Chapitre 0

Logique (rudiment

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 28 mars 2022

Table des matières

Définition: Un proposition est un énoncé qui est soit vrai, soit faux.

EXEMPLE:

$$\left.\begin{array}{l} A : \text{“}B \text{ est vraie ”} \\ B : \text{“}A \text{ est fausse ”} \end{array}\right\} \text{Le système } \{A, B\} \text{ est une auto-contradiction}$$

Définition: Démontrer une proposition revient à prouver qu'elle est vraie

Première partie

Algèbre de Boole

Définition: Soient A et B deux propositions. La proposition <u>A et B</u> est définie par la table de vérité suivante :

A	B	A et B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Définition: Soient A et B deux propositions. La proposition <u>A ou B</u> est définie par la table de vérité suivante :

A	B	A ou B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Définition: Soit A une proposition. La <u>négation</u> de A, notée non(A) est définie par :

A	non(A)
V	F
F	V

Définition: Deux propositions A et B sont <u>équivalentes</u> si elles ont la même table de vérité. Dans ce cas, on note $A \iff B$

Proposition: Soient A, B et C trois propositions.

1. $(A \text{ et } B) \text{ et } C \iff A \text{ et } (B \text{ et } C)$
2. $A \text{ et } A \iff A$
3. $A \text{ et } B \iff B \text{ et } A$
4. $(A \text{ ou } B) \text{ ou } C \iff A \text{ ou } (B \text{ ou } C)$
5. $A \text{ ou } A \iff A$
6. $A \text{ ou } B \iff B \text{ ou } A$
7. $\text{non } (\text{ non } (A)) \iff A$

8. A et $(B$ ou $C) \iff A$ et B ou A et C
9. A ou $(B$ et $C) \iff (A$ ou $B)$ et $(A$ et $C)$
10. non $(A$ et $B) \iff$ non (A) ou non (B)
11. non $(A$ ou $B) \iff$ non (A) et non (B)

Preuve:
8.

A	B	C	B ou C	A et $(B$ ou $C)$	A et B	A et C	$(A$ et $B)$ ou $(A$ et $C)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

10.

A	B	A et B	non $(A$ et $B)$	non (A)	non (B)	non (A) ou non (B)
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

□

Définition: Soient A et B deux propositions. La proposition $\underline{A \implies B}$ (A implique B) est définie par :

A	B	$A \implies B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Définition: Soient A et B deux propositions telles que $A \implies B$ est vraie. On dit que A est une condition suffisante pour que B soit vraie. On dit que B est une condition nécessaire pour que A soit vraie.

Proposition (Contraposée)**:** Soient A et B deux propositions.

$$(A \implies B) \iff (\text{ non } B \implies \text{ non } A)$$

Preuve:

A	B	non A	non B	non $B \implies$ non A	$A \implies B$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

□

Proposition: Soient A et B deux propositions.

$$(A \implies B) \iff \big((A \implies B) \text{ et } (B \implies A)\big)$$

Preuve:

A	B	$A \iff B$	$A \implies B$	$B \implies A$	$(A \implies B)$ et $(B \implies A)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

□

Proposition: Soient A et B deux propositions.

$$(A \implies B) \iff (B \text{ ou } \text{ non } (A))$$

Preuve:
On obtient par contraposée

$$\text{non } (A \implies B) \iff (A \text{ et } \text{ non } (B))$$

donc

$$\begin{aligned}(A \implies B) &\iff \text{ non } (A \text{ et } \text{ non } (B))\\ &\iff \text{ non } (A) \text{ ou } \text{ non } (\text{ non } (B))\\ &\iff \text{ non } (A) \text{ ou } B\\ &\iff B \text{ ou } \text{ non } (A)\end{aligned}$$

□

Deuxième partie

Déduction naturelle

Dans ce paragraphe, A et B sont deux propositions.

$\boxed{A \text{ et } B}$

Comment démontrer A et B ?
- On démontre A
- On démontre B

Comment utiliser l'hypothèse A et B ?
On utilise A ou on utilise B.

$\boxed{A \text{ ou } B}$

Comment démontrer A ou B ?
On essaie de démontrer A. Si on y arrive, alors on a prouvé A ou B sinon on démontre B.

Variante
On suppose A faux. On démontre B.

Comment utiliser l'hypothèse A ou B ?
On fait une disjonction des cas :

- Cas 1 : On suppose A

- Cas 2 : On suppose B

$\boxed{A \implies B}$

Comment démontrer $A \implies B$?
On suppose A. On démontre B.

Comment utiliser l'hypothèse $A \implies B$?
On démontre A. On utilise B.

Troisième partie

Raisonement par l'absurde

$\boxed{\text{Situation :}}$
Soient A et B deux propositions.
On veut montrer $A \implies B$.
On suppose $\underline{A}$. On suppose aussi $\underline{B \text{ faux}}$.
On cherche à faire apparaître une contradiction ($\lightning$)

Quatrième partie

Prédicat

Définition: Un <u>prédicat</u> $\mathscr{P}(x)$ est un énoncé dont la valeur de vérité dépend de l'objet x, élément d'un ensemble E.
Le <u>domaine de validité</u> de $\mathscr{P}$ est l'ensemble des valeurs x de E pour lequelles $\mathscr{P}(x)$ est vraie :

$$\{x \in E \mid \mathscr{P}(x)\}$$

Remarque (Notation):
On écrit

$$\forall x \in E, \mathscr{P}(x)$$

pour dire que $\mathscr{P}(x)$ est vraie pour tous les x de E.

On écrit

$$\exists x \in E, \mathscr{P}(x)$$

pour dire qu'il existe (au moints) un élément $x \in E$ pour lequels $\mathscr{P}(x)$ est vraie.

On écrit

$$\exists! x \in E, \mathscr{P}(x)$$

pour dire qu'il existe un <u>unique</u> élément $x \in E$ tel que $\mathscr{P}(x)$ est vraie.

$\boxed{\forall x \in E, \mathscr{P}(x)}$ <u>Comment démontrer $\forall x \in E, \mathscr{P}(x)$?</u>
Soit $x \in E$ (fixé quelconque). Montrons $\mathscr{P}(x)$.

<u>Comment utiliser $\forall x \in E, \mathscr{P}(x)$?</u>
On choisit (spécialise) une ou plusieurs (voir toutes) valeurs de x et on exploite $\mathscr{P}(x)$.

Exemple:
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a + b \times 2^n + c \times 3^n$$

Montrons que $a = b = c = 0$.
On sait que $(S) : \begin{cases} a+b+c=0 & (n=0) \\ a+2b+3c=0 & (n=1) \\ a+4b+9c=0 & (n=2) \end{cases}$

$$(S) \iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ b+2c=0 \\ 3b+8c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ b+2c=0 \\ 2c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} c=0 \\ b=0 \\ a=0 \end{cases}$$