Chapitre 18

CD

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 10 mars 2022

Table des matières

Exercice 2

1.

$$\begin{aligned} X^4+1 &= (X^2+1)^2-2X^2 \\ &= \left(X^2+1-\sqrt{2}X\right)\left(X^2+1-\sqrt{2}X\right) \end{aligned}$$

2.

$$X^5-1=(X-1)\left(X^4+X^3+X^2+X+1\right)$$

3.

	1	-2	3	-2	2
i	1	$-2+i$	$2-2i$	$2i$	0
$-i$	1	-2	-2	0	0

$$(X^2-X+1)^2+1=(X^2+1)(X^2-2x-2)$$

Exercice 3

1. $\deg(Q^2)=2d$, $\deg(XP^2)=2d'+1$ avec $d,d'\in\mathbb{N}$ donc il n'y a aucune solution
2. On pose $\deg(P)=n$
   Cas 1 $n=1,0$ ou $-\infty$ donc $P=aX+b$ où $a,b\in\mathbb{K}$

$$\begin{aligned} P(P)=P &\iff P(aX+b)=aX+b \\ &\iff a^2X+ab+b=aX+b \\ &\iff \begin{cases} a^2=a \\ ab+b=b \end{cases} \\ &\iff a=0 \text{ ou } \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \end{aligned}$$

   Cas 2 $n\geqslant 2$ donc $\deg(P)=n\neq n^2=\deg\big(P\big(P(x)\big)\big)$

Exercice 4

Soient $A,B\in\mathbb{K}[X]$ tels que $A^2\mid B^2$. Il existe $C\in\mathbb{K}[X]$ tel que $AC=B$.

On considère les racines $R_A=\{a_1,\dots,a_n\}$ de A et $R_B=\{b_1,\dots,b_k\}$ les racines de B. Donc,

Exercice 5

$$\begin{aligned} z^{2n} - 2\cos(na)a^n + 1 = 0 &\iff z^n = e^{\pm ina} \\ &\iff z \in \left\{ e^{ia}, e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\} \end{aligned}$$