Chapitre 11

Suite

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 8 mai 2022

TABLE DES MATIÈRES

I Modes de définition **2**

II Limites **4**

III Limites et inégalités **13**

IV Suites extraites **20**

V Suites récurrentes **25**

VI Comparaison de suites **28**

VII Suites complexes **33**

VIII Annexe **37**

Première partie

Modes de définition

Définition: Une suite peut être définie

- Explicitement On dispose pour tout $n \in \mathbb{N}$ de l'expression de u_n en fonction de n.
  $\boxed{\text{ex}}$ $\forall n \in \mathbb{N}_*, u_n = \dfrac{\ln(n)}{n} e^{-n}$
- Par récurrence On connait u_{n+1} en fonction de $u_0, u_1, \dots, u_n$
  $\boxed{\text{ex}}$ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$
- Implicitement $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est le seul nombre vérifiant une certaine propriété
  $\boxed{\text{ex}}$ u_n est le seul réel vérifiant $x^5 + nx - 1 = 0$

Deuxième partie

Limites

Définition: Soit u une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que
- u converge vers ℓ
- u_n tends vers ℓ quand n tends vers $+\infty$
- ℓ est une limite de u

si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \qquad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$
$$(\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon)$$

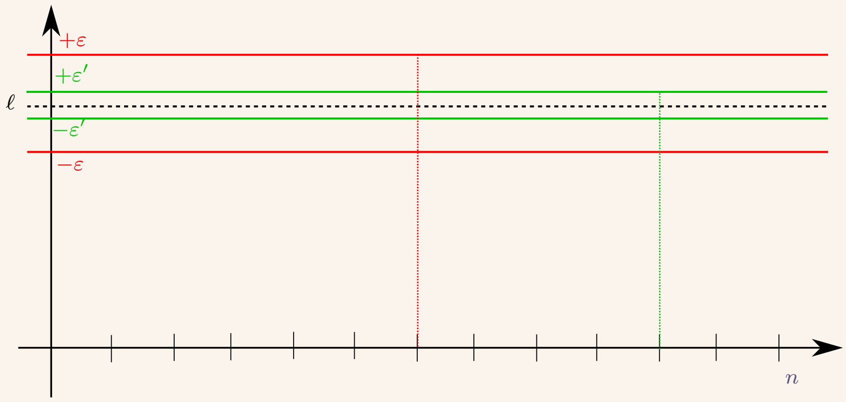


Figure 1 – Définition de la limite

Exemple:
Montrer que $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N, -\varepsilon \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$$

Analyse Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant N, -\varepsilon \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$.
En particulier, $\frac{1}{N} \leqslant \varepsilon$ donc $N \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$.

Synthèse On pose $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$ et $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Soit $n \geqslant N$.
$$\frac{1}{n} > 0 > -\varepsilon \text{ donc } \frac{1}{n} \geqslant -\varepsilon$$
$$n \geqslant N > \frac{1}{\varepsilon} \text{ donc } n \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$$

Définition: Soit u une suite réelle.
On dit que u tends vers $+\infty$ si
$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant M$$

On dit que u tends vers $-\infty$ si
$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \leqslant m$$

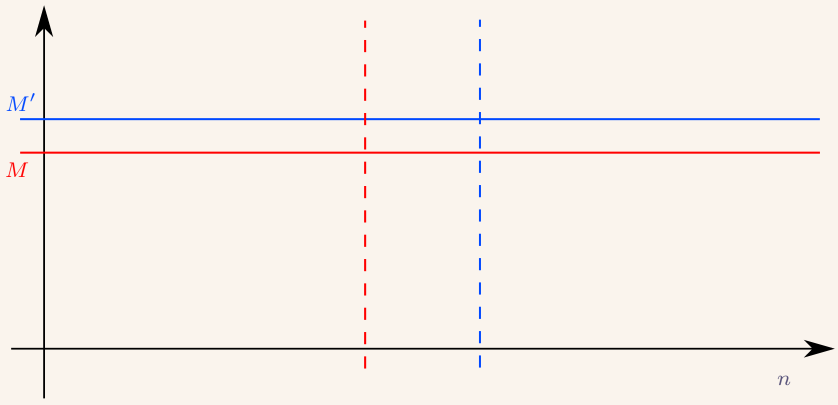


Figure 2 – Limites infinies

Exemple:
Montrons que $n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Soit $M \in \mathbb{R}$, on cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, n^2 \geqslant M$.

Analyse Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, n^2 \geqslant M$.
En particulier, $N^2 \geqslant M$ et dont $N \geqslant \sqrt{M}$ si $M \geqslant 0$

Synthèse On pose $N = \begin{cases} 0 & \text{si } M \leqslant 0 \\ \left\lfloor \sqrt{M} \right\rfloor + 1 & \text{sinon} \end{cases}$
Ainsi $N \in \mathbb{N}$ et $N^2 \geqslant M$. Soit $n \geqslant N$. On a $n^2 \geqslant N^2 \geqslant M$.

Définition: Une suite qui ne converge pas est dite divergente (on dit qu'elle diverge). C'est le cas si cette suite n'a pas de limite quand elle tends vers $\pm\infty$.

Théorème (Unicité de la limite (réelle))**:** Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (\ell_1, \ell_2) \in \overline{\mathbb{R}}^2$
Si $\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1 \\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2 \end{cases}$ alors $\ell_1 = \ell_2$

Preuve: **Cas 1** $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$.
On suppose $\begin{cases} \ell_1 \neq \ell_2 \\ u_n \to l_1 \\ u_n \to l_2 \end{cases}$
Sans perte de généralité, on peut supposer $\ell_1 < \ell_2$

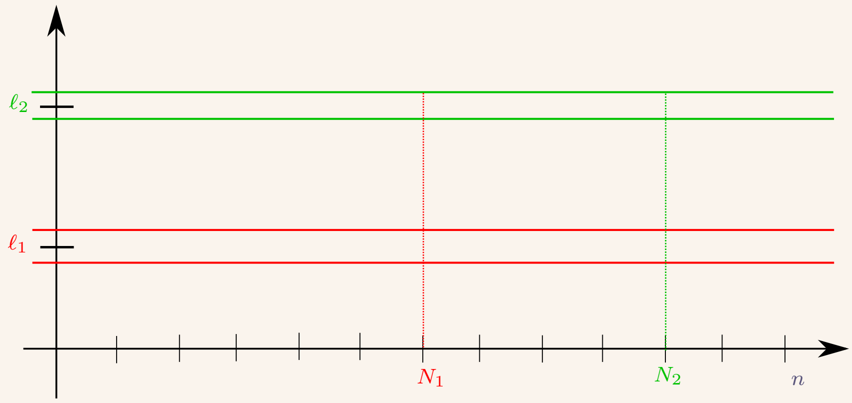


FIGURE 3 – Preuve unicité de la limite (cas 1)

On pose $\varepsilon = \dfrac{\ell_2 - \ell_1}{3} > 0$. On sait qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, \ell_1 - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + \varepsilon$$

et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, \ell_2 - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell_2 + \varepsilon$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. On a alors

$$u_n \leqslant \ell_1 + \varepsilon < \ell_2 + \varepsilon \leqslant u_n$$

une contradiction ($u_n < u_n$). En effet,

$$\begin{aligned} \ell_1 + \varepsilon < \ell_2 + \varepsilon &\iff 2\varepsilon < \ell_2 - \ell_1 \\ &\iff \frac{2}{3}(\ell_2 - \ell_1) < \ell_2 - \ell_1 \\ &\iff \frac{2}{3} < 1 \end{aligned}$$

Ainsi $\ell_1 = \ell_2$

Cas 2 $\ell_1 \in \mathbb{R}, \ell_2 = +\infty$

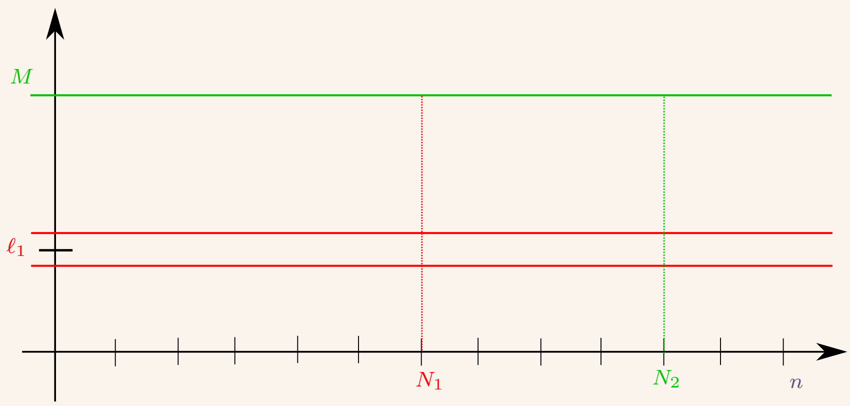


FIGURE 4 – Preuve unicité de la limite (cas 2)

$u_n \to \ell_1$ donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, \ell_1 - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + 1$$

$u_n \to +\infty$ donc il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, u_n \geqslant \ell_1 + 2$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Ainsi

$$u_n \geqslant \ell_1 + 2 > \ell_1 + 1 \geqslant u_n$$

une contradiction

De la même manière, on peut prouver pour $(\mathbb{R}, -\infty)$ et $(+\infty, -\infty)$

$\square$

REMARQUE:
Si u_n tends vers ℓ quand n tends vers $+\infty$, on écrit $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $\lim u_n = \ell$

Proposition: Toute suite convergente est bornée

Preuve:
On pose $\ell = \lim u_n \in \mathbb{R}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \ell - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell + 1$$

L'ensemble $\{u_n \mid n \leqslant N\}$ est fini, il a donc un plus grand élément et un plus petit élément. On pose

$$\begin{cases} M_1 = \max\{u_n \mid n \leqslant N\} \\ m_1 = \min\{u_n \mid n \leqslant N\} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} M = \max(\ell_1 + 1, M_1) \\ m = \min(\ell_1 - 1, m_1) \end{cases}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} m \leqslant m_1 \leqslant u_n \leqslant M_1 \leqslant M & \text{si } n \leqslant N \\ m \leqslant \ell_1 - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + 1 \leqslant M & \text{si } n > N \end{cases}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant u_n \leqslant M$$

□

Proposition: Soient $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On pose $\ell_1 = \lim u_n$ et $\ell_2 = \lim v_n$

1. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$ alors $u_n + v_n \to \ell_1 + \ell_2$
2. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = +\infty$ alors $u_n + v_n \to +\infty$
3. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = -\infty$ alors $u_n + v_n \to -\infty$
4. si $\ell_1 = \ell_2 = +\infty$, alors $u_n + v_n \to +\infty$
5. si $\ell_1 = \ell_2 = -\infty$, alors $u_n + v_n \to -\infty$

Preuve:

1. On suppose $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\ell = \ell_1 + \ell_2$.
   Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que

   $$\forall n \geqslant N, \ell - \varepsilon \leqslant u_n + v_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

   $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

   $$\forall n \geqslant N_1, \ell_1 - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

   Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

   $$\forall n \geqslant N_2, \ell_2 - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant v_n \leqslant \ell_2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

   On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geqslant N$ quelconque.

   $$n \geqslant N \geqslant N_1 \text{ donc } \ell_1 - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

   $$n \geqslant N \geqslant N_2 \text{ donc } \ell_2 - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant v_n \leqslant \ell_2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

   D'où, en additionnant les inégalités

   $$\ell - \varepsilon = \ell_1 + \ell_2 - \varepsilon \leqslant u_n + v_n \leqslant \ell_1 + \ell_2 + \varepsilon = \ell + \varepsilon$$

2. On suppose $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = +\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$ quelconque.
   Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

   $$\forall n \geqslant N_1, \ell_1 - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + 1$$

   et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

   $$\forall n \geqslant N_2, v_n \geqslant M - \ell_1 + 1$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geqslant N$ quelconque

$$\begin{cases} n \geqslant N_1 \text{ donc } u_n \geqslant \ell_1 - 1 \\ n \geqslant N_2 \text{ donc } v_n \geqslant M - \ell_1 + 1 \end{cases}$$

D'où, $u_n + v_n \geqslant M$

□

Proposition: Soient u et v deux suites réelles. On pose $\ell_1 = \lim u_n$ et $\ell_2 = \lim v_n$

1. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$, alors $u_n v_n \to \ell_1 \ell_2$
2. si $\begin{cases} \ell_1 \in \mathbb{R}_*^+, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \to +\infty \\ \ell_1 \in \mathbb{R}_*^-, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \to -\infty \end{cases}$
3. si $\begin{cases} \ell_1 \in \mathbb{R}_*^+, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \to -\infty \\ \ell_1 \in \mathbb{R}_*^-, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \to +\infty \end{cases}$
4. si $\begin{cases} \ell_1 = -\infty, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \to -\infty \\ \ell_1 = -\infty, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \to +\infty \\ \ell_1 = +\infty, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \to +\infty \end{cases}$

Preuve: 1. $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| &= |(u_n - \ell_1) v_n + \ell_1 (v_n - \ell_2)| \\ &\leqslant |v_n| \, |u_n - \ell_1| + |\ell_1| \, |v_n - \ell_2| \end{aligned}$$

Comme v_n converge, elle est bornée,

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leqslant M$$

donc

$$|u_n v_n - \ell_1 \ell_2| \leqslant M \times |u_n - \ell_1| + |\ell_1| \, |v_n - \ell_2|$$

Cas 1 On suppose $M \neq 0$ et $\ell_1 \neq 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, |u_n - \ell_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}$$

Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, |v_n - \ell_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2 \, |\ell_1|}$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$.

$$\forall n \geqslant N, |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M} \times M + |\ell_1| \times \frac{\varepsilon}{2 \, |\ell_1|} = \varepsilon$$

Cas 2 $M = 0$, $(\ell_1 \neq 0)$

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 0$

Donc

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n v_n = 0 \\ \ell_2 = 0 \\ \ell_1 \ell_2 = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n \end{cases}$$

Cas 3 $M \neq 0$ et $\ell_1 = 0$

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n v_n - 0| \leqslant M\,|u_n|$

$\frac{\varepsilon}{M} > 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$$

Donc,

$$\forall n \geqslant N, |u_n v_n| \leqslant M \times \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

Donc, $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = \ell_1 \ell_2$

2. $l_1 > 0$ et $l_2 = +\infty$

Soit $M \in \mathbb{R}_*^+$ On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, u_n v_n \geqslant M$$

On pose $\varepsilon = \frac{\ell_1}{2} > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, u_n \geqslant \ell_1 - \varepsilon = \frac{\ell_1}{2} > 0$$

et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, v_n \geqslant \frac{2M}{\ell_1} > 0$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Alors,

$$\forall n \geqslant N, u_n v_n \geqslant \frac{2M}{\ell_1} \times \frac{\ell_1}{2} = M$$

Donc $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

□

Proposition: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_*$.Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$
On pose $\ell = \lim u_n$ (si elle existe).

1. si $\ell = +\infty$ alors, $\frac{1}{u_n} \to 0$
2. si $\ell = 0$ alors, $\left|\frac{1}{u_n}\right| \to +\infty$

   ⚠ Si le signe de u_n ne se stabilise pas $\frac{1}{u_n}$ n'a pas de limite

   $\boxed{\text{ex}}$ $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$
3. si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\ell}$

Preuve: 3.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|\ell - u_n|}{|u_n|\,|\ell|}$$

On pose $\varepsilon = \frac{|\ell|}{2} > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

Si $\ell > 0$ alors

$$\forall n \geqslant N, u_n \geqslant \ell - \varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$$

et donc

$$\forall n \geqslant N, |u_n| \geqslant \frac{|\ell|}{2}$$

Si $\ell < 0$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \ell + \varepsilon = \frac{\ell}{2} < 0$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \geqslant \frac{|\ell|}{2}$$

Donc,

$$\forall n \geqslant N, \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| \leqslant \frac{|u_n| - \ell}{|\ell| \times \frac{|\ell|}{2}} = \frac{2\,|u_n - \ell|}{|\ell|^2}$$

Soit $\varepsilon' > 0$ quelconque. $\dfrac{\varepsilon' \,|\ell|^2}{2}$ donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N', |u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon'}{2} |\ell|^2$$

On pose N'', $\left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon'}{2} |\ell|^2 \times \dfrac{2}{|\ell|^2} = \varepsilon'$

$\square$

Troisième partie

Limites et inégalités

Proposition: Soient u et v deux suites réelles convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$$

Alors, $\ell_1 \leqslant \ell_2$

Preuve:
On suppose $\ell_1 < \ell_2$. On pose $\varepsilon = \dfrac{\ell_1 - \ell_2}{3} > 0$.
Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, u_n \geqslant \ell_1 - \varepsilon$$

Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, v_n \leqslant \ell_2 + \varepsilon$$

Ainsi,

$$\forall n \geqslant \max(N_1, N_2), \ell_1 - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant \ell_2 + \varepsilon$$

et donc

$$\ell_1 - \varepsilon \leqslant \ell_2 + \varepsilon$$

donc, $\ell_1 - \ell_2 \leqslant 2\varepsilon$
donc, $1 \leqslant \dfrac{2}{3}$ une contradiction □

Remarque:
Si $\begin{cases} u_n \to \ell_1 \in \mathbb{R} \\ v_n \to \ell_2 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n \end{cases}$
on n'a pas forcément $\ell_1 < \ell_2$
$\boxed{\text{ex}}$ $\forall n \in \mathbb{N}_*, \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ mais les deux convergent vers 0

Proposition: Soient u et v deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$$

1. si $u_n \to +\infty$,$v_n \to +\infty$
2. si $v_n \to -\infty$,$u_n \to -\infty$

Preuve: 1. On suppose $u_n \to +\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, u_n \geqslant M$$

Donc

$$\forall n \geqslant N, v_n \geqslant u_n \geqslant M$$

Donc $v_n \to +\infty$

□

Théorème (Théorème des "gendarmes")**:** Soient u, v et w trois suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

On suppose que u et w convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, v converge vers ℓ

Preuve:
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, w_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, u_n \leqslant \ell - \varepsilon$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. D'où,

$$\forall n \geqslant N, \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

Donc, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ □

Théorème (Limite monotone)**:**

1. Soit u une suite croissante majorée par M.
   Alors, u converge et $\lim u_n \leqslant M$
2. Soit u une suite croissante non majorée.
   Alors, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
3. Soit u une suite décroissante minorée par m.
   Alors, u converge et $\lim u_n \geqslant m$
4. Soit u une suite décroissante non minorée.
   Alors, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

Preuve:

1. $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing$ (u_0 y est) majorée (par hypothèse) par M.
   On pose $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(u_n)$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque
   $\ell - \varepsilon < \ell$ donc, $\exists N \in \mathbb{N}, u_N > \ell - \varepsilon$
   u est croissante donc
   $$\forall n \geqslant N, u_n \geqslant u_N > \ell - \varepsilon$$
   donc,
   $$\forall n \geqslant N, \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell \leqslant \ell + \varepsilon$$
   Donc, $u_n \to \ell$
2. Soit $M \in \mathbb{R}$. M n'est pas un majorant de l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ donc
   $$\exists N \in \mathbb{N}, u_N > M$$
   Comme u est croissante
   $$\forall n \geqslant N, u_n \geqslant u_N \geqslant M$$
   donc
   $$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

□

Exemple:

$$\begin{cases} u_0 = a \in]0,1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(1-u_n) \end{cases}$$

(suite logistique)

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f : x \mapsto x(1-x)$$

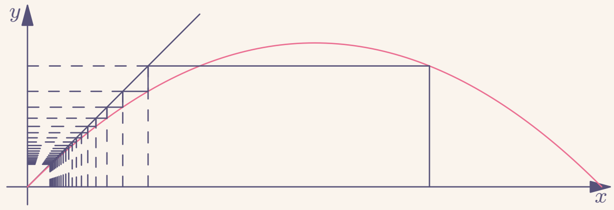


Figure 5 – Courbe logistique

— Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n(1-u_n) - u_n \\ &= -{u_n}^2 \leqslant 0 \end{aligned}$$

Donc, u est décroissante.

— Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$$

— $u_0 = a \in]0,1[$ donc $u_0 \in [0,1]$

— Soit $n \in N$. On suppose $u_n \in [0,1]$

$$\begin{cases} 0 \leqslant u_n \leqslant 1 \\ 0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1 \end{cases}$$

donc

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$

donc u minoré par 0

— D'après le théorème de la limite monotone, u converge. On pose ℓ sa limite :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$$

Alors, $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

$$u_n(1-u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell(1-\ell)$$

Par unicité de la limite,

$$\begin{aligned} &\ell = \ell(1-\ell) \\ \iff &1 = 1 - \ell \\ \iff &0 = -\ell \iff \ell = 0 \end{aligned}$$

Exemple:

$$\begin{cases} u_0 = a \in]0,1[\\ u_{n+1} = 2u_n(1-u_n) \end{cases}$$

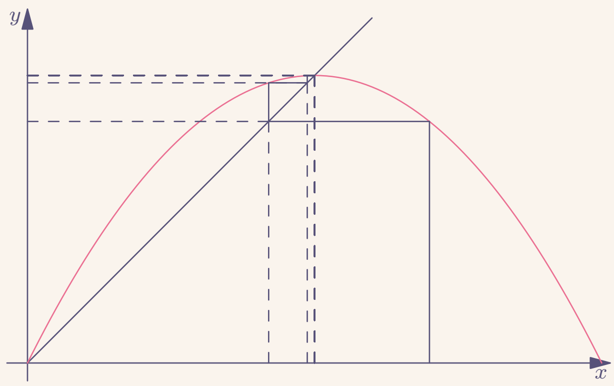


Figure 6 – Courbe logistique (2)

Exemple:

$$\begin{cases} u_0 = a \in]0,1[\\ u_{n+1} = 3u_n(1-u_n) \end{cases}$$

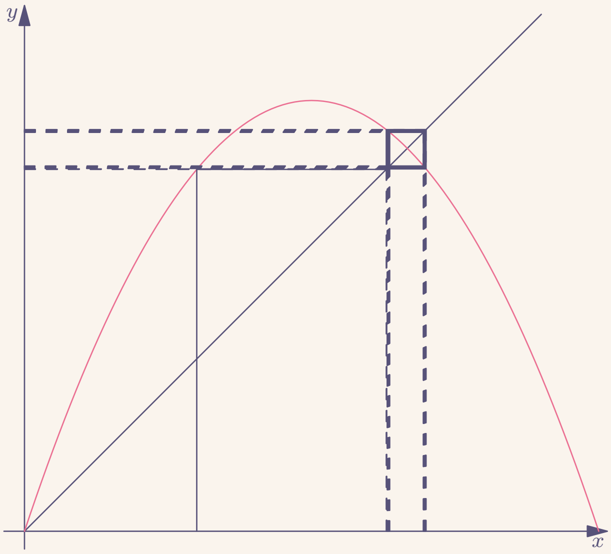


Figure 7 – Courbe logistique (3)

Exemple:

$$\begin{cases} u_0 = a \in]0,1[\\ u_{n+1} = 4u_n(1-u_n) \end{cases}$$

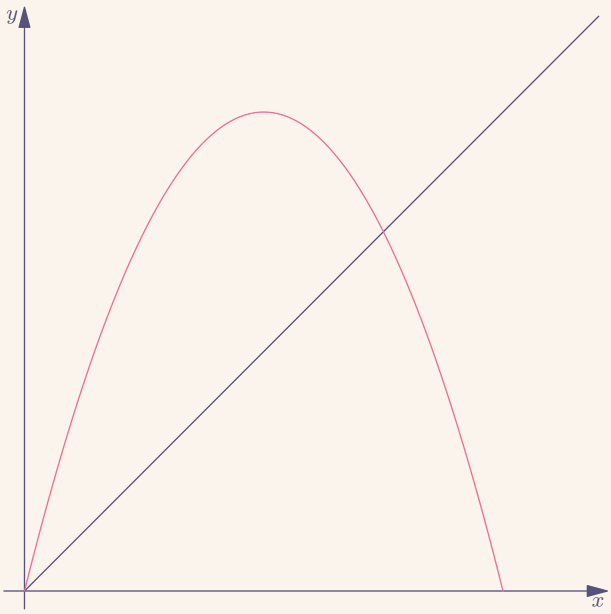


Figure 8 – Courbe logistique (4)

Définition: Soient u et v deux suites réelles. On dit que u et v sont adjacentes si
- u est croissante
- v est décroissante
- $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Théorème: Soient u et v deux suites adjacentes. Alors, u et v convergent vers la même limite.

Preuve:
$u - v$ est croissante donc,
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - v_n \leqslant 0$$
v décroissante donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant v_0$$
donc u majorée par v_0 donc u converge.
u est croissante donc,
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant u_0$$
donc v est minorée par u_0 donc v converge.
Donc, $u_n - v_n \to \lim(u_n) - \lim(v_n)$ Par unicité de la limite,
$$\begin{aligned} & \lim(u_n) - \lim(v_n) = 0 \\ \iff & \lim(u_n) = \lim(v_n) \end{aligned}$$
□

Théorème (Théorème des segments emboîtés)**:** Soit (I_n) une suite de segments (non vide) décroissante
$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$$
On note $\ell(I)$ la longueur d'un intervalle I.
Si $\ell(I_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

Preuve:
On pose $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = [a_n, b_n]$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant b_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$I_{n+1} \subset I_n$ donc $a_{n+1} \in I_{n+1} \subset I_n$
donc $a_{n+1} \geqslant a_n$. De même, $b_{n+1} \in I_{n+1}$ donc $b_{n+1} \in I_n$ donc $b_{n+1} \leqslant b_n$.
$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \ell(I_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
donc (a_n) et (b_n) sont adjacentes, elles convergent donc vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.
(a_n) croissante de limite ℓ donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant \ell$$
(b_n) est décroissante de limite ℓ donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n \geqslant \ell$$
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \ell \in I_n$ donc $\ell \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$.
Soit $\ell' \neq \ell$.

— Si $\ell' < \ell = \sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n)$ donc ℓ' ne majore pas (a_n)

$$\exists N \in \mathbb{N}, a_N > \ell'$$

donc $\ell' \notin I_N$ donc $\ell' \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$

— Si $\ell' > \ell = \inf_{n\in\mathbb{N}}(b_n)$ donc ℓ' ne minore pas (b_n)

$$\exists N' \in \mathbb{N}, b_{N'} < \ell'$$

et donc $\ell' \notin I_{N'}$ donc $\ell' \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$

$\square$

Quatrième partie

Suites extraites

Définition: Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.
On dit que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ est une **suite extraite** de u ou une **sous suite** de u. On dit alors que φ est une extractrice.

Exemple:
u_0 $\boxed{u_1}$ u_2 u_3 $\boxed{u_4}$ $\boxed{u_5}$ u_6 u_7 ...

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1 \\ \varphi(1) = 4 \\ \varphi(2) = 5 \end{cases}$$

Lemme: Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geqslant n$$

Preuve (par récurrence)*:*
— $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ donc $\varphi(0) \geqslant 0$
— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $(\varphi(n) \geqslant n$.
$n + 1 > n$ donc $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$ donc $\varphi(n+1) > n$
Comme $\varphi(n+1) \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) \geqslant n+1$

□

Proposition: Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante alors $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

Preuve: Cas 1 $\ell \in \mathbb{R}$
Soit $\varepsilon > 0$ on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Soit $n \geqslant N$ alors $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N$ donc

$$\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$

Donc, $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

Cas 2 $\ell = +\infty$
Soit $M \in \mathbb{R}$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, u_n \geqslant M$$

Soit $n \geqslant N$, on a $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N$ donc

$$u_{\varphi(n)} \geqslant M$$

Donc $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Cas 3 $\ell = -\infty$ similaire au Cas 2

□

Exemple:
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$

$$\begin{array}{ccc} u_{2n} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \\ \not\parallel \\ u_{2n+1} = -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1 \end{array}$$

donc u_n n'a pas de limite.

Proposition: Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont la même limite ℓ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Preuve: Cas 1 $\ell \in \mathbb{R}$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, |u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, |u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On pose $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$. Soit $n \geqslant N$.
Si n pair alors $n = 2k$ avec $k \geqslant N_1$ et donc, $|u_{2k} - \ell| \leqslant \varepsilon$, i.e. $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
Si n impair alors $n = 2k+1$ avec $k \geqslant N_2$ et donc, $|u_{2k+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$, i.e. $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
Donc,

$$\forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

□

Théorème (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**:** Soit (u_n) une suite réelle bornée. Alors, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ converge.

Preuve: Méthode 1 par dichotomie

Soitent $m, M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant u_n \leqslant M$$

On pose

$$A_1 = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid m \leqslant u_n \leqslant \frac{m+M}{2} \right\}$$
$$A_2 = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{m+M}{2} \leqslant u_n \leqslant M \right\}$$

Comme $A_1 \cup A_2 = \mathbb{N}$, A_1 et A_2 ne peuvent pas être finis tous les deux.
On pose

$$B_0 = \begin{cases} A_1 & \text{si } A_1 \text{ est infini} \\ A_2 & \text{sinon} \end{cases}$$

B_0 est infini donc non vide. On pose $\varphi(0) = \min(B_0)$
On pose aussi

$$m_0 = \begin{cases} m & \text{si } B_0 = A_1 \\ \dfrac{m+M}{2} & \text{si } B_0 = A_2 \end{cases}$$

et

$$M_0 = \begin{cases} \dfrac{m+M}{2} & \text{si } B_0 = A_1 \\ M & \text{si } B_0 = A_2 \end{cases}$$

Ainsi, $B_0 = \{n \in \mathbb{N} \mid m_0 \leqslant u_n \leqslant M_0\}$. On pose

$$B_1' = \left\{n \in B_0 \mid n > \varphi(0) \text{ et } m_0 \leqslant u_n \leqslant \frac{M_0 + m_0}{2}\right\}$$
$$B_2' = \left\{n \in B_0 \mid n > \varphi(0) \text{ et } \frac{m_0 + M_0}{2} \leqslant u_n \leqslant M_0\right\}$$

$$B_1' \cup B_2' = \{n \in B \mid n > \varphi(0)\} = B_0 \setminus \{\varphi(0)\}$$

$B_0 \setminus \{\varphi(0)\}$ est infini donc B_1' ou B_2' est infini. On pose

$$B_1 = \begin{cases} B_1' & \text{si } B_1' \text{ est infini} \\ B_2' & \text{sinon} \end{cases}$$

B_1 est infini donc non vide et admet un plus petit élément :

$$\varphi(1) = \min(B_1)$$

$\varphi(1) \in B_1$ donc $\varphi(1) > \varphi(0)$
On pose

$$m_1 = \begin{cases} m_0 & \text{si } B_1 = B_1' \\ \dfrac{m_0 + M_0}{2} & \text{si } B_1 = B_2' \end{cases}$$
$$M_1 = \begin{cases} \dfrac{m_0 + M_0}{2} & \text{si } B_1 = B_1' \\ M_0 & \text{si } B_1 = B_2' \end{cases}$$

On construit une suite décroissante (B_n), deux suites de réels (m_n) et (M_n) et une suite d'entiers $(\varphi(n))$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} B_{n+1} = \{k \in B_n \mid k > \varphi(n) \text{ et } m_{n+1} \leqslant u_k \leqslant M_{n+1}\} \\ \varphi(n+1) = \min(B_{n+1}) > \varphi(n) \\ M_{n+1} - m_{n+1} = \dfrac{1}{2}(M_n - m_n) \end{cases}$$

La suite (m_n) est croissante, (M_n) est décroissante et

$$\lim_{n \to +\infty} M_n - m_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (M_0 - m_0) = 0$$

Donc, (m_n) et (M_n) sont adjacentes donc convergentes avec la même limite $\ell \in \mathbb{R}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, m_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant M_n$$

Par encadrement, $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ □

Méthode 2 On pose $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall k > n, u_n > u_k\}$

Cas 1 On suppose A infini.

On pose $\varphi(0) = \min(A)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n)$ soient déjà construits. On pose

$$\varphi(n+1) = \min(A \setminus \{\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n)\})$$

Soit $n \in \mathbb{N}_*$

$$\varphi(n+1) \in A \setminus \{\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n)\}$$

donc
$$\varphi(n+1) \in A \setminus \{\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n-1)\}$$
donc
$$\varphi(n+1) \geqslant \varphi(n)$$
Or, par définition, $\varphi(n+1) \neq \varphi(n)$ donc $\varphi(n+1) > \varphi(n)$
On a aussi $\varphi(1) \in A$ donc $\varphi(1) \geqslant \varphi(0)$ Or, on sait que $\varphi(1) \neq \varphi(0)$. Donc, $\varphi(1) > \varphi(0)$ Soit $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \in A$ donc
$$\forall k > \varphi(n), u_k < u_{\varphi(n)}$$
or $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ donc $u_{\varphi(n+1)} < u_{\varphi(n)}$.
La sous suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ est décroissante et minorée (car u est minorée) donc elle converge

Cas 2 On suppose A fini. Soit $N = \max(A)$,
$$\forall n > N, n \notin A$$
Donc $\forall n > N, \exists k > n, u_n \leqslant u_k$.
Par exemple, en posant $\varphi(0) = N+1$, on a
$$A_1 = \{k > N+1 \mid u_{N+1} \leqslant u_k\} \neq \varnothing$$
On pose $\varphi(1) = \min(A_1)$ donc $\begin{cases} \varphi(1) > N+1 = \varphi(0) \\ u_{\varphi(0)} < u_{\varphi(1)} \end{cases}$
Avec $n = \varphi(1)$
$$\exists k > n, u_{\varphi(1)} \leqslant u_k$$
Donc, $A_2 = \{k \in \mathbb{N} \mid k > \varphi(1) \text{ et } u_{\varphi 1)} \leqslant u_k\} \neq \varnothing$
On pose $\varphi(2) = \min(A_2)$. On a alors $\varphi(2) > \varphi(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\varphi(n)$ déjà construit avec $\varphi(n) > N$. On sait alors que
$$A_{n+1} = \{k \in \mathbb{N} \mid k > \varphi(n) \text{ et } u_{\varphi(n)} \leqslant u_k\} \neq \varnothing$$
On pose $\varphi(n+1) = \min(A_{n+1)}$. Donc,
$$\begin{cases} \varphi(n+1) > \varphi(n) > N \\ u_{\varphi(n)} \leqslant u_{\varphi(n+1)} \end{cases}$$
On vient de construire une sous suite croissante majorée (car u est majorée) donc convergente.

□

Cinquième partie

Suites récurrentes

Définition: On dit que u est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants s'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

L'équation caractéristique associée est

$$(C) : z^2 = az + b \text{ avec } z \in \mathbb{C}$$

Proposition: Avec les notations précédentes,

1. Si (C) a 2 racines simples $r_1 \neq r_2$ alors
$$\exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A{r_1}^n + B{r_2}^n$$
2. Si (C) a une racine double $r \in \mathbb{C}$ alors
$$\exists (A,B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An+B)r^n$$

Preuve (Récurrence double)*:*

□

Proposition: avec les notations précédentes et avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

1. Si (C) a deux racines simples $r_1 \neq r_2$ alors
$$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A{r_1}^n + B{r_2}^n$$
2. Si (C) a une racine simple $r \in \mathbb{R}$ alors
$$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An+B)r^n$$
3. Si (C) a deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_*^+$ et $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors
$$\exists (A,B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$$

□

Remarque:
Étude de $u_{n+1} = f(u_n)$

1. On choisit rapidement la fonction f (au moins le tableau de variation)

1'. (optionnel) on représente graphiquement la fonction f et la droite d'équation $y = x$ pour conjecturer sa limite

2. On utilise le tableau de variation pour vérifier que (u_n) est bien définie par récurrence
$$P(n) : \text{"}u_n \text{ existe et } u_n \in \mathscr{D}_f\text{"}$$
3. On étudie le signe de $f(x) - x$
4. On cherche les intervalles stables par f :
$$f(I) \subset I$$
les plus petits possible (ça permet de montrer que la suite est majorée (minorée) en particulier ceux sur lesquels $f(x) - x$ ne change pas de signe

4'. Donc on utilise le théorème de la limite monotone

4". Sinon, on essaie l'inégalité (voir théorème) des accroissements finis :
Soit ℓ un point fixe de f : $f(\ell) = \ell$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| = M\,|u_n - \ell|$$

où M est un majorant de $|f|$
Si $0 \leqslant M \leqslant 1$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leqslant M^n\,|u_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

5. si (u_n) a une limite et si f continue alors $\lim(u_n)$ est une point fixe de f

Exemple: 1.

$$\begin{cases} u_{n+1} = \cos(u_n) \\ u_0 \in \left]0,1\right[\end{cases}$$

x	0	1	$\frac{\pi}{2}$
f	1	$\searrow$	0

On pose $g : x \mapsto \cos(x) - x$ dérivable et
$\forall x \in [0,1]\,, g'(x) = -\sin(x) - 1 \leqslant 0$

x	0	α	1
g	1 $\searrow$	0 $\searrow$	$g(1) < 0$

x	0		α		1
f	1	$\searrow$	0	$\searrow$	
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	

$$\begin{aligned} \forall x \in [0,1]\,, \left|f'(x)\right| &= |-\sin(x)| \\ &= \sin(x) \leqslant \sin(1) < 1 \end{aligned}$$

$$\forall n, |u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \sin(1)\,|u_n - \alpha|$$

donc

$$\forall n, |u_n - \alpha| \leqslant \underbrace{\sin^n(1)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} |u_0 - \alpha|$$

Donc, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$

Sixième partie

Comparaison de suites

Définition: Soient u et v deux suites réelles. On dit que u est <u>dominée</u> par v si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant M\,|v_n|$$

Dans ce cas, on note $u = O(v)$ ou $u_n = O(v_n)$ et on dit que "u est un grand o de v"

Exemple:
En informatique, on dit qu'un algorithme a une <u>complexité linéaire</u> si son temps d'éxécution est un $O(n)$ Par exemple, on calcule a^n

— Approche naïve Complexité linéaire $O(n)$

$p \leftarrow 1$
for $i \in [\![0, n-1]\!]$ **do**
    $p \leftarrow p \times a$
end for
return p

— Exponentiation rapide
On écrit n en binaire :

$$\begin{aligned} n &= \overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}^{(2)} \\ &= \sum_{i=0}^{k} a_i 2^i \end{aligned}$$

avec $(a_i) \in \{0,1\}^{k+1}$

$$\begin{aligned} a^n &= a^{\sum_{i=0}^{k} a_i 2^i} \\ &= \prod_{i=0}^{k} a^{a_i 2^i} \end{aligned}$$

$s \leftarrow 0$
$p \leftarrow a$
for $i \in [\![0, \log_2(n)]\!]$ **do**
    $p \leftarrow p \times p$
    if $a[i] = 1$ **then**
        $s \leftarrow s + p$
    end if
end for
return s

Compléxité logarithmique $O(\log_2(n))$

Proposition: O est une relation rélféctive et transitive.

Preuve: — Soit u une suite. On pose $M = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M\,|u_n|$$

Donc $u = O(u)$.

— Soient u, v, w trois suites telles que

$$\begin{cases} u = O(v) \\ v = O(w) \end{cases}$$

Soient $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ et $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{cases} \forall n \geqslant N_1, |u_n| \leqslant M_1 |v_n| \\ \forall n \geqslant N_2, |v_n| \leqslant M_2 |w_n| \end{cases}$$

Nécéssairement, $M_1 \geqslant 0$ et $M_2 \geqslant 0$.
Soit $N = \max(N_1, N_2)$.

$$\forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant M_1 |v_n| \leqslant M_1 M_2 |w_n|$$

Donc $u = O(w)$

□

Définition: Soient u et v deux suites. On dit que u est négligeable devant v si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$$

Dans ce cas, on note $u = o(v)$ ou $u_n = o(v_n)$ ou on le lit "u est un petit o de v"

Proposition: o est une relation transitive, non-réfléctive

Preuve:

— Soient u, v et w trois suites telles que

$$\begin{cases} u = o(v) \\ v = o(w) \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, |u_n| \leqslant \sqrt{\varepsilon} |v_n|$$

Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, |v_n| \leqslant \sqrt{\varepsilon} |w_n|$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$, alors

$$\forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \sqrt{\varepsilon} |v_n| \leqslant \underbrace{\sqrt{\varepsilon} \times \sqrt{\varepsilon}}_{\varepsilon} |w_n|$$

donc $u = o(w)$

— Soit u une suite tel qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, u_n > 0$$

On suppose que $u = o(u)$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \varepsilon |u_n|$$

On pose $\varepsilon = \frac{1}{2}$ alors

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \frac{1}{2} |u_n|$$

une contradiction

□

Proposition: Soient u et v deux suites.
- $o(u) + o(u) = o(u)$
- $v \times o(u) = o(uv)$
- $o(u) \times o(v) = o(uv)$
- $o(o(u)) = o(u)$

□

Définition: Soient u et v deux suites. On dit que u et v sont <u>équivalentes</u> si

$$u = v + o(v)$$

i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - v_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$$

Dans ce cas, on le note $u \sim v$

Proposition: $\sim$ est une relation d'équivalence □

Proposition: Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang

1. $u = o(v) \iff \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ bornée
2. $u = o(v) \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
3. $u \sim v \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

□

Proposition (Suites de références)**:**
1. $\ln^\alpha(n) = o(n^\beta)$ avec $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$
2. $n^\beta = o(a^n)$ avec $\beta > 0$ et $a > 1$
3. $a^n = o(n!)$ avec $a > 1$
4. $n! = o(n^n)$

Lemme (Exercice 10 du TD)**:** Soit $u \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^{\mathbb{N}}$
Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell < 1$ avec $\ell \in \mathbb{R}$,
alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Preuve (de la proposition)*:*
1. par croissance comparée

2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{n^\beta}{a^n}$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^\beta \times \frac{1}{a}\\ &= \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{a} < 1\end{aligned}$$

Donc, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

3. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{a^n}{n!}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$$

donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

4. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} &= (n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\\ &= e^{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}\\ &= e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}\\ &= e^{n(-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))}\\ &= e^{-1+o(1)}\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1} < 1\end{aligned}$$

donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

□

Septième partie

Suites complexes

Définition: Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que (u_n) converge vers ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

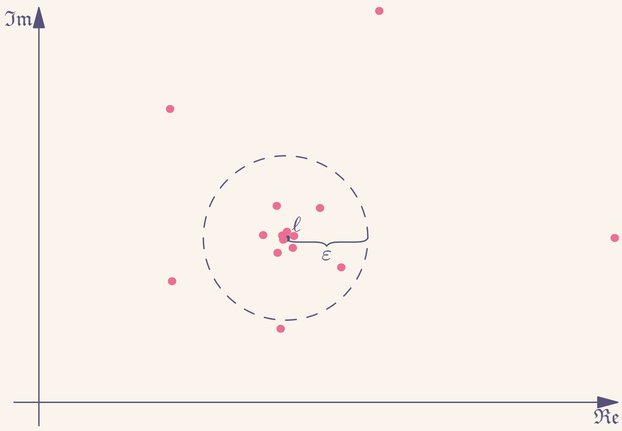


Figure 9 – Suite complexe convergente

Proposition: Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux limites de u alors $\ell_1 = \ell_2$

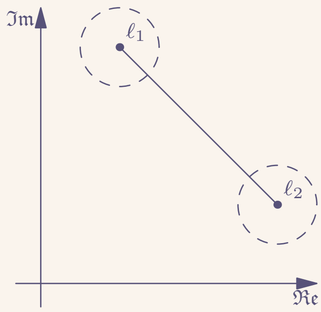


Figure 10 – Unicité de la limite de suites complexes

□

Proposition: Les limites de somme, produit, quotient de suites complexes respectent les mêmes lois que pour les suites réelles. □

Théorème: Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathfrak{Re}(\ell) \\ \mathfrak{Im}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathfrak{Im}(\ell) \end{cases}$$

Preuve: $\implies$ On suppose $u_n \to \ell$.
Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Or,

$$\forall n \geqslant N, \begin{cases} \mathfrak{Re}(u_n) - \mathfrak{Re}(\ell) = \mathfrak{Re}(u_n - \ell) \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \\ \mathfrak{Im}(u_n) - \mathfrak{Im}(\ell) = \mathfrak{Im}(u_n - \ell) \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \mathfrak{Re}(u_n) \to \mathfrak{Re}(\ell) \\ \mathfrak{Im}(u_n) \to \mathfrak{Im}(\ell) \end{cases}$$

$\impliedby$ On suppose $\begin{cases} \mathfrak{Re}(u_n) \to \mathfrak{Re}(\ell) \\ \mathfrak{Im}(u_n) \to \mathfrak{Im}(\ell) \end{cases}$

Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \mathfrak{Re}(u_n) + i\mathfrak{Im}(u_n) \to \mathfrak{Re}(\ell) + i\mathfrak{Im}(\ell) = \ell$$

□

Proposition: Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.
Si $u_n \to \ell$ alors $|u_n| \to |\ell|$

Preuve:
On suppose $u_n \to \ell$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = \sqrt{\mathfrak{Re}^2(u_n) + \mathfrak{Im}^2(u_n)} \to \sqrt{\mathfrak{Re}^2(\ell) + \mathfrak{Im}^2(\ell)} = |\ell|$$

□

Proposition: Tous les résultats (sauf ceux avec des limites infinies!) concernant les suites extraites sont encore valables dans $\mathbb{C}$ y compris le théorème de Bolzano-Weierstrass (mais avec une autre preuve).

Définition: Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est <u>bornée</u> s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$$

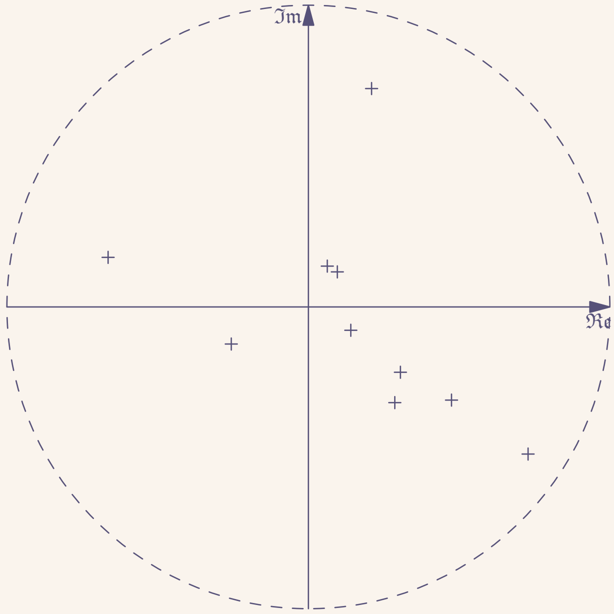


Figure 11 – Suite complexe bornée

Théorème (Bolzano Weierstrass)**:** Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ bornée. Il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ converge.

Preuve:
Soit $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, |\mathfrak{Re}(u_n)| \leqslant |u_n| \leqslant M$ Donc $(\mathfrak{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Donc, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(\mathfrak{Re}\left(u_{\varphi(n)}\right)\right)$ converge.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\mathfrak{Im}\left(u_{\varphi(n)}\right)\right| \leqslant \left|u_{\varphi(n)}\right| \leqslant M$$

donc $\left(\mathfrak{Im}(u_{\varphi(n)}\right)$ est bornée. Soit $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(\mathfrak{Im}\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)\right)$ converge. Or, $\left(\mathfrak{Re}\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)\right)$ est une sous suite de la suite convergente $\left(\mathfrak{Re}\left(u_{\varphi(n)}\right)\right)$ donc $\left(\mathfrak{Re}\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)\right)$ converge.
Donc, $\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)$ converge.
Comme $\varphi \circ \psi$ est strictement croissante, $\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)$ est une sous suite de (u_n) $\square$

Huitième partie

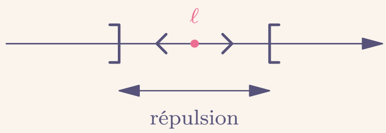
Annexe

> **Proposition:** Soit $f : I \to I$ continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
>
> $$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
>
> **Si** (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$
> alors $f(\ell) = \ell$ i.e. (ℓ est un point fixe de f)

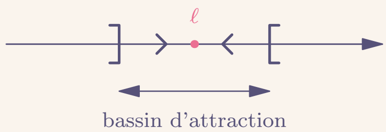
> *Preuve:*
> On suppose que (u_n) converge vers ℓ.
> $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ car (u_{n+1}) est une sous suite de (u_n).
>
> $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$
>
> Comme f est continue alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$. Par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$ $\square$

Remarque:
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
Soit $\ell \in \mathbb{R}$ un point fixe de f. Donc, $f(\ell) = \ell$.

$|f'(\ell)| > 1$:



$|f'(\ell)| < 1$:



Par contre, si $|f'(\ell)| = 1$, on ne sait pas.

Remarque (Suite arithético-géométrique):

$$(*) : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b = f(u_n)$$

Méthode 1

- On cherche v une suite constante solution de $(*)$:

  $$\exists C \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, v_n = C$$

  donc

  $$\forall n \in \mathbb{N}, C = aC + b = f(C)$$

  Si $a \neq 1$: $C = \dfrac{b}{1-a}$

— Soit u qui vérifie $(*)$. On pose $w = u - v$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} &= u_{n+1} - v_{n+1}\\ &= au_n + b - av_n - b\\ &= a(u_n - v_n)\\ &= aw_n\end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = aw_n + 0$: équation homogène associée à $(*)$
(w_n) est géométrique donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 a^n$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = w_0 a^n + \frac{b}{1-a}$$

Méthode 2

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\\ (u_n) &\longmapsto (u_{n+1} - au_n)\end{aligned}$$

φ morphisme de groupes additifs

$$\varphi(u) = (b) \iff u = v + w \text{ avec } w \in \mathrm{Ker}(\varphi)$$

$$\begin{aligned}w \in \mathrm{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(w) = 0\\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - aw_n = 0\\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = aw_n\end{aligned}$$