TD 15 Espaces vectoriels

Exercice 1: ★★★

Soit $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On fixe a, b, c, d, k, p cinq réels. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}$?

$E_1 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(a) = 0\}$ $\quad$ $E_2 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(a) = 1\}$

$E_3 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(a) \in \mathbb{R}^+\}$ $\quad$ $E_4 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(a) \in \mathbb{Q}\}$

$E_5 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(a) = f(b) = 0\}$ $\quad$ $E_6 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(a) = 0 \text{ et } f(b) = 1\}$

$E_7 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(a) + f(b) = 0\}$ $\quad$ $E_8 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(a) = kf(b)\}$

$E_9 = \{f \in \mathcal{F} \mid f(a) + f(b) = 1\}$ $\quad$ $E_{10} = \{f \in \mathcal{F} \mid f(a) + f(b) + f(c) = 0\}$

$E_{11} = \{f \in \mathcal{F} \mid f(a) + f(b) = kf(c)\}$ $\quad$ $E_{12} = \{f : x \mapsto a|x| + bx\}$

$E_{13} = \{f \in \mathcal{F} \mid f \text{ est périodique de période } p\}$

Exercice 2: ★★★

Les ensembles F_i suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel E des suites réelles muni de l'addition et de la multiplication par un réel ?

(1) F_1 est l'ensemble des suites (u_n) qui vérifient : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$.

(2) F_2 est l'ensemble des suites (u_n) qui vérifient : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et $u_0 = 1$.

Exercice 3: ★★★

On se place dans E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2. On note $F = \{P \in E \mid 2P'(1) + P(0) = 0\}$.

(1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de E.

(2) Soit $P : x \mapsto a + bx + cx^2$, avec a, b, c des réels.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que $P \in F$.

Exercice 4: ★★★

Dans $\mathbb{R}^3$, les familles de vecteurs suivantes forment-elle des familles génératrices, libres, des bases ?

(1) $u_1 = (1; 1; 1)$, $u_2 = (0; 1; -1)$, $u_3 = (2; 1; 1)$ et $u_4 = (0; 1; 1)$

(2) $u_1 = (0; -1; 1)$, $u_2 = (2; 3; 1)$, $u_3 = (5; 0; 1)$

Exercice 5: ★★★

Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 3. Les familles de polynômes suivantes forment-elles des familles libres, génératrices, des bases de E ?

(1) (P_1, P_2, P_3, P_4) définies par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_1(x) = x^3,\ P_2(x) = x^2 + x,\ P_3(x) = -x^2 + 1,\ P_4(x) = x^2$$

(2) $(x \mapsto 3x^3 + x^2 - 4x + 6, x \mapsto x^3 + x^2 + 4x + 4, x \mapsto x^3 - 4x + 1)$

Exercice 6: ★★★

On se place dans $E = M_2(\mathbb{R})$. Les familles suivantes forment-elles une partie libre ? génératrice de E ?

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 7: ★★★

Let $u, v, w \in \mathbb{R}^N$ defined by

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n, v_n = 3^n, w_n = 4^n.$$

Show that u, v and w are linearly independant.

Exercice 8: ★★★

Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2, et F l'ensemble des fonctions polynômiales P de E telles que :

$$P(1) = 0 \text{ et } \int_0^1 P(t)\,dt = 0.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.

Exercice 9: ★★★

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-ensembles H_i définis ci-après.

Montrer que chaque H_i est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, et en donner une base.

(1) $H_1 = \{(x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0\}$

(2) $H_2 = \{(x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y - z + t = 0\}$

Exercice 10: ★★★★

Let $E = \mathbb{R}^R$, F the subspace of E generated by the maps $x \mapsto \cos(nx)$ $(n \in \mathbb{N})$ and $\hat{G}^t hesubspacegeneratedby$x$\mapsto$ $\cos^n x$ $(n \in \mathbb{N})$. Show that $F = G$.

Exercice 11: ★★★★

Partie 1

Notons E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞. Soient $f_1 : t \mapsto e^t$, $f_2 : t \mapsto e^{-t/2} \sin\left(\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\right)$ et $f_3 : t \mapsto e^{-t/2} \cos\left(\dfrac{t\sqrt{3}}{2}\right)$. Nous noterons $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$ et G le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathscr{B}$.

Nous allons montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre de vecteurs de E. Soient a, b, c des réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3$ soit la fonction nulle.

(1) L'étudiante Antoinette observe que $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = 0$ pour tout réel t. Elle choisit (adroitement) trois valeurs de t, obtient un système de trois équations aux trois inconnues a, b et c, qu'elle résout ; il ne lui reste plus qu'à conclure. Faites comme elle !

(2) L'étudiante Lucie propose d'exploiter le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ au voisinage de 0. Faites comme elle !

(3) L'étudiante Nicole décide de s'intéresser au comportement de $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Faites comme elle !

La famille $\mathscr{B}$ est donc une base de G.

(4) Montrez que pour tout $f \in G$, $f' \in G$.

(5) Explicitez les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ des vecteurs f'_1, f'_2 et f'_3.

Partie 2

Nous nous intéressons dans cette partie à l'équation différentielle $y''' = y$, que nous noterons $(\mathscr{E})$. Une solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathscr{E})$ est une fonction f définie et trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f'''(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(1) Montrez que toute solution f de $(\mathscr{E})$ est C^∞.

(2) Montrez que la fonction nulle est la seule solution polynomiale de $(\mathscr{E})$.

On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$.

(3) Montrez que $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de E et que $G \subset \mathscr{S}$.

Nous allons étabir l'inclusion inverse ; ainsi G sera exactement l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$. Soit f une solution de $(\mathscr{E})$; nous noterons $g = f + f' + f''$.

(4) Montrez que g est solution de l'équation différentielle $y' = y$.

(5) Décrivez rapidement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - y = 0$.

(6) Résolvez l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$; vous donnerez une base de l'ensemble des solutions.

(7) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Décrivez l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \lambda e^t$.

(8) Et maintenant, concluez !