

## CHAPITRE 14

# Continuité

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 7 mars 2022

# Table des matières

I		2
II	Continuité uniforme	7
III	Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$	10
IV	Annexe	12

# Première partie

■

*Remarque*

De même si  $a \in \mathcal{D}$  et si  $\lim_{x \xrightarrow{\leq} a} f(x)$  existe (resp.  $\lim_{x \xrightarrow{\geq} a} f(x)$ ) alors  $f(a) = \lim_{x \xrightarrow{\leq} a} f(x)$  (resp  $f(a) = \lim_{x \xrightarrow{\geq} a} f(x)$ )

**Definition**

Soit  $f$  définie sur  $\mathcal{D}$  et  $a \in \mathcal{D}$ . On dit que  $f$  est continue en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe ou si  $\lim_{x \xrightarrow{\neq} a} f(x) = f(a)$ .

**Proposition**

$f$  est continue en  $a$  si et seulement si

$$\lim_{x \xrightarrow{<} a} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = f(a)$$

■

**Lemme**

Soient  $a \neq b$  deux éléments de  $\overline{\mathbb{R}}$   
Alors  $\exists V \in \mathcal{V}_a, \exists W \in \mathcal{V}_b, V \cap W = \emptyset$

■

**Théorème**

Soit  $f$  définie sur  $\mathcal{D}$  et  $a \in \overline{\mathcal{D}}, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \iff \forall (x_n) \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}} \left( x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \implies f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \right)$$

■

**Proposition**

Si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$  et  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_2$   
alors

$$1. f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_1 + \ell_2$$

$$2. f(x) \times g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_1 \times \ell_2$$

$$3. \text{ Si } \ell_2 \neq 0, \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{\ell_1}{\ell_2}$$

■

**Proposition**

Si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_1$  et  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \ell_1} \ell_2$  alors  $g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_2$

■

**Corollaire**

Une somme, un produit, une composée de fonctions continues sont continues.

□

*Remarque*

Pour démontrer que  $f(x)$  n'a pas de limite quand  $x$  tend vers  $a$ . On cherche deux suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  de limite  $a$  avec

$$\begin{cases} f(x_n) \rightarrow \ell_1 \\ f(y_n) \rightarrow \ell_2 \\ \ell_1 \neq \ell_2 \end{cases}$$

**Théorème****Limite monotone**

Soit  $f$  une fonction croissante sur  $]a, b[$  avec  $a \neq b \in \overline{\mathbb{R}}$ .

1. Si  $f$  est majorée,

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in ]a, b[, f(x) \leq M$$

$$\text{alors } \lim_{x \xrightarrow{<} b} f(x) = \sup_{x \in ]a, b[} f(x) \in \mathbb{R}$$

2. Si  $f$  n'est pas majorée,

$$\lim_{x \xrightarrow{<} b} f(x) = +\infty$$

3. Si  $f$  est minorée,

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in ]a, b[, f(x) \geq m$$

$$\text{alors } \lim_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = \inf_{x \in ]a, b[} f(x) \in \mathbb{R}$$

4. Si  $f$  n'est pas minorée,  $\lim_{x \xrightarrow{>} a} f(x) = -\infty$

■

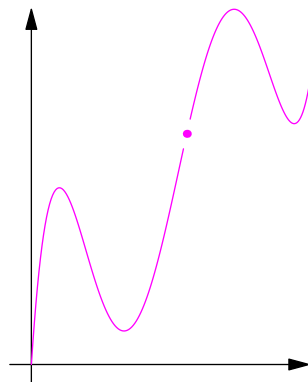
*Remarque*

Avec les hypothèses ci-dessus, pour tout  $x \in ]a, b[$ ,

$f$  est croissante sur  $]a, x[$ , et majorée par  $f(x)$  donc  $\lim_{t \xrightarrow{<} x} f(t) \in \mathbb{R}$

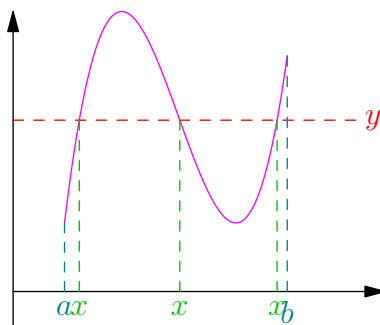
$f$  est croissante sur  $]x, b[$  et minorée par  $f(x)$  donc  $\lim_{t \xrightarrow{>} x} f(t) \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t \xrightarrow{<} x} f(t) \leq f(x) \leq \lim_{t \xrightarrow{>} x} f(t)$$

**Théorème****Théorème des valeurs intermédiaires**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ ,  $a < b$  deux éléments de  $I$ .

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \cup [f(b), f(a)], \exists x \in [a, b], y = f(x)$$

**Lemme**

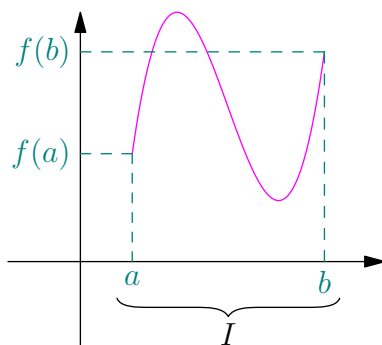
Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ ,  $a < b$  deux éléments de  $I$  tels que  $f(a) \leq 0 \leq f(b)$ . Alors,

$$\exists x \in [a, b], f(x) = 0$$

■  
■

**Corollaire**

Soit  $f$  continue sur un intervalle  $I$ . Alors,  $f(I)$  est un intervalle.



■

**Corollaire**

On peut généraliser le théorème des valeurs intermédiaires au cas où  $\begin{cases} a \in \overline{\mathbb{R}} \\ b \in \mathbb{R} \end{cases}$  en remplaçant  $f(a)$  par  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  et  $f(b)$  par  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$

□

**Théorème****Théorème de la bijection**

Soit  $f$  continue, strictement monotone sur un intervalle  $I$ . Alors,  $J = f(I)$  est un intervalle de même nature (ouvert, semi-ouvert ou fermé) et  $f$  établit une bijection de  $I$  sur  $J$ .

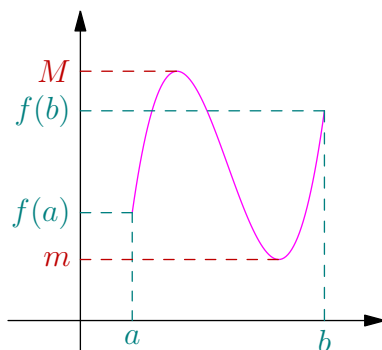
■

**Théorème**

Soit  $f$  continue sur un segment  $[a, b]$ . Alors,  $f$  est bornée et atteint ses bornes, i.e.

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, f([a, b]) = [m, M]$$

△ On peut avoir  $m \neq f(a)$  et  $M \neq f(b)$



■

Deuxième partie

Continuité uniforme

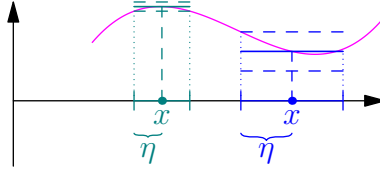


*Remarque*

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue,

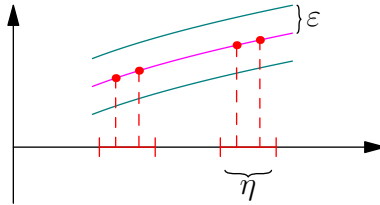
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in ]x - \eta, x + \eta[, |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Ici,  $\eta$  dépend de  $\varepsilon$  et de  $x$



Dans certaines situations, il serait préférable d'avoir

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$



**Lemme**

Soit  $f$  uniformément continue sur un intervalle  $I$ . Soient  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites d'éléments dans  $I$  telles que  $x_n - y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Alors,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$

□

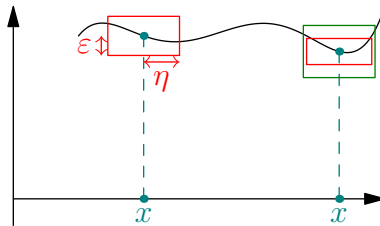
**Théorème**

**Théorème de Heine**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Alors,  $f$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ .

■

*Remarque*



$$\begin{cases} \eta > 0 \\ \varepsilon > 0 \\ |x - y| \leq \eta \\ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \end{cases}$$

**Definition**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  où  $I$  est un intervalle et  $k \in \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est  $k$ -lipschitzienne si

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k |x - y|$$

On dit que  $f$  est lipschitzienne s'il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $f$  soit  $k$ -lipschitzienne.

**Proposition**

Soit  $f$  une fonction lipschitzienne sur  $I$ . Alors,  $f$  est uniformément continue sur  $I$  donc continue sur  $I$ . ■

**Théorème**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable sur  $I$  telle qu'il existe  $M \in \mathbb{R}$  vérifiant

$$\forall x \in I, |f'(x)| \leq M$$

Alors

$$\forall (a, b) \in I^2, |f(a) - f(b)| \leq M |a - b|$$

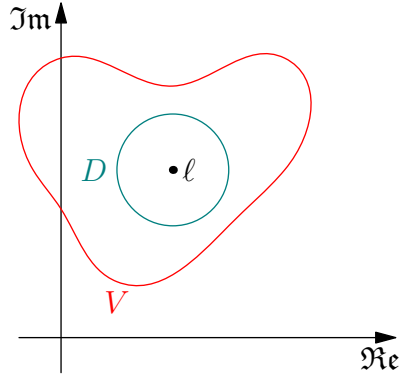
donc  $f$  est  $M$ -lipschitzienne.

**Corollaire**

Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ . Alors  $f$  est lipschitzienne. ■

Troisième partie

Fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$

**Definition**

$V$  est un voisinage de  $\ell$  s'il existe  $r > 0$  tel que  $V \supset D(\ell, r)$   
 où  $D(\ell, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \ell| < r\}$

**Proposition**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  et  $a \in I, \ell \in \mathbb{C}$ .

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \iff \begin{cases} \Re(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \Re(\ell) \\ \Im(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \Im(\ell) \end{cases}$$

□

*Remarque*

*Rappel*

On dit que :  $I \rightarrow \mathbb{C}$  est bornée s'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall x \in I, |f(x)| \leq M$$

## Quatrième partie

### Annexe

**Théorème***Théorème 2.11*

$f : I \rightarrow J$  bijective monotone avec  $I$  et  $J$  deux intervalles.  
Alors,  $f^{-1}$  est continue (et  $f$  aussi)

■

**Definition**

Un homéomorphisme est une application bijective, continue dont la réciproque est continue.

*Remarque*

Preuve du programme de colle

■