Chapitre 13

Sy calcul

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 30 janvier 2022

Table des matières

Remarque *Résumé*

— Méthode du pivot : opérations sur les lignes :
1. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ($\lambda \in \mathbb{K}$)
2. $L_i \leftarrow \mu L_i$ ($\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$)
3. $L_i \leftrightarrow L_j$

En appliquant la méthode du pivot on obtient

$$(S) \iff \begin{cases} x_{i_1} & = \ell_1(x_{j_1}, \dots, x_{j_n - r}) \\ x_{i_2} & = \ell_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_n - r}) \\ \vdots & \vdots \\ x_{i_r} & = \ell_r(x_{j_1}, \dots, x_{j_n - r}) \\ 0 & = * \end{cases}$$

Les inconnues $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$ sont les inconnues principales, les autres sont appelées paramètre.
On peut supprimer les équations $0 = 0$. S'il y a une équation $0 = \lambda$ avec $\lambda \neq 0$, il n'y a pas de solution : le système est incompatible.
Les inconnues principales dépendent des choix de pivots !

— Représentation matricielle

$$(S) \iff AX = B$$

où A est la matrice du système, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et B est le second membre
(S) a n équations et p inconnues donc A a n lignes et p colonnes.
La matrice $(A \mid B)$ est la matrice augmentée du système.

— Faire un opération L sur les lignes d'une matrice M revient à multiplier M à gauche par une matrice R où R est obtenue en appliquant L sur I_n.

— La méthode du pivot matriciel par lignes :

Definition **Rang d'une matrice**

Soit M une matrice et R la matrice échelonnée réduite par lignes associée à M. Le nombre de lignes non nulles de R (le nombre de pivots) est appelée rang de M.
Soit S un système de matrice augmentée $(A \mid B)$. Le rang de S est le rang de la matrice A.
Le rang est noté rg.

Proposition **Interprétation**

- Soit S un système de n équations, p inconnues de rang r.
  r est le nombre d'inconnues principales, il y a $p - r$ paramètres.
- Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r.
  r est le nombre de lignes indépendantes : il y a $n - r$ lignes combinaisons linéaires des r lignes indépendantes.

Corollaire

Soit S un système de n équations, p inconnues de rang n. Alors S a au moins une solution.
Si $n = p$ alors S a exactement une solution.
Si $p > n$, il y a une infinité de solutions.

□

Definition

Soit S un système à n équations, n inconnues et de rang n. On dit que S est un système de Cramer (il a une unique solution)

Proposition

Soit S un système de n équations, p inconnues de rang r.

- Si $r < n$ alors le système peut-être incompatible : il y a $n - r$ équations de la forme $0 = *$ après la méthode du pivot.
- Si $r < p$ alors il y a $p - r$ paramètres : si le système n'est pas incompatible, il y aura une infinité de solutions.

□

Proposition

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et C une opération élémentaire sur les colonnes de A. On pose A' la matrice obtenue en appliquant C sur les colonnes de A.

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A')$$

□

Proposition

Le rang d'une matrice est aussi le nombre de colonnes indépendantes. □

Definition

Une matrice triangulaire supérieure est une matrice carrée avec des coefficients nuls sous sa diagonale :

$$T = \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

diagonale

et triangulaire inférieure si les coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls :

$$T = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Un système triangulaire est de la forme

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1p}x_p & = & b_1 & +\dots \\ & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2p}x_p & = & b_2 & +\dots \\ & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & a_{pp}x_p & = & b_p & +\dots \\ & & & 0 & = & \dots & \end{array} \right.$$

Remarque

$$(S) \iff \begin{cases} AX = B \\ X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}), B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \end{cases}$$

On pose

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

On cherche $\varphi^{-1}(\{B\})$

On sait que
- $(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe
- $(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), +)$ aussi

Soient $X, Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$

$$\varphi(X+Y) = A(X+Y) = AX + AY = \varphi(X) + \varphi(Y)$$

Donc φ est un morphisme de groupes.
On peut résoudre (S) de la façon suivante :

— On cherche $X_0 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $\varphi(X_0) = B$
— On résout $\varphi(X) = 0$ ($X \in \mathrm{Ker}(\varphi)$)

C'est le système homogène associé :

$$\varphi(X) = B \iff \exists H \in \mathrm{Ker}(\varphi), X = X_0 + H$$

Proposition

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$
$$B = (b_{k,\ell})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant p \\ 1 \leqslant \ell \leqslant q}} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

$$AB = (c_{i,\ell})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant \ell \leqslant q}} \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$
$$c_{i,\ell} = \sum_{j=1}^{n} = a_{i,j} b_{j,\ell}$$