Exercice 1

Décomposer les permutations en produit de cycles à supports disjoints, puis en produit de transpositions, calculer leur signature.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix},$$

Exercice 2

Montrer que S_n est engendré par les transpsitions $(12), (13), \ldots, (1n)$, puis qu'il est engendré par (12) et $(123\ldots n)$.

Exercice 3

(1) Soient a, b, c, d quatre entiers. Calculer le produit des deux 3-cycles $(abc)(bcd)$.
(2) En déduire que A_n est engendré par les 3-cycles.

Exercice 4

Trouver l'ordre maximal d'une permutation de S_{10}.

Exercice 5

Soit $\sigma \in S_n$. Montrer que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-k}$ où k est le nombre d'orbites de σ.

Exercice 6

Soient $n \geq 2$ et $2 \leq k$. Combien S_n possède-t-il de k-cycles ?

Exercice 7

Montrer que l'identité est la seule permutation qui commute avec toutes les autres.

Exercice 8

Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels il existe $f \in S_n$ tel que $k \mapsto |f(k) - k|$ soit injective.