Chapitre 15

$\mathscr{CD}$

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 23 février 2022

Table des matières

Première partie

Exercice 1

1. $E_1 = \{f \in \mathscr{F} \mid f(a) = 0\}$

   — $E_1 \neq \varnothing$ car $(x \mapsto 0) \in E_1$
   — Soient $u, v \in \mathbb{R}$ et $g, f \in E_1$.
   On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ug(x) + vf(x) \end{array}$
   On a $\varphi(a) = ug(a) + vf(a) = 0 + 0 = 0$ donc $\varphi \in E_1$.

   Donc E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$
2. $E_2 = \{f \in \mathscr{F} \mid f(a) = 1\}$
   — $E_2 \neq \varnothing$ car $(x \mapsto 1) \in E_2$
   — Soient $u, v \in \mathbb{R}$ et $g, f \in E_2$.
   On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ug(x) + vf(x) \end{array}$
   On a $\varphi(a) = ug(a) + vf(a) = u + v$. Si $u + v \neq 1$, on n'a pas $\varphi(a) = 1$.

   Donc, E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$.
3. $E_3 = \{f \in \mathscr{F} \mid f(a) \in \mathbb{R}^+\}$
   — $E_3 \neq \varnothing$ car $(x \mapsto |x|) \in E_3$
   — Soient $u, v \in \mathbb{R}$ et $g, f \in E_3$.
   On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ug(x) + vf(x) \end{array}$
   On a $\varphi(a) = ug(a) + vf(a)$. On n'a pas $\varphi(a) \in \mathbb{R}^+$ si $(u, v) \in \mathbb{R}^-$

   Donc, E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$.
4. $E_4 = \{f \in \mathscr{F} \mid f(a) \in \mathbb{Q}\}$
   — $E_4 \neq \varnothing$ car $(x \mapsto \lfloor x \rfloor) \in E_4$
   — Soient $u, v \in \mathbb{R}$ et $g, f \in E_4$.
   On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ug(x) + vf(x) \end{array}$
   On a $\varphi(a) = ug(a) + vf(a)$. On n'a pas forcément $\varphi(a) \in \mathbb{R}^+$ si $(u, v) \notin \mathbb{Q}$. Par exemple, $u = \pi$ et $v = \sqrt{2}$, $\varphi = \pi \times g + \sqrt{2} \times f$ et $\varphi \notin E_4$

   Donc, E_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$.
5. $E_5 = \{f \in \mathscr{F} \mid f(a) = f(b) = 0\}$
   — $E_5 \neq \varnothing$ car $(x \mapsto 0) \in E_5$
   — Soient $u, v \in \mathbb{R}$ et $g, f \in E_5$.
   On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ug(x) + vf(x) \end{array}$
   On a $\varphi(a) = ug(a) + vf(a) = 0$.

Donc, E_5 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$.

6. $E_6 = \{f \in \mathscr{F} \mid f(a) = 0 \text{ et } f(b) = 1\}$ Si $a = b$, on a $E_6 = \varnothing$ car il n'existe pas $\psi \in \mathscr{F}$ tel que $0 = \psi(a) = \psi(b) = 1$.
   On suppose donc $a \neq b$.
   — $E_6 \neq \varnothing$ car $\left(x \mapsto \dfrac{x-a}{b-a}\right) \in E_6$
   — Soient $u, v \in \mathbb{R}$ et $g, f \in E_5$.
   On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ug(x) + vf(x) \end{array}$
   On a $\varphi(b) = ug(b) + vf(b) = u + v$ ce qui n'est pas forcément égal à 1.
   Donc, E_6 n'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$.
7. $E_7 = \{f \in \mathscr{F} \mid f(a) + f(b) = 0\}$
   — $E_7 \neq \varnothing$ car $(x \mapsto 0) \in E_7$
   — Soient $u, v \in \mathbb{R}$ et $g, f \in E_7$.
   On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ug(x) + vf(x) \end{array}$
   On remarque que $\begin{cases} f(b) = -f(a) \\ g(b) = -g(a) \end{cases}$ On a $\varphi(a) + \varphi(b) = ug(a) + vf(a) + ug(b) + vf(b) = 0$. Donc $\varphi \in E_7$
   Donc, E_7 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$.
8. $E_8 = \{f \in \mathscr{F} \mid f(a) + f(b) = 0\}$
   — $E_8 \neq \varnothing$ car $(x \mapsto 0) \in E_8$
   — Soient $u, v \in \mathbb{R}$ et $g, f \in E_8$.
   On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ug(x) + vf(x) \end{array}$
   On a $\varphi(a) = ug(a) + vf(a) = k\big(ug(b) + vf(b)\big) = k\varphi(b)$
   Donc, E_8 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$.
9. $E_9 = \{f \in \mathscr{F} \mid f(a) + f(b) = 1\}$
   — $E_9 \neq \varnothing$ car $\left(x \mapsto \dfrac{1}{2}\right) \in E_9$
   — Soient $u, v \in \mathbb{R}$ et $g, f \in E_9$.
   On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ug(x) + vf(x) \end{array}$
   On a $\varphi(a) + \varphi(b) = ug(a) + vf(a) + ug(b) + vf(b) = u + v$ qui n'est pas forcément égal à 1.
   Donc, E_9 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$.
10. $E_{10} = \{f \in \mathscr{F} \mid f(a) + f(b) + f(c) = 0\}$
   — $E_{10} \neq \varnothing$ car $(x \mapsto 0) \in E_{10}$
   — Soient $u, v \in \mathbb{R}$ et $g, f \in E_{10}$.
   On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ug(x) + vf(x) \end{array}$

$$\begin{aligned} \varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c) &= ug(a) + vf(a) + ug(b) + vf(b) + ug(c) + vf(c) \\ &= u\big(g(a) + g(b) + g(c)\big) + v\big(f(a) + f(b) + f(c)\big) &= 0 \end{aligned}$$

   Donc, E_{10} est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$.

11. $E_{11} = \{f \in \mathscr{F} \mid f(a) + f(b) = kf(c)\}$
   — $E_{11} \neq \varnothing$ car $(x \mapsto 0) \in E_{11}$
   — Soient $u, v \in \mathbb{R}$ et $g, f \in E_{11}$.
   On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ug(x) + vf(x) \end{array}$

$$\begin{aligned} \varphi(a) + \varphi(b) &= ug(a) + ug(b) + vf(a) + vf(b) \\ &= k\big(ug(c) + vf(c)\big) \\ &= k\varphi(c) \end{aligned}$$

   Donc, E_{11} est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$.
12. $E_{12} = \{f : x \mapsto a\,|x| + bx\}$
   — $E_{12} \neq \varnothing$.
   — <u>Cas 1</u> $a = b = 0$
      Donc $f : x \mapsto 0$.
      Dans ce cas, E_{12} est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$ (car $f + f \in E_{12}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda f = f$)
   <u>Cas 2</u> $a \neq b$
      Alors $f \neq 0_{\mathscr{F}}$.
      Si E_{12} est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda f \in E_{12}$$

      Par exemple, pour $\lambda = 0$, on a $\lambda f = 0_{\mathscr{F}} \notin E_{12}$ Donc, E_{12} n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$.
13. $E_{13} = \{f \in \mathscr{F} \mid \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x + p)\}$
   — $E_{13} \neq \varnothing$ car $(x \mapsto 0) \in E_{13}$
   — Soient $u, v \in \mathbb{R}$ et $g, f \in E_{13}$.
   On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ug(x) + vf(x) \end{array}$
   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi(x + p) &= ug(x + p) + vf(x + p) \\ &= ug(x) + vf(x) \\ &= \varphi(x) \end{aligned}$$

   Donc E_{13} est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$.

Deuxième partie

Exercise 2

1. — $F_1 \neq \varnothing$ since $(0) \in F_1$.
   — Let $a, b \in \mathbb{R}$ and $u, v \in E$.
   We define the sequence $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ by

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = au_n + bv_n$$

Let $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= au_{n+2} + bv_{n+2} \\ &= 2au_{n+1} + 3au_n + 2bv_{n+1} + 3bv_n \\ &= 2w_{n+1} + 3w_n \end{aligned}$$

So, F_1 is a subspace of E

2. — $F_2 \neq \varnothing$ since the Fibonnacci sequence $f \in F_2$
   — Let $a, b \in \mathbb{R}$ and $u, v \in E$.
   We define the sequence $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ by

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n + v_n$$

Let $n \in \mathbb{N}$.