

## CHAPITRE 0

# Logique (rudiment

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 23 février 2022

# Table des matières

I	Algèbre de Boole	3
II	Déduction naturelle	6
III	Raisonnement par l'absurde	8
IV	Prédicat	10
V	Logique douteuse	12

---

**Definition**

Un proposition est un énoncé qui est soit vrai, soit faux.

**Definition**

Démontrer une proposition revient à prouver qu'elle est vraie

Première partie

Algèbre de Boole

**Definition**

Soient  $A$  et  $B$  deux propositions. La proposition  $A$  et  $B$  est définie par la table de vérité suivante :

$A$	$B$	$A$ et $B$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$F$

**Definition**

Soient  $A$  et  $B$  deux propositions. La proposition  $A$  ou  $B$  est définie par la table de vérité suivante :

$A$	$B$	$A$ ou $B$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$

**Definition**

Soit  $A$  une proposition. La négation de  $A$ , notée  $\text{non}(A)$  est définie par :

$A$	$\text{non}(A)$
$V$	$F$
$F$	$V$

**Definition**

Deux propositions  $A$  et  $B$  sont équivalentes si elles ont la même table de vérité. Dans ce cas, on note  $A \iff B$

**Proposition**

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois propositions.

1.  $(A \text{ et } B) \text{ et } C \iff A \text{ et } (B \text{ et } C)$
2.  $A \text{ et } A \iff A$
3.  $A \text{ et } B \iff B \text{ et } A$
4.  $(A \text{ ou } B) \text{ ou } C \iff A \text{ ou } (B \text{ ou } C)$
5.  $A \text{ ou } A \iff A$
6.  $A \text{ ou } B \iff B \text{ ou } A$
7.  $\text{non}(\text{non}(A)) \iff A$
8.  $A \text{ et } (B \text{ ou } C) \iff A \text{ et } B \text{ ou } A \text{ et } C$

9.  $A \text{ ou } (B \text{ et } C) \iff (A \text{ ou } B) \text{ et } (A \text{ et } C)$   
 10.  $\text{non } (A \text{ et } B) \iff \text{non } (A) \text{ ou } \text{non } (B)$   
 11.  $\text{non } (A \text{ ou } B) \iff \text{non } (A) \text{ et } \text{non } (B)$

■

**Definition**

Soient  $A$  et  $B$  deux propositions. La proposition  $A \implies B$  ( $A$  implique  $B$ ) est définie par :

$A$	$B$	$A \implies B$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$

**Definition**

Soient  $A$  et  $B$  deux propositions telles que  $A \implies B$  est vraie. On dit que  $A$  est une condition suffisante pour que  $B$  soit vraie. On dit que  $B$  est une condition nécessaire pour que  $A$  soit vraie.

**Proposition****Contraposée**

Soient  $A$  et  $B$  deux propositions.

$$(A \implies B) \iff (\text{non } B \implies \text{non } A)$$

■

**Proposition**

Soient  $A$  et  $B$  deux propositions.

$$(A \implies B) \iff ((A \implies B) \text{ et } (B \implies A))$$

■

**Proposition**

Soient  $A$  et  $B$  deux propositions.

$$(A \implies B) \iff (B \text{ ou } \text{non } (A))$$

■

Deuxième partie

Déduction naturelle

Dans ce paragraphe,  $A$  et  $B$  sont deux propositions.

$A$  et  $B$

Comment démontrer  $A$  et  $B$  ?

- On démontre  $A$
- On démontre  $B$

Comment utiliser l'hypothèse  $A$  et  $B$  ?

On utilise  $A$  ou on utilise  $B$ .

$A$  ou  $B$

Comment démontrer  $A$  ou  $B$  ?

On essaie de démontrer  $A$ . Si on y arrive, alors on a prouvé  $A$  ou  $B$  sinon on démontre  $B$ .

Variante

On suppose  $A$  faux. On démontre  $B$ .

Comment utiliser l'hypothèse  $A$  ou  $B$  ?

On fait une disjonction des cas :

- CAS 1 : On suppose  $A$
- CAS 2 : On suppose  $B$

$A \Rightarrow B$

Comment démontrer  $A \Rightarrow B$  ?

On suppose  $A$ . On démontre  $B$ .

Comment utiliser l'hypothèse  $A \Rightarrow B$  ?

On démontre  $A$ . On utilise  $B$ .



Troisième partie

Raisonnement par l'absurde

Situation :

Soient  $A$  et  $B$  deux propositions.

On veut montrer  $A \implies B$ .

On suppose  $A$ . On suppose aussi  $B$  faux.

On cherche à faire apparaître une contradiction ( $\zeta$ )

Quatrième partie

Prédictat

**Definition**

Un prédicat  $\mathcal{P}(x)$  est un énoncé dont la valeur de vérité dépend de l'objet  $x$ , élément d'un ensemble  $E$ .

Le domaine de validité de  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des valeurs  $x$  de  $E$  pour lesquelles  $\mathcal{P}(x)$  est vraie :

$$\{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$$

*Remarque*      *Notation*

On écrit

$$\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$$

pour dire que  $\mathcal{P}(x)$  est vraie pour tous les  $x$  de  $E$ .

On écrit

$$\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$$

pour dire qu'il existe (au moins) un élément  $x \in E$  pour lesquels  $\mathcal{P}(x)$  est vraie.

On écrit

$$\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$$

pour dire qu'il existe un unique élément  $x \in E$  tel que  $\mathcal{P}(x)$  est vraie.

$\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$
-----------------------------------

Comment démontrer  $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$  ?

Soit  $x \in E$  (fixé quelconque). Montrons  $\mathcal{P}(x)$ .

Comment utiliser  $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$  ?

On choisit (spécialise) une ou plusieurs (voir toutes) valeurs de  $x$  et on exploite  $\mathcal{P}(x)$ .

Cinquième partie

Logique douteuse

**Definition**

On définit  $\varpi = \frac{e^{\pi-\sqrt{2}} - \ln 4 + \Upsilon}{\gamma}$  où  $\Upsilon = \pi! = \Gamma(\pi + 1) \approx 7.18$   
 On a  $\varpi \approx 19.7979$

**Definition**

Soit  $P(x)$  un prédicat sur  $E$ . On dit que  $P(x)$  est quasi-vraie (pour un certain  $\varepsilon > 0$ ) si

$$\mathfrak{V}_E(P) = \frac{\text{Card}(F)}{\text{Card}(V)} < \varepsilon$$

où  $V = \{x \in E \mid P(x) \text{ vrai}\}$  et  $F = \{x \in E \mid P(x) \text{ faux}\}$   
 Par convention, on choisit généralement  $\varepsilon = \varpi$ .

**Théorème****Théorème du pipeau qui marche**

*“ C’est du pipeau ... mais ça marche ! ”*

Toute proposition quasi-vraie est vraie.

□

*Remarque*

Ce théorème est très utile. On l’appèle aussi le théorème du marchand de tapis ou le théorème du random-bullshit.  
 La preuve de ce théorème est très complexe et utilise principalement des notions qui ne sont pas au programme. Malgré cela, on peut tout de même comprendre la preuve.

■

**Proposition**

Les équivalents autour d’un points sont des égalités à  $\pm\varepsilon$ .

□

**Corollaire**

Toute notation en “petit o” est optionnelle avec l’utilisation de “ $\approx$ ”. Avec la valeur de  $\varepsilon$  correspondante,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathfrak{o}(x) \approx 0$$

□

*Remarque**Notation*

Au lieu d’utiliser “ $\approx$ ”, on écrit “=” à la place.  
 On a donc  $\sin(\theta) = \theta$  et  $\cos(\theta) = 1$ .