CHAPITRE 30

INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX SUR UN SEGMENT

L'objectif de ce chapitre est de donner une construction de l'intégrale d'une fonction, permettant ainsi de démontrer les propriétés de l'intégrale qui ont été admises au premier semestre.

Dans tout le chapitre, sauf mention explicite, a et b désignent deux réels avec $a < b$.

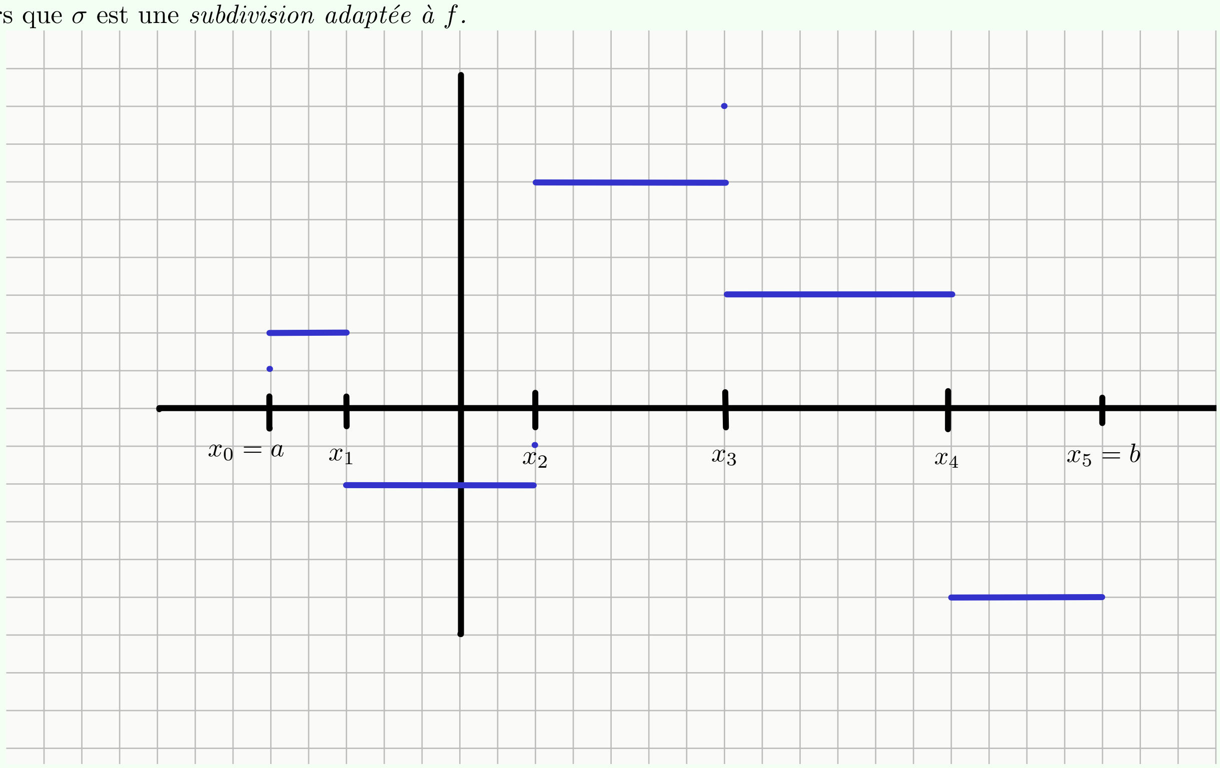
1. Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 1.1

Une *subdivision* de $[a, b]$ est une suite finie $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ telle que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Définition 1.2

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est une *fonction en escalier* s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que f est constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ $(i = 0, \ldots, n-1)$. On dit alors que σ est une *subdivision adaptée à f*.



Exemple 1.3

L'application $f : [-2, 3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est une fonction en escalier, une subdivision adaptée étant $\sigma_1 = (-2, -1, 0, 1, 2, 3)$. Une autre subdivision adaptée est $\sigma_2 = (-2, -1.5, -1, 0, 1/3, 1, 2, 3)$.

Définition 1.4

Soient $\sigma_1 = (x_0, \ldots, x_n)$ et $\sigma_2 = (y_0, \ldots, y_p)$ deux subdivisions de $[a, b]$. On dit que σ_2 est *plus fine* que σ_1 si pour tout i, il existe j tel que $y_j = x_i$. On notera cette situation dans ce cours (notation non officielle) $\sigma_2 \prec \sigma_1$.

Proposition 1.5

Soient σ_1 et σ_2 deux subdivisions de $[a, b]$. Il existe une subdivision σ_3 de $[a, b]$ plus fine à la fois que σ_1 et σ_2.

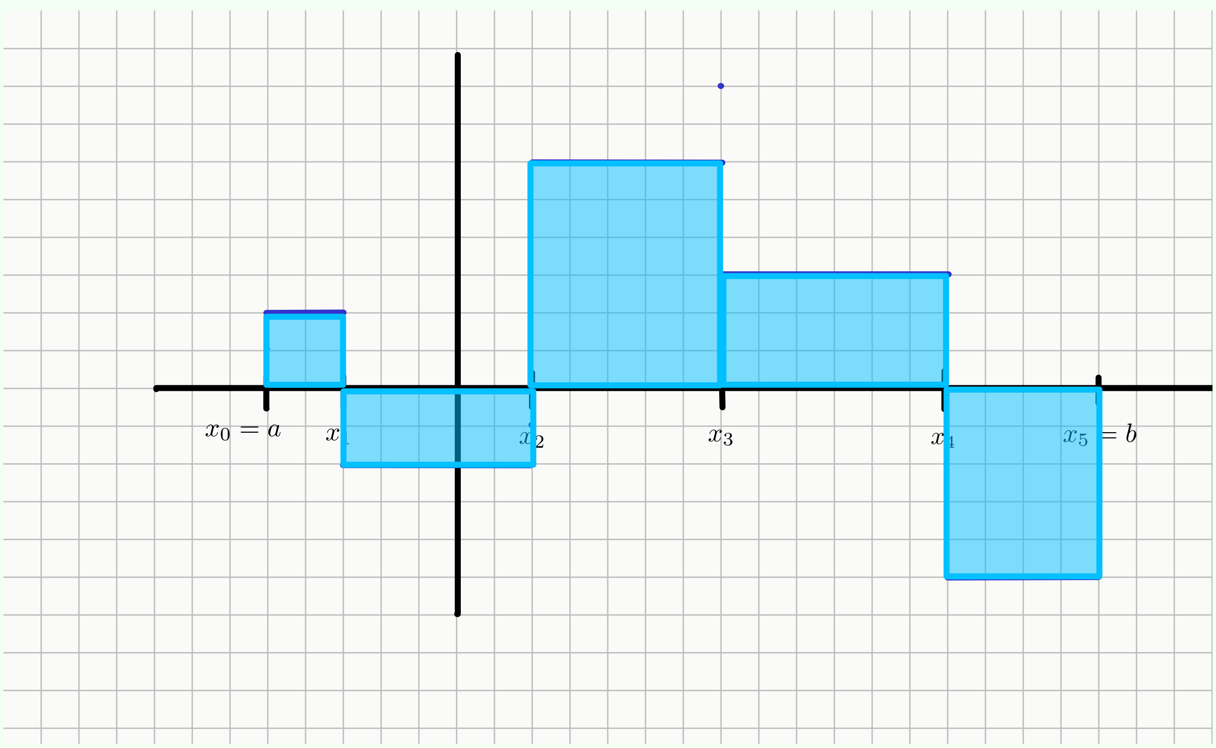
Remarque 1.6

Une fonction en escaliers ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Définition 1.7

Soit f une fonction en escaliers sur $[a, b]$ et $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision adaptée. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on pose h_i la valeur prise par f sur $]x_i, x_{i+1}[$. On définit l'*intégrale de* f *sur* $[a, b]$ par la formule

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) h_i.$$



Remarque 1.8

La définition de $\int_{[a,b]} f$ ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie.

2. Intégrale d'une fonction bornée

Contrairement aux fonctions en escalier, l'intégrale d'une fonction quelconque, même bornée, n'est pas forcément définie. Par contre, on peut définir les notions d'intégrales inférieure et supérieure d'une fonction bornée. Ces notions se définissent à partir des sommes de Darboux.

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction bornée définie sur $[a,b]$.

2.1. Sommes de Darboux.

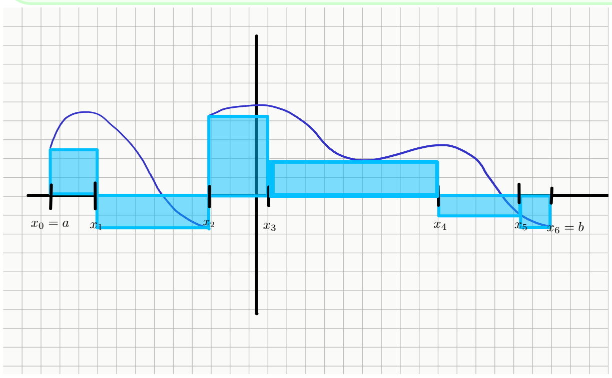
Définition 2.1

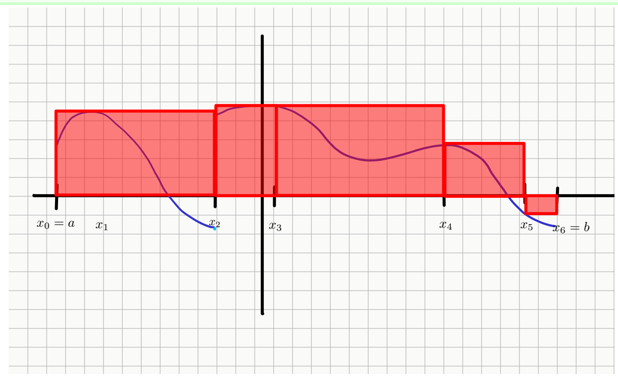
Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$. On pose pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $m_i = \inf\limits_{]x_i, x_{i+1}[} f$ et $M_i = \sup\limits_{]x_i, x_{i+1}[} f$. La *somme de Darboux inférieure de f par rapport à σ* est le nombre

$$S_\sigma^-(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) m_i.$$

La *somme de Darboux supérieure de f par rapport à σ* est le nombre

$$S_\sigma^+(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) M_i.$$





Exemple 2.2

(1) Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$. Si σ est une subdivision adaptée, alors $S_\sigma^-(f) = S_\sigma^+(f) = \displaystyle\int_{[a,b]} f$.

(2) Soit $f = \mathbb{1}_\mathbb{Q}$ et σ une subdivision quelconque de $[0,1]$. Alors $S_\sigma^-(f) = 0$ et $S_\sigma^+(f) = 1$.

(3) Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto -x$ et $\sigma_n = (-1, -\frac{n-1}{n}, \dots, \frac{-1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1)$. Alors $S_{\sigma_n}^-(f) = \displaystyle\sum_{i=-n}^{n-1} \frac{1}{n} \times \frac{-i-1}{n} = \frac{-1}{n}$ et $S_{\sigma_n}^+(f) = \displaystyle\sum_{i=-n}^{n-1} \frac{1}{n} \times \frac{-i}{n} = \frac{1}{n}$. On remarque que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{\sigma_n}^-(f) = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} S_{\sigma_n}^+(f)$.

Proposition 2.3

Soit σ une subdivision de $[a,b]$. On a $S_\sigma^-(f) \le S_\sigma^+(f)$.

Proposition 2.4

Soient σ_1 et σ_2 deux subdivisions de $[a,b]$ telles que σ_2 soit plus fine que σ_1. Alors $S^-_{\sigma_1}(f) \leq S^-_{\sigma_2}(f)$ et $S^+_{\sigma_1}(f) \geq S^+_{\sigma_2}(f)$.

2.2. Intégrales inférieure et supérieure.

Proposition 2.5

L'ensemble $\{S^-_\sigma(f) \mid \sigma \text{ subdivision de } [a,b]\}$ est majoré.

L'ensemble $\{S^+_\sigma(f) \mid \sigma \text{ subdivision de } [a,b]\}$ est minoré.

Définition 2.6

L'*intégrale inférieure* de f sur $[a,b]$ est le nombre

$$I^-_{[a,b]}(f) = \sup\{S^-_\sigma(f) \mid \sigma \text{ subdivision de } [a,b]\}.$$

L'*intégrale supérieure* de f sur $[a,b]$ est le nombre

$$I^+_{[a,b]}(f) = \inf\{S^+_\sigma(f) \mid \sigma \text{ subdivision de } [a,b]\}.$$

Proposition 2.7

$I^-_{[a,b]}(f) \leq I^+_{[a,b]}(f)$.

Définition 2.8

On dit que f est *intégrable sur* $[a,b]$ si $I^-_{[a,b]}(f) = I^+_{[a,b]}(f)$. Dans ce cas, *l'intégrale de f sur* $[a,b]$, notée $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est la valeur commune de $I^-_{[a,b]}(f)$ et $I^+_{[a,b]}(f)$.

Exemple 2.9

(1) Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$. Montrons que f est intégrable sur $[a,b]$. Soit σ une subdivision adaptée de $[a,b]$. On a alors $S^-_\sigma(f) \leq I^-_{[a,b]}(f) \leq I^+_{[a,b]}(f) \leq S^+_\sigma(f)$. Or, comme σ est adaptée, $S^-_\sigma(f) = S^+_\sigma(f)$. Par suite, $I^-_{[a,b]}(f) = I^+_{[a,b]}(f)$.

(2) La fonction $\mathbb{1}_\mathbb{Q}$ n'est pas intégrable sur $[0,1]$ puisque $I^-_{[0,1]}(\mathbb{1}_\mathbb{Q}) = 0 \neq I^+_{[0,1]}(\mathbb{1}_\mathbb{Q}) = 1$.

2.3. Propriétés de l'intégrale. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions bornées.

Proposition 2.10

Si $f \leq g$, alors $I^-_{[a,b]}(f) \leq I^-_{[a,b]}(g)$ et $I^+_{[a,b]}(f) \leq I^+_{[a,b]}(g)$.

Corollaire 2.11

Si f et g sont intégrables sur $[a,b]$ et si $f \leq g$, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$. $\square$

Proposition 2.12: relation de Chasles

Soit $c \in]a,b[$. Alors $I^-_{[a,b]}(f) = I^-_{[a,c]}(f) + I^-_{[c,b]}(f)$ et $I^+_{[a,b]}(f) = I^+_{[a,c]}(f) + I^+_{[c,b]}(f)$.

Corollaire 2.13

Soit $c \in [a,b]$ et f bornée sur $[a,b]$. f est intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ et dans ce cas,

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

Proposition 2.14

$I^-_{[a,b]}(f+g) \geq I^-_{[a,b]}(f) + I^-_{[a,b]}(g)$ et $I^+_{[a,b]}(f+g) \leq I^+_{[a,b]}(f) + I^+_{[a,b]}(g)$.

Proposition 2.15

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$I^-_{[a,b]}(\lambda f) = \begin{cases} \lambda I^-_{[a,b]}(f) & \text{si } \lambda \geq 0 \\ \lambda I^+_{[a,b]}(f) & \text{si } \lambda \leq 0 \end{cases}, \quad I^+_{[a,b]}(\lambda f) = \begin{cases} \lambda I^+_{[a,b]}(f) & \text{si } \lambda \geq 0 \\ \lambda I^-_{[a,b]}(f) & \text{si } \lambda \leq 0 \end{cases}$$

Corollaire 2.16: Linéarité

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. Alors $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur $[a,b]$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$.

Proposition 2.17

Soit f intégrable sur $[a,b]$. Alors $|f|$ est intégrable sur $[a,b]$ et $\displaystyle\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.

3. Intégrale d'une fonction continue. Théorème fondamental de l'analyse

Théorème 3.1

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est intégrable sur $[a,b]$.

Théorème 3.2: Fondamental de l'Analyse

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $x \mapsto \int_{[a,x]} f$ est une primitive de f.

Notation 3.3

Si f est continue sur $[a, b]$, on note plutôt $\int_a^b f(t)\, dt$ à la place de $\int_{[a,b]} f$. Si $b > a$, on note $\int_a^b f(t)\, dt = -\int_b^a f(t)\, dt$.

Corollaire 3.4

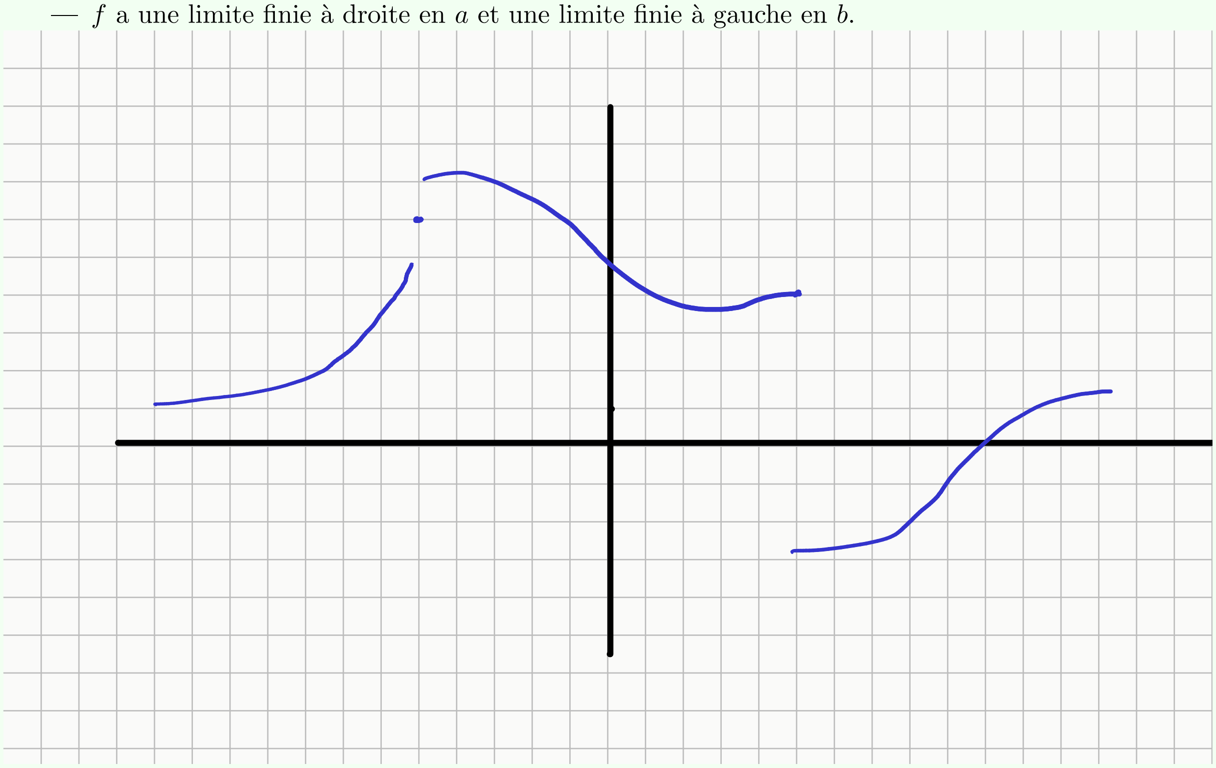
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, de signe constant, telle que $\int_a^b f(t)\, dt = 0$. Alors $f = 0$.

4. Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition 4.1

Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$. On dit que f est *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, ..., x_n)$ de $[a, b]$ telle que

- pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$
- pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, f a une limite finie à droite en x_i et une limite finie à gauche en x_{i+1} (mais pas nécessairement égales)
- f a une limite finie à droite en a et une limite finie à gauche en b.



Définition 4.2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I d'intérieur non vide. On dit que f est *continue par morceaux sur* I si f est continue par morceaux sur tout segment contenu dans I.

Théorème 4.3

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors f est intégrable sur $[a,b]$. On note son intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$.

Remarque 4.4

Attention : le corollaire 3.4 n'est pas valable en général pour les fonctions continues par morceaux. Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0)=1$ et $f(x)=0$ pour tout $x\neq 0$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, non nulle, positive et pourtant $\int_{-1}^1 f(t)\,dt = 0$.

5. Une autre construction

Théorème 5.1

Soit f une fonction continue par morceaux. Il existe une suite (f_n) de fonctions en escalier telle que :

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ \forall x\in[a,b], |f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon.$$

Remarque 5.2

Dans les conditions du théorème ci-dessus, on dit que la suite (f_n) converge uniformément vers f. Une fonction qui est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier est dite *réglée*.

Corollaire 5.3

Soit f une fonction continue par morceaux, (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{[a,b]} f_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_{[a,b]} g_n$.

Définition 5.4

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. On définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ comme étant la limite de $\int_{[a,b]} f_n$ pour n'importe quelle suite (f_n) de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$.

Théorème 5.5

Les deux constructions (par les sommes de Darboux ou les suites de fonctions en escalier) conduisent à la même intégrale.

6. Formules de Taylor

Proposition 6.1: Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f : I\to\mathbb{R}$ de classe C^{n+1} sur l'intervalle I. Alors

$$\forall a\in I, \forall t\in I,\ f(t) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^t \frac{(t-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u)\,du.$$

Proposition 6.2: Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1}. Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $u \in I$, $|f^{(n+1)}(u)| \leq M$. On a alors

$$\forall a, t \in I, \left| f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exemple 6.3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1}. Comme $f^{(n+1)}$ est continue sur I, elle est bornée. Soit $M = \sup |f^{(n+1)}|$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\left| f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

et donc

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o_{t \to a}((t-a)^n).$$

7. Sommes de Riemann

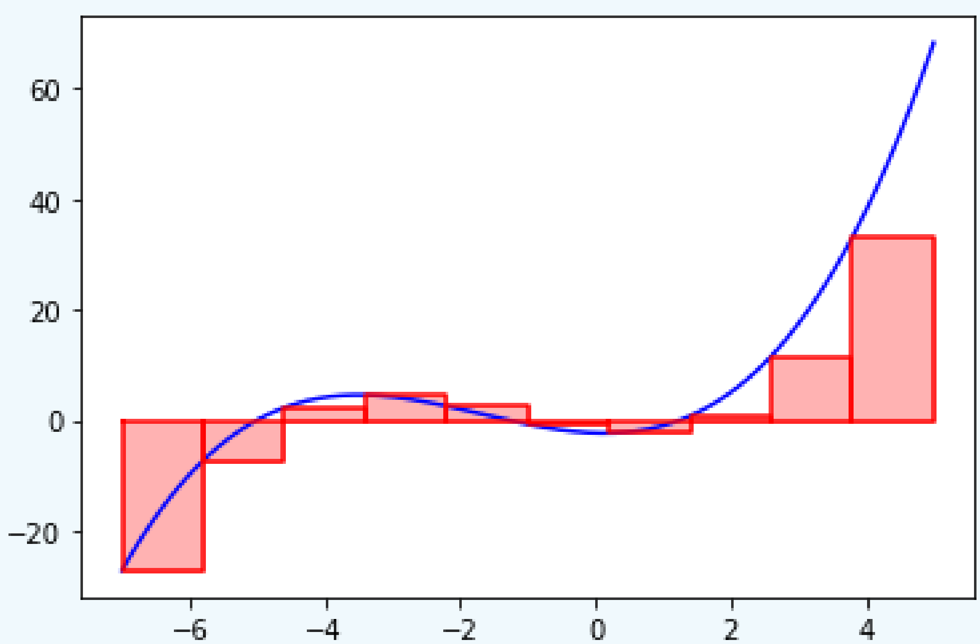
Proposition 7.1

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Remarque 7.2

Le théorème ci-dessus peut être utilisé pour calculer des valeurs approchées d'une intégrale : cette méthode s'appelle *méthode des rectangles*, puisqu'elle correspond à calculer les aires de rectangles comme sur la figure ci-dessous.



Il apparaît clairement sur le dessin que les hauteurs des rectangles correspondent aux valeurs de la fonction prises sur les extrémités de gauche. On peut bien sûr utiliser aussi les extrémités de droite, ce qui conduit au résultat suivant.

Proposition 7.3

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

8. Intégrale d'une fonction à valeurs complexes.

Définition 8.1

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. L'*intégrale* de f sur $[a, b]$ est définie par la formule

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,dt.$$

Proposition 8.2: Linéarité

Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ continues, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,dt = \lambda\int_a^b f(t)\,dt + \mu\int_a^b g(t)\,dt$. $\square$

Proposition 8.3: Inégalité triangulaire

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Proposition 8.4

Les formules d'intégration par parties et de changement de variables sont encore valables dans ce contexte.

Proposition 8.5

La formule de Taylor avec reste intégral est encore vraie dans ce contexte.

Proposition 8.6: Inégalité des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1. Alors $|f(b) - f(a)| \leq \sup\limits_{[a,b]} |f'| \times |b - a|$.