Chapitre 17

TD

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 10 mars 2022

Table des matières

Exercice 4

$E = \mathbb{R}^4$
$a = (0, 1, -1, 2)$
$b = (1, 3, 0, 2)$
$c = (2, 1, -3, 4)$
$d = (0, 0, 2, 1)$
$e = (-1, 1, 0, 3)$

$F = \mathrm{Vect}(a, b, c)$ et $G = \mathrm{Vect}(d, e)$

Soient $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\lambda a + \mu b + \nu c = 0 &\iff \begin{cases} \mu + 2\nu = 0 \\ \lambda + 3\mu + \nu = 0 \\ -\lambda - 3\nu = 0 \\ 2\lambda + 2\mu + 4\nu = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \mu = -2\nu \\ \lambda = -3\nu \\ -8\nu = 0 \\ -6\nu = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \nu = 0 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc (a, b, c) est libre et donc (a, b, c) est une base de F. Donc, $\boxed{\dim(F) = 3}$

d, e ne sont pas colinéaires donc (d, e) est une base de G. Donc, $\boxed{\dim(G) = 2}$

$F + G = \mathrm{Vect}(a, b, c, d, e)$
<u>Méthode 1</u> Soient $\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\lambda a+\mu b+\nu c+\alpha d+\beta e=0 \iff \begin{cases} \boxed{\mu}+2\nu-\beta=0 \\ \lambda+3\mu+\nu+\beta=0 \\ -\lambda-3\nu+2\alpha=0 \\ 2\lambda+2\mu+4\nu+\alpha+3\beta=0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4-2L_1}}{\iff} \begin{cases} \boxed{\mu}+2\nu-\beta=0 \\ \lambda-5\nu+4\beta=0 \\ -\lambda-3\nu+2\alpha=0 \\ 2\lambda+\boxed{\alpha}+5\beta=0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3-2L_4}{\iff} \begin{cases} \boxed{\mu}+2\nu-\beta=0 \\ \boxed{\lambda}-5\nu+4\beta=0 \\ -5\lambda-3\nu-10\beta=0 \\ 2\lambda+\boxed{\alpha}+5\beta=0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3+5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4-2L_2}}{\iff} \begin{cases} \boxed{\mu}+2\nu-\beta=0 \\ \boxed{\lambda}-5\nu+4\beta=0 \\ -28\nu+\boxed{10\beta}=0 \\ \boxed{\alpha}+10\nu-3\beta=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \beta=\dfrac{28}{10}\nu \\ \mu=\cdots \\ \lambda=\cdots \\ \alpha=\cdots \end{cases}$$

Avec $\nu=1$, on a $\lambda a+\mu b+c+\alpha d+\beta e=0$ et donc $c=-\lambda a-\mu b-\alpha d-\beta e$ donc $c \in \mathrm{Vect}(a,b,d,e)$
Avec $\nu=0$, on a $\lambda a+\mu b+\alpha d+\beta e=0 \iff \beta=\mu=\lambda=\alpha=0$ et docnc (a,b,d,e) est libre.
Donc, (a,b,d,e) est une base de $F+G$ et donc $\boxed{\dim(F+G)=4}$ (donc $F+G=\mathbb{R}^4$
D'après la formule de Grassmann,

$$\boxed{\dim(F\cap G)=3+2-4=1}$$

<u>MÉTHODE 2</u> $\dim(F+G)=\mathrm{rg}(a,b,c,d,e)$

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ \boxed{1} & 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rg}(a,b,c,d,e)=\mathrm{rg}(M)$$

$$M \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_5 \leftarrow C_5 - C_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & \boxed{1} \\ 2 & -4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - 3C_5 \\ C_3 \leftarrow C_3 + 2C_5 \\ C_4 \leftarrow C_4 + 2C_5}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & -2 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 2 & -7 & 4 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 + 7C_4 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 4C_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -10 & \boxed{8} & -2 & -1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 2 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{rg}(M) = 4$

$$\boxed{\begin{matrix} \dim(F+G) = 4 \\ \dim(F \cap G) = 1 \end{matrix}}$$

<u>Méthode 3</u> $F + G \subset R^4$ donc $\dim(F+G) \leqslant 4$

$F \subset F + G$ donc $\dim(F+G) \geqslant 3$

Donc $\dim(F+G) \in \{3, 4\}$

On suppose $\dim(F+G) = 3$. Alors $F = F + G$. Or, $G \subset F + G = F$

On va caractériser F par un système d'équations.

Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$$u \in F \iff \exists(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3, u = \lambda a + \mu b + \nu c$$

$$\iff \exists(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 \begin{cases} x = \mu + 2\nu \\ y = \boxed{\lambda} + 3\mu + \nu \\ z = -\lambda - 3\nu \\ t = 2\lambda + 2\mu + 4\nu \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2}}{\iff} \exists(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \boxed{\mu} + 2\nu = x \\ \boxed{\lambda} + 3\mu + \nu = y \\ 3\mu - 2\nu = y + z \\ -4\mu + 2\nu = t - 2y \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow \frac{L_4 + 4L_2}{10}}}{\iff} \exists(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \boxed{\mu} + 2\nu = x \\ \boxed{\lambda} - 5\nu = y - 3x \\ -8\nu = y + z - 3x \\ \boxed{\nu} = \dfrac{t - 2y + 4x}{10} \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 8L_4}{\iff} \exists(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \mu = \cdots \\ \lambda = \cdots \\ 0 = \dfrac{1}{5}x - \dfrac{3}{5}y + z + \dfrac{16}{5}t \\ \nu = \cdots \end{cases}$$

$$\iff x + 3y + 5z + 16t = 0$$

$$(x,y,z,t) \in F \iff x - 3y + 5z + 16t = 0$$

Or, $0 - 3\times 0 + 5 \times 2 + 16 = 26 \neq 0$ donc $d \notin F$ ↯
Donc $\dim(F+G) = 4$ et domc $\dim(F\cap G) = 1$

<u>MÉTHODE 4</u> On caractérise F et G par des équations. On reprend les calculs de la méthode 3.

$$(x,y,z,t) \in F \iff x - 3y + 5z + 16t = 0$$

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in G &\iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, (x,y,z,t) = \alpha d + \beta e \\
&\iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} -\beta = x \\ \beta = y \\ 2\alpha = z \\ \alpha + 3\beta = t \end{cases} \\
&\iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}z \\ \beta = y \\ x + y = 0 \\ \frac{1}{2}z + 3y = t \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ z + 6y - 2t = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in F\cap G &\iff \begin{cases} x - 3y + 5z + 16t = 0 \\ \boxed{x} + y = 0 \\ z + 6y - 2t = 0 \end{cases} \\
&\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} -4y + 5z + 16t = 0 \\ \boxed{x} + y = 0 \\ \boxed{z} + 6y - 2t = 0 \end{cases} \\
&\underset{L_1 \leftarrow \frac{L_1 - 5L_3}{26}}{\iff} \begin{cases} -\frac{34}{26}y + t = 0 \\ \boxed{x} + y = 0 \\ \boxed{z} + 6y - 2t = 0 \end{cases} \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}{\iff} \begin{cases} t = \frac{17}{13}y \\ x = -y \\ z = -\frac{44}{13}y \end{cases} \\
&\iff (x,y,z,t) = \left(-y, y, -\frac{44}{13}y, \frac{17}{13}\right) \\
&\iff (x,y,z,t) = \frac{y}{13}(-13, 13, -44, 17)
\end{aligned}$$

Donc, $F \cap G = \text{Vect}((-13, 13, -44, 17))$ donc $\dim(F \cap G) = 1$
Et donc, $\dim(F + G) = 4$

Exercice 7

F et G deux hyperplans

$F \cap G \subset F$ donc $\dim(F \cap G) \leqslant n - 1$

$$\begin{aligned} \dim(F \cap G) = n - 1 &\iff F \cap G = F \\ &\iff F \subset G \\ &\iff F = G \end{aligned}$$

$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G)$$

$$\begin{aligned} &F + G \subset \mathbb{R}^n \\ \text{donc } &\dim(F + G) \leqslant n \\ \text{donc } &-\dim(F + G) \geqslant -n \\ \text{donc } &\dim(F \cap G) \geqslant 2(n - 1) - n = n - 2 \end{aligned}$$

Si $F = G$, alors $\dim(F \cap G) = n - 1$
Si $F \neq G$, alors $\dim(F \cap G) = n - 2$

Exercice 9

Soit $u \in E$.

$$\forall n, u_n = u_r \text{ où } r \text{ est le reste de la division de } n \text{ par } p$$

$$\begin{aligned} (u_n) &= (u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}, u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}, u_0, u_1, \ldots) \\ &= u_0(1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \\ &+ u_1(0, 1, \ldots, 0, 0, 1, \ldots, 0, 0, 1, \ldots) \\ &\vdots \\ &+ u_{p-1}(0, 0, \ldots, 1, 0, 0, \ldots, 1, 0, 0, \ldots) \end{aligned}$$

$$\forall k \in [\![0, p-1]\!], v_k = (v_{k,n}) \text{ où } \forall n, v_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv k \ [p] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On vient de montrer que

$$E \subset \mathrm{Vect}(v_0, v_1, \dots, \vee_{p-1})$$

Or,

$$\forall k \in [\![0, p-1]\!], v_k \in E$$

car

$$\begin{aligned}
\forall k \in [\![0, p-1]\!], \forall n \in \mathbb{N}, v_{k,n+p} &= \begin{cases} 1 & \text{si } p+n \equiv k \ \ [p] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv k \ \ [p] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= v_{k,n}
\end{aligned}$$

Donc $E = \mathrm{Vect}(v_0, \dots, v_{p-1})$
Donc $\begin{cases} E \text{ sous-espace vectoriel de } \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ \dim(E) \leqslant p \end{cases}$
Soit $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
&\forall n \in \mathbb{N}, q^{n+p} = q^n q^p = q^n \\
&\iff q^p = 1 \\
&\iff \exists k \in [\![0, p-1]\!], q = e^{\frac{2ik\pi}{p}}
\end{aligned}$$

On pose

$$\forall k \in [\![0, p-1]\!], w_k = \left(e^{\frac{2ik\pi n}{p}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Montrons que $(w_0, \dots, w_{p-1})$ est libre.
Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$. On suppose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k e^{\frac{2ik\pi n}{p}} = 0$$

On pose

$$P(X) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k X^k \qquad \deg(P) \leqslant p-1$$

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, P\left(e^{\frac{2i\pi n}{p}}\right) = 0$$

donc P a au moins p racines : $1, e^{\frac{2i\pi}{p}}, e^{\frac{4i\pi}{p}}, \dots, e^{\frac{2i(p-1)\pi}{p}}$
Donc $P = 0$, donc $\forall k \in [\![0, p-1]\!], \lambda_k = 0$
Donc $(w_0, \dots, w_{p-1})$ est libre donc $\dim(E) \geqslant p$
Donc $\dim(E) = p$
Donc $(w_0, \dots, w_{p-1})$ est une base de E.

Exercice 6

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \in \mathbb{R}$. On suppose

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 + \lambda_5 f_5 = 0$$

$$\forall x > 0, f(x) = \lambda_1 \ln x + \lambda_2 x + \lambda_3 e^x + \lambda_4 e^{x+3} + \lambda_5 \frac{1}{x} = 0$$

Si $\lambda_5 \neq 0$, alors $f(x) \sim_{x\to 0^+} \dfrac{\lambda_5}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \pm\infty$ ↯

Donc $\boxed{\lambda_5 = 0}$

Si $\lambda_1 \neq 0$, alors $f(x) \sim_{x\to 0^+} \lambda_1 \ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \pm\infty$ ↯

Donc $\boxed{\lambda_1 = 0}$

Si $\lambda_3 + e^3\lambda_4 \neq 0$, alors $f(x) \sim_{x\to+\infty} \left(\lambda_3 + e^3\lambda_4\right) e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$

Donc $\boxed{\lambda_3 + e^3\lambda_4 = 0}$

D'où,

$$\forall x > 0, \lambda_2 x = 0$$

donc $\boxed{\lambda_2 = 0}$

$f_4 = e^3 f_3$ donc $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ n'est pas libre
Mais, (f_1, f_2, f_3, f_5) est libre $(\lambda_4 = 0)$

Exercice 8

" $\Longleftarrow$ " Soient F, G, U tels que

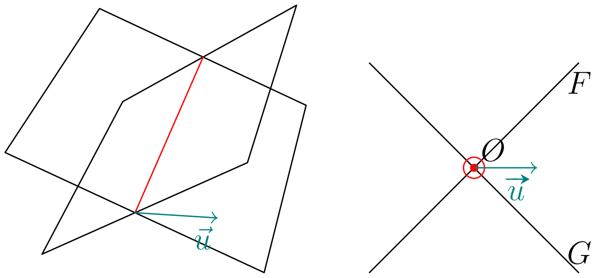
$$F \oplus U = E = G \oplus U$$

Donc,

$$\dim(F) + \dim(U) = \dim(E)$$
$$\dim(G) + \dim(U) = \dim(E)$$

Donc, $\dim(F) = \dim(G)$

" $\Longrightarrow$ "



On raisonne par récurrence sur la $\mathrm{codim}(F) = \dim(E) - \dim(F)$

— Soient F et G deux hyperplans de E
  $F \cup G \neq E$ d'après l'exercice classique suivant :

$$F \cup G \text{ sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F$$

  Solution de l'exercice :
  " $\Longleftarrow$ "

$$F \subset G \implies F \cup G = G$$
$$G \subset F \implies F \cup G = F$$

  " $\implies$ " On suppose $G \not\subset F$. Soit $u \in F$. Soit $v \in G \setminus F$.
  $u + v \in F \cup G$ car $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.
  Si $u + v \in F$, alors $v = \underbrace{u+v}_{\in F} - \underbrace{u}_{\in F} \in F$ ↯
  Si $u + v \in G$, alors $u = \underbrace{u+v}_{\in G} - \underbrace{v}_{\in G} \in G$ ↯
  Donc $F \subset G$
  Soit $u \in E \setminus (F \cup G)$. $u \neq 0$ donc $\langle u \rangle$ est de dimension 1. $\langle u \rangle \cap F = \{0\}$ donc $F \oplus \langle u \rangle = E$
  $\langle u \rangle \cap G = \{0\}$ donc $G \oplus \langle u \rangle = E$

— Soit $n \in \mathbb{N}_*$ tels que pour tous F et G sous-espaces vectoriels de E de codimension n, F et G ont un supplémentaire commun.
  Soient F et G de codimension $n+1$. De nouveau, $F \cup G \neq E$. Soit $u \in E \setminus (F \cup G)$. $\langle u \rangle \cap F = \{0\}$. On pose $F' = F \oplus \langle u \rangle$.
  $\dim(F') = \dim(F) + 1$ donc $\mathrm{codim}(F') = n$
  De même, $\langle u \rangle \cap G = \{0\}$. On pose $G' = G \oplus \langle u \rangle$ donc $\mathrm{codim}(G') = n$
  Soit U un supplémentaire commun à F' et G'. On pose $U' = \langle u \rangle \oplus U$

$$\begin{aligned} E &= F' \oplus U \\ &= F \oplus \langle u \rangle \oplus U \\ &= F \oplus U' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= G' \oplus U \\ &= G \oplus \langle u \rangle \oplus U \\ &= G \oplus U' \end{aligned}$$

Exercice 5

1. — On pose $G = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$. On sait que $F \oplus G = E$
   Soit $x \in F \cap G_a$. On considère $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k$ tel que

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (a + e_i) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \right) a + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \end{aligned}$$

   D'où,

$$\underbrace{x - \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \right) a}_{\in F} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i}_{\in G}$$

   Or, $F \cap G = \{0\}$ Donc $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = 0$
   Comme $(e_1, \ldots, e_k)$ est libre,

$$\forall i \in [\![1, k]\!], \lambda_i = 0$$

   Donc, $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (a + e_i) = 0$
   On a prouvé que $F \cap G_a = \{0\}$.
   — $(e_1, \ldots, e_k)$ est une base de G donc $\dim(G) = k$, donc $\dim(F) = \dim(E) - k$
   — Soitent $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in K^k$. On suppose que

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (a + e_i) = 0$$

   D'où,

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \right) a}_{\in F} = \underbrace{- \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i}_{\in G}$$

   Donc,

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \in F \cap G = \{0\}$$

   donc

$$\forall i \in [\![1, k]\!], \lambda_i = 0$$

   Donc $(a + e_1, \ldots, a + e_k)$ est libre, c'est donc une base de G_a, donc

$$\dim(G_a) = k$$

D'où,

$$\dim(F) + \dim(G_a) = \dim(E) - k + k = \dim(E)$$

Ainsi,

$$F \oplus G_a = E$$

2. On suppose K infini. Dans ce cas, F contient une infinité de vecteurs.
Soient $a, b \in F$ avec $a \neq b$ et $a \neq 0$. Montrons que $G_a \neq G_b$.
Soit $x \in G_a \cap G_b$ donc

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{k} \mu_i (a + e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (b + e_i) \end{aligned}$$

D'où,

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i\right) a - \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) b}_{\in F} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \mu_i) e_i}_{\in G}$$

Donc,

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i\right) a = \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) b \\ \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0 \end{cases}$$

Donc,

$$a = b \text{ ou } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0 \forall i \in [\![1, k]\!], \lambda_i = \mu_i$$

Or, $a \neq b$, donc $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$ donc $x \in G$
Si $G_a = G_b$, alors

$$G_a = G_a \cap G_b \subset G$$

donc

$$G_a = G$$

Or,

$$\sum_{i=1}^{k} (a + e_i) \in G_a \setminus G$$

En effet, si $\sum_{i=1}^{k} (a + e_i) = y \in G$, alors

$$\underbrace{ka}_{\in F} = \underbrace{g - \sum_{i=1}^{k} e_i}_{\in G}$$

donc $ka = 0$ Or $l \neq 0$ et $a \neq 0$.