

## CHAPITRE 15

# TD

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 28 mars 2022

## Table des matières

I	Exercice 3	1
II	Exercice 7	2
III	Exercice 8	3
IV	Exercice 9	3
V	Exercice 12	4
VI	Exercice 11	5
VII	Exercice 10	8

## Première partie

### Exercice 3

1.  $0 \in F$ .

Soit  $P, Q \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ . On pose  $R = \lambda P + \mu Q$ . Montrons que  $R \in F$ .

$$\begin{aligned}
 2R'(1) + R(0) &= 2(\lambda P'(1) + \mu Q'(1)) + \lambda P(0) + \mu Q(0) \\
 &= \lambda(2P'(1) + P(0)) + \mu(2Q'(1) + Q(0)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Donc  $R \in F$  et donc  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

2.

$$\begin{aligned}
 P \in F &\iff 2P'(1) + P(0) \\
 &\iff 2(b + 2c) + a = 0 \\
 &\iff a + 2b + 4c = 0
 \end{aligned}$$

3. *Trouver une famille génératrice de  $E$*

$$\begin{aligned}
 P \in F &\iff a + 2b + 4c = 0 \\
 &\iff a = -2b - 4c \\
 &\iff \forall x, P(x) = (-2b - 4c) + bx + cx^2 \\
 &\iff \forall x, P(x) = \underbrace{b(-2 + x)}_{\in E} + \underbrace{c(-4 + x^2)}_{\in E}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } F = \text{Vect}(P_1, P_2) \text{ où } \begin{cases} P_1 : x \mapsto -2 + x \\ P_2 : x \mapsto -4 + x^2 \end{cases}$$

4. *Cette famille est-elle une base ?*

$P_1$  et  $P_2$  ne sont pas colinéaires car ils n'ont pas le même degré donc  $(P_1, P_2)$  est une base de  $F$ . On a  $\dim(F) = 2$ .

## Deuxième partie

### Exercice 7

Let  $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$  such that

$$\lambda(u_n) + \mu(v_n) + \nu(w_n) = (0)$$

Thus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda 2^n + \mu 3^n + \nu 4^n = 0$$

1<sup>st</sup> METHOD In particular, with  $n \in \{0, 1, 2\}$ , we have

$$(S) : \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ 2\lambda + 3\mu + 4\nu = 0 \\ 4\lambda + 9\mu + 16\nu = 0 \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ \mu + 2\nu = 0 \\ 5\mu + 12\nu = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ \mu + 2\nu = 0 \\ 2\nu = 0 \end{cases}$$

$$\iff \lambda = \mu = \nu = 0$$

Therefore,  $u, v$  and  $w$  are linearly independant.

2<sup>nd</sup> METHOD Suppose  $\nu \neq 0$ . Then,

$$0 = \lambda u_n + \mu v_n + \nu w_n \sim \nu 4^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pm \infty$$

Hence,  $\nu = 0$ .

Suppose  $\nu \neq 0$ , then  $0 = \lambda 2^n + \mu 3^n \sim \mu 3^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \pm \infty$

Thus,  $\mu = 0$ . Also,  $\lambda = 0$

## Troisième partie

### Exercice 8

Soit  $P \in E$ . On pose

$$P : x \mapsto ax^2 + bx + c$$

avec  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} P \in F &\iff \begin{cases} P(1) = 0 \\ \int_0^1 P(t) dt = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}b = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = -\frac{3}{4}b \\ c = -\frac{1}{4}b \end{cases} \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = -\frac{3}{4}bx^2 + bx - \frac{1}{4}b = b \left( -\frac{3}{4}x^2 + x - \frac{1}{4} \right) \\ &\iff P \in \text{Vect}(Q) \end{aligned}$$

où  $Q : x \mapsto -\frac{3}{4}x^2 + x - \frac{1}{4}$

Donc,  $F = \text{Vect}(Q)$  est un sous-corps vectoriel de  $E$ . De plus,  $Q \neq 0$  donc  $(Q)$  est une base de  $F$ .

## Quatrième partie

### Exercice 9

Soit  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ .

$$\begin{aligned}
 (x, y, z, t) \in H_2 &\iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = -z \\ x = -t \end{cases} \\
 &\iff (x, y, z, t) = (-t, -z, z, t) = z(0, -1, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1) \\
 &\iff (x, y, z, t) \in \text{Vect}(u_1, u_2) \\
 &\quad \text{où } \begin{cases} u_1 = (0, -1, 1, 0) \\ u_2 = (-1, 0, 0, 1) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$H_2 = \text{Vect}(u_1, u_2)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$   
 $u_1$  et  $u_2$  ne sont pas colinéaires donc  $(u_1, u_2)$  est une base de  $H_2$ .

## Cinquième partie

### Exercice 12

$$\begin{array}{c|c|c}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
 \hline
 a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
 \hline
 a_{31} & a_{32} & a_{33}
 \end{array}$$

$$\frac{S}{3} \underbrace{\left( \begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array} \right)}_{C_1}$$

$$\left( \begin{array}{l} a_{11} + a_{12} + a_{13} = 0 \\ \vdots \\ a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} 8 \text{ équations} \\ 9 \text{ inconnues} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c}
 a & -a-b & b \\
 \hline
 b-a & 0 & -b+a \\
 \hline
 -b & a+b & -a
 \end{array} = a \left( \begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 \end{array} \right) + b \left( \begin{array}{c|c|c} 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

L'ensemble  $\mathcal{C}$  des carrés magiques est  $\left\{ \frac{S}{3}C_1 + aC_2 + bC_3 \mid (a, b, S) \in \mathbb{K} \right\} = \text{Vect}(C_1, C_2, C_3)$ .

Montrons que  $(C_1, C_2, C_3)$  est libre. Soit  $(\lambda, a, b) \in \mathbb{K}^3$

$$\begin{aligned} \lambda C_1 + aC_2 + bC_3 &= 0 \\ \iff \begin{array}{c|c|c} \lambda + a & \lambda - a - b & \lambda + b \\ \hline \lambda + b - a & \lambda & \lambda - b + a \\ \hline \lambda - b & \lambda + a + b & \lambda - a \end{array} &= \begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

## Sixième partie

### Exercice 11

#### Partie 1

1. En remplaçant  $t$  par 0, par  $\frac{\pi}{8}$  et par  $-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ , on obtient

$$(S) : \begin{cases} a + b = 0 \\ ae^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} + be^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} = 0 \\ ae^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}} - be^{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} e^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} & e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} \\ e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}} & -e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} \end{vmatrix} = -e^{\frac{3\pi}{2\sqrt{3}}} - e^{-\frac{3\pi}{2\sqrt{3}}} \neq 0$$

donc

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} & e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} \\ e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}} & -e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$$

donc le système  $\begin{cases} ae^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}be^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} = 0 \\ ae^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}} - be^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} = 0 \end{cases}$  est de Cramer. Son unique so-

lution est  $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

2.

$$\begin{aligned}
af_1(t) &= bf_2(t) + cf_3(t) = a \left( 1 + t + \frac{t^2}{2} + \mathfrak{o}(t^2) \right) \\
&\quad + b \left( 1 - \frac{t}{2} + \mathfrak{o}(t) \right) \left( \frac{t\sqrt{3}}{2} + \mathfrak{o}(t^2) \right) \\
&\quad + c \left( 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + \mathfrak{o}(t^2) \right) \left( 1 - \frac{3t^2}{8} + \mathfrak{o}(t^2) \right) \\
&= (a + c) + t \left( a + \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2} \right) + t^2 \left( \frac{a}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{4} \right) + \mathfrak{o}(t^2)
\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité,

$$(S) : \begin{cases} a + c = 0 \\ a + \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2} = 0 \\ a - \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2} = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow -L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

 $\text{rg}(A) = 3$  donc  $A \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$  donc  $S$  est de Cramer donc  $a = b = c = 0$ 

3.

$$\forall t, |f_2(t)| \leq e^{-\frac{t}{2}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

donc  $f_2(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ De même,  $f_3(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$  et  $f_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \pm \infty$ Si  $a \neq 0$ , alors,  $0 = af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pm \infty$ Donc  $a = 0$ .

$$\forall t, b \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + c \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

Si  $c \neq 0$ ,

$$\forall t \neq \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left[ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \right], \frac{b}{c} \tan\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = 1$$

donc  $c = 0$  et donc  $b = 0$ 4.  $f'_1 = f_1 \in G$ 

$$\begin{aligned}
\forall t, f'_2(t) &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}f_2(t) + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3(t)
\end{aligned}$$

donc  $f'_2 \in \text{Vect}(\mathcal{B}) = G$

$$\forall t, f'_3(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$$

Soit  $f : t \mapsto af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t)$

$$\begin{aligned} f' &= af_1 - \frac{b}{2}f_2 + b\frac{\sqrt{3}}{2}f_3 - \frac{c}{2}f_3 - c\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 \\ &= af_1 - \left(\frac{b}{2} - \frac{c\sqrt{3}}{2}f_2\right) + \left(\frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2}\right)f_3 \in G \end{aligned}$$

5. Les coordonnées de  $f$  est dans la base  $\mathcal{B}$  sont  $\left(a, -\frac{b}{2}, -\frac{c\sqrt{3}}{2}, \frac{b\sqrt{3}}{2}, -\frac{c}{2}\right)$
- Les coordonnées de  $f_1$  sont  $(1, 0, 0)$
- Les coordonnées de  $f_2$  sont  $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
- Les coordonnées de  $f_3$  sont  $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

## Partie 2

3. —  $0 \in \mathcal{S}$  d'après 2.  
 — Soient  $f, g \in \mathcal{S}$ , et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$   
 $\lambda f + \mu g$  est dérivable 3 fois,

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)^{(3)} &= \lambda f^{(3)} + \mu g^{(3)} \\ &= \lambda f + \mu g \end{aligned}$$

donc  $\lambda f + \mu g \in \mathcal{S}$

Donc  $\mathcal{S}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$f'_1 = f_1$  donc  $f_1^{(3)} = f_1$  donc  $f_1 \in \mathcal{S}$



$$\begin{aligned}
f_2' &= -\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3 \\
f_2'' &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3\right) + \frac{\sqrt{3}}{2\left(-\frac{1}{2}f_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}f_2\right)} \\
&= -\frac{1}{2}f_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}f_3 \\
f_2^{(3)} &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}f_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_2\right) \\
&= f_2
\end{aligned}$$

De même,  $f_3^{(3)} = f_3$   $\mathcal{S}$  est stable par combinaison linéaire donc

$$G = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3) \subset \mathcal{S}$$

$$4. g' = f' + f'' + f^{(3)} = f + f' + f'' = g$$

5.

$$\begin{aligned}
y' - y &= 0 \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t, y(t) = \lambda e^t \\
&\iff y \in \text{Vect}(f_1)
\end{aligned}$$

$$6. (f_1, f_2) \text{ car } j \text{ et } j^2 \text{ sont toujours solutions de } 1 + z + z^2$$

$$7. \frac{\lambda}{3}f_1 \text{ est une solution particulière}$$

$$\frac{\lambda}{3}f_1 + \text{Vect}(f_2, f_3)$$

8.

$$\begin{aligned}
f \in \mathcal{S} &\implies f + f' + f'' \in \text{Vect}(f_1) \\
&\implies \exists \lambda, f + f' + f'' = \lambda f_1 \\
&\implies \exists (\lambda, a, b), f = \frac{\lambda}{3}f_1 + af_2 + bf_3 \in G
\end{aligned}$$

## Septième partie

### Exercise 10

We need to show that  $F \subset G$ . Let  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(nx) = T_n(\cos x)$$

where  $T_n$  is the  $n$ -th Tchebychev polynomial.

Thus,

$$(x \mapsto \cos(nx)) \in G$$

. In fact,

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}, \cos(nx) &= \Re(e^{inx}) \\
 &= \Re((e^{ix})^n) \\
 &= \Re((\cos x + i \sin x)^n) \\
 &= \Re\left(\sum_{k=0}^n i^k \sin^k x \cos^{n-k} x \binom{n}{k}\right) \\
 &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ even}}} \binom{n}{k} \cos^{n-k} x \sin^k x i^k \\
 &= \sum_{0 \leq p \leq \frac{n}{2}} \binom{n}{2p} \cos^{n-2p} x (\sin^2 x)^p (-1)^p \\
 &= \sum_{0 \leq p \leq \frac{n}{2}} (-1)^p \binom{n}{2p} \cos^{n-2p} x (1 - \cos^2 x)^p
 \end{aligned}$$

And,

$$T_n : u \mapsto \sum_{0 \leq p \leq \frac{n}{2}} (-1)^p \binom{n}{2p} u^{n-2p} (1 - u^2)^p$$

$$\begin{aligned}
 \forall x \in \mathbb{R}, \cos^n x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^n \\
 &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx} e^{-i(n-k)x} \\
 &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(2k-n)x} \\
 &= \Re\left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(2k-n)x}\right) \\
 &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(|2k - n|x)
 \end{aligned}$$

So,  $(x \mapsto \cos^n x) \in F$ .