

CHAPITRE 14

Continuité

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 26 février 2022

Table des matières

I		2
II	Continuité uniforme	14
III	Fonctions à valeurs dans \mathbb{C}	20
IV	Annexe	22

Première partie

Exemple

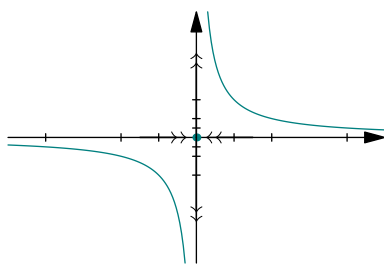
$$\text{Soit } f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'existe pas.

$$\ell = \bigcap_{V \in \mathcal{V}_\ell} V$$

Si ℓ existe, alors $\ell = f(0)$.

Or, $0 \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$



Preuve

de la proposition 1.10

$\ell = \lim_{x \rightarrow a}$ et $a \in \mathcal{D}$

On sait que

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell, \exists W \in \mathcal{V}_a, \forall x \in W \cap \mathcal{D}, f(x) \in V$$

Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Alors, $f(a) \in V$.

$$f(a) \in \bigcap_{V \in \mathcal{V}_\ell} V = \begin{cases} \{\ell\} & \text{si } \ell \in \mathbb{R} \\ \emptyset & \text{si } \ell = \pm\infty \end{cases}$$

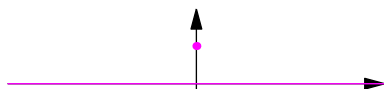
Donc $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell = f(a)$

□

Remarque

De même si $a \in \mathcal{D}$ et si $\lim_{x \xrightarrow{\leq} a} f(x)$ existe (resp. $\lim_{x \xrightarrow{\geq} a} f(x)$) alors $f(a) = \lim_{x \xrightarrow{\leq} a} f(x)$ (resp $f(a) = \lim_{x \xrightarrow{\geq} a} f(x)$)

Exemple



$\lim_{x \rightarrow 0} \sigma(x)$ n'existe pas
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sigma(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sigma(x)$ n'existent pas non plus.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sigma(x) \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sigma(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \sigma(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Definition

Soit f définie sur \mathcal{D} et $a \in \mathcal{D}$. On dit que f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe ou si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Exemple

$$\text{Soit } f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0)$$

Donc f est continue en 0.

Proposition

f est continue en a si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Preuve

unicité de la limite

On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow u} a$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow u} b$ avec $a \neq b$.

Soient V et W comme dans le lemme (suivant),

$$\begin{cases} \exists W_1 \in \mathcal{V}_u, \forall x \in W_1 \cap \mathcal{D}, f(x) \in V \\ \exists W_2 \in \mathcal{V}_u, \forall x \in W_2 \cap \mathcal{D}, f(x) \in W \end{cases}$$

Donc

$$\forall x \in \underbrace{W_1 \cap W_2 \cap \mathcal{D}}_{\neq \emptyset \text{ car } W_1 \cap W_2 \in \mathcal{V}_u} \quad f(x) \in V \cap W = \emptyset$$

□

Lemme

Soient $a \neq b$ deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$
 Alors $\exists V \in \mathcal{V}_a, \exists W \in \mathcal{V}_b, V \cap W = \emptyset$

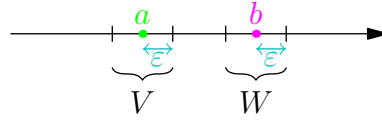
Preuve

CAS 1 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $a < b$.

On pose $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$,

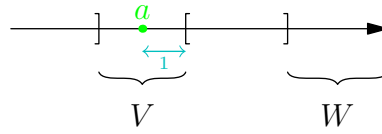
$$\begin{cases} V =]a - \varepsilon; a + \varepsilon[\\ W =]b - \varepsilon; b + \varepsilon[\end{cases}$$

On vérifie que $V \cap W = \emptyset$



CAS 2 $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$

$$\begin{cases} V =]a - 1; a + 1[\\ W =]a + 2; +\infty[\end{cases}$$



CAS 3 $a = -\infty, b = +\infty$

$$\begin{cases} V =]-\infty; 0[\\ W =]0; +\infty[\end{cases}$$

□

Théorème

Soit f définie sur \mathcal{D} et $a \in \overline{\mathcal{D}}, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \iff \forall (x_n) \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}} \left(x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \implies f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \right)$$

Preuve

“ \implies ” On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Soit $(x_n) \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$

Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Soit $W \in \mathcal{V}_a$ tel que

$$\forall x \in W \cap \mathcal{D}, f(x) \in V$$

$x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, x_n \in W \cap \mathcal{D}$$

Donc

$$\forall n \geq N, f(x_n) \in V$$

D'où, $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$

“ \Leftarrow ” On suppose que $f(x) \not\xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell$

$$\exists V \in \mathcal{V}_\ell, \forall W \in \mathcal{V}_a, \exists x \in W \cap \mathcal{D}, f(x) \notin V$$

Soit V comme ci dessus. Soit $W_1 \in \mathcal{V}_a$.

CAS 1 $a \in \mathcal{D}$ et $\forall x \in W \cap \mathcal{D} \setminus \{a\}, f(x) \in V$.

On le prouve par la contraposée. On suppose $f(x) \not\xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell \in \mathbb{R}$

Donc,

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in]a - \eta, a + \eta[, |f(x) - \ell| > \varepsilon$$

On considère un tel ε donc

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, \exists x_n \in \left] a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right[, |f(x_n) - \ell| > \varepsilon$$

Par encadrement, $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ et $f(x_n) \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$

CAS 2 Soit $x_1 \in W_1 \cap \mathcal{D}$ tel que $f(x_1) \notin V$

$$\begin{cases} x_1 \in \mathcal{D} \\ a \notin \mathcal{D} \end{cases} \quad \text{donc } x_1 \neq a$$

CAS 3 $\exists x \in W_1 \cap \mathcal{D} \setminus \{a\}, f(x) \notin V$

Soit x_1 un tel élément :

$$x_1 \in W_1 \cap \mathcal{D}$$

$$x_1 \neq a$$

$$f(x_1) \notin V$$

Dans les cas 2 et 3, on pose $W_2 \in \mathcal{V}_a$ tel que

$$W_2 \subset W_1 \setminus \{x_1\}$$

En itérant ce procédé, on construit une suite (x_n) qui tend vers a et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \notin V$$

et donc $f(x_n) \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$

□

Proposition

Si $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell$ et $g(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell_2$

alors

1. $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_1 + \ell_2$
2. $f(x) \times g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_1 \times \ell_2$
3. Si $\ell_2 \neq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{\ell_1}{\ell_2}$

Preuve

1. Soit (x_n) une suite qui tends vers a alors $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_1$ et $g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_2$
Donc, $f(x_n) + g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_1 + \ell_2$
Donc $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_1 + \ell_2$

□

Proposition

Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_1$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \ell_1} \ell_2$ alors $g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_2$

Preuve

Soit (x_n) une suite qui tend vers a . Alors, $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_1$ donc $g(f(x_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_2$ donc $g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_2$ □

Corollaire

Une somme, un produit, une composée de fonctions continues sont continues.

□

Remarque

Pour démontrer que $f(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers a . On cherche deux suites (x_n) et (y_n) de limite a avec

$$\begin{cases} f(x_n) \rightarrow \ell_1 \\ f(y_n) \rightarrow \ell_2 \\ \ell_1 \neq \ell_2 \end{cases}$$

Exemple

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \sin(2\pi n) = 0 &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} 2\pi n &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \end{aligned}$$

Donc, \sin n'a pas de limite en $+\infty$

Théorème

Limite monotone

Soit f une fonction croissante sur $]a, b[$ avec $a \neq b \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si f est majorée,

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in]a, b[, f(x) \leq M$$

$$\text{alors } \lim_{x \xrightarrow{<} b} f(x) = \sup_{x \in]a, b[} f(x) \in \mathbb{R}$$

2. Si f n'est pas majorée,

$$\lim_{x \xrightarrow{<} b} f(x) = +\infty$$

3. Si f est minorée,

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in]a, b[, f(x) \geq m$$

$$\text{alors } \lim_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = \inf_{x \in]a, b[} f(x) \in \mathbb{R}$$

4. Si f n'est pas minorée, $\lim_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = -\infty$

Preuve

1. $\sup_{x \in]a, b[} f$ existe

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in]a, b[, f(x) > \sup_{x \in]a, b[} f - \varepsilon$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in]a, b[, \forall y \in [x, b[, \sup_{x \in]a, b[} f - \varepsilon < f(y) \leq \sup_{x \in]a, b[} f < \sup_{x \in]a, b[} f + \varepsilon$$

$$\text{donc } f(x) \xrightarrow[x \xrightarrow{<} b]{\sup_{x \in]a, b[} f} \sup_{x \in]a, b[} f$$

2. f n'est pas majorée

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in]a, b[, f(x) > M$$

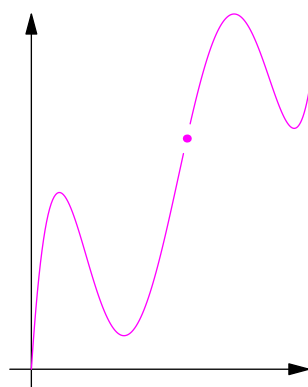
donc

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in]a, b[, \forall y \in [x, b[, f(y) \in [M, +\infty[$$

□

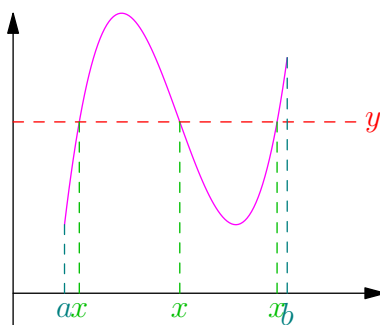
Remarque

Avec les hypothèses ci-dessus, pour tout $x \in]a, b[$,
 f est croissante sur $]a, x[$, et majorée par $f(x)$ donc $\lim_{t \nearrow x} f(t) \in \mathbb{R}$
 f est croissante sur $]x, b[$ et minorée par $f(x)$ donc $\lim_{t \searrow x} f(t) \in \mathbb{R}$
 $\lim_{t \nearrow x} f(t) \leq f(x) \leq \lim_{t \searrow x} f(t)$

**Théorème****Théorème des valeurs intermédiaires**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , $a < b$ deux éléments de I .

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \cup [f(b), f(a)], \exists x \in [a, b], y = f(x)$$

**Lemme**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , $a < b$ deux éléments de I tels que $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Alors,

$$\exists x \in [a, b], f(x) = 0$$

*Preuve**du lemme*On pose $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq 0\}$ $A \neq \emptyset$ car $a \in A$ et A est majorée par b .On pose $u = \sup(A)$. Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers u . $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a \leq x_n \leq b \\ f(x_n) \leq 0 \end{cases}$ On sait que $x_n \rightarrow u$ et $f(x_n) \rightarrow f(u)$ par continuité de f .Donc, $\begin{cases} a \leq u \leq b \\ f(u) \leq 0 \end{cases}$ (donc $u = \max(A)$)

De plus,

$$\forall x \in]u, b], f(x) > 0$$

donc

$$\begin{cases} \lim_{x \xrightarrow{>} u} f(x) = f(u) \\ \lim_{x \xrightarrow{>} u} f(x) \geq 0 \end{cases}$$

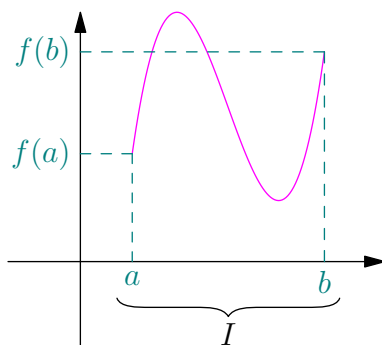
Donc, $f(u) \geq 0$ donc $f(u) = 0$

□

*Preuve**du théorème*On pose $g : x \mapsto f(x) - y$. g est continue sur I .Si $f(a) < f(b)$ alors $\begin{cases} g(a) \leq 0 \\ g(b) \geq 0 \end{cases}$ D'après le lemme, il existe $x \in [a, b]$ tel que $g(x) = 0$ et donc $f(x) = y$ Si $f(a) < f(b)$ alors $\begin{cases} h(a) \leq 0 \\ h(b) \geq 0 \end{cases}$ où $h : x \mapsto -g(x) = y - f(x)$ est continueD'après le lemme, il existe $x \in [a, b]$ tel que $h(x) = 0$ et donc $f(x) = y$

□

CorollaireSoit f continue sur un intervalle I . Alors, $f(I)$ est un intervalle.



Preuve

Montrons que $f(I)$ est convexe

Soit $\alpha \in f(I), \beta \in f(I)$ avec $\alpha < \beta$. Montrons que

$$\forall \gamma \in [\alpha, \beta], f(\gamma) \in f(I)$$

$$\text{Or, } \begin{cases} \alpha \in f(I) & \exists a \in I, \alpha = f(a) \\ \beta \in f(I) & \exists b \in I, \beta = f(b) \end{cases}$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [a, b]$ tel que $\gamma = f(x)$ donc, $f(\gamma) \in f(I)$ \square

Corollaire

On peut généraliser le théorème des valeurs intermédiaires au cas où $\begin{cases} a \in \overline{\mathbb{R}} \\ b \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases}$
 en remplaçant $f(a)$ par $\lim_{x \xrightarrow{>} a} f(x)$ et $f(b)$ par $\lim_{x \xrightarrow{<} b} f(x)$

\square

Théorème

Théorème de la bijection

Soit f continue, strictement monotone sur un intervalle I . Alors, $J = f(I)$ est un intervalle de même nature (ouvert, semi-ouvert ou fermé) et f établit une bijection de I sur J .

Preuve

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, J est un intervalle. f est strictement monotone donc f injective. Donc f établit une bijection de I sur J .

CAS 1 $I = [a, b]$ et f croissante

$$\forall x \in I, a \leq x \leq b$$

$$\text{donc } \forall x \in I, f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

$$\text{donc } J \subset [f(a), f(b)]$$

$$\text{Or, } [f(a), f(b)] \subset J \text{ d'après le théorème des valeurs intermédiaires}$$

$$\text{Donc } J = [f(a), f(b)]$$

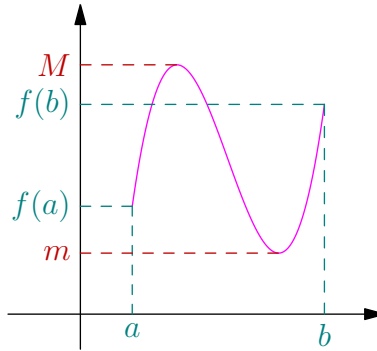
Les autres cas se démontrent de la même façon. \square

Théorème

Soit f continue sur un segment $[a, b]$. Alors, f est bornée et atteint ses bornes, i.e.

$$\exists(m, M) \in \mathbb{R}^2, f([a, b]) = [m, M]$$

\triangle On peut avoir $m \neq f(a)$ et $M \neq f(b)$



Preuve

On suppose que f n'est pas majorée :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in [a, b], f(x) \geq M$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b], f(x_n) \geq n$$

Donc, $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par a et majorée par b donc bornée.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On pose $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)}$. On a bien

$\ell \in [a, b]$ et $f(\ell) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)})$ par continuité de f .

Or, $(f(x_{\varphi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(f(x_n))$ donc $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$: une contradiction

Donc f est majorée et on pose

$$M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$$

On prouve de même que f est minorée. On pose donc

$$m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$$

Soit $(y_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ telle que $f(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$.

(y_n) est bornée donc il existe une sous-suite $(y_{\psi(n)})$ de (y_n) convergente. On

pose $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{\psi(n)} \in [a, b]$

Comme f continue sur y ,

$$f(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_{\psi(n)})$$

Or, $(f(y_{\psi(n)}))$ est une sous-suite de $(f(y_n))$ donc

$$M = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_{\psi(n)})$$

Par unicité de la limite, $M = f(y)$

Donc, $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$. De même, $m \in f([a, b])$

Enfin, en posant $\begin{cases} M = f(y) & \text{avec } y \in [a, b] \\ m = f(z) & \text{avec } z \in [a, b] \end{cases}$, on obtient

$$[m, M] = [f(z), f(y)] \underbrace{\subset}_{\text{théorème des valeurs intermédiaires}} f([a, b]) \underbrace{\subset}_{\substack{m \text{ minimum} \\ M \text{ maximum}}} [m, M]$$

donc $f([a, b]) = [m, M]$

□

Deuxième partie

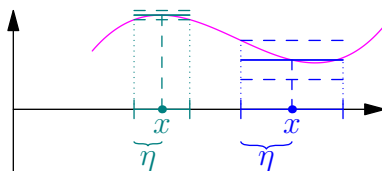
Continuité uniforme

Remarque

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue,

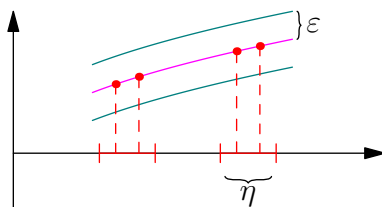
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in]x - \eta, x + \eta[, |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Ici, η dépend de ε et de x



Dans certaines situations, il serait préférable d'avoir

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

**Lemme**

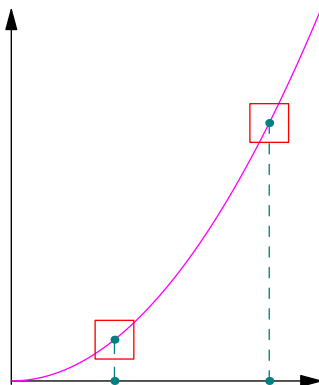
Soit f uniformément continue sur un intervalle I . Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'éléments dans I telles que $x_n - y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$

□

Exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$



On pose $\forall n \in \mathbb{N}_*, \begin{cases} x_n = n \\ y_n = n + \frac{1}{n} \end{cases}$. On a bien $\forall n \in \mathbb{N}_*, x_n - y_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, x_n^2 - y_n^2 = n^2 - \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 = n^2 - n^2 - 2 - \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -2 \neq 0$$

Donc, f n'est pas uniformément continue.

Théorème

Théorème de Heine

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors, f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Preuve

On suppose f continue sur $[a, b]$ mais pas uniformément continue.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x, y) \in [a, b]^2 \text{ avec } |x - y| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$ comme ci-dessus. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (x_n, y_n) \in [a, b]^2 \text{ avec } \left| x_n - y_n \leq \frac{1}{n+1} \right| \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$$

(x_n) est bornée donc il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) convergente. On note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} \in [a, b]$. $(y_{\varphi(n)})$ est bornée, $(y_{\varphi(n)})$ a une sous-suite $(y_{\varphi(\psi(n))})$ convergente. On pose $\ell' = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{\varphi(\psi(n))}$. $(x_{\varphi(\psi(n))})_{n \in \mathbb{N}}$ est une autre sous-suite de $(x_{\varphi(n)})$ donc $x_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_{\varphi(\psi(n))} - y_{\varphi(\psi(n))}| \leq \frac{1}{\varphi(\psi(n)) + 1}$$

On a vu que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(\psi(n)) \geq n$$

car $\varphi \circ \psi$ est strictement croissante à valeurs dans \mathbb{N} .

$$\text{Donc, } x_{\varphi(\psi(n))} - y_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit que $\ell - \ell' = 0$. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(x_{\varphi(\psi(n))}) - f(y_{\varphi(\psi(n))})| > \varepsilon$$

En passant à la limite,

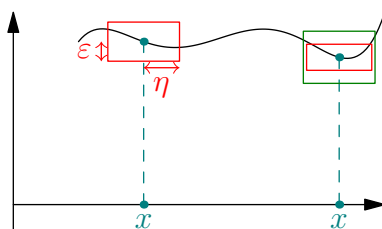
$$0 = |f(\ell) - f(\ell)| > \varepsilon > 0$$

car f continue en ℓ

On a obtenu une contradiction. \nexists

□

Remarque



$$\begin{cases} \eta > 0 \\ \varepsilon > 0 \\ |x - y| \leq \eta \\ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Definition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle et $k \in \mathbb{R}$. On dit que f est k -lipschitzienne si

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k |x - y|$$

On dit que f est lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que f soit k -lipschitzienne.

Proposition

Soit f une fonction lipschitzienne sur I . Alors, f est uniformément continue sur I donc continue sur I .

Preuve

Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k |x - y|$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Si $k = 0$ alors f est constante donc uniformément continue.

On suppose $k \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\eta = \frac{\varepsilon}{k} > 0$ car $k > 0$.

ne dépend pas de x

Soit $(x, y) \in I^2$. On suppose $|x - y| \leq \eta$. Alors,

$$|f(x) - f(y)| \leq k |x - y| \leq k\eta = \varepsilon$$

□

Exemple

$x \mapsto |x|$ est 1-lipschitzienne sur \mathbb{R} .

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

(inégalité triangulaire)

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in I, |f'(x)| \leq M$$

Alors

$$\forall (a, b) \in I^2, |f(a) - f(b)| \leq M |a - b|$$

donc f est M -lipschitzienne.

Corollaire

Soit f de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$. Alors f est lipschitzienne.

Preuve

f' est continue sur un segment donc bornée.

□

Exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\forall x > 0, |f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$$

Par contre,

$$\forall x \geq 1, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

Donc f est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur $[1, +\infty[$ donc uniformément continue sur $[1, +\infty[$.
 f est continue sur $[0, 1]$ donc uniformément continue sur $[0, 1]$ (théorème de Heine).

Soit $\varepsilon > 0$. Soient $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}_*^+$ tels que

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in [0, 1]^2, |x - y| \leq \eta_1 \implies |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall (x, y) \in [1, +\infty[^2, |x - y| \leq \eta_2 \implies |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

On pose $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$. On suppose $|x - y| \leq \eta$

$$\text{CAS 1 } \begin{cases} x \leq 1 \\ y \leq 1 \end{cases}$$

Alors, $|x - y| \leq \eta \leq \eta_1$ donc $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon$

$$\text{CAS 2 } \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Alors, } |x - y| \leq \eta \leq \eta_2 \text{ donc } \left| \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \right|$$

$$\text{CAS 3 } x \leq 1 \leq y$$

$$\begin{aligned} |\sqrt{x} - \sqrt{y}| &= |\sqrt{x} - \sqrt{1} + \sqrt{1} - \sqrt{y}| \\ &\leq |\sqrt{x} - \sqrt{1}| + |\sqrt{y} - \sqrt{1}| \end{aligned}$$

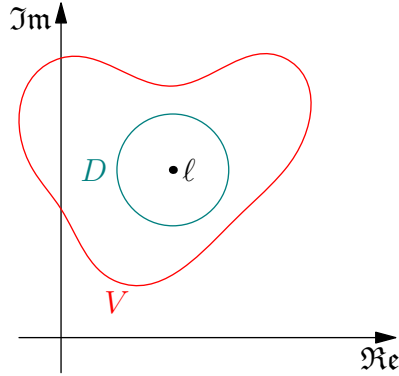
$$|x - 1| \leq |x - y| \leq \eta \leq \eta_1 \text{ donc } |\sqrt{x} - \sqrt{1}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|y - 1| \leq |x - y| \leq \eta \leq \eta_2 \text{ donc } |\sqrt{y} - \sqrt{1}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Donc } |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Troisième partie

Fonctions à valeurs dans \mathbb{C}

Definition

V est un voisinage de ℓ s'il existe $r > 0$ tel que $V \supset D(\ell, r)$
 où $D(\ell, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \ell| < r\}$

Proposition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ et $a \in I$, $\ell \in \mathbb{C}$.

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \iff \begin{cases} \Re(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \Re(\ell) \\ \Im(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \Im(\ell) \end{cases}$$

□

Remarque

Rappel

On dit que : $I \rightarrow \mathbb{C}$ est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, |f(x)| \leq M$$

Quatrième partie

Annexe

Théorème*Théorème 2.11*

$f : I \rightarrow J$ bijective monotone avec I et J deux intervalles.
Alors, f^{-1} est continue (et f aussi)

Preuve

f monotone donc $f(I) = J$
donc f continue (d'après 2.10).
 f^{-1} monotone, $f^{-1}(J) = I$
donc f^{-1} est continue

□

Definition

Un homéomorphisme est une application bijective, continue dont la réciproque est continue.