-sous cas 1*</u> $f(x) - \ell x \xrightarrow[x\to+\infty]{} a \in \mathbb{R}$



Asymptote oblique d'équation $y = \ell x + a$.

Sous-sous cas 2 $f(x) - \ell x \xrightarrow[x \to +\infty]{} \pm\infty$



Branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = \ell x$.

Sous-sous cas 2 $f(x) - \ell x$ n'a pas de limite

?

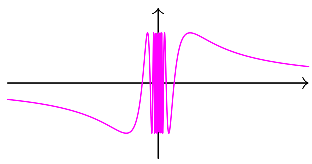
Limite en $a \in \mathbb{R}$:

On cherche $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

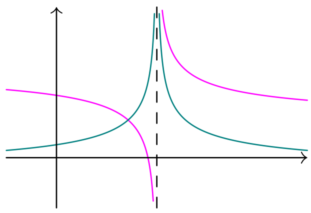
Cas 1

Pas de limite

$\boxed{\text{ex}}$ $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0 :



Cas 2 $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \pm\infty$

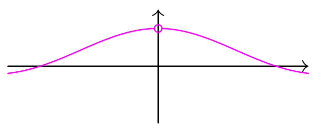


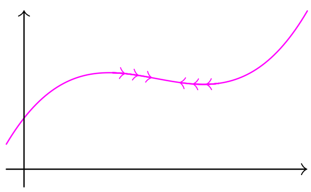
Asymptote verticale d'équation $x = a$.

Cas 3 $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{ex}}$ $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 1$, dans ce cas, on pose

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$





On pose $f(a) = \ell$. On dit que l'on a prolongé par continuité la fonction f.