Chapitre 15

ℰ

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 29 avril 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Définition et premières propriétés

Définition: Soit E un ensemble muni d'une loi interne $+$ et d'une loi $\cdot$ définie sur $\mathbb{K} \times E$ à valeurs dans E où $\mathbb{K}$ est un corps.
On dit que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$) si

1. $(E, +)$ est un groupe abélien
2. (a)
$$\forall u \in E, \forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,$$
$$\mu \cdot (\lambda \cdot u) = (\mu \underbrace{\times}_{\times \text{ de } \mathbb{K}} \lambda) \cdot u$$
   (b) $\forall u \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot u = u$
3. (a)
$$\forall u \in E, \forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$$
$$(\lambda \cdot u) \underbrace{+}_{+ \text{ de } E} (\mu \cdot u) = (\lambda \underbrace{+}_{+ \text{ de } \mathbb{K}} \mu) \cdot u$$
   (b)
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall(u, v) \in E^2,$$
$$\lambda \cdot (u + v) = (\lambda \cdot u) + (\lambda \cdot v)$$

Les éléments de E sont alors appelés vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ sont dits scalaires.
Par convention, $\cdot$ est prioritaire sur $+$.

Proposition: Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. $\forall u \in E, 0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot 0_E = 0_E$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \lambda \cdot u = 0_E \implies \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $u = 0_E$

■

Proposition: Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in E$. Alors, $-u = (-1_{\mathbb{K}}) \cdot u$

■

Deuxième partie

Sous-espaces vectoriels

Définition: Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $F \subset E$.
On dit que F est un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de E si

1. $F \neq \varnothing$
2. $\forall (u, v) \in F^2, u + v \in F$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in F, \lambda u \in F$

Proposition: Avec les notations précédentes, $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

■

Proposition: Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$.
F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$ si et seulement si

1. $F \neq \varnothing$
2. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (u, v) \in F^2, \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$

■

Définition: Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$. Une combinaison linéaire de $(u_1, \ldots, u_n)$ est un vecteur de E de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$

Remarque:
On peut aussi démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$F \neq \varnothing \text{ et } \forall u, v \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u + v \in F$$

Proposition: Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F}$ une famille non vide de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap_{F \in \mathscr{F}} F$ est un sous-espace vectoriel de E.

■

Remarque (Attention ⚠):
Une réunion de sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel en général.

Définition: Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On définit leur somme $F + G$ par

$$F + G = \{x + y \mid x \in F, y \in G\}$$

Proposition: Avec les notations précédentes, $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$.

■

Définition: Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque non vide de sous-espaces vectoriels de E. On définit $\sum_{i\in I} F_i$ par

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} F_i &= \left\{ \sum_{i\in I} x_i \mid (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} F_i ; (x_i) \text{ presque nulle} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i\in I} x_i \mid (x_i) \in \prod_{i\in I} F_i ; \{i \in I \mid x_i \neq 0_E\} \text{ est fini} \right\}\end{aligned}$$

$\sum_{i\in I} F_i$ est l'ensemble de sommes <u>finies</u> obtenues à partir d'éléments de $\prod_{i\in I} F_i$

Proposition: Une somme quelconque de sous-espaces vectoriels est le plus petit sous-espace vectoriel contenant leur réunion. □

Définition: Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit qu'ils sont en <u>somme directe</u> si

$$\forall u \in F + G, \exists!(x, y) \in F \times G, u = x + y$$

Dans ce cas, l'espace $F + G$ est noté $F \oplus G$

Proposition: Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E
F et G sont en somme directe si et seuelement si $F \cap G = \{0_E\}$

■

Remarque:
Ce résultat est inutile pour l'instant (en l'absence d'arguments dimensionnels) pour prouver un resultat de la forme $E = F \oplus G$

Définition: Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que F et G sont <u>supplémentaires</u> dans E si

$$E = F \oplus G$$

en d'autres termes,

$$\forall x \in E, \exists!(y, z) \in F \times G, x = y + z$$

Définition: Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille non vide de sous-espaces vectoriels de $(E,+,\cdot)$. On dit qu'ils sont en somme directe si

$$\forall x \in \sum_{i\in I} F_i, \exists!(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} F_i \text{ presque nulle telle que } x = \sum_{i\in I} x_i$$

Dans ce cas, on écrit $\bigoplus_{i\in I} F_i$ à la place de $\sum_{i\in I} F_i$

Troisième partie

Familles de vecteurs

Définition: Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A \in \mathscr{P}(E)$. Le sous-espace vectoriel engendré par A est le plus petit sous espace vectoriel V de E tel que $A \subset V$.
On le note $\mathrm{Vect}(A)$

Définition: Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in E \setminus \{0_E\}$. La droite (vectorielle) engendrée par u est $\mathbb{K}u = \mathrm{Vect}(u) = \mathrm{Vect}(\{u\})$. Soit $v \in E$. On dit que u et v sont colinéaires si $v \in \mathbb{K}u$. Si v n'est pas colinéaire à u alors, $\mathrm{Vect}(u,v) = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$ est appelé plan (vectoriel) engendré par u et v.

Proposition: Soit $(e_i)_{i\in I}$ un famille non vide de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E,+,\cdot)$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}\left((e_i)_{i\in I}\right) &= \left\{ \sum_{i\in I} \lambda_i e_i \mid (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I \text{ et } (\lambda_i) \text{ presque nulle} \right\} \\ &= \sum_{i\in I} \mathbb{K} e_i\end{aligned}$$

■

Définition: On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E si

$$E = \mathrm{Vect}\left((e_i)_{i\in I}\right)$$

Proposition: Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E et $(u_j)_{j\in J}$ une surfamille de $(e_i)_{i\in I}$ constituée de vecteurs de E :

$$\forall i \in I, \exists j \in J, e_i = u_j$$

Alors, $(u_j)_{j\in J}$ engendre E. □

Proposition: Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E et $i_0 \in I$

$$\begin{aligned}(e_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}} \text{ engendre } E &\iff e_{i_0} \in \mathrm{Vect}\left((e_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}\right) \\ &\iff e_{i_0} \text{ est une combinaison linéaire des } e_i \ (i \in I, i \neq i_0)\end{aligned}$$

■

Proposition: Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E, $i_0 \in I$.

1. On pose $u_i = \begin{cases} e_i & \text{si } i \neq i_0 \\ \lambda e_{i_0} & \text{sinon} \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0_\mathbb{K}\}$
   Alors, $(u_i)_{i \in I}$ engendre E
2. Soit $v \in \text{Vect}\left((e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}\right)$.
   On pose $u_i = \begin{cases} e_i & \text{si } i \neq i_0 \\ e_{i_0} + v & \text{sinon} \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0_\mathbb{K}\}$
   Alors, $(u_i)_{i \in I}$ engendre E

■

Définition: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs. On dit que $(e_i)_{i \in I}$ est libre si aucun vecteur de cette famille n'est une combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille :

$$\forall i \in I, e_i \notin \text{Vect}\left((e_j)_{j \in I \setminus \{i\}}\right)$$

On dit aussi que les e_i sont linéairement indépendants

Proposition:

$$(e_i)_{i \in I} \text{ est libre} \iff \forall (\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle }, \left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0_E \implies \forall i \in I, \lambda_i = O_\mathbb{K} \right)$$

■

Proposition: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille libre de E. Alors

$$\sum_{i \in I} \mathbb{K} e_i = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{K} e_i$$

i.e.

$$\forall u \in \sum_{i \in I} \mathbb{K} e_i, \exists! (\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle telle que } u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$$

En d'autres termes, tout vecteur de E a au plus une décomposition en combinaisons linéaires des $e_i, i \in I$

■

Proposition: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille libre de E.

1. Toute sous famille de (e_i) est encore libre
2. Soit $u \in E$, $\mathscr{F} = (e_i \mid i \in I) \cup \{u\}$.

$$\mathscr{F} \text{ est libre} \iff u \notin \text{Vect}(e_i \mid i \in I)$$

3. (a) Quand on remplace un vecteur e_i par λe_i avec $\lambda \neq 0_\mathbb{K}$, la famille obtenue est libre.
   (b) Quand on remplace un vecteur e_i par $v + e_i$ avec $v \in \text{Vect}(e_j \mid j \neq i)$, la famille obtenue est libre.

Définition: Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que (e_i) est une base de E si c'est à la fois une famille libre et génératrice de E ; i.e. si

$$E = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{K}e_i$$

i.e. si

$$\forall u \in E, \exists!(\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle telle que } u = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$$

Dans ce cas, on dit que les λ_i sont les coordonnées de u dans la base $(e_i)_{i\in I}$