Chapitre 18

Polynôme

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 26 février 2022

Table des matières

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps

Première partie

Définition

Definition

- Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une suite presque nulle de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
- Le polynôme nul, noté 0 est la suite nulle.
- Soit $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un polynôme non nul.
  $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0_{\mathbb{K}}\}$ est non-vide et majoré. Le degré de P est $\max\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0_{\mathbb{K}}\}$, et on le note $\deg(P)$ et $a_{\deg(P)}$ est le coefficient dominant de P, il est noté $\mathrm{dom}(P)$.
- Le degré du polynôme nul est $-\infty$

Proposition Définition

Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors, $P + Q = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un polynôme appelé somme de P et Q

■

Proposition Définition

Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque nulle. Ce polynôme est appelé produit de P et Q et noté PQ.

■

Remarque *Notation*
Soit $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Le polynôme $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est noté λP

Remarque *Notation*
On pose $X = (0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \ldots) = (\delta_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$

Théorème

Soit $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{où } n = \deg(P) \text{ et } X^0 = (1, 0, \ldots)$$

■

Remarque *Notation*
On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficiants dans $\mathbb{K}$ dont l'indéterminée $(0, 1, 0, \dots)$ est notée X.

Proposition

$\big(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot\big)$ est une <u>$\mathbb{K}$-algèbre commutative</u> i.e.

1. $\big(\mathbb{K}[X], +, \times\big)$ est un anneau commutatif
2. $\big(\mathbb{K}[X], +, \cdot\big)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (P, Q) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2, \lambda \cdot (P \times Q) = (\lambda \cdot P) \times Q = P \times (\lambda \cdot Q)$

■

Remarque

$(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative (si $n > 1$)

Proposition

$i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ \lambda & \longmapsto & \lambda\, X^0 \end{array}$ est un morphisme d'algèbre injectif, i.e.

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \begin{cases} i(\lambda + \mu) = i(\lambda) + i(\mu) \\ i(\lambda \cdot \mu) = i(\lambda) \times i(\mu) \end{cases}$$

et i est injective.

Remarque *Notation*
On identifie $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $\lambda\, X^0 \in \mathbb{K}[X]$. Ainsi, on peut écrire $X^0 = 1$, on peut écrire $2 + X + 3X^2$ au lieu de $2X^0 + X + 3X^2$

Proposition

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$

— $\deg(P + Q) \leqslant \max\big(\deg(P), deg(Q)\big)$
— Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors
  — $\deg(P + Q) = \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$
  — $\operatorname{dom}(P + Q) = \begin{cases} \operatorname{dom}(P) & \text{si } \deg(P) > \deg(Q) \\ \operatorname{dom}(Q) & \text{si } \deg(P) < \deg(Q) \end{cases}$
— Si $\deg(P) = \deg(Q)$ et $\operatorname{dom}(P) + \operatorname{dom}(Q) \neq 0$,
  alors $\begin{cases} \deg(P + Q) = \deg(P) = \deg(Q) \\ \operatorname{dom}(P + Q) = \operatorname{dom}(P) + \operatorname{dom}(Q) \end{cases}$
— Si $\deg(P) = \deg(Q)$ et $\deg(P) + \deg(Q) = 0$, alors $\deg(P + Q) < \deg(P)$

■

Proposition

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$$

■

Deuxième partie

Évaluation

Definition

Soit A une $\mathbb{K}$-algèble et $P \in \mathbb{K}[X]$. On pose $P = \sum_{k=0}^{n} e_k X^k$. Soit $a \in A$.

On pose

$$\begin{aligned} P(a) &= \sum_{k=0}^{n} e_k a^k \\ &= e_0 1_A + e_1 a + e_2 a^2 + \cdots + e_n a^n \in A \end{aligned}$$

On dit qu'on a évalué P en a, ou spécialisé X avec la valeur de a, ou remplacé X par a, substitué a à X.

Definition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.
On dit que a est une racine de P si $P(a) = 0_{\mathbb{K}}$

Definition

Soit $P \in \mathbb{K}[X] \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que c'est un polynôme de matrices.

Definition

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Alors $P(Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k \quad \in \mathbb{K}[X]$
C'est la composée de P et Q.

Remarque ⚠ *Attention*
Ne pas confondre $\underbrace{P(X+1)}_{\text{composée}}$ et $\underbrace{P(X+1)}_{\text{produit}}$.

On a $\underbrace{P(X+1)}_{\text{produit}} = (X+1)\,P = P(X)\,(X+1) = P \times (X+1)$

Proposition

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $\begin{cases} Q \neq 0 \\ P \neq 0 \end{cases}$. On a

$$\deg\big(P(Q)\big) = \deg(P) \times \deg(Q)$$

□

Théorème

Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre. L'application

$$\varphi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow A^A$$
$$P \longmapsto f_P : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ a & \longmapsto & P(a) \end{array}$$

vérifie

1. $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \varphi(P+Q) = \varphi(P) + \varphi(Q)$
2. $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \varphi(PQ) = \varphi(P) \times \varphi(Q)$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall P \in \mathbb{K}[X], \varphi(\lambda P) = \lambda \varphi(P)$

$\square$