2021-2022

Mathématiques
MP2I

Hugo Salou

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE

0

LOGIQUE (RUDIMENTS)

Définition: Un proposition est un énoncé qui est soit vrai, soit faux.

EXEMPLE:

$$\left.\begin{array}{l} A : \text{“}B \text{ est vraie ”} \\ B : \text{“}A \text{ est fausse ”} \end{array}\right\} \text{Le système } \{A, B\} \text{ est une auto-contradiction}$$

Définition: Démontrer une proposition revient à prouver qu'elle est vraie.

1 Algèbre de Boole

Définition: Soient A et B deux propositions. La proposition A et B est définie par la table de vérité suivante :

A	B	A et B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Définition: Soient A et B deux propositions. La proposition A ou B est définie par la table de vérité suivante :

A	B	A ou B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Définition: Soit A une proposition. La négation de A, notée non(A) est définie par :

A	non(A)
V	F
F	V

Définition: Deux propositions A et B sont équivalentes si elles ont la même table de vérité. Dans ce cas, on note $A \iff B$.

Proposition: Soient A, B et C trois propositions.

1. $(A \text{ et } B) \text{ et } C \iff A \text{ et } (B \text{ et } C)$
2. $A \text{ et } A \iff A$
3. $A \text{ et } B \iff B \text{ et } A$
4. $(A \text{ ou } B) \text{ ou } C \iff A \text{ ou } (B \text{ ou } C)$
5. $A \text{ ou } A \iff A$
6. $A \text{ ou } B \iff B \text{ ou } A$
7. $\text{non } (\text{ non } (A)) \iff A$
8. $A \text{ et } (B \text{ ou } C) \iff A \text{ et } B \text{ ou } A \text{ et } C$
9. $A \text{ ou } (B \text{ et } C) \iff (A \text{ ou } B) \text{ et } (A \text{ et } C)$
10. $\text{non } (A \text{ et } B) \iff \text{non } (A) \text{ ou } \text{non } (B)$
11. $\text{non } (A \text{ ou } B) \iff \text{non } (A) \text{ et } \text{non } (B)$

Preuve:
8.

A	B	C	B ou C	A et $(B$ ou $C)$	A et B	A et C	$(A$ et $B)$ ou $(A$ et $C)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

10.

A	B	A et B	non (A et B)	non (A)	non (B)	non (A) ou non (B)
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

□

Définition: Soient A et B deux propositions. La proposition $\underline{A \implies B}$ (A implique B) est définie par :

A	B	$A \implies B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Définition: Soient A et B deux propositions telles que $A \implies B$ est vraie. On dit que A est une condition suffisante pour que B soit vraie. On dit que B est une condition nécessaire pour que A soit vraie.

Proposition (Contraposée)**:** Soient A et B deux propositions.

$$(A \implies B) \iff (\text{ non } B \implies \text{ non } A)$$

Preuve:

A	B	non A	non B	non $B \implies$ non A	$A \implies B$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

□

Proposition: Soient A et B deux propositions.

$$(A \implies B) \iff \big((A \implies B) \text{ et } (B \implies A)\big)$$

Preuve:

A	B	$A \iff B$	$A \implies B$	$B \implies A$	$(A \implies B)$ et $(B \implies A)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

□

Proposition: Soient A et B deux propositions.

$$(A \implies B) \iff (B \text{ ou } \text{ non } (A))$$

Preuve:
On obtient par contraposée

$$\text{non } (A \implies B) \iff (A \text{ et } \text{ non } (B))$$

donc

$$\begin{aligned}(A \implies B) &\iff \text{non } (A \text{ et } \text{ non } (B))\\ &\iff \text{non } (A) \text{ ou } \text{ non } (\text{ non } (B))\\ &\iff \text{non } (A) \text{ ou } B\\ &\iff B \text{ ou } \text{ non } (A)\end{aligned}$$

□

2 Déduction naturelle

Dans ce paragraphe, A et B sont deux propositions.

$\boxed{A \text{ et } B}$

Comment démontrer A et B ?
- On démontre A
- On démontre B

Comment utiliser l'hypothèse A et B ?
On utilise A ou on utilise B.

$\boxed{A \text{ ou } B}$

Comment démontrer A ou B ?
On essaie de démontrer A. Si on y arrive, alors on a prouvé A ou B sinon on démontre B.

Variante
On suppose A faux. On démontre B.

Comment utiliser l'hypothèse A ou B ?
On fait une disjonction des cas :

- Cas 1 : On suppose A
- Cas 2 : On suppose B

$\boxed{A \implies B}$

Comment démontrer $A \implies B$?
On suppose A. On démontre B.

Comment utiliser l'hypothèse $A \implies B$?
On démontre A. On utilise B.

3 Raisonement par l'absurde

Situation :

Soient A et B deux propositions.
On veut montrer $A \implies B$.

On suppose $\underline{A}$. On suppose aussi $\underline{B \text{ faux}}$.
On cherche à faire apparaître une contradiction ($\lightning$)

4 Prédicat

Définition: Un <u>prédicat</u> $P(x)$ est un énoncé dont la valeur de vérité dépend de l'objet x, élément d'un ensemble E.
Le <u>domaine de validité</u> de P est l'ensemble des valeurs x de E pour lequelles $P(x)$ est vraie :

$$\{x \in E \mid P(x)\}$$

Remarque (Notation):
On écrit

$$\forall x \in E, P(x)$$

pour dire que $P(x)$ est vraie pour tous les x de E.

On écrit

$$\exists x \in E, P(x)$$

pour dire qu'il existe (au moints) un élément $x \in E$ pour lequels $P(x)$ est vraie.

On écrit

$$\exists ! x \in E, P(x)$$

pour dire qu'il existe un <u>unique</u> élément $x \in E$ tel que $P(x)$ est vraie.

$\boxed{\forall x \in E, P(x)}$

<u>Comment démontrer $\forall x \in E, P(x)$?</u>
Soit $x \in E$ (fixé quelconque). Montrons $P(x)$.

<u>Comment utiliser $\forall x \in E, P(x)$?</u>
On choisit (spécialise) une ou plusieurs (voir toutes) valeurs de x et on exploite $P(x)$.

Exemple:
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a + b \times 2^n + c \times 3^n$$

Montrons que $a = b = c = 0$.
On sait que $(S) : \begin{cases} a + b + c = 0 & (n = 0) \\ a + 2b + 3c = 0 & (n = 1) \\ a + 4b + 9c = 0 & (n = 2) \end{cases}$

$$(S) \iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ 3b + 8c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

CHAPITRE

1 CALCULS ALGÉBRIQUES

1 Sommes

Remarque (Notation):
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Pour $p \leqslant q \in \mathbb{N}$, on note

$$\sum_{k=p}^{q} u_k$$

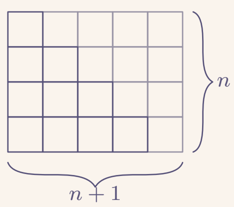
le nombre $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q$.

Par convention,

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = 0 \qquad \text{si } q < p.$$

Exemple:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$



Proposition: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}$$

Preuve:
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_{n-k} &= u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_0 \\ &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_k\end{aligned}$$

$\square$

Proposition: Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, $(p,q,r,s) \in \mathbb{N}^4$ et $\varphi : [\![p,q]\!] \to [\![r,s]\!]$ une bijection (i.e. $\forall y \in [\![r,s]\!], \exists! x \in [\![p,q]\!], \varphi(x) = y$).

Alors,

$$\sum_{k=r}^{s} u_k = \sum_{k=p}^{q} u_{\varphi(k)}.$$

Preuve:

$$\sum_{k=p}^{q} u_{\varphi(k)} = u_{\varphi(p)} + u_{\varphi(p+1)} + \cdots + u_{\varphi(q)}$$

$$\sum_{k=r}^{s} u_k = u_r + u_{r+1} + \cdots + u_s$$

Comme φ est bijective, chaque terme u_k avec $k \in [\![r,s]\!]$ apparaît une fois et une seule fois dans la somme

$$u_{\varphi(p)} + u_{\varphi(p+1)} + \cdots + u_{\varphi(q)}.$$

Ainsi, les deux sommes sont identiques. $\square$

Exemple:
On pose

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_k = \frac{1}{k-4}.$$

On pose également $\varphi : [\![1,5]\!] \to [\![-1,3]\!]$: une bijection.

Alors,

$$\sum_{k=-1}^{3} \frac{1}{k-4} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5} u_{\varphi(k)} &= \frac{1}{\varphi(1)-4} + \frac{1}{\varphi(2)-4} + \frac{1}{\varphi(3)-4} + \frac{1}{\varphi(4)-4} + \frac{1}{\varphi(5)-4} \\ &= -\frac{1}{5} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1.\end{aligned}$$

EXEMPLE:
Soit φ la bijection définie par

$$\varphi : [\![1,5]\!] \longrightarrow [\![1,5]\!]$$
$$k \longmapsto \begin{cases} 2 & \text{si } k=1 \\ 3 & \text{si } k=2 \\ 1 & \text{si } k=3 \\ 4 & \text{si } k=4 \\ 5 & \text{si } k=5 \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{5} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$$

$$\sum_{k=1}^{5} u_{\varphi(k)} = u_2 + u_3 + u_1 + u_4 + u_5$$

Proposition (téléscopage)**:** Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

$$\forall p \leqslant q \in \mathbb{N}, \sum_{k=p}^{q} (u_{k+1} - u_k) = u_{q+1} - u_p.$$

Preuve: <u>MÉTHODE1</u> Soient $p \leqslant q$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^{q} (u_{k+1} - u_k) &= \cancel{u_{p+1}} - u_p + \cancel{u_{p+2}} - \cancel{u_{p+1}} \cdots + u_{q+1} - \cancel{u_q} \\ &= u_{q+1} - u_p \end{aligned}$$

<u>MÉTHODE2</u> Soient $p \leqslant q$.

$$\sum_{k=p}^{q} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=p}^{q} u_{k+1} - \sum_{k=p}^{q} u_k$$

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} [\![p,q]\!] & \longrightarrow & [\![p+1,q+1]\!] \\ k & \longmapsto & k+1 \end{array}$. φ est bijective donc

$$\sum_{k=p}^{q} u_{k+1} = \sum_{k=p}^{q} u_{\varphi(k)} = \sum_{k=p+1}^{q+1} u_k.$$

D'où,

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^{q} (u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=p+1}^{q+1} u_k - \sum_{k=p}^{q} u_k \\ &= \left(u_{q+1} + \sum_{k=p+1}^{q} u_k \right) - \left(u_p + \sum_{k=p+1}^{q} u_k \right) \\ &= u_{q+1} - u_p \end{aligned}$$

$\square$

Remarque (Analogie avec le calcul intégral):

$$\int_a^b f'(x)\ \mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

Exemple:
Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![1, n]\!]\,, \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{(1+k)-k}{k(k+1)}\\ &= \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)}\\ &= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\end{aligned}$$

et, par téléscopage, on obtient donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}\\ &= 1 - \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Par contre, on n'a pas de formule simple pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ (mais on sait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$).

Exemple (à connaître):
Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On cherche $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, u_{k+1} - u_k = k^2.$$

On cherche donc (u_k) sous la forme

$$\forall k \in N^*, u_k = ak^3 + bk^2 + ck + d$$

avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}u_{k+1} - u_k &= a(k+1)^3 + b(k+1)^2 + c(k+1) + \cancel{d} - ak^3 - bk^2 + ck + \cancel{d}\\ &= a(\cancel{k^3} + 3k^2 + 3k + 1) + b(\cancel{k^2} + 2k + 1) + c(\cancel{k} + 1) - \cancel{ak^3} - \cancel{bk^2} - \cancel{ck}\\ &= k^2 \times a + k(3a + 2b) + (a + b + c)\end{aligned}$$

On résout le système

$$(S): \quad \begin{cases} 3a = 1, \\ 3a + 2b = 0, \\ a + b + c. \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a = \frac{1}{3}, \\ b = -\frac{1}{2}, \\ c = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

On vient de montrer que,

$$\forall k \in N^*, k^2 = u_{k+1} - u_k \qquad \text{avec } u_k = \frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k.$$

Donc, par téléscopage,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^2 &= u_{n+1} - u_1 \\ &= \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1) - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{6}} \\ &= \frac{n+1}{6}\big(2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1\big) \\ &= \frac{n+1}{6}(2n^2 + 4n + 2 - 3n - 3 + 1) \\ &= \frac{n(n-1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Proposition: Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=0}^{q} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve:
Soit $n \in \mathbb{N}$.

1.

$$\begin{aligned} (1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k &= \sum_{k=0}^{n} q^k - q\sum_{k=0}^{n} q^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (q^k - q^{k+1}) \\ &= 1 - q^{n+1} \end{aligned}$$

Si $q \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Si $q = 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1.$$

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$.

   On a, d'une part :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} q^k = S_n + q^{n+1}$$

   et d'autre part

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 + qS_n.$$

   Et donc,

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, 1 + qS_n = S_n + q^{n+1} &\iff 1 + (q-1)S_n = q^{n+1} \\ &\iff S_n(q-1) = q^{n+1} - 1 \\ &\iff S_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \text{ pour } q \neq 1.\end{aligned}$$

□

2 Formules à connaître

Définition: Soient $k, n \in \mathbb{N}$. On définit "k parmi n" par

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\ (n-k)!} & \text{si } k \leqslant n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition: Avec les notations précédentes,

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$

Preuve: 1. $\binom{n}{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\big(n-(n-k)\big)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!\ k!} = \binom{n}{k}$

2.

$$\begin{aligned}\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{n!(k+1)}{k!(n-k)!(k+1)} \\ &= \frac{n!(n-\cancel{k}+\cancel{k}+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \binom{n+1}{k+1}\end{aligned}$$

□

Proposition (binôme de Newton)**:** Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

sauf si $\begin{cases} a+b=0, \\ n=0. \end{cases}$

Remarque (triangle de Pascal):

$n=0$							1						
$n=1$						1		1					
$n=2$					1		2		1				
$n=3$				1		3		3		1			
$n=4$			1		4		6		4		1		
$n=5$		1		5		10		10		5		1	
$n=6$	1		6		15		20		15		6		1

Exemple:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Preuve:
Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P(n) : \text{“}(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\text{”}$$

avec la convention $\forall z \in \mathbb{C}, z^0 = 1$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $P(n)$ vraie. Montrons $P(n+1)$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} [\![0, n]\!] & \longrightarrow & [\![1, n+1]\!] \\ k & \longmapsto & k+1 \end{array}$ bijective.

Donc,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}u_{\varphi(k)}\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}u_k \text{ où } \forall n\in[\![1,n+1]\!]\,, u_k=\binom{n}{k-1}a^kb^{n-k+1}.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k+b^{n+1-k}+\sum_{k=0}^{n}a^kb^{n+1-k}\\ &= \binom{n}{n}a^{n+1}b+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^kb^{n+1-k}\\ &+\binom{n}{0}a^0b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)a^kb^{n+1-k}+a^{n+1}+b^{n+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k}.\end{aligned}$$

— Montrons $P(0)$ $(a+b)^0=1$.

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a^kb^{0-k}=\binom{0}{0}a^0b^0=1\times1\times1$$

Donc,

$$(a+b)^0=\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a^kb^{0-k}$$

□

Exemple:

Calculer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$. On applique la formule du binôme de Newton avec $a=-1$ et $b=1$:

$$\forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=(-1+1)^n=\begin{cases}0 \text{ si } n>0,\\ 1 \text{ si } n=0.\end{cases}$$

Proposition: Soient $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ et $n\in\mathbb{N}$. Alors,

$$a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-1-k}.$$

Preuve:

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1}b^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \big(\underbrace{a^{k+1}b^{n-(k+1)}}_{u_{k+1}} - \underbrace{a^k b^{n-k}}_{u_k}\big)$$
$$= u_n - u_0$$
$$= a^n - b^n$$

□

3 Sommes doubles

Exemple:

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i,j}$$

$$S = \sum_{j=1}^{1} a_{1,j} + \sum_{j=1}^{2} a_{2,j} + \sum_{j=3}^{3} a_{3,j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}$$
$$= a_{11}$$
$$+ a_{21} + a_{22}$$
$$+ a_{31} + a_{32} + a_{33}$$
$$\vdots$$
$$+ a_{n,1} + \cdots + a_{n,n}$$

Exemple:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} = \sum_{i=1}^{n}(2^i - 1)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} 2^i - n$$
$$= 2 \times \frac{1-2^n}{1-2} - n$$
$$= 2(2^n - 1) - n$$

Exemple:
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S = \sum_{j=1}^{i}\sum_{i=1}^{n}\binom{i}{j} \Bigg] \text{Aucun sens !}$$

Exemple:
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{i}{j}$$

On pose

$$a_{j,i} = \binom{i}{j}.$$

Alors,

$$\begin{array}{ccccccccc} S & = & a_{11} & + & a_{12} & + & \cdots & + & \boxed{\begin{array}{c} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{array}} \\ & & & + & a_{22} & + & \cdots & + & \\ & & & & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & & & & + & \end{array}$$

$$\sum_{j=1}^{i} a_{j,i} = \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} = 2^i - 1 \qquad \boxed{\cdot} = \sum_{j=1}^{n} a_{j,n} = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} = 2^n - 1$$

Donc,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} = 2(2^n - 1) - n.$$

4 Sommes sur un ensemble fini

Définition: Soit I un ensemble fini. Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes. On note $\sum\limits_{i \in I} a_i$ la somme des éléments de cette famille.

Exemple:
Soit $I = \{\clubsuit, \heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit\}$. On pose

$$\begin{cases} a_\heartsuit = 0 \\ a_\clubsuit = -1 \\ a_\spadesuit = i \\ a_\diamondsuit = 1 + i. \end{cases}$$

Alors

$$\sum_{j \in I} a_j = 0 - 1 + i + 1 + i = 2i.$$

Exemple:
Avec $I = \{x \mapsto x^2, x \mapsto x^3, x \mapsto x^4\}$, on pose $\forall i \in I, a_i = i(2)$.

Alors,

$$\sum_{i \in I} a_i = 2^2 + 2^3 + 2^4.$$

Exemple:

— $\sum\limits_{k \in [\![1,n]\!]} 2^k = \sum\limits_{k=1}^{n} 2^k = 2(2^n - 1)$.
— $\sum\limits_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \text{ pair}}} 2^k = \sum\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant \frac{n}{2} \\ j \text{ entier}}} 2^{2j}$.

Proposition: Soit $\varphi : I \to J$ une bijection et $(a_j)_{j \in J}$ une famille de nombres com-

plexes. Alors
$$\sum_{j\in J} a_j = \sum_{i\in I} a_{\varphi(i)}.$$
□

Exemple:
$$\sum_{i\in\{2,4,6,8\}} a_i = \sum_{j=1}^{4} a_{2j}.$$

Exemple:
$$\begin{aligned} S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} &= \sum_{(i,j)\in\left\{(1,1),\dots,(1,n),(2,2),\dots,(2,n),\dots,(n,n)\right\}} a_{i,j} \\ &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}. \end{aligned}$$

5 Produits

Définition: Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes.

On note $\prod_{i\in I} a_i$ le produit de ces éléments.

Proposition: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suit de nombres complexes <u>non nuls</u>. Alors
$$\forall n\in\mathbb{N}, \prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_0}.$$
□

Remarque (⚠ Attention):
$$\prod_{i\in I} (\lambda a_i) = \lambda^{\#I} \times \prod_{i\in I} a_i$$
où $\#I$ est le nombre d'éléments de I.

6 Rappels sur ln et exp

Proposition:

— Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille finie de réels strictement positifs. Alors,
$$\ln\left(\prod_{i\in I} a_i\right) = \sum_{i\in I} \ln a_i.$$

— Soit $(b_i)_{i\in I}$ une famille de réels. Alors

$$\exp\left(\sum_{i\in I} b_i\right) = \prod_{i\in I} \exp(b_i).$$

Remarque:
Soit $f : I \to \mathbb{R}^*$ dérivable. On pose $g : x \mapsto \ln|f(x)|$.

Alors g est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

On dit que $\dfrac{f'}{f}$ est la dérivée logarithmique de f.

Soient $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}^*$ dérivables. Alors

$$\frac{(f_1\, f_2)'}{f_1\, f_2} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2}.$$

Remarque:
Soit $a \in \mathbb{R}$.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $a^n = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{ fois}}$.

— Soit $n \in \mathbb{Z}_*^-$. Si $a \neq 0$, alors $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$.

— Si $a \neq 0$, $a^0 = 1$ et
$$\forall p, q \in \mathbb{Z}, a^p \times a^q = a^{p+q}.$$

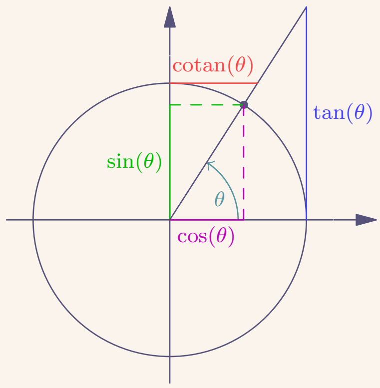
— Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $a > 0$.
$$a^p = \exp(\ln a^p) = \exp(p \ln a) = e^{p \ln a}.$$

Définition: Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$ et $p \in \mathbb{R}$. On pose $a^p = e^{p \ln a}$.

CHAPITRE

2
NOMBRES COMPLEXES

1 Trigonométrie



Définition: On définit, pour

$$\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$$
$$\iff \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

la <u>tangente</u> de θ par

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

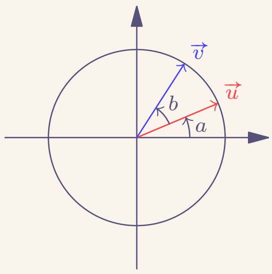
Définition: Pour $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-k\pi, (k+1)\pi[$, on définit la <u>contangente</u> de θ par

$$\operatorname{cotan}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Proposition: Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. $\cos(-a) = \cos(a)$
2. $\cos(a + 2\pi) = \cos(a)$
3. $\cos(a + \pi) = -\cos(a)$
4. $\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
5. $\sin(-a) = -\sin(a)$
6. $\sin(a + 2\pi) = \sin(a)$
7. $\sin(a + \pi) = -\sin(a)$
8. $\sin(\pi - a) = \sin(a)$
9. $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
10. $\sin(a + b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$
11. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a)$
12. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)$

Preuve: 8. Soient $\vec{u} = (\cos(a), \sin(a))$ et $\vec{v} = (\cos(b), \sin(b))$



D'une part, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
D'autre part, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \cos(a-b)$
On a montré que

$$\begin{aligned} &\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \text{d'où } &\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \end{aligned}$$

11. $\forall a \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{=0}\cos(a) + \overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{=1}\sin(a) = \sin(a)$
12. $\forall a \in \mathbb{R}, \cos(a) = \cos\left(-a + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$
10.

$$\begin{aligned} \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \sin(a+b) &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(b) \\ &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \end{aligned}$$

□

Proposition: Soient a et b deux réels tels que $a \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $b \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

1. $\tan(a+\pi) = \tan(a)$
2. $\tan(-a) = -\tan(a)$
3. Si $a + b \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, alors, $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

Preuve: 3. On suppose $a + b \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}\\ &= \frac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}\\ &= \frac{\frac{\sin(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)}+\frac{\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}}\\ &= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}\end{aligned}$$

□

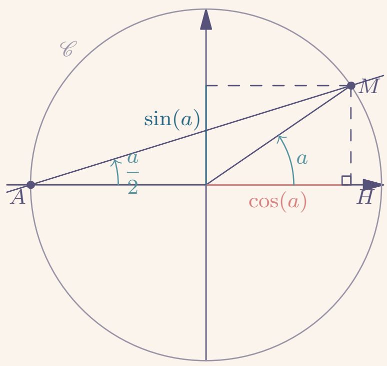
Proposition: Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Si $a \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, alors, $1+\tan^2(a) = \frac{1}{\cos^2(a)}$
2. Si $a \not\equiv \pi\ [2\pi]$
   — $\cos(a) = \dfrac{1-\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{a}{2}\right)}$
   — $\sin(a) = \dfrac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$
   — Si $a \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, $\tan(a) = \dfrac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$

Preuve: 1. On suppose que $a \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

$$1+\tan^2(a) = 1+\frac{\sin^2(a)}{\cos^2(a)} = \frac{\cos^2(a)+\sin^2(a)}{\cos^2(a)} = \frac{1}{\cos^2(a)}$$

2. On peut le prouver par le calcul avec les formules de la tangeante mais on peut également le prouver géométriquement.



Soit $M(x_0, y_0) \neq A$ sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$. On note t la pente de la demi-droite $[AM)$.

On en déduit que l'équation de la droite (AM) est

$$y = tx + t = t(x+1)$$

On sait que $M \in (AM)$ donc

$$y_0 = t(x_0 + 1)$$

On sait aussi que ${x_0}^2 + {y_0}^2 = 1$
Donc,

$$x_0 + t^2(x_0+1)^2 = 1$$

et donc

$${x_0}^2 \underbrace{(1+t^2)}_{\neq 0} + 2t^2 x_0 + t^2 - 1 = 0$$

On résout cette équation du second degré et on trouve deux racines : $x_0 = -1$ et $x_0 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.
Comme $M \neq A$, $x_0 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y_0 = t\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 1\right) = \dfrac{2t}{1+t^2}$
Enfin,

$$t = \frac{|HM|}{|AH|} = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$$

car AHM est rectangle en H (d'après le théorème de Thalès)
Donc,

$$\begin{cases} \cos(a) = \dfrac{1-\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)} \\ \sin(a) = \dfrac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)} \end{cases}$$

□

2 Nombres complexes de module 1

Proposition: Soients $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$(\cos(a) + i\sin(a)) \times (\cos(b) + i\sin(b)) = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$$

Preuve:

$$\begin{aligned}(\cos(a) + i\sin(a)) \times (\cos(b) + i\sin(b)) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ &+ i(\cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)) \\ &= \cos(a+b) + i\sin(a+b)\end{aligned}$$

□

Définition: Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $e^{ia} = \cos(a) + i\sin(a)$
Ainsi, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, e^{ia} \times e^{ib} = e^{i(a+b)}$

Proposition: Soient a, b, c trois nombres complexes avec $a \neq 0$ et z_1, z_2 les racines de $P : z \mapsto az^2 + bz + c$

Alors, $z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a}$ et $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$

Exemple:

$(E) : z^2 - 3z + 2 = 0$

On remarque que $2 \times 1 = 2$ et $2 + 1 = 3$ donc 2 et 1 sont deux solutions de (E).

Preuve: Méthode 1 Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ et δ une racine carrée de Δ

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

Donc,

$$z_1 \times z_2 = \frac{b^2-\delta^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} z_1 + z_2 = \frac{-b-b-\delta+\delta}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Méthode 2

$$\forall z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = a(z-z_1)(z-z_2) = a(z^2 - (z_1+z_2)z + z_1 z_2)$$

En particulier,

$$\begin{cases} \text{avec } z = 0, & c = a z_1 z_2 \\ \text{avec } z = 0, & \cancel{a} + b + \cancel{c} = a(\cancel{1} - (z_1+z_2) + \cancel{z_1 z_2}) \end{cases}$$

donc

$$b = -a(z_1 + z_2)$$

et donc

$$\begin{cases} z_1 z_2 = \dfrac{c}{a} \\ z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

□

Proposition: Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et z_1, z_2, z_3 les solutions de

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

Alors,

$$\begin{cases} z_1 z_2 z_3 = -c \\ z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 = b \\ z_1 + z_2 + z_3 = -a \end{cases}$$

□

Proposition: Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres complexes et $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les solutions de

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 = 1$$

Alors,

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_k \leqslant n} z_{i_1} \times z_{i_2} \times \cdots \times z_{i_k} = (-1)^k a_{n-k}$$

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = -a_{n-1}$$
$$\prod_{k=1}^{n} z_k = (-1)^k a_0$$

Preuve (incomplète pour $n = 3$):

$$\begin{aligned}\forall z \in \mathbb{C}, z^3 + az^2 + bz + c = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 &+ z^2(-z_1 - z_2 - z_3) \\ &+ z(z_2 z_3 + z_1 z_2 + z_1 z_3) \\ &- z_1 z_2 z_3\end{aligned}$$

On identifie $\begin{cases} a = -z_1 - z_2 - z_3 \\ b = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 \\ c = -z_1 z_2 z_3 \end{cases}$ $\square$

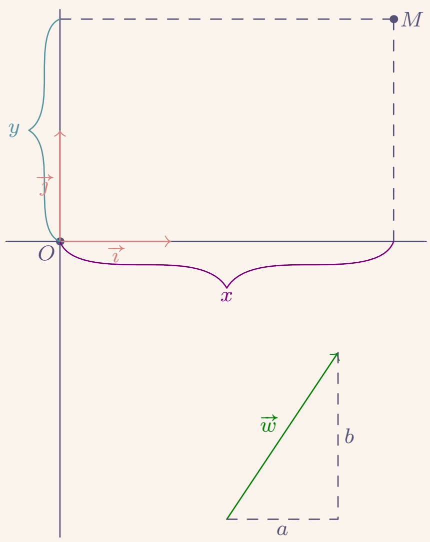
Exemple:
On pose

$$\begin{cases} s = z_1 + z_2 + z_3 \\ q = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 \\ p = z_1 z_2 z_3 \end{cases}$$

et $P = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3$

3 Géométrie des nombres complexes

Dans ce paragraphe, $\mathscr{P}$ dérisgne un plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$



Définition: Soit $M \in \mathscr{P}$. On note (x, y) les coordonnées du point M par rapport au

repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
L'affixe de M est le nombre
$$z_M = x + iy \in \mathbb{C}$$
Soit $\vec{w} \in \vec{\mathscr{P}}$ (le plan des vecteurs) et (a, b) les coordonées de $\vec{w}$.
L'affixe de $\vec{w}$ est
$$z_{\vec{w}} = a + ib \in \mathbb{C}$$

Proposition: Soit $(A, B) \in \mathscr{P}^2$ et $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \in \vec{\mathscr{P}}^2$

1. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
2. $z_{\overrightarrow{w_1}+\overrightarrow{w_2}} = z_{\overrightarrow{w_1}} + z_{\overrightarrow{w_2}}$

□

Proposition: Soit $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \in \vec{\mathscr{P}}^2$ avec $\overrightarrow{w_1} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{w_2} \neq \vec{0}$
Alors, $\left|\dfrac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}}\right| = \dfrac{\|\overrightarrow{w_1}\|}{\|\overrightarrow{w_2}\|}$ et $\arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}}\right) = \underbrace{\widehat{(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})}}_{\text{l'angle entre } \overrightarrow{w_1} \text{ et } \overrightarrow{w_2}}$

Preuve:
Soient $(r_1, r_2) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$ et $(\theta_1, \theta_2) \in ([0, 2\pi[)^2$ tels que
$$z_{\overrightarrow{w_1}} = r_1 e^{i\theta_1} \text{ et } z_{\overrightarrow{w_2}} = r_2 e^{i\theta_2}$$
Alors,
$$\frac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$
donc
$$\begin{cases} \left|\dfrac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}}\right| = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{\|\overrightarrow{w_1}\|}{\|\overrightarrow{w_2}\|} \\ \arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}}\right) \equiv \theta_1 - \theta_2 \ [2\pi] \end{cases}$$
car $\theta_1 - \theta_2$ est l'angle entre $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ □

Corollaire: Avec les hypothèses et notations précédentes,

1. $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ sont collinéaires $\iff \dfrac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}} \in \mathbb{R}$
2. $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ sont orthogonaux $\iff \dfrac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}} \in i\mathbb{R}$

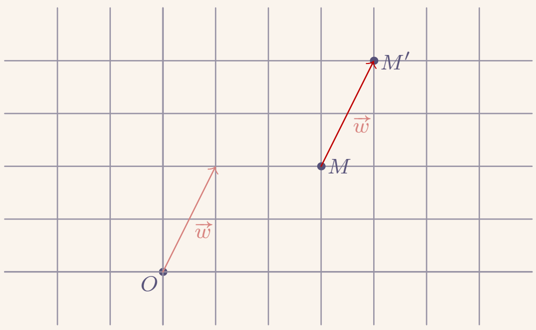
Preuve: 1.

$$\begin{aligned}\vec{w_1} \text{ et } \vec{w_2} \text{ sont colinéaires} &\iff \widehat{(\vec{w_1}, \vec{w_2})} \equiv 0 \ [\pi] \\ &\iff \arg\left(\frac{z_{\vec{w_1}}}{z_{\vec{w_2}}}\right) \equiv 0 \ [\pi] \\ &\iff \frac{z_{\vec{w_1}}}{z_{\vec{w_2}}} \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\vec{w_1} \text{ et } \vec{w_2} \text{ sont orthogonaux} &\iff \widehat{(\vec{w_1}, \vec{w_2})} \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi] \\ &\iff \arg\left(\frac{z_{\vec{w_1}}}{z_{\vec{w_2}}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi] \\ &\iff \frac{z_{\vec{w_1}}}{z_{\vec{w_2}}} \in i\mathbb{R}\end{aligned}$$

□



Définition: Soit $\vec{w} \in \vec{\mathscr{P}}$. La translation de vecteur $\vec{w}$ est l'application

$$\begin{aligned} t_{\vec{w}} : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

où M' vérifie $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$

Proposition: Soit $\vec{w} \in \vec{\mathscr{P}}$ et $(M, M') \in \mathscr{P}^2$

$$M' = t_{\vec{w}}(M) \iff z_{M'} = z_M + z_{\vec{w}}$$

Preuve:

$$\begin{aligned} M' = t_{\vec{w}}(M) &\iff \overrightarrow{MM'} = \vec{w} \\ &\iff z_M - z_{M'} = z_{\vec{w}} \\ &\iff z_{M'} = z_M + z_{\vec{w}} \end{aligned}$$

□

Exemple (Décrire l'ensemble $E = \left\{M \in \mathscr{P} \mid \exists t \in \mathbb{R}, z_M = 1 + e^{it}\right\}$):
L'ensemble $\mathscr{C} = \left\{M \in \mathscr{P} \mid \exists t \in \mathbb{R}, z_M = e^{it}\right\}$ est le cercle trigonométrique. La translation $t_{\overrightarrow{u}}$ a pour expression complexe $z \mapsto z + 1$ Donc, $E = t_{\overrightarrow{u}}(\mathscr{C})$ est le cercle de rayon 1 et de centre le point d'affixe 1.

Proposition: Soient $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$.

$$t_{\overrightarrow{w_2}} \circ t_{\overrightarrow{w_1}} = t_{\overrightarrow{w_1}+\overrightarrow{w_2}}$$

Preuve:
Soit $M \in \mathscr{P}$ d'affixe z. On pose $M_1 = t_{\overrightarrow{w_1}}(M)$ et $M' = t_{\overrightarrow{w_1}}(M_1)$ et on note également $M'' = t_{\overrightarrow{w_1}+\overrightarrow{w_2}}(M)$

$$\begin{aligned} z_{M'} &= z_{M_1} + z_{\overrightarrow{w_2}} \\ &= (z + z_{\overrightarrow{w_1}}) + z_{\overrightarrow{w_2}} \\ &= z + z_{\overrightarrow{w_1}+\overrightarrow{w_2}} \end{aligned}$$

Donc, $M' = M''$

□

Définition: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
La <u>rotation</u> de centre Ω et d'angle θ est l'application

$$\begin{aligned} \rho_{\Omega,\theta} : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

où M' vérifie

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{\Omega M}\| = \|\overrightarrow{\Omega M'}\| \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta \end{cases}$$

Proposition: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ d'affixe ω, $\theta \in \mathbb{R}$ et $(M, M') \in \mathscr{P}^2$

$$(*) : \qquad M' = \rho_{\Omega,\theta}(M) \iff z_{M'} = \omega + e^{i\theta}(z_M - \omega)$$

Preuve: CAS 1 On suppose $M \neq \Omega$.

$$\begin{aligned}
M' = \rho_{\Omega,\theta}(M) &\iff \begin{cases} \|\overrightarrow{\Omega M}\| = \|\overrightarrow{\Omega M'}\| \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \left|z_{\overrightarrow{\Omega M}}\right| = \left|z_{\overrightarrow{\Omega M'}}\right| \\ \arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{\Omega M}}}{z_{\overrightarrow{\Omega M'}}}\right) = \theta \end{cases} \\
&\iff e^{i\theta} = \frac{z_{\overrightarrow{\Omega M}}}{z_{\overrightarrow{\Omega M'}}} \\
&\iff z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = e^{i\theta} z_{\overrightarrow{\Omega M}} \\
&\iff z_{M'} - \omega = e^{i\theta}(z_M - \omega) \\
&\iff z_{M'} = \omega + e^{i\theta}(z_M - \omega)
\end{aligned}$$

CAS 2 On suppose $M = \Omega$.
Alors,

$$\begin{aligned}
M' = \rho_{\Omega,\theta}(M) &\iff M' = M \\
&\iff z_{M'} = z_M \\
&\iff z_{M'} = z_M + e^{i\theta}(z_M - z_M) \\
&\iff z_{M'} = \omega + e^{i\theta}(z_M - \omega)
\end{aligned}$$

□

REMARQUE (Cas particulier):
Si $\Omega = O$ alors

$$(*) \iff z_{M'} = e^{i\theta} z_M$$

Corollaire: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ d'affixe ω et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\rho_{\Omega,\theta} &= t_{\overrightarrow{O\Omega}} \circ \rho_{O,\theta} \circ t_{\overrightarrow{\Omega O}} \\
&= t_{\overrightarrow{O\Omega}} \circ \rho_{O,\theta} \circ (t_{\overrightarrow{O\Omega}})^{-1}
\end{aligned}$$

Proposition: Soient $(\Omega_1, \Omega_2) \in \mathscr{P}^2$ et $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\rho_{\Omega_1,\theta_1} \circ \rho_{\Omega_1,\theta_2} = \rho_{\Omega_1,\theta_1+\theta_2} = \rho_{\Omega_1,\theta_2} \circ \rho_{\Omega_1,\theta_1}$$

Si $\begin{cases} \Omega_1 \neq \Omega_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0 \ [2\pi] \end{cases}$ alors $\rho_{\Omega_1,\theta_1} \circ \rho_{\Omega_2,\theta_2}$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$

Si $\begin{cases} \Omega_1 \neq \Omega_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \equiv 0 \ [2\pi] \end{cases}$ alors $\rho_{\Omega_1,\theta_1} \circ \rho_{\Omega_2,\theta_2}$ est une translation

Preuve:
On note ω_1 l'affixe de Ω_1 et ω_2 l'affixe de Ω_2. On pose $\rho_1 = \rho_{\Omega_1,\theta_1}$ et $\rho_2 = \rho_{\Omega_2,\theta_2}$

Soit $M \in \mathscr{P}$ d'affixe z. On pose

$$\begin{aligned} M_2 &= \rho_2(M) \\ M' &= \rho_1 \circ \rho_2(M) = \rho_1(M_2) \end{aligned}$$

et on note z_2 et z' les affixes de M_2 et M'
On a

$$\begin{aligned} z' &= \omega_1 + e^{i\theta_1}(z_2 - \omega_1) \\ &= \omega_1 + e^{i\theta_1}(\omega_2 + e^{i\theta_2}(z - \omega_2) - \omega_1) \\ &= \omega_1 + \omega_2 e^{i\theta_1} - \omega_1 e^{i\theta_1} + e^{i(\theta_1+\theta_2)}(z - \omega_2) \end{aligned}$$

1. On suppose $\Omega_1 = \Omega_2$ donc $\omega_1 = \omega_2$. On a donc

   $$z' = \omega_1 + e^{i(\theta_1+\theta_2)}(z - \omega_1)$$

   On reconnaît l'expression d'une rotation de centre Ω_1 et d'angle $\theta_1 + \theta_2$
2. On suppose $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0 \ [2\pi]$. On a donc

   $$\begin{aligned} z' &= \underbrace{\omega_1 + \omega_2 e^{i\theta_1} - \omega_1 e^{i\theta_1} - \omega_2} + z \\ &= z + \omega \end{aligned}$$

   On reconnaît l'expression d'une translation de vecteur ω.
3. On suppose $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et $\theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0 \ [2\pi]$
   On cherche $\omega \in \mathbb{C}$ tel que

   $$\begin{aligned} &\forall z \in \mathbb{C}, \omega + e^{i(\theta_1+\theta_2)}(z - \omega) = \omega_1 + \omega_2 e^{i\theta_1} - \omega_1 e^{i\theta_1} + e^{i(\theta_1+\theta_2)}(z - \omega_2) \\ \iff &\omega - e^{i(\theta_1+\theta_2)}\omega = \omega_1 + \omega_2 e^{i\theta_1} - \omega_1 e^{i\theta_1} - \omega_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ \iff &\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2 e^{i\theta_1} - \omega_1 e^{i\theta_1} - \omega_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}}{1 - e^{i(\theta_1+\theta_2)}} \end{aligned}$$

   On reconnait l'expression complexe d'une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$ de centre Ω d'affixe ω

□

Proposition: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ d'affixe ω, $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$ d'affixe u. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \not\equiv 0 \ [2\pi]$.
— $t_{\overrightarrow{w}} \circ \rho_{\Omega,\theta}$ est une rotation d'angle θ
— $\rho_{\Omega,\theta} \circ t_{\overrightarrow{w}}$ est aussi une rotation d'angle θ

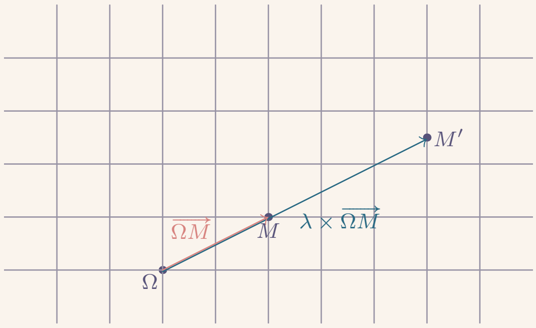
Preuve:
Soit $M \in \mathscr{P}$ d'affixe z et $M' = t_{\overrightarrow{w}} \circ \rho_{\Omega,\theta}(M)$ d'affixe z'
On a alors :

$$z' = (\omega + e^{i\theta}(z - \omega)) + u$$

On cherche $\omega' \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{aligned} &\forall z \in \mathbb{C}, \omega + u + e^{i\theta}(z-\omega) = \omega' + e^{i\theta}(z-\omega') \\ \iff &\omega + u - e^{i\theta}\omega = \omega' - e^{i\theta}\omega' \\ \iff &\omega' = \frac{\omega + u - e^{i\theta}\omega}{1-e^{i\theta}} \end{aligned}$$

On reconnaît l'expression complexe d'une rotation d'angle θ □



Définition: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
L'homothétie de centre Ω et de rapport λ est l'application

$$\begin{aligned} h_{\Omega,\lambda} : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

où M' vérifie $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$

Proposition: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ d'affixe ω, $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient $M \in \mathscr{P}$ d'affixe z et $M' \in \mathscr{P}$ d'affixe z'.

$$M' = h_{\Omega,\lambda}(M) \iff z' = \omega + \lambda(z-\omega)$$

Preuve:

$$\begin{aligned} M' = h_{\Omega,\lambda}(M) &\iff \overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M} \\ &\iff z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = z_{\lambda\overrightarrow{\Omega M}} \\ &\iff z' - \omega = \lambda(z-\omega) \\ &\iff z' = \omega + \lambda(z-\omega) \end{aligned}$$

□

Proposition: Soient $(\Omega_1, \Omega_2) \in \mathscr{P}^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathscr{P}^2$

1. Si $\Omega_1 = \Omega_2$ alors, $h_{\Omega_1,\lambda_1} \circ h_{\Omega_2,\lambda_2} = h_{\Omega_1,\lambda_1\lambda_2}$
2. Si $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$, alors, $h_{\Omega_1,\lambda_1} \circ h_{\Omega_2,\lambda_2}$ est une homotéthie de rapport

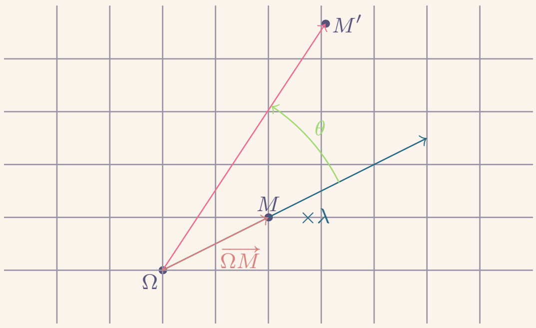
$\lambda_1\lambda_2$

3. Si $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et $\lambda_1\lambda_2 = 1$, alors, $h_{\Omega_1,\lambda_1} \circ h_{\Omega_2,\lambda_2}$ est une translation.

□

Proposition: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\vec{w} \in \vec{\mathscr{P}}$.
Alors, $t_{\vec{w}} \circ h_{\Omega,\lambda}$ et $h_{\Omega,\lambda} \circ t_{\vec{w}}$ sont homothéties de rapport λ. □

Remarque (Cas particulier):
Soit $M \in \mathscr{P}$ d'affixe z, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M' = h_{O,\lambda}(M)$ d'affixe z'
On a $z' = \lambda z$



Définition: Soient $\Omega \in \mathscr{P}$, $(\theta, \lambda) \in \mathbb{R}^2$. La <u>similitude (directe)</u> de centre Ω, d'angle θ et de rapport λ est

$$S_{\Omega,\theta,\lambda} = h_{\Omega,\lambda} \circ \rho_{\Omega,\theta}$$

Proposition: Avec les notations précédentes,

$$S_{\Omega,\theta,\lambda} = \rho_{\Omega,\theta} \circ h_{\Omega,\lambda}$$

Preuve:
On note ω l'affixe de Ω. L'expression complexe de $S_{\Omega,\theta,\lambda}$ est

$$\begin{aligned} z' &= \omega + \lambda(\omega + e^{i\theta}(z - \omega) - \omega) \\ &= \omega + \lambda e^{i\theta}(z - \omega) \end{aligned}$$

L'expression complexe de $\rho_{\Omega,\theta} \circ h_{\Omega,\lambda}$ est

$$\begin{aligned} z' &= \omega + e^{i\theta}(\omega + \lambda(z - \omega) - \omega) \\ &= \omega + \lambda e^{i\theta}(z - \omega) \end{aligned}$$

Les deux expressions sont identiques. □

Proposition: L'expression complexe de $S_{\Omega,\theta,\lambda}$ est

$$z' = \omega + \lambda e^{i\theta}(z - \omega)$$

4 Exponentielle complexe

Définition: Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$\exp(z) = e^{\mathfrak{Re}(z)} \times (\cos(\mathfrak{Im}(z)) + i\sin(\mathfrak{Im}(z))$$

Ainsi, si $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\exp(z) = \exp(a + ib) = e^a \times (\cos(b) + i(\sin(b)) = e^a e^{ib}$$

Proposition: Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \times \exp(z_2)$$

Preuve:
On pose $\begin{cases} z_1 = a + ib \\ z_2 = c + id \end{cases}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$

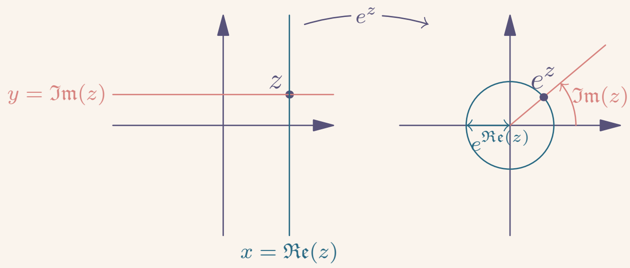
$$\begin{aligned} \exp(z_1) \times \exp(z_2) &= e^a \times e^{ib} \times e^c \times e^{id} \\ &= e^{a+c} e^{i(b+d)} \\ &= \exp(z_1 + z_2) \end{aligned}$$

□

Remarque (Notation):
On écrit e^z à la place de $\exp(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$.

Proposition:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} |e^z| = e^{\mathfrak{Re}(z)} \\ \arg(e^z) \equiv \mathfrak{Im}(z) \quad [2\pi] \end{cases}$$



Remarque:

$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ n'est pas bijective :

— $\begin{cases} \exp(0) = \exp(2i\pi) = 1 \\ 0 \neq 2i\pi \end{cases}$

— 0 n'a pas d'antécédant

Il n'y a donc pas de logarithme complexe.

5 Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

Définition: Soit f définie sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ ($\forall x \in D, f(x) \in \mathbb{C}$)
On pose :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Re}(f) : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathfrak{Re}(f(x)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathfrak{Im}(f) : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathfrak{Im}(f(x)) \end{aligned}$$

Exemple:

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto e^{(1+i)x} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Re}(f) : [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x \cos(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathfrak{Im}(f) : [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x \sin(s) \end{aligned}$$

Définition: Soit $f : D \to \mathbb{C}$. On dit que
— f est <u>continue</u> si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont continues
— f est <u>dérivable</u> si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont dérivables.
Dans ce cas, la dérivée de f est

$$\begin{aligned} f' : D &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \mathfrak{Re}(f)'(x) + i\mathfrak{Im}(f)'(x) \end{aligned}$$

Exemple:

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto e^{(1+i)x} \end{aligned}$$

$x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont dérivables sur $[0, 2\pi[$ donc $\mathfrak{Re}(f)$ est dérivable.
$x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont dérivables sur $[0, 2\pi[$ donc $\mathfrak{Im}(f)$ est dérivable.
Donc f est dérivable.

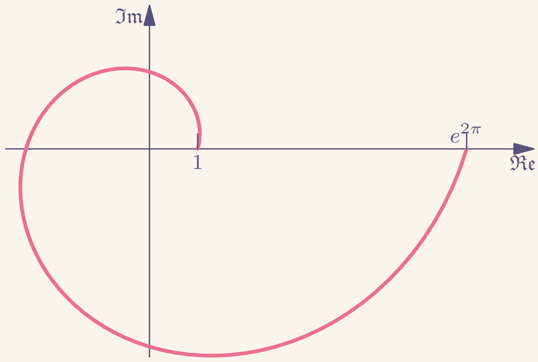
$$\forall x \in [0, 2\pi[, \begin{cases} \mathfrak{Re}(f)'(x) = e^x \cos(x) - e^x \sin(x) \\ \mathfrak{Im}(f)'(x) = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) \end{cases}$$

Donc,

$$\forall x \in [0, 2\pi[, f'(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x)) + ie^x(\sin(x) + \cos(x))$$

REMARQUE:
On peut représenter f de la fa c on suivante.

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{(1+i)t} \end{aligned}$$



Proposition: Soient u et v deux fonctions dérivables sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$

1. $u + v$ dérivable et $(u + v)' = u' + v'$
2. uv dérivable et $(uv)' = u'v + v'u$
3. Si $v \neq 0$, $\frac{u}{v}$ dérivable et $\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Preuve:
On pose $\begin{cases} a = \mathfrak{Re}(u) \\ b = \mathfrak{Im}(u) \end{cases}$ et $\begin{cases} c = \mathfrak{Re}(v) \\ d = \mathfrak{Im}(v) \end{cases}$

1. $\begin{cases} \mathfrak{Re}(u + v) = a + c \\ \mathfrak{Im}(u + v) = b + d \end{cases}$ donc $\begin{cases} \mathfrak{Re}(u + v)' = a' + c' \\ \mathfrak{Im}(u + v)' = b' + d' \end{cases}$ Donc,

$$\begin{aligned} (u + v)' &= a' + c' + i(b' + d') \\ &= (a' + ib') + (c' + id') \\ &= u' + v' \end{aligned}$$

2. $\begin{cases} \mathfrak{Re}(uv) = ac - bd \\ \mathfrak{Im}(uv) = ad + bc \end{cases}$ donc $\mathfrak{Re}(uv)$ et $\mathfrak{Im}(uv)$ sont dérivables et

$$\begin{cases} \mathfrak{Re}(uv)' = a'c + c'a - b'd - d'b \\ \mathfrak{Im}(uv)' = a'd + d'a + b'c + c'b \end{cases}$$

Donc,

$$(uv)' = a'c + c'a - b'd - d'b + i(a'd + d'a + b'c + c'b)$$

Or,

$$\begin{cases} u'v = (a'+ib')(c+id) = a'c - b'd + i(b'c + a'd) \\ v'u = (a+ib)(c'+id') = ac' - bd' + i(bc' + ad') \end{cases}$$

Donc,

$$(uv)' = u'v + v'u$$

3. On suppose que

$$\forall x \in D, v(x) \neq 0$$

On a donc

$$\forall x \in D, \frac{u}{v} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

C'est plus simple de voir $\frac{u}{v}$ comme le produit de u et de $\frac{1}{v}$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{c+id} = \frac{c-id}{c^2+d^2}$$

$\underbrace{\frac{c}{c^2+d^2}}_{=\mathfrak{Re}\left(\frac{1}{v}\right)}$ et $\underbrace{-\frac{d}{c^2+d^2}}_{=\mathfrak{Im}\left(\frac{1}{v}\right)}$ sont dérivables donc $\frac{1}{v}$ aussi

$$\begin{cases} \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{v}\right)' = \left(\frac{c}{c^2+d^2}\right)' = \frac{c'(c^2+d^2) - c(2cc'+2dd')}{(c^2+d^2)^2} \\ \mathfrak{Im}\left(\frac{1}{v}\right)' = \left(-\frac{d}{c^2+d^2}\right)' = \frac{-d'(c^2+d^2) + d(2cc'+2dd')}{(c^2+d^2)^2} \end{cases}$$

Donc, d'une part,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{v}\right)' &= \frac{c'(c^2+d^2) - c(2cc'-2dd') - id'(c^2+d^2) + d(2cc'+2dd')}{(c^2+d^2)^2} \\ &= \frac{(c^2+d^2)(c'-id') + (2cc'+2dd')(-c+id)}{(c^2+d^2)^2} \\ &= \frac{-c'c^2 + c'd^2 - 2cdd' + i(2cc'd - d'c^2 + d^2d')}{(c^2+d^2)^2} \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{-v'}{v^2} &= \frac{-c' - d'i}{(c+di)^2} \\ &= \frac{-(c'+id')(c-id)^2}{(c^2+d^2)^2} \\ &= -\frac{(c'+id')(c^2 - 2icd - d^2)}{(c^2+d^2)^2} \\ &= \frac{-c'c^2 + c'd^2 - 2cdd' + i(2cc'd - d'c^2 + d'd^2)}{(c^2+d^2)^2} \\ &= \left(\frac{1}{v}\right)' \end{aligned}$$

Donc, $\frac{u}{v}$ dérivable et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = u'\left(\frac{1}{v}\right) + u\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

□

Proposition: Soit $v : D \to \mathbb{R}$ et $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables (avec $D \subset \mathbb{R}$).
Alors, $u \circ v$ est dérivable et

$$(u \circ v)' = (u' \circ v) \times v'$$

Preuve:
On pose $u = a + ib$ avec $\begin{cases} a = \mathfrak{Re}(u) \\ b = \mathfrak{Im}(u) \end{cases}$ donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = a(x) + ib(x)$$

Donc,

$$\forall x \in D, (u \circ v)(x) = a(v(x)) + ib(v(x))$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathfrak{Re}(u \circ v) &= a \circ v \\ \mathfrak{Im}(u \circ v) &= b \circ v \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathfrak{Re}(u \circ v)' &= (a \circ v)' = (a' \circ v) \times v' \\ \mathfrak{Im}(u \circ v)' &= (b \circ v)' = (b' \circ v) \times v' \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} (u \circ v)' &= (a' \circ v) \times v' + i(b' \circ v) \times v' \\ &= (a' \circ v + ib' \circ v) \times v' \\ &= ((a' + ib') \circ v) \times v' \\ &= (u' \circ v) \times v' \end{aligned}$$

□

Proposition: Soit $u : D \to \mathbb{C}$ et $f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{u(x)} \end{array}$
Alors, f est dérivable sur D et

$$\forall x \in D, f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

Preuve:

On pose $\begin{cases} a = \mathfrak{Re}(u) \\ b = \mathfrak{Im}(u) \end{cases}$ donc

$$\begin{aligned} \forall x \in D, f(x) &= e^{u(x)} \\ &= e^{a(x)+ib(x)} \\ &= e^{a(x)}(\cos(b(x)) + i\sin(b(x))) \end{aligned}$$

Donc, $\begin{cases} \mathfrak{Re}(f) : x \mapsto e^{a(x)}\cos(b(x)) \\ \mathfrak{Im}(f) : x \mapsto e^{a(x)}\sin(b(x)) \end{cases}$

a, b, cos, sin, exp sont dérivables donc $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ aussi donc f est dérivable.

$\square$

CHAPITRE

3

ÉTUDE DE FONCTIONS

Étudier une fonction c'est déterminer tous les éléments (tangentes, asymptotes) qui permettent d'obtenir l'allure de la courbe représentative de la fonction.

Exemple:

$$f : x \mapsto \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}$$

1. On détemine le domaine de définition de la fonction f.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x \in \{-3, 1\} \quad \text{car} \begin{cases} -3 + 1 = -2 = -\dfrac{b}{a} \\ -3 \times 1 = -3 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

   Donc f est définie sur $\mathscr{D}$ avec $\mathscr{D} =]-\infty, -3[\cup]-3, -1[\cup]-1, +\infty[$

2. Asymptotes et limites
   Soit $x \in \mathscr{D}$

$$f(x) = \frac{\cancel{x^2}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1$$

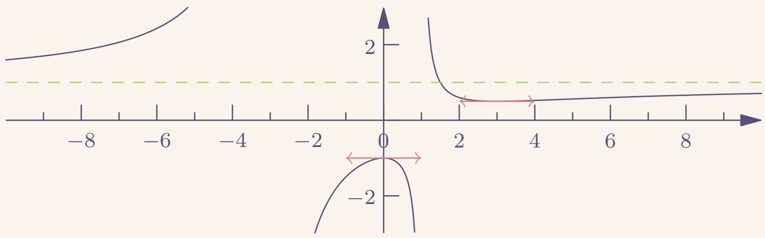
$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 2x + 3 \xrightarrow[x \to -3]{} 9 + 6 + 3 = 18 \\ x^2 + 2x - 3 \xrightarrow[x \to -3]{} 0 \end{array}\right\} \text{donc} \begin{cases} f(x) \xrightarrow[\substack{x \to -3 \\ <}]{} +\infty \\ f(x) \xrightarrow[\substack{x \to -3 \\ >}]{} -\infty \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 2x + 3 \xrightarrow[x \to 1]{} 2 \\ x^2 + 2x - 3 \xrightarrow[x \to 1]{} 0 \end{array}\right\} \text{donc} \begin{cases} f(x) \xrightarrow[\substack{x \to 1 \\ <}]{} -\infty \\ f(x) \xrightarrow[\substack{x \to 1 \\ >}]{} +\infty \end{cases}$$

3. f est dérivable sur $\mathscr{D}$ et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathscr{D}, f'(x) &= \frac{2(x-1)(x^2+2x-3) - 2(x^2-2x+3)(x+1)}{(x^2+2x-3)^2} \\ &= \frac{2(2x^2-6x)}{(x^2-2x+3)^2} \\ &= \frac{4x(x-4)}{(x^2-2x+3)^2}\end{aligned}$$

x	$+\infty$		-3		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1



1 Calculs de limites

Rappel:
Soient f et g deux fonctions et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

On ne connaît pas, à l'avance, les limites de

— $f(x) - g(x)$ si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty \\ g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty \end{cases}$ ("$\infty - \infty$")

— $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \\ g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \end{cases}$ ("$\frac{0}{0}$")

— $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \pm\infty \\ g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \pm\infty \end{cases}$ ("$\frac{\infty}{\infty}$")

— $f(x) \times g(x)$ si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \\ g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \pm\infty \end{cases}$ ("$0 \times \infty$")

Exemple:
$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$?

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

et

$$\begin{cases} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \\ n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \end{cases}$$

donc c'est une forme indéterminée.

Proposition:
Si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1 \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty \end{cases}$ alors, on ne sait pas à l'avance calculer $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\big)^{g(x)}$. □

Définition: Soient f et g deux fonctions et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ où $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
On dit que f et g sont <u>équivalentes au voisinage de a</u> (ou éqivalentes en a) s'il existe une fonction u telle que

$$\begin{cases} f = g \times u \\ u(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1 \end{cases}$$

On note alors $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Proposition: Un polynôme est équivalent en $\pm\infty$ à son terme de plus haut degré.

Preuve:
Soit $P : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$. On pose $Q : x \mapsto a_n x^n$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, P(x) &= a_n x^n \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k x^k}{a_n x^n} \right) \\ &= Q(x) \left(1 + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} \times \left(\frac{1}{x^{n-k}} \right)}_{u(x)} \right) \\ &= Q(x)\, u(x) \end{aligned}$$

On a $u(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1$ donc $P(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} Q(x)$. □

Proposition: Un polynôme est équivalent en 0 à sont terme de plus bas degré.

Preuve:
À faire □

Remarque:
Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a tel que

$$\forall x \in I, g(x) \neq 0$$

où I est un intervalle
- qui contient a si $a \in \mathbb{R}$,
- dont une borne est a si $a = \pm\infty$.

Alors,

$$f \underset{a}{\sim} g \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[\substack{x \to a \\ \neq}]{} 1.$$

Exemple:
$x^2 + x^3 \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ car $\dfrac{x^2+x^3}{x^2} = 1 + x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

Exemple:
Soit f une fonction.

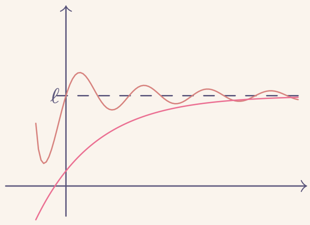
$$f \underset{0}{\sim} 0 \iff \exists I \text{ voisinage de } a, \forall x \in I, f(x) = 0.$$

2 Asymptotes, branches paraboliques et prolongement par continuité

<u>Cas1</u>

Limite en $+\infty$:

$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.



On dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une <u>asymptote</u> horizontale.

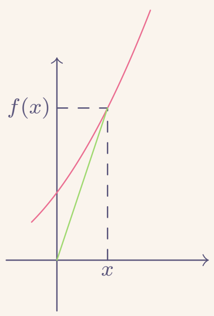
<u>Cas2</u>

$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$ dans ce cas, on cherche $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

<u>Sous cas 1</u> $\dfrac{f(x)}{x}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

?

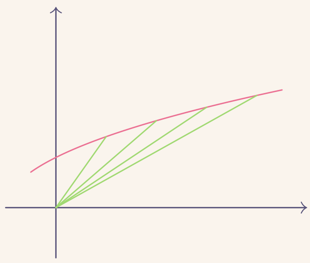
<u>Sous cas 2</u> $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.



On dit que la courbe de f présente <u>une branche parabolique</u> de <u>direction asymptotique</u> l'axee des ordonées.

$\dfrac{f(x)}{x}$ est la pente de la droite verte.

<u>Sous cas 3</u> $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.



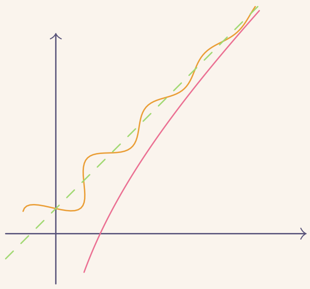
On dit que la courbe de f présente <u>une</u>

<u>branche parabolique</u> de <u>direction asymptotique</u> l'axe des ordonées.

$\dfrac{f(x)}{x}$ est la pente de la droite verte.

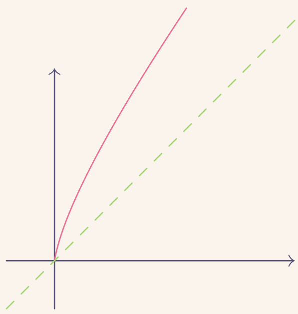
<u>Sous cas 4</u> $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}^+$. On cherche $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - \ell x\big)$.

<u>*Sous-souscas1*</u> $f(x) - \ell x \xrightarrow[x\to+\infty]{} a \in \mathbb{R}$



Asymptote oblique d'équation $y = \ell x + a$.

<u>*Sous-souscas2*</u> $f(x) - \ell x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$



Branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = \ell x$.

<u>*Sous-souscas2*</u> $f(x) - \ell x$ n'a pas de limite

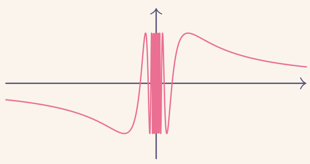
?

Limite en $a \in \mathbb{R}$:

On cherche $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

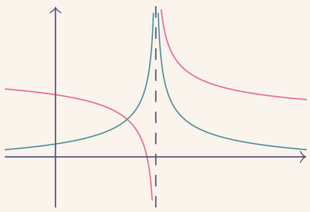
<u>Cas1</u>

Pas de limite



$\boxed{\text{ex}}$ $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0 :

<u>Cas2</u> $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$

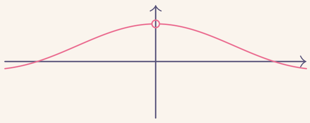


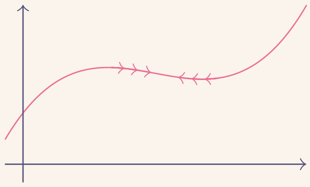
Asymptote verticale d'équation $x = a$.

<u>Cas3</u> $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{ex}}$ $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, dans ce cas, on pose

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$





On pose $f(a) = \ell$. On dit que l'on a <u>prolongé par continuité</u> la fonction f.

CHAPITRE

4

FONCTIONS USUELLES

1 Logarithme népérien

Théorème (théorème fondamental de l'analyse)**:** Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors il existe F dérivable sur I telle que

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x).$$

Preuve (c.f. chapitre 5 : calcul intégral)*:* □

Définition: La fonction <u>ln</u> est l'unique primitive sur $\mathbb{R}_*^+$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

Proposition:
1. $\ln 1 = 0$;
2. ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0, \ln' x = \frac{1}{x}.$$

□

Corollaire:

$$\forall x > 0, \ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Preuve:

Soit

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}_*^+ &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\forall x > 0, \varphi(x) &= [\ln t]_1^x\\ &= \ln x - \ln 1\\ &= \ln x\end{aligned}$$

□

Remarque:

$$\begin{aligned}u : \mathbb{R}_*^- &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \ln(-x)\end{aligned}$$

u est dérivable sur $\mathbb{R}_*^-$ et

$$\forall x < 0, u'(x) = \ln'(-x) \times (-1) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Donc u est une primite de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_*^-$.

Soit $v : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \ln\big(|x|\big).\end{array}$ $|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc v aussi.

$$\begin{aligned}\forall x > 0, v(x) &= \ln x\\ \text{donc } \forall x > 0, v'(x) &= \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall x < 0, v(x) &= \ln(-x) = u(x)\\ \text{donc } \forall x < 0, v'(x) &= \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}^*, v'(x) = \dfrac{1}{x}$. Ainsi, v est <u>une</u> primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ mais cette primitive n'est pas unique :

$$\begin{aligned}w : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \begin{cases}1 + \ln x & \text{si } x > 0\\ \ln(-x) - 3 & \text{si } x < 0\end{cases}\end{aligned}$$

est une autre primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Corollaire: ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.

Preuve:

$$\forall x > 0, \ln' x = \frac{1}{x} > 0.$$

□

Proposition: Soit f une fonction croissante sur $]a, b[$ avec $\begin{cases} a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}. \end{cases}$ et $a < b$.

1. Si f est majorée, $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) \in \mathbb{R}$.
2. Si f n'est pas majorée, $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = +\infty$.
3. Si f est minorée, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) \in \mathbb{R}$.
4. Si f n'est pas minorée, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$.

□

Proposition:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_*^+, \ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

Preuve:
Soit $a > 0$ et $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(ax). \end{array}$

u est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et

$$\forall x > 0, u'(x) = \ln'(ax) \times a = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$$

Donc u est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_*^+$. Comme $\mathbb{R}_*^+$ est un intervalle, il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, u(x) = \ln x + C.$$

En particulier,

$$\begin{array}{ccc} u(1) & = & \ln 1 + C \\ \| & & \| \\ \ln a & = & C \end{array}$$

Donc

$$\forall x > 0, \ln(ax) = \ln x + \ln a.$$

□

Corollaire: Soit $a > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors $\ln(a^n) = n \ln(a)$.

Preuve (par récurrence sur n)*:*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$\mathscr{P}(n) : \text{“}\ln(a^n) = n \ln a\text{”}.$$

— Avec $n = 0$, $\ln(a^n) = \ln 1 = 0 = 0 \times \ln a$
— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie.
$$\begin{aligned}\ln(a^{n+1}) &= \ln(a \times a^n)\\ &= \ln a + \ln(a^n)\\ &= \ln a + n \ln a\\ &= (n+1) \ln a\end{aligned}$$

Donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ln(a^n) = n \ln a.$$

—
$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) + \ln a = \ln\left(\frac{1}{a} \times a\right) = \ln 1 = 0$$
donc $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$
— Soit $n \in \mathbb{Z}^-$. Alors,
$$\ln(a^n) = \ln\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}\right) = -n \ln \frac{1}{a} = n \ln a.$$

□

Corollaire:
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty\end{cases}$$

Preuve:
Comme ln est croissante sur $]0, +\infty[$, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x$ existe. C'est un réle ou $+\infty$.

Supposons cette limite réelle : on pose $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = \ell \in \mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(2^n) = \ell$ car $2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Or,
$$\forall x \in \mathbb{N}, \ln(2^n) = n \ln 2$$
et $2 > 1$ donc $\ln 2 > \ln 1 = 0$ donc $n \ln 2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$: une contradiction.

Donc $\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
$$\forall x > 0, \ln x = -\ln \frac{1}{x} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ >}]{} -\infty$$
car $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ >}]{} +\infty$. □

Proposition:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Preuve:
Soit $x \geqslant 1$. On a

$$0 = \ln 1 \leqslant \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

et

$$\forall t \in [1, x], t \geqslant \sqrt{t}$$

donc

$$\forall t \in [1, x], \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

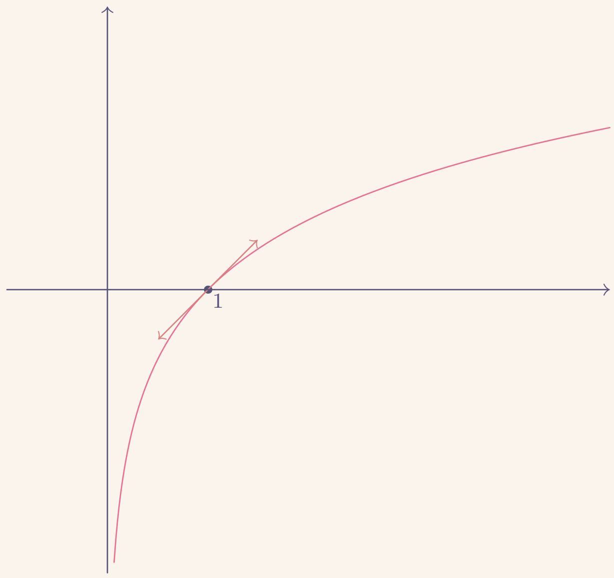
Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\ln x = \int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \left[2\sqrt{t}\right]_1^x = 2\sqrt{x} - 2.$$

Ainsi,

$$\forall x \geqslant 1, 0 \leqslant \frac{\ln x}{x} \leqslant 2 \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}.$$

Par encadrement, on a donc $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. □



2 Exponentielle

Proposition: $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est bijective.

Preuve:
ln est continue sur $\mathbb{R}_*^+$ (car elle est dérivable) et strictement croissante, donc elle établit

une bijection de $]0,+\infty[$ dans $\left]\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x, \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x\right[=]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$. □

Définition: La fonction exponentielle est la réciproque du logarithme népérien. On la note exp.

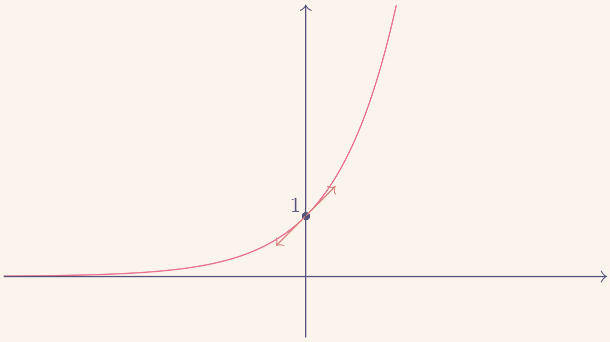
Proposition:

1. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)$;
2. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty; \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0; \end{cases}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(x)}{x} = +\infty$;
4. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Preuve:

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\ln'\big(\exp(x)\big) = \frac{1}{\exp(x)} \neq 0$$
donc exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \frac{1}{\ln'\big(\exp(x)\big)} = \exp(x).$$
2. — $\ln u \xrightarrow[u\to 0]{} -\infty$ donc $\exp(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$
   — $\ln u \xrightarrow[u\to+\infty]{} +\infty$ donc $\exp(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $x = \ln u$ $\Big(\iff u = \exp(x)\Big)$. Donc
$$\frac{\exp(x)}{x} = \frac{u}{\ln u} = \frac{1}{\frac{\ln u}{u}} \xrightarrow[u\to+\infty]{} +\infty.$$
4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On pose $\begin{cases} a = \ln \alpha, \\ b = \ln \beta. \end{cases}$
On a $\exp(a) \times \exp(b) = \alpha\beta$ et
$$\begin{aligned} \exp(a+b) &= \exp\big(\ln(\alpha) + \ln(\beta)\big) \\ &= \exp\big(\ln(\alpha\beta)\big) \\ &= \alpha\beta \end{aligned}$$

□



3 Fonctions puissances

Remarque (Rappel):

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall x > 0, x^a = \exp(a \ln x).$$

En particulier, en posant $x = e = \exp(1)$, on a donc

$$\forall a \in \mathbb{R}, e^a = \exp(a).$$

Remarque (Notation):

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour ce chapitre, on note p_a : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^a \end{array}$.

Proposition: Soit $a \in \mathbb{R}$. p_a est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et

$$\forall x > 0, p_a'(x) = ax^{a-1}.$$

Preuve:

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, p_a(x) = e^{a \ln x}.$$

Or, ln, exp, $x \mapsto ax$ sont dérivables sur leur domaine de définition donc p_a aussi et

$$\forall x > 0, p_a'(x) = \frac{a}{x} e^{a \ln x} = \frac{a}{x} x^a = ax^{a-1}.$$

□

Corollaire:
1. $\forall a \in \mathbb{R}_-^*$, p_a est strictement décroissante.
2. $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, p_a est strictement croissante.
3. p_0 est la fonction constante égale à 1.

Preuve:
Pour tout $x > 0$, $p_a'(x)$ est du signe de a puisque

$$x^{a-1} = e^{(a-1) \ln x} > 0.$$

□

Proposition:

1. Si $a > 0$, $\begin{cases} p_a(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty, \\ p_a(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ >}]{} 0; \end{cases}$
2. Si $a < 0$, $\begin{cases} p_a(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0, \\ p_a(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ >}]{} +\infty; \end{cases}$
3. Si $a = 0$, $\begin{cases} p_a(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1, \\ p_a(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ >}]{} 1. \end{cases}$

Preuve:
À faire $\square$

Proposition: On suppose $a > 0$.

1. Si $a > 1$, alors $\dfrac{p_a(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty\,;$
2. Si $a < 1$, alors $\dfrac{p_a(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0\,;$
3. Si $a = 1$, alors $\forall x > 0, p_a(x) = x$.

Preuve:

$$\forall x > 0, \frac{p_a(x)}{x} = \frac{x^a}{x} = x^{a-1}.$$

$\square$

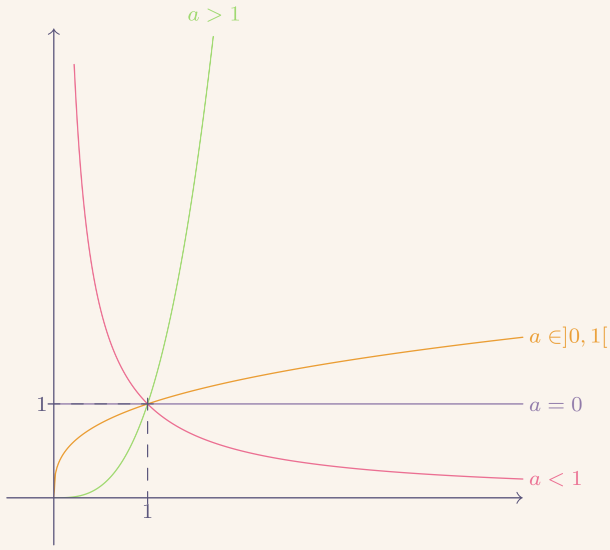
Proposition: On suppose $a > 0$. On peut prolonger p_a par continuité en 0 en posant $p_a(0) = 0$.

1. Si $a > 1$, alors $p'_a(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ >}]{} 0\,;$
2. Si $a < 1$, alors $p'_a(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ >}]{} +\infty\,;$

Preuve:

1. On suppose $a > 1$. Alors,
$$\forall x > 0, p'_a(x) = ax^{a-1} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ >}]{} 0.$$
2. On suppose $a < 1$.
$$\forall x > 0, p'_a(x) = ax^{a-1} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ >}]{} +\infty.$$

$\square$



Proposition (croissances comparées)**:** Soient $a, b \in \mathbb{R}_*^+$. Alors,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^a(x)}{x^b} = 0.$$

Exemple:
Si on ne dispose pas de la formule :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \ ?$$

On a

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{2 \ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} = \underbrace{2\ \frac{\ln u}{u}}_{\xrightarrow[u \to +\infty]{} 0} \quad \text{avec } u = \sqrt{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

Preuve:

$$\forall x > 1, \frac{\ln^a(x)}{x^b} = \frac{e^{a \ln(\ln x)}}{e^{b \ln x}} = e^{a \ln(\ln x) - b \ln x}.$$

Or $\ln(\ln x) \underset{x \to +\infty}{=} o(\ln x)$ car $\dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x} = \underbrace{\dfrac{\ln u}{u}}_{\xrightarrow[u \to +\infty]{} 0}$ avec $u = \ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

Donc,

$$\frac{\ln^a(x)}{x^b} = e^{o(\ln x) - b \ln x} = e^{\ln(x)\left(-b + o(1)\right)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$$

car $\begin{cases} -b + o(1) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -b < 0 \\ \ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty. \end{cases}$ □

Corollaire:

$$x\ln x \xrightarrow[x \to 0]{>} 0.$$

Preuve:
Pour $x \in]0,1[$, on pose $u = \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{>} +\infty$.

Donc,

$$\begin{aligned}\forall x \in]0,1[, x\ln x &= \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{u} \\ &= -\frac{\ln u}{u} \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

□

Corollaire: Soit $a > 0$. Alors

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0.$$

Preuve:
On fait le changement de variables $u = e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

$$\forall x > 0, \frac{x^a}{e^x} = \frac{\ln^a u}{u} \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0.$$

□

4 Exponentielle et logarithme de base a

Définition: Soit $a > 0$. L'application $\exp_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_*^+ \\ x & \longmapsto & a^x = e^{x\ln a} \end{array}$ est appelée <u>exponentielle de base a</u>.

Remarque:
L'exponentielle de base e est l'exponentielle classique.

Proposition: $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp_a'(x) = \ln(a)\exp_a(x) = a^x \ln a.$$

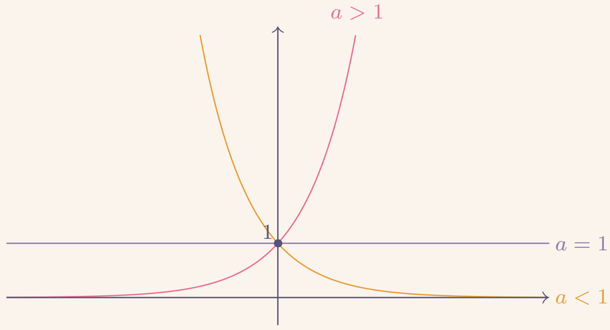
□

Corollaire:
1. Si $a \in]0,1[$, alors $\exp_a$ est strictement décroissante.
2. Si $a > 1$, alors $\exp_a$ est strictement croissante.
3. Si $a = 1$, alors $\exp_a(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

□

Proposition: 1. Si $a \in]0,1[$,
- $\exp_a(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$,
- $\exp_a(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$,
- $\dfrac{\exp_a(x)}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$;

2. Si $a > 1$,
- $\exp_a(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$,
- $\dfrac{\exp_a(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$,
- $\exp_a(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$;



Proposition: Si $a \in \mathbb{R}_*^+ \setminus \{1\}$, alors $\exp_a$ est bijective.

Définition: Soit $a > 0$ et $a \neq 1$.

La réciproque de $\exp_a$ est appelé <u>logarithme de base a</u> et est noté $\log_a$.

Proposition: Si $a \in \mathbb{R}_*^+ \setminus \{1\}$, alors

$$\forall x > 0, \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Preuve:
Soit $a \in \mathbb{R}_*^+ \setminus \{1\}$.
- Soit $x > 0$,
$$\exp_a\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) = e^{\frac{\ln x}{\ln a}\times \ln a} = e^{\ln x} = x$$
- Soit $x \in \mathbb{R}$,
$$\frac{\ln\left(\exp_a(x)\right)}{\ln a} = \frac{\ln\left(e^{x\ln a}\right)}{\ln a} = \frac{x\ln a}{\ln a} = x.$$

Donc, $\log_a : x \mapsto \dfrac{\ln x}{\ln a}$ est bien la réciproque de $\exp_a$. $\square$

Exemple:

Combien y a-t-il de chiffres dans la représentation décimale de 2^{2021} ?

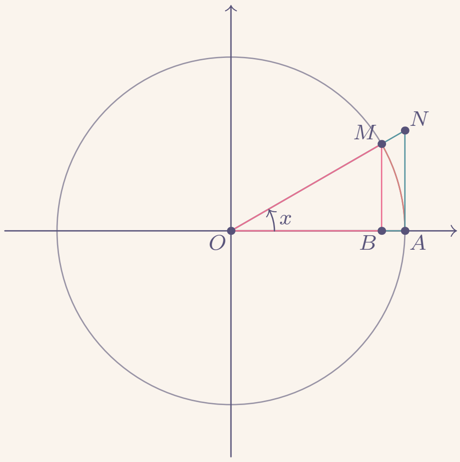
Soit $N \in \mathbb{N}$. La représentation décimale de 2^{2021} a N chiffres si et seulement si

$$\begin{aligned} & 10^{N-1} \leqslant 2^{2021} < 10^N \\ \iff & N-1 \leqslant \log_{10}\left(2^{2021}\right) < N \\ \iff & N-1 \leqslant 2021\log_{10} 2 < N \\ \iff & N > 2021\log_{10} 2 \text{ et } N \leqslant 2021\log_{10}(2)+1 \\ \iff & \underbrace{2021\log_{10} 2}_{\simeq 608{,}3} < N \leqslant 2021\log_{10}(2)+1 \implies \qquad N = 609. \end{aligned}$$

5 Fonctions trigonométriques

Proposition:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



Preuve:
Soit $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On pose $M(\cos x, \sin x)$ et $N(1, \tan x)$.

Le triangle OBM est contenu dans le secteur OAM donc

$$\frac{\cos(x)\sin(x)}{2} \leqslant \frac{x}{2}.$$

Le secteur OAM est contenu dans le triangle OAN donc

$$\frac{x}{2} \leqslant \frac{\tan x}{2} = \frac{\sin x}{2\cos x}.$$

D'où,

$$\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{1}{\cos x}$$

Or, $\cos x \xrightarrow[x \to 0]{>} 1$ et $\dfrac{1}{\cos x} \xrightarrow[x \to 0]{>} 1$.

Par encadrement, on en déduit que

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ >}]{} 1$$

et

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[, \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x} \xrightarrow[\substack{x \to O \\ >}]{} 1 \text{ d'après le calcul précédent.}$$

$\square$

Corollaire: sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\begin{cases} \sin' = \cos, \\ \cos' = -\sin. \end{cases}$

Preuve:
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \\ &= \frac{-1 + \cos h}{h} \sin x + \frac{\sin h}{h} \cos x \\ &= \sin x \times \frac{-2\sin^2 \frac{h}{2}}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \end{aligned}$$

Or, $\sin^2 \dfrac{h}{2} \underset{h \to 0}{\sim} \left(\dfrac{h}{2}\right)^2 = \dfrac{h^2}{4}$. Alors

$$\frac{\sin^2 \frac{h}{2}}{h} \underset{h \to 0}{\sim} \frac{h}{4} \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

Donc,

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \cos x.$$

Également, $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times (-1) = -\sin x.$$

$\square$

Proposition: La fonction tan est dérivable sur $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv \dfrac{\pi}{2} \ [\pi]\right\} = D$ et

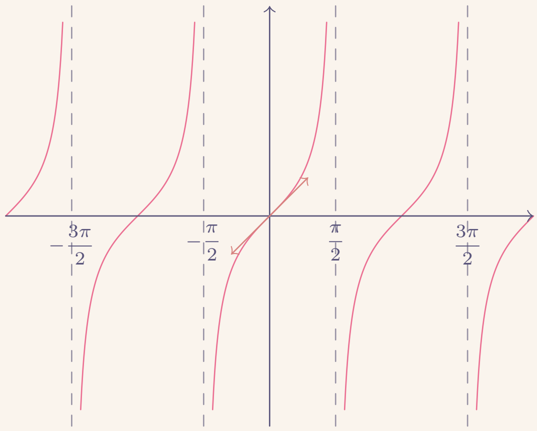
$$\forall x \in D, \tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Preuve:
$\forall x \in D, \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc tan est dérivable sur D.

$$\forall x \in D, \tan' x = \underset{\substack{\| \\ 1+\tan^2 x}}{\dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$$

□

Proposition: $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ <}} \tan x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ >}} = -\infty$. □



Proposition: cotan est dérivable sur $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \equiv 0 \ [\pi]\}$ et

$$\forall x \in D, \operatorname{cotan}' x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{cotan}^2 x.$$

Preuve:
On a

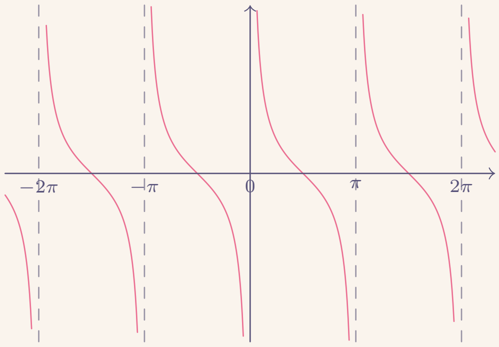
$$\forall x \in D, \operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Donc,

$$\forall x \in D, \operatorname{cotan}' x = \underset{\substack{\| \\ -1-\operatorname{cotan}^2 x.}}{\dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$$

□

Proposition: $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ <}} \operatorname{cotan} x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ >}} \operatorname{cotan} x = +\infty$. □



6 Fonctions trigonométriques réciproques

Proposition – Définition: L'application $\begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$ est bijective.
On appelle arcsinus la réciproque de cette bijection et on la note Arcsin.

Pour tout $x \in [-1,1]$, $\operatorname{Arcsin} x$ est le seul angle $\boxed{\text{compris entre } -\frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{\pi}{2}}$ donc le sinus vaut x. □

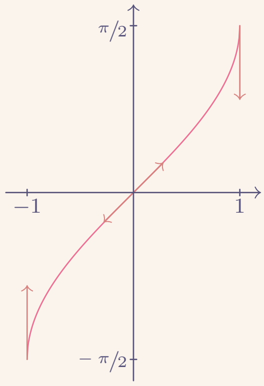
Exemple:
— $\operatorname{Arcsin} 0 = 0$,
— $\operatorname{Arcsin} 1 = \frac{\pi}{2}$,
— $\operatorname{Arcsin}\left(\sin \frac{3\pi}{2}\right) \neq \frac{3\pi}{2}$ car $\operatorname{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}$.
— $\operatorname{Arcsin}\left(\sin \frac{7\pi}{5}\right) = \frac{-2\pi}{5}$ car $\sin \frac{7\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{7\pi}{5}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$ et $-\frac{2\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Proposition:
1. $\forall x \in [-1,1], \operatorname{Arcsin} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
2. $\forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \operatorname{Arcsin}(\sin\theta) = \theta$
3. $\forall x \in [-1,1], \sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$
4. $\forall x \in [-1,1], \cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$

Preuve: 1., 2. et 3. correspondent à la définition de Arcsin.
4. Soit $x \in [-1,1]$. On pose $\theta = \operatorname{Arcsin} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On sait que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ donc $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \sin^2(\operatorname{Arcsin} x) = 1 - x^2$. On en déduit que $|\cos\theta| = \sqrt{1-x^2}$. Comme $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\theta \geqslant 0$ et donc
$$\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}.$$
□

Proposition:
1. Arcsin est impaire
2. Arcsin est continue sur $[-1,1]$

3. Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et
$$\forall x \in]-1,1[, \operatorname{Arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$$
4. Arcsin n'est pas dérivable en 1 et en -1.



Preuve: 1. Soit $x \in [-1,1]$. Alors $-x \in [-1,1]$. On pose $\theta = \operatorname{Arcsin}(-x)$. θ est le seul nombre compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ vérifiant $\sin\theta = -x$.

Arcsin $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $-\operatorname{Arcsin} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On a
$$\sin(-\operatorname{Arcsin} x) = -\sin(\operatorname{Arcsin} x) = -x$$
donc
$$\theta = \operatorname{Arcsin}(-x) = -\operatorname{Arcsin} x.$$

2. sin est continue et strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$ à valeurs dans $[-1,1]$ donc Arcsin est continue sur $[-1,1]$.
3. Soit $x \in [-1,1]$. $\sin'(\operatorname{Arcsin} x) = \cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$ donc
$$\forall x \in]-1,1[, \sin'(\operatorname{Arcsin} x) \neq 0.$$
Donc Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et
$$\forall x \in]-1,1[, \operatorname{Arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
4. Arcsin est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$, et
$$\forall x \in]-1,1[, \operatorname{Arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow[x\to\pm 1]{} +\infty.$$
D'après le théorème de la limite de la dérivée, Arcsin n'est pas dérivable en ± 1.

$\square$

Remarque:
Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ est Arcsin.

Proposition – Définition: L'application $\begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$ est bijective. On note sa réciproque Arccos.

En d'autres termes, pour $x \in [-1,1]$, $\operatorname{Arccos} x$ est le seul angle $\boxed{\text{compris entre } 0 \text{ et } \pi}$ dont le cosinus vaut x.

Preuve:
Théorème de la bijection continue. □

EXEMPLE:
$\operatorname{Arccos} 0 = \dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{Arccos} \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$, $\operatorname{Arccos}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$,
$\operatorname{Arccos}\left(\cos \dfrac{75\pi}{67}\right) = \dfrac{59\pi}{67} \in [0,\pi]$ car $\cos \dfrac{75\pi}{67} = \cos\left(\dfrac{75\pi}{67} - 2\pi\right) = \cos\left(-\dfrac{59\pi}{67}\right) = \cos \dfrac{59\pi}{67}$.

Proposition:
1. $\forall x \in [-1,1]$, $\operatorname{Arccos} x \in [0,\pi]$,
2. $\forall \theta \in [0,\pi]$, $\operatorname{Arccos}(\cos\theta) = \theta$,
3. $\forall x \in [-1,1]$, $\cos(\operatorname{Arccos} x) = x$,
4. $\forall x \in [-1,1]$, $\sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2}$.

Preuve: 1., 2. et 3. correspondent à la définition de Arccos.

4. Soit $x \in [-1,1]$.
$$\sin^2(\operatorname{Arccos} x) = 1 - \cos^2(\operatorname{Arccos} x) = 1 - x^2$$
$$\text{donc } \left|\sin(\operatorname{Arccos} x)\right| = \sqrt{1-x^2}.$$
Or, $\operatorname{Arccos} x \in [0,\pi]$ donc $\sin(\operatorname{Arccos} x) \geqslant 0$ et donc
$$\sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2}.$$
□

Proposition:
1. Arccos est continue sur $[-1,1]$,
2. Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et
$$\forall x \in]-1,1[, \operatorname{Arccos}' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Preuve:
1. cos est coninue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$ à valeurs dans $[-1,1]$ donc Arccos continue dans $[-1,1]$.
2.
$$\begin{aligned} \forall x \in]-1,1[, \cos'(\operatorname{Arccos} x) &= -\sin(\operatorname{Arccos} x) \\ &= -\sqrt{1-x^2} \neq 0 \end{aligned}$$

donc Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\text{Arccos}' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < 0.$$

□

Corollaire:

$$\forall x \in [-1,1],\ \text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x = \frac{\pi}{2}$$

Preuve: <u>MÉTHODE1</u> Soit $f : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{Arcsin}\, x + \text{Arccos}\, x \end{array}$ continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$. On a

$$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

donc f est constante sur $]-1,1[$:

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-1,1[, f(x) = C.$$

En particulier,

$$f(0) = \text{Arccos}\, 0 + \text{Arcsin}\, 0 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

<u>MÉTHODE2</u> Soit $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} \sin(\text{Arccos}\, x) = \sqrt{1-x^2} &= \cos(\text{Arcsin}\, x) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\, x\right) \end{aligned}$$

donc

$$\text{Arccos}\, x \equiv \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\, x \ \ [2\pi] \ \text{ ou } \ \pi - \text{Arccos}\, x \equiv \frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\, x \ \ [2\pi]$$

donc

$$\begin{aligned} &\exists k \in \mathbb{Z},\ \text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou } &\exists k \in \mathbb{Z},\ -\text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi. \end{aligned}$$

Or, $\begin{cases} 0 \leqslant \text{Arccos}\, x \leqslant \pi \\ 0 \leqslant \text{Arcsin}\, x \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$ donc $0 \leqslant \text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x \leqslant \pi$

$\iff \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leqslant -\text{Arccos}\, x \leqslant 0 \\ 0 \leqslant \text{Arcsin}\, x \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$ donc $-\frac{\pi}{2} \leqslant -\text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x \leqslant \frac{\pi}{2}$

D'où

$$\text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x = \frac{\pi}{2} \ \text{ ou } \ -\text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x = -\frac{\pi}{2}$$

— Si $-\text{Arccos}\, x > -\frac{\pi}{2}$ ou $\text{Arcsin}\, x > 0$, alors $-\text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x > -\frac{\pi}{2}$ et donc

$$\text{Arccos}\, x + \text{Arcsin}\, x = \frac{\pi}{2}.$$

— Si $-\operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}$ et $\operatorname{Arcsin} x = 0$, alors $x = 0$ et donc

$$\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Soit $x \in [-1, 0[$. On pose $y = -x \in [0, 1]$

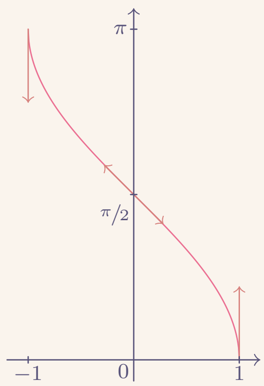
— $\operatorname{Arcsin} x = -\operatorname{Arcsin} y$,

— $\operatorname{Arccos} x = \pi - \operatorname{Arccos} y$: en effet, $\cos(\pi - \operatorname{Arccos} y) = -\cos(\operatorname{Arccos} y) = -y = x$ et $0 \leqslant \operatorname{Arccos} y \leqslant \pi$ donc $-\pi \leqslant \operatorname{Arccos} y \leqslant 0$ et donc $0 \leqslant \pi - \operatorname{Arccos} y \leqslant \pi$

D'où,

$$\begin{aligned}\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x &= \pi - \operatorname{Arccos} y - \operatorname{Arcsin} y \\ &= \pi - (\operatorname{Arccos} y + \operatorname{Arcsin} y) \\ &= \pi - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

□



Proposition – Définition: L'application $\begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x \end{array}$ est bijective. On note Arctan la réciproque de cette bijection.

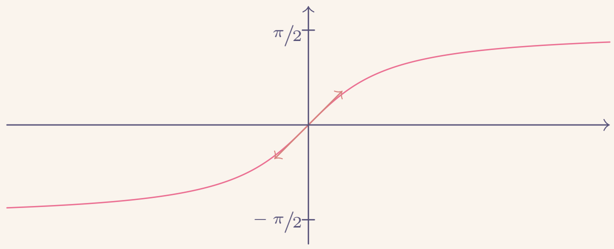
C'est à dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan} x$ est le seul angle $\boxed{\text{compris entre } -\frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{\pi}{2} \text{ (exclus)}}$ dont la tangente vaut x.

Preuve:
Théorème de la bijection continue. □

Exemple:
$\operatorname{Arctan} 0 = 0$, $\operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{Arctan} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$,
$\operatorname{Arctan}(\tan \frac{9\pi}{7}) = \frac{2\pi}{7} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ car $\tan \frac{9\pi}{7} = \tan\left(\frac{9\pi}{7} - \pi\right) = \tan \frac{2\pi}{7}$.

Proposition:

1. Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{Arctan}' x = \frac{1}{1+x^2},$$
2. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan} x = \dfrac{\pi}{2}, \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{Arctan} x = -\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$
3. Arctan est impaire.



Preuve:

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \tan'(\operatorname{Arctan} x) = 1 + \tan^2(\operatorname{Arctan} x) = 1 + x^2 \neq 0$ donc Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$
2. On déduit des limites de tan les limites de Arctan.
3. Comme pour Arcsin.

□

Proposition:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Preuve:

On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \end{array}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \times \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

⚠ $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle !

— $\mathbb{R}_*^+$ est un intervalle donc $\exists C^+ \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_*^+, f(x) = C^+$

— $\mathbb{R}_*^-$ est un intervalle donc $\exists C^- \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_*^-, f(x) = C^-$

$f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ donc $C^+ = \frac{\pi}{2}$,
$f(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$ donc $C^- = -\frac{\pi}{2}$. □

7 Trigonométrie hyperbolique

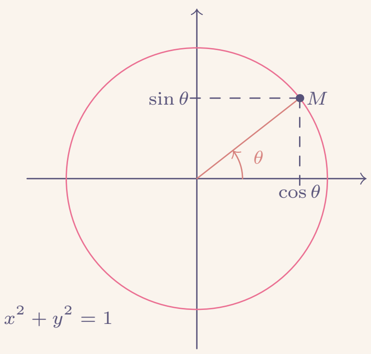
Définition: Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

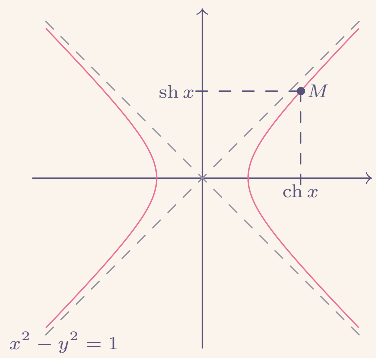
$$\begin{cases} \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}. \end{cases}$$

ch est appelé cosinus hyperbolique, sh est appelé sinus hyperbolique et th est appelé tangeante hyperbolique.

Remarque:
Ces formules rappèlent les formules d'Euler : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \longleftrightarrow \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \longleftrightarrow \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$





Proposition:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1.$$

Preuve:

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t &= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{\cancel{e^t} + e^{-t} - \cancel{e^t} + e^{-t}}{2} \times \frac{e^t + \cancel{e^{-t}} + e^t - \cancel{e^{-t}}}{2} \\
&= \frac{2e^{-t}}{2} \times \frac{2e^t}{2} \\
&= e^{-t} \times e^t \\
&= 1
\end{aligned}$$

□

Exercice:
Expliciter $\operatorname{ch}(a+b)$ *avec* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

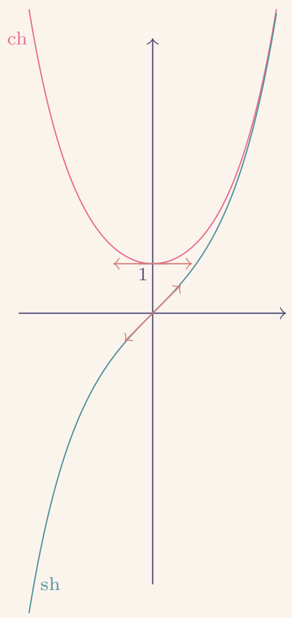
$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) &= \frac{2e^{a+b} + e^{b-a} + e^{a-b}}{4} + \frac{2e^{-(a+b)} - e^{a-b} - e^{b-a}}{4} \\
&= \frac{1}{4}\left(2e^{a+b} + 2e^{-(a+b)}\right) \\
&= \frac{e^{a+b} + e^{-(a+b)}}{2} \\
&= \operatorname{ch}(a+b).
\end{aligned}$$

Expliciter $\operatorname{sh}(a+b)$ *avec* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(b)\operatorname{ch}(a) &= \frac{1}{4}\left(2e^{a+b} + \cancel{e^{a-b}} - \cancel{e^{b-a}} + \cancel{e^{b-a}} - \cancel{e^{a-b}} - 2e^{-(a+b)}\right) \\
&= \frac{e^{a+b} - e^{-(a+b)}}{2} \\
&= \operatorname{sh}(a+b)
\end{aligned}$$

Proposition:

1. ch est paire, sh est impaire ;
2. ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\begin{cases} \operatorname{ch}' = \operatorname{sh}, \\ \operatorname{sh}' = \operatorname{ch}; \end{cases}$
3. sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$;
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$;
5. $\operatorname{ch} x \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2}e^x$ et $\operatorname{sh} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2}e^x$.



Preuve: 1.

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x; \\ \operatorname{sh}(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\operatorname{sh} x. \end{cases}$$

2. $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc ch et sh aussi. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \operatorname{ch}'(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x); \\ \operatorname{sh}'(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(x). \end{cases}$$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} > 0$ donc sh strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x > \operatorname{sh} 0 = 0$ (car sh strictement croissante) et $\operatorname{ch}' 0 = \operatorname{sh} 0 = 0$. Donc, ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

4. et 5.

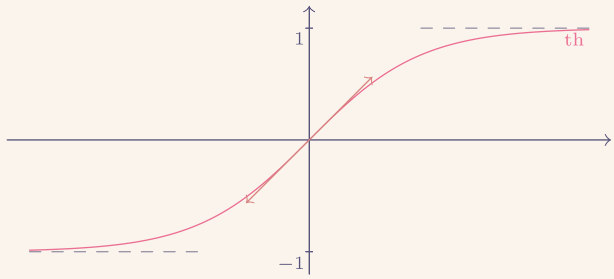
$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \operatorname{ch} x = \dfrac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) = \dfrac{e^{x}}{2}\left(1 + e^{-2x}\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{e^{x}}{2} \longrightarrow +\infty; \\ \operatorname{sh} x = \dfrac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) = \dfrac{e^{x}}{2}\left(1 - e^{-2x}\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{e^{x}}{2} \longrightarrow +\infty; \end{cases}$$

□

Remarque:
La courbe représentative de ch est appelée “chaînette”.

Proposition: 1. th est imapire ;

2. th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x;$$
3. th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{th} x = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{th} x = -1$.



Preuve: 1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\operatorname{th}(-x) = \frac{\operatorname{sh}(-x)}{\operatorname{ch}(-x)} = -\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = -\operatorname{th} x.$$

2. sh et ch sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x \neq 0$ donc th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}' x = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{2} &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \\ &= 1 - \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x.\end{aligned}$$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th}' x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} > 0$ donc th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. On a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \sim \frac{e^x/2}{e^x/2} = 1 \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$
et, comme th est impaire,
$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{th} x = -\lim_{x \to +\infty} \operatorname{th} x = -1.$$

□

Exercice:
Résoudre $\operatorname{sh} x = y$ *d'inconnue* x *et* y *étant un paramètre réel.*

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh} x = y &\iff \frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \\
&\iff (e^x)^2 - 1 = 2ye^x \\
&\iff (e^x - y)^2 - \overbrace{(y^2+1)}^{>0} = 0 \\
&\iff \left(e^x - y - \sqrt{y^2+1}\right)\left(e^x - y + \sqrt{y^2+1}\right) \\
&\iff e^x = y + \sqrt{y^2+1} \ \text{ ou } \ e^x = y - \sqrt{y^2+1}
\end{aligned}$$

Or, $\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)\left(y - \sqrt{1+y^2}\right) = -1 < 0$ donc $y + \sqrt{1+y^2}$ et $y - \sqrt{1+y^2}$ sont de signes opposés.

Comme $y + \sqrt{1+y^2} > y - \sqrt{1+y^2}$, on a $\begin{cases} y + \sqrt{1+y^2} > 0 \\ y - \sqrt{1+y^2} < 0 \end{cases}$ d'où

$$\operatorname{sh} x = y \iff e^x = y + \sqrt{1+y^2} \iff x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right).$$

On a trouvé la réciproque de sh :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Argsh} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)
\end{aligned}$$

CHAPITRE

5

CALCUL INTÉGRAL

1 Généralités

Définition: Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction continue et $a, b \in I$.

On définit l'intégrale de f de a à b par

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f.

La variable x est muette :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\ \mathrm{d}u = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(❀)\ \mathrm{d}❀ \neq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}t$$

Proposition (Croissance)**:** Soient f et g continues sur I, $a, b \in I^2$ tels que $\begin{cases} \forall x \in I, f(x) \leqslant g(x), \\ a \leqslant b. \end{cases}$

Alors
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Preuve:
On pose, pour tout $x \in I$, $h(x) = g(x) - f(x) \geqslant 0$. h est continue sur I.

Soit H une primitive de h sur I. Donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x &= \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\ \mathrm{d}x \\ &= -\int_a^b h(x)\ \mathrm{d}x \\ &= H(a) - H(b)\end{aligned}$$

Or, $h = H' \geqslant 0$ donc H est croissante sur I. Comme $b \geqslant a$, $H(b) \geqslant H(a)$ et donc $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x \leqslant 0$. □

Proposition (Linéarité)**:** Soient f et g continues sur I, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\int_a^b \big(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\big)\ \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Preuve:
Soient F et G deux primitives sur I de f et g respectivement.

$\alpha F + \beta G$ est un primitive de $\alpha f + \beta g$ sur I car

$$(\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g.$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta(g)\big)\ \mathrm{d}x &= (\alpha F + \beta G)(b) - (\alpha F + \beta G)(a) \\ &= \alpha F(b) + \beta G(b) - \alpha F(b) - \beta G(a) \\ &= \alpha\big(F(b) - F(a)\big) + \beta\big(G(b) - G(a)\big) \\ &= \alpha \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

Proposition (Chasles)**:** Soit f continue sur un interval I, $a, b, c \in I$. Alors

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Preuve:

Soit F une primitive de f sur I. Alors,

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_b^c\ \mathrm{d}x &= F(c) - F(a) + F(b) - F(c)\\ &= F(b) - F(a)\\ &= \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

Proposition: Soit f positive et continue sur un interval I, $(a,b) \in I^2$ avec $a \leqslant b$. Alors

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = 0 \iff \forall x \in [a,b], f(x) = 0.$$

Preuve:
Soit F une primitive de f.

"$\implies$" On suppose que $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = 0$. Donc $F(b) = F(a)$.

Comme $F' = f \geqslant 0$, F est croissante.

□

CHAPITRE

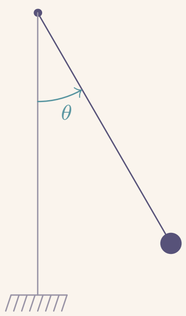
6

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Définition: Une équation différentielle est une égalité faisant intervenir une fonction inconnue y ainsi que ses dérivées successives $y', y'', y^{(3)}, \ldots, y^{(n)}$.

Exemple: 1. $y^{(3)} + \ln\left(y'\right) = e^y$

2.



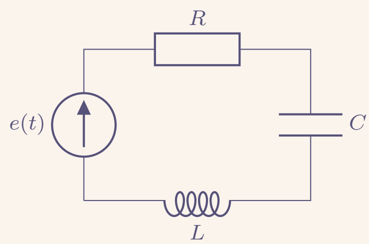
On a $\ddot{\theta} + \sin(\theta) = 0$ i.e. $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \sin(\theta) = 0$
Pour les "petits angles", $\sin(\theta) \simeq 0$. On résout donc

$$\ddot{\theta} = -\theta$$

3.

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = e(t)$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = e(t)$$



4. Modèle de population : $\dfrac{dN}{dt} = \lambda N(1-N)$

Définition: Une équation différentielle linéaire d'ordre n est de la forme

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b(t)$$

où $b, a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des fonctions connues et continues sur un intervalle I. On dit que b est le second membre de l'équation.

Exemple ($\cos(t)y'' + \sin(t)y' = \tan(t)$):

Proposition (Principe de superposition)**:** Soient b_1 et b_2 continues sur I. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ également continues sur I.

$$(E_1) : \quad \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = b_1$$
$$(E_2) : \quad \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = b_2$$

Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$.

$$(E) : \quad \sum_{k=1}^{n} a_k y^{(k)} = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 \text{ solution de } (E_1) \\ y_2 \text{ solution de } (E_2) \end{array}\right\} \implies \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \text{ solution de } (E)$$

Preuve:
On pose $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ dérivable n fois car c'est le cas de y_1 et y_2 Donc,

$$\forall k \in [\![0, n]\!], y^{(k)} = \lambda_1 y_1^{(k)} + \lambda_2 y_2^{(k)}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\lambda_1 y_1^{(k)} + \lambda_2 y_2^{(k)}\right) \\ &= \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} a_k y_1^{(k)} + \lambda_2 \sum_{k=1}^{n} a_k y_2^{(k)} \\ &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \end{aligned}$$

□

Proposition: Soit (E) l'équation différentielle $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = b$ où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des fonctions homogènes. L'<u>équation homogène</u> associée à (E) est

$$(H) : \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0$$

Les solutions de (E) sont toutes de la forme $h + y_0$ où h est solution de (H) et y_0 solution de (E).

Preuve:
Soit y une solution de (E) et y_0 une solution particulière de (E). On pose $h = y - y_0$.
D'après le principe de superposition, h est une solution de (H).

Réciproquement, si h est une solution de (H) et y_0 une solution de (E) alors $h + y_0$ est aussi solution de (E). □

Théorème (Théorème de Cauchy)**:** Soit (E) une équation linéaire différentielle.

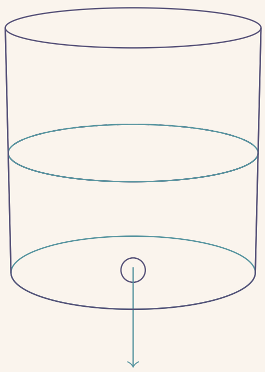
$$(E): \quad y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = b$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont <u>continues</u> sur un <u>intervalle</u> I.
Soit $t_0 \in I$ et $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$.
Il existe **une et une seule** fonction y telle que

$$\begin{cases} y \text{ solution de } (E) \\ \forall i \in [\![0, n-1]\!], y^{(i)}(t_0) = \alpha_i \end{cases}$$

Exemple:
On ne peut pas déduire le passé d'un sceau percé, son équation est non-linéaire.

$$h' = -c\sqrt{h} \text{ avec } c \in \mathbb{R}_*^+$$



1

Soit (E) l'équation $y' + ay = b$ où a et b sont continues sur un intervalle I.

Proposition: Soit A une primitive de a sur un intervalle I.

$$(H): \quad y' + ay = 0$$

Les solutions de (H) sont $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$

Preuve:
Soit y une fonction dérivable sur I. On pose

$$z : t \mapsto y(t)e^{A(t)}$$

dérivable sur I et

$$\begin{aligned}\forall t \in I, z'(t) &= y'(t)e^{A(t)} + y(t)A'(t)e^{A(t)} \\ &= \left(y'(t) + a(t)y(t)\right)e^{A(t)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y \text{ solution de } (H) &\iff \forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = 0 \\ &\iff \forall t \in I, z'(t) = 0 \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall t \in I, z(t) = \lambda \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall t \in I, y(t) = \lambda e^{-A(t)}\end{aligned}$$

□

Remarque (pseudo preuve):

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0 &\iff \frac{dy}{y} = -a(t)dt \\ &\iff \int \frac{dy}{y} = \int -a(t)dt \\ &\iff \ln(y) = -A(t) + K \\ &\iff y = e^{-A(t)+K} \\ &\iff y = \lambda e^{-A(t)} \text{ avec } \lambda = e^K\end{aligned}$$

2 Annexe

$y : I \to E$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$$\begin{aligned}(*) : \quad & y' + a(x)y = 0 \text{ et } y(x_0) = 0 \\ \iff & \forall x \in I, y(x) = -\int_{x_0}^{x} a(u)y(u)\ du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T : E^I &\longrightarrow E^I \\ y &\longmapsto \left(x \mapsto -\int_{x_0}^{x} a(u)y(u)\ du\right)\end{aligned}$$

donc $(*) \iff T(y) = y$

CHAPITRE

7

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Définition: Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$.

On dit que f possède un développment limité d'ordre n au voisinage de a s'il existe des réels $(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \underset{x \to a}{o}\big((x-a)^n\big).$$

En particulier, avec $a = 0$, on a

$$f(x) = \underbrace{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n}_{\text{développement de Taylor}} + \underbrace{\underset{x \to 0}{o}(x^n)}_{\text{reste}}.$$

Théorème (Taylor-Young)**:** Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ (i.e. f définie et dérivable n fois et $f^{(n)}$ est continue) au voisinage de a, alors f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a est

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + \cdots + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \underset{x \to a}{o}\big((x-a)^n\big).$$

□

Remarque:
Cette formule est à éviter en pratique : il est bien trop difficile de calculer $f^{(n)}$ pour tout n.

Cependant, on peut quand même en déduire le développement limité de exp, cos, sin et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0.

Corollaire:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n),\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n}),\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}),\\
\forall \alpha \in \mathbb{R},\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots\\
&\quad + \alpha(\alpha-1)\cdots\big(\alpha-(\alpha-1)\big)\frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n).
\end{aligned}$$

Remarque:
Avec $\alpha = -1$, on obtient le développement limité de $\dfrac{1}{1+x}$ en 0 :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

On en déduit donc le développement limité en 0 de $\dfrac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on obtient le développement limité à l'ordre 2 de $\sqrt{1+x}$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Théorème (primitivation)**:** Soit f une fonction continue en a ayant un développement limité d'ordre n au voisinage de a. Soient $(c_0, c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\big((x-a)^n\big).$$

Soit F une primitive de f. Alors F a un développement limité d'ordre $n+1$ au voisinage de a et

$$F(x) = F(a) = c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + \cdots + c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + \underset{x\to a}{o}\big((x-a)^{n+1}\big).$$

□

Corollaire: En primitivant le développement limité de $\dfrac{1}{x+1}$, on obtient le développement limité de $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1}).$$

On en déduit aussi le développement limité de Arctan :

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}).$$

$\square$

Exercice (*Calculer $DL_5(0)$ de* $\tan$):

Méthode 1 (quotient) : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

On a

$$\begin{cases} \sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^5), \\ \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^5). \end{cases}$$

On calcule d'abord le développement limité de $\dfrac{1}{\cos x}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} \\ &= \frac{1}{1+u} \text{ avec } u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \\ &= 1 - u + u^2 + o(u^2) \\ &= 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) \\ &\quad + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) \\ &\quad + o\left(\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2\right) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^5) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5). \end{aligned}$$

On en déduit le développement limité de $\tan x$:

$$\begin{aligned} \tan x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\right) \\ &= x + \frac{x^3}{2} + \frac{5x^5}{24} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5). \end{aligned}$$

À connaître :

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).}$$

Méthode 2 (déterminer les coefficiants)

On identifie les coefficants :

$$\begin{aligned} \sin x &= (\tan x)(\cos x) \\ &= \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + o(x^5)\right) \\ &\times \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) \\ &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + o(x^5) \\ &- c_0 \frac{x^2}{2} - c_1 \frac{x^3}{2} - c_2 \frac{x^4}{2} - c_3 \frac{x^5}{2} + c_0 \frac{x^4}{24} + c_1 \frac{x^5}{24} \end{aligned}$$

Par unicité du développement limité,

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 1 \\ c_2 - \dfrac{c_0}{2} = 0 \\ c_3 - \dfrac{c_1}{2} = -\dfrac{1}{6} \\ c_4 - \dfrac{c_2}{2} + \dfrac{c_0}{24} = 0 \\ c_5 - \dfrac{c_3}{2} + \dfrac{c_1}{24} = \dfrac{1}{120} \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} c_0 = c_2 = c_4 = 0 \\ c_1 = 1 \\ c_3 = \dfrac{1}{3} \\ c_5 = \dfrac{2}{15} \end{cases}$$

Méthode 3 (primitivation)

On sait que

$$\frac{\tan x - \tan 0}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} \tan'(0) = 1$$

donc $\tan x \sim x$ et donc $\tan x = x + o(x)$.
D'où

$$\begin{aligned} \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) &= 1 + \big(x + o(x)\big)^2 \\ &= 1 + x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

En intégrant, on en déduit que

$$\tan x = \tan 0 + x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Donc,

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= 1 + \tan^2 x \\ &= 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 \\ &= 1 + x^2 + \frac{x^6}{9} + o(x^6) + 2\frac{x^4}{3} + o(x^4) + o(x^6) \\ &= 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

On en déduit donc le développement limité à l'ordre 5 de tan :

$$\tan x = \underbrace{\tan 0}_{\substack{\| \\ 0}} + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

CHAPITRE

8

ENSEMBLES, APPLICATIONS, RELATIONS ET LOIS DE COMPOSITION

1 Théorie naïve des ensembles

Définition: Un ensemble est une collection finie ou infinie d'objets de même nature ou non. L'ordre de ces objets n'a pas d'importance.

EXEMPLE:
1. $\left\{1, x \mapsto x^2, \{1\}\right\}$ est un ensemble : ses éléments dont l'entier 1, la fonction $x \mapsto x^2$ et un ensemble contenant uniquement 1 (un singleton).
2. $\mathbb{N}$ est un ensemble infini

REMARQUE (Notation):
Soit E un ensemble et x un objet de E.
On écrit $x \in E$ ou bien $x \ni E$.

REMARQUE (⚠ Paradoxe):
On note Ω l'ensemble de tous les ensembles. Alors, $\Omega \in \Omega$.
Ce n'est pas le cas de tous les ensembles :

$$\mathbb{N} \notin \mathbb{N} \text{ car } \mathbb{N} \text{ n'est pas un entier}$$

On distingue donc 2 types d'ensembles :
— ceux qui vérifient $E \notin E$, on dit qu'ils sont ordinaires
— ceux qui vérifient $E \in E$, on dit qu'ils sont extra-ordinaires

On note O l'ensemble de tous les ensembles ordinaires.
— Supposons O ordinaire. Alors, $O \notin O$
  Or, O est ordinaire et donc $O \in O$ ↯
— Supposons O extra-ordinaire.
  Alors $O \in O$ et donc O ordinaire ↯

C'est un paradoxe

Pour éviter ce type de paradoxe, on a donné une définition axiomatique qui explique quelles sont les opérations permettant de combiner des ensembles pour en faire un autre.

Définition: Soit E un ensemble et F un autre ensemble. On dit que E et F sont <u>égaux</u> (noté $E = F$) si E et F contiennent les mêmes objets.

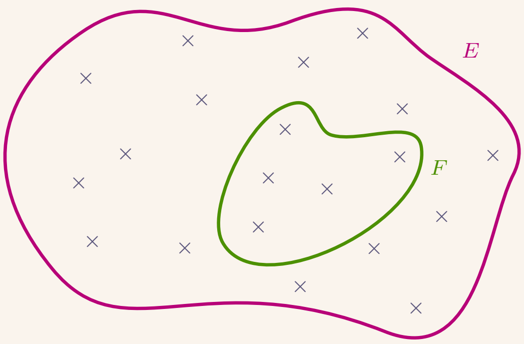
Exemple:

1. $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{3, 2, 1, 2\}$
   On a bien $E = F$.
2. $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$ car $\begin{cases} -1 \in \mathbb{Z} \\ -1 \notin \mathbb{N} \end{cases}$
3. $E = \{0, \{0\}\} \neq \{0\} = F$
   car $\begin{cases} \{0\} \in E \\ \{0\} \notin F \end{cases}$
   mais, $F \in E$

Définition: L'ensemble <u>vide</u>, noté $\varnothing$ est le seul ensemble à n'avoir aucun élément.

Définition: Soient E et F deux ensembles. On dit que F est <u>inclus</u> dans E, noté $F \subset E$ ou $E \supset F$ si tous les éléments de F sont aussi des éléments de E.

$$\forall x \in F, x \in E$$



Proposition: Pour tout ensemble E, $\varnothing \subset E$

Preuve (par l'absurde):
Si $\varnothing \not\subset E$ alors $\exists x \in \varnothing, x \notin E$: une contradiction ↯

□

Exemple: 1. $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{1, 3\}$

On a $F \subset E$ mais pas $E \subset F$ car $\begin{cases} 2 \in E \\ 2 \notin F \end{cases}$

2. $F = \{0\}$ et $E = \{0, \{0\}\}$
   — $F \in E$ car $\{0\} \in E$
   — $F \subset E$ car $0 \in E$
3. $E = \{\{0\}\}\,; F = \{0\}$
   — $F \not\subset E$ car $0 \notin E$
   — $F \in E$
4. $E = \{\{\{0\}\}\}; F = \{0\}$
   — $F \notin E$
   — $F \not\subset E$
   — $\varnothing \subset F$
   — $\varnothing \subset E$

Définition: Soit E un ensemble. On peut former l'ensemble de toutes les parties de E (une partie de E est un ensemble F avec $F \subset E$). On le note $\mathscr{P}(E)$

$$A \in \mathscr{P}(E) \iff A \subset E$$

Exemple: 1. $E = \{42\}$
Les sous-ensembles de E sont $\varnothing$ et $\{42\} = E$ donc

$$\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{42\}\}$$

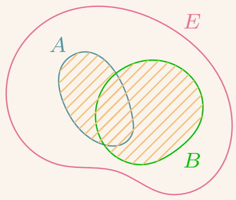
2. $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$
3. $E = \{0, 1\}$ donc $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$
4. $E = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ donc $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$
5. $E = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(\mathscr{P}(E)) &= \mathscr{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, E)\\ &= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}, \{E\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}, \{\varnothing, E\}, \{\{\varnothing\},\\ &\quad \{\{\varnothing\}\}\}, \{\{\varnothing\}, E\}, \{\{\{\varnothing\}\}, E\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, E\},\\ &\quad \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}, E\}, \{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, E\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, E\}\}\end{aligned}$$

Définition: Soit E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$

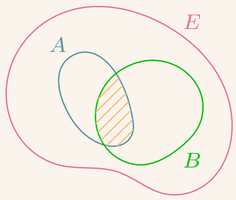
1. La réunion de A et B est

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



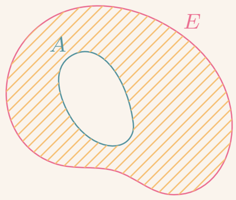
2. L'intersection de A et B est

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$



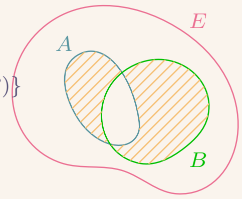
3. Le complémentaire de A dans E est

$$E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\} = C_E A$$



4. La différence symétrique de A et B est

$$\begin{aligned} A \Delta B &= \{x \in E \mid (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \notin A \text{ et } x \in B)\} \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$



Proposition: Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$

1. $A \cap A = A$
2. $B \cap A = A \cap B$
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4. $A \cap \varnothing = \varnothing$
5. $A \cap E = A$
6. $A \cup A = A$
7. $B \cup A = A \cup B$
8. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
9. $A \cup \varnothing = A$
10. $A \cup E = E$
11. $(E \setminus A) \setminus A = E \setminus A$
12. $E \setminus (E \setminus A) = A$
13. $E \setminus \varnothing = E$
14. $E \setminus E = \varnothing$
15. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
16. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
17. $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$
18. $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$

Preuve: 16. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

— Soit $x \in A \cap (B \cup C)$ donc $x \in A$ et $x \in B \cup C$

Cas1 $x \in B$, alors $x \in A \cap B$ et donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Cas2 $x \in C$, alors $x \in A \cap C$ et donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
On a prouvé

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

— Soit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Cas1 $x \in A \cap B$ donc $x \in A$ et $x \in B$ donc $x \in B \cup C$ et donc $x \in A \cap (B \cup C)$
Cas2 $x \in A \cap C$ donc $x \in A$ et $x \in C$ donc $x \in B \cup C$ et donc $x \in A \cap (B \cup C)$
On a prouvé

$$A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

17. $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$

— Montrons que $x \in E \setminus (A \cup B) \implies x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$
Soit $x \in E \setminus (A \cup B)$ donc $x \notin A \cup B$
— Si $x \in A$, alors $x \in A \cup B$ ↯
donc $x \notin A$ i.e. $x \in E \setminus A$
— Si $x \in B$ alors, $x \in A \cup B$ ↯
Donc $x \notin B$ i.e. $x \in E \setminus B$
On en déduit que $x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$

— $x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$. Montrons que $x \in E \setminus (A \cup B)$
On suppose que $x \notin E \setminus (A \cup B)$ donc $x \in A \cup B$
— Si $x \in A$, on a une contradiction car $x \in E \setminus A$
— Si $x \in B$, on a une contradiction car $x \in E \setminus B$
donc $x \in E \setminus (A \cup B)$

□

2 Applications

Définition: Une application f est la donnée de
— un ensemble E appelé ensemble de départ
— un ensemble F appelé ensemble d'arrivée
— une fonction qui associe à tout élément x de E un unique élément de F noté $f(x)$
L'application est notée

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Exemple: 1. Soit $\mathscr{P}$ le plan (affine) et $A \in \mathscr{P}$. Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des droites.

$$\begin{aligned} f : \mathscr{P} \setminus \{A\} &\longrightarrow \mathscr{D} \\ B &\longmapsto (AB) \end{aligned}$$

2. $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$
$F = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

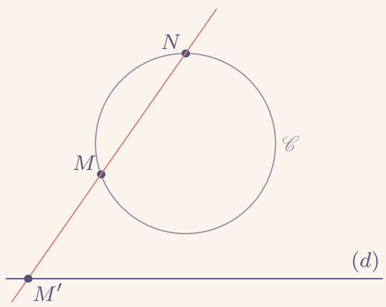
3. $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ f &\longmapsto f'\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

4. $E = [0,1]$ et $F = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$

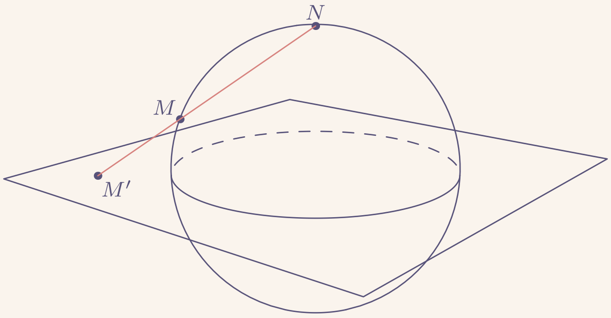
$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto \int_a^x t^2 \ln(t)\, dt \end{aligned}$$

5.



$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{C} \setminus \{N\} &\longrightarrow (d) \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

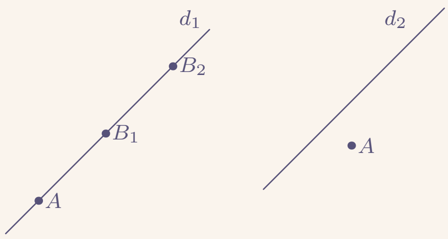
6.



> **Définition:** Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est
> — injective si tout élément de F a au plus un antécédent par f
> — bijective si tout élément de F a un unique antécédent par f
> — surjective si tout élément de F a au moins un antécédent par f

Exemple (suite des exemples précédents):

1. L'application n'est ni injective ni surjective



B_1 et B_2 sont deux antécédants de d_1
d_2 n'a pas d'antécédant par f

2. L'application n'est pas injective :
   — $f : x \mapsto x$ est continue
   — $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ et $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + 42$ sont deux antécédants de f.

   Mais, l'application est surjective d'après le théorème fondamental de l'analyse
3. L'application n'est pas injective ($x \mapsto 0$ et $x \mapsto 42$ sont deux antécédants de 0) mais elle est surjective ($\forall x \in \mathbb{R}, x \mapsto ax$ est un antécédant de a).
4. L'application est injective mais pas surjective (les images sont des primitives de $x \mapsto x^2 \ln(x)$)
5. et 6. sont bijectives

> **Définition:** Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. L'application notée $g \circ f$ est définie par
>
> $$\begin{aligned} g \circ f : E &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$
>
> On dit que c'est la composée de f et g.

> **Proposition:** Soient $f : E \to F, g : F \to G, h : G \to G$. Alors, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Preuve:
Par définition, $g \circ f : E \to F$ donc $h \circ (g \circ f) : E \to H$
et $h \circ g : F \to H$ donc $(h \circ g) \circ f : E \to H$ Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f)(x) &= h(g \circ f(x)) \\ &= h(g(f(x))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (h \circ g) \circ f(x) &= h \circ g(f(x)) \\ &= h(g(f(x))) \end{aligned}$$

Donc, $h \circ (g \circ f)(x) = (h \circ g) \circ f(x)$ □

Remarque (⚠ Attention):
En général, $g \circ f \neq f \circ g$

Par exemple, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$

Alors, $f \circ g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ et $g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$

donc $f \circ g \neq g \circ f$

Proposition: Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$

1. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective
2. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective
3. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective
4. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective

Preuve:
1. On suppose $g \circ f$ injective. On veut montrer que f est injective. Soient $(x, y) \in E^2$. On suppose $f(x) = f(y)$. Montrons que $x = y$.
   Comme $f(x) = f(y)$, $g(f(x)) = g(f(y))$ i.e. $g \circ f(x) = g \circ f(y)$
   Or, $g \circ f$ injective donc $x = y$
2. On suppose $g \circ f$ surjective. On veut montrer que g est surjective. Soit $y \in G$. On cherche $x \in F$ tel que $g(x) = y$.
   Comme $g \circ f : E \to G$ surjective, y a un antécédant $z \in E$ par $g \circ f$.
   On pose $x = f(z) \in F$ et on a bien $g(x) = y$
3. On suppose f et g injectives. Montrons que $g \circ f$ injective. Soient $x, y \in E$. On suppose $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Montrons $x = y$
   On sait que $g(f(x)) = g(f(y))$. Comme g est injective, $f(x) = f(y)$ et comme f est injective, $x = y$
4. On suppose f et g surjectives. Soit $y \in G$. On cherche $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = y$
   Comme g est surjective, y a un antécédant $z \in F$ par g
   Comme f est surjectives, z a un antécédant $x \in E$ par f
   On en déduit $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(z) = y$

□

Remarque:

$f : E \longrightarrow F$

$$f \text{ injective} \iff \Big(\forall (x,y) \in E^2, f(x) = f(y) \implies x = y\Big)$$

Définition: Soit $f : E \to F$ une <u>bijection</u>. L'application $\left\{ \begin{array}{ccl} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f \end{array} \right.$ est la <u>réciproque</u> de f notée f^{-1}

Définition: L'<u>identité de E</u> est $\mathrm{id}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$

Proposition: Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$

$$\left.\begin{array}{l} f \circ g = \mathrm{id}_F \\ g \circ f = \mathrm{id}_E \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} f \text{ bijective} \\ f^{-1} = g \end{array}\right.$$

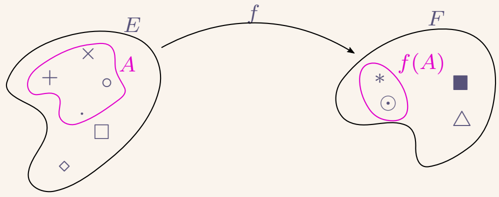
Preuve (déjà faite)*:*

□

Définition: Soit $f : E \to F$

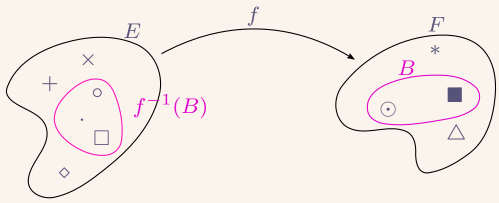
1. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. L'<u>image directe</u> de A par f est

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$



2. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. L'<u>image réciproque</u> de B par f est

$$f^{-1}(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}$$



Remarque:

— $y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)$,
— $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$.

Proposition: Soient $f : E \to F$, $A \in \mathscr{P}(E)$ et $F \in \mathscr{P}(F)$.

1. $f^{-1}\big(f(A)\big) \supset A$,
2. Si f est injective alors $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$,
3. $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$,
4. Si f est surjective, alors $f\big(f^{-1}(B\big) = B$.

Preuve:
1. Soit $x \in A$. Montrons que $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$ i.e. montrons que $f(x) \in f(A)$. Comme $x \in A$, $f(x) \in f(A)$.
2. On suppose f injective. Montrons que $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$. Soit $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$, montrons que $x \in A$. On sait que $f(x) \in f(A)$. Donc, il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Or, f est injective et donc $x = a$. On en déduit que $x \in A$.
   D'après 1., on sait que $f^{-1}\big(f(A)\big) \supset A$. On a montré $f^{-1}\big(f(A)\big) \subset A$. Donc
   $$f^{-1}\big(f(A)\big) = A.$$
3. Soit $y \in f\big(f^{-1}(B)\big)$. Montrons $y \in B$. On sait qu'il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. On a donc $f(x) \in B$ et donc $y \in B$.
4. On suppose f surjective, montrons $B \subset f\big(f^{-1}(B)\big)$. Soit $y \in B$, montrons $y \in f\big(f^{-1}(B)\big)$. On cherche $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. C'est à dire, on cherche $x \in E$ tel que $f(x) \in B$ et $y = f(x)$. On sait que f est surjective donc y a un antécédant $x \in E$ tel que $B \ni y = f(x)$.
   On vient de montrer $B \subset f\big(f^{-1}(B)\big)$ et on a montré dans 3. que $B \supset f\big(f^{-1}(B)\big)$. On en déduit que
   $$f\big(f^{-1}(B)\big) = B.$$

$\square$

Proposition: Soit $f : E \to F$ et $(A, B) \in \mathscr{P}(F)^2$. Alors
$$\begin{cases} f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), & (1) \\ f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). & (2) \end{cases}$$

Preuve:
Soit $x \in E$.
$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cup B) &\iff f(x) \in A \cup B \\ &\iff f(x) \in A \text{ ou } f(x) \in B \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \text{ ou } x \in f^{-1}(B) \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cap B) &\iff f(x) \in A \cap B \\ &\iff f(x) \in A \text{ et } f(x) \in B \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \text{ et } x \in f^{-1}(B) \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). \end{aligned}$$

$\square$

Proposition: Soient $f : E \to F$ et $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$.

1. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
2. Si f est injective, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
3. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Preuve:

1. Soit $y \in f(A \cap B)$. Soit $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A$, $f(x) \in f(A)$ et comme $x \in B$, $f(x) \in f(B)$ et donc $y \in f(A) \cap f(B)$
2. On suppose f injective. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$.
   Comme $y \in f(A)$, il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$.
   Comme $y \in f(B)$, il existe $b \in B$ tel que $y = f(b)$.
   Comme f est injective, $a = b$ et donc $a \in A \cap B$. On en déduit que
   $$y = f(a) \in f(A \cap B).$$
3. Soit $y \in F$. Alors
   $$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\iff \exists x \in A \cup B; y = f(x) \\ &\iff (\exists x \in A \text{ ou } \exists x \in B), y = f(x) \\ &\iff y \in f(A) \text{ ou } y \in f(B) \\ &\iff y \in f(A) \cup f(B). \end{aligned}$$

□

Remarque (Contre-exemple pour 2.):
Cas d'une application qui n'est pas injective

On pose $A = \mathbb{R}_*^+$, $B = \mathbb{R}_*^-$ et

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

On a $A \cap B = \varnothing$ donc $f(A \cap B) = \varnothing$.

Or, $\left.\begin{aligned} f(A) = \mathbb{R}_*^+ \\ f(B) = \mathbb{R}_*^+ \end{aligned}\right\}$ donc $f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}_*^+$.

On a

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

Définition: Soit $f : E \to F$ et $A \in \mathscr{P}(E)$.

La restriction de f à A est

$$\begin{aligned} f_{|A} : A &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x)a \end{aligned}$$

On dit aussi que f est **un** prolongement de $f_{|A}$.

Remarque (Notation):
L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E.

Exemple:

On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ un prolongement de f car $g_{|\mathbb{R}^*} = f$.

L'applications $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ est un autre prolongement de f.

3 Relations binaires

Définition: Soit E un ensemble. Un relation (binaire) sur E est un prédicat définit sur E^2.

Exemple:

1. Avec $E = \mathbb{C}$, $=$ est une relation binaire,
2. Avec $E = \mathbb{R}$, $\leqslant$ est une relation binaire,
3. Avec E l'humanité et la relation binaire $\wedge$:

$$x \wedge y \iff x \text{ et } y \text{ ont la même mère.}$$

Définition: Soit E un ensemble, $\diamond$ une relation sur E. On dit que $\diamond$ est un relation d'équivalence si

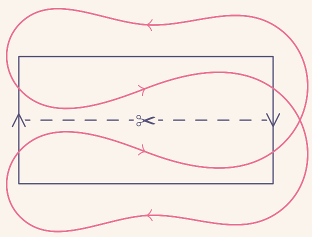
1. $\forall x \in E, x \diamond x$, (réflectivité)
2. $\forall x, y, \in E, x \diamond y \implies y \diamond x$, (symétrie)
3. $\forall x, y, z \in E, \left.\begin{array}{c} x \diamond y \\ y \diamond z \end{array}\right\} \implies x \diamond z$ (transitivité)

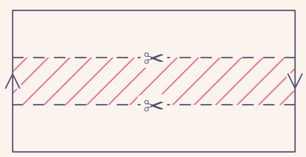
Exemple:
Avec $E = \mathbb{Z}$ et

$$x \diamond y \iff x \equiv y \ [3]$$

"$\diamond$" est une relation d'équivalence.

Remarque:
Le but d'une relation d'équivalence est d'identifier des objets différents.





Définition: Soit E un ensemble et $\diamond$ une relation d'équivalence sur E. Soit $x \in E$. La classe de x (modulo $\diamond$) est

$$\mathscr{C}\ell_{\diamond}(x) = \mathscr{C}\ell(x) = \overline{x} = \{y \in E \mid y \diamond x\}.$$

Exemple: 1. Avec $E = \mathbb{C}$ et $\diamond$ = "$=$",

$$\forall z \in \mathbb{C}, \overline{z} = \mathscr{C}\ell(z) = \{z\}.$$

2. Avec $E = \mathbb{Z}$ et $\diamond$ = congruence modulo 5, on a

$$\overline{0} = \{5k \mid k \in \mathbb{Z}\} \qquad \overline{1} = \{5k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$
$$\overline{2} = \{5k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\} \qquad \overline{3} = \{5k+3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$
$$\overline{4} = \{5k+4 \mid k \in \mathbb{Z}\} \qquad \overline{5} = \overline{0}$$

On constate que

$$x \equiv y \ [5] \iff \overline{x} = \overline{y}.$$

Proposition: Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\diamond$. Alors

$$\forall x, y \in E, x \diamond y \iff \overline{x} = \overline{y}.$$

Preuve:
Soient $x, y \in E$.
- On suppose $x \diamond y$. Soit $z \in \overline{x}$. On sait que $z \diamond x$ et $y \diamond x$. Par transitivité, on en déduit que $z \diamond y$ et donc $z \in \overline{y}$.
- Soit $z \in \overline{y}$, donc $y \diamond z$. Or $x \diamond y$. Comme $\diamond$ est symétrique, on a $y \diamond x$ et par transitivité, on a donc $z \diamond x$. Donc $z \in \overline{x}$.
- On suppose $\overline{x} = \overline{y}$. $\diamond$ réfléctive donc $x \diamond x$ et donc $x \in \overline{x} = \overline{y}$ donc $x \in \overline{y}$ et donc $x \diamond y$.

□

Hors-Programme

Définition: Soit E un ensemble et $\diamond$ une relation d'équivalence.

L'ensemble

$$\{\overline{x} \mid x \in E\} = {}^{E}/_{\diamond}$$

est appelé quotient de E modulo $\diamond$.

Exemple: 1. $E = \mathbb{Z}$ et $\diamond$ = congruence modulo 5 :

$${}^{E}/_{\diamond} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\right\} = {}^{\mathbb{Z}}/_{5\mathbb{Z}}$$

2. *Construction de* $\mathbb{Q}$

On suppose avoir déjà construit $\mathbb{Z}$ mais pas $\mathbb{Q}$: on veut donc donner un définition de ${}^{p}/_{q}$ sans parler de division.

On pose

$$E = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* = \{(p, q) \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}.$$

Soit $\sim$ la relation définie par

$$(p, q) \sim (p', q') \iff pq' = p'q$$

Montrons que $\sim$ est une relation d'équivalence.
- Soient $(p, q) \in E$. $\sim$ est réfléctive car $(p, q) \sim (p, q) \iff pq = pq$.

— Soient $(p,q),(p',q') \in E$. On suppose $(p,q) \sim (p',q')$.

$$\begin{aligned}(p,q) \sim (p',q') &\iff pq' = p'q \\ &\iff p'q = pq' \\ &\iff (p',q') \sim (p,q)\end{aligned}$$

Donc $\sim$ est symétrique.

— Soient $(p,q),(p',q'),(p'',q'') \in E$. On suppose

$$\begin{cases}(p,q) \sim (p',q') \\ (p',q') \sim (p'',q'')\end{cases}$$

On sait que

$$(p,q) \sim (p'',q'') \iff pq'' = p''q$$

Or,

$$\begin{cases}pq' = qp' \\ p'q'' = p''q'\end{cases} \qquad \text{donc } pq'p'q'' = p'q'p''q'$$

Donc

$$p'q'(pq'' - p''q) = 0$$

et donc

$$p' = 0 \ \text{ ou } \ pq'' - p''q = 0$$

Si $p' = 0$, alors $\begin{cases}pq' = 0 \\ p''q' = 0\end{cases}$ et donc $\begin{cases}p = 0 \\ p'' = 0\end{cases}$. On a donc

$$pq'' = 0 = p''q$$

Si $p' \neq 0$, on a $pq'' - p''q = 0$ et donc

$$pq'' = p''q$$

On a donc $(p,q) \sim (p'',q'')$.

On pose $\mathbb{Q} = {}^{E}/_{\sim}$ et

$$\forall (p,q) \in E,\ \frac{p}{q} = \mathscr{C}\ell\big((p,q)\big).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} &\iff \mathscr{C}\ell\big((p,q)\big) = \mathscr{C}\ell\big((p',q')\big) \\ &\iff (p,q) \sim (p',q') \\ &\iff pq' = p'q\end{aligned}$$

3. *Construction de $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$*
   On pose $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et $\sim$ la relation $(p,q) \sim (p',q') \iff p + q' = p' + q$.
   $\sim$ est une relation d'équivalence. On pose donc $\mathbb{Z} = {}^{\mathbb{N}}/_{\sim}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, on définit n par $\mathscr{C}\ell\big((n,0)\big)$ et $-n$ par $\mathscr{C}\ell\big((0,n)\big)$.
4. *Constrcution de $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{R}$*
   On pose E l'ensemble des polynômes à coefficients réels ($E = \mathbb{R}[X]$) et $\diamond$ la relation d'équivalence

$$P \diamond Q \iff P \equiv Q \ \left[x^2+1\right]$$

   On pose $\mathbb{C} = {}^{E}/_{\diamond}$.

Il manque une partie du cours ici

Définition: Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E.

On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une <u>partition</u> de E si

$$\begin{cases} E = \bigcup_{i\in I} A_i \\ \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing \end{cases}$$

On a donc

$$\forall x \in E, \exists! i \in I, x \in A_i.$$

Proposition: Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\diamond$. Les classes d'équivalences de E modulo $\diamond$ forment une partition de E.

Preuve:

— Soit $x \in E$. On sait que $x \diamond x$ donc $\overline{x} \ni x$. On a montré $E \subset \bigcup_{y\in E} \overline{y}$.

— $\forall y \in E, \overline{y} \subset E$ donc $E \supset \left(\bigcup_{y\in E} \overline{y}\right)$.

— Soit $x, y \in E$ tel que $\overline{x} \neq \overline{y}$. Montrons que $\overline{x} \cap \overline{y} = \varnothing$. Soit $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$. $z \in \overline{x}$ donc $z \diamond x$. De même, $z \in \overline{y}$ donc $z \diamond y$. Par transitivité, $x \diamond y$ et donc $\overline{x} = \overline{y}$: une contradiction.

□

Proposition: Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une partition de E telle que

$$\forall i \in I, A_i \neq \varnothing.$$

Alors il existe une relation d'équivalence $\diamond$ telle que pour tout $i \in I$, A_i est une classe d'équivalence modulo $\diamond$.

Preuve:
Soit $\diamond$ la relation définie par

$$x \diamond y \iff \exists i \in I, \begin{cases} x \in A_i \\ y \in A_i \end{cases}$$

— Soit $x \in E$. Comme $E = \bigcup_{i\in I} A_i$, il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$ donc $x \diamond x$.

— Soient $x, y \in E$. On suppose $x \diamond y$. Soit $i \in I$ tel que $\begin{cases} x \in A_i \\ y \in A_i \end{cases}$ donc $\begin{cases} y \in A_i \\ x \in A_i \end{cases}$ et donc $y \diamond x$.

— Soit $x, y, z \in E$. On suppose $x \diamond y$ et $y \diamond z$.
Soit $i \in I$ tel que $\begin{cases} x \in A_i \\ y \in A_i. \end{cases}$
Soit $j \in I$ tel que $\begin{cases} y \in A_j \\ z \in A_j. \end{cases}$
On a donc $y \in A_i \cap A_j$. Si $i \neq j$, alors $y \in \varnothing$: une contradiction. Donc $i = j$ et

donc $\begin{cases} x \in A_i \\ z \in A_i \end{cases}$. On en déduit que $x \diamond z$.

Ainsi $\diamond$ est une relation d'équivalence.

— Soit $i \in I$ et soit $x \in A_i \neq \varnothing$.

$$\overline{x} = \{y \in E \mid y \diamond x\} = \{y \in E \mid y \in A_i\} = A_i.$$

□

Définition: Soit E un ensemble et $\diamond$. On dit que $\diamond$ est une relation d'ordre sur E si

1. $\diamond$ est réfléctive $(\forall x \in E, x \diamond x)$,
2. $\diamond$ est anti-symétrique :
$$\forall x, y \in E, \quad \left.\begin{matrix} x \diamond y \\ y \diamond x \end{matrix}\right\} \implies x = y,$$
3. $\diamond$ est transitive $\Big(\forall x, y, z \in E, (x \diamond y \text{ et } y \diamond z) \implies x \diamond z\Big)$.

En général, la relation $\diamond$ est notée $\leqslant$ ou $\preccurlyeq$. On dit aussi que $(E, \diamond)$ est un ensemble ordonné.

Exemple:
1. $(\mathbb{R}, \leqslant)$ est un ensemble ordonné.
2. $\big(\mathscr{P}(E), \subset\big)$ est un ensemble ordonné.
3. $(\mathbb{N}, |)$ est un ensemble ordonné.
4. $(\mathit{MP2I}, \preccurlyeq)$ avec
$$x \preccurlyeq y \iff \text{note de } x \leqslant \text{note de } y$$
n'est un ensemble ordonné car $\preccurlyeq$ n'est pas anti symétrique.
5. $E = \mathbb{N}^2$ et $\preccurlyeq$ définie par
$$(x, y) \preccurlyeq (x', y') \iff x < x' \text{ ou } \begin{cases} x = x' \\ y \leqslant y' \end{cases}$$
$(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble ordonné.

Définition: Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. Soient $x, y \in E$. On dit que x et y sont comparables si
$$x \leqslant y \text{ ou } y \leqslant x.$$
On dit que $\leqslant$ est un ordre total si tous les éléments de E sont comparables 2 à 2.

Exemple:
— $(\mathbb{R}, \leqslant)$ est totalement ordonné
— $\big(\mathscr{P}(E), \subset\big)$ n'est pas totalement ordonné en général :
Soient $a, b \in E$ avec $a \neq b$. $\{a\}$ et $\{b\}$ ne sont pas comparables.
— $(\mathbb{N}, |)$ n'est pas totalement ordonné :
$2 \nmid 5$ et $5 \nmid 2$ donc 2 et 5 ne sont pas comparables.

Définition: Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, $A \in \mathscr{P}(E)$ et $M \in E$. On dit que A est majorée par M, que M majore A ou que M est un majorant de A si
$$\forall a \in A, a \leqslant M.$$
Soit $m \in E$. On dit que A est minorée par m, que m minore A ou que m est un minorant de A si
$$\forall a \in A, m \leqslant a.$$

Il manque une partie du cours ici

EXEMPLE:

1. $E = \mathbb{R}$ muni de $\leqslant$ et $A = [2,5]$.
   On sait que $\sup A = 5$ car
   $$\forall x \in A, x \leqslant 5$$
   et
   $$\forall y \leqslant 5, \quad 5 > \frac{y+5}{2} > y$$
   donc y ne majore pas A.
2. $E = \mathbb{R}$ avec $\leqslant$ et $A =]2,5[$. $A \not\ni \sup A = 5$ par le même raisonnement.
3. $E = \mathbb{N}^*$ avec $|$ et $A = \{p,q\}$ avec $p \neq q \in E$. $\sup A = \mathrm{PPCM}(p,q) = p \vee q$ (c.f. chapitre 10 arithmétique)
4. $\mathscr{P}(E)$ avec $\subset$ et $A = \{P,Q\}$ avec $P,Q \in \mathscr{P}(E)$ et $P \neq Q$. $\sup A = P \cup Q$.
5. $E = \{0,1\} \times \mathbb{Z}$ muni de $\leqslant$ défini par
   $$(x_1,y_1) \leqslant (x_2,y_2) \iff x_1 < x_2 \text{ ou } \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 \leqslant y_2 \end{cases}$$
   et $A = \{0\} \times \mathbb{Z}$. (x,y) majore $A \iff x = 1$ donc A est majorée mais n'a pas de borne supérieure.

Proposition: Soit $(E,\leqslant)$ un ensemble ordonné et $A \in \mathscr{P}(E)$. Si A a une borne supérieure, alors celle-ci est unique. On la note $\sup A$.

Preuve:
Soit M_1 et M_2 deux bornes supérieures de A.

Donc M_2 majore A. Comme M_1 est une borne supérieure de A, on a $M_1 \leqslant M_2$.

De même, on en déduit que $M_2 \leqslant M_1$.

Comme $\leqslant$ est antisymétrique, $M_1 = M_2$. □

Proposition – Définition: Soit $(E,\leqslant)$ un ensemble ordonné et $A \in \mathscr{P}(E)$ minorée par $m \in E$. On dit que m est une borne inférieur de A si

$$\begin{cases} \forall a \in A,\ m \leqslant a, \\ \forall x \in E,\ (\forall a \in A,\ x \leqslant a) \implies x \leqslant m. \end{cases}$$

Dans ce cas, m est unique et on la note $\inf(A)$. □

Définition: Soit $(E,\leqslant)$ un ensemble ordonné et $A \in \mathscr{P}(E)$.

1. Soit $M \in E$. On dit qye M est le plus grand élément de A ou que M est le maximum de A si
   $$\begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant M, \\ M \in A. \end{cases}$$
   Dans ce cas, on le note $M = \max(A)$.
2. Soit $m \in E$. On dit que m est le plus petit élément de A ou que m est le minimum de A si
   $$\forall a \in A,\ a \geqslant m m \in A$$

Dans ce cas, on le note $m = \min(A)$.

Proposition: En cas d'éxistence, il y a unicité du minimum et du maximum.

Preuve:
Soient M_1 et M_2 deux maxima. On a $M_1 \in A$ donc $M_1 \leqslant M_2$. Or, $M_2 \in A$ donc $M_2 \leqslant M_1$. On en déduit que $M_1 = M_2$. □

Proposition: Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, $A \in \mathscr{P}(E)$ et $M \in E$.

$$M = \max(A) \iff \begin{cases} M = \sup(A), \\ M \in A; \end{cases}$$

$$M = \min(A) \iff \begin{cases} M = \inf(A), M \in A. \end{cases}$$

Preuve: " $\implies$ " On suppose $M = \max(A)$. On sait déjà que $M \in A$ et que M est un majorant de A.
Soit M' un majorant de A. $M \in A$ donc $M' \geqslant M$. On en déduit que $M = \sup(A)$.
" $\impliedby$ " On suppose $M = \sup(A) \in A$. Alors M majore A et $M \in A$ donc $M = \max(A)$.

□

Exemple:
$E = \mathbb{N}^*$ muni de $|$ et $A = \{3, 5\}$. $\sup(A) = 3 \vee 5 = 15 \notin A$ donc A n'a pas de maximum.

Définition: Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, $A \in \mathscr{P}(E)$ et $M \in A$.

On dit que M est un élément maximal de A si aucun élément de A n'est strictement supérieur à M :

$$\nexists a \in A, \begin{cases} M \leqslant a, \\ M \neq a. \end{cases}$$

On dit que M est un élément minimal de A si aucun élément de A n'est strictement inférieur à M :

$$\nexists a \in A, \begin{cases} M \geqslant a, \\ M \neq a. \end{cases}$$

Exemple:
$E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 2\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ muni de $|$ et $A = E$. Les éléments minimaux de E sont les nombres premiers, il y en a une infinité. Il n'y a donc pas d'élément maximal.

Proposition: Avec les notations précédentes, si A a un maximum M alors M est le seul élément maximal de A.

Preuve:
Soit $M = \max(A)$. Soit $a \in A$ tel que $M \leqslant a$ et $M \neq a$. Comme $a \in A$ et $M = \max(A)$, on sait que $a \leqslant M$. Par antisymétrie, on en déduit que $a = M$: une contradiction.

Donc M est un élément maximal de A.

Soit M' un élément maximal de A. $M' \in A$ donc $M' \leqslant M$ et donc $M = M'$. □

Définition: Soient $(E, \leqslant)$ et $(F, \preccurlyeq)$ deux ensembles ordonnés et $f : E \to F$. On dit que

1. f est croissante si
$$\forall (x,y) \in E^2, x \leqslant y \implies f(x) \preccurlyeq f(y);$$
2. f est décroissante si
$$\forall (x,y) \in E^2, x \leqslant y \implies f(x) \succcurlyeq f(y).$$

Exemple:
$E = \mathbb{N}^*$ muni de $|$, $F = \mathbb{N}^*$ muni de $\leqslant$ et $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & x. \end{array}$

Soit $(x,y) \in E^2$ tels que $x \mid y$. Alors $x \leqslant y$ donc f est croissante.

On pose

$$\begin{aligned} g : F &\longrightarrow E \\ n &\longmapsto n. \end{aligned}$$

$2 \leqslant 3$ mais $2 \nmid 3$ donc g n'est pas croissante et $2 \leqslant 5$ mais $5 \nmid 2$ donc g n'est pas décroissante.

Définition: Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $A \in \mathscr{P}(E)$. On dit que A est bornée si A est à la fois majorée et minorée.

Définition: Avec les notations précédentes, un extremum de A (sous reserve d'éxistence) est un maximum ou un minimum de A.

4 Lois de composition

Définition: Une loi de composition interne est une application f de $E \times E$ dans E.

On la note $x * y$ au lieu de $f(x,y)$ (on est libre de choisir le symbôle).

Définition: Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $\boxtimes$.

On dit que $\boxtimes$ est associative si

$$\forall (x,y,z) \in E^3,\ (x \boxtimes y) \boxtimes z = x \boxtimes (y \boxtimes z).$$

Dans ce cas, on écrit plutôt $x \boxtimes y \boxtimes z$.

Exemple: — $+$ et $\times$ dans $\mathbb{C}$ sont associatives ;
— $\circ$ est associative ;

— la multiplication matricielle est aussi associative.

Définition: On dit que $\boxtimes$ est commutative si

$$\forall (x,y) \in E^2, x \boxtimes y = y \boxtimes x.$$

EXEMPLE: — $+$ et $\times$ dans $\mathbb{C}$ sont commuatives ;
— $\circ$ n'est pas commutative ;
— la multiplication matricielle n'est pas commutative.

Définition: Soit $e \in E$. On dit que e est un
— élément neutre à gauche si
$$\forall x \in E,\ e \boxtimes x = x;$$
— élément neutre à droite si
$$\forall x \in E,\ x \boxtimes e = x;$$
— élément neutre si
$$\forall x \in E,\ e \boxtimes x = x \boxtimes e = x.$$

Proposition: Sous reserve d'existence, il y a unicité de l'élément neutre.

Preuve:
Soient e et e' deux éléments neutre.
— $e \boxtimes e' = e'$ car e est neutre,
— $e \boxtimes e' = e$ car e' est neutre.
On a donc $e = e'$. □

Axiome (axiome du choix)**:** Soit E un ensemble non vide. Il existe $f : \mathscr{P}(E)\setminus\{\varnothing\} \to E$ telle que
$$\forall A \in \mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\},\ f(A) \in A.$$

Définition: Soit $f : E \to F$. Le graphe de f est
$$\Big\{\big(x, f(x)\big) \mid x \in E\Big\} \subset E \times F.$$

Proposition: Soit $G \subset E \times F$. G est le graphe d'une application si et seulement si
$$\forall x \in E,\ \exists! y \in F,\ (x,y) \in G.$$

Preuve: "$\implies$" par définition d'une application
"$\impliedby$" On pose $f(x)$ le seul élément y de F qui vérifie $(x,y) \in G$. Alors $f \in F^E$ et son graphe vaut G.
□

Définition: Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. L'indicatrice de A est

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : E &\longrightarrow \{0,1\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple: 1. Dans $\mathbb{C}$, le neutre de $+$ est 0 et le neutre de $\times$ est 1.
2. Dans E^E, le neutre de $\circ$ est id_E.
3. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à valeurs dans $\mathbb{C}$), le neutre de $\times$ est I_n :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

Définition: Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $\boxtimes$ et $x \in E$.

1. On dit que x est simplifiable à gauche si
$$\forall (y,z) \in E^2,\ (x \boxtimes y = x \boxtimes z) \implies x = z.$$
et que x est simplifiable à droite si
$$\forall (y,z) \in E^2,\ (y \boxtimes x = z \boxtimes y) \implies x = z.$$
2. On dit que x est symétrisable à gauche s'il exiiste $y \in E$ tel que $y \boxtimes x = e$ où e est l'élément neutre de $\boxtimes$.
De même, on dit que x est symétrisable à droite s'il existe $y \in E$ tel que $x \boxtimes y = e$.
On dit que x est symétrisable s'il est symétrisable à gauche et à droite, donc s'il existe $y \in E$ tel que $x \boxtimes y = y \boxtimes x = e$.

Exemple:
$E = \mathbb{N}$ muni de la loi $+$, tous les éléments de E sont simplifiables. 0 est le seuele élément de E symétrisable.

Proposition: Avec les notations précédentes, si $\boxtimes$ est associative, et x est symétrisable, alors x est simplifiable.

Preuve:
Soient $y, z \in E$.
— On suppose $x \boxtimes y = x \boxtimes z$. Soit $a \in E$ tel que $a \in E$ tel que $a \boxtimes x = e$. Alors
$$a \boxtimes (x \boxtimes y) = a \boxtimes (x \boxtimes z).$$
Or,
$$\begin{aligned} a \boxtimes (x \boxtimes y) &= (a \boxtimes x) \boxtimes y \\ &= e \boxtimes y \\ &= y. \end{aligned}$$
De même, $a \boxtimes (x \boxtimes z) = z$.
Donc $y = z$.

— De même, si $y \boxtimes x = z \boxtimes x$, on “multiplie” x à droite par a et on obtient $y = z$. $\square$

Proposition – Définition: On suppose $\boxtimes$ associative. Soit $x \in E$ symétrisable. Alors
$$\exists! y \in E,\ x \boxtimes y = y \boxtimes x = e.$$
On dit que y est le <u>symétrique</u> de x et on le note $y = x^*$.

Preuve:
Soeint $x, y, z \in E$ tels que
$$\begin{cases} x \boxtimes y = y \boxtimes x = e \\ x \boxtimes z = z \boxtimes x = e \end{cases}$$
Alors, $x \boxtimes y = x \boxtimes z$ et, en simplifiant par x, on a $y = z$. $\square$

Exemple:
Les fonctions symétrisables de $(E^E, \circ)$ sont les bijections et le symétrique d'une bijection est sa réciproque.

Remarque:
1. Si la loi est notée $+$, on parle d'<u>opposé</u> plutôt que de symétrique et on le note $-x$ au lieu de x^*. L'élément neutre est noté 0_E.
2. Si la loi est notée $\times$, on parle d'élément <u>inversible</u> au lieu de symétrisable, d'<u>inverse</u> au lieu de symétrique et on note x^{-1} au lieu de x^*. On note le neutre 1_E.

Exercice:
Soient $x, y \in E = \mathbb{R}_*^+$. On définit la loi de composition interne $\oplus$:
$$x \oplus y = \frac{1}{\frac{1}{x} \oplus \frac{1}{y}}.$$
Cette loi peut-être utile en physique pour le calcul de résistances équivalentes en parallèles.

— Associativité : soient $x, y, z \in E$.
D'une part, on a
$$x \oplus (y \oplus z) = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}}} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}.$$
D'autre part, on a
$$(x \oplus y) \oplus z = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}} + \frac{1}{z}} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}.$$
La loi $\oplus$ est associative.

— Commutativité : soient $x, y \in E$.
$$x \oplus y = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{1}{\frac{1}{y} + \frac{1}{x}} = y \oplus x.$$
Donc la loi $\oplus$ est commutative.

— Élément neutre : soit e l'élément neutre de $\oplus$.
$$\forall x \in E,\ x \oplus e = e \oplus x = x.$$
Comme la loi est commutative, seul l'égalité $x \oplus e = x$ est utile.
Soit $x \in E$. On a donc $\dfrac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{e}} = x$ donc $\dfrac{ex}{e+x} = x$ donc $ex = x(e + x)$ et donc $\cancel{ex} = \cancel{ex} + x^2$. On en déduit que $x^2 = 0$, ce qui n'est pas possible car $x \in \mathbb{R}_*^+$. Donc, il n'y a pas d'élément neutre pour $\oplus$.

5 Divers

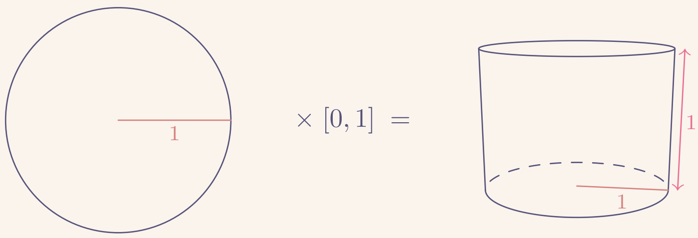
Définition: Soient E et F deux ensembles. Un couple (x, y) est la donnée d'un élément x de E et d'un élément y de F où

$$\forall x, x' \in E, \forall y, y' \in F, \qquad (x, y) = (x', y') \iff \begin{cases} x = x', \\ y = y'. \end{cases}$$

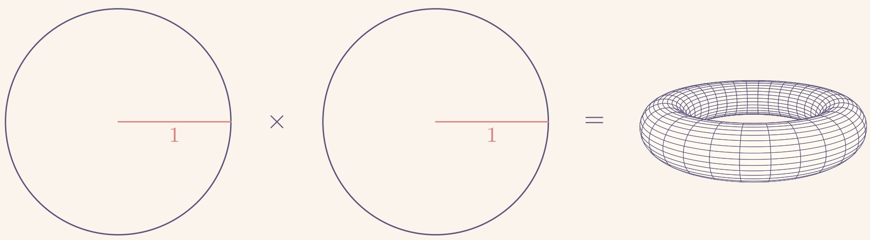
On note $E \times F$ l'ensemble des couples ; c'est le produit cartésien de E et F.

Exemple:
$D \times [0, 1]$ est un cylindre plein où D est le disque unité fermé i.e.

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}.$$



$C \times C$ où $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$ est un tore (creu).



Définition: Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont équipotents s'il existe une bijection de E dans F.

Exemple:

1. $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ sont équipotents car $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ k & \longmapsto & k+1 \end{array}$ est bijective.
2. $P = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ pair}\}$ et $I = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ impair}\}$ sont équipotents car $f : \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & I \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$ est bijective.
3. $\mathbb{N}$ et P sont équipotents car $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & P \\ k & \longmapsto & 2k \end{array}$ est bijective.
4. $[0, 1]$ et $[0, 1[$ sont équipotents car

$$f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1[$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{si } x = \dfrac{1}{n} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^* \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$

est bijective.

5. De même, $]0,1[$ et $]0,1]$ sont équipotents.
6. $]0,1[$ et $[0,1[$ sont équipotents : $f : \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & [0,1[\\ x & \longmapsto & 1-x \end{array}$ est bijective.
7. $\forall a < b$, $[a,b]$ et $[0,1]$ sont équipotents :

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\longrightarrow [a,b] \\ \alpha &\longmapsto \alpha b + (1-\alpha)a \end{aligned}$$

est bijective (interpolation linéaire).
8. $\mathbb{R}$ et $]0,1[$ sont équipotents :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow]0,1[\\ x &\longmapsto \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{Arctan} x}{\pi} \end{aligned}$$

est bijective.
9. $[0,1[$ et $\mathbb{N}$ ne sont pas équipotents (argument de Cantor). Soit $f : \mathbb{N} \to [0,1[$ une bijection :

k	$f(k)$
0	$0,\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots$
1	$0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$
2	$0, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots$
$\vdots$	$\vdots \quad \ddots$

On considère le nombre

$$x = 0,\ (a_0+1)(b_1+1)(c_2+1)\cdots$$

$f(1) \neq x$ car ils n'ont pas le même chiffre des dizaines.
$f(2) \neq x$ car ils n'ont pas le même chiffre des centaines.
Par le même raisonement, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \neq x$$

donc x n'a pas d'antécédant : une contradiction.
10. On verra en exercice que E et $\mathscr{P}(E)$ ne sont pas équipotents. $\mathbb{R}$ et $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ ne sont pas équipotents mais $\mathbb{R}$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ le sont (développement dyadique).
11. $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents ; $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents.

Exercice:
Soit E un ensemble. L'application

$$\begin{aligned} f : \mathscr{P}(E) &\longrightarrow 0,1^E \\ A &\longmapsto \mathbb{1}_A \end{aligned}$$

est bijective.

Soit $g : E \to \{0,1\}$.
Analyse Soit $A \in \mathscr{P}(E)$ tel que $f(A) = g$. Alors $g = \mathbb{1}_A$. donc

$$\forall x \in E,\ g(x) = \mathbb{1}_A(x)$$

et donc

$$\begin{cases} \forall x \in A,\ g(x) = 1 \\ \forall x \in E \setminus A,\ g(x) = 0 \end{cases}$$

On en déduit que

$$A = \{x \in E \mid g(x) = 1\} = g^{-1}\big(\{1\}\big).$$

Synthèse On pose $A = g^{-1}\big(\{1\}\big)$. Montrons que $f(A) = g$.

$$\forall x \in E,\ g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} = \mathbb{1}_A$$

donc $g = \mathbb{1}_A$.

On aurait aussi pu rédiger de la fa c on suivante : on pose

$$\begin{aligned} u : \{0,1\}^E &\longrightarrow \mathscr{P}(E) \\ g &\longmapsto g^{-1}\big(\{1\}\big). \end{aligned}$$

On montre que u est la réciproque de f :

$$\begin{cases} f \circ u = \mathrm{id}_{\{0,1\}^E}, \\ u \circ f = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}. \end{cases}$$

Définition: Soit $f : E \to F$. L'image de f est

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \big\{f(x) \mid x \in E\big\}.$$

Proposition: Soit $f : E \to F$.

$$f \text{ est surjective} \iff f(E) = F.$$

Définition: Une suite de E est une application de $\mathbb{N}$ dans E.

Remarque (Notation):
Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on écrit u_n à la place de $u(n)$.

Définition: Soient E et I deux ensembles. Une famille de E indéxée par I est une application de I dans E.

À la place de $u(i)$ (avec $i \in I$), on écrit u_i.

Définition: Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. On suppose $I \neq \varnothing$. On pose

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I,\, x \in A_i\}$$

et

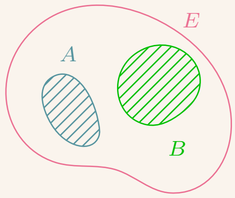
$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I,\, x \in A_i\}.$$

On pose aussi $\displaystyle\bigcup_{i\in\varnothing} A_i = \varnothing$ et $\displaystyle\bigcap_{i\in\varnothing} A_i = E$.

Remarque:
De même que pour les sommes et produits de complexes, on peut intervertir des réunions doubles.

Proposition: Soit E un ensemble, $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$.

$$A \subset (E \setminus B) \iff A \cap B = \varnothing.$$



Preuve: " $\Longrightarrow$ " Soit $x \in A \cap B$. Alors $x \in A$ et $x \in B$. Comme $x \in A \subset (E \setminus B)$, alors $x \in E \setminus B$ i.e. $x \notin B$: une contradiction. Donc $A \cap B = \varnothing$.

" $\Longleftarrow$ " On suppose $A \cap B = \varnothing$. Soit $x \in A$. Si $x \in B$, alors $x \in A \cap B = \varnothing$: faux. Donc $x \notin B$ et donc $x \in E \setminus B$.

$\square$

Proposition: Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

$\square$

Remarque (⚠ Attention):
$g \circ f$ peut-être bijective alors que f et g ne le sont pas.

CHAPITRE

9

INÉGALITÉS DANS $\mathbb{R}$

1

2

3

4 Bornes supérieures

Proposition (borne inférieure)**:** Toute partie minorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Preuve:
Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide minorée. On pose $B = \{-a \mid a \in A\} \neq \varnothing$. Soit m un minorant de A :

$$\forall a \in A,\ m \leqslant a.$$

D'où,

$$\forall a \in A,\ -a \leqslant -m$$

donc B est majorée par $-m$.

D'après la propriété de la borne supérieure, B admet une borne supérieure. On pose $\beta = \sup(B)$, donc β majore B et donc

$$\forall a \in A,\ -a \leqslant \beta$$

et donc

$$\forall a \in A,\ -\beta \geqslant a.$$

Donc $-\beta$ est un minorant de A.

Soit x un minorant de A. Montrons que $x \leqslant -\beta$. On sait que $-x$ majore B et donc $-x \geqslant \beta$. On en déduit que $x \leqslant -\beta$ et donc $-\beta = \inf(A)$. □

Proposition (caractérisation de la borne supérieure)**:** Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide majorée et $M \in \mathbb{R}$.

$$M = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant M, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A, A_0 > M - \varepsilon. \end{cases}$$

Preuve: " $\Longrightarrow$ " On suppose $M = \sup(A)$. M est un majorant de a :

$$\forall a \in A,\ a \leqslant M.$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme M est le plus petit majorant de A et que $M - \varepsilon < M$, $M - \varepsilon$ ne majore pas A. Donc

$$\exists a_0 \in A,\ a_0 > M - \varepsilon.$$

— On suppose

$$\begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant M; & (1) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A, M - \varepsilon < a_0. & (2) \end{cases}$$

D'après (1), M est un majorant de A. Soit M' un majorant de A. Montrons que $M' \geqslant M$.
On suppose $M' < M$ et on pose $\varepsilon = M - M' > 0$. D'après (2), il existe $a_0 \in A$ tel que

$$a_0 > M - \varepsilon = M' \geqslant a_0$$

une contradiction. Donc $M' \geqslant M$ et donc M est le plus petit majorant de A : $M = \sup(A)$.

$\square$

Proposition (caractérisation de la borne inférieure)**:** Soit $A \subset \mathbb{R}$, non vide minorée et $m \in \mathbb{R}$.

$$m = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A,\ m \leqslant a; \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a_0 \in A,\ a_0 < m + \varepsilon. \end{cases}$$

$\square$

Proposition: Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide majorée et $M \in \mathbb{R}$.

$$M \geqslant \sup(A) \iff \forall a \in A, a \leqslant M.$$

Preuve: " $\Longrightarrow$ " On suppose $M = \sup(A)$. Soit $a \in A$. On sait que $a \leqslant \sup(A)$ car $\sup(A)$ majore A. Donc $a \leqslant M$.
" $\Longleftarrow$ " On suppose $\forall a \in A$, $a \leqslant M$. Donc M majore A. Or, $\sup(A)$ est le plus petit majorant et donc $M \geqslant \sup(A)$.

$\square$

Proposition: Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide minorée et $m \in \mathbb{R}$.

$$m \leqslant \inf(A) \iff \forall a \in A, m \leqslant a.$$

$\square$

Proposition – Définition: $\mathbb{R}$ est archimédien :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, nx \geqslant y.$$

Preuve:
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$. Supposons

$$(H): \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ nx < y.$$

On pose $A = \{nx \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Comme $0 \in A$, $A \neq \varnothing$. D'après (H), A est majorée par y.

Soit $\alpha = \sup(A)$ et $n \in \mathbb{N}$. On sait que $(n+1)x \in A$ donc $(n+1)x \leqslant \alpha$ et donc $nx \geqslant \alpha - x$. On remarque que $\alpha - x$ majore A mais que $\alpha - x < \alpha$: une contradiction car α est le plus petit majorant de A. Donc,

$$\exists n \in \mathbb{N}, nx \geqslant y.$$

□

Théorème: Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes : si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (avec $a < b \in \mathbb{R}$) est continue, alors

$$\exists (\alpha, \beta) \in [a,b]^2,\ \forall x \in [a,b],\ f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta).$$

Preuve:
c.f. Chapitre 14 : Continuité. □

Proposition: Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide majorée. Il existe une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup(A)$.

Preuve:
On sait que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, a > \sup(A) - \varepsilon.$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n \in A, a_n > \sup(A) - \frac{1}{n}.$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \in A \text{ et } a_n \leqslant \sup(A).$$

Or

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sup(A) - \frac{1}{n} < a_n \leqslant \sup(A),$$

par encadrement, on en déduit que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup(A)$. □

Proposition: Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide minorée. Il existe une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \inf(A)$. □

5 Partie entière

Proposition – Définition: Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \leqslant x < n+1.$$

Cet entier n est appelé partie entière de x et est noté $\lfloor x \rfloor$.

Preuve:
Soit $A = \{p \in \mathbb{Z} \mid p > x\}$. $A \neq \varnothing$ car $\mathbb{R}$ est archimédien.

Soit α la borne inférieure de A. Alors $\alpha \geqslant x$. Montrons que $\alpha \in A$. Soit $n \geqslant 2$. On a $\alpha + \frac{1}{n} > \alpha$ donc, il existe $a_n \in A$ tel que

$$\alpha < a_n < \alpha + \frac{1}{n}.$$

On sait que $\frac{1}{n} < 1$ donc, il y a au plus un entier dans le segment $\left[\alpha, \alpha + \frac{1}{n}\right]$. Donc, tous les a_n sont égaux et $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$. On en déduit que

$$\forall n \geqslant 2,\ a_n = \alpha$$

et donc $\alpha \in A$. Ainsi, $\alpha = \min(A)$ et alors $\alpha - 1 \notin A$. On a donc

$$\alpha - 1 \leqslant x < \alpha$$

et, en posant $n = \alpha - 1$, on en déduit que

$$n \leqslant x < n+1.$$

□

6 Densité

Définition: Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. On dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ si, pour tout intervalle I ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $A \cap I \neq \varnothing$.

Théorème: $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve:
Soit I un intervalle ouvert non vide. Soient $a < b$ deux éléments de I. On cherche $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que

$$a \leqslant \frac{p}{q} \leqslant b.$$

Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$q(b-a) \geqslant 2 > 1.$$

Donc, l'intervalle $[qa, qb]$ a une longueure supérieure à 1, il contient donc au moins un entier p.

En effet, sinon on a $\lfloor qa \rfloor = \lfloor qb \rfloor$ et alors

$$\begin{cases} \lfloor qa \rfloor \leqslant qb < \lfloor qa \rfloor + 1 \\ \lfloor qa \rfloor \leqslant qa < \lfloor qa \rfloor + 1 \end{cases}$$

et alors

$$-1 < qb - qa < 1$$

une contradiction. On a donc $qa \leqslant p \leqslant qb$ et finalement

$$a \leqslant \frac{p}{q} \leqslant b.$$

□

Théorème: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Il manque une partie du cours ici

7

8

Il manque une partie du cours ici

Preuve:
Soit $a \in I$ et

$$\begin{aligned} \tau_a : I \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \end{aligned}$$

D'après le lemme des pentes, τ_a est croissante. En effet, soient $x, y \in I \setminus \{a\}$ tels que $x < y$.

Cas 1 $a < x < y$. On a alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

et donc $\tau_a(x) \leqslant \tau_a(y)$.

Cas 2 $x < a < y$. On a alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leqslant \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

et donc $\tau_a(x) \leqslant \tau_a(y)$.

Cas 3 $x < y < a$. On a alors

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leqslant \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

et donc $\tau_a(x) \leqslant \tau_a(y)$.

Soit $x > a$ avec $x \in I$. On fixe $z_0 < a$ un élément de I. z_0 existe car I est ouvert. On a alors... □

Il manque une partie du cours ici

CHAPITRE

10

NOMBRES ENTIERS - $\mathbb{N}$

1 Axiomatique de $\mathbb{N}$

Axiome: $(\mathbb{N}, \leqslant)$ est un ensemble non vide totalement ordonné vérifiant
- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément ;
- Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ a un plus grand élément ;
- $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.

Définition:
- 0 est le plus petit élément de $\mathbb{N}$: $0 = \min(\mathbb{N})$.
- $1 = \min(\mathbb{N}^*) = \min\left(\mathbb{N} \setminus \{0\}\right)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $n+1 = \min\left(\{k \in \mathbb{N} \mid k > n\}\right)$. On dit que $n+1$ est le successeur de n.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $n-1 = \max\left(\{k \in \mathbb{N} \mid k < n\}\right)$. On dit que $n-1$ est le prédécesseur de n.

Proposition:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)-1 = n; \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n-1)+1 = n. \end{cases}$$

Preuve:
Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $p = n+1$ et $q = p-1$. On a donc $n < p$ et $q < p$ et donc $n \leqslant q$ car $q = \max\left(\{k \in \mathbb{N} \mid k < p\}\right)$.

Si $q > n$, alors $q \geqslant p$ car $p = \min\left(\{k \in \mathbb{N} \mid k > n\}\right)$: une contradiction.

On a donc $q = n$. □

Proposition: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \cap \left]n, n+1\right[= \varnothing$.

Preuve:
Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $n+1 > n$. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $n < p < n+1$. Comme $p > n$, $p \geqslant n+1$: une contradiction. □

Théorème (récurrence)**:** Soit P un prédicat sur $\mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

$$\begin{cases} P(n_0) \text{ est vrai },\\ \forall n \geqslant n_0,\ P(n) \implies P(n+1), \end{cases}$$

alors

$$\forall n \geqslant n_0,\ P(n) \text{ est vrai.}$$

Preuve:
Soit $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant n_0 \text{ et } P(n) \text{ faux }\}$ Supposons $A \neq \varnothing$; A a donc un plus petit élément. On pose $N = \min(A)$.

Cas 1 $N = 0$, alors, comme $N \in A$, on a $n_0 \leqslant 0$ et $P(0)$ fausse. On en déduit que $n_0 = 0$: une contradiction car $P(n_0) = P(0)$ est vraie.
Cas 2 $N \neq 0$. Alors $N-1 \in \mathbb{N}$ et $N-1 \not\in A$ (car $N-1 < N$). On en déduit que $N-1 < n_0$ ou $P(N-1)$ vraie.
- Supposons $N-1 < n_0$. $N \in A$ donc $N \geqslant n_0$ et donc $N-1 < n_0 \leqslant N$ donc $N = n_0$. Or, $N \in A$ donc $P(N)$ fausse alors que $P(n_0)$ est vraie.
- Supposons $N-1 > n_0$ et $P(N-1)$ vraie. Comme $N-1 \geqslant n_0$, $P(N-1) \implies P(N)$ et donc $P(N)$ est vraie. Or, $N \in A$ et donc $P(N)$ est fausse.

On en déduit que $A = \varnothing$.

□

2 Récurrence

Proposition (récurrence double)**:** Soit P un prédicat sur $\mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

$$\begin{cases} P(n_0) \text{ vraie}\\ P(n_0+1) \text{ vraie}\\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ avec } n \geqslant n_0,\ P(n) \text{ et } P(n+1) \implies P(n+2) \end{cases}$$

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ avec } n \geqslant n_0,\ P(n) \text{ vraie.}$$

Preuve:
On pose, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$Q(n) : \text{“}P(n) \text{ et } P(n+1)\text{”}.$$

- $Q(0)$ est vraie.
- Soit $n \geqslant n_0$. On suppose $Q(n)$ vraie. On sait alors que $P(n+2)$ est vraie. De plus, par hypothèse de récurrence, $P(n+1)$ est vraie. Donc $Q(n+1)$ est vraie.

□

Exemple:
On pose $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$.

— $u_0 = 0 \geqslant 0$;
— $u_1 = 1 \geqslant 0$;
— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \geqslant 0$ et $u_{n+1} \geqslant 0$. Alors $u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \geqslant 0$.

Par récurrence double,
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0.$$

Proposition: Soit P un prédicat, $p \in \mathbb{N}^*$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si
$$\begin{cases} \forall k \in [\![0, p-1]\!],\ P(n_0 + k) \text{ vraie;} \\ \forall n \geqslant n_0,\ \big(P(n) \text{ et } P(n+1) \text{ et } \cdots \text{ et } P(n+p-1)\big) \implies P(n+p). \end{cases}$$
Alors,
$$\forall n \geqslant n_0, P(n) \text{ vraie.}$$
□

Exemple:
On pose $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+4} = u_n + 2u_{n+1} + 3u_{n+2} + u_{n+3}.$$
Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.
— $u_0 \geqslant 0$, $u_1 \geqslant 0$, $u_2 \geqslant 0$ et $u_3 \geqslant 0$.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $u_n \geqslant 0$, $u_{n+1} \geqslant 0$, $u_{n+2} \geqslant 0$ et $u_{n+3} \geqslant 0$. Comme u_{n+4} est la somme de réels positifs, $u_{n+4} \geqslant 0$.

Proposition (récurrence forte)**:** Soit P un prédicat sur $\mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si $P(n_0)$ est vrai et
$$\forall n \geqslant n_0, \big(P(n_0) \text{ et } \ldots \text{ et } P(n-1) \text{ et } P(n)\big) \implies P(n+1).$$
Alors,
$$\forall n \geqslant n_0,\ P(n) \text{ est vraie.}$$

Preuve:
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$Q(n) : \text{“}\forall k \in [\![n_0, n]\!],\ P(k) \text{ vraie”}.$$
— $Q(n_0)$ est vraie car $P(n_0)$ est vraie.
— Soit $n \geqslant n_0$. On suppose $Q(n)$ vraie. On sait donc que $\forall k \in [\![n_0, n]\!]$, $P(k)$ vraie. Alors, $P(n+1)$ est vraie et donc
$$\forall k \in [\![n_0, n+1]\!],\ P(k) \text{ est vraie.}$$
Ainsi, $Q(n+1)$ est vraie.

□

Exemple:
Montrer que tout entier supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme un produit de nombres premiers. On prouve ce résultat par récurrence forte.

— Le nombre 2 est un nombre premier : $2 = 2$.
— Soit $n \geqslant 2$. On suppose que, tout entier $k \in [\![2, n]\!]$ est un produit de nombres premiers. On pose $N = n + 1$.
Cas 1 N est premier et donc, on peut l'exprimer comme un produit de nombres premiers : $N = N$.
Cas 2 N n'est pas un nombre premier. Alors, il existe p, q tels que $N = p \times q$ avec $1 < p < N$ et $1 < q < N$. Comme $p \in [\![2, n]\!]$, p est un produit de nombres premiers. De même pour q. Donc, le produit $N = p \times q$ est un produit de nombres premiers.

Exemple:
Avec $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$ *et, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+4} = u_n + 2u_{n+1} + 3u_{n+2} + u_{n+3}$, *montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$. On prouve ce résultat par récurrence forte.

— $u_0 = 0 \geqslant 0$.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\forall k \in [\![1, n]\!]\,, u_k \geqslant 0$.
  — Si $n = 0$, $u_{n+1} = u_1 = 1 \geqslant 0$.
  — Si $n = 1$, $u_{n+1} = u_2 \geqslant 0$.
  — Si $n = 2$, $u_{n+1} = u_3 \geqslant 0$.
  — Si $n \geqslant 3$, $u_{n+1} = \underbrace{u_{n-3}}_{\geqslant 0} + 2\underbrace{u_{n-2}}_{\geqslant 0} + 2\underbrace{u_{n-1}}_{\geqslant 0} + 3\underbrace{u_n}_{\geqslant 0} \geqslant 0$.

3 Divisibilité

Définition: Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a divise b s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = k \times a$. Dans ce cas, on écrit $a \mid b$. On dit aussi que a est un diviseur de b ; et que b est un multiple de a.

Exemple: — $\forall x \in \mathbb{Z}$, $1 \mid x$.
— $0 \mid 0$ mais $\forall x \in \mathbb{Z}^*, 0 \nmid x$.
— $\forall x \in \mathbb{Z}$, $x \mid 0$.

Proposition: “ $\mid$ ” est une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$. □

Proposition: Soient $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

$$a \mid b \implies |a| \leqslant |b|\,.$$

□

Proposition: Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

$$\left.\begin{array}{l} a \mid b \\ a \mid c \end{array}\right\} \implies \big(\forall (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2,\ a \mid (kb + \ell c)\big).$$

Preuve:
On pose $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\begin{cases} b = au, \\ c = av. \end{cases}$$

Soient $k, \ell \in \mathbb{Z}$.

$$bk + \ell c = aku + a\ell v = a\underbrace{ku + \ell v}_{\in \mathbb{Z}}\,.$$

et donc $a \mid (ku + \ell v)$. □

Exemple:
Soient $n \in \mathbb{N}$.

$$\left.\begin{array}{l} a \mid n \\ a \mid n+1 \end{array}\right\} \implies a \mid \big((n+1) - n\big) \implies a \mid 1 \implies a = \pm 1.$$

Définition: Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a et b sont <u>associés</u> si
$$a = b \text{ ou } a = -b.$$

Proposition: Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.
$$a \mid b \iff -a \mid b \iff a \mid -b.$$

Proposition (division euclidienne dans $\mathbb{N}$)**:** Soient $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.
$$\exists!\,(q, r) \in \mathbb{N}^2, \begin{cases} a = bq + r, \\ 0 \leqslant r < q. \end{cases} \qquad \begin{array}{r|l} -\; a & b \\ \cline{2-2} & q \\ \cline{1-1} r & \end{array}$$

Preuve: Existence On considère $A = \{q \in \mathbb{N} \mid qb \leqslant a\}$. $A \neq \varnothing$ car $0 \in A$: $0 \times b = 0 \leqslant a$. A est majoré :
$$\forall q \in A,\ a \geqslant qb \geqslant q \text{ car } b \geqslant 1.$$
Soit $q = \max(A)$. On pose $r = a - bq$. Comme a, b et q sont des entiers positifs, $r \in \mathbb{Z}$. On sait que $q \in A$, donc $qb \leqslant a$ et donc $r \geqslant 0$. $q + 1 > \max A$ donc $q + 1 \notin A$ i.e. $(q+1)b > a$ et donc $r < b$.

Unicité Soient $(q', r') \in \mathbb{N}^2$ tels que $\begin{cases} a = q'b + r', \\ 0 \leqslant r' < b. \end{cases}$ Or, $a = bq + r$ et donc, en soustrayant les deux égalités, on a
$$0 = b(q' - q) + r' - r.$$
De plus, $0 \leqslant r < b$ et $-b < -r' \leqslant 0$, et donc
$$r - r' = b\underbrace{(q' - q)}_{\in \mathbb{Z}}.$$
On en déduit que $-b < r - r' < b$. Le seul multiple de b dans $]\!]-b, b[\![$ est 0. Ainsi, $r' = r$ et donc $b(q' - q) = 0$. Or, $b > 0$, donc $q' = q$.

$\square$

Proposition (division euclidienne dans $\mathbb{Z}$)**:** Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.
$$\exists!\,(q, r) \in \mathbb{Z}^2, \begin{cases} a = bq + r, \\ 0 \leqslant r \leqslant |b|. \end{cases}$$

Preuve: EXISTENCE <u>CAS1</u> $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. D'après la proposition précédente,

$$\exists!(q,r) \in \mathbb{N}^2, \begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leqslant r < b. \end{cases}$$

Comme $b > 0$, on a bien $0 \leqslant r < |b| = b$. et $q \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

<u>CAS2</u> $a \in \mathbb{Z}^-$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Comme $-a \in \mathbb{N}$,

$$\exists(q',r') \in \mathbb{N}^2, \begin{cases} -a = bq' + r', \\ 0 \leqslant r' < b \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} a &= b(-q') - r' \\ &= b(q'-1) + b - r'. \end{aligned}$$

En posant,

$$q = \begin{cases} -q' - 1 & \text{si } r' \neq 0, \\ -q' & \text{si } r' = 0; \end{cases}$$

$$r = \begin{cases} b - r' & \text{si } r' \neq 0, \\ -r' & \text{si } r' = 0; \end{cases}$$

on a bien

$$\begin{cases} a = bq + r, \\ q \in \mathbb{Z}, \\ 0 \leqslant r < b. \end{cases}$$

<u>CAS3</u> $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{Z}_-^*$. On sait que

$$\exists(q',r') \in \mathbb{N}^2, \begin{cases} a = (-b)q' + r', \\ 0 \leqslant r' < -b. \end{cases}$$

En posant $q = -q'$ et $r = r'$, on a bien $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < |b|$.

<u>CAS4</u> $a \in \mathbb{Z}^-$ et $b \in \mathbb{Z}_-^*$. On sait que

$$\exists(q',r') \in \mathbb{N}^2, \begin{cases} -a = -bq' + r' \\ 0 \leqslant r' < -b. \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} a &= bq' - r' \\ &= b(q'+1) - r' - b. \end{aligned}$$

En posant

$$q = \begin{cases} q' & \text{si } r' = 0, \\ q' + 1 & \text{si } r' \neq 0; \end{cases}$$

$$r = \begin{cases} r' & \text{si } r' = 0, \\ -r' - b & \text{si } r' \neq 0; \end{cases}$$

on a bien

$$\begin{cases} a = bq + r \\ q \in \mathbb{Z} \\ 0 \leqslant r < |b|. \end{cases}$$

Unicité Soient $(q', r') \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$\begin{cases} a = bq' + r' \\ \leqslant r' < |b|. \end{cases}$$

Or, on sait qye $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < |b|$. D'où

$$\begin{cases} b(q' - q) = r' - r \\ -|b| < r - r' < |b| \end{cases}$$

donc $r - r' = 0$ et donc $q = q'$.

□

Définition: Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. D'après le théorème précédent, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leqslant r < |b|. \end{cases}$$

On dit que r est le quotient, et r le reste dans la division (euclidienne) de a par b.

Exemple:

Soit $n \in \mathbb{N}$ impair. On divise n par 2 : soient $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tels que $\begin{cases} n = 2q + r \\ 0 \leqslant r < 2. \end{cases}$

Si $r = 0$, n est pair : une contradiction. Ainsi, $r \neq 0$ et donc $r = 1$. On a donc $n = 2q + 1$.

Proposition: Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. On note r le reste de la division euclidienne de a par b.

$$r = 0 \iff a \mid b.$$

Preuve:
On pose $a = bq + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$.
- " $\implies$ " Si $r = 0$, alors $a = bq$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et donc $b \mid a$.
- " $\impliedby$ " Si $b \mid a$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bk$. Donc, $a = bk + 0$ et $0 \leqslant 0 < |b|$. Par unicité de la division euclidienne, $r = 0$.

□

4 Arithmétique modulaire

Définition: Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{N}^*$. On dit que a est congrus à b modulo c si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par c. Dans ce cas, on écrit $a \equiv b \ [c]$.

Proposition: La congruence modulo c est une relation d'équivalence. □

Remarque (Notation):
On note $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalences modulo c.

Par exemple, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\right\}$.

Proposition: Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{N}^*$.

$$a \equiv b \ \ [c] \iff c \mid (b-a).$$

Preuve: " $\Longrightarrow$ " Soient $q, q' \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{cases} a = cq + r \\ b = cq' + r \end{cases}$$

avec $0 < r < c$. En soustrayant les égalités, on obtient

$$b - a = c \underbrace{(q' - q')}_{\in \mathbb{Z}}.$$

Ainsi, $c \mid (b-a)$.

" $\Longleftarrow$ " On pose $\begin{cases} a = cq + r \\ b = cq' + r' \end{cases}$ avec $(q, q') \in \mathbb{Z}$ et $\begin{cases} 0 \leqslant r < c \\ 0 \leqslant r' < c. \end{cases}$ En soustrayant les égalités et inégalités, on obtient

$$\begin{cases} b - a = c(q' - q) + r' - r \\ -c < r' - r < c. \end{cases}$$

$\square$

CHAPITRE

11

SUITES NUMÉRIQUES

1 Modes de définition

Définition: Une suite peut être définie

- Explicitement On dispose pour tout $n \in \mathbb{N}$ de l'expression de u_n en fonction de n.
  $\boxed{\text{ex}}$ $\forall n \in \mathbb{N}_*, u_n = \dfrac{\ln(n)}{n} e^{-n}$
- Par récurrence On connait u_{n+1} en fonction de $u_0, u_1, \dots, u_n$
  $\boxed{\text{ex}}$ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$
- Implicitement $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est le seul nombre vérifiant une certaine propriété
  $\boxed{\text{ex}}$ u_n est le seul réel vérifiant $x^5 + nx - 1 = 0$

2 Limites

Définition: Soit u une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que

- u converge vers ℓ
- u_n tends vers ℓ quand n tends vers $+\infty$
- ℓ est une limite de u

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \qquad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$
$$(\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon)$$

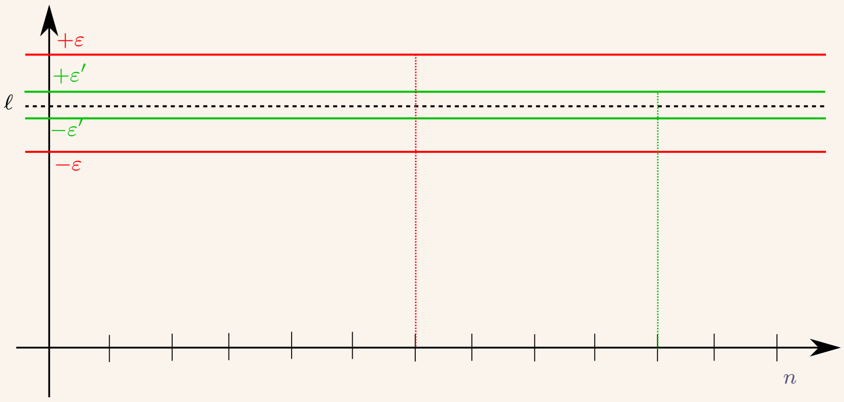


Figure 11.1 – Définition de la limite

Exemple:
Montrer que $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, -\varepsilon \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$$

Analyse Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant N, -\varepsilon \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$.

En particulier, $\frac{1}{N} \leqslant \varepsilon$ donc $N \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$.

Synthèse On pose $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$ et $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Soit $n \geqslant N$.

$$\frac{1}{n} > 0 > -\varepsilon \text{ donc } \frac{1}{n} \geqslant -\varepsilon$$

$$n \geqslant N > \frac{1}{\varepsilon} \text{ donc } n \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$$

Définition: Soit u une suite réelle.
On dit que u tends vers $+\infty$ si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant M$$

On dit que u tends vers $-\infty$ si

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \leqslant m$$

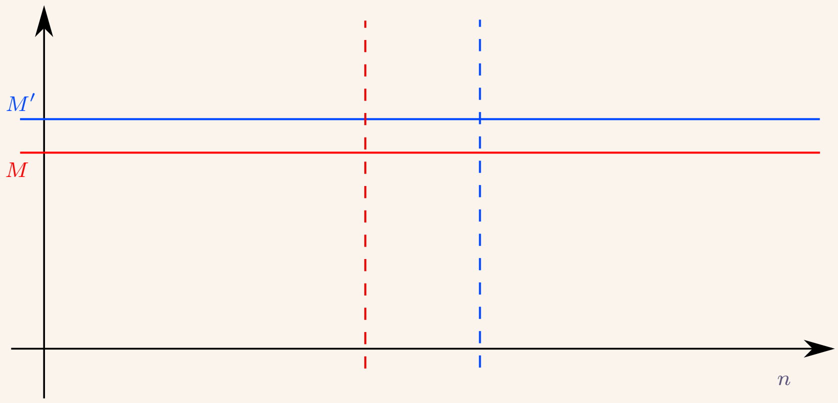


Figure 11.2 – Limites infinies

Exemple:
Montrons que $n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Soit $M \in \mathbb{R}$, on cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, n^2 \geqslant M$.

Analyse Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, n^2 \geqslant M$.
En particulier, $N^2 \geqslant M$ et dont $N \geqslant \sqrt{M}$ si $M \geqslant 0$

Synthèse On pose $N = \begin{cases} 0 & \text{si } M \leqslant 0 \\ \left\lfloor \sqrt{M} \right\rfloor + 1 & \text{sinon} \end{cases}$
Ainsi $N \in \mathbb{N}$ et $N^2 \geqslant M$. Soit $n \geqslant N$. On a $n^2 \geqslant N^2 \geqslant M$.

Définition: Une suite qui ne converge pas est dite divergente (on dit qu'elle diverge). C'est le cas si cette suite n'a pas de limite quand elle tends vers $\pm\infty$.

Théorème (Unicité de la limite (réelle))**:** Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (\ell_1, \ell_2) \in \overline{\mathbb{R}}^2$
Si $\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1 \\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2 \end{cases}$ alors $\ell_1 = \ell_2$

Preuve: **Cas 1** $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$.
On suppose $\begin{cases} \ell_1 \neq \ell_2 \\ u_n \to l_1 \\ u_n \to l_2 \end{cases}$
Sans perte de généralité, on peut supposer $\ell_1 < \ell_2$

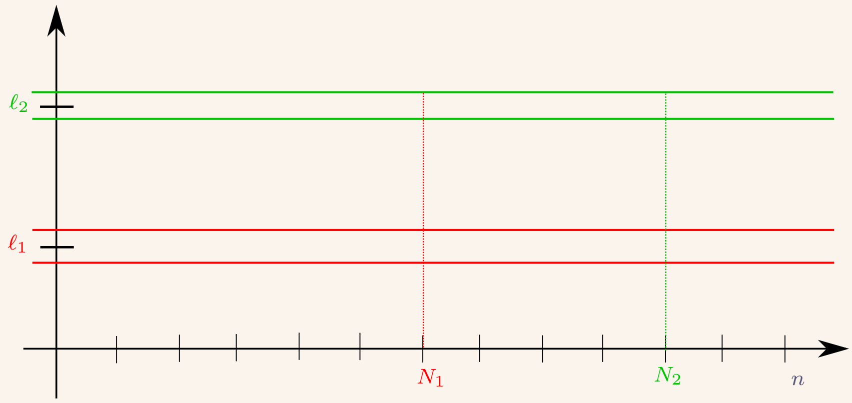


FIGURE 11.3 – Preuve unicité de la limite (cas 1)

On pose $\varepsilon = \dfrac{\ell_2 - \ell_1}{3} > 0$. On sait qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, \ell_1 - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + \varepsilon$$

et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, \ell_2 - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell_2 + \varepsilon$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. On a alors

$$u_n \leqslant \ell_1 + \varepsilon < \ell_2 + \varepsilon \leqslant u_n$$

une contradiction ($u_n < u_n$). En effet,

$$\begin{aligned} \ell_1 + \varepsilon < \ell_2 + \varepsilon &\iff 2\varepsilon < \ell_2 - \ell_1 \\ &\iff \frac{2}{3}(\ell_2 - \ell_1) < \ell_2 - \ell_1 \\ &\iff \frac{2}{3} < 1 \end{aligned}$$

Ainsi $\ell_1 = \ell_2$

CAS 2 $\ell_1 \in \mathbb{R}, \ell_2 = +\infty$

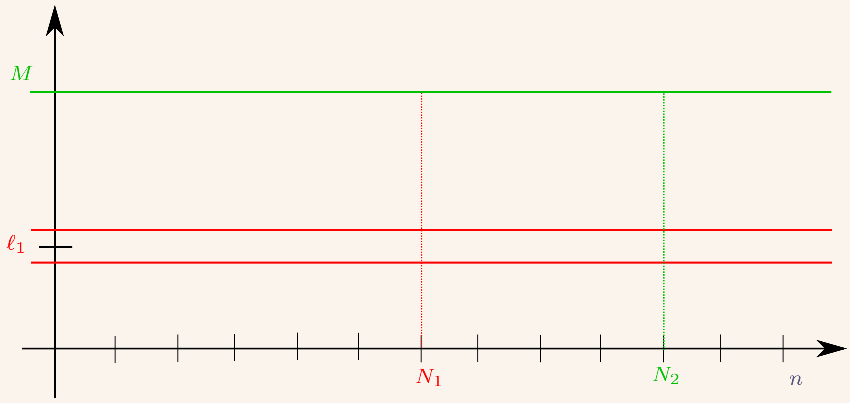


Figure 11.4 – Preuve unicité de la limite (cas 2)

$u_n \to \ell_1$ donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, \ell_1 - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + 1$$

$u_n \to +\infty$ donc il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, u_n \geqslant \ell_1 + 2$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Ainsi

$$u_n \geqslant \ell_1 + 2 > \ell_1 + 1 \geqslant u_n$$

une contradiction

De la même manière, on peut prouver pour $(\mathbb{R}, -\infty)$ et $(+\infty, -\infty)$

$\square$

Remarque:
Si u_n tends vers ℓ quand n tends vers $+\infty$, on écrit $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $\lim u_n = \ell$

Proposition: Toute suite convergente est bornée

Preuve:
On pose $\ell = \lim u_n \in \mathbb{R}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \ell - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell + 1$$

L'ensemble $\{u_n \mid n \leqslant N\}$ est fini, il a donc un plus grand élément et un plus petit élément. On pose

$$\begin{cases} M_1 = \max\{u_n \mid n \leqslant N\} \\ m_1 = \min\{u_n \mid n \leqslant N\} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} M = \max(\ell_1 + 1, M_1) \\ m = \min(\ell_1 - 1, m_1) \end{cases}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} m \leqslant m_1 \leqslant u_n \leqslant M_1 \leqslant M & \text{si } n \leqslant N \\ m \leqslant \ell_1 - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + 1 \leqslant M & \text{si } n > N \end{cases}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant u_n \leqslant M$$

□

Proposition: Soient $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On pose $\ell_1 = \lim u_n$ et $\ell_2 = \lim v_n$

1. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$ alors $u_n + v_n \to \ell_1 + \ell_2$
2. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = +\infty$ alors $u_n + v_n \to +\infty$
3. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = -\infty$ alors $u_n + v_n \to -\infty$
4. si $\ell_1 = \ell_2 = +\infty$, alors $u_n + v_n \to +\infty$
5. si $\ell_1 = \ell_2 = -\infty$, alors $u_n + v_n \to -\infty$

Preuve:

1. On suppose $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\ell = \ell_1 + \ell_2$.
Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \ell - \varepsilon \leqslant u_n + v_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

$\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, \ell_1 - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, \ell_2 - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant v_n \leqslant \ell_2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geqslant N$ quelconque.

$$n \geqslant N \geqslant N_1 \text{ donc } \ell_1 - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$n \geqslant N \geqslant N_2 \text{ donc } \ell_2 - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant v_n \leqslant \ell_2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

D'où, en additionnant les inégalités

$$\ell - \varepsilon = \ell_1 + \ell_2 - \varepsilon \leqslant u_n + v_n \leqslant \ell_1 + \ell_2 + \varepsilon = \ell + \varepsilon$$

2. On suppose $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = +\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$ quelconque.
Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, \ell_1 - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + 1$$

et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, v_n \geqslant M - \ell_1 + 1$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geqslant N$ quelconque

$$\begin{cases} n \geqslant N_1 \text{ donc } u_n \geqslant \ell_1 - 1 \\ n \geqslant N_2 \text{ donc } v_n \geqslant M - \ell_1 + 1 \end{cases}$$

D'où, $u_n + v_n \geqslant M$

□

Proposition: Soient u et v deux suites réelles. On pose $\ell_1 = \lim u_n$ et $\ell_2 = \lim v_n$

1. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$, alors $u_n v_n \to \ell_1 \ell_2$
2. si $\begin{cases} \ell_1 \in \mathbb{R}_*^+, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \to +\infty \\ \ell_1 \in \mathbb{R}_*^-, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \to -\infty \end{cases}$
3. si $\begin{cases} \ell_1 \in \mathbb{R}_*^+, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \to -\infty \\ \ell_1 \in \mathbb{R}_*^-, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \to +\infty \end{cases}$
4. si $\begin{cases} \ell_1 = -\infty, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \to -\infty \\ \ell_1 = -\infty, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \to +\infty \\ \ell_1 = +\infty, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \to +\infty \end{cases}$

Preuve: 1. $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| &= |(u_n - \ell_1) v_n + \ell_1 (v_n - \ell_2)| \\ &\leqslant |v_n| \, |u_n - \ell_1| + |\ell_1| \, |v_n - \ell_2| \end{aligned}$$

Comme v_n converge, elle est bornée,

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leqslant M$$

donc

$$|u_n v_n - \ell_1 \ell_2| \leqslant M \times |u_n - \ell_1| + |\ell_1| \, |v_n - \ell_2|$$

Cas 1 On suppose $M \neq 0$ et $\ell_1 \neq 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, |u_n - \ell_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}$$

Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, |v_n - \ell_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2 \, |\ell_1|}$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$.

$$\forall n \geqslant N, |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M} \times M + |\ell_1| \times \frac{\varepsilon}{2 \, |\ell_1|} = \varepsilon$$

Cas 2 $M = 0$, $(\ell_1 \neq 0)$

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 0$

Donc

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n v_n = 0 \\ \ell_2 = 0 \\ \ell_1 \ell_2 = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n \end{cases}$$

Cas 3 $M \neq 0$ et $\ell_1 = 0$
Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n v_n - 0| \leqslant M\,|u_n|$
$\dfrac{\varepsilon}{M} > 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$$

Donc,

$$\forall n \geqslant N, |u_n v_n| \leqslant M \times \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

Donc, $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = \ell_1 \ell_2$

2. $l_1 > 0$ et $l_2 = +\infty$
Soit $M \in \mathbb{R}_*^+$ On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, u_n v_n \geqslant M$$

On pose $\varepsilon = \dfrac{\ell_1}{2} > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, u_n \geqslant \ell_1 - \varepsilon = \frac{\ell_1}{2} > 0$$

et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, v_n \geqslant \frac{2M}{\ell_1} > 0$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Alors,

$$\forall n \geqslant N, u_n v_n \geqslant \frac{2M}{\ell_1} \times \frac{\ell_1}{2} = M$$

Donc $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

□

Proposition: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_*$.Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$
On pose $\ell = \lim u_n$ (si elle existe).

1. si $\ell = +\infty$ alors, $\dfrac{1}{u_n} \to 0$
2. si $\ell = 0$ alors, $\left|\dfrac{1}{u_n}\right| \to +\infty$

   ⚠ Si le signe de u_n ne se stabilise pas $\dfrac{1}{u_n}$ n'a pas de limite

   $\boxed{\text{ex}}$ $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
3. si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\ell}$

Preuve: 3.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|\ell - u_n|}{|u_n|\,|\ell|}$$

On pose $\varepsilon = \dfrac{|\ell|}{2} > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

Si $\ell > 0$ alors

$$\forall n \geqslant N, u_n \geqslant \ell - \varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$$

et donc

$$\forall n \geqslant N, |u_n| \geqslant \frac{|\ell|}{2}$$

Si $\ell < 0$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \ell + \varepsilon = \frac{\ell}{2} < 0$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \geqslant \frac{|\ell|}{2}$$

Donc,

$$\forall n \geqslant N, \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| \leqslant \frac{|u_n| - \ell}{|\ell| \times \frac{|\ell|}{2}} = \frac{2\,|u_n - \ell|}{|\ell|^2}$$

Soit $\varepsilon' > 0$ quelconque. $\dfrac{\varepsilon'\,|\ell|^2}{2}$ donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N', |u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon'}{2}\,|\ell|^2$$

On pose N'', $\left| \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell} \right| \leqslant \dfrac{\varepsilon'}{2}\,|\ell|^2 \times \dfrac{2}{|\ell|^2} = \varepsilon'$

□

3 Limites et inégalités

Proposition: Soient u et v deux suites réelles convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$$

Alors, $\ell_1 \leqslant \ell_2$

Preuve:
On suppose $\ell_1 < \ell_2$. On pose $\varepsilon = \dfrac{\ell_1 - \ell_2}{3} > 0$.
Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, u_n \geqslant \ell_1 - \varepsilon$$

Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, v_n \leqslant \ell_2 + \varepsilon$$

Ainsi,

$$\forall n \geqslant \max(N_1, N_2), \ell_1 - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant \ell_2 + \varepsilon$$

et donc

$$\ell_1 - \varepsilon \leqslant \ell_2 + \varepsilon$$

donc, $\ell_1 - \ell_2 \leqslant 2\varepsilon$
donc, $1 \leqslant \dfrac{2}{3}$ une contradiction □

Remarque:

Si $\begin{cases} u_n \to \ell_1 \in \mathbb{R} \\ v_n \to \ell_2 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n \end{cases}$
on n'a pas forcément $\ell_1 < \ell_2$
$\boxed{\text{ex}}$ $\forall n \in \mathbb{N}_*, \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ mais les deux convergent vers 0

Proposition: Soient u et v deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$$

1. si $u_n \to +\infty$,$v_n \to +\infty$
2. si $v_n \to -\infty$,$u_n \to -\infty$

Preuve: 1. On suppose $u_n \to +\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, u_n \geqslant M$$

Donc

$$\forall n \geqslant N, v_n \geqslant u_n \geqslant M$$

Donc $v_n \to +\infty$

□

Théorème (Théorème des "gendarmes")**:** Soient u, v et w trois suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

On suppose que u et w convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, v converge vers ℓ

Preuve:
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, w_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, u_n \leqslant \ell - \varepsilon$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. D'où,

$$\forall n \geqslant N, \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

Donc, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

□

Théorème (Limite monotone)**:**

1. Soit u une suite croissante majorée par M.
   Alors, u converge et $\lim u_n \leqslant M$
2. Soit u une suite croissante non majorée.
   Alors, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
3. Soit u une suite décroissante minorée par m.
   Alors, u converge et $\lim u_n \geqslant m$
4. Soit u une suite décroissante non minorée.

Alors, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

Preuve: 1. $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing$ (u_0 y est) majorée (par hypothèse) par M.
On pose $\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}}(u_n)$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque
$\ell - \varepsilon < \ell$ donc, $\exists N \in \mathbb{N}, u_N > \ell - \varepsilon$
u est croissante donc

$$\forall n \geqslant N, u_n \geqslant u_N > \ell - \varepsilon$$

donc,

$$\forall n \geqslant N, \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell \leqslant \ell + \varepsilon$$

Donc, $u_n \to \ell$

2. Soit $M \in \mathbb{R}$. M n'est pas un majorant de l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ donc

$$\exists N \in \mathbb{N}, u_N > M$$

Comme u est croissante

$$\forall n \geqslant N, u_n \geqslant u_N \geqslant M$$

donc

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

$\square$

Exemple:

$$\begin{cases} u_0 = a \in]0,1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(1-u_n) \end{cases}$$

(suite logistique)

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f : x \mapsto x(1-x)$$

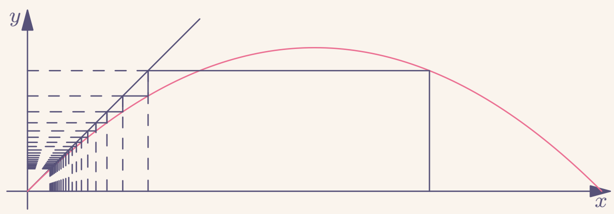


Figure 11.5 – Courbe logistique

— Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n(1-u_n) - u_n \\ &= -{u_n}^2 \leqslant 0 \end{aligned}$$

Donc, u est décroissante.

— Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$$

— $u_0 = a \in]0,1[$ donc $u_0 \in [0,1]$

— Soit $n \in N$. On suppose $u_n \in [0,1]$

$$\begin{cases} 0 \leqslant u_n \leqslant 1 \\ 0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1 \end{cases}$$

donc

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$

donc u minoré par 0

— D'après le théorème de la limite monotone, u converge. On pose ℓ sa limite :

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n$$

Alors, $u_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

$$u_n(1 - u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell(1 - \ell)$$

Par unicité de la limite,

$$\ell = \ell(1 - \ell)$$
$$\iff 1 = 1 - \ell$$
$$\iff 0 = -\ell \iff \ell = 0$$

Exemple:

$$\begin{cases} u_0 = a \in]0, 1[\\ u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n) \end{cases}$$

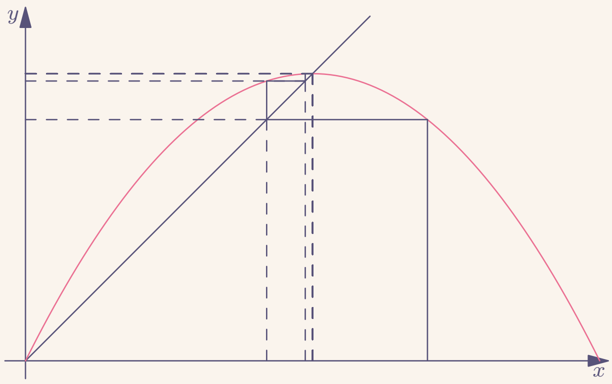


Figure 11.6 – Courbe logistique (2)

Exemple:

$$\begin{cases} u_0 = a \in]0, 1[\\ u_{n+1} = 3u_n(1 - u_n) \end{cases}$$

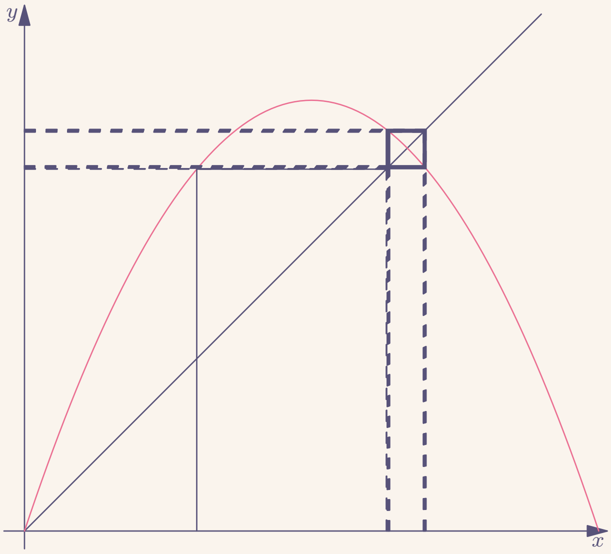


FIGURE 11.7 – Courbe logistique (3)

EXEMPLE:

$$\begin{cases} u_0 = a \in]0,1[\\ u_{n+1} = 4u_n(1-u_n) \end{cases}$$

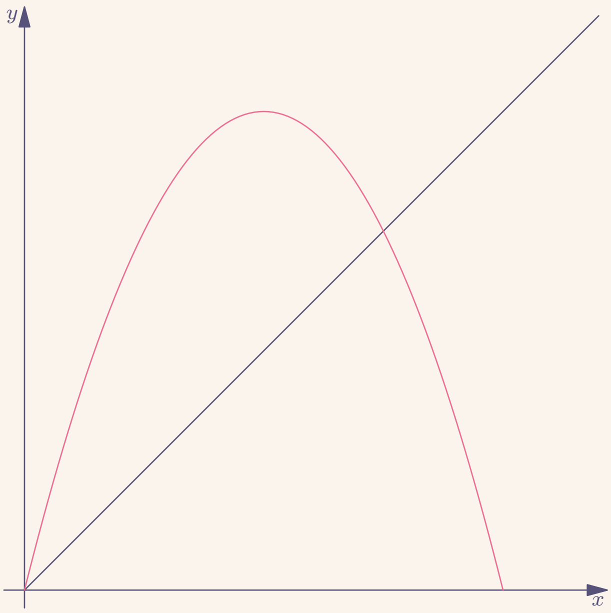


FIGURE 11.8 – Courbe logistique (4)

Définition: Soient u et v deux suites réelles. On dit que u et v sont adjacentes si

— u est croissante

— v est décroissante
— $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Théorème: Soient u et v deux suites adjacentes. Alors, u et v convergent vers la même limite.

Preuve:
$u - v$ est croissante donc,
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - v_n \leqslant 0$$
v décroissante donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant v_0$$
donc u majorée par v_0 donc u converge.
u est croissante donc,
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant u_0$$
donc v est minorée par u_0 donc v converge.
Donc, $u_n - v_n \to \lim(u_n) - \lim(v_n)$ Par unicité de la limite,
$$\begin{aligned} &\lim(u_n) - \lim(v_n) = 0 \\ \iff &\lim(u_n) = \lim(v_n) \end{aligned}$$
□

Théorème (Théorème des segments emboîtés)**:** Soit (I_n) une suite de segments (non vide) décroissante
$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$$
On note $\ell(I)$ la longueur d'un intervalle I.
Si $\ell(I_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

Preuve:
On pose $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = [a_n, b_n]$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant b_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$I_{n+1} \subset I_n$ donc $a_{n+1} \in I_{n+1} \subset I_n$
donc $a_{n+1} \geqslant a_n$. De même, $b_{n+1} \in I_{n+1}$ donc $b_{n+1} \in I_n$ donc $b_{n+1} \leqslant b_n$.
$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \ell(I_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
donc (a_n) et (b_n) sont adjacentes, elles convergent donc vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.
(a_n) croissante de limite ℓ donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant \ell$$
(b_n) est décroissante de limite ℓ donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n \geqslant \ell$$
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \ell \in I_n$ donc $\ell \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$.
Soit $\ell' \neq \ell$.

— Si $\ell' < \ell = \sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n)$ donc ℓ' ne majore pas (a_n)

$$\exists N \in \mathbb{N}, a_N > \ell'$$

donc $\ell' \notin I_N$ donc $\ell' \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$

— Si $\ell' > \ell = \inf_{n\in\mathbb{N}}(b_n)$ donc ℓ' ne minore pas (b_n)

$$\exists N' \in \mathbb{N}, b_{N'} < \ell'$$

et donc $\ell' \notin I_{N'}$ donc $\ell' \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$

□

4 Suites extraites

Définition: Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.
On dit que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ est une **suite extraite** de u ou une **sous suite** de u. On dit alors que φ est une extractrice.

Exemple:
u_0 $\boxed{u_1}$ u_2 u_3 $\boxed{u_4}$ $\boxed{u_5}$ u_6 u_7 ...

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1 \\ \varphi(1) = 4 \\ \varphi(2) = 5 \end{cases}$$

Lemme: Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geqslant n$$

Preuve (par récurrence)*:* — $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ donc $\varphi(0) \geqslant 0$

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $(\varphi(n) \geqslant n$.
$n+1 > n$ donc $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$ donc $\varphi(n+1) > n$
Comme $\varphi(n+1) \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) \geqslant n+1$

□

Proposition: Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante alors $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Preuve: Cas 1 $\ell \in \mathbb{R}$
Soit $\varepsilon > 0$ on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Soit $n \geqslant N$ alors $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N$ donc

$$\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$

Donc, $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Cas 2 $\ell = +\infty$

Soit $M \in \mathbb{R}$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, u_n \geqslant M$$

Soit $n \geqslant N$, on a $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N$ donc

$$u_{\varphi(n)} \geqslant M$$

Donc $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Cas 3 $\ell = -\infty$ similaire au Cas 2

□

Exemple:
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$

$$\begin{aligned} u_{2n} = 1 &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \\ &\qquad\quad \not\parallel \\ u_{2n+1} = -1 &\xrightarrow[n\to+\infty]{} -1 \end{aligned}$$

donc u_n n'a pas de limite.

Proposition: Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont la même limite ℓ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Preuve: Cas 1 $\ell \in \mathbb{R}$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, |u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, |u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On pose $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$. Soit $n \geqslant N$.
Si n pair alors $n = 2k$ avec $k \geqslant N_1$ et donc, $|u_{2k} - \ell| \leqslant \varepsilon$, i.e. $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
Si n impair alors $n = 2k+1$ avec $k \geqslant N_2$ et donc, $|u_{2k+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$, i.e. $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
Donc,

$$\forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

□

Théorème (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**:** Soit (u_n) une suite réelle bornée. Alors, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ converge.

Preuve: Méthode 1 par dichotomie

Soitent $m, M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant u_n \leqslant M$$

On pose

$$A_1 = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid m \leqslant u_n \leqslant \frac{m+M}{2} \right\}$$
$$A_2 = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{m+M}{2} \leqslant u_n \leqslant M \right\}$$

Comme $A_1 \cup A_2 = \mathbb{N}$, A_1 et A_2 ne peuvent pas être finis tous les deux.
On pose

$$B_0 = \begin{cases} A_1 & \text{si } A_1 \text{ est infini} \\ A_2 & \text{sinon} \end{cases}$$

B_0 est infini donc non vide. On pose $\varphi(0) = \min(B_0)$
On pose aussi

$$m_0 = \begin{cases} m & \text{si } B_0 = A_1 \\ \dfrac{m+M}{2} & \text{si } B_0 = A_2 \end{cases}$$

et

$$M_0 = \begin{cases} \dfrac{m+M}{2} & \text{si } B_0 = A_1 \\ M & \text{si } B_0 = A_2 \end{cases}$$

Ainsi, $B_0 = \{n \in \mathbb{N} \mid m_0 \leqslant u_n \leqslant M_0\}$. On pose

$$B_1' = \left\{ n \in B_0 \mid n > \varphi(0) \text{ et } m_0 \leqslant u_n \leqslant \frac{M_0 + m_0}{2} \right\}$$
$$B_2' = \left\{ n \in B_0 \mid n > \varphi(0) \text{ et } \frac{m_0 + M_0}{2} \leqslant u_n \leqslant M_0 \right\}$$

$$B_1' \cup B_2' = \{n \in B \mid n > \varphi(0)\} = B_0 \setminus \{\varphi(0)\}$$

$B_0 \setminus \{\varphi(0)\}$ est infini donc B_1' ou B_2' est infini. On pose

$$B_1 = \begin{cases} B_1' & \text{si } B_1' \text{ est infini} \\ B_2' & \text{sinon} \end{cases}$$

B_1 est infini donc non vide et admet un plus petit élément :

$$\varphi(1) = \min(B_1)$$

$\varphi(1) \in B_1$ donc $\varphi(1) > \varphi(0)$
On pose

$$m_1 = \begin{cases} m_0 & \text{si } B_1 = B_1' \\ \dfrac{m_0 + M_0}{2} & \text{si } B_1 = B_2' \end{cases}$$
$$M_1 = \begin{cases} \dfrac{m_0 + M_0}{2} & \text{si } B_1 = B_1' \\ M_0 & \text{si } B_1 = B_2' \end{cases}$$

On construit une suite décroissante (B_n), deux suites de réels (m_n) et (M_n) et une suite d'entiers $(\varphi(n))$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} B_{n+1} = \{k \in B_n \mid k > \varphi(n) \text{ et } m_{n+1} \leqslant u_k \leqslant M_{n+1}\} \\ \varphi(n+1) = \min(B_{n+1}) > \varphi(n) \\ M_{n+1} - m_{n+1} = \dfrac{1}{2}(M_n - m_n) \end{cases}$$

La suite (m_n) est croissante, (M_n) est décroissante et

$$\lim_{n\to+\infty} M_n - m_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (M_0 - m_0) = 0$$

Donc, (m_n) et (M_n) sont adjacentes donc convergentes avec la même limite $\ell \in \mathbb{R}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, m_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant M_n$$

Par encadrement, $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ □

Méthode 2 On pose $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall k > n, u_n > u_k\}$

Cas 1 On suppose A infini.

On pose $\varphi(0) = \min(A)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n)$ soient déjà construits. On pose

$$\varphi(n+1) = \min(A \setminus \{\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n)\})$$

Soit $n \in \mathbb{N}_*$

$$\varphi(n+1) \in A \setminus \{\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n)\}$$

donc

$$\varphi(n+1) \in A \setminus \{\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n-1)\}$$

donc

$$\varphi(n+1) \geqslant \varphi(n)$$

Or, par définition, $\varphi(n+1) \neq \varphi(n)$ donc $\varphi(n+1) > \varphi(n)$

On a aussi $\varphi(1) \in A$ donc $\varphi(1) \geqslant \varphi(0)$ Or, on sait que $\varphi(1) \neq \varphi(0)$. Donc, $\varphi(1) > \varphi(0)$ Soit $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \in A$ donc

$$\forall k > \varphi(n), u_k < u_{\varphi(n)}$$

or $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ donc $u_{\varphi(n+1)} < u_{\varphi(n)}$.

La sous suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ est décroissante et minorée (car u est minorée) donc elle converge

Cas 2 On suppose A fini. Soit $N = \max(A)$,

$$\forall n > N, n \notin A$$

Donc $\forall n > N, \exists k > n, u_n \leqslant u_k$.

Par exemple, en posant $\varphi(0) = N + 1$, on a

$$A_1 = \{k > N+1 \mid u_{N+1} \leqslant u_k\} \neq \varnothing$$

On pose $\varphi(1) = \min(A_1)$ donc $\begin{cases} \varphi(1) > N+1 = \varphi(0) \\ u_{\varphi(0)} < u_{\varphi(1)} \end{cases}$

Avec $n = \varphi(1)$

$$\exists k > n, u_{\varphi(1)} \leqslant u_k$$

Donc, $A_2 = \{k \in \mathbb{N} \mid k > \varphi(1) \text{ et } u_{\varphi 1)} \leqslant u_k\} \neq \varnothing$

On pose $\varphi(2) = \min(A_2)$. On a alors $\varphi(2) > \varphi(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\varphi(n)$ déjà construit avec $\varphi(n) > N$. On sait alors que

$$A_{n+1} = \{k \in \mathbb{N} \mid k > \varphi(n) \text{ et } u_{\varphi(n)} \leqslant u_k\} \neq \varnothing$$

On pose $\varphi(n+1) = \min(A_{n+1})$. Donc,

$$\begin{cases} \varphi(n+1) > \varphi(n) > N \\ u_{\varphi(n)} \leqslant u_{\varphi(n+1)} \end{cases}$$

On vient de construire une sous suite croissante majorée (car u est majorée) donc convergente.

□

5 Suites récurrentes

Définition: On dit que u est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants s'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

L'équation caractéristique associée est

$$(C) : z^2 = az + b \text{ avec } z \in \mathbb{C}$$

Proposition: Avec les notations précédentes,

1. Si (C) a 2 racines simples $r_1 \neq r_2$ alors

$$\exists (A, B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A{r_1}^n + B{r_2}^n$$

2. Si (C) a une racine double $r \in \mathbb{C}$ alors

$$\exists (A, B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)r^n$$

Preuve (Récurrence double)*:*

□

Proposition: avec les notations précédentes et avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

1. Si (C) a deux racines simples $r_1 \neq r_2$ alors

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A{r_1}^n + B{r_2}^n$$

2. Si (C) a une racine simple $r \in \mathbb{R}$ alors

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)r^n$$

3. Si (C) a deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_*^+$ et $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$$

□

Remarque:
Étude de $u_{n+1} = f(u_n)$

1. On choisit rapidement la fonction f (au moins le tableau de variation)

1'. (optionnel) on représente graphiquement la fonction f et la droite d'équation $y = x$ pour conjecturer sa limite

2. On utilise le tableau de variation pour vérifier que (u_n) est bien définie par récurrence

$$P(n) : "u_n \text{ existe et } u_n \in \mathscr{D}_f"$$

3. On étudie le signe de $f(x) - x$
4. On cherche les intervalles stables par f :

$$f(I) \subset I$$

les plus petits possible (c a permet de montrer que la suite est majorée (minorée) en particulier ceux sur lesquels $f(x) - x$ ne change pas de signe

4'. Donc on utilise le théorème de la limite monotone

4". Sinon, on essaie l'inégalité (voir théorème) des accroissements finis :
Soit ℓ un point fixe de f : $f(\ell) = \ell$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| = M\,|u_n - \ell|$$

où M est un majorant de $|f|$
Si $0 \leqslant M \leqslant 1$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leqslant M^n\,|u_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

5. si (u_n) a une limite et si f continue alors $\lim(u_n)$ est une point fixe de f

Exemple: 1.

$$\begin{cases} u_{n+1} = \cos(u_n) \\ u_0 \in \,]0,1[\end{cases}$$

x	0	1	$\frac{\pi}{2}$
f	1	$\searrow$	0

On pose $g : x \mapsto \cos(x) - x$ dérivable et
$\forall x \in [0,1]\,, g'(x) = -\sin(x) - 1 \leqslant 0$

x	0	α	1
g	1 $\searrow$	0 $\searrow$	$g(1) < 0$

x	0		α		1
f	1	$\searrow$	0	$\searrow$	
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	

$$\begin{aligned} \forall x \in [0,1]\,, \left|f'(x)\right| &= |-\sin(x)| \\ &= \sin(x) \leqslant \sin(1) < 1 \end{aligned}$$

$$\forall n, |u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \sin(1)\,|u_n - \alpha|$$

donc

$$\forall n, |u_n - \alpha| \leqslant \underbrace{\sin^n(1)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}\,|u_0 - \alpha|$$

Donc, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$

6 Comparaison de suites

Définition: Soient u et v deux suites réelles. On dit que u est <u>dominée</u> par v si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant M\,|v_n|$$

Dans ce cas, on note $u = O(v)$ ou $u_n = O(v_n)$ et on dit que "u est un grand o de v"

Exemple:
En informatique, on dit qu'un algorithme a une <u>complexité linéaire</u> si son temps d'éxécution est un $O(n)$ Par exemple, on calcule a^n

— Approche naïve Complexité linéaire $O(n)$

```
p ← 1
for i ∈ ⟦0, n − 1⟧ do
    p ← p × a
end for
return p
```

— Exponentiation rapide
On écrit n en binaire :

$$\begin{aligned} n &= \overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}^{(2)} \\ &= \sum_{i=0}^{k} a_i 2^i \end{aligned}$$

avec $(a_i) \in \{0, 1\}^{k+1}$

$$\begin{aligned} a^n &= a^{\sum_{i=0}^{k} a_i 2^i} \\ &= \prod_{i=0}^{k} a^{a_i 2^i} \end{aligned}$$

```
s ← 0
p ← a
for i ∈ ⟦0, log2(n)⟧ do
    p ← p × p
    if a[i] = 1 then
        s ← s + p
    end if
end for
return s
```

Compléxité logarithmique $O(\log_2(n))$

Proposition: O est une relation refléctive et transitive.

Preuve: — Soit u une suite. On pose $M = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M\,|u_n|$$

Donc $u = O(u)$.

— Soient u, v, w trois suites telles que

$$\begin{cases} u = O(v) \\ v = O(w) \end{cases}$$

Soient $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ et $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{cases} \forall n \geqslant N_1, |u_n| \leqslant M_1 |v_n| \\ \forall n \geqslant N_2, |v_n| \leqslant M_2 |w_n| \end{cases}$$

Nécéssairement, $M_1 \geqslant 0$ et $M_2 \geqslant 0$.
Soit $N = \max(N_1, N_2)$.

$$\forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant M_1 |v_n| \leqslant M_1 M_2 |w_n|$$

Donc $u = O(w)$

□

Définition: Soient u et v deux suites. On dit que u est négligeable devant v si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$$

Dans ce cas, on note $u = o(v)$ ou $u_n = o(v_n)$ ou on le lit "u est un petit o de v"

Proposition: o est une relation transitive, non-réfléctive

Preuve: — Soient u, v et w trois suites telles que

$$\begin{cases} u = o(v) \\ v = o(w) \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, |u_n| \leqslant \sqrt{\varepsilon} |v_n|$$

Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, |v_n| \leqslant \sqrt{\varepsilon} |w_n|$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$, alors

$$\forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \sqrt{\varepsilon} |v_n| \leqslant \underbrace{\sqrt{\varepsilon} \times \sqrt{\varepsilon}}_{\varepsilon} |w_n|$$

donc $u = o(w)$

— Soit u une suite tel qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, u_n > 0$$

On suppose que $u = o(u)$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \varepsilon |u_n|$$

On pose $\varepsilon = \frac{1}{2}$ alors

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \frac{1}{2} |u_n|$$

une contradiction

□

Proposition: Soient u et v deux suites.

— $o(u) + o(u) = o(u)$
— $v \times o(u) = o(uv)$
— $o(u) \times o(v) = o(uv)$
— $o(o(u)) = o(u)$

□

Définition: Soient u et v deux suites. On dit que u et v sont <u>équivalentes</u> si

$$u = v + o(v)$$

i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - v_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$$

Dans ce cas, on le note $u \sim v$

Proposition: $\sim$ est une relation d'équivalence □

Proposition: Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang

1. $u = o(v) \iff \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ bornée
2. $u = o(v) \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
3. $u \sim v \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

□

Proposition (Suites de références):

1. $\ln^{\alpha}(n) = o(n^{\beta})$ avec $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$
2. $n^{\beta} = o(a^n)$ avec $\beta > 0$ et $a > 1$
3. $a^n = o(n!)$ avec $a > 1$
4. $n! = o(n^n)$

Lemme (Exercice 10 du TD): Soit $u \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^{\mathbb{N}}$
Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell < 1$ avec $\ell \in \mathbb{R}$,
alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Preuve (de la proposition): 1. par croissance comparée

2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{n^\beta}{a^n}$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^\beta \times \frac{1}{a} \\ &= \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{a} < 1\end{aligned}$$

Donc, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

3. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{a^n}{n!}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$$

donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

4. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} &= (n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= e^{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} \\ &= e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} \\ &= e^{n(-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})} \\ &= e^{-1+o(1)} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1} < 1\end{aligned}$$

donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

□

7 Suites complexes

Définition: Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que (u_n) converge vers ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

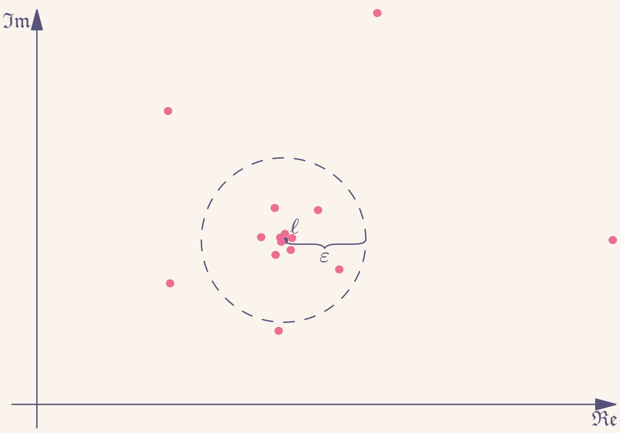


Figure 11.9 – Suite complexe convergente

Proposition: Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux limites de u alors $\ell_1 = \ell_2$

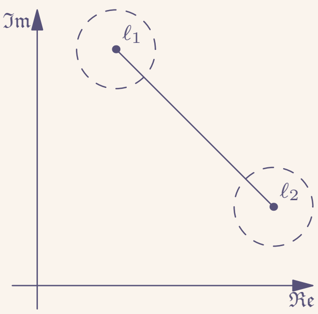


Figure 11.10 – Unicité de la limite de suites complexes

□

Proposition: Les limites de somme, produit, quotient de suites complexes respectent les mêmes lois que pour les suites réelles. □

Théorème: Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathfrak{Re}(\ell) \\ \mathfrak{Im}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathfrak{Im}(\ell) \end{cases}$$

Preuve: $\implies$ On suppose $u_n \to \ell$.
Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Or,

$$\forall n \geqslant N, \begin{cases} \mathfrak{Re}(u_n) - \mathfrak{Re}(\ell) = \mathfrak{Re}(u_n - \ell) \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \\ \mathfrak{Im}(u_n) - \mathfrak{Im}(\ell) = \mathfrak{Im}(u_n - \ell) \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \mathfrak{Re}(u_n) \to \mathfrak{Re}(\ell) \\ \mathfrak{Im}(u_n) \to \mathfrak{Im}(\ell) \end{cases}$$

$\Longleftarrow$ On suppose $\begin{cases} \mathfrak{Re}(u_n) \to \mathfrak{Re}(\ell) \\ \mathfrak{Im}(u_n) \to \mathfrak{Im}(\ell) \end{cases}$

Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \mathfrak{Re}(u_n) + i\mathfrak{Im}(u_n) \to \mathfrak{Re}(\ell) + i\mathfrak{Im}(\ell) = \ell$$

□

Proposition: Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.
Si $u_n \to \ell$ alors $|u_n| \to |\ell|$

Preuve:
On suppose $u_n \to \ell$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = \sqrt{\mathfrak{Re}^2(u_n) + \mathfrak{Im}^2(u_n)} \to \sqrt{\mathfrak{Re}^2(\ell) + \mathfrak{Im}^2(\ell)} = |\ell|$$

□

Proposition: Tous les résultats (sauf ceux avec des limites infinies!) concernant les suites extraites sont encore valables dans $\mathbb{C}$ y compris le théorème de Bolzano-Weierstrass (mais avec une autre preuve).

Définition: Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est <u>bornée</u> s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$$

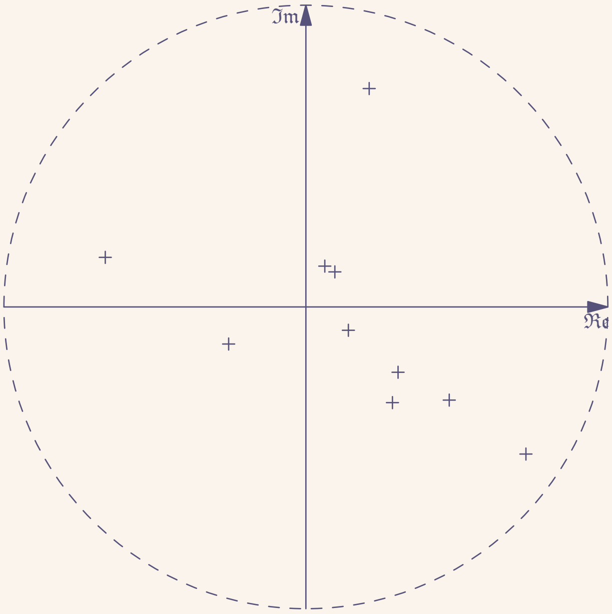


Figure 11.11 – Suite complexe bornée

Théorème (Bolzano Weierstrass)**:** Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ bornée. Il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ converge.

Preuve:
Soit $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, |\mathfrak{Re}(u_n)| \leqslant |u_n| \leqslant M$ Donc $(\mathfrak{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Donc, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(\mathfrak{Re}\left(u_{\varphi(n)}\right)\right)$ converge.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\mathfrak{Im}\left(u_{\varphi(n)}\right)\right| \leqslant \left|u_{\varphi(n)}\right| \leqslant M$$

donc $\left(\mathfrak{Im}(u_{\varphi(n)}\right)$ est bornée. Soit $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(\mathfrak{Im}\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)\right)$ converge. Or, $\left(\mathfrak{Re}\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)\right)$ est une sous suite de la suite convergente $\left(\mathfrak{Re}\left(u_{\varphi(n)}\right)\right)$ donc $\left(\mathfrak{Re}\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)\right)$ converge.
Donc, $\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)$ converge.
Comme $\varphi \circ \psi$ est strictement croissante, $\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)$ est une sous suite de (u_n) □

8 Annexe

Proposition: Soit $f : I \to I$ continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$
alors $f(\ell) = \ell$ i.e. (ℓ est un point fixe de f)

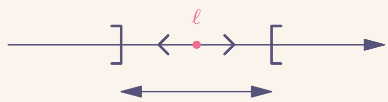
Preuve:
On suppose que (u_n) converge vers ℓ.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ car (u_{n+1}) est une sous suite de (u_n).

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

Comme f est continue alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$. Par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$ $\square$

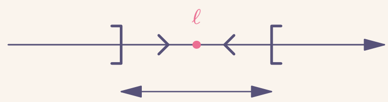
Remarque:
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
Soit $\ell \in \mathbb{R}$ un point fixe de f. Donc, $f(\ell) = \ell$.

$|f'(\ell)| > 1$:



répulsion

$|f'(\ell)| < 1$:



bassin d'attraction

Par contre, si $|f'(\ell)| = 1$, on ne sait pas.

Remarque (Suite arithético-géométrique):

$$(*) : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b = f(u_n)$$

Méthode 1

— On cherche v une suite constante solution de $(*)$:

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, v_n = C$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, C = aC + b = f(C)$$

Si $a \neq 1$: $C = \dfrac{b}{1-a}$

— Soit u qui vérifie $(*)$. On pose $w = u - v$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} &= u_{n+1} - v_{n+1}\\ &= au_n + b - av_n - b\\ &= a(u_n - v_n)\\ &= aw_n\end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = aw_n + 0$: équation homogène associée à $(*)$
(w_n) est géométrique donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 a^n$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = w_0 a^n + \frac{b}{1-a}$$

Méthode 2

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) &\longmapsto (u_{n+1} - au_n) \end{aligned}$$

φ morphisme de groupes additifs

$$\varphi(u) = (b) \iff u = v + w \text{ avec } w \in \operatorname{Ker}(\varphi)$$

$$\begin{aligned} w \in \operatorname{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(w) = 0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - aw_n = 0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = aw_n \end{aligned}$$

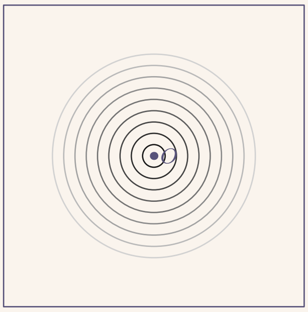
CHAPITRE

12
STRUCTURES ALGÉBRIQUES USUELLES

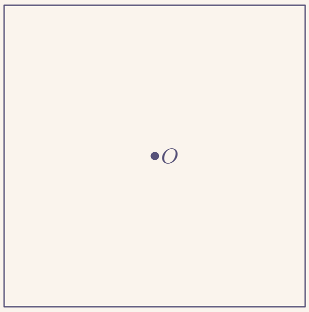
1 Groupes

Principe de symétrie (Pierre Curie)
La symétrie des causes se retrouvent dans les effets.

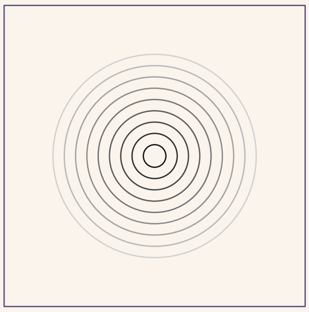
On fait tomber un caillou dans un plan d'eau ce qui crée une onde qui se propage.

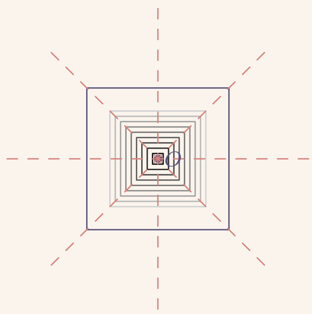


- Symétries des "causes"
  (conserver O en place)
  - translation de vecteur $\overrightarrow{0}$
  - rotations de centre O d'angle quelconque
  - symétries d'axe passant par O



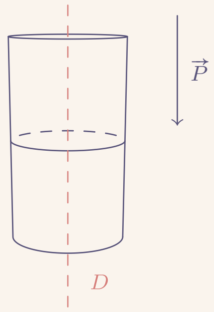
- <u>Symétries des "effets"</u>
  (conserver les ondes en place)
  - translation de vecteur $\overrightarrow{0}$
  - rotations de centre O d'angle quelconque
  - symétries d'axe passant par O



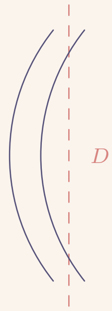


  - translation de vecteur $\overrightarrow{0}$
  - 4 rotations de centre O d'angle $0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}$
  - 4 symétries axiales

- <u>Causes</u>
  - translations de vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$
  - rotations d'axe D



— <u>Effet</u>



> **Définition:** Soit G un ensemble, muni d'une loi de composition <u>interne</u> $\diamond$.
> On dit que $(G, \diamond)$ est un <u>groupe</u> si :
> — $\diamond$ est associative
> — $\diamond$ a un neutre $e \in G$
> — $\forall x \in G, \exists y \in G, x \diamond y = y \diamond x = e$

Exemple ((À connaître)):

1. E un ensemble. $S(E)$ l'ensemble des bijections de E dans E. $(S(E), \circ)$ est un groupe appelé <u>groupe symétrique</u> de E. Si, $E = [\![1, n]\!]$, alors noté $S(E)$ est noté S_n (ou parfois $\mathfrak{S}_n$)
2. $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe mais $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe.
3. $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ sont des groupes
4. $(\mathbb{R}, \times)$ n'est pas un groupe car 0 n'a pas d'inverse.
   $(\mathbb{Q}_*, \times)$, $(\mathbb{R}_*, \times)$, $(\mathbb{C}_*, \times)$ sont des groupes.
   $(\mathbb{Z}_*, \times)$ n'est pas un groupe.
5. $(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), +)$ est un groupe
   $(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \times)$ n'est pas un groupe

> **Définition:** On dit que $(G, \diamond)$ est un groupe <u>commutatif</u> ou <u>abélien</u> si c'est un groupe et $\diamond$ est une loi commutative.

> **Définition:** Soit $(G, \cdot)$ un groupe (d'élément neutre e) et $H \subset G$. On dit que H est un <u>sous groupe</u> de G si
> 1. $\forall (x, y) \in H^2, x \cdot y \in H$
> 2. $e \in H$
> 3. $\forall x \in H, x^{-1} \in H$

Proposition: Soit H un sous groupe de $(G,\cdot)$. Alors, $(H,\cdot)$ est un groupe. □

Proposition: Soit $(G,\cdot)$ un groupe et $H \subset G$.

$$H \text{ est un sous groupe de } G \iff \begin{cases} \forall (x,y) \in H, x \cdot y^{-1} \in H \\ H \neq \varnothing \end{cases}$$

Preuve: " $\implies$ " $e \in H$ donc $H \neq \varnothing$.
Soit $(x,y) \in H^2$.
$y \in H$ donc $y^{-1} \in H$.
$x \in H$ donc $x \cdot y^{-1} \in H$.

" $\impliedby$ " $H \neq \varnothing$.
Soit $a \in H$, $(a,a) \in H^2$ donc $a \cdot a^{-1} \in H$ donc $e \in H$.
Soit $x \in H$, $(e,x) \in H^2$ donc $e \cdot e^{-1} \in H$ donc $x^{-1} \in H$.
Soit $(x,y) \in H^2$. Comme $y \in H$, $y \in y^{-1} \in H$ donc $(x, y^{-1}) \in H^2$.
Donc, $x \cdot \left(y^{-1}\right)^{-1} \in H$.
Donc, $x \cdot y \in H$.

□

Exemple:
$2\mathbb{Z}$ est un sous groupe de $(\mathbb{Z},+)$.
En effet,

— $2 \in 2\mathbb{Z}$ donc $2\mathbb{Z} \neq \varnothing$

— Soit $(x,y) \in (2\mathbb{Z})^2$, $\begin{cases} x \equiv 0 \ [2] \\ y \equiv 0 \ [2] \end{cases}$

donc $x - y \equiv 0 \ [2]$ donc $x - y \in 2\mathbb{Z}$

Proposition: Soit $(G,\cdot)$ un groupe et $(H_i)_{i \in I}$ une famille non vide de sous groupes de G. Alors, $\bigcap_{i \in I} H_i$ est un sous groupe de G.

Preuve:
On sait que $\forall i \in I, e \in H_i$ et $I \neq \varnothing$
Donc, $e \in \bigcap_{i \in I} H_i$ donc $\bigcap_{i \in I} H_i \neq \varnothing$
Soit $(x,y) \in \left(\bigcap_{i \in I} H_i\right)^2$.

$$\forall i \in I, \begin{cases} x \in H_i \\ y \in H_i \end{cases}$$

donc,

$$\forall i \in I, x \cdot y^{-1} \in H_i$$

donc

$$x \cdot y^{-1} \in \bigcap_{i \in I} H_i$$

□

Proposition: Soit $(G, \cdot)$ un groupe.
$\{e\}$ et G sont des sous groupes de G

Remarque:
Une réunion de sous groupes n'est pas nécessairement un sous groupe.

$$(G, \cdot) = (\mathbb{Z}, +)$$

$2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} = A$
$2 \in A$ et $3 \in A$ mais $2 + 3 = 5 \notin A$.
Donc, A n'est pas un sous groupe de $\mathbb{Z}$

Proposition – Définition: Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $A \subset G$. Alors,

$$\bigcap_{\substack{H \text{ sous groupe de } G \\ A \subset H}} H$$

est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous groupe de G qui contient A. On dit que c'est le sous groupe engendré par A et on le note $\langle A \rangle$

Preuve:
On pose $\mathscr{G} = \{H \in \mathscr{P}(G) \mid H \text{ sous groupe contenant } A\}$.
$G \in \mathscr{G}$ donc $\mathscr{G} \neq \varnothing$ donc $\bigcap\limits_{H \in \mathscr{G}} H$ est un sous groupe de G.
Soit $a \in A$. Alors

$$\forall H \in \mathscr{G}, a \in A \subset H$$

et donc $a \in \bigcap\limits_{H \in \mathscr{G}} H$.
Donc, $A \subset \bigcap\limits_{H \in \mathscr{G}} H$.
Soit H un sous groupe de G qui contient A.
Alors, $H \in \mathscr{G}$ alors $H \supset \bigcap\limits_{H \in \mathscr{G}} H$ □

Exemple:
$(G, \cdot) = (\mathbb{Z}, +)$
$A = 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$
$\langle A \rangle = \mathbb{Z}$ (d'après le théorème de Bézout).
On généralise $\langle a\mathbb{Z} \cup b\mathbb{Z} \rangle = (a \wedge b)\mathbb{Z}$

Définition: Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $A \subset G$.
On dit que A est une partie génératrice de G ou que A engendre G si $G = \langle A \rangle$

Exemple (Rubik's cube):

Exemple:
Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

— $\langle \varnothing \rangle = \{e\}$
  $\langle G \rangle = G$
— Soit $a \in G \setminus \{e\}$.
  $\langle a \rangle = \langle \{a\} \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
— Soit $a \neq b$ deux éléments de $G \setminus \{e\}$

$$\langle \{a,b\} \rangle = \{x \in G \mid \exists n \in \mathbb{N}, \exists (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \{a,b\}^n, \exists (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n, x = a_1^{\varepsilon_1} \times a_2^{\varepsilon_2} \times \dots \times a_n^{\varepsilon_n}\}$$

Remarque (Notation):
Soit $(G,\cdot)$ un groupe et $a \in G$.
Pour $n \in \mathbb{N}_*$, on pose $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fois}}$.
On pose $a^0 = e$ et pour $n \in Z_*^-$,

$$a^n = \left(a^{-1}\right)^{-n}$$

Remarque:
Si le groupe est noté additivement. On note na $(n \in \mathbb{Z}, a \in G)$ à la place de a^n

Définition: On dit qu'un groupe $(G,\cdot)$ est monogène s'il existe $a \in G$ tel que

$$G = \langle a \rangle$$

On dit alors que a est un générateur de G

Exemple:
$(\mathbb{Z},+)$ est engendré par 1.
$(2\mathbb{Z},+)$ est engendré par 2

Définition: Un groupe monogène fini est cyclique.

Proposition: Soit $(G,\cdot)$ un groupe monogène fini. Soit a un générateur de G. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$G = \{e, a, a^2, \dots a^{k-1}\}$$

Preuve:
G est fini donc il existe $p < q$ tels que $a^p = a^q$. On a alors $e = a^{q-p}$.
On pose alors, $k = \min\{n \in \mathbb{N}_* \mid a^n = e\}$.
Soit $x \in G = \langle a \rangle$. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = a^n$. On fait la division de n par k

$$\begin{cases} n = kq + r \\ q \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant r < k \end{cases}$$

$$x = a^n = a^{kq+r} = \left(a^k\right)^q \times a^r = a^r$$

On a prouvé

$$G \subset \left\{e, a, \dots, e^{k-1}\right\}$$

On sait déjà que $\left\{e, a, \dots, a^{k-1}\right\} \subset G$. □

Exemple:
$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe cyclique :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}\}$$

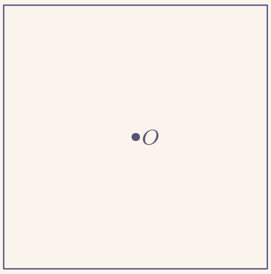
> **Définition:** Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $a \in G$.
> Si $\langle a \rangle$ est fini, le cardinal de $\langle a \rangle$ est appelé <u>ordre</u> de a : c'est le plus petit entier strictement positif n tel que $a^n = e$

Exemple:
$(S(\mathbb{C}_*), \circ)$ est un groupe
$z \mapsto \overline{z}$ est d'ordre de 2
$z \mapsto -z$ est d'ordre de 2
$z \mapsto \dfrac{1}{z}$ est d'ordre de 2

Exemple: — $G_1 = (\mathbb{U}_4, \times)$ où

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_4 &= \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\} \\ &= \{1, i, -1, -i\}\end{aligned}$$

$y \backslash x$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1



— G_2 l'ensemble des rotations planes qui laissent globalement invariant un carré.

$$G_2 = \left\{id, \rho_{\frac{\pi}{2}}, \rho_{\pi}, \rho_{\frac{3\pi}{2}}\right\}$$

$y \backslash x$	id	$\rho_{\frac{\pi}{2}}$	ρ_{π}	$\rho_{\frac{3\pi}{2}}$
id	id	$\rho_{\frac{\pi}{2}}$	ρ_{π}	$\rho_{\frac{3\pi}{2}}$
$\rho_{\frac{\pi}{2}}$	$\rho_{\frac{\pi}{2}}$	ρ_{π}	$\rho_{\frac{3\pi}{2}}$	id
ρ_{π}	ρ_{π}	$\rho_{\frac{3\pi}{2}}$	id	$\rho_{\frac{\pi}{2}}$
$\rho_{\frac{3\pi}{2}}$	$\rho_{\frac{3\pi}{2}}$	id	$\rho_{\frac{\pi}{2}}$	ρ_{π}

—

$$G_3 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{1})$
$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{1})$
$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{0})$
$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{1})$
$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{0})$

Définition: Soient $(G_1, \cdot)$ et $(G_2, *)$ deux groupes et $f : G_1 \to G_2$. On dit que f est un <u>(homo)morphisme de groupes</u> si

$$\forall (x,y) \in G_1, f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$$

Exemple:
$\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_*^+, \times)$ est un morphisme de groupes

Proposition: Avec les notations précédentes,
- l'image directe d'un sous groupe de G_1 est un sous groupe de G_2
- l'image réciproque d'un sous groupe de G_2 est un sous groupe de G_1

Preuve: — Soit H_1 un sous groupe de G_1.
$e_1 \in H_1$ donc $f(e_1) \in f(H_1)$ donc $H_1 \neq \varnothing$ Soient $x \in f(H_1)$ et $y \in f(H_2)$.
On pose $\begin{cases} x = f(u) \text{ avec } u \in H_1 \\ y = f(v) \text{ avec } v \in H_1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} x * y^{-1} &= f(u) * f(v)^{-1} \\ &= f(u) * f\left(v^{-1}\right) \\ &= f\left(u \cdot v^{-1}\right) \end{aligned}$$

$\begin{cases} u \in H_1 \\ v \in H_1 \end{cases}$ donc $u \cdot v^{-1} \in H_1$ donc $x*^{-1} \in f(H_1)$

— Soit H_2 un sous groupe de G_2.

$$(x,y) \in f^{-1}(H_2)^2$$

$$\begin{aligned} x \cdot y^{-1} \in f^{-1}(H_2) &\iff f\left(x \cdot y^{-1}\right) \in H_2 \\ &\iff f(x) * f\left(y^{-1}\right) \in H_2 \\ &\iff f(x) * f(y)^{-1} \in H_2 \end{aligned}$$

Or, $\begin{cases} f(x) \in H_2 \\ f(y) \in H_2 \end{cases}$
Comme H_2 est un sous groupe de G_2,

$$f(x) * f(y)^{-1} \in H_2$$

et donc,

$$x \cdot y^{-1} \in f^{-1}(H_2)$$

□

Lemme:

$$\begin{cases} f(e_1) = e_2 \\ \forall u \in G_1, f\left(u^{-1}\right) = (f(u))^{-1} \end{cases}$$

Preuve:

$$f(e_1) = f(e_1 \cdot e_1) = f(e_1) * f(e_1)$$

On multiplie par $f(e_1)^{-1}$ (possible car G_2 est un groupe) et on trouve $f(e_1) = e_2$.
Soit $u \in G_1$.

$$f(u) * f(u^{-1}) = f(u \cdot u^{-1}) = f(e_1) = e_2 f(u^{-1}) * f(u) = f(u^{-1} \cdot u) = f(e_1) = e_2$$

Donc, $f\left(u^{-1}\right) = (f(u))^{-1}$ □

Corollaire: Soit $f : (G_1, \cdot) \to (G_2, *)$ un morphisme de groupes. Alors, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous groupe de G_2.

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in G_1 \mid f(x) = e_2\} = f^{-1}(\{e_2\})$$

est un sous groupe de G_1. □

Théorème: Avec les notations précédentes,

$$f \text{ injective } \iff \mathrm{Ker}(f) = \{e_1\}$$

Preuve: " $\implies$ " On suppose f injective.

$$\begin{aligned} f(e_1) = e_2 &\text{ donc } e_1 \in \mathrm{Ker}(f) \\ &\text{ donc } \{e_1\} \subset \mathrm{Ker}(f) \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. On a alors $f(x) = e_2 = f(e_1)$
Comme f injective, $x = e_1$.
" $\impliedby$ " On suppose $\mathrm{Ker}(f) = \{e_1\}$
Soient $\begin{cases} x \in G_1 \\ y \in G_1 \end{cases}$. On suppose $f(x) = f(y)$

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\implies f(x) * f(y)^{-1} = e_2 \\ &\implies f(x) * f\left(y^{-1}\right) = e_2 \\ &\implies f\left(x \cdot y^{-1}\right) \qquad \implies x \cdot y^{-1} \in \mathrm{Ker}(f) = \{e_1\} \\ &\implies x \cdot y^{-1} = e_1 \\ &\implies x = y \end{aligned}$$

Donc, f est injective

□

Exemple ((équation diophantienne)):

$$\begin{cases} 2x+5y=1 \\ (x,y)\in\mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

On trouve une solution particulière (Bézout) : $(-1,1)=(x_0,y_0)$

$$\begin{aligned} 2x+5y=1 &\iff 2x+5y=2x_0+5y_0 \\ &\iff 2(x-x_0)+5(y-y_0)=0 \\ &\iff 2(x-x_0)=5(y_0-y) \\ &\quad\vdots \quad \text{(Gauss)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f:\mathbb{Z}^2 &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (x,y) &\longmapsto 2x+5y \end{aligned}$$

$(\mathbb{Z}^2,+)$ est un groupe avec $+$ qui est l'addition composante par composante.
f est un morphisme de groupes.

$$\begin{aligned} f(x,y)=1=f(x_0,y_0) &\iff f(x,y)-f(x_0,y_0)=0 \\ &\iff f(x-x_0,y-y_0)=0 \\ &\iff (x-x_0,y-y_0)\in\operatorname{Ker}(f) \end{aligned}$$

Théorème: Soit $f:(G_1,\cdot)\to(G_2,*)$ un morphisme de groupes, $y\in G_2$ et $(\mathscr{E})$ l'équation

$$f(x)=y$$

d'inconnue $x\in G_1$.
Si $y\notin\operatorname{Im}(f)$, alors $(\mathscr{E})$ n'a pas de solution.
Sinon, soit $x_0\in G_1$ tel que $f(x_0)=y$ (x_0 est une solution particulière de $(\mathscr{E})$)

$$f(x)=y \iff \exists h\in\operatorname{Ker}(f), x=x_0\cdot h$$

Preuve:

$$\begin{aligned} f(x)=y &\iff f(x)=f(x_0) \\ &\iff f(x_0)^{-1}*f(x)=e_2 \\ &\iff f\left(x_0^{-1}\right)*f(x)=e_2 \\ &\iff f\left(x_0^{-1}\cdot x\right)=e_2 \\ &\iff x_0^{-1}\cdot x\in\operatorname{Ker}(f) \\ &\iff \exists h\in\operatorname{Ker}(f), x_0^{-1}\cdot x=h \\ &\iff \exists h\in\operatorname{Ker}(f), x=x_0\cdot h \end{aligned}$$

$\square$

Proposition: Soient $f:G_1\to G_2$ et $g:G_2\to G_3$ deux morphisme de groupes. Alors, $g\circ f$ est un morphisme de groupes.

Preuve:
Soient $x \in G_1$ et $y \in G_2$.

$$\begin{aligned} g \circ f(x \cdot y) &= g(f(x) * f(y)) = g(f(x)) \times g(f(y)) \\ &= g \circ f(x) \times g \circ f(y) \end{aligned}$$

□

Définition: Soit G un groupe.

- Un endomorphisme de G est un morphisme de groupes de G dans G.
- Un isomorphisme de G dans H un morphisme de groupes $f : G \to H$ bijectif.
- Un automorphisme de G est un endomorphisme de G bijectif.

Proposition: Soit $f : G \to H$ un isomorphisme de groupes.
Alors, $f^{-1} : H \to G$ est aussi un isomorphisme.

Preuve:
Soit $(x, y) \in H^2$. On pose $\begin{cases} f(u) = x, u \in G \\ f(v) = y, v \in G \end{cases}$

$$\begin{aligned} f\left(f^{-1}\left(x \cdot y^{-1}\right)\right) &= x \cdot y^{-1} \\ &= f(u) \cdot f(v)^{-1} \\ &= f\left(u \cdot v^{-1}\right) \end{aligned}$$

Comme f injective,

$$f^{-1}\left(x \cdot y^{-1}\right) = u \cdot v^{-1} = f^{-1}(x)\left(f^{-1}(y)\right)^{-1}$$

□

Corollaire: On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G.
$\mathrm{Aut}(G)$ est un sous groupe de $(S(G), \circ)$.

Définition: Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $g \in G$. L'application

$$\begin{aligned} c_g : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

est appelée conjugaison par g. On dit aussi que c'est un automorphisme intérieur.

Proposition: Avec les notations précédentes,

$$c_g \in \mathrm{Aut}(G)$$

Preuve:
Soient $x \in G$ et $y \in G$.

$$c_g(xy) = g \cdot xy \cdot g^{-1}$$
$$c_g(x) \cdot c_g(y) = gxg^{-1}gyg^{-1} = gxyg^{-1} = c_g(xy)$$

Donc, c_g est un morphisme de groupes.

De plus,
$$\forall x \in G, c_{g^{-1}} \circ c_g(x) = g^{-1}\left(gxg^{-1}g\right) = x$$

Donc, $c_{g^{-1}} \circ c_g = id_G$.
De même, $c_g \circ c_{g^{-1}} = id_G$
Donc, c_g bijective et $(c_g)^{-1} = c_{g^{-1}}$ □

Corollaire:
$$\forall x \in G, \forall n \in \mathbb{Z}, c_g(x^n) = (c_g(x))^n$$
□

Proposition: L'application

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathrm{Aut}(G) \\ g &\longmapsto c_g \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes.

Preuve:
Soient $(g, h) \in G^2$.

$$\begin{aligned} \forall x \in G, c_g \circ c_h(x) &= g\left(hxh^{-1}\right)g^{-1} \\ &= (gh)x(gh)^{-1} \\ &= c_{gh}(x) \end{aligned}$$

Donc, $c_g \circ c_h = c_{gh}$ □

Proposition (Rappel)**:**
$$\forall g, h \in G, (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$$

Preuve:

$$\begin{aligned}(gh)\left(h^{-1}g^{-1}\right) &= e\\ \left(h^{-1}g^{-1}\right)(gh) &= e\end{aligned}$$

□

Proposition – Définition: Soient $(G_1, *)$ et $(G_2, *)$ deux groupes. On définit une loi sur $G_1 \times G_2$ en posant

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$$

Alors, $G_1 \times G_2$ est un groupe pour cette loi appelée groupe produit.

Preuve: — Soient $(x_1, y_1) \in {G_1}^2$ et $(x_2, y_2) \in {G_2}^2$.
On sait que $x_1 * y_1 \in G_1$ et que $x_2 * y_2 \in G_2$.
Donc, $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2) \in G_1 \times G_2$

□

2 Anneaux

Définition: Un anneau $(A, +, \times)$ est un ensemble A muni de deux lois de compositions internes notées $+$ et $\times$ vérifiant

1. $(A, +)$ est un groupe commutatif (son neutre est noté 0_A)
2. $(A, \times)$ est un monoïde
   (a) $\times$ est associative
   (b) $\times$ a un neutre $1_A \in A$
3. distributivité à gauche et à droite :

$$\forall (a, b, c) \in A^3, \begin{cases} a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c) \\ (b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a) \end{cases}$$

Remarque (Convention):
Soit $(A, +, \times)$ un anneau.
On convient que la multiplication est prioritaire sur l'addition.

$$(a \times b) + (a \times c) = a \times b + a \times c$$

et l'exponentiation est prioritaire sur la multiplication ($n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} a \times b^n &= a \times (\underbrace{b \times b \times \cdots \times b}_{n \text{ fois}}) \\ &\neq (a \times b)^n \end{aligned}$$

Proposition: Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Alors, 0_A est absorbant

$$\forall a \in A, a \times 0_A = 0_A \times a = 0_A$$

Preuve:

Soit $a \in A$. On pose $b = a \times 0_A \in A$.

$$\begin{aligned} b = a \times 0_A &= a \times (0_A + 0_A) = a \times 0_A + a \times 0_A \\ &= b + b \ (= 2b) \end{aligned}$$

Donc,

$$-b + b = -b + b + b$$

donc $0_A = b$
De même, $0_A \times a = 0_A$. □

Remarque:
On peut imaginer $\begin{cases} a \times b = 0_A \\ a \neq 0_A \\ b \neq 0_A \end{cases}$

Exemple: — $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau

$$\begin{cases} \overline{2} \times \overline{2} = \overline{0} & \text{car } 4 \equiv 0 \ [4] \\ \overline{2} \neq \overline{0} & \text{car } 2 \not\equiv 0 \ [4] \end{cases}$$

— $(\mathscr{M}_2(\mathbb{C}), +, \times)$ est un anneau (non commutatif)

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_A \\ A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Définition: On dit qu'un anneau $(A, +, \times)$ est <u>intègre</u> si

$$\forall (a, b) \in A^2, (a \times b = 0_A \implies a = 0_A \text{ ou } b = 0_A)$$

Exemple: — $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est intègre

— $\forall p$ premier, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ est intègre (car tout élément non nul de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est inversible donc simplifiable)

Exemple:
Soit $(A, +, \times)$ un anneau et $(a, b) \in A^2$.

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b) \times (a + b) \\ &= (a + b) \times a + (a + b) \times b \\ &= a^2 + b \times a + a \times b + b^2 \end{aligned}$$

Si a et b commutent, alors, $a \times b = b \times a$ et donc $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b) \times (a + b) \times (a + b) \\ &= a^3 + a^2 \times b + a \times b \times a + b \times a^2 \\ &+ b^2 \times a + b \times a \times b + a \times b^2 + b^3 \end{aligned}$$

Si a et b commutent,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Proposition: Soient $(A,+,\times)$ un anneau, $(a,b) \in A^2$, $n \in \mathbb{Z}$. Alors,

$$n(a \times b) = (na) \times b = a \times (nb)$$

Preuve: — Évident si $n = 0$

— On suppose $n > 0$.

$$\begin{aligned}(n(a \times b) &= \underbrace{a \times b + \cdots + a \times b}_{n \text{ fois}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a \times b) \\ &= a \times \sum_{k=1}^{n} = a \times (nb) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} a\right) \times b = (na) \times b\end{aligned}$$

— On suppose $n < 0$. On pose $n = -p$ avec $p = \mathbb{N}_*$.

$$\begin{aligned}n(a \times b) &= (-p)(a \times b) = -\left(p(a \times b)\right) \\ &= -\left((pa) \times b\right) = (-p)a \times b = (na) \times b \\ &= -\left(a \times (pb)\right) = a \times (-pb) = a \times (nb)\end{aligned}$$

En effet,

$$\forall (a', b') \in A^2 (-a') \times b' + a' \times b' = (-a' + a') \times b' = 0_A \times b' = 0_A$$

donc $-\left(a' \times b'\right) = \left(-a'\right) \times b'$

□

Théorème (Formule du binôme de Newton)**:** Soient $(A,+,\times)$ un anneau, $(a,b) \in A^2$, $n \in \mathbb{N}$.
Si a et b commutent alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Preuve (par récurrence sur n)*:*

□

Proposition: Soient $(A,+,\times)$ un anneau, $(a,b) \in A^2$ et $n \in \mathbb{N}_*$.

Si a et b commutent, alors

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

□

Proposition: On note $A^\times$ l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau $(A,+,\times)$. $(A^\times,\times)$ est un groupe. □

Exemple:
- $\mathbb{Z}^\times = \{-1,1\}$
- $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})^\times = GL_n(\mathbb{C})$
- $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times = \{\overline{1},\overline{3}\}$

Définition: Soit $(A,+,\times)$ un anneau commutatif.

1. Soient $(a,b)\in A^2$. On dit que a divise b s'il existe $k\in A$ tel que $b=a\times k$. On dit aussi que a est un diviseur de b et que b est un multiple de a.
2. On dit que a et b sont associés s'il existe $k\in A^\times$ tel que $ak=b$ (dans ce cas, $a \mid b$ et $b \mid a$)

Remarque:
Le théorème des deux carrés peut se démontrer en exploitant les propriétés arithmétiques de l'anneau $(Z[i],+,\times)$ où $Z[i]=\{a+ib \mid a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{Z}\}$.
$\mathbb{Z}[i]^\times = \{1,-1,i,-i\}$

Théorème des deux carrés :

1. Soit p un nombre premier.
$$\exists (a,b)\in\mathbb{N}^2, p=a^2+b^2 \iff p\equiv 1\ [4]$$
2. Soit $n\in\mathbb{N}_*$, $n=\prod_{p\in\mathscr{P}} p^{\alpha(p)}$
$$\exists (a,b)\in\mathbb{N}^2, n=a^2+b^2 \iff \forall p\in\mathscr{P} \text{ tel que } \alpha(p)\neq 0, p\equiv 1\ [4]$$

Définition: Soit $(A,+,\times)$ un anneau et $B\subset A$. On dit que B est un sous anneau de A si

1. B est un sous groupe de $(A,+)$
2. $\forall (a,b)\in B^2, a\times b\in B$
3. $1_A\in B$

Exemple:
$Z[i]$ est un sous anneau de $(\mathbb{C},+,\times)$

Proposition: Soit $(A,+,\times)$ un anneau et B un sous anneau de A. Alors, $(B,+,\times)$ est un anneau. □

Exercice (Exercice à connaître):
Soit $(A,+,\times)$ un anneau. Le centre de A est

$$Z(A)=\{x\in A \mid \forall a\in A, a\times x = x\times a\}$$

$Z(A)$ est un sous anneau de A.

Proposition: Soit $(A, +, \times)$ un anneau.
Si $0_A = 1_A$ alors $A = \{0_A\}$. On dit alors que A est l'anneau nul.

Preuve:
Soit $a \in A$.
$$a = a \times 1_A = a \times 0_A = 0_A$$
□

Définition: Soient $(A, +, \times)$ et $(B, +, \times)$ deux anneaux (les lois notés de la même fa c on mais ne sont pas forcément les mêmes !).
Soit $f : A \to B$. On dit que f est un <u>(homo)morphisme d'anneaux</u> si

1. $\forall (a,b) \in A^2, f(a+b) = f(a) + f(b)$
2. $\forall (a,b) \in A^2, f(a \times b) = f(a) \times f(b)$
3. $f(1_A) = 1_B$

Proposition: Avec les notations précédentes, **si** $a \in A^\times$ alors $f(a) \in B^\times$ et dans ce cas,
$$f(a)^{-1} = f\left(a^{-1}\right)$$

Preuve:
On suppose $a \in A^\times$.
$$\begin{cases} f\left(a^{-1}\right) \times f(a) = f\left(a^{-1} \times a\right) = f(1_A) = 1_B \\ f(a) \times f\left(a^{-1}\right) = f\left(a \times a^{-1}\right) = f(1_A) = 1_B \end{cases}$$
Donc, $f(a) \in B^\times$ et $f(a)^{-1} = f\left(a^{-1}\right)$ □

Définition: Soient $(A, +, \times)$ et $(B, +, \times)$ deux anneaux et $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux.
On dit que f est un

— <u>isomorphisme d'anneaux</u> si f est bijective
— <u>endomorphisme d'anneaux</u> si $\begin{cases} A = B \\ + = + \\ \times = \times \end{cases}$
— <u>automorphisme d'anneaux</u> si f est à la fois un isomorphisme et un endomorphisme d'anneaux

Exemple: 1. Soit $a \in \mathbb{Z}$ et
$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto ax \end{aligned}$$
f endomorphisme d'anneaux $\iff a = 1$

2.
$$\begin{aligned} f : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ A &\longmapsto A^2 \end{aligned}$$

f n'est pas un morphisme d'anneaux car

$$(A+B)^2 \neq A^2 + B^2$$

3.
$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \overline{z} \end{aligned}$$

est un automorphisme d'anneaux

4.
$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

f est un morphisme d'anneaux mais ce n'est pas un endomorphisme.

5.
$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ k &\longmapsto \overline{k} \end{aligned}$$

f est un morphisme d'anneaux surjectif.

Proposition: La composée de deux morphismes d'anneaux est un morphisme d'anneaux. □

Proposition: La réciproque d'un isomorphisme d'anneaux est un isomorphisme d'anneaux. □

Proposition: L'ensemble des automorphismes d'anneaux de A est un sous groupe de $(S(A), \circ)$. □

Proposition: L'image directe ou réciproque d'un sous anneau par un morphisme d'anneaux est un sous anneaux.

Définition: Soi $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Le <u>noyau</u> de f est

$$\mathrm{Ker}(f) = \{a \in A \mid f(a) = 0_B\}$$

Proposition: Avec les notations précédents,

$$f \text{ injective} \iff \mathrm{Ker}(f) = \{0_A\}$$

□

Remarque:
$\mathrm{Ker}(f)$ n'est pas un sous anneau en général (car $1_A \notin \mathrm{Ker}(f)$ sauf si $A = \{0_A\}$)

Définition: Soit $(A, +, \times)$ un anneau et $a \in A \setminus \{0_A\}$.
On dit que a est un <u>diviseur de zéro</u> s'il existe $b \in A \setminus \{0_A\}$ tel que $a \times b = b \times a = 0_A$

Proposition: Les diviseurs de zéro ne sont pas inversibles. $\square$

Exemple:
$A = \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$
$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un diviseur de zéro
car $M \times M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3 Corps

Exemple (Problème): — avec $A = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, résoudre $\overline{x}^2 = \overline{0}$

$\overline{x}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{x}^2$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

On a trouvé 3 solutions : $\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}$.

— $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$

$\overline{x}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{x}^2$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$

$\overline{x}^2 = 7$ a 4 solutions : $\overline{1}, \overline{7}, \overline{3}$, et $\overline{5}$

— $A = \mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\}$
$i^2 = j^2 = k^2 = -1$

$$\begin{array}{ccc} ij = k & jk = i & ji = j \\ ji = -k & kj = -i & ik = -j \end{array}$$

Dans cet anneau, -1 a 6 racines !

Définition: Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un ensemble muni de deux lois de composition internes. On dit que c'est un <u>corps</u> si

1. $(\mathbb{K}, \times)$ est un groupe abélien
2. $(\mathbb{K}, \times)$ est un monoïde commutatif
3. $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0_\mathbb{K}\}, \exists y \in \mathbb{K}, xy = 1_\mathbb{K}$
4. $0_\mathbb{K} \neq 1_\mathbb{K}$

Exemple: — $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps
— $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps
— $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps
— $(\mathbb{Z}, +, \times)$ n'est pas un corps

Proposition: $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps si et seulement si n est premier.

Preuve:

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \left\{\overline{k} \mid k \wedge n = 1\right\}$$

$\square$

Proposition: Tout corps est un anneau intègre.

Preuve:
Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps. Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $a \times b = 0_\mathbb{K}$.
On suppose $a \neq 0_\mathbb{K}$. Alors, a est inversible et donc

$$b = a^{-1} \times a \times b = a^{-1} \times 0_\mathbb{K} = 0_\mathbb{K}$$

□

Exemple:
Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps.
Résoudre

$$\begin{cases} x^2 = 1_\mathbb{K} \\ x \in \mathbb{K} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 = 1_\mathbb{K} &\iff x^2 - 1_\mathbb{K} = 0_\mathbb{K} \\ &\iff (x - 1_\mathbb{K})(x + 1_\mathbb{K}) = 0_\mathbb{K} \\ &\iff x - 1_\mathbb{K} = 0_\mathbb{K} \text{ ou } x + 1_\mathbb{K} = 0_\mathbb{K} \\ &\iff x = 1_\mathbb{K} \text{ ou } x = -1_\mathbb{K} \end{aligned}$$

Il y a au plus 2 solutions.

Proposition: Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps et P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré n. Alors, l'équation $P(x) = 0_\mathbb{K}$ a au plus n solutions dans $\mathbb{K}$ □

Corollaire ((Théorème de Wilson))**:** voir exercice 16 du TD 12

Définition: Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps et $L \subset \mathbb{K}$.
On dit que L est un sous corps de $\mathbb{K}$ si

1. L est un anneau de $(\mathbb{K}, +, \times)$ non nul
2. $\forall x \in L \setminus \{0_\mathbb{K}\}, x^{-1} \in L$

en d'autres termes si

1. $\forall (x, y) \in L^2, x - y \in L$
2. $\forall (x, y) \in L^2, x \times y^{-1} \in L$

On dit aussi que $\mathbb{K}$ est une extension de L.

Proposition: Tout sous corps est un corps. □

Définition: Soient $(\mathbb{K}_1, +, \times)$ et $(\mathbb{K}_2, +, \times)$ deux corps et $f : \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$.
On dit que f est un morphisme de corps si f est un morphisme d'anneaux.

i.e. si
$$\begin{cases}\forall (x,y) \in {\mathbb{K}_1}^2, & f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall (x,y) \in {\mathbb{K}_1}^2, & f(x \times y) = f(x) \times f(y)\end{cases}$$

Proposition: Tout morphisme de corps est injectif.

Preuve:
Soit $f : \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ un morphisme de corps.

— $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous groupe de $(\mathbb{K}_1, +)$
— Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y \in \mathbb{K}_1$

$$f(x \times y) = f(x) \times f(y) = 0_{\mathbb{K}_2} \times f(y) = 0_{\mathbb{K}_2}$$

— Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \setminus \{0_{\mathbb{K}_1}\}$.
Alors, x est inversible.

$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathrm{Ker}(f) \\ x^{-1} \in \mathbb{K}_1 \end{array}\right\} \text{donc } x \times x^{-1} \in \mathrm{Ker}(f)$$
$$\text{donc } 1_{\mathbb{K}_1} \in \mathrm{Ker}(f)$$
$$\text{donc } f(1_{\mathbb{K}_1}) = 0_{\mathbb{K}_2}$$

Or, $f(1_{\mathbb{K}_1}) = 1_{\mathbb{K}_2} \neq 0_{\mathbb{K}_2}$
Donc, $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{K}_1}\}$ donc f est injective. □

Exemple:
$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}$ est un morphisme de corps

4 Actions de groupes

Définition: Soit $(G, \cdot)$ un groupe et X un ensemble non vide. Une action de G sur X est une application

$$\begin{aligned}\varphi : G \times X &\longrightarrow X \\ (g,x) &\longmapsto \underbrace{g \cdot x}_{\text{ce n'est pas la loi de } G}\end{aligned}$$

qui vérifie

1. $\forall x \in X, \varphi(e,x) = e \cdot x = x$
2. $\forall x \in X, \forall g, h \in G, g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$

Dans ce cas, $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & S(X) \\ g & \longmapsto & \varphi(g, \cdot) : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & g \cdot x \end{array} \end{array}$ est un morphisme de groupes.

Preuve:
$\forall g \in G\, (x \mapsto g \cdot x)^{-1} =$ □

5 Bilan

Groupe

On dit que $(G, \diamond)$ est un groupe si
- $\diamond$ est associative ;
- $\diamond$ a un neutre $e \in G$;
- tout élément $x \in E$ a un inverse $y \in E$:
$$x \diamond y = y \diamond x = e.$$

Sous-groupe

On dit que $H \subset G$ est un sous-groupe de G si
- $e \in H$;
- $\forall x, y \in H,\ x \diamond y \in H$;
- $\forall x \in H,\ x^{-1} \in H$.

Si $\diamond$ est commutative, on dit que $(G, \diamond)$ est un groupe commutatif ou abélien.

Pour monter que H est un sous-groupe de G, on montre
- $H \neq \varnothing$;
- $\forall x, y \in H,\ x \diamond y^{-1} \in H$.

L'intersection de sous-groupes est un sous-groupe. Attention, l'union de sous-groupes n'est pas forcément un sous-groupe.

Sous-groupe engendré

Le sous-groupe engendré par A, $\langle A\rangle$, est le plus petit sous groupe de G contenant A.

S'il existe $a \in G$ tel que $G = \langle a\rangle$, on dit que G est monogène et a est un générateur de G.

Soit $a \in G$. L'ordre de a est $\#\langle a\rangle$ i.e. $a^n = e$.

Morphisme de groupes

Soit $f : G_1 \to G_2$ où $(G_1, \cdot)$ et $(G_2, \times)$ sont des groupes. f est un morphisme de groupes si
$$\forall x, y \in G_1,\ f(x \cdot y) = f(x) \times f(y).$$
L'image directe d'un sous-groupe de G_1 est un sous-groupe de G_2. L'image réciproque d'un sous-groupe de G_2 est un sous-groupe de G_1.
$$\forall u \in G_1;\ f\left(u^{-1}\right) = f(u)^{-1}.$$

$$f \text{ injective} \iff \operatorname{Ker} f = \{e_1\}.$$

CHAPITRE

13

SYSTÈMES LINÉAIRES ET CALCULS MATRICIELS

Exemple:

$$
(S_1) : \left\{
\begin{array}{cccccc}
\overbrace{\boxed{x}}^{\text{pivot}} & +y & +z & -t & =1 \\
x & +2y & +3z & +t & =0 \\
x & & +z & =2 &
\end{array}
\right.
$$

$$
\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff}
\left\{
\begin{array}{cccccc}
\boxed{x} & +y & +z & & -t & =1 \\
 & y & +2z & +2t = -1 & &
\end{array}
\right.
$$

$$
\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2}}{\iff}
\left\{
\begin{array}{ccccc}
\boxed{x} & & -z & -3t & =2 \\
 & \boxed{y} & +2z & +2t & =-1 \\
 & & 2z & +3t & =0
\end{array}
\right.
$$

$$
\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{2}{3}L_3}}{\iff}
\begin{cases}
\boxed{x} + z = 2 \\
\boxed{y} + \frac{2}{3}z = -1 \\
\boxed{3t} + 2z = 0
\end{cases}
\iff
\begin{cases}
x = 2 - z \\
y - -1 - \frac{2}{3}z \\
t = -\frac{2}{3}z
\end{cases}
$$

L'ensemble des solutions est

$$
\left\{ \left(2 - z, -1 - \frac{2}{3}z, z, -\frac{2}{3}z \right) \mid z \in \mathbb{K} \right\}
$$

$$
\begin{aligned}
& \begin{cases} x+y+z-t=1 \\ x+2y+3z+t=0 \\ x+\boxed{z}=2 \end{cases} \\
\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3}}{\iff} & \begin{cases} \boxed{y}-t=-1 \\ -2x+2y+t=-6 \\ x+\boxed{z}=2 \end{cases} \\
\underset{L_2 \leftarrow \frac{L_2-2L_1}{-2}}{\iff} & \begin{cases} \boxed{y}-t=-1 \\ \boxed{x}-\frac{3}{2}t=2 \\ x+\boxed{z}=2 \end{cases} \\
\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} & \begin{cases} \boxed{y}-t=-1 \\ \boxed{x}-\frac{3}{2}t=2 \\ \boxed{z}+\frac{3}{2}t=0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} y=-1+t \\ x=2+\frac{3}{2}t \\ z=-\frac{3}{2}t \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{S} &= \left\{(2+\frac{3}{2}t, -1+t, -\frac{3}{2}t, t \mid t \in \mathbb{K}\right\} \\
&= \{\underbrace{(2,-1,0,0)}_{A} + t\underbrace{\left(\frac{3}{2}, 1, -\frac{3}{2}, 1\right)}_{u} \mid t \in \mathbb{K}\}
\end{aligned}
$$

Exemple:

$$
\begin{cases}
x+y+z=0\\
x-y+z=1\\
2x-y+z=2\\
x-y-z=3\\
y+3z=1
\end{cases}
$$

$$
\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{L_2-L_1}{-2}\\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1\\ L_4 \leftarrow L_4-L_1}}{\iff}
\begin{cases}
\boxed{x}+y+z=0\\
\boxed{y}=\frac{1}{2}\\
-3y-z=2\\
-2y-2z=3\\
y+3z=1
\end{cases}
$$

$$
\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1-L_2\\ L_3 \leftarrow -(L_3-3L_2)\\ L_4 \leftarrow L_4+3L_2\\ L_5 \leftarrow L_5-L_2}}{\iff}
\begin{cases}
\boxed{x}+z=\frac{1}{2}\\
\boxed{y}=-\frac{1}{2}\\
\boxed{z}=-\frac{1}{2}\\
-2z=2\\
3z=\frac{3}{2}
\end{cases}
$$

$$
\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1-L_3\\ L_4 \leftarrow L_4+2L_3\\ L_5 \leftarrow L_5-3L_3}}{\iff}
\begin{cases}
\boxed{x}=1\\
\boxed{y}=-\frac{1}{2}\\
\boxed{z}=-\frac{1}{2}\\
\boxed{\begin{matrix}0=1\\0=3\end{matrix}}\ \text{incompatibilité}
\end{cases}
$$

Il n'y a pas de solution !

Exemple:

$$
(S_2):\begin{cases}
\boxed{x}+y-z=1\\
y+z=0\\
x+2y=0
\end{cases}
$$

$$
\underset{L_3 \leftarrow L_3-L_1}{\iff}\quad (S_2'):\begin{cases}
\boxed{x}+y-z=1\\
\boxed{y}+z=0\\
y+z=-1
\end{cases}
$$

$$
\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1-L_2\\ L_3 \leftarrow L_3-L_2}}{\iff}
\begin{cases}
\boxed{x}-2z=1\\
\boxed{y}+z=0\\
\boxed{0=-1}
\end{cases}
$$

Exemple:

$$
(S_1) \iff \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\1\end{pmatrix}}_{B}
$$

$$
\iff AX=B
$$

$$(S_2) \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(S_2') \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A'} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A'}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K}) \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_1}{\sim} & \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \end{pmatrix} \\ \underset{\substack{C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\ C_3 \leftarrow \frac{C_3 - C_2}{2}}}{\sim} & \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} \\ \underset{\substack{C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3}}{\sim} & \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} \\ \underset{C_2 \leftrightarrow C_3}{\sim} & I_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K}) \text{ et } A^{-1} = I_3 \times B$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_1}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \underset{\substack{C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\ C_3 \leftarrow \frac{C_3 + C_2}{2}}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \underset{\substack{C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3}}{\sim} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \underset{C_2 \leftrightarrow C_3}{\sim} & \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \end{aligned}$$

Remarque (Résumé): — Méthode du pivot : opérations sur les lignes :

1. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ($\lambda \in \mathbb{K}$)
2. $L_i \leftarrow \mu L_i$ ($\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$)
3. $L_i \leftrightarrow L_j$

En appliquant la méthode du pivot on obtient

$$(S) \iff \begin{cases} x_{i_1} & = \ell_1(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-r}}) \\ x_{i_2} & = \ell_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-r}}) \\ \vdots & \vdots \\ x_{i_r} & = \ell_r(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-r}}) \\ 0 & = * \end{cases}$$

Les inconnues $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$ sont les <u>inconnues principales</u>, les autres sont appelées <u>paramètre</u>.
On peut supprimer les équations $0 = 0$. S'il y a une équation $0 = \lambda$ avec $\lambda \neq 0$, il n'y a pas de solution : le système est <u>incompatible</u>.
Les inconnues principales dépendent des choix de pivots !

— Représentation matricielle

$$(S) \iff AX = B$$

où A est la <u>matrice du système</u>, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et B est le <u>second membre</u>

(S) a n équations et p inconnues donc A a n lignes et p colonnes.
La matrice $(A \mid B)$ est la <u>matrice augmentée du système</u>.

— Faire un opération L sur les lignes d'une matrice M revient à multiplier M à gauche par une matrice R où R est obtenue en appliquant L sur I_n.
— La méthode du pivot matriciel par lignes :

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 5 & \boxed{1} & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 5 & \boxed{1} & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -3 & -4 \\ -3 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} \\
& \underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3} L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 5 & \boxed{1} & 3 & 4 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ -3 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix} \\
& \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & -2 & -\frac{8}{3} \\ \boxed{1} & 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 1 & -2 & -8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matrice échelonnée réduite par lignes}}
\end{aligned}$$

Définition (Rang d'une matrice)**:** Soit M une matrice et R la matrice échelonnée réduite par lignes associée à M. Le nombre de lignes non nulles de R (le nombre de pivots) est appelée <u>rang</u> de M.
Soit S un système de matrice augmentée $(A \mid B)$. Le <u>rang</u> de S est le rang de la matrice A.
Le rang est noté rg.

Proposition (Interprétation)**:**
— Soit S un système de n équations, p inconnues de rang r.
r est le nombre d'inconnues principales, il y a $p - r$ paramètres.
— Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r.
r est le nombre de lignes indépendantes : il y a $n - r$ lignes combinaisons linéaires des r lignes indépendantes.

Corollaire: Soit S un système de <u>n équations</u>, p inconnues de <u>rang n</u>. Alors S a au moins une solution.
Si $n = p$ alors S a exactement une solution.
Si $p > n$, il y a une infinité de solutions.

□

Définition: Soit S un système à n équations, n inconnues et de rang n. On dit que S est un système de Cramer (il a une unique solution)

Proposition: Soit S un système de n équations, p inconnues de rang r.
- Si $r < n$ alors le système peut-être incompatible : il y a $n - r$ équations de la forme $0 = *$ après la méthode du pivot.
- Si $r < p$ alors il y a $p - r$ paramètres : si le système n'est pas incompatible, il y aura une infinité de solutions.

□

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & \boxed{1} & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2}}{\sim} \begin{pmatrix} -9 & 0 & -1 \\ 5 & \boxed{1} & 2 \\ 4 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{-5} & 0 & 0 \\ 5 & \boxed{1} & 2 \\ 4 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow -L_1/5}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 5 & \boxed{1} & 2 \\ 4 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple:

$$(S) : \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z + 2t = 0 \\ 2y - t = 1 \\ 2x + 2z + 3t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{x} + y + z + t = 1 \\ x - y + z + 2t = 0 \\ 2y - t = 1 \\ 2x + 2z + 3t = 1 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}}{\iff} \begin{cases} \boxed{x} + y + z + t = 1 \\ -2y + \boxed{t} = -1 \\ 2y - t = 1 \\ -2y + t = -1 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2}}{\iff} \boxed{\begin{cases} \boxed{x} + y + z + t = 1 \\ -2y + \boxed{t} = -1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}} \quad \underline{\text{Système triangulaire}}$$

$$\iff \begin{cases} t = -1 + 2y \\ x = 2 - 3y - z \end{cases}$$

La matrice du système triangulaire est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elle n'est pas échelonnée réduite par lignes !

Proposition: Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et C une opération élémentaire sur les colonnes de A. On pose A' la matrice obtenue en appliquant C sur les colonnes de A.

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A')$$

□

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ \boxed{1} & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 2 \\ 5 & -4 & -3 \\ \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 0 \\ 5 & -4 & \boxed{5} \\ \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{rg}(A) = 3$

Exemple:

$$\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$$

Proposition: Le rang d'une matrice est aussi le nombre de colonnes indépendantes. □

Définition: Une <u>matrice triangulaire supérieure</u> est une matrice carrée avec des coefficients nuls sous sa diagonale :

$$T = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\ 0 & * \end{pmatrix}$$

diagonale

et <u>triangulaire inférieure</u> si les coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls :

$$T = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Un système triangulaire est de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1p}x_p & = & b_1 & +\dots \\ & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2p}x_p & = & b_2 & +\dots \\ & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & a_{pp}x_p & = & b_p & +\dots \\ & & & 0 & = & \dots & \end{cases}$$

Remarque:

$$(S) \iff \begin{cases} AX = B \\ X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}), B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \end{cases}$$

On pose

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

On cherche $\varphi^{-1}(\{B\})$

On sait que
- $(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe
- $(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), +)$ aussi

Soient $X, Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$

$$\varphi(X+Y) = A(X+Y) = AX + AY = \varphi(X) + \varphi(Y)$$

Donc φ est un morphisme de groupes.
On peut résoudre (S) de la fa c on suivante :
- On cherche $X_0 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $\varphi(X_0) = B$
- On résout $\varphi(X) = 0$ $(X \in \operatorname{Ker}(\varphi))$

C'est le système homogène associé :

$$\varphi(X) = B \iff \exists H \in \operatorname{Ker}(\varphi), X = X_0 + H$$

Proposition:

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$
$$B = \left(b_{k,\ell}\right)_{\substack{1 \leqslant k \leqslant p \\ 1 \leqslant \ell \leqslant q}} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

$$AB = \left(c_{i,\ell}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant \ell \leqslant q}} \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$
$$c_{i,\ell} = \sum_{j=1}^{n} = a_{i,j}b_{j,\ell}$$

CHAPITRE

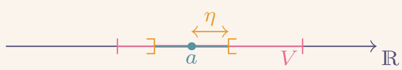
14

CONTINUITÉ

1 Définition d'une limite de fonctions

Définition: Soit $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et $V \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

1. Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que V est un voisinage si
$$\exists \eta > 0,\ ]a-\eta, a+\eta[\subset V.$$



2. Si $a = +\infty$, on dit que V est un voisinage de a si
$$\exists M \in \mathbb{R},\ ]M, +\infty[\subset V.$$
3. Si $a = -\infty$, on dit que V est un voisinage de a si
$$\exists m \in \mathbb{R},\ ]-\infty, m[\subset V.$$

On note $\mathscr{V}_a$ l'ensemble des voisinages de a.

L'utilisation des voisinages permet d'exprimer une limite finie ou infinie plus simplement, sans disjonction de cas.

Exemple:
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de limite $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

— Si $a \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - a| \leqslant \varepsilon \\ \text{i.e. } &\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ a - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant a + \varepsilon \\ \text{i.e. } &\forall V \in \mathscr{V}_a,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \in V. \end{aligned}$$

— Si $a = +\infty$,

$$\begin{aligned} &\forall M \in \mathbb{R},\, \exists N \in \mathbb{N},\, \forall n \geqslant N,\, u_n \geqslant M \\ \text{i.e. } &\forall M \in \mathbb{R},\, \exists N \in \mathbb{N},\, \forall n \geqslant N,\, u_n \in [M, +\infty[\\ \text{i.e. } &\forall V \in \mathscr{V}_a,\, \exists N \in \mathbb{N},\, \forall n \geqslant N,\, u_n \in V. \end{aligned}$$

— Si $a = -\infty$,

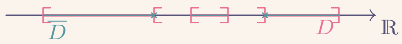
$$\begin{aligned} &\forall m \in \mathbb{R},\, \exists N \in \mathbb{N},\, \forall n \geqslant N,\, u_n \leqslant m \\ \text{i.e. } &\forall m \in \mathbb{R},\, \exists N \in \mathbb{N},\, \forall n \geqslant N,\, u_n \in]-\infty, m] \\ \text{i.e. } &\forall V \in \mathscr{V}_a,\, \exists N \in \mathbb{N},\, \forall n \geqslant N,\, u_n \in V. \end{aligned}$$

Même si, dans chacun des cas, la définition de limite de la suite u est différente, en utilisant les voisinages, la notation est identique :

$$\forall V \in \mathscr{V}_a,\, \exists N \in \mathbb{N},\, \forall n \geqslant N,\, u_n \in V.$$

En utilisant cette nouvelle notation, on peut redéfinir la limite plus simplement.

Définition: Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles. Soit $a \in \overline{D} = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall V \in \mathscr{V}_x,\, V \cap D \neq \varnothing\}$ (on “rajoute” chacune des bornes exclues des intervalles composant D) :



On dit que $f(x)$ tends vers ℓ si

$$\forall V \in \mathscr{V}_\ell,\, \exists W \in \mathscr{V}_a,\, \forall x \in W \cap D,\, f(x) \in V.$$

Exemple:
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) \xrightarrow[x\to -1]{} 1$.

$$\forall V \in \mathscr{V}_1,\, \exists W \in \mathscr{V}_{-1},\, \forall x \in W,\, f(x) \in V$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \eta > 0,\, \forall x \in]-1-\eta, -1+\eta[,\, f(x) \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$$

i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \eta > 0,\, \forall x \in \mathbb{R},\, \big(|x-(-1)| < \eta \implies |f(x) - 1| \leqslant \varepsilon\big).$$

Si $f(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} +\infty$,

$$\forall V \in \mathscr{V}_{+\infty},\, \exists W \in \mathscr{V}_{-\infty},\, \forall x \in W,\, f(x) \in V$$

i.e.

$$\forall M \in \mathbb{R},\, \exists m \in \mathbb{R},\, \forall x \in]-\infty, m],\, f(x) \in [M, +\infty[$$

i.e.

$$\forall M \in \mathbb{R},\, \exists m \in \mathbb{R},\, \forall x \in \mathbb{R},\, \big(x \leqslant m \implies f(x) \geqslant M\big).$$

Définition: Soit $a \in \mathbb{R}$.

Un voisinage à gauche de a est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient un inveralle $]a-\eta, a]$ avec $\eta > 0$.

Un voisinage à droite de a est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient un inveralle $[a, a+\eta[$ avec $\eta > 0$.

Exemple:

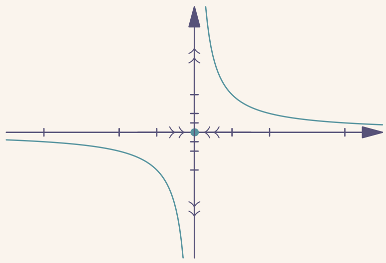
Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \textit{si } x \neq 0, \\ 0 & \textit{si } x = 0. \end{cases}$

1. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ *existe ? Si oui, que vaut elle ?*
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \leqslant}} f(x)$ *existe ? Si oui, que vaut elle ?*

Réponse : $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas. Pour le prouver, on raisonne par l'absurde.

$$\ell = \bigcap_{V \in \mathscr{V}_\ell} V$$

Si ℓ existe, alors $\ell = f(0)$.
Or, $0 \neq \lim\limits_{x \to 0} f(x)$



> **Proposition:** Si f admet une limite finie en $a \in I$, alors cette limite vaut $f(a)$.

Preuve:
Soit $\ell = \lim\limits_{x \to a}$ et $a \in \mathscr{D}$.

On sait que
$$\forall V \in \mathscr{V}_\ell, \exists W \in \mathscr{V}_a, \forall x \in W \cap \mathscr{D}, f(x) \in V.$$

Soit $V \in \mathscr{V}_\ell$. Alors, $f(a) \in V$.

$$f(a) \in \bigcap_{V \in \mathscr{V}_\ell} V = \begin{cases} \{\ell\} & \text{si } \ell \in \mathbb{R}, \\ \varnothing & \text{si } \ell = \pm\infty. \end{cases}$$

Donc $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell = f(a)$. $\square$

Remarque:
De même si $a \in \mathscr{D}$ et si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \leqslant}} f(x)$ existe (resp. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \leqslant}} f(x)$) alors $f(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ \leqslant}} f(x)$ (resp $f(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ \geqslant}} f(x)$)

Exemple:
$\lim\limits_{x \to 0} \delta(x)$ n'existe pas
$\lim\limits_{x \to 0^+} \delta(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^-}$ n'existent pas non plus.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \delta(x)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \delta(x) = 0,\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \delta(x) = 0$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\substack{x\to a\\ \neq}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Définition: Soit f définie sur D et $a \in D$. On dit que f est <u>continue en a</u> si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe ou si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ \neq}} f(x) = f(a)$.

Exemple:

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \neq}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0)$

Donc f est continue en 0.

Proposition: f est continue en a si et seulement si

$$\lim_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ >}} = f(a)$$

Preuve (unicité de la limite)*:*
On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to u]{} a,\ f(x) \xrightarrow[x\to u]{} b$ avec $a \neq b$.
Soient V et W conne dans le lemme (suivant),

$$\begin{cases} \exists W_1 \in \mathscr{V}_u, \forall x \in W_1 \cap \mathscr{D}, f(x) \in V \\ \exists W_2 \in \mathscr{V}_u, \forall x \in W_2 \cap \mathscr{D}, f(x) \in W \end{cases}$$

Donc

$$\forall x \in \underbrace{W_1 \cap W_2 \cap \mathscr{D}}_{\neq \varnothing \text{ car } W_1 \cap W_2 \in \mathscr{V}_u} \quad f(x) \in V \cap W = \varnothing$$

□

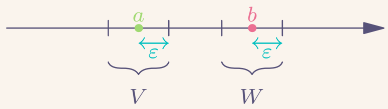
Lemme: Soient $a \neq b$ deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$
Alors $\exists V \in \mathscr{V}_a, \exists W \in \mathscr{V}_b, V \cap W = \varnothing$

Preuve: Cas 1 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $a < b$.

On pose $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$,

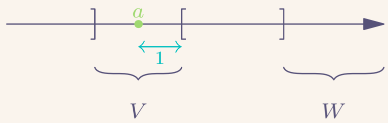
$$\begin{cases} V =]a-\varepsilon; a+\varepsilon[\\ W =]b-\varepsilon; b+\varepsilon[\end{cases}$$

On vérifie que $V \cap W = \varnothing$



Cas 2 $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$

$$\begin{cases} V =]a-1; a+1[\\ W =]a+2; +\infty[\end{cases}$$



Cas 3 $a = -\infty$, $b = +\infty$

$$\begin{cases} V =]-\infty; 0[\\ W =]0; +\infty[\end{cases}$$

□

Théorème: Soit f définie sur $\mathscr{D}$ et $a \in \overline{\mathscr{D}}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \forall (x_n) \in \mathscr{D}^{\mathbb{N}} \left(x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a \implies f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \right)$$

Preuve: " $\implies$ " On suppose que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Soit $(x_n) \in \mathscr{D}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

Soit $V \in \mathscr{V}_\ell$. Soit $W \in \mathscr{V}_a$ tel que

$$\forall x \in W \cap \mathscr{D}, f(x) \in V$$

$x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, x_n \in W \cap \mathscr{D}$$

Donc

$$\forall n \geqslant N, f(x_n) \in V$$

D'où, $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

" $\impliedby$ " On suppose que $f(x) \not\xrightarrow[x \to a]{} \ell$

$$\exists V \in \mathscr{V}_\ell, \forall W \in \mathscr{V}_a, \exists x \in W \cap \mathscr{D}, f(x) \notin V$$

Soit V comme ci dessus. Soit $W_1 \in \mathscr{V}_a$.

Cas 1 $a \in \mathscr{D}$ et $\forall x \in W \cap \mathscr{D} \setminus \{a\}, f(x) \in V$.

On le prouve par la contraposée. On suppose $f(x) \not\xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \mathbb{R}$

Donc,

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in]a-\eta, a+\eta[, |f(x) - \ell| > \varepsilon$$

On considère un tel ε donc

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, \exists x_n \in \left] a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right[, |f(x_n) - \ell| > \varepsilon$$

Par encadrement, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et $f(x_n) \centernot{\xrightarrow[n\to+\infty]{}} \ell$

Cas 2 Soit $x_1 \in W_1 \cap \mathscr{D}$ tel que $f(x_1) \notin V$

$\begin{cases} x_1 \in \mathscr{D} \\ a \notin \mathscr{D} \end{cases}$ donc $x_1 \neq a$

Cas 3 $\exists x \in W_1 \cap \mathscr{D} \setminus \{a\}, f(x) \notin V$

Soit x_1 un tel élément :

$$x_1 \in W_1 \cap \mathscr{D}$$
$$x_1 \neq a$$
$$f(x_1) \notin V$$

Dans les cas 2 et 3, on pose $W_2 \in \mathscr{V}_a$ tel que

$$W_2 \subset W_1 \setminus \{x_1\}$$

En itérant ce procédé, on construit une suite (x_n) qui tend vers a et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \notin V$$

et donc $f(x_n) \centernot{\xrightarrow[n\to+\infty]{}} \ell$

□

Proposition: Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_2$
alors

1. $f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1 + \ell_2$
2. $f(x) \times g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1 \times \ell_2$
3. Si $\ell_2 \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$

Preuve: 1. Soit (x_n) une suite qui tends vers a alors $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1$ et $g(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$

Donc, $f(x_n) + g(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1 + \ell_2$

Donc $f(x) + g(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1 + \ell_2$

□

Proposition: Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1$ et $g(x) \xrightarrow[x\to \ell_1]{} \ell_2$ alors $g(f(x)) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_2$

Preuve:
Soit (x_n) une suite qui tend vers a. Alors, $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1$ donc $g(f(x_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$
donc $g(f(x)) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_2$ □

Corollaire: Une somme, un produit, une composée de fonctions continues sont continues. □

Remarque:
Pour démontrer que $f(x)$ n'a pas de limite quands x tend vers a. On cherche deux suites (x_n) et (y_n) de limite a avec

$$\begin{cases} f(x_n) \longrightarrow \ell_1 \\ f(y_n) \longrightarrow \ell_2 \\ \ell_1 \neq \ell_2 \end{cases}$$

Exemple:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sin(2\pi n) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Or,

$$2\pi n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$
$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Donc, sin n'a pas de limite en $+\infty$

Théorème (Limite monotone)**:** Soit f une fonction croissante sur $]a, b[$ avec $a \neq b \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si f est majorée,
$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in]a, b[, f(x) \leqslant M$$
alors $\lim\limits_{\substack{x\to b \\ <}} f(x) = \sup\limits_{x\in]a,b[} f(x) \in \mathbb{R}$
2. Si f n'est pas majorée,
$$\lim_{\substack{x\to b \\ <}} f(x) = +\infty$$
3. Si f est minorée,
$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in]a, b[, f(x) \leqslant m$$
alors $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} f(x) = \inf\limits_{]a,b[} f \in \mathbb{R}$
4. Si f n'est pas minorée, $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} f(x) = -\infty$

Preuve: 1. $\sup\limits_{]a,b[} f$ existe
$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in]a, b[, f(x) > \sup_{]a,b[}(f) - \varepsilon$$
donc
$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in]a, b[, \forall y \in [x, b[, \sup_{]a,b[}(f) - \varepsilon < f(y) \leqslant \sup_{]a,b[}(f) < \sup_{]a,b[}(f) + \varepsilon$$
donc $f(x) \xrightarrow[\substack{x\to b \\ <}]{} \sup\limits_{]a,b[}(f)$

2. f n'est pas majorée
$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in]a, b[, f(x) > M$$

donc

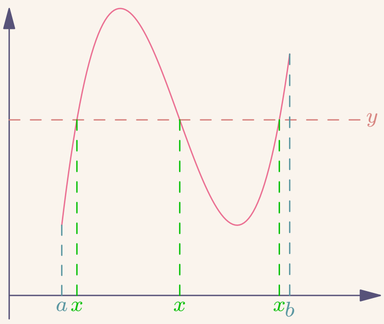
$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in]a,b[, \forall y \in [x,b[, f(y) \in [M,+\infty[$$

$\square$

Remarque:
Avec les hypothèses ci-dessus, pour tout $x \in]a,b[$,
f est croissante sur $]a,x[$, et majorée par $f(x)$ donc $\lim\limits_{\substack{t\to x\\ <}} f(t) \in \mathbb{R}$
f est croissante sur $]x,b[$ et minorée par $f(x)$ donc $\lim\limits_{\substack{t\to x\\ >}} f(t) \in \mathbb{R}$
$\lim\limits_{\substack{t\to x\\ <}} f(t) \leqslant f(x) \leqslant \lim\limits_{\substack{t\to x\\ >}} f(t)$

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)**:** Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $a < b$ deux éléments de I.

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \cup [f(b), f(a)]\,,\ \exists x \in [a,b],\ y = f(x)$$



Lemme: Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $a < b$ deux éléments de I tels que $f(a) \leqslant 0 \leqslant f(b)$. Alors,

$$\exists x \in [a,b], f(x) = 0$$

Preuve (du lemme)*:*
On pose $A = \{x \in [a,b] \mid f(x) \leqslant 0\}$

$A \neq \varnothing$ car $a \in A$ et A est majorée par b.
On pose $u = \sup(A)$. Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers u.
$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a \leqslant x_n \leqslant b \\ f(x_n) \leqslant 0 \end{cases}$
On sait que $x_n \longrightarrow u$ et $f(x_n) \longrightarrow f(u)$ par continuité de f.
Donc, $\begin{cases} a \leqslant u \leqslant b \\ f(u) \leqslant 0 \end{cases}$ (donc $u = \max(A)$)
De plus,

$$\forall x \in]u, b], f(x) > 0$$

donc

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to u \\ >}} f(x) = f(u) \\ \\ \lim\limits_{\substack{x \to u \\ >}} f(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

Donc, $f(u) \geqslant 0$ donc $f(u) = 0$

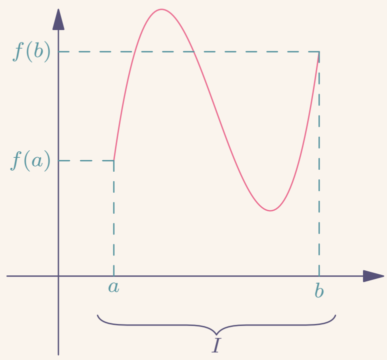
$\square$

Preuve (du théorème)*:*
On pose $g : x \mapsto f(x) - y$. g est continue sur I.

Si $f(a) < f(b)$ alors $\begin{cases} g(a) \leqslant 0 \\ g(b) \geqslant 0 \end{cases}$
D'après le lemme, il existe $x \in [a, b]$ tel que $g(x) = 0$ et donc $f(x) = y$

Si $f(a) < f(b)$ alors $\begin{cases} h(a) \leqslant 0 \\ h(b) \geqslant 0 \end{cases}$ où $h : x \mapsto -g(x) = y - f(x)$ est continue
D'après le lemme, il existe $x \in [a, b]$ tel que $h(x) = 0$ et donc $f(x) = y$ $\square$

Corollaire: Soit f continue sur un intervalle I. Alors, $f(I)$ est un intervalle.



Preuve:
Montrons que $f(I)$ est convexe

Soit $\alpha \in f(I), \beta \in f(I)$ avec $\alpha < \beta$. Montrons que

$$\forall \gamma \in [\alpha, \beta], f(\gamma) \in f(I)$$

Or, $\begin{cases} \alpha \in f(I) & \exists a \in I, \alpha = f(a) \\ \beta \in f(I) & \exists b \in I, \beta = f(b) \end{cases}$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [a, b]$ tel que $\gamma = f(x)$ donc, $f(\gamma) \in f(I)$ □

Corollaire: On peut généraliser le théorème des valeurs intermédiaires au cas où $\begin{cases} a \in \overline{R} \\ b \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases}$ en rempla c ant $f(a)$ par $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$ et $f(b)$ par $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x)$

□

Théorème (Théorème de la bijection)**:** Soit f continue, strictement monotone sur un intervalle I. Alors, $J = f(I)$ est un intervalle de même nature (ouvert, semi-ouvert ou fermé) et f établit une bijection de I sur J.

Preuve:
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, J est un intervalle. f est strictement monotone donc f injective. Donc f établit une bijection de I sur J.

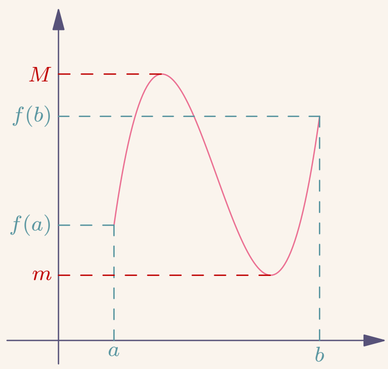
Cas 1 $I = [a, b]$ et f croissante
$\forall x \in I, a \leqslant x \leqslant b$
donc $\forall x \in I, f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$
donc $J \subset [f(a), f(b)]$
Or, $[f(a), f(b)] \subset J$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires
Donc $J = [f(a), f(b)]$

Les autres cas se démontrent de la même fa c on. □

Théorème: Soit f continue sur un segment $[a, b]$. Alors, f est bornée et atteint ses bornes, i.e.

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, f([a, b]) = [m, M]$$

⚠ On peut avoir $m \neq f(a)$ et $M \neq f(b)$



Preuve:
On suppose que f n'est pas majorée :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in [a, b], f(x) \geqslant M$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b], f(x_n) \geqslant n$$

Donc, $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée apr a et majorée par b donc bornée.
D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})_{\in\mathbb{N}}$ converge. On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}$. On a bien $\ell \in [a, b]$ et $f(\ell) = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right)$ par continuité de f.
Or, $\left(f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(f(x_n))$ donc $f\left(x_{\varphi(n)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$: une contradiction
Donc f est majorée et on pose

$$M = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$$

On prouve de même que f est minorée. On pose donc

$$m = \inf_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$$

Soit $(y_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ telle que $f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$.
(y_n) est bornée donc il existe une sous-suite $\left(y_{\psi(n)}\right)$ de (y_n) convergente. On pose $y = \lim\limits_{n\to+\infty} y_{\psi(n)} \in [a, b]$
Comme f continue sur y,

$$f(y) = \lim_{n\to+\infty} f\left(y_{\psi(n)}\right)$$

Or, $\left(f\left(y_{\psi(n)}\right)\right)$ est une sous-suite de $(f(y_n))$ donc

$$M = \lim_{n\to+\infty} f\left(y_{\psi(n)}\right)$$

Par unicité de la limite, $M = f(y)$
Donc, $M = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$. De même, $m \in f([a, b])$
Enfin, en posant $\begin{cases} M = f(y) & \text{avec } y \in [a, b] \\ m = f(z) & \text{avec } z \in [a, b] \end{cases}$, on obtient

$$[m, M] = [f(z), f(y)] \underbrace{\subset}_{\text{théorème des valeurs intermédiaires}} f([a, b]) \underbrace{\subset}_{\substack{m \text{ minimum} \\ M \text{ maximum}}} [m, M]$$

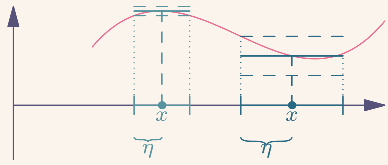
donc $f([a, b]) = [m, M]$ □

2 Continuité uniforme

Remarque:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue,

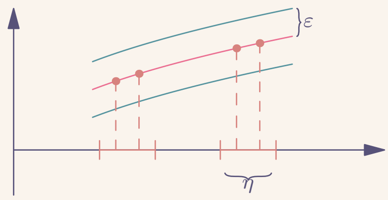
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in]x - \eta, x + \eta[, |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Ici, η dépend de ε et de x



Dans certaines situations, il serait préférable d'avoir

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x-y| \leqslant \eta \implies |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$$

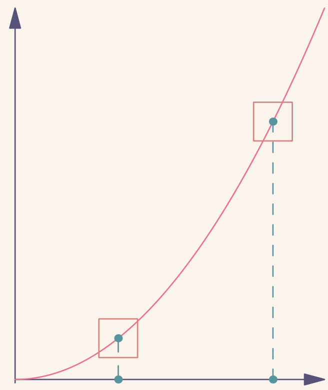


Lemme: Soit f uniformément continue sur un intervalle I. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments dans I telles que $x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$ □

Exemple:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$



On pose $\forall n \in \mathbb{N}_*, \begin{cases} x_n = n \\ y_n = n + \dfrac{1}{n} \end{cases}$. On a bien $\forall n \in \mathbb{N}_*, x_n - y_n = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, {x_n}^2 - {y_n}^2 = n^2 - n^2 - \frac{1}{n^2} - 2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -2 \neq O$$

Donc, f n'est pas uniformément continue.

Théorème (Théorème de Heine)**:** Soit f une function continue sur $[a,b]$. Alors, f est uniformément continue sur $[a,b]$.

Preuve:
On suppose f continue sur $[a,b]$ mais pas uniformément continue.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x,y) \in [a,b]^2 \text{ avec } |x-y| \leqslant \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$ comme ci-dessus. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (x_n, y_n) \in [a,b]^2 \text{ avec } \left| x_n - y_n \leqslant \frac{1}{n+1} \right| \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$$

(x_n) est bornée donc il existe une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ de (x_n) convergente. On note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} \in [a,b]$ $\left(y_{\varphi(n)}\right)$ est bornée, $\left(y_{\varphi(n)}\right)$ a une sous-suite $\left(y_{\varphi(\psi(n))}\right)$ convergente. On pose $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} y_{\varphi(\psi(n))}$. $\left(x_{\varphi(\psi(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre sous-suite de $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ donc $x_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|x_{\varphi(\psi(n))} - y_{\varphi(\psi(n))}\right| \leqslant \frac{1}{\varphi(\psi(n)) + 1}$$

On a vu que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(\psi(n)) \geqslant n$$

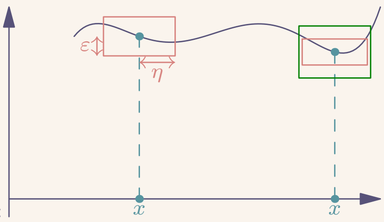
car $\varphi \circ \psi$ est strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Donc, $x_{\varphi(\psi(n))} - y_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
On en déduit que $\ell - \ell' = 0$. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|f\left(x_{\varphi(\psi(n))}\right) - f\left(x_{\varphi(\psi(n))}\right)\right| > \varepsilon$$

En passant à la limite,

$$0 = |f(\ell) - f(\ell)| > \varepsilon > 0$$

car f continue en ℓ
On a obtenu une contradiction. ↯ □

Remarque: 

$$\begin{cases} \eta > 0 \\ \varepsilon > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-y| \leqslant \eta \\ |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

Définition: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle et $k \in \mathbb{R}$. On dit que f est k-lipschitzienne si

$$\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x-y|$$

On dit que f est lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que f soit k-lipschitzienne.

Proposition: Soit f une fonction lipschitzienne sur I. Alors, f est uniformément continue sur I donc continue sur I.

Preuve:
Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x-y|$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Si $k = 0$ alors f est constante donc uniformément continue.
On suppose $k \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\underbrace{\eta = \frac{\varepsilon}{k}}_{\text{ne dépend pas de } x} > 0$ car $k > 0$.
Soit $(x,y) \in I^2$. On suppose $|x - y \leqslant \eta|$. Alors,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x-y| \leqslant k\eta = \varepsilon$$

□

Exemple:
$x \mapsto |x|$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, ||x| - |y|| \leqslant |x-y|$$

(inégalité triangulaire)

Théorème: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in I, \left|f'(x)\right| \leqslant M$$

Alors

$$\forall (a,b) \in I^2, |f(a) - f(b)| \leqslant M\,|a-b|$$

donc f est M-lipschitzienne.

Corollaire: Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors f est lipschitzienne.

Preuve:
f' est continue sur un segment donc bornée. □

Exemple:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\forall x > 0, \left|f'(x)\right| = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$$

Par contre,

$$\forall x \geqslant 1, \left|f'(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}$$

Donc f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[1, +\infty[$ donc uniformément continue sur $[1, +\infty[$.
f est continue sur $[0,1]$ donc uniformément continue sur $[0,1]$ (théorème de Heine).
Soit $\varepsilon > 0$. Soient $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}_*^+$ tels que

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in [0,1]^2, |x-y| \leqslant \eta_1 \implies \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall (x,y) \in [1,+\infty[^2, |x-y| \leqslant \eta_2 \implies \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

On pose $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Soient $(x,y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$. On suppose $|x-y| \leqslant \eta$

Cas 1 $\begin{cases} x \leqslant 1 \\ y \leqslant 1 \end{cases}$

Alors, $|x-y| \leqslant \eta \leqslant \eta_1$ donc $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant \varepsilon_2\right| \leqslant \varepsilon$

Cas 2 $\begin{cases} x \geqslant 1 \\ y \geqslant 1 \end{cases}$

Alors, $|x-y| \leqslant \eta \leqslant \eta_2$ donc $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon\right|$

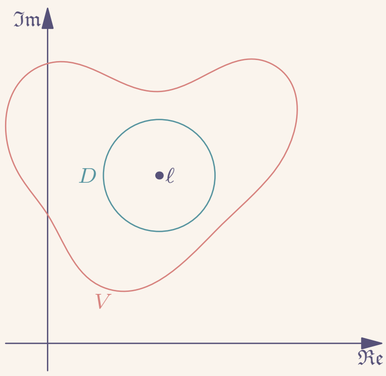
Cas 3 $x \leqslant 1 \leqslant y$

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| &= \left|\sqrt{x} - \sqrt{1} + \sqrt{1} - \sqrt{y}\right| \\ &\leqslant \left|\sqrt{x} - \sqrt{1}\right| + \left|\sqrt{y} - \sqrt{1}\right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x-1| \leqslant |x-y| \leqslant \eta \leqslant \eta_1 &\text{ donc } \left|\sqrt{x} - \sqrt{1}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \\ |y-1| \leqslant |x-y| \leqslant \eta \leqslant \eta_2 &\text{ donc } \left|\sqrt{y} - \sqrt{1}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Donc $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

3 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$



Définition:

V est un voisinage de ℓ s'il existe $r > 0$ tel que $V \supset D(\ell, r)$
où $D(l, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \ell| < r\}$

Proposition: Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$, $\ell \in \mathbb{C}$.

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathfrak{Re}(\ell) \\ \mathfrak{Im}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathfrak{Im}(\ell) \end{cases}$$

□

Remarque (Rappel):
On dit que : $I \to \mathbb{C}$ est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, |f(x)| \leqslant M$$

4 Annexe

Théorème: *Théorème 2.11*
$f : I \to J$ bijective monotone avec I et J deux intervalles.
Alors, f^{-1} est continue (et f aussi)

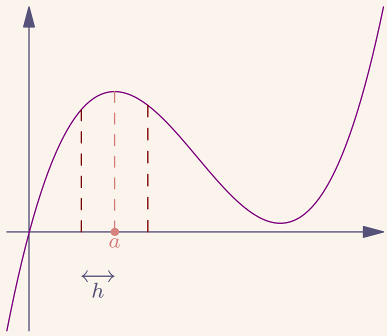
Preuve:
f monotone donc $f(I) = J$
donc f continue (d'après 2.10).
f^{-1} monotone, $f^{-1}(J) = I$
donc f^{-1} est continue □

Définition: Un homéomorphisme est une application bijective, continue dont la réciproque est continue.

Remarque:
Preuve du programme de colle

Preuve:

$$\exists \eta > 0, \forall h \in]-\eta, +\eta[, f(a) \geqslant f(a+h)$$



$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leqslant 0$$
$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geqslant 0$$

Donc, $f(a) = 0$ □

CHAPITRE

15

ESPACES VECTORIELS

1 Définition et premières propriétés

Définition: Soit E un ensemble muni d'une loi interne $+$ et d'une loi $\cdot$ définie sur $\mathbb{K} \times E$ à valeurs dans E où $\mathbb{K}$ est un corps.
On dit que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$) si

1. $(E, +)$ est un groupe abélien
2. (a)
$$\forall u \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,$$
$$\mu \cdot (\lambda \cdot u) = (\mu \underbrace{\times}_{\times \text{ de } \mathbb{K}} \lambda) \cdot u$$
   (b) $\forall u \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot u = u$
3. (a)
$$\forall u \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$$
$$(\lambda \cdot u) \underbrace{+}_{+ \text{ de } E} (\mu \cdot u) = (\lambda \underbrace{+}_{+ \text{ de } \mathbb{K}} \mu) \cdot u$$
   (b)
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u, v) \in E^2,$$
$$\lambda \cdot (u + v) = (\lambda \cdot u) + (\lambda \cdot v)$$

Les éléments de E sont alors appelés vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ sont dits scalaires.
Par convention, $\cdot$ est prioritaire sur $+$.

Exemple:
Soit $\mathbb{K}$ corps, $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Exemple:
Soit $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan. $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple:
$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

En généralisant, tout corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{L}$-espace vectoriel pour $\mathbb{L}$ un sous-corps de $\mathbb{K}$

Exemple:
$(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ avec

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$
$$\lambda \cdot (y_1, \dots, y_n) = (\lambda \cdot y_1, \dots, \lambda \cdot y_n)$$

est un espace vectoriel.

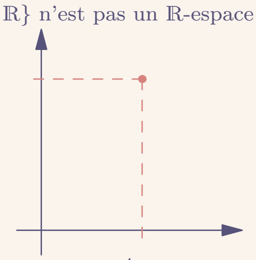
Exemple:
Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{D}$ un ensemble non vide.
$(E^{\mathscr{D}}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où pour $f, g \in E^{\mathscr{D}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

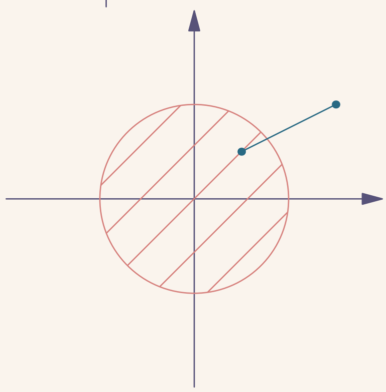
$$\begin{aligned} f + g : \mathscr{D} &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto f(x) + g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda f : \mathscr{D} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \lambda \cdot f(x) \end{aligned}$$

Par exemple, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
$\mathscr{C}^0(\mathscr{D}, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Exemple:
- $\mathbb{R}^+$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
- $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles





Proposition: Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. $\forall u \in E, 0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot 0_E = 0_E$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \lambda \cdot u = 0_E \implies \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $u = 0_E$

Preuve: 1. Soit $u \in E$.

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{K}} \cdot u &= (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \cdot u \end{aligned}$$

$(E, +)$ est un groupe donc $0_E = 0_{\mathbb{K}} \cdot u$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$$

$\lambda \cdot 0_E$ est régulier pour $+$:

$$0_E = \lambda \cdot 0_E$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in E$ tel que $\lambda \cdot u = 0_E$

Cas 1 $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$
Cas 2 $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ Alors, $\lambda^{-1} \in \mathbb{K}$ et donc

$$\begin{aligned} \lambda \cdot u = 0_E &\implies \lambda^{-1}(\lambda \cdot u) = \lambda^{-1} \\ &\implies (\lambda^{-1} \times \lambda) \cdot u = 0_E \text{ d'après 2.} \\ &\implies 1_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E \\ &\implies u = 0_E \end{aligned}$$

□

Proposition: Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in E$. Alors, $-u = (-1_{\mathbb{K}}) \cdot u$

Preuve:

$$\begin{aligned} u + (-1_{\mathbb{K}}) \cdot u &= (1_{\mathbb{K}} \cdot u) + (-1_{\mathbb{K}}) \cdot u \\ &= (1_{\mathbb{K}} + (-1_{\mathbb{K}})) \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} u \\ &= 0_E \end{aligned}$$

Donc $-u = (-1_{\mathbb{K}}) \cdot u$ □

2 Sous-espaces vectoriels

Définition: Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $F \subset E$.
On dit que F est un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de E si

1. $F \neq \varnothing$
2. $\forall (u, v) \in F^2, u + v \in F$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in F, \lambda u \in F$

Proposition: Avec les notations précédentes, $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Preuve: — D'après 2., $+$ est interne dans F

— $(E, +)$ est un groupe abélien donc $+$ est associative et commutative dans E donc dans F

— $F \neq \varnothing$. Soit $u \in F$. D'après 3.,

$$0_{\mathbb{K}} \cdot u \in F$$

Comme $u \in E$ et $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,

$$0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$$

Donc, $0_E \in F$

— Soit $u \in F$. Comme $u \in E$,

$$-u = -(1_{\mathbb{K}}) \cdot u \in F \text{ d'après 3.}$$

— Les autres axiomes sont aisément vérifiés.

□

Proposition: Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$.
F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$ si et seulement si

1. $F \neq \varnothing$
2. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (u, v) \in F^2, \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$

Preuve: " $\implies$ " On sait déjà que F est non vide.

$$\forall u, v \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \left.\begin{array}{l} \lambda u \in F \\ \mu v \in F \end{array}\right\} \text{ donc } \lambda u + \mu v \in F$$

" $\impliedby$ " — On sait déjà que F est non-vide

— Soient $u, v \in F$

$$u + v = 1_{\mathbb{K}} \cdot u + 1_{\mathbb{K}} \cdot v \in F$$

— Soit $u \in F, \lambda \in \mathbb{K}$.

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \cdot u \in F$$

□

Définition: Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$. Une combinaison linéaire de $(u_1, \ldots, u_n)$ est un vecteur de E de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$

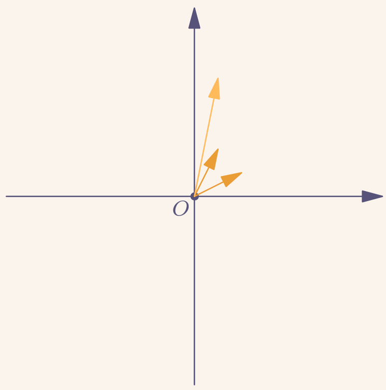
Remarque:
On peut aussi démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$F \neq \varnothing \text{ et } \forall u, v \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u + v \in F$$

Exemple:
1. $F = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z) = 1\} \subset \mathbb{C}$
   F est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$?
   Non car $0 \notin F$
2. $F = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z) = 0\}$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ mais pas un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel.
   En effet, $1 - i \in F$ $i(1 - i) = i + 1 \notin F$

3. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   $F = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n\right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
   $G = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2\right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E puique $0_E \notin G$.
4. $E = \mathbb{R}^D$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
   $F = \mathscr{C}^0(D, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de E (fonctions continues)
   $G = \mathscr{D}(D, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de E (fonctions dérivables)
   Si $D =]-a, a[$ avec $a \in \mathbb{R}$, $H = \{f \in E \mid f \text{ impaire }\}$ est un sous-espace vectoriel de E
   Si $D = \mathbb{R}$, $L = \{f \in E \mid f \text{ 1-périodique }\}$ est un sous-espace vectoriel de E
   $M = \{f \in E \mid f \text{ périodique }\}$ n'est pas un sous-ensemble vectoriel de E
5. L'ensemble des solutions sur un intervalle I d'une équation différentielle linéaire est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$

Exercice (Exercice):
Trouver tous les sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$



— $\{(0,0)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$
— Les droites passant par O sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$
— $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

et rien d'autre !

Proposition: Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F}$ une famille non vide de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap_{F \in \mathscr{F}} F$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve:
On pose $G = \bigcap_{F \in \mathscr{F}} F$.

— $\forall F \in \mathscr{F}, 0_E \in F$ car F est un sous espace vectoriel de E donc $0_E \in G$.
— Soient $u, v \in G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On pose $w = \lambda u + \mu v$.

$$\forall F \in \mathscr{F}, \quad \left.\begin{array}{r} u \in F \\ v \in F \end{array}\right\} \text{donc } w \in F$$

donc $w \in G$

□

Remarque (Attention ⚠):
Une réunion de sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel en général.

Exercice:
$F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E \iff F \subset G$ ou $G \subset F$

Définition: Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On définit leur somme $F + G$ par

$$F + G = \{x + y \mid x \in F, y \in G\}$$

Proposition: Avec les notations précédentes, $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$.

Preuve: — — $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \in F + G$

— Soients $u \in F + G, v \in F + G, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
On pose

$$\begin{cases} u = x + y \text{ avec } \begin{cases} x \in F \\ y \in G \end{cases} \\ \\ v = a + b \text{ avec } \begin{cases} a \in F \\ b \in G \end{cases} \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \lambda u + \mu v &= \lambda(x + y) + \mu(a + b) \\ &= \lambda x + \lambda y + \mu a + \mu b \\ &= \underbrace{(\lambda x + \mu a)}_{\in F} + \underbrace{\lambda y + \mu b}_{\in G} \in F + G \end{aligned}$$

Ainsi $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.
— Soit $x \in F \cup G$.
Si $x \in F$ alors $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{O_E}_{\in G} \in F + G$
Si $x \in G$ alors $x = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G} \in F + G$
Donc, $F \cup G \subset F + G$
— Soit H un sous-espace vectoriel de E tel que $F \cup G \subset H$
Soit $u \in F + G$. On pose $u = x + y$ avec $\begin{cases} x \in F \\ y \in G \end{cases}$

$$\begin{cases} x \in F \subset F \cup G \subset H \\ y \in G \subset F \cup G \subset H \end{cases}$$

H est un sous-espace vectoriel de E donc $x + y \in H$.
On a montré que $F + G \subset H$

□

Définition: Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i \in I}$ une famille quelconque non vide de sous-espaces vectoriels de E. On définit $\sum_{i\in I} F_i$ par

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} F_i &= \left\{ \sum_{i\in I} x_i \mid (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} F_i ; (x_i) \text{ presque nulle} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i\in I} x_i \mid (x_i) \in \prod_{i\in I} F_i ; \{i \in I \mid x_i \neq 0_E\} \text{ est fini} \right\}\end{aligned}$$

$\sum_{i\in I} F_i$ est l'ensemble de sommes <u>finies</u> obtenues à partir d'éléments de $\prod_{i\in I} F_i$

Exemple:
$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
$\forall i \in \mathbb{N}, F_i = \{x \mapsto ax^i \mid a \in \mathbb{R}\}$
$\sum_{i\in\mathbb{N}} F_i$ est l'ensemble des fonctions polynomiales

Proposition: Une somme quelconque de sous-espaces vectoriels est le plus petit sous-espace vectoriel contenant leur réunion. □

Définition: Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit qu'ils sont en <u>somme directe</u> si

$$\forall u \in F + G, \exists!(x, y) \in F \times G, u = x + y$$

Dans ce cas, l'espace $F + G$ est noté $F \oplus G$

Exemple:
$E = \mathbb{R}^3$
$F = \{(x, 0, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$$G = \left\{ (x, y, z) \mid (S) : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \right\}$$

$F \oplus G$?

— $(0, 0, 0) \in F$ car $0 \in \mathbb{R}$
  Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} u = (x, 0, x) \\ v = (y, 0, y) \end{cases}$
  Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\lambda u + \mu v &= \lambda(x, 0, 0) + \mu(y, 0, y) \\ &= (\lambda x, 0, \lambda x) + (\mu y, 0, \mu y) \\ &= (\lambda x + \mu y, 0, \lambda x + \mu y) \in F\end{aligned}$$

  Donc F est un sous-espace vectoriel de E
— $(0, 0, 0) \in G$ car (S) est homogène
  $\begin{cases} u = (x, y, z) \in G \\ v = (a, b, c) \in G \end{cases}$
  Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\lambda u+\mu v \in G &\iff \lambda(x,y,z)+\mu(a,b,c)\in G\\
&\iff (\lambda x+\mu a, \lambda y+\mu b, \lambda z+\mu c)\in G\\
&\iff \begin{cases}(\lambda x+\mu a)+(\lambda y+\mu b)+(\lambda z+\mu c)=0\\ (\lambda y+\mu b)-(\lambda z+\mu c)=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}\lambda\overbrace{(x+y+z)}^{=0}+\mu\overbrace{(a+b+c)}^{=0}\\ \lambda\underbrace{(y-z)}_{=0}+\mu\underbrace{(b-c)}_{=0}=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}0=0\\0=0\end{cases}
\end{aligned}$$

— Soit $w\in E$. On pose $w=(x,y,z)$

$$\begin{aligned}
w\in F+G &\iff \exists(u,v)\in F\times G, w=u+v\\
&\iff \exists x'\in\mathbb{R}, \exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3, \begin{cases}w=(x',0,x')+(a,b,c)\\ a+b+c=0\\ b-c=0\end{cases}\\
&\iff \exists\left(x',a,b,c\right)\in\mathbb{R}^4, \begin{cases}(x,y,z)=(a+x',b,c+x')\\ a+b+c=0\\ b-c=0\end{cases}\\
&\iff \exists\left(x',a,b,c\right)\in\mathbb{R}^4, (S') : \begin{cases}a+x'=x\\ b=y\\ c+x'=z\\ a+b+c=0\\ b-c=0\end{cases}
\end{aligned}$$

(S') est un système linéaire à 4 inconnues (x',a,b,c), 5 équations, 3 paramètres (x,y,z)

$$(S') \iff \begin{cases}b=y\\ c=y\\ x'=z-y\\ a=x-z+y\\ x+3y-z=0\end{cases}$$

Si $x+3y-z\neq 0$ alors (S') n'a pas de solutions et donc $w\notin F+G$
Si $x+3y-z=0$ alors (S') a une unique solution alors

$$\exists!(u,v)\in F\times G, w=u+v$$

On a montré que

$$F\oplus G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+3y-z=0\right\}$$

Proposition: Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E
F et G sont en somme directe si et seuelement si $F\cap G=\{0_E\}$

Preuve: " $\implies$ " On suppose la somme directe.
Soit $x\in F\cap G$.
D'une part, $0_E=\underbrace{0_E}_{\in F}+\underbrace{0_E}_{\in G}$

D'autre part, $0_E = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{(-x)}_{\in G}$

Par unicité, $x = 0_E$

" $\Longleftarrow$ " On suppose $F \cap G = \{0_E\}$

Soit $x \in F + G$ et on supoise que x a deux décompositions :

$$\begin{cases} x = u + v, & u \in F, v \in G \\ x = u' + v', & u' \in F, v' \in G \end{cases}$$

D'où, $u - u' = v' - v$

Or, $\begin{cases} u - u' \in F \\ v - v' \in G \end{cases}$

Donc, $u - u' \in F \cap G = \{0_E\}$

donc $u - u' = 0_E$ donc $u = u'$ donc $v' = v$

$\square$

Remarque:

Ce résultat est inutile pour l'instant (en l'absence d'arguments dimensionnels) pour prouver un resultat de la forme $E = F \oplus G$

Exemple:

$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$F = \{f \in E \mid f \text{ paire}\}$ et $F = \{f \in E \mid f \text{ impaire}\}$

Prouvons que $E = F \oplus G$

Soit $f \in F \cap G$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x) = -f(x)$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(x)$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$$

donc $f = 0_E$

Ainsi, la somme de F est G est directe

$$F + G = F \oplus G$$

Montrons que $E = F + G$. Soit $f \in E$.

<u>Analyse</u> Soient $g \in G$ et $g \in F$ telles que

$$f = g + h$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = -g(x) + h(x) \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ \\ g(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{cases}$$

Donc $F + G = F \oplus G$.

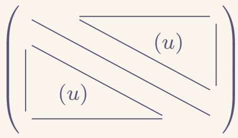
<u>Synthèse</u> On pose

$$\begin{cases} g : x \longmapsto & \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \\ h : x \longmapsto & \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \end{cases}$$

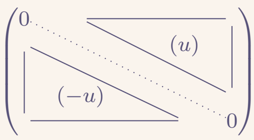
On vérifie que $\begin{cases} g \in F \\ h \in F \\ g + h = f \end{cases}$

On a prouvé que $E = F + G$

Exemple:
$E = \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$
$F = S_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$



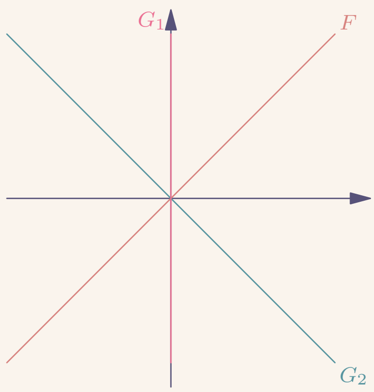
$G = A_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}$



$E = F \oplus G$

> **Définition:** Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que F et G sont <u>supplémentaires</u> dans E si
> $$E = F \oplus G$$
> en d'autres termes,
> $$\forall x \in E, \exists!(y, z) \in F \times G, x = y + z$$

Exemple:
$E = \mathbb{R}^2$
$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x\}$



$G_1 \oplus F = E$ et $G_2 \oplus F = E$
Soit $(x, y) \in E$

$$\begin{aligned} (x, y) &= \underbrace{(x, x)}_{\in F} + \underbrace{(0, y - x)}_{\in G_1} \\ &= \underbrace{\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)}_{\in F} + \underbrace{\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)}_{\in G_2} \end{aligned}$$

Définition: Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille non vide de sous-espaces vectoriels de $(E,+,\cdot)$. On dit qu'ils sont en somme directe si

$$\forall x \in \sum_{i\in I} F_i, \exists!(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} F_i \text{ presque nulle telle que } x = \sum_{i\in I} x_i$$

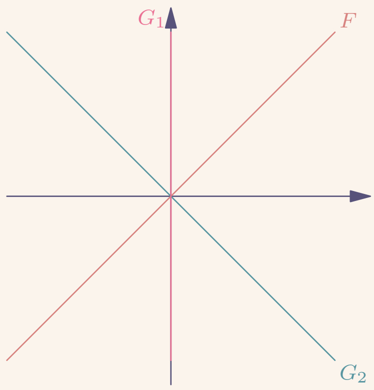
Dans ce cas, on écrit $\bigoplus_{i\in I} F_i$ à la place de $\sum_{i\in I} F_i$

Exemple:
E : l'espace des fonctions polynomiales

$$\forall i \in \mathbb{N}, F_i = \{x \mapsto ax^i \mid a \in \mathbb{K}\}$$

$E = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} F_i$

Exemple:
$E = \mathbb{R}^2$



$$\begin{cases} F = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ G = \{(0,x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ F = \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\} \end{cases}$$

On a $F \cap G \cap H = \{0_E\}$ mais leur somme n'est pas directe

$$\begin{aligned}(0,0) &= \overbrace{(1,1)}^{\in F} + \overbrace{(0,-2)}^{\in G} + \overbrace{(-1,1)}^{\in H} \\ &= \underbrace{(2,2)}_{\in F} + \underbrace{(0,-4)}_{\in G} + \underbrace{(-2,2)}_{\in H}\end{aligned}$$

3 Familles de vecteurs

Définition: Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A \in \mathscr{P}(E)$. Le sous-espace vectoriel engendré par A est le plus petit sous espace vectoriel V de E tel que $A \subset V$.
On le note $\mathrm{Vect}(A)$

Exemple:
E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
— $\mathrm{Vect}(\{0_E\}) = \{0_E\}$

— $\text{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}$
— $\text{Vect}(E) = E$
— Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$
$\text{Vect}(\{u\}) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u$
— Soient $u, v \in \exists \setminus \{0_E\}$
$\text{Vect}(\{u, v\}) = \left\{\lambda u + \mu v \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\right\} = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$

Définition: Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in E \setminus \{0_E\}$. La droite (vectorielle) engendrée par u est $\mathbb{K}u = \text{Vect}(u) = \text{Vect}(\{u\})$. Soit $v \in E$. On dit que u et v sont colinéaires si $v \in \mathbb{K}u$. Si v n'est pas colinéaire à u alors, $\text{Vect}(u, v) = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$ est appelé plan (vectoriel) engendré par u et v.

Exemple:
L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 est une droite vectorielle.

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficiants constants est un plan vectoriel.

$$\left\{y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}) \mid y'' + y = 0\right\} = \text{Vect}(\cos, \sin)$$

Proposition: Soit $(e_i)_{i \in I}$ un famille non vide de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$. Alors,

$$\begin{aligned}\text{Vect}\left((e_i)_{i \in I}\right) &= \left\{\sum_{i \in I} \lambda_i e_i \mid (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I \text{ et } (\lambda_i) \text{ presque nulle}\right\} \\ &= \sum_{i \in I} \mathbb{K} e_i\end{aligned}$$

Preuve:
On pose $F = \sum_{i \in I} \mathbb{K} e_i$
F est un sous espace vectoriel de E.

$$\forall i \in I, e_i = \underbrace{\sum_{j \in I} \lambda_j e_j}_{\in F} \text{ où } \lambda_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$
$$= \delta_{i,j} \text{ (symbole de Kronecker)}$$

Soit G un sous espace vectoriel de E tel que

$$\forall i \in I, e_i \in G$$

Soit $u \in F$. Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille presque nulle de scalaires telle que $u = \sum_{ii \in I} \lambda_i e_i$
Soit $\{i_1, \ldots, i_k\} = \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0_{\mathbb{K}}\}$
Donc,

$$u = \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\lambda_{ij} e_{ij}}_{\in G} \in G$$

Donc $F \subset G$ □

Définition: On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E si

$$E = \operatorname{Vect}\left((e_i)_{i\in I}\right)$$

Exemple:

$$E = \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} e_1 & = (1,0,1) \\ e_2 & = (0,1,1) \\ e_3 & = (1,1,1) \\ e_4 & = (1,0,0) \\ e_5 & = (0,1,2) \end{cases}$$

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On cherche $(\lambda_1,\dots,\lambda_5) \in \mathbb{R}^5$ tels que

$$(E): \quad (x,y,z) = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i e_i$$

$$\begin{aligned} (E) &\iff (x,y,z) = (\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4, \lambda_2+\lambda_3+\lambda_5, \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+2\lambda_5) \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1+\lambda_3+\boxed{\lambda_4} = x \\ \lambda_2+\boxed{\lambda_3}+\lambda_5 = y \\ \boxed{\lambda_1}+\lambda_2+\lambda_3+2\lambda_5 = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_4 = x-\lambda_1-\lambda_3 \\ \lambda_3 = y-\lambda_2-\lambda_5 \\ \lambda_1 = z-\lambda_2-\lambda_3-2\lambda_5 \end{cases} \end{aligned}$$

Par exemple, $(\lambda_1 = z-y, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = y, \lambda_4 = x-z, \lambda_5 = 0)$ est solution

Donc

$$\operatorname{Vect}(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5) = E$$

Exemple:
$E = \mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} e_1 = (1,0,1,0) \\ e_2 = (0,1,0,1) \\ e_3 = (1,1,1,1) \\ e_4 = (1,-1,1,-1) \\ e_5 = (1,1,0,0) \end{cases}$$

Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5) \in \mathbb{R}^5$

$$(E) \quad (x,y,z,t) = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i e_i \iff \begin{cases} x = \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 \\ y = \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_5 \\ z = \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ t = \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}}{\iff} \begin{cases} \lambda_5 = x - z \\ \lambda_5 = y - t \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = z \\ \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = t \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda_5 = x - z \\ \boxed{0 = y - t - x + z} \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = z \\ \lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 = t \end{cases}$$

Par exemple ; $(1,0,0,0) \notin \text{Vect}\,(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$

> **Proposition:** Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E et $(u_j)_{j \in J}$ une surfamille de $(e_i)_{i \in I}$ constituée de vecteurs de E :
>
> $$\forall i \in I, \exists j \in J, e_i = u_j$$
>
> Alors, $(u_j)_{j \in J}$ engendre E. □

> **Proposition:** Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E et $i_0 \in I$
>
> $$\begin{aligned}(e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}} \text{ engendre } E &\iff e_{i_0} \in \text{Vect}\left((e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}\right) \\ &\iff e_{i_0} \text{ est une combinaison linéaire des } e_i \ (i \in I, i \neq i_0)\end{aligned}$$

Preuve: " $\implies$ " $E = \text{Vect}\left((e_i)_{i \neq i_0}\right)$ et $e_{i_0} \in E$

" $\impliedby$ " Soit $u \in E$. Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille presque nulle de scalaires telle que

$$u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$$

Soit $(\mu_i)_{i \neq i_0}$ une famille de scalaires telle que

$$e_{i_0} = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \mu_i e_i$$

D'où,

$$\begin{aligned} u &= \lambda_{i_0} e_{i_0} + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i e_i \\ &= \lambda_{i_0} \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \mu_i e_i + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i e_i \\ &= \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \left(\lambda_{i_0} \mu_i + \lambda_i\right) e_i \\ &\in \text{Vect}\left((e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}\right) \end{aligned}$$

$\square$

Proposition: Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E, $i_0 \in I$.

1. On pose $u_i = \begin{cases} e_i & \text{si } i \neq i_0 \\ \lambda e_{i_0} & \text{sinon} \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0_\mathbb{K}\}$
   Alors, $(u_i)_{i\in I}$ engendre E
2. Soit $v \in \text{Vect}\left((e_i)_{i\in I\setminus\ \{i_0\}}\right)$.
   On pose $u_i = \begin{cases} e_i & \text{si } i \neq i_0 \\ e_{i_0} + v & \text{sinon} \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0_\mathbb{K}\}$
   Alors, $(u_i)_{i\in I}$ engendre E

Preuve: 1. Soit $u \in E$. On pose

$$u = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$$

où $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^I$ presque nulle

$$\begin{aligned} u &= \lambda_{i_0} e_{i_0} + \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \lambda_i e_i \\ &= \lambda_{i_0} \lambda^{-1} u_{i_0} + \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \lambda_i u_i \\ &\in \text{Vect}\left((u_i)_{i\in I}\right) \end{aligned}$$

2. Soit $u = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i e_i \in E$

$$\begin{aligned} u &= \lambda_{i_0} e_{i_0} + \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}\lambda_i e_i} \\ &= \lambda_{i_0} \left(u_{i_0} - v\right) + \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \lambda_i u_i \end{aligned}$$

Or, $v = \sum\limits_{i\in I\setminus\{i_0\}} \mu_i e_i = \sum\limits_{i\in I\setminus\{i_0\}} \mu_i u_i$ où $(\mu_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ presque nulle
Donc, $u = \lambda_{i_0} + \sum\limits_{i\in I\setminus\{i_0\}} \left(\lambda_i - \lambda_{i_0}\mu_i\right) u_i \in \text{Vect}\left((u_i)_{i\in I}\right)$

$\square$

Définition: Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est libre si aucun vecteur de cette famille n'est une combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille :

$$\forall i \in I, e_i \notin \text{Vect}\left((e_j)_{j\in I\setminus\{i\}}\right)$$

On dit aussi que les e_i sont linéairement indépendants

Proposition:

$(e_i)_{i\in I}$ est libre $\iff \forall (\lambda_i) \in \mathbb{K}^I$ presque nulle , $\left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0_E \implies \forall i \in I, \lambda_i = O_\mathbb{K} \right)$

Preuve: " $\implies$ " Soit $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^I$ presque nulle. On suppose que

$$\sum_{i\in I} \lambda_i e_i = 0_E$$

On suppose aussi qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0_\mathbb{K}$
On a alors

$$\lambda_{i_0} e_{i_0} = - \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \lambda_i e_i$$

$\lambda_{i_0} \neq 0_\mathbb{K}$ donc il a un inverse $\lambda_{i_0}^{-1}$ donc

$$e_{i_0} = \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \left(-\lambda_i \lambda_{i_0}^{-1}\right) e_i \in \mathrm{Vect}\left((e_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}\right)$$

une contradiction $\lightning$

" $\impliedby$ " On suppose que $(e_i)_{i\in I}$ n'est pas libre. On considère $i_0 \in I$ tel que e_{i_0} soit une combinaison linéaire des $e_i, i \in I \setminus \{i_0\}$

$$e_{i_0} = \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \mu_i e_i$$

avec $(\mu_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ famille presque nulle de scalaires.
Alors, $1_\mathbb{K} e_{i_0} - \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \mu_i e_i = 0_E$ Par hypothèse

$$\begin{cases} 1_\mathbb{K} = 0_\mathbb{K} \\ \forall i \neq i_0, -\mu_i = 0_\mathbb{K} \end{cases}$$

une contradiction $\lightning$

□

Exemple:
$E = \mathbb{R}^3$ On pose $\begin{cases} e_1 = (1,1,0) \\ e_2 = (1,0,1) \end{cases}$
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_E &\iff (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2) = (0,0,0) \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

Donc, (e_1, e_2) est libre.

Exemple:
$E = \mathbb{R}^\mathbb{R}, e_1 = \cos, e_2 = \sin$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_E &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) = 0 \\ &\implies \begin{cases} \lambda_1 = 0 & (x = 0) \\ \lambda_2 = 0 & (x = 0 \text{ dans la dérivée}) \end{cases}\end{aligned}$$

Donc (e_1, e_2) est libre.

Proposition: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille libre de E. Alors

$$\sum_{i \in I} \mathbb{K} e_i = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{K} e_i$$

i.e.

$$\forall u \in \sum_{i \in I} \mathbb{K} e_i, \exists! (\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle telle que } u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$$

En d'autres termes, tout vecteur de E a au plus une décomposition en combinaisons linéaires des $e_i, i \in I$

Preuve:
Soit $u \in \sum_{i \in I} \mathbb{K} e_i$
On suppose que u a au plus 2 décompositions

$$u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i = \sum_{i \in I} \mu_i e_i$$

avec (λ_i) et (μ_i) presque nulles.
Alors,

$$0_E = u - u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i - \sum_{i \in I} \mu_i e_i = \sum_{i \in I} (\lambda_i - \mu_i) e_i$$

Or, $(e_i)_{i \in I}$ est libre donc

$$\forall i \in I, \lambda_i \mu_i = 0_{\mathbb{K}}$$

□

Proposition: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille libre de E.

1. Toute sous famille de (e_i) est encore libre
2. Soit $u \in E$, $\mathscr{F} = (e_i \mid i \in I) \cup \{u\}$.

$$\mathscr{F} \text{ est libre} \iff u \notin \mathrm{Vect}(e_i \mid i \in I)$$

3. (a) Quand on remplace un vecteur e_i par λe_i avec $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, la famille obtenue est libre.
   (b) Quand on remplace un vecteur e_i par $v + e_i$ avec $v \in \mathrm{Vect}(e_j \mid j \neq i)$, la famille obtenue est libre.

Définition: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que (e_i) est une base de E si c'est à la fois une famille libre et génératrice de E ; i.e. si

$$E = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{K} e_i$$

i.e. si

$$\forall u \in E, \exists!(\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle telle que } u = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$$

Dans ce cas, on dit que les λ_i sont les coordonnées de u dans la base $(e_i)_{i\in I}$

Exemple:
1. $(1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel
2. (1) est une base de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel
3. $$\begin{cases} u = 1+i \\ v = 1-i \end{cases}$$
   (u, v) est une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}$
   En effet, soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} z = \lambda u + \mu v &\iff a + ib = \lambda + \mu + i(\lambda - \mu) \\ &\iff \begin{cases} a = \lambda + \mu \\ b = \lambda - \mu \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{a+b}{2} \\ \mu = \dfrac{a-b}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

   <u>Autreméthode</u>

$$\begin{aligned} &(1, i) \text{ base} \\ \text{donc } &(1, 1+i) \text{ base} \\ \text{donc } &(1-(1+i), 1+i) \text{ base} \\ \text{donc } &(-2i, 1+i) \text{ base} \\ \text{donc } &(1+i-2i, 1+i) \text{ base} \\ \text{donc } &(1-i, 1+i) \text{ base} \end{aligned}$$

Exemple (Bases canoniques):
1. La <u>base canonique</u> de $\mathbb{K}^n$ est $(e_1, \dots, e_n)$ où $\forall i, e_i = (0_\mathbb{K}, \dots, 0_\mathbb{K}, \underbrace{1_\mathbb{K}}_{\text{en } i\text{ème} position}, 0_\mathbb{K}, \dots, 0_\mathbb{K})$ car

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathbb{K}^n, \exists!(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, u = (x_1, \dots, x_n) &= x_1(1_\mathbb{K}, 0_\mathbb{K}, \dots, 0_\mathbb{K}) \\ &+ x_2(0_\mathbb{K}, 1_\mathbb{K}, \dots, 0_\mathbb{K}) \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \\ &+ x_n(0_\mathbb{K}, 0_\mathbb{K}, \dots, 1_\mathbb{K}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \end{aligned}$$

2. E l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ à coefficiants dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ est <u>infini</u>.
   La <u>base canonique</u> de E est $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ car

$$\forall P \in E, \exists! n \in \mathbb{N}, \exists!(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}, \forall x \in \mathbb{K}, P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

3. $E = \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
   La <u>base canonique</u> de E est $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ où

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, p]\!], E_{i,j} = \left(\sigma_{i,j}^{k,\ell}\right)_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant \ell\leqslant p}}$$

i.e.

$$E_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & j & \\ & \downarrow & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{K}} & \cdots\cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & 1_{\mathbb{K}} & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & \cdots\cdots & 0_{\mathbb{K}} \end{pmatrix} & \leftarrow i \end{array}$$

$$\forall A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}, A = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_{i,j} E_{i,j}$$

CHAPITRE

16

DÉRIVATION

1 Définition et premières propriétés

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction définie sur un intervalle ouvert non vide I à valeurs réelles.

Définition: Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite qui est finie quand $x \to a$.
Dans ce cas, cette limite est notée $f'(a)$ et est appelée nombre dérivée de f en a
On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout $a \in I$.
L'application $\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & f'(a) \end{array}$ est la dérivée de f et est notée f'

Proposition:

f est dérivable en a $\iff$ f a un développement limité d'ordre 1 au voisinage de a

Preuve: " $\implies$ " $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + \underset{x \to a}{o}(1)$

donc $f(x) - f(a) = (x-a)f'(a) + \underset{x \to a}{o}(x-a)$

donc $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \underset{x \to a}{o}(x-a)$

" $\impliedby$ " $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \underset{x \to a}{o}(x-a)$

Alors, avec $x = a$, $a_0 = f(a)$ et donc

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{a_1(x-a) + o(x-a)}{x-a} = a_1 + o(1) \xrightarrow[x \to a]{} a_1 \in \mathbb{R}$$

$\square$

Proposition: Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Preuve:

$$\forall x, f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x \to a}{o}(x-a)$$

donc

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x) = f(a) + f'(a) \times 0 + 0 = f(a)$$

$\square$

Proposition: Soient f et g dérivables en a

1. $f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2. $f \times g$ est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
3. Si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

Preuve:

$$\begin{cases} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) \\ g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + o(x-a) \end{cases}$$

$$f(x) + g(x) = f(a) + g(a) + (x-a)\underbrace{\left(f'(a) + g'(a)\right)}_{(f+g)'(a)} + o(x-a)$$

2.

$$f(x) \times g(x) = f(a)g(a) + (x-a)\underbrace{\left(f(a)g'(a) + g(a)f'(a)\right)}_{(fg)'(a)} + o(x-a)$$

3. On suppose $g(a) \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(x)} &= \frac{1}{g(a) + (x-a)g'(a) + o(x-a)} \\ &= \frac{1}{g(a)} \times \frac{1}{1 + (x-a)\frac{g'(a)}{g(a)} + o(x-a)} \\ &= \frac{1}{g(a)} \times \left(1 - (x-a)\frac{g'(a)}{g(a)} + o(x-a)\right) \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{1}{g(a)}\left(f(a)+(x-a)\left(-\frac{f(a)g'(a)}{g(a)}+f'(a)\right)\right)o(x-a)\\ &= \frac{f(a)}{g(a)}+(x-a)\frac{-f(a)g'(a)+f'(a)g(a)}{(g(a))^2}+o(x-a)\end{aligned}$$

$\square$

Proposition: Soit f dérivable en a et g dérivable en $f(a)$. Alors, $f\circ g$ est dérivable en a et

$$(g\circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

Preuve:

$$\begin{cases}\forall x, f(x) = f(a)+(x-a)f'(a)+\underset{x\to a}{o}(x-a)\\ \forall y, g(y) = g(f(a))+(y-f(a))g'(f(a))+\underset{y\to f(a)}{o}(y\to f(a))\end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned}g(f(x)) &= g(f(a))+(f(x)-f(a))g'(f(a))+\underset{x\to a}{o}(f(x)-f(a)) \text{ car } f \text{ est continue en } a\\ &= g(f(a))+(x-a)f'(a)g'(f(a))+\underset{x\to a}{o}\left((x-a)f'(a)+\underset{x\to a}{o}(x-a)\right)\\ &= g(f(a))+(x-a)f'(a)g'(f(a))+\underset{x\to a}{o}(x-a)\end{aligned}$$

$\square$

Proposition: On suppose que f est bijective dérivable en a et $f'(a)\neq 0$. Si f^{-1} est continue, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

Preuve:
$\forall y\neq f(a)$ on pose $x = f^{-1}(y)$.
$y \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$ et $x \xrightarrow[y\to f(a)]{} a$

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(f(a))}{y-f(a)} = \frac{x-a}{f(x)-f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{1}{f'(a)}$$

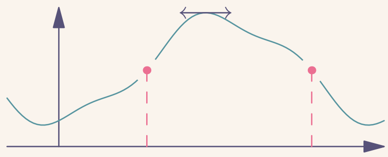
$\square$

2 Théorème de Rolle et accroissements finis

Théorème (Théorème de Rolle)**:** Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $f(a)=f(b)$.

Alors,

$$\exists c \in]a,b[, f'(c) = 0$$



Preuve:
f est continue sur le segment $[a,b]$. On pose

$$\begin{cases} M = \max\limits_{[a,b]}(f) \\ m = \min\limits_{[a,b]}(f) \end{cases}$$

CAS 1

$$\exists c \in]a,b[, M = f(c)$$

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{\substack{x \to c \\ <}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0 \text{ car } \forall x < c, \begin{cases} f(x)-f(c) \leqslant 0 \\ x-c<0 \end{cases} \\ &= \lim_{\substack{x \to c \\ >}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0 \text{ car } \forall x > c, \begin{cases} f(x)-f(c) \leqslant 0 \\ x-c>0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, $f'(c) = 0$

CAS 2

$$\exists c \in]a,b[, m = f(c)$$

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{\substack{x \to c \\ <}} \leqslant 0 \text{ car } \forall x < c \begin{cases} f(x)-f(c) \geqslant 0 \\ x-c<0 \end{cases} \\ &= \lim_{\substack{x \to c \\ >}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Donc $f'(c) = 0$

CAS 3

$$\forall c \in]a,b[, f(c) \notin \{m, M\}$$

Alors

$$\begin{cases} M \in \{f(a), f(b)\} \\ m \in \{f(a), f(b)\} \end{cases}$$

Or, $f(a) = f(b)$ donc $M = m$ donc f est constante donc

$$\forall x \in [a,b], f'(x) = 0$$

$\square$

Définition: On dit que f présente un maximum local en a s'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]a-\eta, a+\eta[, f(x) \leqslant f(a)$$

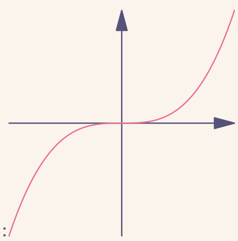
et un minimum local en a s'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]a-\eta, a+\eta[, f(x) \geqslant f(a)$$

Un extremum local est un minimum local ou un maximum local.

Proposition: Soit $a \in I$ tel que $f(a)$ est un extremum local de f où f est dérivable en a. Alors, $f'(a) = 0$ □

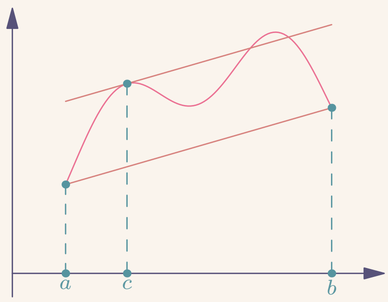
Définition: Soit f dérivable et $a \in I$. On dit que a est un point critique de f si $f'(a) = 0$. On dit que $f(a)$ est une valeur critique.

Exemple: 

$x \mapsto x^3$
$f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum local

Théorème (Théorème des accroissements finis)**:** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$



Preuve:
On pose $\tau = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
$g : x \mapsto f(x) - \tau x$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
$g(a) - g(b) = f(a) - f(b) - \tau(a-b) = 0$
D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.

$$\forall x, g'(x) = f'(x) - \tau$$

Donc, $f'(c) = \tau$ □

Proposition: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable avec I un intervalle non vide.

1. f est croissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$
2. f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \leqslant 0$
3. $\forall x \in I, f'(x) > 0 \implies f$ strictement croissante
4. $\forall x \in I, f'(x) < 0 \implies f$ strictement décroissante
5. f constante $\iff \forall x \in I, f'(x) = 0$

Preuve: 1. " $\implies$ " On suppose f croissante.
Soit $x \in I$.

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Or, $\forall y, f(y) - f(x)$ et $y - x$ sont de même signe donc $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0$.
Et donc $f'(x) \geqslant 0$.
" $\impliedby$ " On suppose que

$$\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$$

Soit $(a, b) \in I^2$. On suppose que $a \leqslant b$.
f est continue sur $[a, b]$
f est dérivable sur $]a, b[$
donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(a) - f(b) = \underbrace{f'(c)}_{\geqslant 0} \underbrace{(a - b)}_{\leqslant 0} \leqslant 0$$

donc $f(a) \leqslant f(b)$
Donc f est croissante.

On procède de la même manière pour les autres propositions □

Théorème (Théorème de la limite de la dérivée)**:** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue (sur I), $a \in I$. On suppose f dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} f'(x)$ existe.

Alors,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[\substack{x \to a \\ \neq}]{} \lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f'(a)$$

Preuve:
On pose $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} f'(x) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Soit $x \in I \setminus \{a\}$.
f est continue sur I donc sur $[a, x]$ si $x \geqslant a$ et sur $[x, a]$ si $x < a$
f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ donc sur $]a, x[$ si $x > a$ et sur $]x, a[$ si $x < a$
D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]a, x[\cup]x, a[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$$

— $\forall x < a$, on a $x < c_x < a$

Par encadrement, $c_x \xrightarrow[\substack{x \to a \\ <}]{} a$

— $\forall x > a$, on a $x > c_x > a$

Par encadrement, $c_x \xrightarrow[\substack{x \to a \\ >}]{} a$

Donc,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} c_x = a$$

donc

$$f'(c_x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ \neq}]{} \ell$$

(compositions des limites)

□

Proposition: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, \left|f'(x)\right| \leqslant M$$

Alors f est M-lipschitzienne sur I.

Preuve:
Soient $(a, b) \in I^2$.
D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in I$ tel que

$$f(a) - f(b) = f'(c)(a - b)$$

donc

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &= \left|f'(c)\right| |a - b| \\ &\leqslant M\,|a - b| \end{aligned}$$

□

3 Dérivées n-ièmes

Définition: On dit que f est une fois dérivable si f est dérivable. Dans ce cas, on note $f^{(1)}$ la fonction f'.
Pour $n \in \mathbb{N}_*$, on dit que f est dérivable n fois si f est dérivable $n-1$ fois et $f^{(n-1)}$ est dérivable une fois. Dans ce cas, $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Remarque (Convention):

$$f^{(0)} = f$$

Définition: f est de classe $\mathscr{C}^n$ si f est dérivables n fois et $f^{(n)}$ est continue.

Proposition: Soit f dérivable n fois et $k \leqslant n$.
Alors f est dérivables k fois et $f^{(n)} = \left(f^{(k)}\right)^{(n-k)}$ □

Proposition: Soit f et g deux fonctions dérivables n fois en a.
Alors, $f+g$ est dérivable n fois en a et

$$(f+g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)$$

Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$, alors, $f+g$ est de classe $\mathscr{C}^n$

Preuve (Récurrence immédiate sur n)*:*

□

Proposition (Leibniz)**:** Soient f et g dérivables n fois en a. Alors, $f\times g$ est dérivables n fois en a. et

$$(*):\qquad (f\times g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n)}(a) g^{(n-k)}(a)$$

Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ alors $f\times g$ est de classe $\mathscr{C}^n$.

Preuve (par récurrence sur n)*:* — Soient f et g deux fonctions

$$(f\times g)^{(0)}(a) = (f\times g)(a) = f(a)g(a)$$

et

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k} f^{(k)}(a)g^{(n-k)}(a) = f^{(0)}(a)g^{(0)}(a) = f(a)g(a)$$

— Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose $(*)$ vraie quelles que soient les fonctions f et g dérivables n fois en a.
Soient f et g dérivables $n-1$ fois en a. En particulier, elles sont dérivables n fois en a. Donc

$$(f\times g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(a)g^{(n-k)}(a)$$

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\begin{cases} f^{(k)} \text{ est dérivables en } a\\ g^{(n-k)} \text{ est dérivables en } a\end{cases}$$

Donc, $(f\times g)^{(n)}$ est dérivable en a donc $f\times g$ est dérivables $n+1$ fois en a.

$$\begin{aligned}
(f\times g)^{(n+1)}(a) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(k+1)}(a)g^{(n-k)}(a) + f^{(k)}(a)g^{(n-k+1)}(a)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1} f^{(k)}(a)\times g^{(n-k+1)}(a) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(a)g^{(n-k+1)}(a)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} f^{(k)}(a)g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)}(a)g(a) + f(a)g^{(n+1)}(a)\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} f^{(k)}(a)g^{(n+1-k)}(a)
\end{aligned}$$

□

Proposition: Soient f et g dérivables n fois (resp. de classe $\mathscr{C}^n$). On suppose $g(a) \neq 0$. Alors, $\frac{f}{g}$ est dérivables n fois (resp. $\mathscr{C}^n$) en a.

Preuve (par récurrence sur n)*:*
Le résultat est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour toutes fonctions f et g dérivables n fois en a avec $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est aussi dérivables n fois en a.
Soient f et g dérivables $n+1$ fois en a telles que $g(a) \neq 0$. Alors, $\frac{f}{g}$ dérivable en a. et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

- f' est dérivables n fois en a
- g est dérivables n fois en a
- f est dérivables n fois en a
- g' est dérivables n fois en a

Donc, $f' \times g - f \times g'$ et g^2 sont dérivables n fois en a et $g(a)^2 \neq 0$
D'après l'hypothèse de récurrence, $\frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$ est dérivable n fois en a donc $\frac{f}{g}$ dérivable $n+1$ fois en a □

Proposition: Soit f dérivable n fois en a et g dérivable n fois en $f(a)$ (resp. f et g de classe $\mathscr{C}^n$).
Alors, $g \circ f$ est dérivable n fois en a (resp. de classe $\mathscr{C}^n$).

Preuve (similaire à la précédente)*:*
□

Définition: On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si f est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, i.e. f est dérivable une infinité de fois.

Proposition (formule de Taylor avec reste intégral)**:** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et $a \in I$. Alors

$$(*) \qquad \forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\ dt$$

Preuve (par récurrence sur n): — Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $a \in I$. Soit $x \in I$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x f^{(1)}(t)\frac{(x-t)^0}{0!}\ dt &= f(a) + \int_a^x f'(t)\ dt \\ &= f(a) + f(x) - f(a) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(*)$ est vraie pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $I \ni a$. Soit f de classe $\mathscr{C}^{n+2}$. Alors, f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ donc

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\ dt$$

Soit $x \in I$. On pose $\begin{cases} u : t \mapsto -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \\ v = f^{(n+1)} \end{cases}$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ donc

$$\int_a^x u'(t)v(t)\ dt = [u(t)v(t)]_a^x - \int_a^x u(t)v'(t)\ dt$$

donc

$$\int_a^x f^{(n+1)}(t)\ dt = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ dt$$

D'où,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a) + \int_a^x f^{(x+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ dt$$

$\square$

Proposition (Inégalité de Taylor-Lagrange)**:** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M$$

Alors, pour tout $a \in I$,

$$\forall x \in I, \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right| \leqslant M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Preuve:
D'après la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\begin{aligned}\forall x \in I, \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}\right| &= \left|\int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\ dt\right| \\ &\leqslant \left|\int_a^x \left|f^{(n+1)}\right|(t)\frac{|x-t|^n}{n!}\ dt\right| \\ &\leqslant \left|\int_a^x M\frac{|x-t|^n}{n!}\ dt\right|\end{aligned}$$

On suppose $x \geqslant a$.

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \leqslant M\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt = M\left[-\frac{x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^x$$
$$\leqslant M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

On suppose $x \leqslant a$.

$$\begin{aligned}\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| &\leqslant M\int_x^a \frac{(t-x)^n}{n!}\,dt\\ &\leqslant M\left[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_x^a\\ &\leqslant M\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} = M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

□

Exemple:

$$\forall x\in\mathbb{R}, e^x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

On pose

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto e^x\end{aligned}$$

. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $a=0$.
f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}^+$ et $I=[0,x]$

$$\forall t\in I, \left|f^{(n+1)}(t)\right| = \left|e^t\right| = e^t \leqslant e^x$$

$$\forall t\in I, \left|e^t-\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\right| \leqslant e^x\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc

$$\forall t\in I, \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!} = e^t$$

donc

$$e^x = \lim_{n\to+\infty}\frac{x^k}{k!}$$

Exercice:
Montrer que $\ln 2 = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$

4 Fonctions à valeurs complexes

Définition: Soient $f : I\to\mathbb{C}$, (I intervalle de $\mathbb{R}$) et $a\in I$.
f est dérivable en a si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ \neq}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\in\mathbb{C}$

Proposition:

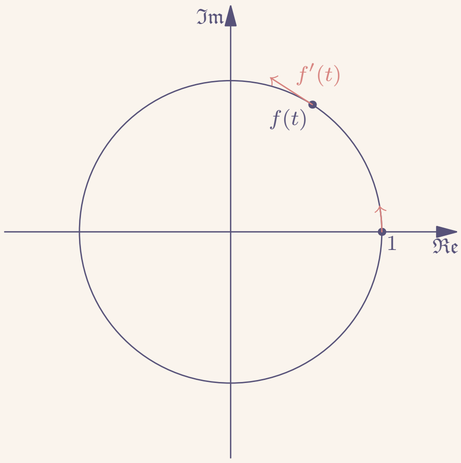
$$f \text{ est dérivable en } a \iff \mathfrak{Re}(f) \text{ et } \mathfrak{Im}(f) \text{ sont dérivables en } a$$

Dans ce cas, $f'(a) = \mathfrak{Re}(f)'(a) + i\mathfrak{Im}(f)'(a)$ □

Proposition: La somme, le produit, de fonctions dérivables sont dérivables ; le quotient également si le dénominateur ne s'annule pas. □

Proposition: idem avec les dérivées n-ièmes □

Remarque (Attention ⚠):
Le théorème de Rolle n'est plus vraie.



$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{it} \end{aligned}$$

$f(0) = f(2\pi) = 1$
f est continue sur $[0, 2\pi]$ et dérivable sur $]0, 2\pi[$
$\forall t, f'(t) = ie^{it} \neq 0$

Proposition: La formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange sont aussi vrais dans $\mathbb{C}$. □

CHAPITRE

17

DIMENSION FINIE

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie si E a au moins une famille génératrice finie. On dit que E est de dimension infinie sinon.

Théorème (Théorème de la base extraite)**:** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie. Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E. Alors, il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{E}$ telle que $\mathscr{B} \subset \mathscr{G}$.

Preuve (par récurrence sur $\#G = \text{Card}(G)$)*:*

— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul engendré par $\mathscr{G} = (u)$.
Si $u = 0_E$, alors $E = \{0_E\}$: une contradiction ↯
Donc $u \neq 0_E$ donc (u) est libre. En effet,

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u = 0_E \implies \lambda = 0_\mathbb{K}$$

Donc $\mathscr{G}$ est une base de E.

— Soit $n \in \mathbb{N}_*$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose que si E a une famille génératrice constituée de n vecteurs, alors on peut extraire de cette famille une base de E.
Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E avec $n+1$ vecteurs.
Si $\mathscr{G}$ est libre, alors $\mathscr{G}$ est une base de E.
Si $\mathscr{G}$ n'est pas libre, alors il existe $u \in \mathscr{G}$ tel que $u \in \text{Vect}(\mathscr{G} \setminus \{u\})$
Donc $\mathscr{G} \setminus \{u\}$ engendre E. Or, $\mathscr{G} \setminus \{u\}$ possède n vecteurs. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que

$$\mathscr{B} \subset \mathscr{G} \setminus \{u\} \subset \mathscr{G}$$

□

Corollaire: Tout espace de dimension finie a une base. □

Théorème (Théorème de la base incomplète)**:** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E. $\mathscr{L}$ une famille libre de E. Alors, il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que

$$\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \text{ et } \mathscr{B} \setminus \mathscr{L} \subset \mathscr{G}$$

Preuve (par récurrence sur $\#(\mathscr{G} \setminus \mathscr{L})$)*:*

— Avec les notations précédentes, on suppose que $\mathscr{G} \setminus \mathscr{L} \neq \varnothing$

$$\forall u \in \mathscr{G}, u \in \mathscr{L}$$

Donc $\mathscr{G} \subset \mathscr{L}$ donc $\mathscr{L}$ est génératrice donc $\mathscr{L}$ est une base de E. On pose $\mathscr{B} = \mathscr{L}$ et alors

$$\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \text{ et } \mathscr{B} \setminus \mathscr{L} = \varnothing \subset \mathscr{G}$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que si $\mathscr{G}$ est génératrice et $\mathscr{L}$ libre avec $\#(\mathscr{G} \setminus \mathscr{L}) = n$ alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que

$$\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \text{ et } \mathscr{B} \setminus \mathscr{L} \subset \mathscr{G}$$

Soient à présent $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E et $\mathscr{L}$ une famille libre de E telles que $\#(\mathscr{G} \setminus \mathscr{L}) = n + 1 > 0$
Si $\mathscr{L}$ engendre E, alors $\mathscr{L}$ est une base de E. On pose $\mathscr{B} = \mathscr{L}$ et on a bien

$$\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \text{ et } \mathscr{B} \setminus \mathscr{L} = \varnothing \subset \mathscr{G}$$

On suppose que $\mathscr{L}$ n'engendre pas E. Il existe $u \in \mathscr{G}$ tel que $u \notin \overrightarrow{(}\mathscr{L})$ (car sinon, $\mathscr{G} \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{L})$ et donc $\underbrace{\mathrm{Vect}(\mathscr{G})}_{=E} \subset \underbrace{\mathrm{Vect}(\mathscr{L})}_{\subset E}$
Donc $\mathscr{L} \cup \{u\}$ est libre. On pose $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{u\}$

$$\mathscr{G} \setminus \mathscr{L}' = \mathscr{G} \setminus (\mathscr{L} \cup \{u\}) = (\mathscr{G} \setminus \mathscr{L}) \setminus \{u\}$$

donc $\#(\mathscr{G} \setminus \mathscr{L}') = n + 1 - 1 = n$
D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $\mathscr{B}$ une base de E telle que

$$\mathscr{L} \subset \mathscr{L}' \subset \mathscr{B} \text{ et } \mathscr{B} \setminus \mathscr{L}' \subset \mathscr{G}$$

$$\mathscr{B} \setminus \mathscr{L} = \underbrace{\mathscr{B} \setminus \mathscr{L}'}_{\subset \mathscr{G}} \cup \underbrace{\{u\}}_{\subset \mathscr{G} \text{ car } u \in \mathscr{G}}$$

On a $\mathscr{B} \setminus \mathscr{L} \subset \mathscr{G}$

□

Théorème: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E ont le même cardinal.

Preuve:
Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E et $\mathscr{B} \subset \mathscr{G}$ une base de E. On note $n = \#\mathscr{B}$
Soit $\mathscr{B}'$ une base de E. On pose $p = n - \#(\mathscr{B} \cap \mathscr{B}')$. Montrons par récurrence sur p que $\#\mathscr{B} = \#\mathscr{B}'$

— On suppose que $p = 0$. Alors, $\#(\mathscr{B} \cap \mathscr{B}') = n$
Or, $\mathscr{B}' \cap \mathscr{B} \subset \mathscr{B}$ donc $\mathscr{B} \cap \mathscr{B}' = \mathscr{B}$ donc $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}'$ et donc $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$

— Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que si $\mathscr{B}'$ est une base de E telle que $n - \#(\mathscr{B} \cap \mathscr{B}') = p$, alors $\#\mathscr{B}' = n$
Aoit $\mathscr{B}'$ une base de E telle que $n - \#(\mathscr{B} \cap \mathscr{B}') = p + 1 > 0$
Donc $\mathscr{B} \cap \mathscr{B}' \neq \mathscr{B}$. Soit $u \in \mathscr{B}' \setminus \mathscr{B}$. D'après le lemme d'échange, il existe

$v \in \mathscr{B} \setminus \mathscr{B}'$ tel que $\mathscr{B}' \setminus \{u\} \cup \{v\}$ est une base de E. On pose $\mathscr{B}'' = \mathscr{B}' \setminus \{u\} \cup \{v\}$

$$\begin{aligned}\mathscr{B}'' \cap \mathscr{B} &= \big((\mathscr{B}' \setminus \{u\}) \cap \mathscr{B}\big) \cup \{v\} \\ &= (\mathscr{B}' \cap \mathscr{B}) \cup \{v\}\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}n - \#(\mathscr{B}'' \cap \mathscr{B}) &= n - (\#(\mathscr{B}' \cap \mathscr{B}) + 1) \\ &= p + 1 - 1 \\ &= p\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence,

$$\#\mathscr{B}'' = n$$

Or, $\#\mathscr{B}'' = \#\mathscr{B}'$

□

Lemme: Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E telles que $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}'$. Alors, $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$.

Preuve:
On suppose $\mathscr{B}' \neq \mathscr{B}$. Soit $u \in \mathscr{B}' \setminus \mathscr{B}$ $u \in E = \text{Vect}(\mathscr{B})$ donc $\mathscr{B} \cup \{u\}$ n'est pas libre. Donc $\mathscr{B} \cup \{u\} \subset \mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}'$ est libre donc $\mathscr{B} \cup \{u\}$ est libre : une contradiction $\lightning$ □

Lemme (Lemme d'échange)**:** Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E et $u \in \mathscr{B}_1 \setminus \mathscr{B}_2$. Alors, il existe $v \in \mathscr{B}_2$ tel que $(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ soit une base de E.

Preuve (1^{nde} méthode)*:*
On suppose que pout tout $v \in \mathscr{B}_2$, $(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ n'est pas une base de E Soit $v \in \mathscr{B}_2$.

- Supposons $(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ non libre. $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}$ est libre. Donc $v \in \text{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$
- Supposons $(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ non génératrice. Comme $\mathscr{B}_1$ engendre E, $u \notin \text{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{v\})$. On suppose que $\mathscr{B}_1 \neq \mathscr{B}_2$. $\forall v \in \mathscr{B}_2 \setminus \mathscr{B}_1, \text{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{v\}) = \text{Vect}(\mathscr{B}_1) = E \ni u$ donc, $(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ engendre E et donc

  $$v \in \text{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$$

  On a aussi
  $$\forall v \in \mathscr{B}_1 \setminus \{u\}, v \in \text{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$$
  Comme $u \notin \mathscr{B}_2$, on a
  $$\forall v \in \mathscr{B}_2, v \in \text{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$$
  docn
  $$E = \text{Vect}(\mathscr{B}_2) \subset \text{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$$
  donc $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}$ engendre E donc $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}$ est une base de E. Or, $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} \subset \mathscr{B}_1$, donc $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} = \mathscr{B}_1$

□

Preuve (2^{nde} méthode)*:*
On suppose que pout tout $v \in \mathscr{B}_2$, $(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ n'est pas une base de E

— Comme $u \in \mathscr{B}_1 \setminus \mathscr{B}_2$, nécéssairement $\mathscr{B}_1 \neq \mathscr{B}_2$ donc $\mathscr{B}_2 \not\subset \mathscr{B}_1$, donc $\mathscr{B}_2 \setminus \mathscr{B}_1 \neq \varnothing$
— Soit $v \in \mathscr{B}_2 \setminus \mathscr{B}_1$. Il existe $(\lambda_w)_{w \in \mathscr{B}_1}$ une famille de scalaires presque nulle telle que

$$v = \sum_{w \in \mathscr{B}_1} \lambda_w w - \lambda_u u + + \sum_{w \in \mathscr{B}_1 \setminus \{u\}} \lambda_w w$$

Si $\lambda_u \neq 0_E$, alors

$$\begin{aligned} u &= \lambda_u^{-1} \left(v - \sum_{w \in \mathscr{B}_1 \setminus \{u\}} \lambda_w w \right) \\ &\in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} \cup v) \end{aligned}$$

donc $\mathscr{B}_1 \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} \cup \{v\})$
et donc $E \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} \cup \{v\})$
et donc $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} \cup \{v\}$ engendre E
donc $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} \cup \{v\}$ n'est pas libre
donc $v \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$ (car $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}$ est libre
donc $\lambda_u = 0_{\mathbb{K}}$ ↯
‘
Donc, $\lambda_u = 0_{\mathbb{K}}$, docn $v \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$
On vient de prouver que

$$\begin{aligned} \mathscr{B}_2 \setminus \mathscr{B}_1 &\subset \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}) \\ \mathscr{B}_1 \setminus \{u\} &\subset \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}) \end{aligned}$$

Comme $u \notin \mathscr{B}_2$,

$$\mathscr{B}_2 \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$$

donc

$$E = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_2) \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$$

donc $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}$ engendre E. Donc, $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}$ est une base de E.
Or, $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} \subset \mathscr{B}_1$, donc $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} = \mathscr{B}_1$

□

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Le cardinal commun à toutes les bases de E est appelé dimension de E est notée $\dim(E)$ ou $\dim_{\mathbb{K}}(E)$
C'est donc aussi le nombre de coordonnées de n'importe quel vecteur dans n'importe quelle base.

Exemple:
1. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ et $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$
2. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$
3. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$

Corollaire: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{L}$ une famille libre de E, $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E. On note $n = \dim(E)$
1. $\#\mathscr{G} \geqslant n$ et ($\#\mathscr{G} = n \implies \mathscr{G}$ est une base de E)
2. $\#\mathscr{L} \leqslant n$ et ($\#\mathscr{L} = n \implies \mathscr{L}$ est une base de E)

Corollaire: $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est de dimension infinie. $\forall i \in \mathbb{N}, e_i : x \mapsto x^i$
$(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Proposition: Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $E\times F$ est de dimension finie et $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$

Preuve:
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F. On pose

$$\begin{cases} u_1 &= (e_1, 0_F) \\ u_2 &= (e_2, 0_F) \\ &\vdots \\ u_n &= (e_n, 0_F) \\ u_{n+1} &= (0_E, f_1) \\ u_{n+2} &= (0_E, f_2) \\ &\vdots \\ u_{n+p} &= (0_E, f_p) \end{cases}$$

Soit $(x, y) \in E \times F$.

$$\begin{cases} \exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \exists (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{j=1}^{p} y_j f_j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (x, y) &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{p} y_j f_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i (e_i + 0_F) + \sum_{j=1}^{p} y_j (0_E, f_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i u_i + \sum_{j=1}^{p} y_j u_{n+j} \end{aligned}$$

Donc, $E \times F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{n+p})$ donc $E \times F$ est de dimension finie.
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+p}) \in \mathbb{K}^{n+p}$ tel que

$$(*) : \quad \sum_{k=1}^{n+p} \lambda_k u_k = 0_{E\times F} = (0_E, 0_F)$$

$$\begin{aligned} (*) &\iff \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (e_k, 0_F) + \sum_{k=n+1}^{p} \lambda_k (0_E, f_{k-n}) = (0_E, 0_F) \\ &\iff \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0_E \\ \sum_{k=n+1}^{p} \lambda_k f_{k-n} = 0_F \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \forall k \in [\![1, n]\!], \lambda_k = 0_{\mathbb{K}} & (\text{car } (e_1, \dots, e_n) \text{ est libre}) \\ \forall k \in [\![n+1, n+p]\!], \lambda_k = 0_{\mathbb{K}} & (\text{car } (f_1, \dots, f_n) \text{ est libre}) \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $(u_1, \ldots, u_{n+p})$ est une base de $E \times F$. Donc, $\dim(E \times F) = n + p = \dim(E) + \dim(F)$ □

Remarque (Convention):

$$\dim\left(\{0_E\}\right) = 0$$

Théorème: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E. Alors, F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$
Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$

Preuve:
On considère

$$A = \{k \in \mathbb{N} \mid \text{il existe une famille libre de } F \text{ à } k \text{ éléments}\}$$

On suppose $F \neq \{0_E\}$.
- Soit $u \in F \setminus \{0_E\}$. (u) est libre donc $1 \in A$ et donc $A \neq \varnothing$
- Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de F. Alors, $\mathscr{L}$ est une famille libre de E
  donc $\#\mathscr{L} \leqslant \dim(E)$
  Donc A est majorée par $\dim(E)$
  On en déduit que A a un plus grand élément p.
- Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de F avec p éléments.
  Si $\mathscr{L}$ n'engendre pas F, alors il existe $u \in F$ tel que $u \notin \mathrm{Vect}(\mathscr{L})$ et donc $\mathscr{L} \cup \{u\}$ est une famille libre de F, donc $p+1 \in A$ en contradiction avec la maximalité de p.
  Donc $\mathscr{L}$ est une base de F donc F est de dimension finie et $\dim(F) = p \leqslant \dim(E)$

Soit $\mathscr{B}$ une base de F. Alors, $\mathscr{B}$ est aussi une famille de libre de de E. Donc $\#\mathscr{B} \leqslant \dim(E)$
donc $\dim(F) = \dim(E)$
Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $\mathscr{B}$ est une base de E, et donc $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}) = E$ □

Proposition (Formule de Grassmann)**:** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espace vectoriels de E. Alors,

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Preuve:
Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $F \cap G$. $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille libre de F.
On complète $(e_1, \ldots, e_p)$ en une base $(e_1, \ldots, e_p, u_1, \ldots, u_q)$ de F.
De même, on complète $(e_1, \ldots, e_p)$ en une base $(e_1, \ldots, e_p, v_1, \ldots, v_r)$ de G.
On pose $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p, u_1, \ldots, u_q, v_1, \ldots, v_r)$. Montrons que $\mathscr{B}$ est une base de $F + G$
- Soit $u \in F + G$

  On pose $u = v + w$ avec $\begin{cases} v \in F \\ w \in G \end{cases}$.

  On pose $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{q} \mu_i u_i$ avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \lambda_q) \in \mathbb{K}^{p+q}$

  On pose aussi $w = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda'_i e_i + \sum_{j=1}^{r} \nu_j v_j$ avec $(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_p, \nu_1, \ldots, \nu_r) \in \mathbb{K}^{p+r}$

D'où,

$$u = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + \lambda_i')e_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j u_j + \sum_{k=1}^{r} \nu_k v_k \in \operatorname{Vect}(\mathscr{B})$$

— Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q, \nu_1, \dots, \nu_r) \in \mathbb{K}^{p+q+r}$.
On suppose

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j u_j + \sum_{k=1}^{r} \nu_k v_k = 0_E$$

D'où,

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j u_j}_{\in F} = \underbrace{-\sum_{k=1}^{r} \nu_j v_k}_{\in G}$$

Donc,

$$f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j u_j \in F \cap G$$

Comme $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de $F \cap G$, $\exists!(\lambda_1', \dots, \lambda_p') \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i' e_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i' e_i + \sum_{j=1}^{q} 0_{\mathbb{K}} u_j$$

Comme $(e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_q)$ est une base de F,

$$\forall k \in [\![1, q]\!], \mu_j = 0_{\mathbb{K}}$$

De même,

$$\forall k \in [\![1, r]\!], \nu_k = 0_{\mathbb{K}}$$

On remplace dans $(*)$ pour trouver

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0_E$$

Comme $(e_1, \dots, e_p)$ est libre,

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$$

Donc $\mathscr{B}$ est libre.
Donc,

$$\begin{aligned} \dim(F+G) &= p+q+r \\ &= (p+q)+(p+r)-p \\ &= \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G) \end{aligned}$$

□

Corollaire: Avec les hypothèse précédentes,

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases}$$

Preuve: " $\implies$ " On suppose $E = F \oplus G$

Comme la somme est directe, $F \cap G = \{0_E\}$

$$\begin{aligned}\dim(E) &= \dim(F) \\ &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \\ &= \dim(F) + \dim(G)\end{aligned}$$

“ $\Longleftarrow$ ” On suppose $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.
On sait déjà que $F + G = F \oplus G$

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = \dim(E)$$

Donc $F + G = E$

$\square$

Proposition: Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F. L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^n &\longrightarrow F \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \end{aligned}$$

est bijective.
Si $\mathbb{K}$ est infini, $\mathbb{K}^n$ aussi et donc F aussi.
Si $\#\mathbb{K} = p \in \mathbb{N}_*$,

$$\begin{array}{l} \#\mathbb{K}^n = p^n \\ \parallel \\ \#F \end{array}$$

CHAPITRE

18

POLYNÔMES FORMELS

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps

1 Définition

Définition: — Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une suite presque nulle de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

— Le polynôme nul, noté 0 est la suite nulle.

— Soit $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un polynôme non nul.
$\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0_{\mathbb{K}}\}$ est non-vide et majoré. Le degré de P est $\max\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0_{\mathbb{K}}\}$, et on le note $\deg(P)$ et $a_{\deg(P)}$ est le coefficient dominant de P, il est noté $\mathrm{dom}(P)$.

— Le degré du polynôme nul est $-\infty$

Proposition – Définition: Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors, $P + Q = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un polynôme appelé somme de P et Q.

Preuve:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1, a_n = 0$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_2, b_n = 0$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$ donc

$$\forall n \geqslant N, a_n + b_n = 0 + 0 = 0$$

donc $P + Q$ est une suite presque nulle. □

Proposition – Définition: Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque nulle. Ce polynôme est appelé <u>produit de P et Q</u> et noté PQ.

Preuve:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1, a_n = 0$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_2, b_n = 0$$

On pose $N = N_1 + N_2$

$$\forall n \geqslant N, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{N_1} a_k b_{n-k} + \sum_{k=N_1+1}^{n} a_k b_{n-k}$$

$\forall k \geqslant N_1 + 1$, $a_k = 0$ donc $\displaystyle\sum_{k=N_1+1}^{n} a_k b_{n-k} = 0$
$\forall k \leqslant N_1$, $b - k \geqslant n - N_1 \geqslant N_1 + N_2 - N_1 \geqslant N_2$ donc $\forall k \leqslant N_1, b_{n-k} = 0$ et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{N_1} a_k b_{n-k} = 0$
Donc

$$\forall n \geqslant N, c_n = 0$$

□

Remarque (Notation):
Soit $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Le polynôme $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est noté λP

Remarque (Notation):
On pose $X = (0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \dots) = (\delta_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$

Exemple:

$$\begin{aligned} X^2 &= XX \\ &= (0 \times 0, 0 \times 1 + 1 \times 0, 0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0, 0, \dots) \\ &= (0, 0, 1, 0, \dots) \end{aligned}$$

Théorème: Soit $P=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors

$$P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k \qquad \text{où } n=\deg(P) \text{ et } X^0=(1,0,\ldots)$$

Preuve:

Pour $k\in\mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: "$X^k=(\delta_{k,n})_{\in\mathbb{N}}$" où $\delta_{k,n}=\begin{cases}1 & \text{si } n=k\\ 0 & \text{si } n\neq k\end{cases}$

— $\delta_{0,n}=(1,0,\ldots)=X^0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vrai

— Soit $k\in\mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}(k)$ vraie.

$$X^{k+1}=X^k\,X=(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

où

$$\forall n\in\mathbb{N}, c_n=\sum_{j=0}^{n}\delta_{k,j}\delta_{1,n-j}$$

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $j\in[\![0,n]\!]$

$$\begin{aligned}\delta_{k,j}\delta_{1,n-j}\neq 0 &\iff \begin{cases}k=j\\1=n-j\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}k=j\\n=k+1\end{cases}\end{aligned}$$

Donc, si $n\neq k+1$, alors

$$\forall j\in[\![0,n]\!], \delta_{k,j}\delta_{1,n-j}=0$$

et donc $c_n=0$

$$c_{k+1}=\sum_{j=0}^{k+1}\delta_{k,j}\delta_{1,j+1-j}=\delta_{k,k}\delta_{1,1}=1$$

Donc

$$\forall n\in\mathbb{N}, c_n=\delta_{k+1,n}$$

donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie

Ainsi, $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout $k\in\mathbb{N}$. Soit $P=(a_0,\ldots,a_n,0,\ldots)$ un polynôme de degré n.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}a_kX^k &= a_0(1,0,0,0,\ldots)\\ &+a_1(0,1,0,0,\ldots)\\ &+a_2(0,0,1,0,\ldots)\\ &\vdots\\ &+a_n(0,\ldots,0,1,0,\ldots)\\ &=(a_0,a_1,\ldots,a_n,0,\ldots)\\ &=P\end{aligned}$$

□

Remarque (Notation):
On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ dont l'indéterminée $(0,1,0,\ldots)$

est notée X.

Proposition: $\left(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot\right)$ est une <u>$\mathbb{K}$-algèbre commutative</u> i.e.

1. $\left(\mathbb{K}[X], +, \times\right)$ est un anneau commutatif
2. $\left(\mathbb{K}[X], +, \cdot\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (P, Q) \in \left(\mathbb{K}[X]\right)^2, \lambda \cdot (P \times Q) = (\lambda \cdot P) \times Q = P \times (\lambda \cdot Q)$

Preuve: 1. $(\mathbb{K}[X], +)$ est un groupe abélien car $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

— $X^0 = (1, 0, \ldots)$ est le neutre de $\times$
En effet, $\forall P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$, en posant $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = PX^0$ on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \delta_{k,n-k} = a,$$

donc $PX^0 = P$

— $\times$ est commutative : $\forall P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X], \forall Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$, on pose $R = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} = PQ$, $S = (d_n)_{n\in\mathbb{N}} = QP$ alors

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, c_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j \qquad (j = n-k) \\
&= \sum_{j=0}^{n} b_j a_{n-j} \\
&= d_n
\end{aligned}$$

donc $PQ = QP$

— Soient

$$\begin{cases} P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X] \\ Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X] \\ R = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X] \end{cases}$$

On pose

$$\begin{cases} S = (d_n)_{n\in\mathbb{N}} = PQ \\ T = (e_n)_{n\in\mathbb{N}} = SR = (PQ)R \\ U = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} = QR \\ V = (g_n)_{n\in\mathbb{N}} = PU = P(QR) \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, e_n &= \sum_{k=0}^{n} d_k c_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) c_{n-k} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} a_j b_{k-j} c_{n-k} \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=j}^{n} b_{k-j} c_{n-k} \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{\ell=0}^{n-j} b_\ell c_{n-j-\ell} \qquad (\ell = k-j) \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_j f_{n-j} \\ &= g_n\end{aligned}$$

Donc $T = V$

— Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, R = (C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois polynômes et $P(Q + R) = (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $PQ + PR = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, d_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k (b_{n-k} + c_{n-k}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k} \\ &= e_n\end{aligned}$$

Donc, $\left(\mathbb{K}[X], +, \times\right)$ est un anneau commutatif

2. $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
   $\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. D'après la propriété précédente,

$$\mathbb{K}[X] = \mathrm{Vect}\left((X^n \mid n \in \mathbb{N})\right)$$

   donc $\mathbb{K}[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}, P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes. On pose $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = PQ, R = (d_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda(PQ), S = (e_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda P)Q, T = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} = P(\lambda Q)$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, d_n = \lambda c_n &= \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) b_{n-k} = e_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (\lambda b_{n-k}) = f_n\end{aligned}$$

□

Remarque:
$(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative (si $n > 1$)

Proposition: $i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ \lambda & \longmapsto & \lambda X^0 \end{array}$ est un morphisme d'algèbre injectif, i.e.

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \begin{cases} i(\lambda + \mu) = i(\lambda) + i(\mu) \\ i(\lambda \cdot \mu) = i(\lambda) \times i(\mu) \end{cases}$$

et i est injective.

Remarque (Notation):
On identifie $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $\lambda X^0 \in \mathbb{K}[X]$. Ainsi, on peut écrire $X^0 = 1$, on peut écrire $2+X+3X^2$ au lieu de $2X^0 + X + 3X^2$

Proposition: Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$

— $\deg(P+Q) \leqslant \max\big(\deg(P), deg(Q)\big)$
— Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors
  — $\deg(P+Q) = \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$
  — $\mathrm{dom}(P+Q) = \begin{cases} \mathrm{dom}(P) & \text{si } \deg(P) > \deg(Q) \\ \mathrm{dom}(Q) & \text{si } \deg(P) < \deg(Q) \end{cases}$
— Si $\deg(P) = \deg(Q)$ et $\mathrm{dom}(P) + \mathrm{dom}(Q) \neq 0$,
  alors $\begin{cases} \deg(P+Q) = \deg(P) = \deg(Q) \\ \mathrm{dom}(P+Q) = \mathrm{dom}(P) + \mathrm{dom}(Q) \end{cases}$
— Si $\deg(P) = \deg(Q)$ et $\deg(P) + \deg(Q) = 0$, alors $\deg(P+Q) < \deg(P)$

Preuve: — Si $P = 0$, alors $\deg(P+Q) = \deg(Q)$ et donc $\max\big(\deg(P), \deg(Q)\big) = \max\big(-\infty, \deg(Q)\big)$
On a bien $\deg(P+Q) \leqslant \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$
— De même avec $Q = 0$
— On suppose $P \neq 0$ et $Q \neq 0$
On pose $\begin{cases} P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k & p = \deg(P) \\ Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k & q = \deg(Q) \end{cases}$
On peut supposer $p \geqslant q$. On pose $b_{q+1} = \ldots = b_p = 0$ si $p > q$
Ainsi, $Q = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k$
$P + Q = \sum_{k=0}^{p} (a_k + b_k) X^k$ donc $\deg(P+Q) \leqslant p$ et $p = \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$
De plus, $a_p + b_p = \begin{cases} \underbrace{\mathrm{dom}(P)}_{\neq 0} & \text{si } p > q \\ \mathrm{dom}(P) + \mathrm{dom}(Q) & \text{si } p = q \end{cases}$

□

Proposition: Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$$

Preuve:
Si P ou Q est nul, alors la formule est vraie car

$$\begin{cases} \deg(PQ) = -\infty \\ \deg(P) + \deg(Q) = \begin{cases} \text{cste} - \infty = -\infty \\ -\infty + \text{cste} = -\infty \\ -\infty - \infty = -\infty \end{cases} \end{cases}$$

On suppose $P \neq 0$ et $Q \neq 0$. On pose $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ avec $a_p \neq 0$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ avec $b_q \neq 0$

$$\begin{aligned} PQ &= \left(\sum_{k=0}^{p} a_k X^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{q} b_\ell X^\ell\right) \\ &= \sum_{k=0}^{p}\sum_{\ell=0}^{q} a_k b_\ell X^{k+\ell} \end{aligned}$$

donc $\deg(PQ) \leqslant p + q$ et le coefficient devant X^{p+q} est $a_p b_q \neq 0$ (car $\mathbb{K}$ est intègre)
donc $\deg(PQ) = p + q$ □

2 Évaluation

Définition: Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre et $P \in \mathbb{K}[X]$. On pose $P = \sum_{k=0}^{n} e_k X^k$. Soit $a \in A$. On pose

$$\begin{aligned} P(a) &= \sum_{k=0}^{n} e_k a^k \\ &= e_0 1_A + e_1 a + e_2 a^2 + \cdots + e_n a^n \in A \end{aligned}$$

On dit qu'on a évalué P en a, ou spécialisé X avec la valeur de a, ou remplacé X par a, substitué a à X.

Définition: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.
On dit que a est une racine de P si $P(a) = 0_{\mathbb{K}}$.

Définition: Soit $P \in \mathbb{K}[X] \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que c'est un polynôme de matrices.

Exemple:

$P = 1 + 2X - 3X^2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} P(A) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Définition: Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Alors $P(Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k \quad \in \mathbb{K}[X]$

C'est la <u>composée</u> de P et Q.

Remarque (⚠ Attention):

Ne pas confondre $\underbrace{P(X+1)}_{\text{composée}}$ et $\underbrace{P(X+1)}_{\text{produit}}$.

On a $\underbrace{P(X+1)}_{\text{produit}} = (X+1)\,P = P(X)\,(X+1) = P \times (X+1)$

Proposition: Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $\begin{cases} Q \neq 0 \\ P \neq 0 \end{cases}$. On a

$$\deg\big(P(Q)\big) = \deg(P) \times \deg(Q)$$

□

Exemple:

$\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$

$P = X^2 + X + 1 \in \mathbb{K}[X]$ et $Q = 1 \in \mathbb{K}[X]$

$P \neq Q$

$$\begin{aligned} f_P : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ x &\longmapsto P(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Q : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ x &\longmapsto Q(x) \end{aligned}$$

$f_P\left(\bar{0}\right) = \bar{1} = f_Q\left(\bar{0}\right)$

$f_P\left(\bar{1}\right) = \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = \bar{1} = f_Q\left(\bar{1}\right)$

donc $f_P = f_Q$ alors que $P \neq Q$

Théorème: Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre. L'application

$$\varphi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow A^A$$
$$P \longmapsto f_P : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ a & \longmapsto & P(a) \end{array}$$

vérifie

1. $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \varphi(P+Q) = \varphi(P) + \varphi(Q)$
2. $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \varphi(PQ) = \varphi(P) \times \varphi(Q)$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall P \in \mathbb{K}[X], \varphi(\lambda P) = \lambda \varphi(P)$

□

Exemple:
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$
$X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$

— $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre donc

$$\forall z \in \mathbb{C}, z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$$

— $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre

$$\forall A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), A^2 - I_2 = (A - I_2)(A + I_2)$$

Définition: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

Le polynôme dérivé de P est

$$P' = \sum_{k=0}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

où

$$\forall k \in [\![1, n]\!], k a_k = \underbrace{a_k + \cdots + a_k}_{k \text{ fois}}$$

$$0_{\mathbb{N}} a_k = 0_{\mathbb{K}}$$

Remarque:
Si $P \in \mathbb{R}[X]$, $f_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & P(x) \end{array}$

$f_{P'} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & P'(x) \end{array}$ alors $f_{P'} = f'_P$

Proposition:

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) > 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition: Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $(P+Q)' = P' + Q'$

2. $(PQ)' = P'Q + PQ'$
3. $(\lambda P)' = \lambda P'$

Preuve:
On pose

$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \qquad Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$$

1. On peut supposer $p \geqslant q$
   Si $p > q$, on pose $b_{q+1} = \cdots = b_p = 0$

$$P + Q = \sum_{k=0}^{p} (a_k + b_k) X^k$$

   donc

$$\begin{aligned}(P+Q)' &= \sum_{k=0}^{p} k(a_k + b_k) X^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{p} k a_k X^{k-1} + \sum_{k=0}^{p} k b_k X^{k-1} \\ &= P' + Q'\end{aligned}$$

2.

$$PQ = \sum_{k=0}^{p} \sum_{\ell=0}^{q} a_k b_\ell X^{k+\ell}$$

   D'après 1.,

$$\begin{aligned}(PQ)' &= \sum_{k=0}^{p} \sum_{\ell=0}^{q} \left(a_k b_\ell X^{k+\ell} \right)' \\ &= \sum_{k=0}^{p} \sum_{\ell=0}^{q} a_k b_\ell (k+\ell) X^{k+\ell-1} \\ &= \sum_{k=0}^{p} \sum_{\ell=0}^{q} k a_k b_\ell X^{k-1+\ell} + \sum_{k=0}^{p} \sum_{\ell=0}^{q} \ell a_k b_\ell X^{k+\ell-1} \\ &= \sum_{k=0}^{p} k_k X^{l-1} \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell X^\ell + \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \sum_{\ell=0}^{q} \ell b_\ell X^{\ell-1} \\ &= P'Q + PQ'\end{aligned}$$

3.

$$\lambda P = \sum_{k=0}^{p} \lambda a_k X^k$$

   donc

$$(\lambda P)' = \sum_{k=0}^{p} \lambda a_k k X^{k-1} = \lambda \sum_{k=0}^{p} k a_k X^{k-1} = \lambda P'$$

□

Définition: Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit la dérivée k-ième d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ par

— si $k = 0$, $P^{(k)} = P$
— si $k = 1$, $P^{(1)} = P'$
— si $k > 1$, $P^{(k)} = \left(P^{(k-1)}\right)'$

Proposition:

$$\forall k, j \in \mathbb{N}^2, \left(X^k\right)^{(j)} = \begin{cases} 0 & \text{si } j > k \\ k(k-1)\cdots(k-j+1)X^{k-j} = \dfrac{k!}{(k-j)!}X^k & \text{si } j \leqslant k \end{cases}$$

Preuve (par récurrence sur j à k fixé)*:*

$\square$

Proposition: Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$

1. $\forall k \in \mathbb{N}, (P+Q)^{(k)} = P^{(k)} + Q^{(k)}$
2. $\forall k \in \mathbb{N}, (PQ)^{(k)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} P^{(i)} Q^{(k-i)}$
3. $\forall k \in \mathbb{N}, (\lambda P)^{(k)} = \lambda P^{(k)}$

Preuve (par récurrence sur k)*:*

$\square$

3 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Définition: Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que A divise B (dans $\mathbb{K}[X]$) s'il existe $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$AC = B$$

On dit dans ce cas que A est un diviseur de B ou que B est un multiple de A. On le note alors $A \mid B$
On dit que A et B sont associés s'il existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $A = \lambda B$. Il s'agit d'une relation d'équivalence.

Proposition: Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

$$\left.\begin{matrix} A \mid B \\ B \mid A \end{matrix}\right\} \iff A \text{ et } B \text{ sont associés}$$

Preuve: " $\implies$ " Soit $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que $AC = B$ et $D \in \mathbb{K}[X]$ tel que $BD = A$. D'où,

$$A = BD = ACD$$

Or, $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre.

D'où
$$A(1-CD)=0$$
donc $A=0$ ou $CD=1$
Si $A=0$, alors $B=0\times C=0=1\times A$ donc A et B sont associés
Si $CD=1$, on sait que $\mathbb{K}[X]^\times=\mathbb{K}\setminus\{0\}$
Alors, A et B sont associés.
" $\Longleftarrow$ " évident

□

Lemme: $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre.

Preuve:
Soient $P,Q\in\mathbb{K}[X]$ tels que $PQ=0$. On suppose que $P\neq 0$ et $Q\neq 0$
Alors $\deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)\geqslant 0$
Or, $PQ=0$ et $\deg(0)=-\infty$: $\lightning$ une contradiction □

Lemme:
$$\mathbb{K}[X]^\times=\mathbb{K}\setminus\{0\}$$

Preuve:
Soient $P,Q\in\mathbb{K}[X]$ tels que $PQ=1$.
Alors, $0=\deg(1)=\deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)$
Comme $P\neq 0$, $\deg(P)\geqslant 0$. De même, $\deg(Q)\geqslant 0$
Donc $\deg(P)=\deg(Q)=0$ Donc, il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ tels que $\lambda\mu=1$
Donc $\lambda\in\mathbb{K}^\times=\mathbb{K}\setminus\{0\}$ □

Proposition: $\mid$ est une relation réflexive et transitive. □

Proposition: Soient $A,B,C\in\mathbb{K}[X]$ tels que $A\mid B$ et $A\mid C$. Alors
$$\forall(P,Q)\in\mathbb{K}[X]^2, A\mid BQ+CP$$

□

Proposition – Définition: Soit $A\in\mathbb{K}[X], B\in\mathbb{K}[X]\setminus\{0\}$.
$$\exists!(P,Q)\in\mathbb{K}[X]^2,\begin{cases}A=PQ+R\\ \deg(R)<\deg(B)\end{cases}$$
On dit que Q est le <u>quotient</u> et R le <u>reste</u> de la division (euclidienne) de A par B.

Preuve: — On prouve l'existence par récurrence sur le degré de A. On fixe $B\in\mathbb{K}[X]\setminus\{0\}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n) : \text{“} \forall A \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } \deg(A) = n,$$
$$\exists (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2, \begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases} \text{”}$$

— Soit $A \in \mathbb{K}[X]$. On suppose $\deg(A) = 0$

Si $\deg(B) > 0$ alors on pose $Q = 0$ et $R = A$. Ainsi $\begin{cases} BQ + R = A \\ \deg(R) = 0 < \deg(B) \end{cases}$

Si $\deg(B) = 0$, alors $A = \lambda$ et $B = \mu$ avec $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{K} \setminus \{0\})^2$.

On pose $\begin{cases} Q = \mu^{-1}\lambda \\ R = 0 \end{cases}$. Alors, $\begin{cases} BQ + R = \mu\mu^{-1}\lambda = \lambda = A \\ \deg(R) = -\infty < 0 = \deg(B) \end{cases}$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}(k)$ pour tout $k \leqslant n$. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(A) = n + 1$. On pose $p = \deg(B)$

Si $p > n + 1$, on pose $\begin{cases} Q = 0 \\ R = A \end{cases}$ et on a

$$\begin{cases} BQ + R = A \\ \deg(R) = n + 1 < p = \deg(B) \end{cases}$$

Si $p \leqslant n + 1$. On pose $\begin{cases} Q = a_{n+1} b_b^{-1} X^{n+1-p} \\ R = A - BQ \end{cases}$ où $\begin{cases} a_{n+1} = \operatorname{dom}(A) \\ a_p = \operatorname{dom}(b) \end{cases}$ On a $A = BQ + R$

Or, $\begin{cases} \deg(BQ) = p + n + 1 - p = n + 1 = \deg(A) \\ \operatorname{dom}(BQ) = b_p b_p^{-1} a_{n+1} = a_{n+1} = \operatorname{dom}(A) \end{cases}$

donc $\deg(R) < \deg(A)$ donc $\deg(R) \leqslant n$

D'après $\mathscr{P}(n)$,

$$\exists (Q_1, R_1) \in \mathbb{K}[X]^2, \begin{cases} R = BQ_1 + R_1 \\ \deg(R_1) < \deg(B) \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{aligned} A &= BQ + R \\ &= BQ + BQ_1 + R_1 \\ &= B(Q + Q_1) + R_1 \end{aligned}$$

et $\deg(R_1) < \deg(B)$ donc $\mathscr{P}(n + 1)$ est vraie.

Donc, $\mathscr{P}(n)$ est vraire pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence forte. Si $A = 0$, on pose $Q = R = 0$ et on a bien $BQ + R = 0 = A$ et $\deg(R) = -\infty < \deg(B)$

— Unicité

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. On suppse que $A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2$ avec $Q_1, Q_2, R_1, R_2 \in \mathbb{K}[X]$ et $\begin{cases} \deg(R_1) < \deg(B) \\ \deg(R_2) < \deg(B) \end{cases}$

D'où,

$$B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$$

Or,

$$\deg(R_2 - R_1) \leqslant \max\big(\deg(R_2), \deg(R_1)\big) < \deg(B)$$

Or,

$$\begin{aligned} \deg\big(B(Q_1 - Q_2)\big) &= \deg(B) + \deg(Q_1 - Q_2) \\ &\geqslant \deg(B) \text{ si } Q_1 - Q_2 \neq 0 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{cases} Q_1 - Q_2 = 0 \\ R_2 - R_1 = B(Q_2 - Q_1) = 0 \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} Q_1 = Q_2 \\ R_2 = R_1 \end{cases}$$

□

Exemple:
Division euclidienne de $A = X^5 + X^3 - X^2 + 1$ par $B = X^2 + \frac{1}{2}X - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

$$\begin{array}{rr|l}
 & X^5 + X^3 - X^2 + 1 & X^2 + \frac{1}{2}X - 1 \\ \cline{3-3}
- & X^5 + \frac{1}{2}X^4 - X^3 & \boxed{X^3 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{9}{4}X - \frac{21}{8}} \\ \cline{1-2}
 & -\frac{1}{2}X^4 + 2X^3 - X^2 + 1 & \quad \text{quotient} \\
- & -\frac{1}{2}X^4 - \frac{1}{4}X^3 + \frac{1}{2}X^2 & \\ \cline{1-2}
 & \frac{9}{4}X^3 - \frac{3}{2}X^2 + 1 & \\
- & \frac{9}{4}X^3 + \frac{9}{8}X^2 - \frac{9}{4}X & \\ \cline{1-2}
 & -\frac{21}{8}X^2 + \frac{9}{4}X + 1 & \\
- & -\frac{21}{8}X^2 - \frac{21}{16}X + \frac{21}{8} & \text{reste} \\ \cline{1-2}
 & \boxed{\frac{57}{16}X - \frac{13}{8}} &
\end{array}$$

Théorème: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.

$$P(a) = 0 \iff X - a \mid P$$

Preuve: " $\Longleftarrow$ " On suppose $P = (X - A) \times Q$ avec $Q \in \mathbb{K}[/]$. On substitue a à X

$$P(a) = (a - a) \times Q(a) = 0_{\mathbb{K}} \times Q(a) = 0_{\mathbb{K}}$$

" $\Longrightarrow$ " On suppose que $P(a) = 0$. On réalise la division euclidienne de P par $X - a$:

$$\begin{cases} P = (X - a) \times Q + R \\ \deg(R) < \deg(X - a) = 1 \end{cases}$$

donc $R = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$
D'où,

$$0 = P(a) = (a - a) \times Q(a) + R(a) = \lambda$$

donc

$$P = (X - a) \times Q$$

et donc

$$X - a \mid P$$

□

Corollaire: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul de degré n. Alors, P a au plus n racines distinctes dans $\mathbb{K}$

Preuve (par récurrence sur n)*:* — C'est évident pour $n = 0$

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la proposition vraie pour les polynômes de degré n.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n + 1$
Si P n'a pas de racine alors le résultat est trivialement vrai pour P
Si P a une racine a, alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P = (X - a) \times Q$
$n + 1 = \deg(P) = 1 + \deg(Q)$ donc $\deg(Q) = n$
D'après l'hypothèse de récurrence, Q a au plus n racines distinctes
Soit b une racine de P différente de a. Alors,

$$0 = P(b) = \underbrace{(b - a)}_{\neq 0} \times Q(b)$$

donc $Q(b) = 0$

Donc P a bien au plus $n + 1$ racines. □

Définition: Soient A et B deux polynômes dont l'un au moins est non nul, $D \in \mathbb{K}[X]$. On dit que D est un PGCD de A et B si D est un diviseur commun de A et B et de degré maximal.

Proposition: Avec les hypothèse précédents, deux PGCD quelconques de A et B sont nécessairement associés

Preuve:
On forme

$$E = \left\{ AU + BV \mid (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2 \right\}$$

— E est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$
— $\forall P \in E, \forall Q \in \mathbb{K}[X], PQ \in E$

On dit que E est un *idéal* de $\mathbb{K}[X]$

Soit $D \in E$ un polynôme non nul de degré minimal. Soit $P \in E$ On divise P par D :

$$\begin{cases} P = DQ + R \\ \deg(R) < \deg(D) \end{cases}$$

D'où

$$R = \underbrace{P}_{\in E} - \underbrace{DQ}_{\in E} \in E$$

$\deg(R) < \deg(D)$ donc $R = 0$
Donc,

$$\forall P \in E, D \mid P$$

$A \in E$ donc $D \mid A$
$B \in E$ donc $D \mid B$

Soit Δ un diviseur commun quelconque de A et B. On pose $D = AU + BV$
$\left.\begin{array}{l}\Delta \mid A\\ \Delta \mid B\end{array}\right\}$ donc $\Delta \mid AU + BV$ donc $\Delta \mid D$
donc $\deg(\Delta) \leqslant \deg(D)$

Ainsi, D est un PGCD de A et B. De plus, Δ est un PGCD de A et B alors

$$\begin{cases}\Delta \mid D\\ \deg(\Delta) = \deg(D)\end{cases}$$

Donc $D = \Delta Q$ avec $\begin{cases}Q \in \mathbb{K}[X]\\ \deg(Q) = 0\end{cases}$
donc D et Δ sont associés. □

Remarque:
Dans la preuve précédente, on a aussi montré les deux propositions suivantes.

Théorème (Théorème de Bézout)**:** Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A \neq 0$ ou $B \neq 0$
Soit D un PGCD de A et B. Alors

$$\exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2, AU + BV = D$$

■

Proposition: Avec les hypothèses précédents,

$$\forall \Delta \in \mathbb{K}[X],$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta \mid A\\ \Delta \mid B\end{array}\right\} \iff \Delta \mid D$$

■

Définition: On dit qu'un polynôme est unitaire si sont coefficient dominant vaut 1.

Proposition – Définition: Soient A et B deux polynômes dont l'un au moins est non nul. Parmi tous les PGCD de A et B, un seul est unitaire. On le note $A \wedge B$.

Preuve:

Soit D un PGCD de A et B. Alors $\mathrm{dom}(D)^{-1}D$ est associé à D, donc c'est un PGCD de A et B et il est unitaire. Soient D et Δ deux PGCD unitaires de A et B. Ils sont associés

$$\Delta = \lambda D \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

D'où,

$$1 = \mathrm{dom}(\Delta) = \lambda \, \mathrm{dom}(D) = \lambda$$

Donc $\Delta = D$ $\square$

Proposition: Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Soit R le reste de la division de A par B. Alors,

$$A \wedge B = B \wedge R$$

Preuve (idem que dans $\mathbb{Z}$)*:* $\square$

Exemple:
$D = (5X^2 + 3X - 1) \wedge (X + 3)$

$$\begin{array}{rr|l}
 & X^2+3X-1 & X+3 \\ \cline{3-3}
- & 5X^2+15X & 5X-12 \\ \cline{2-2}
 & -12X-1 & \\
- & -12X-36 & \\ \cline{2-2}
 & 35 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr|l}
 & X+3 & 35 \\ \cline{3-3}
- & X & \frac{1}{35}X+\frac{3}{35} \\ \cline{2-2}
 & 3 & \\
- & 3 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

$$D = (X+3) \wedge 35 = 1$$

Théorème (Théorème de Gauss)**:** Soient A, B, C trois polynômes non nuls tels que
$\begin{cases} A \mid BC \\ A \wedge B = 1 \end{cases}$
Alors, $A \mid C$

Preuve (idem que dans $\mathbb{Z}$)*:* $\square$

Corollaire: Avec les notations précédentses,

$$\left.\begin{array}{l} A \mid B \\ B \mid C \\ A \wedge B = 1 \end{array}\right\} \implies AB \mid C$$

Proposition: Soient A et B deux polynômes non nuls et D un PGCD de A et B. Soit $x \in \mathbb{K}$.

$$A(x) = B(x) = 0 \iff D(X) = 0$$

Preuve: " $\implies$ " On suppose $A(x) = B(x) = 0$

D'après le théorème de Bézout,

$$D = AU + BV \text{ avec } (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$$

Donc,

$$D(x) = A(x)U(x) + B(x)V(x) = 0 + 0 = 0$$

" $\impliedby$ " On suppose $D(x) = 0$. On pose $\begin{cases} A = DA_1 \\ B = DB_1 \end{cases}$ avec $(A_1, B_1) \in \mathbb{K}[X]^2$

D'où,

$$\begin{cases} A(x) = D(x)A_1(x) = 0 \\ B(x) = D(x)B_1(x) = 0 \end{cases}$$

□

Définition: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

On dit que P n'est pas irréductible si il existe $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ non constants tels que $P = QR$ **ou** si P est constant.

Sinon, on dit que P est irréductible.

Exemple:

1. $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$

   On suppose que
   $$X^2 + 1 = QR \text{ avec } (Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$$
   $$\begin{cases} \deg(Q) > 0 \\ \deg(R) > 0 \end{cases}$$
   Donc, P et Q sont de degré 1, donc ont chacun une racine réelle donc $X^2 + 1$ a au moins une racine réelle : ↯ une contradiction.
2. $X^2 + 1$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}[X]$:
   $$X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$$
3. $X^4 + 1$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ et pourtant il n'a aucune racine réelle.
   $$\begin{aligned} X^2 + 1 &= X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^2 \\ &= \left(X^2 + 1\right)^2 - 2X^2 \\ &= \underbrace{\left(X^2 + 1 - \sqrt{2}X\right)}_{\in \mathbb{R}[X]} \underbrace{\left(X^2 + 1 + \sqrt{2}X\right)}_{\in \mathbb{R}[X]} \end{aligned}$$

Théorème (Théorème de D'alembert - Gauss)**:**

$$\forall P \in \mathbb{C}[X] \text{ non constant}, \exists a \in \mathbb{C}, P(a) = 0$$

□

Corollaire: Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactemenent les polynômes de degré 1.

Preuve:
Les polynômes de degré 1 sont évidemment irréductibles.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) \geqslant 2$. Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P.
Donc $X - a \mid P$.

$$\begin{cases} P = (X-a) \times Q \\ Q \in \mathbb{C}[X] \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} \deg(Q) \geqslant 1 \\ \deg(X-a) = 1 \end{array}\right\}$ donc P n'est pas irréductible. $\square$

Exemple:
Factoriser $X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}$
Les racines complexes de X^4+1 sont $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$
Donc,

$$\begin{aligned} X^4 - 1 = & \left(X - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ & \times \left(X + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

Définition: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, $\mu \in \mathbb{N}$.
On dit que a est une racine de P de multiplicité μ si

$$\begin{cases} (X-a)^{\mu} \mid P \\ (X-a)^{\mu+1} \nmid P \end{cases}$$

Si $\mu = 1$, on dit que a est une racine simple.
Si $\mu = 2$, on dit que a est une racine double.

Remarque:
a est une racine de multiplicité 0 si et seulement si $P(a) \neq 0$

Lemme: Soient $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ non nuls. On suppose que A divise B dans $\mathbb{C}[X]$
Alors, A divise B dans $\mathbb{R}[X]$

Preuve:
On suppose que

$$(*) \qquad B = AQ \text{ avec } Q \in \mathbb{C}[X]$$

On divise B par A dans $\mathbb{R}[X]$:

$$(**) \qquad B = AQ_1 + R_1 \text{ avec} \begin{cases} (Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}[X]^2 \\ \deg(R_1) < \deg(A) \end{cases}$$

Comme $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$, $(**)$ est aussi le résultat de la division euclidienne de B par A

dans $\mathbb{C}[X]$.
$(*)$ correspond aussi à une division euclidienne dans $\mathbb{C}[X]$
Par unicité, $\begin{cases} Q = Q_1 \in \mathbb{R}[X] \\ R_1 = 0 \end{cases}$
Donc A divise B dans $\mathbb{R}[X]$ $\square$

Proposition: Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{N}$.
Si a est une racine de P de multiplicité μ alors $\overline{a}$ est une racine de P de multiplicité μ.

Preuve (par récurrence sur μ)*:*
On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n) : \text{“}\forall P \in \mathbb{R}[X] \text{ et } a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ racine de } P \text{ de multiplicité } \mu, \\ \text{alors } \overline{a} \text{ est aussi une racine de } P \text{ de multiplicité } \mu\text{”}$$

— Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que $P(a) \neq 0$.
On pose $P = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i X^i$ avec $\alpha_0, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P(\overline{a}) &= \sum_{i=0}^{p} \alpha_i \overline{a}^i \\ &= \sum_{i=0}^{p} \overline{\alpha_i} \overline{a^i} \\ &= \sum_{i=0}^{p} \overline{\alpha_i a^i} \\ &= \overline{\left(\sum_{i=0}^{p} \alpha_i a^i \right)} \\ &= \overline{P(a)} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie
— Soit $\mu \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}(\mu)$ vraie.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ une racine de P de multiplicité $\mu + 1$. On pose

$$\begin{cases} P = (X-a)^{\mu+1} Q \\ Q \in \mathbb{C}[X] \\ Q(a) \neq 0 \end{cases}$$

On pose aussi $P = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i a^i$ avec $\alpha_0, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$
$\mu + 1 \geqslant 1$ donc $P(a) = 0$. D'où, $P(\overline{a}) = \overline{P(a)} = \overline{0} = 0$
donc $\underbrace{(\overline{a} - a)^{\mu+1}}_{\neq 0} Q(\overline{a}) = 0$
Donc, $Q = (X - \overline{a}) Q_1$ avec $Q_1 \in \mathbb{C}[X]$
D'où

$$\begin{aligned} P &= (X-a)^{\mu+1}(X-\overline{a}) Q_1 \\ &= (X-a)(X-\overline{a})(X-a)^{\mu} Q_1 \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}(X-a)(X-\overline{a}) &= X^2-(a+\overline{a})X+a\overline{a} \\ &= X^2-2\mathfrak{Re}(a)X=|a|^2\in\mathbb{R}[X]\end{aligned}$$

D'après le lemme précédent, $(X-a)^\mu Q_1 \in \mathbb{R}[X]$
De plus,

$$0\neq Q(a)=(\overline{a}-a)Q_1(a)$$

docn $Q_1(a)\neq 0$
Donc a est une racine de $(X-a)^\mu Q_1\in\mathbb{R}[X]$ de multiplicité μ.
D'après $\mathscr{P}(\mu)$, $\overline{a}$ est aussi une racine de $(X-a)^\mu Q_1$ de multiplicité μ.
Donc, on peut écrire

$$(X-a)^\mu Q_1=(X-\overline{a})^\mu Q_2 \text{ avec } \begin{cases}Q_2\in\mathbb{C}[X]\\ Q_2(\overline{a})\neq 0\end{cases}$$

Donc,

$$P=(X-a)(X-\overline{a})^{\mu+1}Q_2$$

Donc $\overline{a}$ est une racine de P de multiplicité $\mu+1$

□

Corollaire: Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatifs.

Preuve: — Les polynômes de de degré 1 sont évidemment irréductibles
- Les polynômes constants ne sont pas irréductibles par définition
- Les polynômes de degré 2 ayant au moins une racine réelle peuvent s'écrire comme produit de deux polynômes réels de degré 1 à coefficients réels
- Réciproquement, si un polynôme de degré 2 n'est pas irreductible, c'est forcémet un produit de 2 polynômes de degré 1 à coefficients réels et donc ce polynôme a au moins une racine réelle
- Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P)\geqslant 3$
  On note $a_1,\dots,a_r$ les racines réelles distictes de P,

$$a_{r+1},\overline{a_{r+1}},a_{r+2},\overline{a_{r+2}},\dots,a_s,\overline{a_s}$$

les récines non réelles distictes de P. On note aussi

$$\forall k\in[\![1,s]\!]\,,\mu_k \text{ la multiplicité de } a_k$$

Donc

$$\begin{aligned}P=\,&\mathrm{dom}(P)(X-a_1)^{\mu_1}\cdots(X-a_r)^{\mu_r}(X-a_{r+1})^{\mu_{r+1}}(X-\overline{a_{r+1}})^{\mu_{r+1}}\\ &\times\cdots\times(X-a_s)^{\mu_s}(X-\overline{a_s})^{\mu_s}\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\forall k\geqslant r+1,(X-a_k)^{\mu_k}(X-\overline{a_k})^{\mu_k} &= ((x-a)(x-\overline{a}))^{\mu_k}\\ &=(X^2-2\mathfrak{Re}(a)X+|a|^2\\ &\in\mathbb{R}[X]\end{aligned}$$

D'où,

$$P = \underbrace{\mathrm{dom}(P)}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{\prod_{k=1}^{r} (X - a_k)^{\mu_k}}_{\in\mathbb{R}[X]} \prod_{k=r+1}^{s} \underbrace{\left(X^2 - 2\mathfrak{Re}(a_k)X + |a_k|^2\right)^{\mu_k}}_{\in\mathbb{R}[X]}$$

$$P \text{ irréductible} \iff \left(\begin{array}{l} \text{il y a une unique racine réelle simple} \\ \text{et aucune racine non réelle} \\ \text{OU} \\ \text{il n'y a aucune racine réelle et 2 racines} \\ \text{non réelles conjuguées simples} \end{array} \right.$$

□

Théorème: Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Tout polynôme de $\mathbb{K}$ se découpe en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ et cette décomposition est unique à multiplication par une constante non nulle près. □

Proposition: Soient $A, B \in \mathbb{C}[X]$ non nuls.

$$A \mid B \iff \begin{array}{l} \forall a \in \mathbb{C}, \text{ si } a \text{ est une racine de } A \text{ de multiplicité } \mu \in \mathbb{N}, \\ \text{alors } a \text{ est racine de } B \text{ avec une multiplicité} \geqslant \mu \end{array}$$

Preuve: " $\implies$ " On suppose $A \mid B$
Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de A de multiplicité μ
Alors, $(X-a)^\mu \mid A$ donc $(X-a)^\mu \mid B$
Donc a est une racine de B de multiplicité $\geqslant \mu$
" $\impliedby$ " On décompose A et B en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$:

$$B = \mathrm{dom}(B) \prod_{a \in \mathscr{R}} (X-a)^{\nu_a}$$

où $\mathscr{R}$ est l'ensemble des racines de B ; et

$$A = \mathrm{dom}(A) \prod_{a \in \mathscr{S}} (X-a)^{\mu_a}$$

où $\mathscr{S}$ est l'ensemble des racines de A
On suppose que $\begin{cases} \mathscr{S} \subset \mathscr{R} \\ \forall a \in \mathscr{S}, \mu_a \leqslant \nu_a \end{cases}$
D'où,

$$B = \frac{\mathrm{dom}(B)}{\mathrm{dom}(A)} \underbrace{\mathrm{dom}(A) \prod_{a\in\mathscr{S}} (X-a)^{\mu_a}}_{A} \times \underbrace{\prod_{a\in\mathscr{S}} (X-a)^{\nu_a - \mu_a} \times \prod_{a \in \mathscr{R}\setminus\mathscr{S}} (X-a)^{\nu_a}}_{\in\mathbb{C}[X]}$$

Donc, $A \mid B$

□

Exercice:
Montrer que $1 + X + X^2 \mid X^{3n} - 1$
Les racines de $1 + X + X^2$ sont j et j^2

$$j^{3n} - 1 = \left(j^3\right)^n - 1 = 1 - 1 = 0$$
$$\left(j^2\right)^{3n} = \left(j^3\right)^{2n} - 1 = 1 - 1 = 0$$

Proposition: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n > 0$
Alors P a exactement n racines comptées avec multiplicité.

Preuve:

$$P = \mathrm{dom}(P) \times \prod_{a \in \mathscr{R}} (X - a)^{\mu_a}$$

où $\mathscr{R}$ est l'ensemble des racines distinctes de P
$n = \deg(P) = \displaystyle\sum_{a \in \mathscr{R}} \deg\left((X-a)^{\mu_a}\right) = \sum_{a \in \mathscr{R}} \mu_a$ □

4 L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$

Remarque (Rappel):
$(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par $(1, X, X^2, \dots)$

Proposition: La famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

Preuve:
Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille presque nulle de scalairees telle que $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n X^n = 0$
$(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$: on le note P.
Or,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n X^n = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots) = P$$

Donc $P = 0$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = 0$$

□

Corollaire:

$$\dim\left(\mathbb{K}[X]\right) = +\infty$$

□

Définition: Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathbb{K}_n[X] = \left\{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) \leqslant n\right\}$$

Théorème: $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ de dimension $n+1$

Preuve:
$\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}\left(1, X, \dots, X^n\right)$ □

Proposition: Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de polynômes non nuls telle que

$$\forall i \neq j, \deg(P_i) \neq \deg(P_j)$$

Alors $(P_i)_{i\in I}$ est libre.

Preuve:
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $i_1, \dots, i_n$ des éléments distincts de I
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. On suppose

$$\lambda_1 P_{i_1} + \dots + \lambda_n P_{i_n} = 0$$

Quitte à renuméroter les polynômes, on peut supposer que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \deg\left(P_{i_n}\right) > \deg\left(P_{i_k}\right)$$

Si $\lambda_n \neq 0$,

$$\deg\left(\lambda_1 P_{i_1} + \dots + \lambda_n P_{i_n}\right) = \deg\left(P_{i_n}\right) \neq -\infty$$

Donc $\lambda_n = 0$
Donc $\lambda_1 P_{i_1} + \dots + \lambda_{n-1} P_{i_{n-1}} = 0$

On conclut par récurrence sur n. □

Théorème (Formule de Taylor)**:** Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

Preuve:
$\left(1, X-a, \dots, (X-a)^n\right)$ est libre.
Comme $\dim\left(\mathbb{K}_n[X]\right) = n+1$, c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
Donc, il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X-a)^k$$

On remarque que

$$P(a) = \lambda_0$$

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,, P^{(i)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \underbrace{\left((X-a)^k\right)^{(i)}(a)}_{= \begin{cases} 0 & \text{si } k < i \\ i! & \text{si } k = i \\ \frac{k!}{(k-i)!}(X-a)^{k+1} & \text{si } k > i \end{cases}}$$
$$= \lambda_i i!$$

Donc $\lambda_i = \dfrac{P^{(i)}(a)}{i!}$ □

Proposition: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.

$$\left.\begin{array}{r} a \text{ est une racine de } P \\ \text{de multiplicité } \mu \end{array}\right\} \iff \begin{cases} \forall k \leqslant \mu - 1, P^{(k)}(a) = 0 \\ P^{(\mu)}(a) \neq 0 \end{cases}$$

Preuve:
On pose $n = \deg(P)$

" $\Longleftarrow$ "

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$
$$= \sum_{k=\mu}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$
$$= (X-a)^\mu \underbrace{\sum_{k=\mu}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^{k-\mu}}_{Q \in \mathbb{K}[X]}$$

Donc $\begin{cases} (X-a)^\mu \mid P \\ Q(a) = \dfrac{P^{(\mu)}(a)}{\mu!} \neq 0 \end{cases}$

" $\Longrightarrow$ "

$\begin{cases} P = (X-a)^\mu Q \\ Q(a) \neq 0 \end{cases}$

$$\forall k \leqslant \mu - 1, P^{(k)}(a) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left((X-a)^\mu\right)^{(j)}(a) Q^{(k-j)}(a)$$
$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\mu!}{(\mu-j)!} \underbrace{(a-a)^{\mu-j}}_{=0} Q^{(k-j)}(a)$$
$$= 0$$

$$\begin{aligned} P^{(\mu)}(a) &= \binom{\mu}{\mu} \times \mu! \times 1 \times Q^{(0)}(a) \\ &= Q(a) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

□

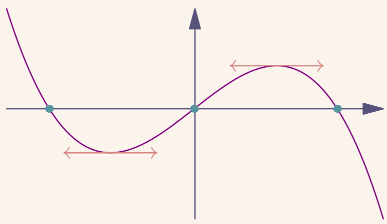
Corollaire: Avec les notations précédentes, si a est une racine de P de multiplicité μ, alors a est une racine de P' de multiplicité $\mu - 1$

□

Définition: On dit qu'un polynôme P est <u>scindé</u> sur $\mathbb{K}$ si P est un produit de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré 1, i.e. toutes les racines de P sont dans $\mathbb{K}$

Exercice:
1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples avec $\deg(P) \geqslant 2$. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simple.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé avec $\deg(P) \geqslant 2$. Montrer que P' est scindé.

Solution

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg(P) = n$ scindé sur $\mathbb{R}$.
On note $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ les n racines de P
Soit $f_P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale. Aussi, f_P est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
D'après le théorème de Rolle,
$$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \exists y_i \in]x_i, x_{i+1}[, f_P'(y_i) = 0$$

Donc $y_1, \ldots, y_{n-1}$ sont racines de P'.
De plus,
$$y_1 < x_2 < y_2 < x_3 < y_3 < \cdots < y_{n-1}$$
On a donc trouvé $n-1$ racines distinctes de P'. Or, $\deg(P') = n - 1$.
Donc, on a trouvé TOUTES les racines complexes de P'. Donc P' est sciendé à racines simples.

2. On note $x_1 < \cdots < x_p$ les racines de P et $n = \deg(P)$. On note pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, μ_i la multiplicité de x_i. Donc,
$$\sum_{i=1}^{p} \mu_i = n$$
D'après le théorème de Rolle,
$$\forall i \in [\![1, p-1]\!], \exists y_i \in]x_i, x_{i+1}[, P'(y_i) = 0$$
On a trouvé $p-1$ racines réelles de P'. $\forall i \in [\![1, p]\!], x_i$ est une racine de P' de multiplicité $\mu - 1$.
Ce qui fait, $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} (\mu_i - 1) = n - p$ racines réelles de P' comptées avec multiplicité.
En tout, on a trouvé $n-1$ racines réelles de P' comptées avec multiplicité.
Comme $\deg(P') = n - 1$, P' n'a pas d'autres racines donc P' est scindé.

Exercice (Problème):
Soient $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que
$$\forall i \neq j, x_i \neq x_j$$

Soient $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. On cherche $P \in \mathbb{K}[X]$ de <u>degré minimal</u> tel que

$$(*) \quad \forall i \in [\![1, n]\!], P(x_i) = y_i$$

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ P & \longmapsto & \big(P(x_1), \dots, P(x_n)\big) \end{array}$

$$(*) \iff \varphi(P) = (y_1, \dots, y_n)$$

On cherche, parmi tous les antécédants de $(y_1, \dots, y_n)$ celui de plus bas degré.
φ est linéaire :

$$\begin{aligned}
&\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \\
&\qquad \varphi(\alpha P + \beta Q) = \big(\alpha P(x_1) + \beta Q(x_1), \dots, \alpha P(x_n) + \beta Q(x_n)\big) \\
&\qquad\qquad = \big(\alpha P(x_1), \dots, \alpha P(x_n)\big) + \big(\beta Q(x_1), \dots, \beta Q(x_n)\big) \\
&\qquad\qquad = \alpha\varphi(P) + \beta\varphi(Q)
\end{aligned}$$

- Donc φ est un morphisme de groues additifs.
- $(y_1, \dots, y_n) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} y_i e_i$ où $(e_1, \dots, e_n)$ est la bade canonique de $\mathbb{K}^n$

Si on trouve $L_1, \dots, L_n \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\varphi(L_1) = e_1, \ \dots \ \varphi(L_n) = e_n$, alors

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} y_i L_i\right) &= \sum_{i=0}^{n} y_i \varphi(L_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \\
&= (y_1, \dots, y_n)
\end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}
P \in \operatorname{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(P) = (0, \dots, 0) \\
&\iff \forall i \in [\![1, n]\!], P(x_i) = 0 \\
&\iff \exists Q \in \mathbb{K}[X], P = (X - x_1) \cdots (X - x_n) Q
\end{aligned}$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $L_i \in \mathbb{K}[X]$.

$$\begin{aligned}
\varphi(L_i) = e_i &\iff \big(L_i(x_1), L_i(x_2), \dots, L_i(x_n)\big) = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots, 0) \\
&\iff \begin{cases} L_i(x_i) = 1 \\ \forall j \neq i, L_i(x_j) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \exists Q \in \mathbb{K}[X], L_i = \displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (X - x_j) Q \\ 1 = \displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (x_i - x_j) Q(x_i) \end{cases} \\
&\impliedby L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}
\end{aligned}$$

D'où,

$$\varphi(P) = (y_1, \dots, y_n) \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X], P = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i L_i}_{\substack{\text{solution particulière} \\ \deg(\cdot) \leqslant n-1}} + \underbrace{\prod_{k=1}^{n} (X - x_k) Q}_{\substack{\text{solutions de l'équation} \\ \text{homogène associée} \\ \deg(\cdot) \geqslant n}}$$

Le polynôme de plus bas degré solution du problème d'interpolation est

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{j\neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

Définition: Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ avec

$$\forall i \neq j, x_i \neq x_j$$

On pose

$$\forall i \in [\![1, n]\!], L_i = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

L_i est le i-ème polynôme interpolateur de Lagrange associé à $(x_1, \dots, x_n)$:

$$\forall j \in [\![1, n]\!], L_i(x_j) = \delta_{i,j}$$

Proposition: Avec les notations précédentes, $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Preuve:
- $\forall i \in [\![1, n]\!], \deg(L_i) = n - 1$
- Soit $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. On pose

$$\forall i \in [\![1, n]\!], y_i = P(x_i)$$

On pose $Q = \sum_{i=1}^{n-1} y_i L_i$. Q est le seul polynôme de degré $\leqslant n-1$ tel que $Q(x_i) = y_i$ pour tout i.
Donc, $P = Q \in \mathrm{Vect}(l_1, \dots, L_n)$. Donc $(L_1, \dots, L_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. Or, $\dim\big(\mathbb{K}_{n-1}[X]\big) = n$. Donc $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$

$\square$

Exemple:
$\mathbb{K} = {}^{\mathbb{Z}}/_{5\mathbb{Z}}$ et $n = 3$

$x_1 = \overline{2}$
$x_2 = \overline{0}$
$x_3 = \overline{-1}$

$y_1 = \overline{1}$
$y_2 = \overline{1}$
$y_3 = \overline{2}$

Le seul polynôme de degré $\leqslant 2$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1, 2]\!]$ est $\sum_{i=1}^{3} y_i \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant 3 \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$

$$\begin{aligned}
L_1 &= (x_1 - x_2)^{-1}(x_1 - x_3)^{-1}(X - x_2)(X - x_3) \\
&= \overline{3} \times \overline{2} \times X\left(X + \overline{1}\right) = X\left(X + \overline{1}\right) = X^2 + X
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_2 &= (x_2 - x_1)^{-1}(x_2 - x_3)^{-1}(X - x_1)(X - x_3) \\
&= \overline{2} \times \overline{1}\left(X - \overline{2}\right) \times \left(X - \overline{1}\right) \\
&= \overline{2}X^2 + \overline{3}X + \overline{1}
\end{aligned}$$

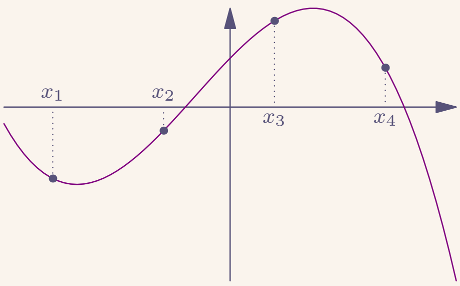
$$\begin{aligned}
L_3 &= (x_3 - x_1)^{-1}(x_3 - x_2)^{-1}(X - x_1)(X - x_2) \\
&= \overline{3} \times \overline{4} \times \left(X - \overline{2}\right) \times X \\
&= \overline{2}X\left(X - \overline{2}\right) \\
&= \overline{2}X^2 + X
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
P &= X^2 + X + \overline{2}X + \overline{3}X + \overline{1} + \overline{4}X^2 + \overline{2} \\
&= \overline{2}X^2 + X + \overline{1}
\end{aligned}$$

Vérification :

$$\begin{aligned}
P\left(\overline{2}\right) &= \overline{3} + \overline{2} + \overline{1} = \overline{1} = y_1 \\
P\left(\overline{0}\right) &= \overline{1} = y_2 \\
P\left(\overline{-1}\right) &= \overline{2} - \overline{1} + \overline{1} = \overline{2} = y_3
\end{aligned}$$



CHAPITRE

19

APPLICATIONS LINÉAIRES

1 Premières propriétés

Définition: Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$. On dit que f est linéaire si

$$\forall (x,y) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Exemple: 1. $E = \mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \int_a^b f(t)\, dt \end{aligned}$$

φ est linéaire

2. $E = \mathscr{D}(I, \mathbb{C})$ et $F = \mathbb{C}^I$

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

φ est linéaire

3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax \end{array}$ est linéaire.

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha a x + \beta a y = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

4. $E = \mathscr{C}^1(I, \mathbb{C})$ et $F = \mathscr{C}^0(I, \mathbb{C})$. $a \in F$

$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ y & \longmapsto & y' + ay \end{array}$ est linéaire

$$y' + a(x)y = b(x) \iff \varphi(y) = b$$

5. $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}} = F$

$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ (u_n) & \longmapsto & (u_{n+2} - u_{n+1} - u_n) \end{array}$

$$\forall n, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \iff \varphi(u) = 0$$

6. $E = \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $F = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

$AX = B \iff \varphi(X) = B$

Définition: On dit qu'un problème est <u>linéaire</u> s'il se présente sous la forme :

Résoudre $\varphi(x) = y$

où l'inconnue est $x \in E$, y est un paramètre de F avec $\varphi : E \to F$ linéaire.

Exemple:
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) - f(x-1) = \lambda$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est fixé.
On pose $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto \varphi(f) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x+1) - f(x-1) \end{array} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \lambda \end{aligned}$$

Le problème est équivalent à

$$\begin{cases} \varphi(f) = y \\ f \in E \end{cases}$$

Soient $f, g \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda f + \mu g)(x) &= (\lambda f + \mu g)(x+1) - (\lambda f + \mu g)(x-1) \\ &= \lambda f(x+1) - \mu g(x+1) - \lambda f(x-1) - \mu g(x-1) \\ &= \lambda\big(f(x+1) - f(x-1)\big) + \mu\big(g(x+1) - g(x-1)\big) \\ &= \lambda\varphi(f)(x) + \mu\varphi(g)(x) \end{aligned}$$

Donc, $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$

Remarque (Notation):
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
L'ensemble des applications linéaires de E dans F est $\mathscr{L}(E, F)$.
Si $F = E$, alors on note plus simplement $\mathscr{L}(E)$ à la place de $\mathscr{L}(E, E)$.
Les éléments de $\mathscr{L}(E)$ sont appelés <u>endomorphismes (linéaires)</u> de E.

Proposition: Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $g \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E, G)$.

Preuve:

Soient $u, v \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\alpha u + \beta v) &= g\big(f(\alpha u + \beta v)\big) \\ &= g\big(\alpha f(u) + \beta f(v)\big) \\ &= \alpha g\big(f(u)\big) + \beta g\big(f(v)\big) \\ &= \alpha (g \circ f)(u) + \beta (g \circ f)(v)\end{aligned}$$

□

Proposition: $\mathscr{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E.

Preuve:
Soient $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda f + \mu g \in \mathscr{L}(E, F)$.
Soient $u, v \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)(\alpha u + \mu v) &= \lambda f(\alpha u + \beta v) + \mu g(\alpha u + \beta v) \\ &= \lambda\big(\alpha f(u) + \beta f(v)\big) + \mu\big(\alpha g(u) + \beta g(v)\big) \\ &= \alpha\big(\lambda f(u) + \mu g(u)\big) + \beta\big(\lambda f(v) + \mu g(v)\big) \\ &= \alpha\big((\lambda f + \mu g)(u)\big) + \beta\big((\lambda f + \mu g)(v)\big)\end{aligned}$$

De plus, $\tilde{0} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}$ est linéaire donc $\mathscr{L}(E, F) \neq \varnothing$. □

Proposition: $\big(\mathscr{L}(E), +, \circ, \cdot\big)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre (non commutative en général).

Preuve: — $\big(\mathscr{L}(E), +, \cdot\big)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel d'après la proposition précédente.

— $\big(\mathscr{L}(E), +\big)$ est un groupe abélien.
"$\circ$" est associative et interne sur $\mathscr{L}(E)$.
$\mathrm{id}_E \in \mathscr{L}(E)$.
Soient $f, g, h \in \mathscr{L}(E)$.

$$\begin{aligned}\forall x \in E, f \circ (g + h)(x) &= f\big((g + h)(x)\big) \\ &= f\big(g(x) + h(x)\big) \\ &= f\big(g(x)\big) + f\big(h(x)\big) \text{ car } f \text{ est linéaire} \\ &= (f \circ g + f \circ h)(x)\end{aligned}$$

Donc,

$$f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$$

$$\begin{aligned}\forall x \in E, (g + h) \circ f(x) &= (g + h)\big(f(x)\big) \\ &= g\big(f(x)\big) + h\big(f(x)\big) \\ &= (g \circ f + h \circ f)(x)\end{aligned}$$

Donc,

$$(g+h)\circ f = g\circ f + h\circ f$$

Donc, $\big(\mathscr{L}(E), +, \circ\big)$ est un anneau

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $f, g \in \mathscr{L}(E)$.

$$\begin{aligned}\forall x \in E, \lambda\cdot(f\circ g)(x) &= \lambda f\big(g(x)\big)\\ (\lambda\cdot f)\circ g(x) &= \lambda f\big(g(x)\big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f\circ(\lambda\cdot g)(x) &= f\big(\lambda g(x)\big)\\ &= \lambda f\big(g(x)\big) \text{ car } f \in \mathscr{L}(E)\end{aligned}$$

□

Corollaire: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. On peut former $P(u) \in \mathscr{L}(X)$: on dit que $P(u)$ est un polynôme d'endomorphisme.

Proposition: Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ bijective. Alors $f^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$.

Preuve:
Soit $u, v \in F$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}&f^{-1}(\alpha u + \beta v) = \alpha f^{-1}(u) + \beta f^{-1}(v)\\ \iff &\alpha u + \beta v = f\big(\alpha f^{-1}(u) + \beta f^{-1}(v)\big)\\ \iff &\alpha u + \beta v = \alpha f\left(f^{-1}(u)\right) + \beta f\left(f^{-1}(v)\right)\\ \iff &\alpha u + \beta v = \alpha u + \beta v\end{aligned}$$

Donc, $f^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$ □

Remarque (Notation):
On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E bijectifs, $\mathrm{GL}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F bijectives.
Les éléments de $\mathrm{GL}(E)$ sont appelés <u>automorphismes (linéaires)</u> de E.

Corollaire: $\mathrm{GL}(E)$ est un sous-groupe de $\big(S(E), \circ\big)$

Définition: $\mathrm{GL}(E)$ est dit " le <u>groupe linéaire</u> de E".

2 Noyau et image

Proposition: Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, U un sous-espace vectoriel de E et V un sous-espace vectoriel de F.

1. $f(U)$ est un sous-espace vectoriel de F.
2. $f^{-1}(V)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve: 1. $0_F = f(0_E)$ et $0_E \in U$ donc $0_F \in f(U)$ donc $f(U) \neq \varnothing$

Soient $(x,y) \in f(U)^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Soient $a,b \in U$ tels que $\begin{cases} x = f(a) \\ y = f(b) \end{cases}$.

$$\lambda x + \mu y = \lambda f(a) + \mu f(b) = f(\lambda a + \mu b) \text{ car } f \in \mathscr{L}(E,F)$$

U est un sous-espace vectoriel de E.
Donc $\lambda a + \mu v \in U$
donc $f(\lambda u + \mu v) \in f(U)$
donc $\lambda x + \mu y \in f(U)$.

2. $f(0_E) = 0_F \in V$ donc $0_E \in f^{-1}(V)$. Donc $f^{-1}(V) \neq \varnothing$.
Soient $x,y \in f^{-1}(V)$, $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$.

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda \underbrace{f(x)}_{\in V} + \mu \underbrace{f(y)}_{\in V} \in V$$

donc $\lambda x + \mu y \in f^{-1}(V)$.

□

Corollaire: Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
1. $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}\big(\{0_F\}\big) = \{x \in E \mid f(x) = 0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{f(u) \mid u \in E\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

□

Remarque (Rappel):
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$

$$f \text{ injective} \iff \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$$
$$f \text{ surjective} \iff \mathrm{Im}(f) = F$$

Exemple: 1. Soit I un intervalle, $E = \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}^I$

$$\varphi : E \longrightarrow F$$
$$f \longmapsto f'$$

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \big\{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ constante } \big\}$$
$$\mathrm{Im}(\varphi) \supset \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$$

2. $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \mathbb{R}$, $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ P & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 P(t)\, dt \end{array}$

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\varphi) &= \left\{ P = a + bX + cX^2 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \int_0^1 P(t)\, dt = 0 \right\} \\ &= \left\{ a + bX + cX^2 \mid a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 0 \right\} \\ &= \left\{ a + bX + cX^2 \mid a = -\frac{b}{2} - \frac{c}{3} \right\} \\ &= \left\{ -\frac{b}{2} - \frac{c}{3} + bX + cX^2 \mid b,c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b\left(-\frac{1}{2} + X\right) + c\left(-\frac{1}{3} + X^2\right) \mid b,c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(-\frac{1}{2} + X, -\frac{1}{3} + X^2\right) \end{aligned}$$

$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$.

3 Théorème du rang

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Proposition: Soit $f : E \to F$ un isomorphisme (i.e. une application linéaire bijective). Alors, $\dim(E) = \dim(F)$

Preuve:
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On pose

$$\forall i \in [\![1, n]\!], u_i = f(e_i) \in F$$

— Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. On suppose que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i u_i = 0_F$. D'où,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) \text{ donc } f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) &= 0_F \\ \text{donc } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i &\in \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\} \\ \text{donc } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i &= 0_E \\ \text{donc } \forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i &= 0\end{aligned}$$

Donc $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.
Soit $y \in F$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Comme $\mathscr{B}$ engendre E, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Comme f est linéaire,

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Donc, $F = \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$
Donc $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de F donc

$$\dim(E) = n = \dim(F)$$

□

La première partie de la preuve précédente justifie le résultat suivant.

Proposition: Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ injective. $\mathscr{L} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de E. Alors $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ est une famille libre de F. En particulier, $\dim(F) \geqslant \dim(E)$.
□

La deuxième partie de la preuve prouve :

Proposition: Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ surjective et $\mathscr{G} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille génératrice de E. Alors $\big(f(e_1), \dots, f(e_p)\big)$ est une famille génératrice de F. En particulier,

$$\dim(F) \leqslant \dim(E)$$

$\square$

Théorème (Théorème du rang)**:** Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\dim(E) = \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) + \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big)$$

Preuve (À connaître)*:*
On pose

$$\begin{aligned} u : U &\longrightarrow \operatorname{Im}(f) \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

où U est un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(f)$ dans E.
(U existe : voir remarque qui suit)

— $u \in \mathscr{L}\big(U, \operatorname{Im}(f)\big)$, en effet, soient $x, y \in U, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} u(\lambda x + \mu v) &= f(\lambda x + \mu v) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) \\ &= \lambda u(x) + \mu u(y) \end{aligned}$$

— Soit $y \in \operatorname{Im}(f)$. Soit $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $E = U \oplus \operatorname{Ker}(f)$. On peut écrire

$$\begin{cases} x = a + b \\ a \in U, b \in \operatorname{Ker}(f) \end{cases}$$

D'où,

$$y = f(x) = f(a + b) = f(a) + f(b) = u(a) + 0_E = u(a)$$

Donc u est surjective.
Soit $x \in U$.

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker}(u) &\iff u(x) = 0_F \\ &\iff f(x) = 0_F \\ &\iff x \in \operatorname{Ker}(f) \\ &\iff x = 0_E \text{ car } U \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\} \end{aligned}$$

Donc u est injective.
Ainsi, $\dim(U) = \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big)$
Or,

$$\begin{aligned} \dim(E) &= \dim\big(U \oplus \operatorname{Ker}(f)\big) \\ &= \dim(U) + \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) \end{aligned}$$

donc

$$\dim(U) = \dim(E) - \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big)$$

Donc,

$$\dim(E) = \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) + \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big)$$

$\square$

Remarque:
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E.

Cas1 $F = \{0_E\}$, alors E est un supplémentaire de F.

Cas2 $F \neq \{0_E\}$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. Alors $\mathscr{B}$ est une famille libre de E. On complète $\mathscr{B}$ en une base $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de E. On pose $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$. On démontre que

$$F \oplus G = E$$

Corollaire: Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\begin{aligned} f \text{ injective } &\iff f \text{ surjective} \\ &\iff f \text{ bijective} \end{aligned}$$

Preuve:
D'après le théorème du rang,

$$\dim(E) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$$

Si f est injective, alors $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$
et donc $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 0$
et donc $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim(F)$
et donc $\mathrm{Im}(f) = F$
et donc f est surjective.

Si f est surjective, alors $\mathrm{Im}(f) = F$
et donc $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim(F) = \dim(E)$
et donc $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 0$
et donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$
et donc f est injective □

Exemple:
Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\forall i \neq j, x_i \neq x_j$$

Soit $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ P & \longmapsto & \big(P(x_1), \ldots, P(x_n)\big) \end{array}$

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(P) = 0 \\ &\iff \forall i \in [\![1, n]\!], P(x_i) = 0 \\ &\iff P = 0 \text{ car } \deg(P) \leqslant n - 1 \end{aligned}$$

Donc φ est injective et donc φ est bijective.
Donc,

$$\exists! P \in \mathbb{K}_{n-1}[X], \forall i \in [\![1, n]\!], P(x_i) = y_i$$

De plus, $\varphi^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}_{n-1}[X]$ est un isomorphisme.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique d $\mathbb{K}^n$. $\big(\varphi^{-1}(e_1) \ldots, \varphi^{-1}(e_n)\big)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
$\forall i \in [\![1, n]\!], \varphi^{-1}(e_i) = L_i$ es tle i-ème polynôme interpolateur de Lagrange.

$$\begin{aligned} P &= \varphi^{-1}(y_1, \dots, y_n) \\ &= \varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i \varphi^{-1}(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i L_i \end{aligned}$$

Exercice (Interpolation de Hermite):
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ avec

$$\forall i \neq j, x_i \neq x_j$$

Soit $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{K}^n$.
Trouver un polynôme de plus bas degré tel que

$$(*) \qquad \forall i \in [\![1, n]\!], \begin{cases} P(x_i) = y_i \\ P'(x_i) = z_i \end{cases}$$

Soit $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_{2n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{2n} \\ P & \longmapsto & \big(P(x_1), \dots, P(x_n), P'(x_1), \dots, P'(x_n)\big) \end{array}$

$$(*) \iff \varphi(P) = (y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n)$$

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker}(\varphi) &\iff \forall i, \begin{cases} P(x_i) = 0 \\ P'(x_i) = 0 \end{cases} \\ &\iff P = 0 \text{ car } \deg(P) \leqslant 2n - 1 \end{aligned}$$

Donc φ est un isomorphisme.

Corollaire: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ avec E de dimension finie. Alors,

$$f \in \operatorname{GL}(E) \iff f \text{ injective } \iff f \text{ surjective}$$

□

Remarque:
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors

$$\boxed{\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)}$$

$\dim\big(\operatorname{Im}(f)\big) = \operatorname{rg}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$

Définition: Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Le rang de f est

$$\operatorname{rg}(f) = \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big)$$

4 Formes linéaires

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble des formes linéaires est noté $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. E^* est appelé espace dual de E.

Proposition: Toute forme linéaire est soit nulle, soit surjective.

Preuve:
Soit $f \in E^*$.
$\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$ donc $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(\mathbb{K}) = 1$.
Si $\mathrm{rg}(f) = 0$, alors $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$ et donc

$$\forall x \in E, f(x) = 0$$

Si $\mathrm{rg}(f) = 1$, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}$ et donc f est surjective. $\square$

Proposition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in E^* \setminus \{0\}$. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension $n-1$.

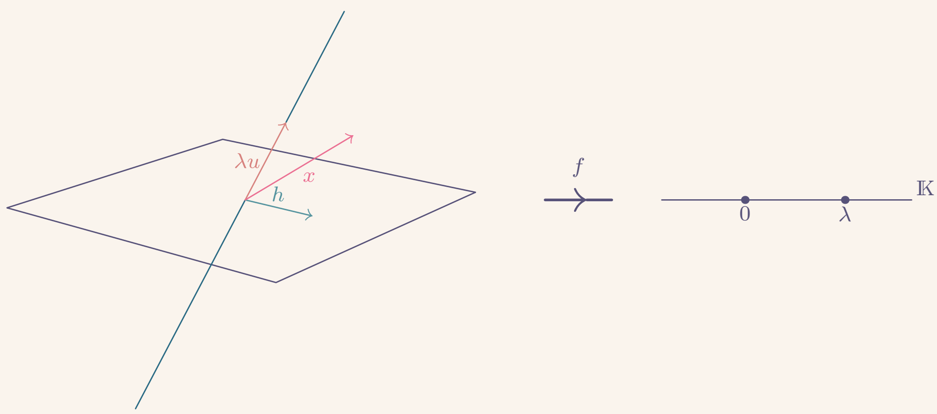
Preuve:
Comme $f \neq 0$, donc $\mathrm{rg}(f) = 1$
D'après le théorème du rang,

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f) = n - 1$$

$\square$

Proposition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et H un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$. Alors,

$$\exists f \in E^*, \mathrm{Ker}(f) = H$$



Preuve:
Soit D un supplémentaire de H dans E :

$$E = H \oplus D$$

Nécessairement,

$$\dim(D) = \dim(E) - \dim(H) = 1$$

Soit $u \in D \setminus \{0\}$. $D = \mathrm{Vect}(u)$

On pose $f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \begin{array}{r} x = h + \lambda u \\ (h \in H, \lambda \in \mathbb{K}) \end{array} & \longmapsto & \lambda \end{array}$

Montrons que $f \in E^*$.
Soient $(x, y) \in E^2, (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.
On pose

$$\begin{cases} x = h + \lambda u, & h \in H, \lambda \in \mathbb{K} \\ y = h' + \lambda' u, & h' \in H, \lambda' \in \mathbb{K} \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= \alpha(h + \lambda u) + \beta(h' + \lambda' u) \\ &= \underbrace{(\alpha h + \beta h')}_{\in H} + \underbrace{(\alpha\lambda + \beta\lambda')}_{\in \mathbb{K}} u \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \alpha\lambda + \beta\lambda' \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \end{aligned}$$

Soit $x \in E$. On pose $x = h + \lambda u$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f(x) = 0 \\ &\iff \lambda = 0 \\ &\iff x = y \\ &\iff x \in H \end{aligned}$$

Donc, $H = \mathrm{Ker}(f)$.

□

Exemple:
$E = \mathbb{R}^4$, $H = \mathrm{Vect}\big((1,0,0,1),(1,1,0,0),(0,1,1,0)\big)$
Soit $u = (1,2,1,1) \notin H$.
Soit $(x,y,z,t) \in E$. On cherche $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$(*) \qquad (x,y,z,t) = \alpha(1,0,0,1) + \beta(1,1,0,0) + \gamma(0,1,1,0) + \lambda(1,2,1,1)$$

Plus précisément, on cherche à exprimer λ en fonction de x, y, z, t.

$$(*) \iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = x \\ \beta + \gamma + 2\lambda = y \\ \gamma + \lambda = z \\ \alpha + \lambda = t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{\alpha} + \beta + \lambda = x \\ \beta + \gamma + 2\lambda = y \\ \boxed{\gamma} + \lambda = z \\ -\beta = t - x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{\alpha} + \beta + \lambda = x \\ \beta + \lambda = y - z \\ \boxed{\gamma} + \lambda = z \\ \beta = x - t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = y - z - x + t \\ \vdots \end{cases}$$

Donc,

$$(x, y, z, t) \in H \iff y - z - x + t = 0$$

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & x - y + z - t \end{array}$ et $H = \mathrm{Ker}(f)$

Proposition: Avec les notations précédentes,
$\{f \in E^* \mid \mathrm{Ker}(f) = H\}$ est une droite de E^* privée de l'application nulle. En d'autres termes, les équations de H sont 2 à 2 proportionelles.

Preuve:
Soient $f, g \in E^*$ telles que

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$$

On pose $H = \mathrm{Ker}(f)$. Soit $u \notin H$ de sorte que

$$H \oplus \mathrm{Vect}(u) = E$$

$u \notin H$ donc $f(u) \neq 0$.
On pose $\alpha = \dfrac{g(u)}{f(u)}$. Montrons que $g = \alpha f$.
Soit $x \in E$. On pose $x = h + \lambda u$ avec $\begin{cases} h \in H \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{cases}$

$$g(x) = g(h) + \lambda g(u) = 0 + \lambda \alpha f(u)$$

$$\|$$

$$\alpha f(x) = \alpha\big(f(h) + \lambda f(u)\big) = \lambda \alpha f(u)$$

□

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E. On dit que H est un <u>hyperplan</u> de E s'il existe une droite D de E telle que

$$H \oplus D = E$$

En reprenant les démonstrations précédentes, on a encore les résultats suivants :

Proposition: Soit H un hyperplan de E. Alors, $\{f \in E^* \mid \mathrm{Ker}(f) = H\}$ est une droite de E^* privée de l'application nulle. □

Proposition: Soit $f \in E^*$ non nulle. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un hyperplan de E.

Preuve:
f non nulle. Soit $x \in E$ tel que

$$f(x) \neq 0$$

On pose $H = \mathrm{Ker}(f)$ et $D = \mathrm{Vect}(x)$. Montrons que $H \oplus D = E$.

<u>ANALYSE</u> Soit $y \in E$. On suppose $y = h + \lambda x$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors,

$$f(y) = f(h) + \lambda f(x) = \lambda f(x) \text{ donc } \begin{cases} \lambda = f(y)f(x)^{-1} \\ h = y - f(y)f(x)^{-1}x \end{cases}$$

<u>SYNTHÈSE</u> Soit $y \in E$. On pose $\begin{cases} \lambda = f(y)f(x)^{-1} \\ h = y - \lambda x \end{cases}$.

Évidemment, $\begin{cases} h + \lambda x = y \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{cases}$

$$\begin{aligned} f(h) &= f(y - \lambda x) \\ &= f(y) - \lambda f(x) \\ &= f(y) - f(y)f(x)^{-1}f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

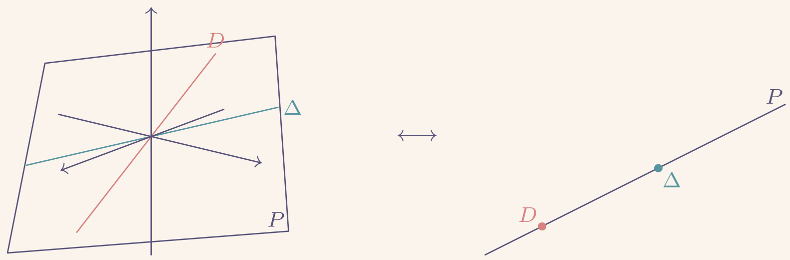
□

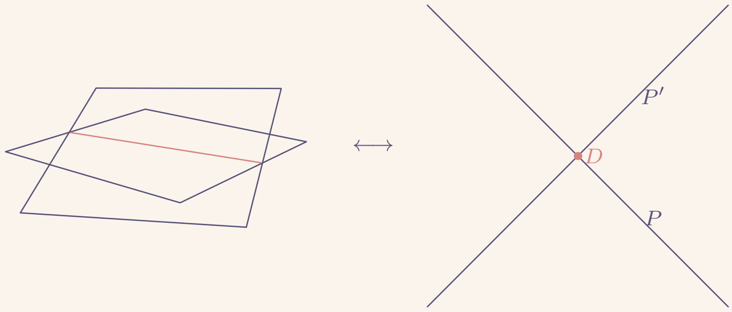
<u>HORS-PROGRAMME</u>

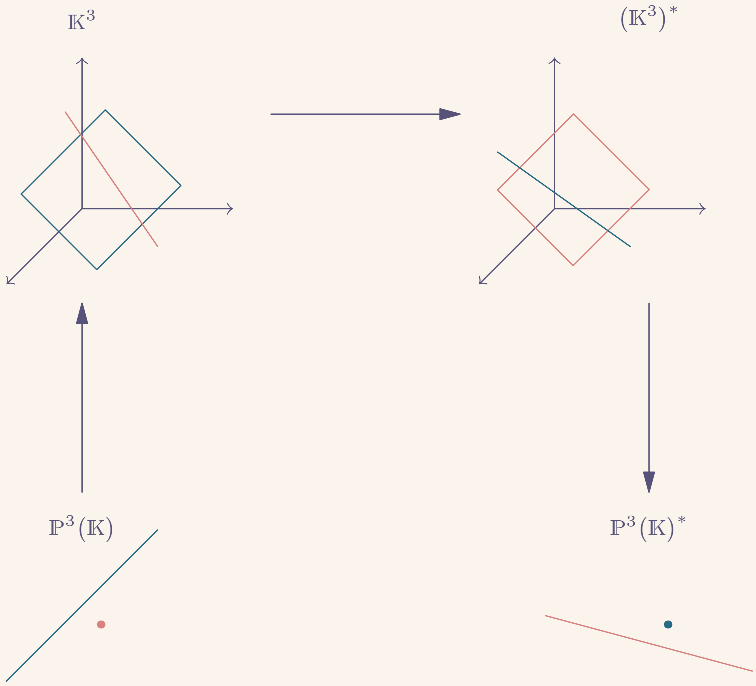
$$\mathbb{P}^3(\mathbb{K}) = \{D \setminus \{0\} \mid D \text{ droite vectorielle de } \mathbb{K}^3\}$$

Une <u>droite</u> projective de $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ est un plan vectoriel de $\mathbb{K}^3$ privé de 0.

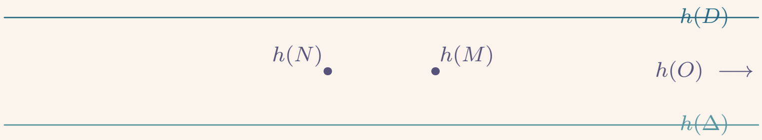
À faire : schéma A







À faire : schémas B et C



5 Projections et symétries

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces de E supplémentaires :

$$E = F \oplus G$$

Soit $x \in E$.

$$\exists!(a, b) \in F \times G, x = a + b$$

Le vecteur a est appelé projeté de x sur F parallèlement à G.
Le vecteur b est appelé projeté de x sur G parallèlement à F.
La projection sur F parallèlement à G est l'application qui à $x \in E$ associe son projeté sur F parallèlement à G.

Exemple:
$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F = \{f \in E \mid f \text{ paire}\}$ et $G = \{f \in E \mid f \text{ impaire}\}$
On a $E = F \oplus G$.
Soient p la projection sur F parallèlement à G et q la projection sur G parallèlement à F.

$$\forall x \in E, \begin{cases} p(f) : x \mapsto \dfrac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) \\ q(f) : x \mapsto \dfrac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big) \end{cases}$$

Proposition: Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires et p la projection sur F parallèlement à G.

1. $p \in \mathscr{L}(E)$
2. $p_{|F} = \mathrm{id}_F$ et $p_{|G} = 0$
3. $p \circ p = p$
4. $\mathrm{id}_E - p$ est la projection sur G parallèlement à F.

Preuve: 1. $\forall x \in E, p(x) \in F \subset E$
Soit $(x, y) \in E^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
On pose $x = a + b$ avec $\begin{cases} a \in F \\ b \in G \end{cases}$ et $y = c + d$ avec $\begin{cases} c \in F \\ d \in G \end{cases}$
donc,

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &= \lambda(a + b) + \mu(c + d) \\ &= \underbrace{(\lambda a + \mu c)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda b + \mu d)}_{\in G} \end{aligned}$$

Donc,

$$p(\lambda x + \mu y) = \lambda a + \mu b = \lambda p(x) + \mu p(y)$$

2. $\forall x \in F, x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0}_{\in G}$ donc $p(x) = x$
$\forall x \in G, x = \underbrace{0}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G}$ donc $p(x) = 0$

3. $\forall x \in E, p(x) \in F$ donc $p(p(x)) = p(x)$
4. Soit $x \in E$. On pose $x = a + b$ avec $\begin{cases} a \in F \\ b \in G \end{cases}$. Donc $p(x) = a$. D'où, $x - p(x) = b$ est le projeté de x sur G parallèlement à F.

□

Définition: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On dit que f est un projecteur si $f \circ f = f$

Proposition: Soit f un projecteur de E. Alors f est la projection sur $\operatorname{Im}(f)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(f)$. En particulier,

$$\operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f) = E$$

Preuve: ANALYSE Soit $x \in E$. On suppose que $x = a + b$ avec $\begin{cases} a \in \operatorname{Ker}(f) \\ b \in \operatorname{Im}(f) \end{cases}$. D'où,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f(b) \\ &= 0 + f(b) \\ &= f(b) \end{aligned}$$

Soit $y \in E$ tel que $b = f(y)$. Donc,

$$f(b) = f\big(f(y)\big) = f(y) = b$$

Donc, $\underline{f(x) = b}$ et donc $\underline{a = x - b = x - f(x)}$

SYNTHÈSE Soit $x \in E$. On pose $\begin{cases} a = x - f(x) \\ b = f(x) \end{cases}$. Évidemment, $\begin{cases} a + b = x \\ b \in \operatorname{Im}(f) \end{cases}$

$$\begin{aligned} f(a) &= f\big(x - f(x)\big) \\ &= f(x) - f\big(f(x)\big) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $a \in \operatorname{Ker}(f)$. On a montré

$$\operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f) = E$$

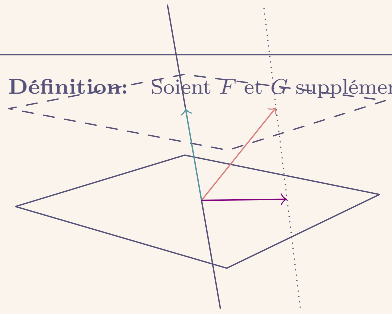
On considère la projection p sur $\operatorname{Im}(f)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(f)$.
Soit $x \in E$. On a montré que

$$x = \underbrace{f(x)}_{\in \operatorname{Im}(f)} + \underbrace{x - f(x)}_{\in \operatorname{Ker}(f)}$$

donc $p(x) = f(x)$ et donc $p = f$

□

Définition: Soient F et G supplémentaires dans E : $E = F \oplus G$



Soit $x \in E$. On décompose x :

$$x = a + b \text{ avec } \begin{cases} a \in F \\ b \in G \end{cases}$$

et on forme

$$y = a - b$$

On dit que y est le <u>symétrique de x par rapport à F parallèlement à G</u>
La <u>symétrie par rapport à F parallèlement à G</u> est l'application qui à tout $x \in E$ associe son symétrique parallèlement à G par rapport à F.

Proposition: Soient F et G supplémentaires dans E, s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

1. $s \in \mathscr{L}(E)$
2. $s_{|E} = \mathrm{id}_F$ et $s_{|G} = -\mathrm{id}_G$
3. $s \circ s = \mathrm{id}_E$

Preuve:
Soient p la projection sur F parallèlement à G et q la projection sur G parallèlement à F.
On remarque que $s = p - q$.

1. p et q sont des endomorphismes donc s aussi
2. $\forall x \in E, s(x) = p(x) - q(x) = x - 0 = x$
   $\forall x \in G, s(x) = p(x) - q(x) = 0 - x = -x$
3.

$$\begin{aligned} \forall x \in E, s\big(s(x)\big) &= s\big(p(x) - q(x)\big) \\ &= s\big(\underbrace{p(x)}_{\in F}\big) - s\big(\underbrace{q(x)}_{\in G}\big) \\ &= p(x) - \big(-q(x)\big) \\ &= x \end{aligned}$$

□

Définition: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On dit que f est <u>involutive</u> si $f \circ f = \mathrm{id}_E$.

Proposition: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ involutif. Alors f est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f -$

$\mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id}_E)$. En particulier,

$$\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id}_E)=E$$

Preuve: Analyse Soit $x\in E$. On suppose que $x=a+b$ avec $\begin{cases}a\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E)\\ b\in\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id}_E)\end{cases}$

$$\begin{aligned}a\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E)&\iff(f-\mathrm{id}_E)(a)=0\\&\iff f(a)-a=0\\&\iff a=f(a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b\in\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id}_E)&\iff f+\mathrm{id}_E)(b)=0\\&\iff f(b)+b=0\\&\iff f(b)=-b\end{aligned}$$

On sait que $x=a+b$ et $f(x)=f(a)+f(b)=a-b$
D'où,

$$\begin{aligned}a&=\frac{1}{2}\big(x+f(x)\big)\\b&=\frac{1}{2}\big(x-f(x)\big)\end{aligned}$$

Synthèse Soit $x\in E$. On pose

$$\begin{aligned}a&=\frac{1}{2}\big(x+f(x)\big)\\b&=\frac{1}{2}\big(x-f(x)\big)\end{aligned}$$

Alors $a+b=x$

$$\begin{aligned}f(a)&=f\left(\frac{1}{2}\big(x+f(x)\big)\right)\\&=\frac{1}{2}\left(f(x)+f\big(f(x)\big)\right)\\&=\frac{1}{2}\big(f(x)+x\big)\\&=a\end{aligned}$$

Donc $a\in\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E)$

$$\begin{aligned}f(b)&=f\left(\frac{1}{2}\big(x-f(x)\big)\right)\\&=\frac{1}{2}\left(f(x)-f\big(f(x)\big)\right)\\&=\frac{1}{2}\big(f(x)-x\big)\\&=-b\end{aligned}$$

donc $b\in\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id}_E)$
Ainsi,

$$\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id}_E)=E$$

Soit s la symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$.
Soit $x \in E$. On a vu que

$$x = \underbrace{\frac{1}{2}\big(x + f(x)\big)}_{\in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)} + \underbrace{\frac{1}{2}\big(x - f(x)\big)}_{\in \operatorname{Ker}(f + \mathrm{id}_E)}$$

Donc,

$$s(x) = \frac{1}{2}\big(x + f(x)\big) - \frac{1}{2}\big(x - f(x)\big) = f(x)$$

Donc $s = f$ $\square$

Exemple:
$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et

$$s : E \longrightarrow E$$
$$f \longmapsto s(f) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(-x) \end{array}$$

$s(f) = f \circ (-\mathrm{id}_{\mathbb{R}})$
$s \in \mathscr{L}(E)$, en effet :

$$\begin{aligned} &\forall f, g \in \mathscr{L}(E), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \\ &\qquad s(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g) \circ (-\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) \\ &\qquad\qquad = \alpha\big(f \circ (-\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\,) + \beta\big(g \circ (-\mathrm{id}_{\mathbb{R}})\big) \\ &\qquad\qquad = \alpha s(f) + \beta s(g) \end{aligned}$$

De plus, $s \circ s = \mathrm{id}_E$. Donc s est une symétrie.

$$\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E) = \{f \in E \mid f \text{ paire}\} = \mathscr{P}$$
$$\operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E) = \{f \in E \mid f \text{ impaire}\} = \mathscr{I}$$

D'où,

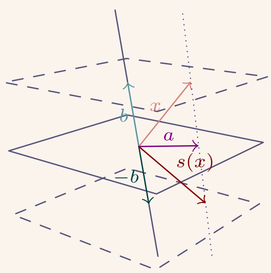
$$\mathscr{P} \oplus \mathscr{I} = E$$

Exemple:
$E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
Pour $A \in E$, on note ${}^tA$ la transposée de A la matrice obtenue en écrivant en ligne les colonnes de A.
Soit

$$s : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$
$$A \longmapsto {}^tA$$

s est linéaire, $s \circ s = \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$

$$\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E) = S_n(\mathbb{K})$$
$$\operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E) = A_n(\mathbb{K})$$



CHAPITRE

20

FRACTIONS RATIONNELLES

1 Construction de $\mathbb{K}(X)$

Proposition – Définition: On définit la relation $\sim$ sur $\mathbb{K}[X] \times \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)$ par

$$(P, Q) \sim (A, B) \iff PB = QA$$

Cette relation est une relation d'équivalence. On note $\big(\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})\big)/\sim$. Les éléments de $\mathbb{K}(X)$ sont appelés fractions rationnelles.
On note $\dfrac{P}{Q}$ la classe d'équivalence du couple (P, Q).

Preuve:
On note $E = \mathbb{K}[X]\big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)$.

- Soit $(P, Q) \in E$. $PQ = QP$ car $\times$ est commutative dans $\mathbb{K}[X]$. Donc $(P, Q) \sim (P, Q)$
- Soient $(P, Q) \in E, (A, B) \in E$. On suppose que $(P, Q) \sim (A, B)$. Donc $PB = QA$ Donc, $(A, B) \sim (P, Q)$
- Soit $\big((P, Q), (A, B), (C, D)\big) \in E^3$. On suppose

$$\begin{cases} (P, Q) \sim (A, B) \\ (A, B) \sim (C, D) \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{cases} PB = QA \\ AD = BC \end{cases}$$

Donc

$$PBD = QAD = QBC$$

donc $B(PD - QC) = 0$
Comme $B \neq 0$ et comme $\mathbb{K}[X]$ est intègre,

$$PD - QC = 0$$

et donc $(P,Q) \sim (C,D)$

$\square$

Proposition: Soient $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)$ et $R \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Alors

$$\frac{PR}{QR} = \frac{P}{Q}$$

Preuve:

$$\begin{aligned} \frac{PR}{QR} = \frac{P}{Q} &\iff (PQ, QR) \sim (P,Q) \\ &\iff PRQ = QRP \end{aligned}$$

$\square$

Définition: Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \setminus \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)$. On dit que la fraction $\dfrac{P}{Q}$ est sous forme irréductible si $P \wedge Q = 1$.

Proposition – Définition: Soient $(P,Q) \sim (A,B)$. Alors

$$\deg(P) - \deg(Q) = \deg(A) - \deg(B)$$

Le degré de $\dfrac{P}{Q}$ est $\deg(P) - \deg(Q)$. On note ce “nombre” $\deg\left(\dfrac{P}{Q}\right)$.

Preuve:
On sait que $PB = QA$ donc

$$\deg(P) + \deg(Q) = \deg(Q) + \deg(A)$$

et donc

$$\deg(P) - \deg(Q) = \deg(A) - \deg(B)$$

$\square$

Proposition – Définition: Soient $(P,Q) \sim (A,B)$ et $(R,S) \sim (C,D)$. Alors, $(PR, QS) \sim (AC, BD)$.
Le produit de $\dfrac{P}{Q}$ avec $\dfrac{R}{S}$ est $\dfrac{PR}{QS}$

Preuve:

On sait que $\begin{cases} PB = QA \\ RD = SC \end{cases}$. D'où,

$$PBRD = QASC$$

et donc

$$(PR)(BD) = (QS)(AC)$$

donc

$$(PR, QS) \sim (AC, BD)$$

□

Proposition – Définition: Avec les notations précédentes,

$$(PS + RQ, QS) \sim (AD + BC, BD)$$

On définit la somme de $\frac{P}{Q}$ et $\frac{R}{S}$ par

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{PS + RQ}{QS}$$

Preuve:
On sait que $\begin{cases} PB = QA \\ RD = SC \end{cases}$. Donc,

$$\begin{aligned} (PS + RQ)BD &= PSBD + RQBD \\ &= QASD + SCQB \\ &= QS(AD + BC) \end{aligned}$$

□

Théorème: $\left(\mathbb{K}(X), +, \times\right)$ est un corps.

Preuve (partielle)*:*

1. "$+$" est associative : soient $\left(\frac{P}{Q}, \frac{R}{S}, \frac{A}{B}\right) \in \mathbb{K}(X)^3$.

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{P}{Q} + \left(\dfrac{R}{S} + \dfrac{A}{B}\right) = \dfrac{P}{Q} + \dfrac{RB + AS}{SB} & = & \dfrac{PSB + QRB + QAS}{QSB} \\ & & \parallel \\ \left(\dfrac{P}{Q} + \dfrac{R}{S}\right) + \dfrac{A}{B} = \dfrac{PS + RQ}{QS} + \dfrac{A}{B} & = & \dfrac{PSB + RQB + AQS}{QSB} \end{array}$$

2. "$+$" est commutative
3. $\frac{0}{1}$ est neutre pour "$+$"

$$\frac{P}{Q} + \frac{0}{1} = \frac{P \times 1 + 0 \times Q}{Q \times 1} = \frac{P}{Q}$$

4. Soit $\frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$.
$$\frac{P}{Q} + \frac{-P}{Q} = \frac{PQ - QP}{Q^2} = \frac{0}{Q^2} = \frac{0}{1}$$
5. " $\times$ " est associative
6. " $\times$ " est commutative
7. $\frac{1}{1}$ est le neutre pour " $\times$ "
8. Soient $\left(\frac{P}{Q}, \frac{R}{S}, \frac{A}{B}\right) \in \mathbb{K}(X)^3$
$$\frac{P}{Q}\left(\frac{R}{S} + \frac{A}{B}\right) = \frac{P}{Q} \times \frac{RB + AS}{SB} = \frac{PRB + PAS}{QSB}$$
et
$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} + \frac{P}{Q} \times \frac{A}{B} &= \frac{PR}{QS} + \frac{PA}{QB} \\ &= \frac{PRQB + QSPA}{Q^2SB} \\ &= \frac{PRB + SPA}{QSB} \end{aligned}$$
9. Soit $\frac{P}{Q} \neq \frac{0}{1}$ donc $P \times 1 \neq Q \times 0$ donc $P \neq 0$.
$$\frac{P}{Q} \times \frac{Q}{P} = \frac{PQ}{PQ} = \frac{1}{1}$$
10. $\frac{1}{1} \neq \frac{0}{1}$ car $1 \times 1 \neq 0 \times 1$

$\square$

Proposition:
$$\forall P, A \in \mathbb{K}[X], \forall Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}, \qquad \frac{P}{Q} + \frac{A}{Q} = \frac{P + A}{Q}$$

Proposition: $i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ P & \longmapsto & \frac{P}{1} \end{array}$ est un morphisme d'anneaux injectif.

Preuve:
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.
$$i(P+Q) = \frac{P+Q}{1} = \frac{P}{1} + \frac{Q}{1} = i(P) + i(Q)$$
$$i(PQ) = \frac{PQ}{1} = \frac{PQ}{1 \times 1} = \frac{P}{1} \times \frac{Q}{1} = i(P) \times i(Q)$$
$$i(1) = \frac{1}{1}$$

Donc i est un morphisme d'anneaux.

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(i) &\iff i(P) = \frac{0}{1} \\ &\iff \frac{P}{1} = \frac{0}{1} \\ &\iff P \times 1 = 0 \times 1 \\ &\iff P = 0 \end{aligned}$$

donc i est injective. □

Définition: Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On pose

$$\lambda F = \frac{\lambda P}{Q} = \frac{\lambda}{1} \times \frac{P}{Q}$$

Proposition: $\big(\mathbb{K}(X), +, \cdot\big)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ P & \longmapsto & \dfrac{P}{1} \end{array}$ est linéaire. □

Remarque:

On peut identifier $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $\dfrac{P}{1} \in \mathbb{K}(X)$ i.e. écrire $P = \dfrac{P}{1}$ et alors $\begin{cases} \mathbb{K}[X] \text{ est un sous-anneau de } \mathbb{K}(X) \\ \mathbb{K}[X] \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{K}(X) \end{cases}$

De plus, les deux définitions de degré coïncident.

Proposition: Soit $F, G \in \mathbb{K}(X)$.

1. $\deg(F+G) \leqslant \max(\deg F, \deg G)$
   Si $\deg(F) \neq \deg(G)$ alors $\deg(F+G) = \max(\deg F, \deg G)$;
2. $\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G)$;
3. Si $F \neq 0$, $\deg\left(\dfrac{1}{F}\right) = -\deg(F)$.

Preuve:
On pose $F = \dfrac{A}{B}$ et $G = \dfrac{P}{Q}$.

1. $F + G = \dfrac{AQ + PB}{BQ}$. On suppose que $\deg(F) \geqslant \deg(G)$ i.e. $\deg A - \deg B \geqslant \deg P - \deg Q$.

   $$\deg(F+G) = \deg(QA + PB) - \deg(BQ)$$

   On a
   $$\deg(AQ) = \deg(A) + \deg(Q) \geqslant \deg(P) + \deg(B) = \deg(PB).$$

   D'où
   $$\deg(F+G) \leqslant \deg(AQ) - \deg(BQ) = \deg\left(\frac{AQ}{BQ}\right) = \deg(F).$$

Si $\deg(F) > \deg(G)$, alors $\deg(AQ) > \deg(PB)$ et donc

$$\deg(F+G) = \deg(AQ) - \deg(BQ) = \deg(F).$$

2.

$$\begin{aligned}\deg(FG) &= \deg\left(\frac{AP}{BQ}\right) \\ &= \deg(AP) - \deg(BQ) \\ &= \deg(A) + \deg(P) - \deg(B) - \deg(Q) \\ &= \deg F + \deg G.\end{aligned}$$

3. $\deg\left(\frac{1}{F}\right) = \deg(1) - \deg(F) = -\deg(F)$

□

Définition

2 Décomposition en éléments simples

Lemme:

$$\forall F \in \mathbb{K}(X), \exists!(E, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X), \begin{cases} F = E + G \\ \deg(G) < 0 \end{cases}$$

On dit que E est la <u>partie entière</u> de F.

Preuve:

On pose $F = \frac{P}{Q}$ avec $P \in \mathbb{K}[X], Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

<u>Analyse</u> Soit $E \in \mathbb{K}[X]$ et $G \in \mathbb{K}(X)$ tels que

$$F = E + G \deg(G) < 0.$$

On pose $G = \frac{A}{Q}$ avec $A \in \mathbb{K}[X]$.

$$\begin{aligned} F = E + G &\iff \frac{P}{Q} = E + \frac{A}{Q} \\ &\iff P = EQ + A. \end{aligned}$$

$\deg G < 0, \deg A < \deg Q$.

Don E est le quotient de la division euclidienne de P par Q et A sont reste.

<u>Synthèse</u> Soient E le quotient et A le reste de la division euclidienne de P par Q.

On a alors

$$\begin{cases} P = EQ + A \\ \deg(A) < \deg(Q) \end{cases}$$

et donc

$$F = E + \frac{A}{Q} \deg\left(\frac{A}{Q}\right) < 0.$$

□

Exemple:

$F = \frac{X^3 + X - 1}{X^2 + 2}$, $\deg F = 1$.

$$
\begin{array}{r|l}
X^3 + X - 1 & X^2 + 2 \\ \cline{2-2}
- \quad X^3 + 2X & \quad X \\ \cline{1-1}
-X - 1 &
\end{array}
$$

Donc,

$$F = \frac{X(X^2+2) - (X+1)}{X^2+2} = X - \frac{X+1}{X^2+2}.$$

Lemme: Soit $F = \dfrac{P}{AB}$ avec

$$\begin{cases} (P, A, B) \in \mathbb{K}[X]^3; \\ A \neq 0; B \neq 0; \\ A \wedge B = 1; \deg F < 0. \end{cases}$$

Alors,

$$\exists!(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2, \begin{cases} F = \dfrac{U}{A} + \dfrac{V}{B} \\ \deg\left(\dfrac{U}{A}\right) < 0 \text{ et } \deg\left(\dfrac{V}{R}\right). \end{cases}$$

Preuve: <u>ANALYSE</u> On suppose que

$$\begin{cases} F = \dfrac{U}{A} + \dfrac{V}{B} \\ U \in \mathbb{K}[X], \deg U < \deg A \\ V \in \mathbb{K}[X], \deg V < \deg B. \end{cases}$$

D'où

$$\frac{P}{AB} = \frac{UB + VA}{AB}$$

et donc $P = UB + VA$. D'après le théorème de Bézout, il existe $(R, S) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$RB + SA = P.$$

On a alors

$$0 = B(R - U) + A(S - V)$$

donc

$$A(S - V) = B(U - R)$$

donc

$$A \mid B(U - R) \qquad \text{dans } \mathbb{K}[X].$$

D'après le théorème de Gauss,

$$A \mid U - R$$

Donc $U - R = AT$ avec $T \in \mathbb{K}[X]$ donc

$$A(S - V) = BAT$$

donc

$$S - V = BT$$

donc

$$\begin{cases} R = -AT + U \\ S = BT + V \end{cases}.$$

On a

$$\begin{cases} S = BT + V \\ \deg V < \deg B \end{cases}$$

donc V est le reste de la division euclidienne de S par B et U est le reste de la division euclidienne de R par A.

<u>Synthèse</u> Soit $(R, S) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$P = RB + SA.$$

Soit V le reste de la division euclidienne de S par B.

$$\begin{cases} S = BT + V, T \in \mathbb{K}[X] \\ \deg V < \deg B \end{cases}$$

D'où,

$$\frac{P}{AB} = \frac{R}{A} + T + \frac{V}{B} = \frac{R + AT}{A} + \frac{V}{B}$$

et

$$\deg\left(\frac{V}{B}\right) = \deg(V) - \deg(B) < 0.$$

Si $\deg\left(\frac{R+AT}{A}\right) \geqslant 0$, alors

$$\deg\left(\frac{R+AT}{A}\right) > \deg\left(\frac{V}{B}\right)$$

et alors

$$\deg\left(\frac{P}{AB}\right) = \deg\left(\frac{R+AT}{A}\right) \geqslant 0.$$

Or,

$$\deg\left(\frac{P}{AB}\right) < 0.$$

Donc

$$\deg\left(\frac{R+AT}{A}\right) < 0.$$

On pose $U = R + AT$. On a bien

$$\frac{P}{AB} = \frac{U}{A} + \frac{V}{B} \text{ avec } \deg\left(\frac{U}{V}\right) < 0 \text{ et } \deg\left(\frac{V}{R}\right) < 0.$$

$\square$

Lemme: Soit $H \in \mathbb{K}[X]$ irréductible, $n \in \mathbb{N}_*$, $P \in \mathbb{K}[X]$, $F = \dfrac{P}{H^n}$ et $\deg F < 0$. Alors,

$$\begin{cases} \exists!(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2, F = \dfrac{U}{H^n} + \dfrac{V}{H^{n-1}}; \\ \deg U < \deg H; \\ \deg\left(\dfrac{V}{H^{n+1}}\right) < 0. \end{cases}$$

Preuve: ANALYSE $F = \dfrac{U}{H^n} + \dfrac{V}{H^{n-1}}$ avec

$$\begin{cases} \deg U < \deg H, \\ U \in \mathbb{K}[X], V \in \mathbb{K}[X], \\ \deg\left(\dfrac{V}{H^{n-1}}\right) < 0. \end{cases}$$

D'où

$$P = U + VH, \deg U < \deg H.$$

Donc V est le quotient et U le reste de la division euclidienne de P par H.

SYNTHÈSE Soient V et U le quotient et le reste de la division euclidienne de P par H :

$$\begin{cases} P = U + VH \\ \deg U < \deg H. \end{cases}$$

D'où

$$F = \frac{U}{H^n} + \frac{V}{H^{n-1}}$$
$$\deg U < \deg H$$

Si $\deg\left(\dfrac{V}{H^{n-1}}\right) \geqslant 0$, alors $\deg F = \deg\left(\dfrac{V}{H^{n-1}}\right) \geqslant 0$: une contradiction. Donc $\deg\left(\dfrac{V}{H^{n-1}}\right) < 0$.

$\square$

Théorème (Théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}(\mathbf{X})$)**:** Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $F = \dfrac{P}{Q}$ la forme irréductible de F. On note $(z_1, \ldots, z_p)$ les racines complexes de Q et $(\mu_1, \ldots, \mu_p)$ leur multiplicité.

Alors,

$$\exists!(E, a_{1,1}, \ldots, a_{1,\mu_1}, a_{2,1}, \ldots, a_{2,\mu_2}, \ldots, a_{p,1}, \ldots, a_{p,\mu_p}) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}^{\deg Q},$$
$$F = E + \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{a_{i,j}}{(X - z_i)^j} \right).$$

EXEMPLE:
$F = \dfrac{X^7 - 1}{X^5 + 2X^3 + X} \in \mathbb{C}(X)$

$$\begin{array}{rr|l} & X^7 - 1 & X^5 + 2X^3 + X \\ \cline{3-3} - & X^7 + 2X^5 + X^3 & \quad X^2 - 2 \\ \hline & -2X^5 - X^3 - 1 & \\ - & -2X^5 - 4X^3 - 2X & \\ \hline & 3X^3 + 2X - 1 & \end{array}$$

$$F = (X^2 - 2) + \frac{3X^3 + 2X - 1}{X^5 + 2X^3 + X}$$

$$\begin{aligned}X^5+2X^3+X &= X(X^4+2X^2+1)\\ &= X(X^2+1)^2\\ &= X(X-i)^2(X+i)^2\end{aligned}$$

D'après le 2$^{\text{ème}}$ lemme,

$$\frac{3X^3+2X-1}{X^5+2X^3+X}=\frac{a}{X}+\frac{bX+c}{(X-i)^2}$$

D'après le 3$^{\text{ème}}$ lemme,

$$\frac{bX+c}{(X-i)^2}=\frac{f}{(X-i)^2}+\frac{g}{X-i}$$
$$\frac{dX+e}{(X+i)^2}=\frac{h}{(X+i)^2}+\frac{h}{X+i}$$

$$F=(X^2-2)+\frac{a}{X}+\frac{f}{(X-i)^2}+\frac{g}{X-i}+\frac{h}{(X-i)^2}+\frac{k}{X+i}.$$

On multiplie par X :

$$\frac{X^7-1}{X^4+2X^2+1}=a+X\left(X^2-2+\frac{f}{(X-i)^2}+\frac{g}{X-i}+\frac{h}{(X-i)^2}+\frac{k}{X+1}\right).$$

En rempla c ant X par 0, on obtient

$$a=\frac{-1}{1}=-1.$$

On multiplie par $(X-i)^2$ et on remplace X par i :

$$\frac{3i^2+2i-1}{i(2i)^2}=f.$$

Donc,

$$f=\frac{-i-1}{-4i}=\frac{1}{4}-\frac{i}{4}$$

De même,

$$h=\frac{3(-i)^3+2(-i)-1}{-i(-2i)^2}=\overline{f}=\frac{1}{4}+\frac{i}{4}$$

$$\frac{3X^2+2X-1}{X^5+2X^3}+\frac{1}{X}-\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{4}\right)\frac{1}{(X-i)^2}-\left(\frac{1}{4}+\frac{i}{4}\right)\frac{1}{(X+i)^2}=\frac{g}{X-i}+\frac{h}{X+i}$$

$$\begin{aligned}
\frac{g}{X-i}+\frac{h}{X+i} &= \frac{3X^3+2X-1+X^4+2X^2+1+X(X+i)^2\left(-\frac{1}{4}+\frac{i}{4}\right)-X(X-i)^2\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{4}\right)}{X^5+2X^3+X} \\
&= \frac{12X^3+8X-4+4X^4+8X^2+4+X^3(-1+i)+(1-i)X-X^3(1+i)-2X^2(1-i)+X(1+i)}{4(X^5+2X^3+X)} \\
&= \frac{4X^4+10X^3+8X^2+10X}{4\left(X^5+2X^3+X\right)} \\
&= \frac{2X^3+5X^2+2X+5}{2(X^4+2X^2+1)} \\
&= \frac{(X-i)(X+i)(2X+5)}{2(X-i)^2(X+i)^2} \\
&= \frac{2X+5}{2(X-i)(X+i)}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{cases}
g = \dfrac{2i+5}{2\times 2i} = \dfrac{(2i+5)i}{-4} = \dfrac{2-5i}{4} \\[2ex]
h = \dfrac{2(-i)+5}{2(-2i)} = \dfrac{2+5i}{4}
\end{cases}$$

Preuve:
On suppose $\dfrac{P}{Q} \notin \mathbb{C}[X]$. On peut supposer Q unitaire.

<u>Existence</u> D'après le lemme 1, il existe $E \in \mathbb{C}[X]$, $G \in \mathbb{C}(X)$ tels que

$$\begin{cases} \dfrac{P}{Q} = E + G \\ \deg(G) < 0 \end{cases}$$

Soit $\dfrac{A}{B}$ la forme irréductible de G avec B unitaire ($A \wedge B = 1$ et $A \neq 0$).

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{A}{B}$$

donc

$$PB = EBQ + AQ \qquad (*)$$

donc

$$AQ = PB - EBQ$$

donc

$$A \mid B(P - EQ)$$

D'après le théorème de Gauss,

$$A \mid P - EQ$$

Soit $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$AR = P - EQ$$

D'où

$$\frac{AR}{Q} = \frac{P}{Q} - E = \frac{A}{B}$$

D'où

$$\frac{R}{Q} = \frac{1}{B}$$

donc $B \mid Q$.
De $(*)$, on a aussi

$$P \mid Q(EB + A)$$

Or, $P \wedge Q = 1$. Donc

$$P \mid EB + A$$

Soit $S \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$PS = EB + A$$

Donc

$$\frac{PS}{B} = E + \frac{A}{B} = \frac{P}{Q}$$

Donc

$$\frac{S}{B} = \frac{1}{Q}$$

et donc $Q \mid B$
Donc $Q = B$ (car ils sont unitaires).
Donc $G = \dfrac{A}{Q}$.
Or,

$$Q = \prod_{j=1}^{p} (X - z_j)^{\mu_j}$$

$$\forall j \neq k, (X - z_j)^{\mu_j} \wedge (X - z_k)^{\mu_k} = 1$$

D'après le lemme 2, il existe $(A_1, \dots, A_p) \in \mathbb{C}[X]^p$ tel que

$$\begin{cases} \dfrac{A}{Q} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{A_j}{(X-z_j)^{\mu_j}} \\ \forall j \in [\![1,p]\!], \deg(A_j) < \mu_j \end{cases}$$

Soit $j \in [\![1,p]\!]$. D'après le lemme 3,

$$\frac{A_j}{(X-z_j)^{\mu_j}} = \frac{a_{j,\mu_j}}{(X-z_j)^{\mu_j}} + \frac{A_{j,1}}{(X-z_j)^{\mu_j-1}}$$

avec

$$\begin{cases} a_{j,\mu_j} \in \mathbb{C} \\ A_{j,1} \in \mathbb{C}_{\mu_j-2}[X] \end{cases}$$

En itérant ce procédé, on trouve $(a_{j,\mu_j}, \dots, a_{j,1}) \in \mathbb{C}^{\mu_j}$ tel que

$$\frac{A_j}{(X-z_j)^{\mu_j}} = \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{j,k}}{(X-z_j)^k}$$

D'où

$$\frac{P}{Q} = E + \underbrace{\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{j,k}}{(X-z_j)^k}}_{\deg(\quad)<0}$$

<u>Unicité</u> Soit $E_1 \in \mathbb{C}[X]$ et $(b_{j,k})_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\ 1\leqslant k\leqslant \mu_j}} \in \mathbb{C}^{\sum_{j=1}^{p}\mu_j}$ tels que

$$\frac{P}{Q} = E_1 + \underbrace{\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{b_{j,k}}{(X-z_j)^k}}_{\deg(\quad)<0}$$

D'après le lemme 1,

$$E = E_1 \text{ et } \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{j,k}}{(X-z_j)^k} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{b_{j,k}}{(X-z_j)^k}$$

$\forall j \in [\![1,p]\!]$,

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\sum_{k=0}^{\mu_j} \frac{b_{j,k}}{(X-z_j)^k} & = & \dfrac{\sum_{k=1}^{\mu_j} b_{j,k}(X-z_j)^{\mu_j-k}}{(X-z_j)^{\mu_j}} \\ \| & & \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{j,k}}{(X-z_j)^k} & = & \dfrac{\sum_{k=1}^{\mu_j} a_{j,k}(X-z_j)^{\mu_j-k}}{(X-z_j)^{\mu_j}} \end{array}$$

Donc,

$$\sum_{k=1}^{\mu_j} a_{j,k}(X-z_j)^k = \sum_{k=1}^{\mu_j} b_{j,k}(X-z_j)^k$$

Comme $\left(X-z_j, (X-z_j)^2, \dots, (X-z_j)^{\mu_j}\right)$ est libre dans $\mathbb{C}[X]$,

$$\forall k \in [\![1,\mu_j]\!], b_{j,k} = a_{j,k}$$

$\square$

Théorème (Théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$)**:** Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $P \wedge Q = 1$, Q unitaire, $Q \notin \{0,1\}$. On pose

$$Q = \prod_{i=1}^{p} (X-a_i)^{\mu_i} \prod_{k=1}^{q} (X^2+\alpha_k X+\beta_k)^{\nu_k}$$

avec

$$\begin{cases} p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, \\ (a_1,\dots,a_p) \in \mathbb{R}^p \\ (\alpha_1,\dots,\alpha_q,\beta_1,\dots,\beta_q) \in \mathbb{R}^{2q} \\ (\mu_1,\dots,\mu_p,\nu_1,\dots,\nu_p) \in \mathbb{N}^{p+q} \\ \forall j \in [\![1,q]\!], \alpha_k^2 - 4\beta_k < 0 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \exists!(E, &\gamma_{1,1},\dots,\gamma_{1,\mu_1},\gamma_{2,1},\dots,\gamma_{2,\mu_2},\dots,\gamma_{p,1},\dots,\gamma_{p,\mu_p}, \\ &\delta_{1,1},\dots,\delta_{1,\nu_1},\delta_{2,1},\dots,\delta_{2,\nu_2},\dots,\delta_{q,1},\dots,\delta_{q,\nu_q}, \\ &\varepsilon_{1,1},\dots,\varepsilon_{1,\nu_1},\varepsilon_{2,1},\dots,\varepsilon_{2,\nu_2},\dots,\varepsilon_{q,1},\dots,\varepsilon_{q,\nu_q}) \\ &\in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}^{\mu_1+\dots+\mu_p} \times \mathbb{R}^{2(\nu_1+\dots+\nu_q)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} = E + &\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{\gamma_{i,j}}{(X-a_i)^j} \\ &+ \sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{\nu_k} \frac{\delta_{k,j}X+\varepsilon_{k,j}}{(X^2+\alpha_k X+\beta_k)^j} \end{aligned}$$

□

Définition: Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. Soient $(P,Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ tels que $\begin{cases} P \wedge Q = 1 \\ F = \frac{P}{Q} \end{cases}$.

Les racines de P sont appelées <u>zéros de F</u>
Les racines de Q sont appelées <u>pôles de F</u>

Proposition: Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ et $z \in \mathbb{C}$ un pôle simple de F. Le coefficient devant $\frac{1}{X-z}$ dans la décomposition en éléments simples de F est $\frac{P(z)}{Q'(z)}$.

Preuve:
Soit $(P,Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ tels que

$$\begin{cases} F = \frac{P}{Q} \\ P \wedge Q = 1 \\ Q \text{ unitaire} \end{cases}$$

On pose

$$Q = (X-z)\prod_{i=1}^{q}(X-z_i)^{\mu_i}$$

où $z_1, \dots, z_q$ sont les racines distinctes de z du polynôme Q. Donc,

$$\frac{P}{Q} = F = \frac{a}{X-z} + \sum_{i=1}^{q} \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{b_{i,k}}{(X-z_i)^k}$$

avec a, $\left(b_{i,k}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\ 1\leqslant k\leqslant \mu_i}}$ des nombres complexes.
On muliplie par $X - z$.

$$\frac{P}{\prod_{i=1}^{q}(X-z_i)^{\mu_i}} = a + (X-z)\sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{\mu_i}\frac{b_{i,k}}{(X-z_i)^k}$$

On remplace X par z.

$$\frac{P(z)}{\prod_{i=1}^{q}(z-z_i)^{\mu_i}} = a$$

Or,

$$Q = (X-z)\prod_{i=1}^{q}(X-z_i)^{\mu_i}$$

D'où

$$Q' = \prod_{i=1}^{q}(X-z_i)^{\mu_i} + (X-z)\left(\prod_{i=1}^{q}(X-z_i)^{\mu_i}\right)'$$

Don

$$Q'(z) = \prod_{i=1}^{q}(z-z_i)^{\mu_i}$$

Donc

$$a = \frac{P(z)}{Q'(z)}$$

□

Proposition: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $\deg(P) \geqslant 1$, $(z_1, \dots, z_p)$ les racines de P, $\mu_1, \dots, \mu_p$ leur multiplicité. Alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{p}\frac{\mu_i}{X-z_i}$$

Preuve:
On pose

$$P = \alpha\prod_{i=1}^{p}(X-z_i)^{\mu_i}$$

Donc

$$P' = \alpha\sum_{i=1}^{p}\left(\prod_{j\neq i}(X-z_j)^{\mu_j}\right)\mu_i(X-z_i)^{\mu_i-1}$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{P'}{P} &= \frac{\cancel{\alpha}\sum_{i=1}^{p}\mu_i(X-z_i)^{\mu_i-1}\prod_{j\neq i}(X-z_j)^{\mu_j}}{\cancel{\alpha}\prod_{i=1}^{p}(X-z_i)^{\mu_i}} \\ &= \sum_{i=1}^{p}\mu_i\frac{(X-z_i)^{\mu_i-1}\prod j\neq i)(X-z_j)^{\mu_j}}{\prod_{j=1}^{p}(X-z_j)^{\mu_j}} \\ &= \sum_{i=1}^{p}\mu_i\frac{1}{X-z_i}\end{aligned}$$

□

Remarque:
Il existe un “truc” pour retenir cette formule :

$$\frac{P'}{P} = \underbrace{\ln(P)'}_{\text{n'existe pas !}} = \left(\ln\left(\alpha\prod_{i=1}^{p}(X-z_i)^{\mu_i}\right)\right)' = \left(\sum_{i=1}^{p}\mu_i\ln(X-z_i)\right)' = \sum_{i=1}^{p}\mu_i\frac{1}{X-z_i}$$

CHAPITRE

21

MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

1 Matrices d'un vecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Définition: Soit $x \in E$. On sait qu'il existe un unique n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

La matrice de x dans la base $\mathscr{B}$ est la colonne

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Remarque:
En général, si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont 2 bases différentes, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \neq \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$.

Exemple:
$E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ et

$$\mathscr{C} = \left(\frac{X(X-1)(X-2)}{6}, -\frac{X(X-1)(X-3)}{2}, \right.$$
$$\left. \frac{X(X-2)(X-3)}{2}, -\frac{(X-1)(X-2)(X-3)}{6} \right)$$

$$P = X^2 - X + 1$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P = P(3)\frac{X(X-1)(X-2)}{6} + P(2)\frac{-X(X-1)(X-3)}{2} \\ + P(1)\frac{X(X-2)(X-3)}{2} + P(0)\frac{-(X-1)(X-2)(X-3)}{6} \end{aligned}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(P) = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2 Matrice d'une famille de vecteurs

Soient E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.

Définition: La matrice de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice M telle que, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, la j-ème colonne de M est $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_j)$.

Exemple:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition: Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E.

$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})\right)$$

Preuve:
Dans ce chapitre, on définit le rang d'une matrices comme le nombre maximale de colonnes linéairement idépendantes. □

Corollaire: Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p) \in E^p$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$.

1. $\mathscr{F}$ est libre $\iff \mathrm{rg}(M) = p$
2. $E = \mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \iff \mathrm{rg}(M) = n$
3. $\mathscr{F}$ base de $E \iff n = p = \mathrm{rg}(M) \iff M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
   Dans ce cas,
   $$\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(\mathscr{B})$$

Exemple:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M$$

On sait que $\mathscr{B}$ est une base donc $M \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$. Donc,

$$M^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{3}{2} & 3 & -\frac{11}{6} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{5}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Preuve: 1.

$$\begin{aligned} \mathscr{F} \text{ est libre } &\iff (u_1, \dots, u_p) \text{ base de } \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p) \\ &\iff \dim\big(\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)\big) = p \\ &\iff \mathrm{rg}\big((u_1, \dots, u_p)\big) = p \\ &\iff \mathrm{rg}(M) = p \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \mathscr{F} \text{ engendre } E &\iff E = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p) \\ &\iff \dim(E) = \dim\big(\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)\big) \\ &\iff n = \mathrm{rg}(M) \end{aligned}$$

3.

$$\mathscr{F} \text{ base de } E \iff \begin{cases} \mathrm{rg}(M) = p \\ \mathrm{rg}(M) = n \end{cases}$$

On suppose que $\mathscr{F}$ est une base de E.

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1,n} \\ m_{21} & \dots & m_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$. Montrons que $AM = I_n$.

La première colonne de AM est

$$A \begin{pmatrix} m_{11} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix} = m_{11} \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + m_{21} \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix} + \dots + m_{n,1} \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Or, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(e_i)$.

Donc, la première colonne de AM est la colonne des coordonées du vecteur

$m_{11}e_1 + m_{21}e_2 + \cdots + m_{n,1}e_n$ dans la base $\mathscr{F}$.
Or,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix}$$

donc $u_1 = m_{11}e_1 + m_{21}e_2 + \cdots + m_{n,1}e_n$.
Comme $u_1 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \cdots + 0 \cdot u_n$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

La j-ème colonne de AM est

$$A \begin{pmatrix} m_{1,j} \\ \vdots \\ m_{n,j} \end{pmatrix} = m_{1,j} \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + m_{2,j} \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix} + \cdots + m_{n,j} \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Or, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(e_i)$.
Donc, la j-ème colonne de AM est la colonne des coordonées du vecteur $m_{1,j}e_1 + m_{2,j}e_2 + \cdots + m_{n,j}e_n$ dans la base $\mathscr{F}$.
Or,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} m_{1,j} \\ m_{2,j} \\ \vdots \\ m_{n,j} \end{pmatrix}$$

donc $u_j = m_{1,j}e_1 + m_{2,j}e_2 + \cdots + m_{n,j}e_n$.
Comme $u_j = 0 \cdot u_1 + \cdots + 1 \cdot u_j + \cdots + 0 \cdot u_n$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(u_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \leftarrow j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

En inversant les rôles de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{B}$, on prouve que $MA = I_n$.

On suppose maintenant que $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrons que $\mathscr{F}$ est une base de E.

On pose

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On sait que

$$M\,M^{-1} = I_n$$

Donc

$$\forall j \in [\![1,n]\!]\,, a_{1,j} \begin{pmatrix} m_{11} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix} + \dots + a_{n,j} \begin{pmatrix} m_{1,n} \\ \vdots \\ m_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \leftarrow j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\forall j \in [\![1,n]\!]\,, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} u_i \right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_j)$$

donc

$$\forall j \in [\![1,n]\!]\,, e_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} u_i \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$$

Donc $\mathscr{F}$ engendre E.

$$\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = n = \dim(E)$$

donc $\mathscr{F}$ est une base de E.

□

3 Matrices d'une application linéaire

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F.

Proposition – Définition: Soit $x \in E$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$. Soit $y \in F$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(y)$. On pose $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall j \in [\![1,n]\!]\,, \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{p,j} \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\left(f(e_j)\right)$$

Alors

$$y = f(x) \iff Y = AX$$

On dit que A est la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. On la note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.

Preuve:

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \qquad y = \sum_{i=1}^{p} y_i f_i$$

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff \sum_{i=1}^{p} y_i f_i = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) \\ &\iff \sum_{i=1}^{p} y_i f_i = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) \end{aligned}$$

Or,

$$\forall j \in [\![1, n]\!], f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} f_i$$

D'où,

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff \sum_{i=1}^{p} y_i f_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} f_i \\ &\qquad\qquad\qquad = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\right) f_i \\ &\iff \forall i \in [\![1, p]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i = y_i \\ &\iff AX = Y \end{aligned}$$

□

Exemple:
$E = \mathbb{R}^3$ et f la projection sur $R = \{(x, y, z) \mid x + y = 0\}$ parallèlement à $G = \text{Vect}\,((1, 1, 1))$.

— $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base canonique.

$$\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$e_1 = (1, 0, 0) = \underbrace{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}_{\in F} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}_{\in G}$$

$$f(e_1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3$$

$$e_2 = (0, 1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$e_3 = (0, 0, 1) = (0, 0, 1) + (0, 0, 0)$$

Donc

$$\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

— $\mathscr{C} = (e_3, e_1 - e_2, e_1 + e_2 + e_3) = (u_1, u_2, u_3)$

$$\text{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

car

$$f(u_1) = u_1 f(u_2) = u_2 f(u_3) = 0$$

—
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

—
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$
$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f\big((x,y,z)\big)\right) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left((x,y,z)\right) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x-y}{2} \\ \frac{y-x}{2} \\ \frac{-x-y}{2} + z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc
$$f\big((x,y,z)\big) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}, z - \frac{x+y}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\left(f(x,y,z)\right) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left((x,y,z)\right) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-x-y}{2} + z \\ \frac{x-y}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc
$$f\big((x,y,z)\big) = \left(z - \frac{x+y}{2}\right) u_1 + \left(\frac{x-y}{2}\right) u_2$$

Exemple:
Soient $E = \mathbb{C}$, $\mathscr{B} = (1, i)$, $\theta \in \mathbb{R}$ et f la rotation de centre O et d'angle θ.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto e^{i\theta} z \end{aligned}$$

f est linéaire :

$$\begin{aligned} \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (z,w) \in \mathbb{C}^2 f(\lambda z + \mu w) &= e^{i\theta}(\lambda z + \mu w) \\ &= \lambda e^{i\theta} z + \mu e^{i\theta} w \\ &= \lambda f(z) + \mu f(w) \end{aligned}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

car

$$\begin{cases} f(1) = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ f(i) = ie^{i\theta} = -\sin\theta + i\cos\theta \end{cases}$$

$$z = x + iy \text{ avec } x, y \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta & -y\sin\theta \\ x\sin\theta & y\cos\theta \end{pmatrix}$$

Théorème: Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F.

$$\begin{aligned} \Phi : \mathscr{L}(E, F) &\longrightarrow \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{aligned}$$

Φ est un $\mathbb{K}$-isomorphisme linéaire.

Preuve: — Soient $(f, g) \in \mathscr{L}(E, F)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \Phi(f) = (a_{i,j})$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g) = \Phi(g) = (b_{i,j})$. On pose également $C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda f + \mu g) = \Phi(\lambda f + \mu g) = (c_{i,j})$.

$$\begin{aligned} \forall j \in [\![1, n]\!], \begin{pmatrix} c_{1,j} \\ \vdots \\ c_{p,j} \end{pmatrix} &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\big((\lambda f + \mu g)(e_j)\big) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\big(\lambda f(e_j) + \mu g(e_j)\big) \end{aligned}$$

Or,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\big(f(e_j)\big) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{p,j} \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\big(g(e_j)\big) = \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{p,j} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\big(\lambda f(e_j) + \mu g(e_j)\big) = \lambda \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{p,j} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{p,j} \end{pmatrix}$$

Donc $C = \lambda A + \mu B$ et donc Φ est linéaire.

— Soit $f \in \operatorname{Ker}\Phi$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\forall j \in [\![1, n]\!], f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} 0 \cdot f_i = 0_F$$

Soit $x \in E$. On pose $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = 0_F$$

Donc $f = 0$. Donc Φ est injective.
Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On pose $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.
On définit $F : E \to F$ de la fa c on suivante : pour tout $x \in E$, on décompose $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$. On pose alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} f_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j f_i \end{aligned}$$

Montrons que $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\Phi(f) = A$

— Soit $(x, y) \in E^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. On pose

$$\begin{cases} x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j & \text{avec } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \\ y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j & \text{avec } (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n \end{cases}$$

Donc

$$\alpha x + \beta y = \sum_{j=1}^{n} (\alpha x_j + \beta y_j)(e_j$$

D'où

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} (\alpha x_j + \beta x_j) f_i \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j f_i + \beta \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} y_j f_i \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \end{aligned}$$

Soit $j \in [\![1, p]\!]$.

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} f_i$$

et

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}\left(f(e_j)\right) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{p,j} \end{pmatrix}$$

donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = A$$

$\square$

Corollaire: Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, alors

$$\dim\left(\mathscr{L}(E,F)\right) = \dim(E) \times \dim(F)$$

□

Exemple (*Trouver tous les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$*):
Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (ax+cy, bx+dy) \end{aligned}$$

avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.
Une base de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ est (f_1, f_2, f_3, f_4) où

$$\begin{cases} f_1 : (x,y) \mapsto (x,0) \\ f_2 : (x,y) \mapsto (0,x) \\ f_3 : (x,y) \mapsto (y,0) \\ f_4 : (x,y) \mapsto (0,y) \end{cases}$$

Théorème: Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F et $\mathscr{D}$ une base de G. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$$

Preuve:
On pose

$$\begin{aligned} \mathscr{B} &= (e_1, \dots, e_n) \\ \mathscr{C} &= (f_1, \dots, f_p) \\ \mathscr{D} &= (g_1, \dots, g_q). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \\ B = (b_{k,i})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant q \\ 1 \leqslant i \leqslant p}} &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \\ C = (c_{k,j})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant q \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) \end{aligned}$$

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. La j-ième colonne de C est

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{D}}\left(g \circ f(e_j)\right) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{D}}\left(g\big(f(e_j)\big)\right) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\left(f(e_j)\right) \\ &= BA_j \end{aligned}$$

où A_j est la j-ème colonne de A.
Or, la j-ème colonne de BA est aussi BA_j.
Donc, $C = BA$. □

4 Formules de changement de bases

Proposition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E et $x \in E$. Soit $P = P_{\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_2)$.
Alors
$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_2}(x) = P^{-1} \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_1}(x)$$

Preuve:

$$P = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1}(\mathrm{id}_E) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

si $\begin{cases} \mathscr{B}_1 = (e_1, \dots, e_n) \\ \mathscr{B}_2 = (u_1, \dots, u_n) \end{cases}$

$$\begin{aligned} P \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_2}(x) &= \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1}(\mathrm{id}_E) \times \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_2}(x) \\ &= \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_1}\big(\mathrm{id}_E(x)\big) \\ &= \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_1}(x) \end{aligned}$$

$$E_{\mathscr{B}_2} \qquad \begin{array}{c} x \\ X \end{array} \xrightarrow[P]{\mathrm{id}_E} \begin{array}{c} \mathrm{id}_E(x) \\ PX \end{array} \qquad E_{\mathscr{B}_1}$$

□

Proposition: Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E, et $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ deux bases de F et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

Soient $\begin{cases} P = P_{\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_2) \\ Q = P_{\mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{C}_1}(\mathscr{C}_2) \\ A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1}(f) \end{cases}$ Alors,

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{C}_2}(f) = Q^{-1} A P$$

Preuve:

$$\begin{tikzcd} E_{\mathscr{B}_1} \arrow[r, "f", "A"'] & F_{\mathscr{C}_1} \arrow[d, "\mathrm{id}_F"', "Q^{-1}"] \\ E_{\mathscr{B}_2} \arrow[u, "\mathrm{id}_E", "P"'] \arrow[r, "f", "A'"'] & F_{\mathscr{C}_2} \end{tikzcd}$$

$f = \mathrm{id}_F \circ f \circ \mathrm{id}_E$ donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{C}_2}(f) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{C}_1,\mathscr{C}_2}(\mathrm{id}_F) \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1}(f) \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1}(\mathrm{id}_E)$$

□

Exemple:
$E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$, $G = \operatorname{Vect}\big((1, 1, 1)\big)$ et f la projection sur F parallèlement à G.

Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base canonique de E et $\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3)$ avec $\begin{cases} u_1 = (0, 0, 1) \\ u_2 = (1, -1, 0) \\ u_3 = (1, 1, 1) \end{cases}$.

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Proposition – Définition: Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})^2$.
On dit que A et B sont <u>équivalentes</u> si

$$\exists (P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}), B = Q^{-1}AP$$

Cette relation est une relation d'équivalence. □

Théorème: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ deux bases de E, $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$, $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $B = \operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(f)$.
Alors

$$B = P^{-1}AP.$$

□

Définition: Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. On dit que A et B sont <u>semblables</u> s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

L'ensemble $\{P^{-1}AP \mid P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\}$ est la <u>classe de similitude de A</u>.

Exemple:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \\ u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \text{ et } X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n + u_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= AX_n \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$$

On aimerait trouver D diagonale et $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & (z_2, z_1 + z_2) \end{array}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A$ où $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^2$.

On cherche $\mathscr{C} = (u_1, u_2)$ une base de $\mathbb{C}^2$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = D$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$.

<u>Analyse</u> On suppose que $\mathscr{C}$ existe. Dans ce cas,

$$\begin{cases} f(u_1) = \lambda_1 u_1, \\ f(u_2) = \lambda_2 u_2, \\ (\lambda_1, \lambda_2) \text{ libre.} \end{cases}$$

Soit $u = (x, y) \in \mathbb{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} f(u) = \lambda u &\iff \begin{cases} y = \lambda x \\ x + y = \lambda y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \lambda x \\ x + \lambda x - \lambda^2 x = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \lambda x \\ x(1 + \lambda - \lambda^2) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} A + \lambda - \lambda^2 = 0 \\ y = \lambda x \end{cases} \\ &\iff u = (0,0) \text{ ou } \begin{cases} \lambda = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} x \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} x \end{cases} \end{aligned}$$

<u>Synthèse</u> On pose $\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \\ u_1 = (1, \varphi) \end{cases}$ et $\begin{cases} \lambda_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} = -\dfrac{1}{\varphi} \\ u_2 = \left(1, -\dfrac{1}{\varphi}\right) \end{cases}$.

Ainsi, $\begin{cases} f(u_1) = \lambda_1 u1 \\ f(u_2) = \lambda_2 u_2. \end{cases}$

u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre donc une base.

On pose $\mathscr{C} = (u_1, u_2)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\varphi} \end{pmatrix} = D$.

$$A = PDP^{-1}$$

et

$$\begin{cases} P^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}) = P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}} \\ P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}) = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} \end{cases}$$

On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix}$ donc

$$P^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\varphi} & -1 \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varphi} & 1 \\ \varphi & -1 \end{pmatrix}$$

Donc $A = PDP^{-1}$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & -\frac{1}{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\varphi} & 1 \\ \varphi & -1 \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} * & u_n \\ * & * \end{pmatrix}$$

Exemple:

$$y'' + \omega^2 y = 0 \qquad \omega \in \mathbb{R}_*^+$$
$$\forall t, Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \forall t, Y'(t) &= \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y'(t) \\ -\omega^2 y(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \\ &= AY(t) \end{aligned}$$

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (a,b) & \longmapsto & (b, -\omega^2 a) \end{array}$.

$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ où $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ base canonique de $\mathbb{C}^2$. On cherche $\mathscr{C} = (u_1, u_2)$ une base de $\mathbb{C}^2$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = D$.

<u>Analyse</u> Si $\mathscr{C}$ existe,

$$\begin{cases} f(u_1) = \lambda_1 u_1 \\ f(u_2) = \lambda_2 u_2 \end{cases}$$

Soit $u = (a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $\lambda \in C$.

$$\begin{aligned} f(u) = \lambda u &\iff \begin{cases} b = \lambda a \\ -\omega^2 a = \lambda b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = \lambda a \\ -\omega^2 a = \lambda^2 a \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda^2 = -\omega^2 \\ b = \lambda a \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^2_{\mathscr{B}} \arrow[r, "f"', "A"] & \mathbb{C}^2_{\mathscr{B}} \\ \mathbb{C}^2_{\mathscr{C}} \arrow[r, "f", "D"'] \arrow[u, leftarrow, "\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}", "P^{-1}"'] & \mathbb{C}^2_{\mathscr{C}} \arrow[u, "\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}", "P"'] \end{tikzcd}$$

<u>Synthèse</u> On pose $\begin{cases} \lambda_1 = i\omega \\ u_1 = (1, i\omega) \end{cases}$ et $\begin{cases} \lambda_2 = -i\omega \\ u_2 = (1, -i\omega) \end{cases}$. (u_1, u_2) est bien une base de $\mathbb{C}^2$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix} = D$

$$AP = PD \iff P^{-1}A = DP^{-1}$$

On a

$$P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix}$$

On pose

$$\forall t, X(t) = P^{-1} \times Y(t)$$

Donc

$$\begin{aligned} \forall t, X'(t) = P^{-1}Y'(t) &= P^{-1}AY(t) \\ &= DP^{-1}Y(t) \\ &= DX(t) \end{aligned}$$

On pose

$$\forall t, X(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X'(t) = DX(t) &\iff \begin{cases} a'(t) = i\omega a(t) \\ b'(t) = -i\omega b(t) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a(t) = \lambda e^{i\omega t} \\ b(t) = \mu e^{-i\omega t} \end{cases} \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall t, Y(t) &= P \times X(t) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda e^{i\omega t} \\ \mu e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda e^{i\omega t} + \mu e^{-i\omega t} \\ * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall t, y(t) = \lambda e^{i\omega t} + \mu e^{-i\omega t}$$

Définition: Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
La <u>trace</u> de A est

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Proposition:
1. $\mathrm{tr} \in \mathscr{L}\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\big) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^*$
2. $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

Preuve: 1. Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. On pose $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$.

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\alpha A + \beta B) &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_{i,i} \beta b_{i,i}) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \beta \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} \\ &= \alpha \operatorname{tr}(A) + \beta \operatorname{tr}(B)\end{aligned}$$

2. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. On pose $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$, $AB = (c_{i,j})$ et $BA = (d_{i,j})$.

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{j,i} a_{i,j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} d_{j,j} \\ &= \operatorname{tr}(BA)\end{aligned}$$

□

Proposition: Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$.

$$A \text{ et } B \text{ semblables} \implies \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$$

Preuve:
On suppose A et B semblables. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$. Donc

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\left(P^{-1}(BP)\right) = \operatorname{tr}\left((BP)P^{-1}\right) = \operatorname{tr}(B)$$

□

Remarque (⚠ Attention):
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\operatorname{tr}(A) = 2 = \operatorname{tr}(B)$
Or, A et B ne sont pas semblables, sinon

$$\begin{aligned}A &= P^{-1}BP \text{ avec } P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}) \qquad = P^{-1}I_2P \\ &= P^{-1}P \\ &= I_2 \neq A\end{aligned}$$

Définition

Corollaire: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base de E. $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. La <u>trace</u> de f est $\operatorname{tr}(A)$.

Ce nombre ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie. On note ce nombre $\operatorname{tr}(f)$. $\square$

Proposition: Soit p un projecteur de E de dimension finie. Alors

$$\operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg}(p)$$

Preuve:
On sait que

$$E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$$

Soit $\mathscr{B}_1 = (e_1, \dots, e_k)$ une base $\operatorname{Ker}(p)$ et $\mathscr{B}_2 = (e_{k+1}, \dots, e_n)$ une base de $\operatorname{Im}(p)$.
On pose $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$. $\mathscr{B}$ est une base de E et

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$$

$$\operatorname{tr}(p) = \operatorname{tr}(A) = n - k = \#\mathscr{B}_2 = \dim(\operatorname{Im} p) = \operatorname{rg}(p)$$

$\square$

Exemple:
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$
$G = \operatorname{Vect}\big((1, 1, 1)\big)$
f la projection sur F parallèlement à G.
$\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$\operatorname{tr}(A) = 2 = \dim(F)$$

5 Conséquences

Proposition: La multiplication matricielle est associative.

Preuve:

$$\begin{cases} A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ C \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K}) \end{cases}$$

Soient $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, $g \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^p)$ et $h \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^q)$ telles que

$$\begin{cases} A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \\ B = \operatorname{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{B}}(g) \\ C = \operatorname{Mat}_{\mathscr{D},\mathscr{E}}(h) \end{cases}$$

où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^p$, $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{D}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^r$, $\mathscr{E}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^q$.

$$\begin{aligned} A(BC) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{D}\mathscr{C}}\big(f\circ(g\circ h)\big) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{D},\mathscr{C}}\big((f\circ g)\circ h\big) \\ &= (AB)C \end{aligned}$$

□

Proposition: Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. On suppose que $AB = I_n$. Alors $(A,B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2$ et $A^{-1} = B$.

Preuve:
Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A$, $g \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = B$.

$$\begin{aligned} AB = I_n \text{ donc } & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f\circ g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) \qquad \text{donc } f\circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} \\ & \text{donc } f\circ g \text{ est injective} \\ & \text{donc } g \text{ est injective} \\ & \text{donc } g \text{ est un isomorphisme} \end{aligned}$$

Or, $f\circ g = \mathrm{id}$ donc $f = f\circ g\circ g^{-1} = g^{-1}$

$$\begin{aligned} BA &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g\circ f) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g\circ g^{-1}) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) \\ &= I_n \end{aligned}$$

Donc $A = B^{-1}$. □

Remarque:
Au passage, on a montré que

$$f \in \mathrm{GL}(E) \iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

et, dans ce cas,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)^{-1}$$

Proposition: Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Le nombre maximal de lignes linéairement indépendantes de A est égal au rang de A.

Preuve:
On appelle rang par lignes le nombre exact de lignes linéairement indépendantes.

Ce rang par ligne est invariant quand on effectue une opération élémentaire sur les lignes.

En appliquant la méthode du pivot de Gauss, on obtient une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & * & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \boxed{1} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

qui a le même rang par lignes que A.

On obsèrve que ce rang r est égal au nombre de pivots.

Soit S le système homogène

$$AX = 0$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. D'après l'algorithme du pivot, la résolution de ce système fournit r inconnues principales et $n - r$ paramètres.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $x_1, \dots, x_{n-r}$ sont les paramètres et $x_{n-r+1}, \dots, x_n$ les inconnues principales.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ telle que

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f).$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$.

$$\begin{aligned} AX = 0 &\iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(0) \\ &\iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\big(f(x)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(0) \\ &\iff f(x) = 0 \\ &\iff x \in \mathrm{Ker}\, f \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble E des solutions de (S) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel isomorphe à $\mathrm{Ker}(f)$.

De plus,

$$\begin{aligned} g : E &\longrightarrow \mathbb{K}^{n-r} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\longmapsto (x_1, \dots, x_{n-r}) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Donc, $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = \dim(E) = n - r$.

D'après le théorème du rang,

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{K}^n) - \dim(\mathrm{Ker}\, f) = n - (n - r) = r.$$

$\square$

Définition: Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

La transposée de A, notée ${}^tA = (b_{j,i})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est définie par

$$\forall i \in [\![1, p]\!]\,, \forall j \in [\![1, n]\!]\,, b_{j,i} = a_{i,j}.$$

Les lignes de ${}^tA$ sont les colonnes de A. Les colonnes de ${}^tA$ sont les lignes de A.

Exemple:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ donc ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Corollaire:

$$\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$$

□

Proposition: $\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array}$ est la symétrie par rapport à $S_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $A_n(\mathbb{K})$ où

$$S_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = A\} = \begin{pmatrix} \ddots & (u) \\ (u) & \ddots \end{pmatrix}$$

et

$$A_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = -A\} = \begin{pmatrix} 0 & & (u) \\ & \ddots & \\ (-u) & & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

Preuve:
Soient $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.

$$\begin{aligned} {}^t(\alpha A + \beta B) &= (\alpha a_{j,i} + \beta b_{j,i})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \alpha(a_{j,i}) + \beta(b_{j,i}) \\ &= \alpha {}^tA + \beta {}^tB \end{aligned}$$

Clairement,

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), {}^t\left({}^tA\right) = A$$

donc $f : A \mapsto {}^tA$ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})})$.

Or,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}) &= \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid f(A) - A = 0\} \\ &= \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = A\} \\ &= S_n(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}) &= \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid f(A) + A = 0\} \\ &= \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = A\} \\ &= A_n(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

□

Proposition: Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

$$^t(AB) = {}^tB{}^tA$$

Preuve:
On pose

$$\begin{cases} A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \\ B = (b_{j,k})_{\substack{1\leqslant j\leqslant p,\\ 1\leqslant k\leqslant q}} \\ {}^tB{}^tA = (c_{k,i})_{\substack{1\leqslant k\leqslant q.\\ 1\leqslant i\leqslant n}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![1,q]\!], \forall i \in [\![1,n]\!], c_{k,i} &= \sum_{j=1}^{p} ({}^tB)_{k,j}({}^tA)_{j,i} \\ &= \sum_{j=1}^{p} b_{j,k}a_{i,j} \\ &= \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}b_{j,k} \\ &= (AB)_{i,k} \\ &= \left({}^t(AB)_{k,i}\right)\end{aligned}$$

Donc, $^t(AB) = {}^tB{}^tA$. □

Corollaire: Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $^tA \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et

$$\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$$

Preuve:
On suppose $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

$AA^{-1} = I_n$ donc $^t(AA^{-1}) = {}^tI_n$

donc $^t(A^{-1}){}^tA = I_n$

donc

$$^tA \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}){}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$$

□

6 Matrices par blocs

Exemple:
Soit p un projecteur de E :

$$E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$$

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ une base de E avec $\begin{cases} \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) \\ \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_n) \end{cases}$

Alors,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

De même, si $\mathscr{s}$ est une symétrie de E,

$$E = \mathrm{Ker}(\mathscr{s} - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(\mathscr{s} + \mathrm{id}_E).$$

Soit $\mathscr{C} = (e_1', \ldots, e_\ell', e_{\ell+1}', \ldots, e_n')$ avec $\begin{cases} \mathrm{Vect}(e_1', \ldots, e_\ell') = \mathrm{Ker}(\mathscr{s} - \mathrm{id}_E), \\ \mathrm{Vect}(e_{\ell+1}', \ldots, e_n') = \mathrm{Ker}(\mathscr{s} + \mathrm{id}_E). \end{cases}$

Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{s}) = \left(\begin{array}{c|c} I_\ell & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-\ell} \end{array}\right)$$

Proposition: Soient F et G supplémentaires dans E :

$$E = F \oplus G.$$

Soit $f \in \mathscr{L}(F)$ et $g \in \mathscr{L}(G)$. Alors

$$\exists! h \in \mathscr{L}(E) h_{|F} = f,\ h_{|G} = g \text{ et } h = f \circ p + g \circ q$$

où $\begin{cases} p \text{ est la projection sur } F \text{ parallèlement à } G \\ q \text{ est la projection sur } G \text{ parallèlement à } F \end{cases}$.

On a aussi $q = \mathrm{id}_E - p$.

Preuve: <u>Analyse</u> Soit $h \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\begin{cases} h_{|F} = f \\ h_{|G} = g \end{cases}$.

Soit $x \in E$. Alors

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in F} + \underbrace{q(x)}_{\in G}$$

Donc,

$$\begin{aligned} h(x) &= h\big(p(x)\big) + h\big(q(x)\big) \\ &= f\big(p(x)\big) + g\big(q(x)\big) \\ &= (f \circ p + g \circ q)(x) \end{aligned}$$

Si h existe, alors

$$h = f \circ p + g \circ q$$

<u>Synthèse</u> On pose $h = f \circ p + g \circ q$.
p, q, f et g sont linéaires donc h aussi.

Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} h(x) &= f\big(p(x)\big) + g\big(q(x)\big) \\ &= f(x) + g(0_E) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

donc $h_{|F} = f$ et de même $h_{|G} = g$.

$\square$

Proposition: On reprend les notations et hypothèses précédentes. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F, et $(f_1, \dots, f_q)$ une base de G. Alors, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$ est une base de E et

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(h) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

où $\begin{cases} A = \mathrm{Mat}_{(e_1, \dots e_p)}(f) \\ B = \mathrm{Mat}_{(f_1, \dots, f_q)}(g) \end{cases}$ $\square$

Proposition: Soient $(A, A') \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $(B, B') \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})^2$.

1. $$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AA' & 0 \\ \hline 0 & BB' \end{array}\right)$$

2. $$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \in \mathrm{GL}_{n+p}(\mathbb{K}) \iff \begin{cases} A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ B \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \end{cases}$$

   et dans ce cas,

   $$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & B^{-1} \end{array}\right)$$

3. $$\mathrm{tr}\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \mathrm{tr}\, A + \mathrm{tr}\, B$$

Preuve: 1. Soit $\Big\{ f \in \mathscr{L}(F)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A, f' \in \mathscr{L}(F)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f') = A', g \in \mathscr{L}(G)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(g) = B, g$

où $\begin{cases} F \oplus G = \mathbb{K}^{n+p}, \\ \dim(F) = n, \dim(G) = p, \\ \mathscr{B} \text{ base de } F, \\ \mathscr{C} \text{ base de } G. \end{cases}$ Soit $\begin{cases} h \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^{n+p}) \text{ tel que } \begin{cases} h_{|F} = f \\ h_{|G} = g \end{cases} \\ h' \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^{n+p}) \text{ tel que } \begin{cases} h'_{|F} = f' \\ h'_{|G} = g' \end{cases} \end{cases}$

Soit $\mathscr{D} = \mathscr{B} \cup \mathscr{C}$ une base de $\mathbb{K}^{n+p}$.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array}\right) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{D}}(h)\, \mathrm{Mat}_{\mathscr{D}}(h') \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{D}}(h \circ h') \end{aligned}$$

Or, $(h \circ h')_{|F} = f \circ f'$ et $(h \circ h')_{|G} = g \circ g'$.

Donc,

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{D}}(h \circ h') &= \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ f') & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(g \circ g') \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} AA' & 0 \\ \hline 0 & BB' \end{array}\right).\end{aligned}$$

$\square$

Proposition: Soient $A, A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B, B' \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C, C' \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $D, D' \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AA' + BC' & AB' + BD' \\ \hline CA' + DC' & CB' + DD' \end{array}\right)$$

Cette formule se généralise à un nombre quelconque de blocs :

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,n} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2,n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{p,1} & A_{p,2} & \cdots & A_{p,n} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c|c|c} A'_{11} & A'_{12} & \cdots & A'_{1,n} \\ \hline A'_{21} & A'_{22} & \cdots & A'_{2,n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A'_{p,1} & A'_{p,2} & \cdots & A'_{p,n} \end{array}\right)$$

Cette matrice se calcyle comme on s'y attend si les dimensions des blocs autorisent les produits.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^2_{\mathscr{B}} \arrow[r, "f", "A"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}"', "P"] & \mathbb{C}^2_{\mathscr{B}} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}"', "P"] \\ \mathbb{C}^2_{\mathscr{C}} \arrow[r, "f", "D"'] \arrow[ur, dashed] & \mathbb{C}^2_{\mathscr{C}} \end{tikzcd}$$

Proposition: Le rang d'une matrice A, c'est la taille de la plus grande matrice carrée inversible que l'on peut extraire de A. $\square$

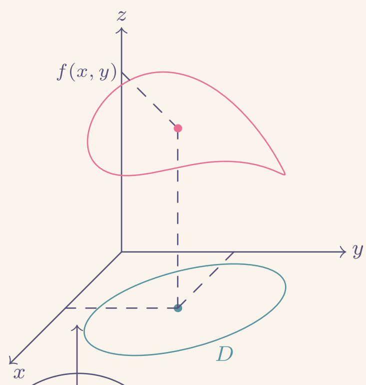
CHAPITRE

22

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

1 Quelques généralités

On s'interesse dans ce chapitre à des fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

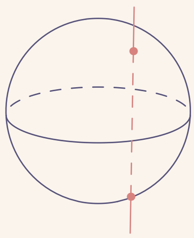


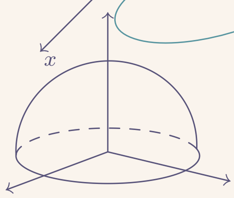
Par exemple,

$$f : (x,y) \mapsto 5xy + \sqrt{x^2+y^2}$$

Une sphère n'est pas la surface représentative d'une fonction. Mais, une demi-sphère oui :

$$f : (x,y) \mapsto \sqrt{1-x^2-y^2}.$$





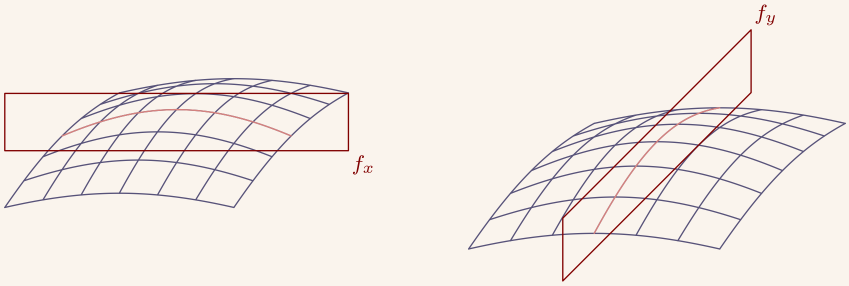
La surface de la demisphère est

$$S = \big\{\big(x, y, f(x,y)\big) \mid (x,y) \in D_O(1)\big\}.$$

où $D_O(1)$ est le disque unitaire à l'origine.

Pointdevuenaïf

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. On fixe y et on étudie $f_y : x \mapsto f(x,y)$. Ou, on fixe x et on étudie $f_x : y \mapsto f(x,y)$.



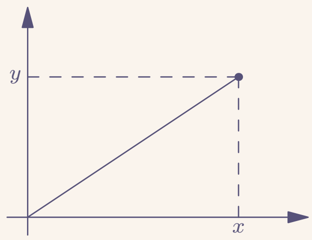
LEBONPOINTDEVUE

On reprend les notions d'une fonction d'une seule variable (limite, continuité, développement limité, ...) que l'on adapte aux fonctions à deux variables.

2 Topologie de $\mathbb{R}^2$

Définition: La <u>norme (euclidienne)</u> de $\mathbb{R}^2$ est l'application définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$



Proposition: La norme euclidienne vérifie :

1. (séparation)
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y)\| = 0 \iff x = y = 0,$$
2. (homogénéité positive)
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \|\lambda(x,y)\| = |\lambda| \, \|(x,y)\|$$
3. (inégalité triangulaire)
$$\forall (x,y), (a,b) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y)+(a,b)\| \leqslant \|(x,y)\| + \|(a,b)\|.$$

Preuve:
Déjà vue en repla c ant (x,y) par $x+iy \in \mathbb{C}$ et $\|(x,y)\|$ par |x+iy| □

Définition: Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

La <u>boule ouverte</u> (ou <u>disque ouvert</u>) de centre (a,b) et de rayon r est

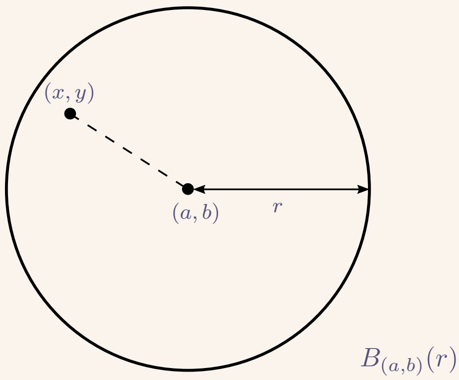
$$B_{(a,b)}(r) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)-(a,b)\| < r\right\}.$$

La <u>boule fermée</u> (ou <u>disque fermé</u>) de centre (a, b) et de rayon r est

$$\overline{B_{(a,b)}}(r) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (a, b)\| \leqslant r\right\}.$$

La <u>sphère</u> (ou <u>boule</u>) de centre (a, b) et de rayon r est

$$S_{(a,b)}(r) = \partial\overline{B_{(a,b)}}(r) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (a, b)\| = r\right\}.$$

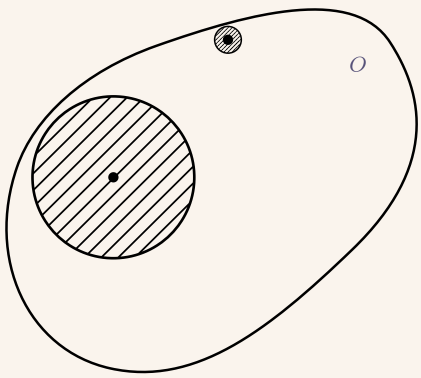


Remarque:
On parle de boule en dimension quelconque.

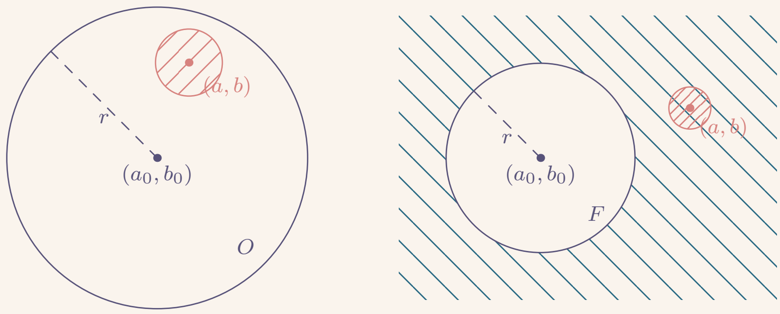
Définition: Une <u>partie ouverte</u> O de $\mathbb{R}^2$ (ou <u>un ouvert</u>) si

$$\forall (x, y) \in O, \exists r > 0, B_{(a,b)}(r) \subset O.$$

Une partie F est <u>fermée</u> su $\mathbb{R}^2 \setminus F$ est ouverte.



Proposition: Une boule ouverte est ouverte. Une boule fermée est fermée.



Preuve:
$\varnothing$ est un ouvert.

Soit B la boule ouverte de centre $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$.

On pose $\rho = \dfrac{1}{2}\big(r - \|(a,b) - (a_0,b_0)\|\big)$. Montrons que

$$B_{(a,b)}(\rho) \subset B_{(a,b)}(r).$$

Soit $(x,y) \in B_{(a,b)}(\rho)$.

$$\begin{aligned}
\|(x,y) - (a_0,b_0)\| &= \|(x,y) - (a,b) + (a,b) - (a_0,b_0)\| \\
&\leqslant \|(x,y) - (a,b)\| + \|(a,b) - (a_0,b_0)\| \\
&< \rho + \|(a,b) - (a_0,b_0)\| = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}\|(a,b) - (a_0,b_0)\| \\
&< r
\end{aligned}$$

Soit F la boule fermée de centre (a_0,b_0) et de rayon $r \geqslant 0$.

Soit $(a,b) \notin F$. On pose

$$\rho = \frac{1}{2}\big(\|(a,b) - (a_0,b_0)\| - r\big) > 0.$$

Montrons que $B_{(a,b)}(\rho) \subset \mathbb{R}^2 \setminus F$.

Soit $(x,y) \in B_{(a,b)}(\rho)$.

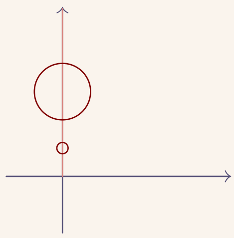
$$\begin{aligned}
\|(x,y) - (a_0,b_0)\| &= \|(x,y) - (a,b) + (a,b) - (a_0,b_0)\| \\
&\geqslant \Big| \underbrace{\|(x,y) - (a,b)\|}_{\leqslant \rho} - \underbrace{\|(a,b) - (a_0,b_0)\|}_{> r} \Big| \\
&\geqslant \|(a,b) - (a_0,b_0)\| - \|(x,y) - (a,b)\| \\
&> \|(a,b) - (a_0,b_0)\| - \rho \\
&> \frac{1}{2}\|(a,b) - (a_0,b_0)\| + \frac{1}{2}r \\
&> r
\end{aligned}$$

donc $(x,y) \notin F$. $\square$

Exemple: 1. $\varnothing$ est ouvert.
$\mathbb{R}^2$ est ouvert.

2. $\varnothing$ est fermé.
$\mathbb{R}^2$ est fermé.

3. $\{(x, 0) \mid x > 0\}$ n'est ni ouverte ni fermé.



Définition: Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $V \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$.
On dit que V est un voisinage de (a, b) s'il existe $r > 0$ tel que

$$B_{(a,b)}(r) \subset V.$$

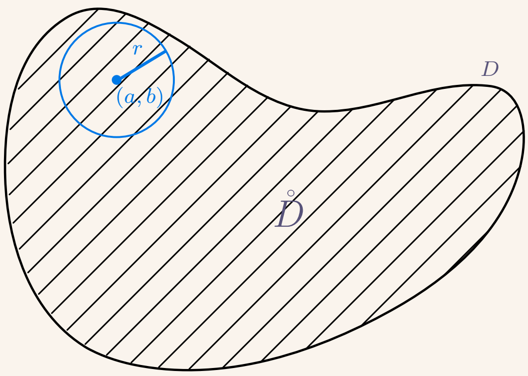
Proposition: Un ouvert non vide est un voisinage en chacun de ces points. □

Définition: Soit $D \subset \mathbb{R}^2$. Un point intérieur de D est un couple $(a, b) \in D$ tel que

$$\exists r > 0, B_{(a,b)}(r) \subset D.$$

en d'autres termes, si D est un voisinage de (a, b).
On note $\mathring{D}$ l'ensemble des points intérieurs à D. C'est l'intérieur de D.

Proposition: $\mathring{D}$ est le plus grand ouvert O de $\mathbb{R}^2$ tel que $O \subset D$.



Preuve:
Soit $(a, b) \in \mathring{D}$.

Par définition, il existe $r > 0$ tel que

$$B_{(a,b)}(r) \subset D.$$

Montrons que $B_{(a,b)}(r) \subset \mathring{D}$.

Soit $(x, y) \in B_{(a,b)}(r)$. Comme $B_{(a,b)}(r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, il existe $\rho > 0$ tel que

$$B_{(x,y)}(\rho) \subset B_{(a,b)}(r)$$

donc $(x, y) \in \mathring{D}$.

Donc $\mathring{D}$ est ouvert, $\mathring{D} \subset D$.

Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que $O \subset D$. Montrons que $O \subset \mathring{D}$.

Soit $(x, y) \in O$. Soit $r > 0$ tel que

$$B_{(x,y)}(r) \subset O \subset D$$

donc $(x, y) \in \mathring{D}$. $\square$

Définition: Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$, $(a, b) \in \mathring{D}$.

On dit que <u>$f(x, y)$ tend vers ℓ quand (x, y) tend vers (a, b)</u> ou que ℓ est <u>une limite</u> de f en (a, b) si

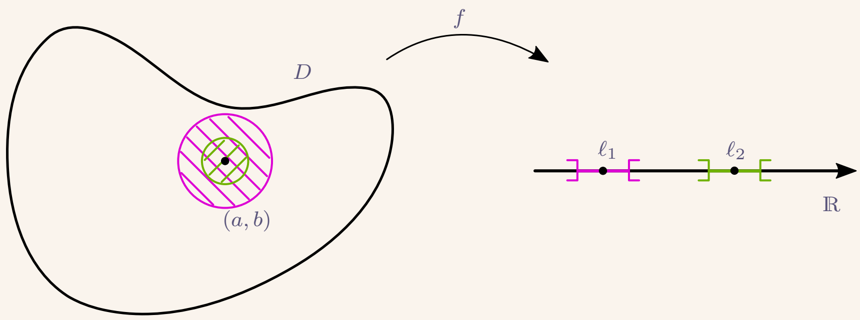
$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall (x, y) \in D, \|(x, y) - (a, b)\| < r \implies |f(x, y) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

en d'autres termes si

$$\forall V \in \mathscr{V}_\ell, \exists W \in \mathscr{V}_{(a,b)}, \forall (x, y) \in W \cap D, f(x, y) \in V.$$

Proposition (unicité de la limite)**:** Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $(a, b) \in \mathring{D}$, $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ telles que ℓ_1 et ℓ_2 sont des limites de f en (a, b).

Alors $\ell_1 = \ell_2$.



Preuve:
On suppose $\ell_1 < \ell_2$. On pose $\varepsilon = \dfrac{\ell_2 - \ell_1}{2} > 0$.

Soit $r_1 > 0$ tel que

$$f\left(B_{(a,b)}(r_1)\right) \subset]\ell_1 - \varepsilon, \ell_1 + \varepsilon[.$$

Soit $r_2 > 0$ tel que

$$f\left(B_{(a,b)}(r_2)\right) \subset]\ell_2 - \varepsilon, \ell_2 + \varepsilon[.$$

On pose $r = \min(r_1, r_2)$ donc

$$B_{(a,b)}(r_1) \cap B_{(a,b)}(r_2) = B_{(a,b)}(r) \neq \varnothing.$$

Soit $(x, y) \in B_{(a,b)}(r)$. Alors,

$$f(x, y) \in]\ell_1 - \varepsilon, \ell_1 + \varepsilon[\cap]\ell_2 - \varepsilon, \ell_2 + \varepsilon[= \varnothing.$$

$\lightning$ $\square$

Définition: Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $(a, b) \in \mathring{D}$.

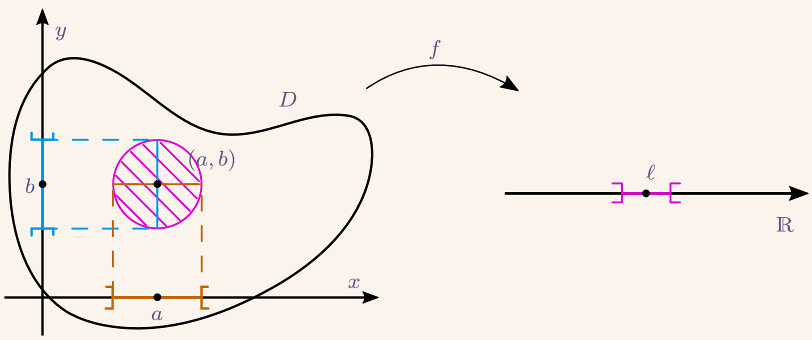
On dit que f est <u>continue</u> en (a, b) si

$$f(x, y) \xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} f(a, b).$$

Proposition: <u>Si</u> $f(x, y) \xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} \ell$

alors $\begin{cases} f(x,b) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \\ f(a,y) \xrightarrow[y\to b]{} \ell. \end{cases}$

Preuve:



□

Contre-exemple : exercice 3.

EXEMPLE: 1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$ limite en $(0,0)$?

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $r = \varepsilon$.

$$\forall (x,y) \in B_{(0,0)}(r), |f(x,y)| = |x| \leqslant \|(x,y)\| < r = \varepsilon$$

Donc $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} 0$.

2. limite $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^3 \end{array}$ en $(0,0)$?

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $r = \sqrt[3]{r} > 0$.

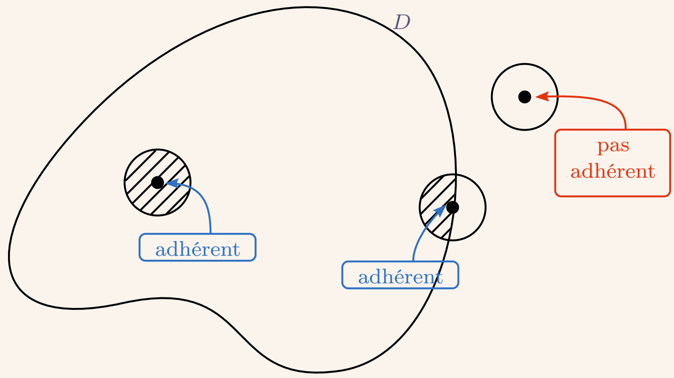
$$\forall (x,y) \in B_{(0,0)}(r), |f(x,y)| = \left|x^3\right| \leqslant \|(x,y)\|^3 < r^3 = \varepsilon.$$

3. limite de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^3y^2 \end{array}$ en $(0,0)$?

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $r = \sqrt[5]{\varepsilon} > 0$.

$$\forall (x,y) \in B_{(0,0)}(r), |f(x,y)| = \left|x^3y^2\right| \leqslant \|(x,y)\|^3\|(x,y)\|^2 < r^5 = \varepsilon.$$

Définition: Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.



On dit que (x,y) est adhérent à D si

$$\forall r > 0, B_{(x,y)}(r) \cap D \neq \varnothing.$$

L'ensemble des points adhérents à D est noté $\overline{D}$. On dit que $\overline{D}$ est l'adhérence de D.

Définition: Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(a,b) \in \overline{D}$, $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers ℓ quand (x,y) tend vers (a,b) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall (x,y) \in B_{(a,b)}(r) \cap D, |f(x,y) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Proposition:

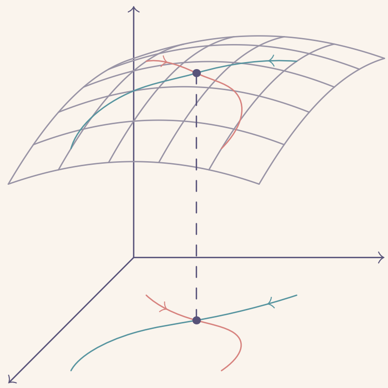
1. Dans ce contexte, il y a unicité de la limite
2. La limite d'une somme, d'un produit, d'un quotien, d'une composée se comporte comme dans le cas d'une seule variable.
3. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ continue. Soient $g : I \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ continues telles que

   $$\forall t \in I, \big(g(t), h(t)\big) \in D.$$

   Alors

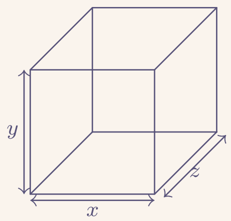
   $$t \in I \mapsto f\big(g(t), h(t)\big) \in \mathbb{R}$$

   est continue.



3 Dérivation

Motivation :



$$S(x, y, z) = 2(xy + xz + yz)$$
$$V(x, y, z) = xyz$$

On cherche à minimiser S avec la contrainte $V = 1$.

Soit $f : \begin{array}{rcl} (\mathbb{R}_*^+)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & S\left(x, y, \dfrac{1}{xy}\right) = 2\left(xy + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x}\right). \end{array}$

On cherche $(a, b) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$ tel que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_*^+), f(x, y) \geqslant f(a, b).$$

Définition: Soit $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(a, b) \in U$.

Si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \in \mathbb{R}$, alors on dit que f a une dérivée partielle suivant x en (a, b) et cette limite est notée

$$\partial f_1(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b).$$

Si $\lim\limits_{y \to b} \dfrac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b} \in \mathbb{R}$, alors on dit que f a une dérivée partielle suivant y en (a, b) et la limite est notée

$$\partial f_2(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

Exemple: 1. $f : (x, y) \mapsto xy + x - y$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x, y) \mapsto y + 1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} : (x, y) \mapsto x - 1.$$

2. $f : (x, y) \mapsto xy + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \mapsto y - \frac{1}{x^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \mapsto x - \frac{1}{y^2}.$$

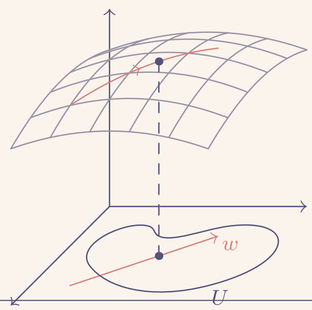
3. Trouver f telle que $\begin{cases} (1) : & \dfrac{\partial f}{\partial x} = y, \\ (2) : & \dfrac{\partial f}{\partial y} = x. \end{cases}$

   D'après (1) :
   $$\forall (x,y), \exists C(y) \in \mathbb{R}, f(x,y) = xy + C(y)$$
   et donc
   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + C'(y)$$
   donc $C'(y) = 0$ et donc C est constante.

4. Trouver f telle que $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -y, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x. \end{cases}$

   Ce n'est pas possible !

Définition:
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert. Soit $(a,b) \in U$. Soit $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$.
Si
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tw_1, b + tw_2) - f(a,b)}{t}$$
existe et est réelle, alors on dit que f a une dérivée dans la direction de w et la limite est notée
$$\mathrm{d}f(w)\,(a,b) = D_w(f)\,(a,b).$$



Exemple:

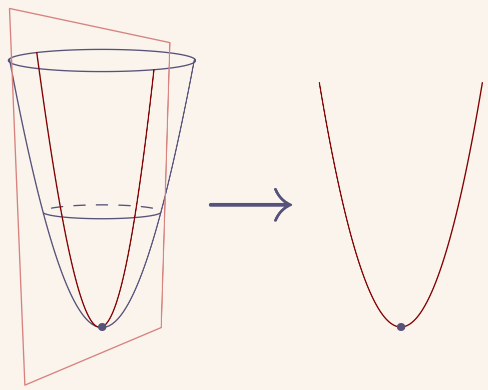
$$\begin{aligned} f : \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

On pose $(a,b) = (1,2)$, $w = (w_1, w_2) = (1,1)$.

$$\begin{aligned} \frac{f(1+t, 2+t) - f(1,2)}{t} &= \frac{1}{t}\left((1+t)(2+t) + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2+t} - 3 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{t}\left(\cancel{2} + 3t + o(t) + \cancel{1} - t + o(t) + \frac{1}{2}\left(\cancel{1} - \frac{t}{2} + o(t)\right) - \cancel{3} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{t}\left(\frac{7}{4}t + o(t)\right) \\ &= \frac{7}{4} + o(1) \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Donc,
$$\mathrm{d}f(1,1)\,(1,2) = \frac{7}{4}.$$

Remarque:



Théorème: Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $(a, b) \in U$. On suppose que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent en (a, b) et sont **continues** en (a, b). Alors,

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (a + h, b + k) \in U,$$
$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \underset{(h,k)\to(0,0)}{o}\big(\|(h, k)\|\big).$$

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues.

□

Remarque:
En physique, cette formule correspond à :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= f(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y) - f(x, y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Proposition: Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ en $(a, b) \in U$. Alors,

$$\forall w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{d}f(w)\,(a, b) = w_1\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + w_2\frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

Preuve:

Soit $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $t \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\big(f(a+tw_1, b+tw_2) - f(a,b)\big) &= \frac{1}{t}\left(tw_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + tw_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \underset{t\to 0}{o}\big(\|tw\|\big)\right)\\ &= w_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + w_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \underset{t\to 0}{o}(1)\\ &\xrightarrow[t\to 0]{} w_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + w_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).\end{aligned}$$

□

Définition: Avec les hypothèses précédentes, en posant

$$\nabla f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

on obtient

$$\mathrm{d}f(w)\,(a,b) = \langle w \mid \nabla f(a,b)\rangle$$

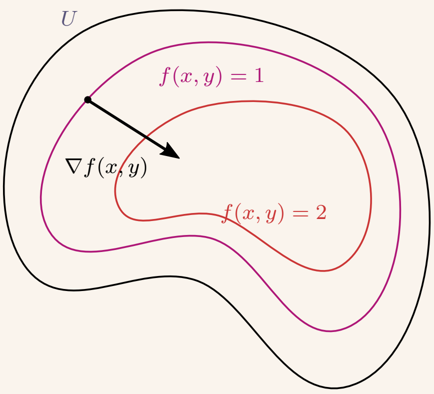
où $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est le produit scalaire.

Le vecteur $\nabla f(a,b)$ est appelé gradient de f en (a,b).

Le développement limité à l'ordre 1 de f devient

$$f\big((a,b)+w\big) = f(a,b) + \langle w \mid \nabla f(a,b)\rangle + \underset{w\to 0}{o}(\|w\|)$$

Proposition: Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.



∇f est orthogonal au lignes de niveaux de f, son orientation va dans le sens d'une augmentation de f.

Preuve:

Soit $\gamma : I \to U$ une courbe de niveau :

$$\forall t \in I, f\big(\gamma(t)\big) = \text{cste}.$$

D'après le lemme suivant :

$$\forall t \in I, 0 = (f \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f\big(\gamma'(t)\big)\big(\gamma(t)\big) = \big\langle \gamma'(t) \mid \nabla f\big(\gamma(t)\big)\big\rangle$$

Donc $\nabla f\big(\gamma(t)\big)$ est orthogonal à $\gamma'(t)$.

Pour tout $t \in I$, on pose $w(t) = t\,\nabla f\big(\gamma(t)\big)$. Donc

$$f\big(\gamma(t) + w(t)\big) = f\big(\gamma(t)\big) + t\|\nabla f(\gamma(t))\|^2 + \underset{t\to 0}{o}(t)$$

Pour t assez petit, $f\big(\gamma(t) + w(t)\big) - f\big(\gamma(t)\big)$ est du même signe que t. □

Remarque:

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto -mgz \end{aligned}$$

l'énerge potentielle de pesenteur

On a donc

$$\nabla V(x,y,z) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = (0,0,-mg) = \vec{P}.$$

Lemme: Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, $\gamma : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & U \\ t & \longmapsto & \big(x(t), y(t)\big) \end{array}$ où x et y sont dérivables.

On pose

$$\forall t \in I, \gamma'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big).$$

Alors $f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et

$$\begin{aligned} \forall t \in I, (f\circ\gamma)'(t) &= \mathrm{d}f\big(\gamma'(t)\big)\big(\gamma(t)\big) \\ &= \big\langle \gamma'(t) \mid \nabla f\big(\gamma(t)\big)\big\rangle \\ &= x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t),y(t)\big) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t),y(t)\big). \end{aligned}$$

Preuve:
On fixe $t \in I$.

$$\begin{aligned} \forall h \neq 0, \frac{f\circ\gamma(t+h) - f\circ\gamma(t)}{h} &= \frac{1}{h}\big(f(\gamma(t)) + h\gamma'(t) + \underset{h\to 0}{o}(h) - f(\gamma(t))\big) \\ &= \frac{1}{h}\Big(\cancel{f(\gamma(t))} + \big\langle h\gamma'(t) \mid \nabla f(\gamma(t))\big\rangle + \underset{h\to 0}{o}(\|h\gamma'(t)\|) - \cancel{f(\gamma(t))}\Big) \\ &= \big\langle \gamma'(t) \mid \nabla f(\gamma(t))\big\rangle + \underset{h\to 0}{o}(1) \\ &\xrightarrow[h\to 0]{} \big\langle \gamma'(t) \mid \nabla f(\gamma(t))\big\rangle \end{aligned}$$

□

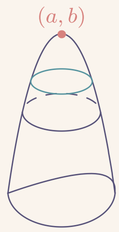
Définition: Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $(a,b) \in U$. On dit que (a,b) est un <u>point critique</u> de f si $\nabla f(a,b) = 0$ i.e. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

Dans ce cas, $f(a,b)$ est appelé <u>valeur critique</u> de f.

Proposition:
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $(a,b) \in U$ tel que

$$\exists r > 0, \forall (x,y) \in B_{(a,b)}(r), f(x,y) \leqslant f(a,b)$$

Alors $\nabla f(a,b) = (0,0)$.



Preuve:
Soit $g : x \mapsto f(x,b)$. $g(a)$ est un maximum local de g donc $g'(a) = 0$.

Or, $g'(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$

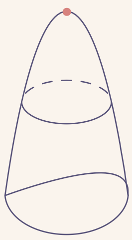
donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$.

Soit $h : y \mapsto f(a,y)$. On a de même $h'(b) = 0$.

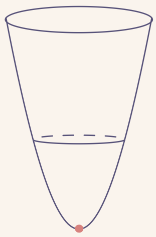
Or, $h'(b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

Donc, $\nabla f(a,b) = (0,0)$. $\square$

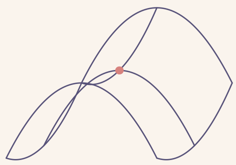
Remarque:
Un minimum local est aussi une valeur critique.



(a) Maximum local



(b) Minimum local



(c) Point de selle / Point col

Exemple:
On revient à l'exemple donné en introduction :

$$\begin{aligned} f : \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto 2\left(xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

$\left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$.

On a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\left(y - \dfrac{1}{x^2}\right), \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\left(x - \dfrac{1}{y^2}\right). \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \\
\iff &\begin{cases} y = \dfrac{1}{x^2} \\ x = \dfrac{1}{y^2} \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} y = \dfrac{1}{x^2} \\ x = x^4 \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

On vérivie que f présente en effet un minium local en $(1,1)$.

$$f(1,1) = 6$$

On fixe $y \in \mathbb{R}_*^+$ et

$$g : x \mapsto 2\left(xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, g'(x) = 2\left(y - \frac{1}{x^2}\right).$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{y}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$2\left(2\sqrt{y} + \frac{1}{y}\right)$	$\nearrow$	

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \forall y \in \mathbb{R}_*^+, f(x,y) \geqslant 2\left(2\sqrt{y} + \frac{1}{y}\right)$$

Soit $h : y \mapsto 2\sqrt{y} + \dfrac{1}{y}$. On a

$$\forall y > 0, h'(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{y^2} = \frac{y\sqrt{y} - 1}{y^2} = \frac{y^{\frac{3}{2}} - 1}{y^2}$$

y	0		1		$+\infty$
$h'(y)$		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	3	$\nearrow$	

Donc,

$$\forall x, y > 0, f(x,y) \geqslant 2 \times 3 = 6 = f(1,1).$$

Proposition (règle de la chaîne)**:** Soit $f : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$.

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & U \\ (u,v) & \longmapsto & \varphi(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big) \end{array}$.

On suppose que x et y sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur V.

Alors, $f \circ \varphi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f\big(\varphi(u,v)\big) \end{array}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\begin{aligned}\forall (u_0, v_0) \in V, \frac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial u}(u_0,v_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(u_0,v_0)\big) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(u_0,v_0)\big)\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall (u_0, v_0) \in V, \frac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial v}(u_0,v_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(u_0,v_0)\big) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(u_0,v_0)\big)\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\end{aligned}$$

Exemple (changement de coordonnées polaires):
On pose

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}_*^+ \times]0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \big(R_*^+ \times \{0\}\big) \\ (r,\theta) &\longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}^2 \setminus \big(R_*^+ \times \{0\}\big) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g : \overbrace{\mathbb{R}_*^+ \times]0, 2\pi[}^{=V} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (r,\theta) &\longmapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta).\end{aligned}$$

$$\forall (r_0, \theta_0) \in V,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r}(r_0,\theta_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r_0\cos\theta_0, r_0\sin\theta_0)\cos\theta_0 \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(r_0\cos\theta_0, r_0\sin\theta_0)\sin\theta_0 \\ &= 2r_0\cos^2\theta_0 + 2r_0\sin^2(\theta_0) \\ &= 2r_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r_0,\theta_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r_0\cos\theta_0, r_0\sin\theta_0)r_0\sin\theta_0 \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(r_0\cos\theta_0, r_0\sin\theta_0)r_0\cos\theta_0 \\ &= -2{r_0}^2\cos(\theta_0)\sin(\theta_0) + 2{r_0}^2\sin(\theta_0)\cos(\theta_0) \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc,

$$g(r,\theta) = r^2.$$

Exemple:
Résoudre
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{x^2+y^2}. \end{cases}$$

On pose $g : (r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r} &= \frac{1}{r}\cos^2\theta + \frac{1}{r}\sin^2\theta = \frac{1}{r}, \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} &= -\cos(\theta)\sin(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta) = 0. \end{aligned}$$

Donc,
$$\exists C \in \mathbb{R}, g : (r, \theta) \mapsto \ln r + C$$
d'où,
$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, f(x, y) &= \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C. \end{aligned}$$

Remarque:
Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x, y) \in U$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\nabla f(x,y)\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Soit
$$\begin{aligned} \varphi : V &\longrightarrow U \\ (u, v) &\longmapsto \big(x(u,v), y(u,v)\big) \end{aligned}$$
avec x, y de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $g = f \circ \varphi$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\nabla g(u,v)\right) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}}_{J(u,v)} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\ &= J(u,v)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\nabla f(x,y)\right) \end{aligned}$$

où $J(u,v) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\nabla x(u,v)\right) \vdots \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\nabla y(u,v)\right)\big)$.

On dit que $J(u,v)$ est la jacobienne de φ en (u,v). L'application linéaire canoniquement associée à $J(u,v)$ est la différentielle de φ en (u,v) noté $\mathrm{d}\varphi(u,v)$.

On a $\mathrm{d}\varphi(u,v) \in \mathscr{L}(R^2)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\mathrm{d}\varphi(u,v)\big) = J(u,v)$.

Par exemple, la jacobienne du changement de coordonnées polaires est

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

$\underbrace{\det(J)}_{\text{le jacobien}} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$

Dans une intégrale double, si $(x,y) = \varphi(u,v)$, alors $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \det(J)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

Ici,

$$\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta.$$

Preuve:
On pose $(x_0,y_0) = \varphi(u_0,v_0)$. Pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(u_0+h, v_0+k) \in V$, en posant $g = f \circ \varphi$.

$$\begin{aligned}
g(u_0+h, v_0+h) &= f\big(x(u_0+h,v_0+k), y(u_0+h,v_0+k)\big) \\
&= f\Big(x(u_0,v_0) + h\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) + k\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) + o\left(\|(h,k)\|\right), \\
&\qquad y(u_0,v_0) + h\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) + k\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) + o\left(\|(h,k)\|\right)\Big) \\
&= f(x_0,y_0) \\
&\quad + \left(h\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) + k\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) + o(\|(h,k)\|)\right)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\
&\quad + \left(h\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) + k\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) + o(\|(h,k)\|)\right)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\
&\quad + o(\|(h,k)\|) \\
&= f(x_0,y_0) \\
&\quad + h\left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \\
&\quad + k\left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \qquad + o(\|(h,k)\|) \\
&= g(u_0,v_0) + h\frac{\partial g}{\partial u}(u_0,v_0) + k\frac{\partial g}{\partial v}(u_0,v_0) + o(\|(h,k)\|)
\end{aligned}$$

Par identification,

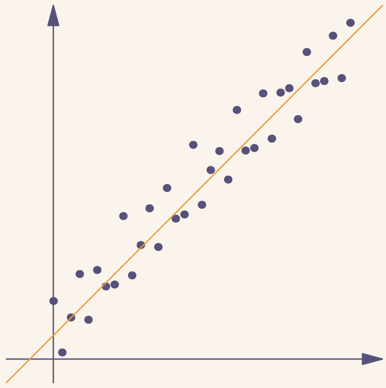
$$\frac{\partial g}{\partial u}(u_0,v_0) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u_0,v_0) = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

□

Exemple (Régression linéaire):



$$y = ax + b$$

On fixe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varepsilon(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (ax_i + b)\big)^2$$

l'erreur totale.

On veut minimiser $\varepsilon(a,b)$. On a

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial a}(a,b) = -2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)x_i, \\ \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial b}(a,b) = -2\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b). \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
(a,b) \text{ point critique de } \varepsilon &\iff \begin{cases} a\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ a\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \overline{x}^2\right) = \overline{y} - \overline{xy} \\ b = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{xy} \end{cases} \\
&\quad \text{où } \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \\
&\iff \begin{cases} a = \dfrac{\operatorname{Cov}(x,y)}{V(x)} \\ b = \overline{y} - a\overline{x} \end{cases}
\end{aligned}$$

Coefficient de corrélation : $\dfrac{\operatorname{Cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} \in [-1,1]$

CHAPITRE

23

DÉNOMBREMENT

1 Cardinal d'un ensemble

Lemme: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$, et $X \subsetneq [\![1, n]\!]$ avec $X \neq \varnothing$ ($\subsetneq$ signifie inclus et différent).

Alors
$$\exists\, 0 < p < n, \exists f : X \to [\![1, p]\!] \text{ bijective }.$$

Preuve (par récurrence sur n)*:*
On pose, pour $n \geqslant 2$,

$$\mathscr{P}(n) : \text{“}\forall X \subsetneq [\![1, n]\!] \text{ tel que } X \neq \varnothing, \exists\, 0 < p < n, \exists f : X \to [\![1, p]\!] \text{ bijective”}$$

— Soit $X \subsetneq [\![1, 2]\!]$ avec $X \neq \varnothing$. Par définition d'une inclusion,

$$X = \{1\} \text{ ou } X = \{2\}.$$

On pose $p = 1$.
Si $X = \{1\}$, alors on pose

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow [\![1, 1]\!] = \{1\} \\ 1 &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

f est bien bijective.
Si $X = \{2\}$, alors on pose

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \{1\} \\ 2 &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

De nouveau, f est bijective.
Ainsi, $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

— Soit $n \geqslant 2$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie. Soit $X \subsetneq [\![1, n+1]\!]$ avex $X \neq \varnothing$.
<u>Cas1</u> On suppose que $n + 1 \notin X$.
Alors $X \subset [\![1, n]\!]$.

— Si $X = \llbracket 1, n \rrbracket$, alors on pose $p = n < n+1$ et $f : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \llbracket 1, p \rrbracket = X \\ i & \longmapsto & i \end{array}$ est bijective.

— Si $X \subsetneq \llbracket 1, n \rrbracket$, d'après $\mathscr{P}(n)$, il existe $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et une bijection $f : X \to \llbracket 1, p \rrbracket$.
On a bien $p < n+1$.

<u>Cas2</u> $n+1 \in X$. On pose $Y = X \setminus \{n+1\}$. Ainsi $Y \subset \llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

— Si $Y = \llbracket 1, n \rrbracket$, alors $X = \llbracket 1, n \rrbracket \cup \{n+1\}$: $\lightning$

— Si $Y = \varnothing$, alors $X = \{n+1\}$. On pose donc $p = 1 < n+1$ et $f : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \llbracket 1, p \rrbracket = \{1\} \\ n+1 & \longmapsto & 1 \end{array}$ est bijective.

— On suppose $Y \neq \varnothing$. D'après $\mathscr{P}(n)$, il existe $q \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $g : Y \to \llbracket 1, q \rrbracket$ bijective.

On pose $f : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \llbracket 1, q+1 \rrbracket \\ x & \longmapsto & \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq n+1, \\ q+1 & \text{si } x = n+1. \end{cases} \end{array}$

On pose aussi $p = q+1 \leqslant n < n+1$. f est bijective.
On pose

$$\begin{aligned} h : \llbracket 1, q+1 \rrbracket &\longrightarrow X \\ i &\longmapsto \begin{cases} g^{-1}(i) & \text{si } i \leqslant q, \\ n+1 & \text{si } i = q+1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, q+1 \rrbracket, f\big(h(i)\big) &= \begin{cases} f\big(g^{-1}(i)\big) & \text{si } i \leqslant q \\ f(n+1) & \text{si } i = q+1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} g\big(g^{-1}(i)\big) & \text{si } i \leqslant q \\ q+1 & \text{si } i = q+1 \end{cases} \\ &= i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in X, h\big(f(x)\big) &= \begin{cases} h\big(g(x)\big) & \text{si } x \neq n+1 \\ h(q+1) & \text{si } x = n+1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} g^{-1}\big(g(x)\big) & \text{si } x \neq n+1 \\ n+1 & \text{si } x = n+1 \end{cases} \\ &= x \end{aligned}$$

$\square$

Lemme: Soient n, p deux entiers non-nuls et $f : \llbracket 1, p \rrbracket \to \llbracket 1, n \rrbracket$ une surjection. Alors $p \geqslant n$.

Preuve (par récurrence sur n)*:*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathscr{P}(n) : \text{“ } \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall f : \llbracket 1, p \rrbracket \to \llbracket 1, n \rrbracket, f \text{ surjective } \implies p \geqslant n.\text{”}$$

— Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : \llbracket 1, p \rrbracket \to \llbracket 1, 1 \rrbracket = \{1\}$. On suppose f surjetive. Nécessairement, $p \geqslant 1$.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : \llbracket 1, p \rrbracket \to \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. On

suppose f surjective. On veut montrer que $p \geqslant n+1$.
On pose
$$X = f^{-1}\big(\llbracket 1,n \rrbracket\big) = \{i \in \llbracket 1,p \rrbracket \mid f(i) \neq n+1\}.$$
Commme f est surjective, $X \neq \varnothing$ et $X \neq \llbracket 1,p \rrbracket$. D'après le lemme précédent, il existe $0 < q < p$ et $g : X \to \llbracket 1,q \rrbracket$ bijective.
Ainsi $f \circ g^{-1} : \llbracket 1,q \rrbracket \to \llbracket 1,n \rrbracket$ est surjective.
D'après $\mathscr{P}(n)$, $q \geqslant n$.
Si $p \leqslant n$, alors $q < p \leqslant n$: $\lightning$
Donc $p > n$ et donc $p \geqslant n+1$.

□

Lemme: Soient $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$, $f : \llbracket 1,p \rrbracket \to \llbracket 1,n \rrbracket$. Alors $p \leqslant n$.

Preuve:
On pose
$$\begin{aligned} g : \llbracket 1,n \rrbracket &\longrightarrow \llbracket 1,p \rrbracket \\ i &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } f^{-1}\big(\{i\}\big) = \varnothing, \\ j & \text{si } f^{-1}\big(\{i\}\big) = \{j\}. \end{cases} \end{aligned}$$
g est surjective. Soit $k \in \llbracket 1,p \rrbracket$, alors $g\big(f(k)\big) = k$ car k est un antécédant de $f(k)$ par f.

D'après le lemme précédent, $n \geqslant p$. □

Corollaire: Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $f : \llbracket 1,n \rrbracket \to \llbracket 1,p \rrbracket$ bijective. Alors $n = p$

Définition: Soit X un ensemble. On dit que X est fini si $X = \varnothing$ ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection $f : X \to \llbracket 1,n \rrbracket$.

Soit X un ensemble fini. Le cardinal de X est
- 0 si $X = \varnothing$
- sinon, c'est le seul entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel il existe une bijection de X dans $\llbracket 1,n \rrbracket$.

On le note $\mathrm{Card}(X)$, $\#X$ ou $|X|$.

Proposition: Soit E un ensemble fini et $X \in \mathscr{P}(E)$.

Alors X est fini et $\#X \leqslant \#E$.

Si $\#X = \#E$, alors $X = E$.

Preuve: Cas1 Si $E = \varnothing$, alors $X = \varnothing$.
Cas2 $E \neq \varnothing$. On pose $n = \#E \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : E \to \llbracket 1,n \rrbracket$ une bijection.
On suppose $X \neq \varnothing$. On pose $Y = f(X) \subset \llbracket 1,n \rrbracket$
- Si $Y = \llbracket 1,n \rrbracket$, alors $X = E$ et donc $\#X = n \leqslant \#E$.
- Si $Y \subsetneq \llbracket 1,n \rrbracket$, comme $Y \neq \varnothing$, il existe $p \in \llbracket 1,n-1 \rrbracket$ et $g : Y \to \llbracket 1,p \rrbracket$: une bijection.

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow [\![1,p]\!] \\ x &\longmapsto g\big(f(x)\big) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & {[\![1,p]\!]} \end{tikzcd}$$

Montrons que h est bijective. On pose

$$\begin{aligned} k : [\![1,p]\!] &\longrightarrow X \\ i &\longmapsto f^{-1}\big(g^{-1}(i)\big). \end{aligned}$$

h et k sont réciproques l'une de l'autre, donc $\#X = p \leqslant n$.
On suppose $X = \varnothing$, alors $\#X = 0 < n$.

$\square$

Proposition: Soit E un ensemble fini, $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tel que $A \cap B = \varnothing$.
Alors
$$\#(A \cup B) = \#A + \#B.$$

Preuve:
Le résultat est évident si $A = \varnothing$ et $B = \varnothing$.

On suppose $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$. On pose $a = \#A$ et $\#B$. Soient

$$\begin{cases} f : A \to [\![1,a]\!] & \text{une bijection} \\ g : B \to [\![1,b]\!] & \text{une bijection} \end{cases}$$

On pose

$$\begin{aligned} h : A \cup B &\longrightarrow [\![a+b]\!] \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A, \\ a + g(x) & \text{si } x \in B. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $A \cap B = \varnothing$, h est bien définie.

Soit

$$\begin{aligned} k : [\![1,a+b]\!] &\longrightarrow A \cup B \\ i &\longmapsto \begin{cases} f^{-1}(i) & \text{si } i \leqslant a \\ g^{-1}(i-a) & \text{si } i > a. \end{cases} \end{aligned}$$

On vérifie que h et k sont réciproques l'une de l'autre.

Donc $\#(A \cup B) = a + b$. $\square$

Proposition: Soient E un ensemble fini, $n \in \mathbb{N}^*$, $(A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{P}(E)^n$ telles que

$$\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing.$$

Alors
$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \#A_i$$

Preuve (par récurrence sur n)*:*
On a traité le cas $n = 2$ précédemment.

Soit $n \geqslant 2$ pour lequel le résultat est vrai. Soit $(A_1, \dots, A_{n+1}) \in \mathscr{P}(E)^{n+1}$ telles que
$$\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing.$$

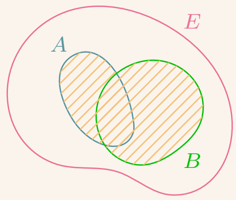
On pose $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Alors
$$\begin{aligned} A \cap A_{n+1} &= \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1} \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1}) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} \varnothing \\ &= \varnothing. \end{aligned}$$

Donc,
$$\begin{aligned} \#(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) &= \#(A \cup A_{n+1}) \\ &= \#A = \#A_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \#A_i + \#A_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \#A. \end{aligned}$$

□

Proposition: Soient E un ensemble fini, $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Alors
$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

Preuve:



On pose $\begin{cases} C = A \cap B \\ A' = A \setminus C \\ B' = B \setminus C. \end{cases}$

Alors
$$\begin{cases} A' \cup B' \cup C = A \cup B, \\ A' \cap B' = A' \cap C = B' \cap C = \varnothing. \end{cases}$$

D'où
$$\begin{aligned} \#(A \cup B) &= \#(A' \cup B' \cup C) \\ &= \#A' + \#B' + \#C. \end{aligned}$$

Or,
$$\begin{cases} A = A' \cup C \\ A' \cap C = \varnothing \end{cases}$$

donc
$$\#A = \#A' + \#C$$

donc
$$\#A' = \#A - \#C.$$

De même,
$$\#B' = \#B - \#C.$$

D'où
$$\begin{aligned} \#(A \cup B) &= \#A - \#C + \#B - \#C + \#C \\ &= \#A + \#B - \#C \end{aligned}$$

□

Au passage, on a prouvé la proposition suivante :

Proposition: Soient E un ensemble fini, $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ avec $B \subset A$. Alors
$$\#(A \setminus B) = \#A - \#B.$$

□

Exemple:
Soit E un ensemble fini, $(A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3$.
$$\begin{aligned} \#(A \cup B \cup C) = \#A &+ \#B + \#C \\ &- \#(A \cap B) - \#(B \cap C) - \#(A \cap C) \\ &+ \#(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Soit $(A, B, C, D) \in \mathscr{P}(E)^4$.
$$\begin{aligned} \#(A \cup B \cup C \cup D) = {} & \#A + \#B + \#C + \#D \\ & - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(A \cap D) - \#(B \cap C) - \#(B \cap D) - \#(C \cap D) \\ & + \#(A \cap B \cap C) + \#(A \cap B \cap D) + \#(B \cap C \cap D) + \#(A \cap C \cap D) \\ & - \#(A \cap B \cap C \cap D). \end{aligned}$$

En généralisant, on obtient la formule du crible :
$$\# \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_k \leqslant n} \#(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

Proposition: Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \to F$.

1. Si f est injective, alors $\#E \leqslant \#F$,
2. Si f est surjective, alors $\#E \geqslant \#F$,
3. Si f est bijective, alors $\#E = \#F$,

Preuve: 1.
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & F \arrow[d, "bij"] \\ \llbracket 1, n \rrbracket \arrow[u, "bij"] \arrow[r, dashed, "inj"] & \llbracket 1, p \rrbracket \end{tikzcd}$$

2.
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "surj"] & F \arrow[d, "bij"] \\ \llbracket 1, n \rrbracket \arrow[u, "bij"] \arrow[r, dashed, "surj"] & \llbracket 1, p \rrbracket \end{tikzcd}$$

□

Proposition (principe des tiroirs – pigeonhole principle)**:** Soit $f : E \to F$ telle que $\#E > \#F$. Alors
$$\exists (x,y) \in E^2, \begin{cases} x \neq y, \\ f(x) = f(y) \end{cases}$$

Preuve:
C'est la contraposée du point 1. de la proposition précédente. □

Proposition: Soit $E \to F$ où E et F sont finis et $\#E = \#F$.
$$f \text{ injective } \iff f \text{ surjective } \iff f \text{ bijective }.$$

Preuve:
— On suppose f injective. Soit
$$\begin{aligned} g : E &\longrightarrow \operatorname{Im}(f) \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$
g est bijective donc $\#E = \#\operatorname{Im} f$. Or, $\#E = \#F$ donc $\operatorname{Im} f = F$ et donc f est surjective.

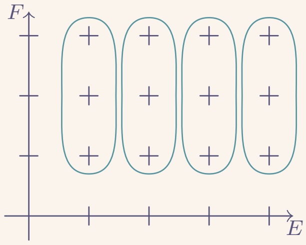
— On suppose f surjective. Alors
$$E = \bigcupdot_{y \in F} f^{-1}(\{y\})$$
donc
$$\#E = \sum_{y \in F} \#f^{-1}(\{y\}) \geqslant \sum_{y \in F} 1 = \#F$$
donc
$$\forall y \in F, \#f^{-1}(\{y\}) = 1$$
donc f est bijective.

□

2 Dénombrement

Proposition: Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et
$$\#(E \times F) = \#E \times \#F.$$

Preuve:
$$E \times F = \bigsqcup_{x \in E} \underbrace{\left\{(x,y) \mid y \in F\right\}}_{F_x}.$$



Donc,
$$\#(E \times F) = \sum_{x \in E} (\#F_x)$$
Pour $x \in E$, soit
$$\begin{aligned} \varphi_x : F_x &\longrightarrow F \\ (x,y) &\longmapsto y. \end{aligned}$$
φ_x est bijective donc $\#F_x = \#F$. D'où
$$\#(E \times F) = \sum_{x \in E} (\#F) = \#(E) \times (\#F).$$
□

Proposition: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \dots, E_n$ des ensembles finis. Alors $\prod_{i=1}^{n} E_i$ est fini et
$$\#\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=1}^{n} (\#E_i).$$

Preuve:
par récurrence sur n. □

Corollaire: Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. Alors
$$\#(E^p) = n^p.$$

En d'autres termes, il y a n^p p-listes de E, où une p-lise de E est un $(x_1, \dots, x_p)$ de E^p.

Définition: Soit E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}^*$. Un p-arrangement de E est une p-liste de E d'éléments deux à deux distincts :

$$(x_1, \dots, x_p) \in E^p \text{ est un } p\text{-arrangement} \iff \forall i \neq j, x_i \neq x_j.$$

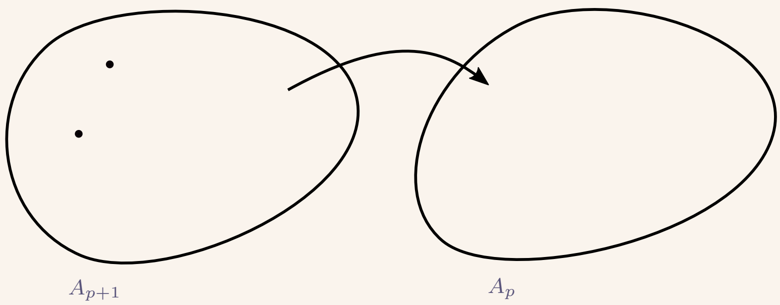
Proposition: Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. Il y a exactement $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ p-arrangements si $p \leqslant n$ et 0 si $p > n$.

Preuve (par récurrence sur p)*:* — Il y a n 1-arrangements de E. Or, $\dfrac{n!}{(n-1)!} = n$.

— Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il y a $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ p-arrangements.
Soit

$$\begin{aligned} f : \mathscr{A}_{p+1} &\longrightarrow \mathscr{A}_p \\ (x_1, \dots, x_{p+1}) &\longmapsto (x_1, \dots, x_p) \end{aligned}$$

où $\mathscr{A}_{p+1}$ est l'ensemble des $(p+1)$-arrangements et $\mathscr{A}_p$ est l'ensemble des p-arrangements.
Soit $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathscr{A}_p$. x a exactement $n - p$ antécédants par f.



D'après le principe des bergers,

$$\begin{aligned}\#\mathscr{A}_{p+1} &= (n-p)\#\mathscr{A}_p \\ &= (n-p)\times\frac{n!}{(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{(n-p-1)!} \\ &= \frac{n!}{\big(n-(p+1)\big)!}\end{aligned}$$

□

Dans la preuve précédente, on a utilisé principe des bergers :

Lemme (principe des bergers)**:** Soit $f : E \to F$ surjective telle que

$$\exists k, \forall y \in F, \#\big(f^{-1}(\{-1\})\big) = k$$

En d'autres termes, tous les éléments de F ont le même nombre d'antécédants.

Si F est fini, alors

$$\#E = k\,\#F.$$

Preuve:

On définit $\sim$ sur E :

$$x \sim y \iff f(x) = f(y).$$

"$\sim$" est une relation d'équivalence sur E. Soit $\mathscr{R}$ un système de représentants :

$$E = \bigcup_{x\in\mathscr{R}}^{\cdot} \mathscr{C}\!\ell(x).$$

On a donc

$$\forall x \in E, \exists! u \in \mathscr{R}, x \sim u.$$

L'application $\begin{array}{ccc}\mathscr{R} & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x)\end{array}$ est bijective donc $\#\mathscr{R} = \#F$.

Soit $x \in \mathscr{R}$.

$$\begin{aligned}\forall y \in E, y \in \mathscr{C}\!\ell(x) &\iff f(y) = f(x) \\ &\iff y \text{ est un antécédant de } f(x)\end{aligned}$$

donc $\#\mathscr{C}\!\ell(x) = k$.

Finalement,

$$\begin{aligned}\#E &= \sum_{x\in\mathscr{R}} \#\big(\mathscr{C}\!\ell(x)\big) \\ &= \sum_{x\in\mathscr{R}} k \\ &= k(\#\mathscr{R}) \\ &= k(\#F).\end{aligned}$$

$\square$

Proposition: Soit E un ensemble fini de cardinal n. Il y a $n!$ permutations de E.

Preuve:
On note $S(E)$ l'ensemble des permutations de E, $\mathscr{A}_n(E)$ l'ensemble des n arrangements de E. On pose $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$ et

$$\begin{aligned} f : S(E) &\longrightarrow \mathscr{A}_n(E) \\ \sigma &\longmapsto \big(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)\big). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : \mathscr{A}_n(E) &\longrightarrow S(E) \\ (b_1, \ldots, b_n) &\longmapsto \left(\sigma : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ a_i & \longmapsto & b_i \end{array}\right). \end{aligned}$$

f et g sont réciproques l'une de l'autre donc

$$\#S(E) = \#\mathscr{A}_n(E) = \frac{n!}{0!} = n!.$$

$\square$

Exemple:
On pose $E = \left\{\pi, e, \sqrt{2}\right\}$. Alors,

$$S(E) = \left\{\mathrm{id}, \left(\begin{array}{c} \pi \mapsto e \\ e \mapsto \pi \\ \sqrt{2} \mapsto \sqrt{2} \end{array}\right), \ldots\right\}$$

Donc,

$$f(\sigma) = \left(e, \pi, \sqrt{2}\right).$$

et alors

$$\begin{aligned} g\left(\sqrt{2}, \pi, e\right) : E &\longrightarrow E \\ \pi &\longmapsto \sqrt{2} \\ e &\longmapsto \pi \\ \sqrt{2} &\longmapsto e. \end{aligned}$$

Définition: Soit E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}^*$. Une <u>p-combinaison</u> de E est une partie de E de cardinal p.

Proposition: Soit E fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. Il y a exactement $\binom{n}{p}$ parties de E de cardinal p.

Preuve:
On note $\mathscr{A}_p(E)$ l'ensemble des p-arrangements et $\mathscr{C}_p(E)$ l'ensemble des p-combinaisons de E.

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathscr{A}_p(E) &\longrightarrow \mathscr{C}_p(E) \\ (x_1, \ldots, x_p) &\longmapsto \{x_1, \ldots, x_p\}. \end{aligned}$$

f est surjective et
$$\forall X \in \mathscr{C}_p(E),\ X \text{ a } p! \text{ antécédants.}$$

D'après le lemme des bergers :

$$\#\mathscr{A}_p(E) = p!\, \#\mathscr{C}_p(E)$$

et donc
$$\#\mathscr{C}_p(E) = \frac{n!}{(n-p)!\ p!} = \binom{n}{p}.$$

□

Corollaire:
$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \binom{n}{p} \in \mathbb{N}.$$

□

Proposition: Soit E et F deux ensembles finis. Alors F^E est fini et
$$\#(F^E) = (\#F)^{\#E}.$$

Preuve:
Soit

$$\begin{aligned} \varphi : F^E &\longrightarrow F^n \\ f &\longmapsto \big(f(x_1), \ldots, f(x_n)\big) \end{aligned}$$

où $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $n = \#E$.

Soit

$$\begin{aligned} \psi : F^n &\longrightarrow F^E \\ (y_1, \ldots, y_n) &\longmapsto \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x_i & \longmapsto & y_i. \end{array} \end{aligned}$$

On a $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{F^n}$ et $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{F^E}$.

Donc
$$\#(F^E) = (\#F)^n.$$

□

Proposition: Soit E fini de cardinal n. Alors $\#\mathscr{P}(E) = 2^n$.

Preuve: Méthode1 Soit

$$\begin{aligned}\varphi : \mathscr{P}(E) &\longrightarrow \{0,1\}^E \\ A &\longmapsto \mathbb{1}_A : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}\end{aligned}$$

φ est bijective :

$$\begin{aligned}\varphi^{-1} : \{0,1\}^E &\longrightarrow \mathscr{P}(E) \\ f &\longmapsto \{x \in E \mid f(x) = 1\}.\end{aligned}$$

On a donc $\#\mathscr{P}(E) = 2^n$.

Méthode2

$$\mathscr{P}(E) = \dot{\bigcup_{p=0}^{n}} \mathscr{C}_p(E)$$

donc

$$\#\mathscr{P}(E) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n$$

Méthode3 (par récurrence sur n).

— $n = 0$ donc $E = \varnothing$ et $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$. donc $\#\mathscr{P}(E) = 1 = 2^n$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que

$$\forall E \text{ de cardinal } n,\ \#\mathscr{P}(E) = 2^n$$

Soit E de cardinal $n+1 > 0$. Soit $a \in E$ et $F = E \setminus \{a\}$.

— Les parties de E qui ne contiennent pas a sont des parties de F et réciproquement : il y en a 2^n.

— A chaque partie de E contenant a, on peut faire correspondre une partie de F en supprimant a de la partie, et réciproquement : il y en a 2^n.

Donc,

$$\#\mathscr{P}(E) = 2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}.$$

□

3 Preuves combinatoires

Proposition:

$$\forall k \leqslant n \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Preuve:
Il y a autant de fa c ons de choisir k éléments parmi n que d'en choisir $n-k$ à exclure.

Formellement :
L'application

$$\begin{aligned}f : \mathscr{C}_k(\llbracket 1,n \rrbracket) &\longrightarrow \mathscr{C}_{n-k}(\llbracket 1,n \rrbracket) \\ X &\longmapsto \llbracket 1,n \rrbracket \setminus X\end{aligned}$$

est bijective. □

Proposition:

$$\forall k \leqslant n,\quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

Preuve:
On pose

$A_{n+1} = \left\{ X \in \mathscr{C}_{k+1}\left([\![1, n+1]\!] \right) \mid n{+}1 \in X \right\}, B_{n+1} = \left\{ X \in \mathscr{C}_{k+1}\left([\![1, n+1]\!] \right) \mid n{+}1 \notin X \right\}.$

donc

$$\mathscr{C}_{k+1}\left([\![1, n+1]\!] \right) = A_{n+1} \uplus B_{n+1}.$$

L'application $f : \begin{array}{ccc} A_{n+1} & \longrightarrow & \mathscr{C}_k\left([\![1, n]\!] \right) \\ X & \longmapsto & X \setminus \{n+1\} \end{array}$ est bijective

Donc

$$B_{n+1} = \mathscr{C}_{k+1}\left([\![1, n]\!] \right)$$

et donc

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k+1} &= \# A_{n+1} + \# B_{n+1} \\ &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}. \end{aligned}$$

□

Proposition: Soit $(A, +, \times)$ un anneau, $(a, b) \in A^2$ tel que $a \times b = b \times a$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Preuve:
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $a_1 = a$ et $a_2 = b$. Alors

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= (a_1 + a_2)(a_1 + a_2) \cdots (a_1 + a_2) \\ &= \sum_{i_1=1}^{2} a_{i_1} \sum_{i_2=1}^{2} a_{i_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{2} a_{i_n} \\ &= \sum_{(i_1, \ldots, i_n) \in \{1,2\}^n} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{(i_1, \ldots, i_n) \in \{1,2\}^n \\ \#\{j \in [\![1,n]\!] \mid i_j = 1\} = k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{(i_1, \ldots, i_n) \in \{1,2\}^n \\ \#\{j \in [\![1,n]\!] \mid i_j = 1\} = k}} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \end{aligned}$$

□

4 Bilan

Principe des tiroirs

Soit $f : E \to F$ avec $\#E > \#F$. Alors
$$\exists x \neq y \in E,\ f(x) = f(y).$$

Soit $f : E \to F$ avec $\#E = \#F$. Alors
$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}.$$

$$\#\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=1}^{n}(\#E_i).$$

$$\#(E^n) = (\#E)^n.$$

Une p-liste est de la forme $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$.

Un p-arrangement est une p-liste d'éléments de E distincts. Il y en a, avec $n = \#E$,
$$\frac{n!}{(n-p)!}.$$

Principe des bergers

Soit $f : E \to F$ telle que chaque élément $y \in F$ ait exactement k antécédants dans F. Alors,
$$\#E = k\#F.$$

Une permutation est une bijection de E dans E. Il y en a $n!$ si $\#E = n$.

Une p-combinaison de E est une partie de E de cardinal p. Il y en a $\binom{n}{p}$ si $n = \#E$.

$$\#(F^E) = (\#F)^{\#E}.$$

$$\#\mathscr{P}(E) = 2^{\#E}.$$

CHAPITRE

24

GROUPE SYMÉTRIQUE

Définition: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Le groupe symétrique est noté S_n : l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ muni de $\circ$.

$$\#S_n = n!$$

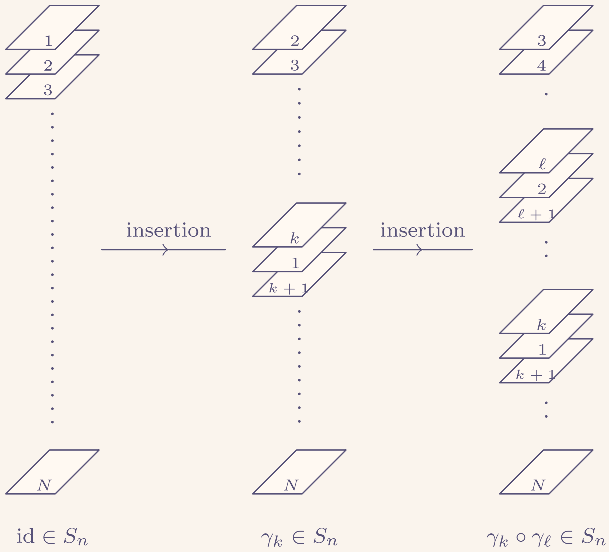
1 Mise en situation

Bon mélange d'un jeu de cartes :

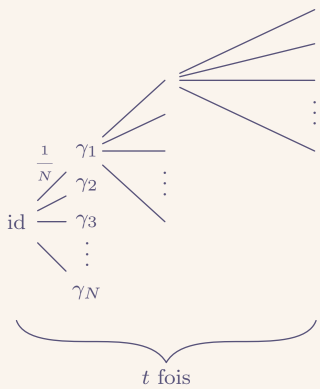
Soit un jeu neuf de N cartes. On procède à un mélange par insertion : on place la carte qui est au-dessus n'importe où dans le paquet, étape que l'on répète t fois.

Pour quelles valeurs de t obtient-on un jeu bien mélangé ?

Modélisation : On numérote les cartes de 1 à N dans l'ordre initial du jeu.



On peut modéliser par un arbre le mélange dont les nœuds sont des permutations des éléments de S_N.



On dit que le jeu est bien mélangé après t insertions si chaque élément de S_N est une <u>feuille</u> de cet arbre et la probabilité d'obtenir cette permutation est $\frac{1}{N!}$.

Avec $N = 4$, on a

$$\gamma_1 = \mathrm{id} \qquad \gamma_2 = \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} \to \begin{matrix}2\\1\\3\\4\end{matrix}$$

$$\gamma_3 = \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} \to \begin{matrix}3\\1\\2\\4\end{matrix} \qquad \gamma_4 = \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} \to \begin{matrix}4\\1\\2\\3\end{matrix}.$$

Avec $k = 2$ et $\ell = 1$,

$$\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} \xrightarrow{\gamma_2 \circ} \underbrace{\begin{matrix}2\\1\\3\\4\end{matrix}}_{\gamma_2} \xrightarrow{\gamma_1 \circ} \underbrace{\begin{matrix}2\\1\\3\\4\end{matrix}}_{\gamma_2}$$

Avec $k = 2$ et $\ell = 2$, on a

$$\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} \to \begin{matrix}2\\1\\3\\4\end{matrix} \to \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix}.$$

Et avec $k = 2$ et $\ell = 3$, on a

$$\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} \to \begin{matrix}2\\1\\3\\4\end{matrix} \to \begin{matrix}1\\3\\2\\4\end{matrix}.$$

$$\gamma_2 \circ \gamma_3 : \begin{matrix}1 \mapsto 1\\2 \mapsto 3\\3 \mapsto 2\\4 \mapsto 4\end{matrix}$$

Est-ce-que toute permutation peut s'écrire comme un produit des γ_k avec $k \in [\![1, N]\!]$?

2 Cycles

Remarque (Notation):
Soit $\sigma \in S_n$.

$$\begin{aligned}\sigma : [\![1, N]\!] &\longrightarrow [\![1, N]\!]\\ i &\longmapsto \begin{cases} * & \text{si } i = 1\\ * & \text{si } i = 2\\ & \vdots\\ * & \text{si } i = N.\end{cases}\end{aligned}$$

On écrit plutôt

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & N\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(N)\end{pmatrix}$$

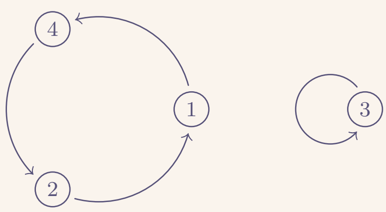
Exemple:
Avec $N = 4$, on a donc

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} \qquad \gamma_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix} \qquad \gamma_4 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

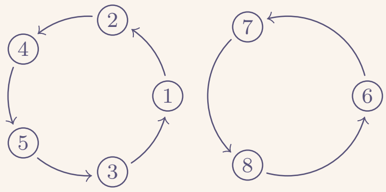
Remarque:
Avec $N = 4$ et

$$\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$



Avec $N = 8$ et

$$\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 7 & 8 & 6\end{pmatrix}$$



Définition: Soit $\sigma \in S_N$ et $x \in [\![1, N]\!]$.

L'<u>orbite</u> de x pour σ est

$$\{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \ldots\} = \{\sigma^i(x) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

On note l'<u>ordre</u> d de σ : si $\sigma \neq \mathrm{id}$, $\begin{cases} \sigma^d = \mathrm{id}, \\ \sigma^{d-1} \neq \mathrm{id}\,. \end{cases}$ L'orbite de x est

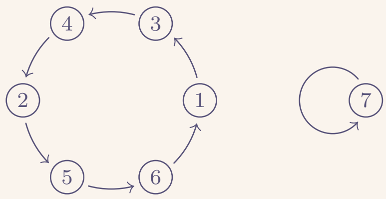
$$\{x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{d-1}(x)\}.$$

Les orbites de σ partitionnent $[\![1, N]\!]$.

Définition: Soit $\gamma \in S_N$. On dit que γ est un <u>k-cycle</u> si γ a $N - k$ points fixes et les k autres éléments sont dans une même orbite.

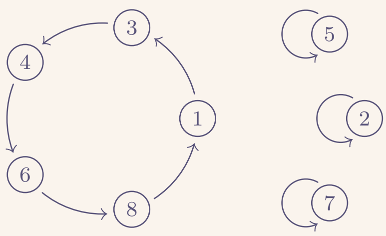
Exemple:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$



σ est un 6-cycle.

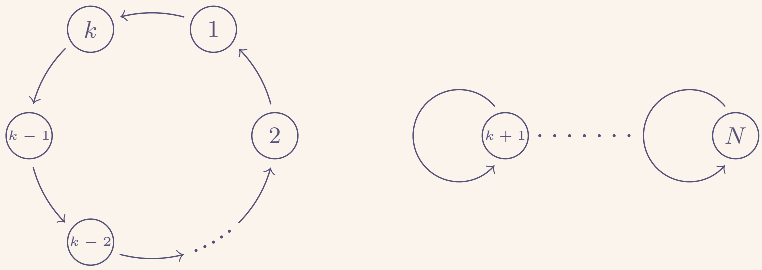
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 5 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$



σ est un 5-cycle.

Exemple:

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & k+1 & \cdots & N \\ k & 1 & 2 & \cdots & k-1 & k+1 & \cdots & N \end{pmatrix}$$



γ_k est un k-cycle.

Remarque (Notation):
Soit γ un k-cycle tel que $\gamma(x) \neq x$. On note

$$\gamma = \begin{pmatrix} x & \gamma(x) & \gamma^2(x) & \cdots & \gamma^{k-1}(x) \end{pmatrix}.$$

Exemple:
Avec

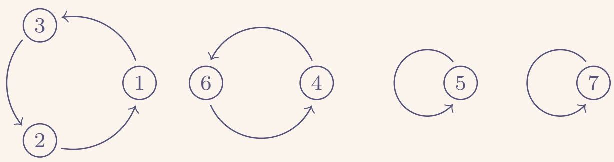
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 5 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{pmatrix} 6 & 8 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 8 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemple:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \sigma.$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \sigma.$$

Exemple:
Avec $N = 4$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition: Soit $\sigma \in S_n$. Le support de σ est
$$\mathrm{Supp}(\sigma) = \{x \in [\![1, n]\!] \mid \sigma(x) \neq x\}.$$

Théorème: Toute permutation de S_n est une composée de cycles à supports disjoints et ces cycles sont uniques.

Exemple:

$$\begin{aligned}\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 10 & 9 & 8 & 1 & 7 & 11 & 3 & 2 & 12 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 10 & 5 & 7 & 3 & 8 & 2 & 9 & 12 & 6 & 11 & 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemple:

$$\begin{aligned}\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 8 & 2 & 1 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Preuve:
Soit $\sigma \in S_n$.

Analyse On suppose que
$$\sigma = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_p$$
où $\forall i \in [\![1, p]\!]$, γ_i est un cycle et $\forall i \neq j, \mathrm{Supp}(\gamma_i) \cap \mathrm{Supp}(\gamma_j) = \varnothing$.
On pose $\gamma_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \end{pmatrix}$. Donc

$$\begin{aligned}\sigma(a_1) &= \gamma_1 \circ \cdots \circ \gamma_p(a_1) \\ &= \gamma_1 \circ \cdot \circ \gamma_{p-1}(a_1) (\text{ car } a_1 \in \mathrm{Supp}(\gamma_1) \text{ donc } a_1 \notin \mathrm{Supp}(\gamma_p)) \\ &\vdots \\ &= \gamma_1(a_1) = a_2.\end{aligned}$$

De même,
$$\sigma(a_2) = \gamma_1(a_2) = a_3$$
$$\vdots$$
$$\sigma(a_{k-1}) = \gamma_1(a_{k-1}) = a_k$$
$$\sigma(a_k) = \gamma_1(a_k) = a_1$$
De même,
$$\forall i \in [\![1, p]\!], \ \mathrm{Supp}(\gamma_i) \text{ est un orbite de } \sigma.$$
En d'autres termes, si σ a pour orbites $O(x_1), O(x_2), \ldots, O(x_p), \{\{x_{p+1}\}, \ldots, \{x_q\}\}$

avec $x_1, \dots, x_p \in \mathrm{Supp}(\sigma)$ alors

$$\begin{cases} \gamma_1 = \begin{pmatrix} x_1 & \sigma(x_1) & \sigma^2(x_1) & \cdots \end{pmatrix} \\ \gamma_2 = \begin{pmatrix} x_2 & \sigma(x_2) & \sigma^2(x_2) & \cdots \end{pmatrix} \\ \quad\vdots \\ \gamma_p = \begin{pmatrix} x_p & \sigma(x_p) & \sigma^2(x_p) & \cdots \end{pmatrix} \end{cases}$$

<u>Synthèse</u> ok !

□

Proposition: Soit γ un k-cycle.

Alors l'ordre de γ est k :

$$\begin{cases} \gamma^k = \mathrm{id} \\ \forall \ell \in [\![1, k-1]\!], \gamma^\ell \neq \mathrm{id} \end{cases}$$

Preuve:
On pose $\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \end{pmatrix}$ avec

$$\forall i \neq j, a_i \neq a_j.$$

Soit $\ell \in [\![1, k-1]\!]$. Alors

$$\gamma^\ell = a_{1+\ell} \neq a_1 \text{ car } 1 + \ell \leqslant k$$

donc $\gamma^\ell \neq \mathrm{id}$.

Soit $i \in [\![1, k]\!]$. Alors

$$\gamma^k(a_i) = a_j$$

avec $\begin{cases} j \in [\![1, k]\!] \\ j \equiv i + k \;\; [k] \end{cases}$ donc $a_j = a_i$.

$$\forall x \notin \{a_1, \dots, a_k\}, \gamma(x) = x$$

donc $\gamma^k(x) = x$ et donc $\gamma^k = \mathrm{id}$. □

Proposition: Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_k \end{pmatrix}$ un k-cycle et $\sigma \in S_n$. Alors

$$\sigma\gamma\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(a_1) & \cdots & \sigma(a_k) \end{pmatrix}$$

est un k-cycle.

Preuve:
Soit $x \notin \{\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_k)\}$. σ est bijective : soit $y \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(y) = x$.

De plus, $y \notin \{a_1, \dots, a_k\}$.

D'où

$$\begin{aligned}\sigma\gamma\sigma^{-1} &= \sigma\gamma\sigma^{-1}\big(\sigma(y)\big)\\ &= \sigma\gamma(y)\\ &= \sigma(y)\\ &= x.\end{aligned}$$

Soit $i \in [\![1, k-1]\!]$.

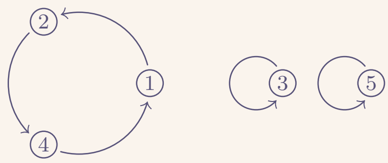
$$\sigma\gamma\sigma^{-1}\big(\sigma(a_i)\big) = \sigma\gamma(a_i) = \sigma(a_{i+1})$$
$$\sigma\gamma\sigma^{-1}\big(\sigma(a_k)\big) = \sigma\gamma(a_k) = \sigma(a_1).$$

□

3 Transpositions

Définition: Une transposition est un cycle de longueur 2 : $\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$ avec $a \neq b$.

Exemple:
Avec $n = 5$ et $\gamma = \begin{pmatrix}2 & 4 & 1\end{pmatrix}$.



$$\gamma = \begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$$

Avec $n = 6$ et $\gamma = \begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 6 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 3 & 1 & 5 & 4 & 6 & 2\end{pmatrix}$.

Donc,

$$\gamma = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6\\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 & 6\\ 3 & 2 & 5 & 4 & 6 & 1\\ 3 & 1 & 5 & 4 & 6 & 2\end{pmatrix}$$

Et,

$$\gamma = \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5\\ 1 & 2 & 5 & 4 & 6 & 3\\ 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 2\\ 3 & 1 & 5 & 4 & 6 & 2\end{pmatrix}$$

Exemple:

$$\begin{pmatrix}1 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$$

On n'a pas toujours le même nombre de transpositions mais la parité du nombre reste la même (proposition plus loin).

Théorème: Toute permutation se décompose en produit de transpositions.

Preuve:
Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_k \end{pmatrix}$ un k-cycle.

On remarque que

$$\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_k \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_1 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

C'est un produit de transpositions. □

Exemple:
Avec $n = 10$ et $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 8 & 1 & 7 & 2 & 3 & 4 & 5 & 10 & 6 \end{pmatrix}$.

On a

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 9 & 10 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vérification :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 8 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 & 2 & 9 & 10 \\ 1 & 8 & 3 & 7 & 2 & 6 & 4 & 5 & 9 & 10 \\ 9 & 8 & 3 & 7 & 2 & 6 & 4 & 5 & 1 & 10 \\ 9 & 8 & 3 & 7 & 2 & 6 & 4 & 5 & 10 & 1 \\ 9 & 8 & 3 & 7 & 2 & 1 & 4 & 5 & 10 & 6 \\ 9 & 8 & 1 & 7 & 2 & 3 & 4 & 5 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

4 Signature d'une permutation

Définition: Soit $\sigma \in S_n$.

Un <u>inversion</u> de σ est $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

La <u>signature</u> de σ, notée $\varepsilon(\sigma)$ vaut $(-1)^k$ où k est le nombre d'inversions de σ.

Exemple:
Avec $n = 10$ et $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 8 & 1 & 7 & 2 & 3 & 4 & 5 & 10 & 6 \end{pmatrix}$.

Les inversions de σ sont $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,6)$, $(1,7)$, $(1,8)$, $(1,10)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(2,6)$, $(2,7)$, $(2,8)$, $(2,10)$, $(4,5)$, $(4,6)$, $(4,7)$, $(4,8)$, $(4,10)$, $(9,10)$.

Donc, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{21} = -1$.

Proposition: Soit τ un transposition. Alors $\varepsilon(\tau) = -1$.

Preuve:
On pose $\tau = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ avec $a < b$.

Donc

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & a & \cdots & b & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & b & \cdots & a & \cdots & n \end{pmatrix}$$

τ a pour inversion $(a, a+1)$, $(a, a+2)$, ..., (a, b), $(a+1, b)$, $(a+2, b)$, ..., $(b-1, b)$.

Donc

$$\varepsilon(\tau) = (-1)^{b-a+b-a+1} = (-1)^{2(b-a)+1} = -1.$$

□

Théorème: $\varepsilon : (S_n, \circ) \to \big(\{-1, 1\}, \times\big)$ est un morphisme de groupes.

Preuve:
Soient $(\sigma_1, \sigma_2) \in (S_n)^2$. On a

$$\varepsilon(\sigma_1) = \prod_{i<j} \frac{\sigma_1(i) - \sigma_1(j)}{i-j}$$

donc

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\sigma_1\sigma_2) &= \prod_{i<j} \frac{\sigma_1\sigma_2(i) - \sigma_1\sigma_2(j)}{i-j} \\
&= \prod_{i<j} \frac{\sigma_1(\sigma_2(i)) - \sigma_1(\sigma_2(j))}{\sigma_2(i) - \sigma_2(j)} \times \frac{\sigma_2(i) - \sigma_2(j)}{i-j} \\
&= \prod_{\substack{k,\ell \\ {\sigma_2}^{-1}(k) < (\sigma_2)^{-1}(\ell)}} \frac{\sigma_1(k) - \sigma_1(\ell)}{k - \ell} \times \varepsilon(\sigma_2) \\
&= \prod_{i<j} \frac{\sigma_1(i) - \sigma_1(j)}{i-j} \times \varepsilon(\sigma_2) \\
&= \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2).
\end{aligned}$$

□

Définition: On dit qu'une permutation σ est <u>paire</u> si $\varepsilon(\sigma) = 1$, <u>impaire</u> si $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Proposition – Définition: On note

$$A_n = \{\sigma \in S_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\}.$$

C'est un sous-groupe de S_n : on l'appelle <u>groupe alterné</u>.

Preuve:
$A_n = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ □

Exemple:

Avec

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned}\prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} &= \frac{\cancel{(3-1)(2-1)(5-1)(4-1)}}{\cancel{(2-1)(3-1)(4-1)(5-1)}} \\ &\times \frac{\cancel{(2-3)(5-3)(4-3)}}{\cancel{(3-2)(4-2)(5-2)}} \\ &\times \frac{\cancel{(5-2)(4-2)}}{\cancel{(4-3)(5-3)}} \\ &\times \frac{4-5}{5-4} \\ &= -1.\end{aligned}$$

Remarque:
$\#A_n = \dfrac{n!}{2}$. En effet :

$$\begin{aligned} A_n &\longrightarrow \{\sigma \in S_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\} \\ \sigma &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \sigma \end{aligned}$$

est une bijection.

Exercice:
Problème :

Soit $\sigma \in S_n$. σ est-il un produit des cycles $\gamma_k = \begin{pmatrix} k & k-1 & k-2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ avec $k \in [\![1, N]\!]$?

Avec $N = 5$ et $\gamma = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} \gamma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \gamma_4 &= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \gamma_5 &= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\begin{array}{c@{}l} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \gamma_3 \\ \gamma_2 \\ \gamma_5 \\ \gamma_3 \\ \gamma_2 \\ \gamma_4 \\ \gamma_3 \\ \gamma_3 \\ \gamma_2 \end{array} \end{array}$$

5 Bilan

$$\#S_n = n!.$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

On dit que d est l'ordre de σ si
$$\begin{cases} \sigma^d = \mathrm{id}; \\ \forall i \in [\![1, d-1]\!]\,,\ \sigma^i \neq \mathrm{id}\,. \end{cases}$$

L'orbite de σ pour $x \in [\![1, n]\!]$ est
$$\left\{\, x, \sigma(x), \dots, \sigma^{d-1}(x) \,\right\}$$
où d est l'ordre de σ.

On dit que σ est un k-cycle si
- σ a $n-k$ points fixes ;
- les autres éléments sont dans une même orbite.

Dans ce cas, σ est noté
$\sigma = \begin{pmatrix} x & \sigma(x) & \sigma^2(x) & \cdots & \sigma^{k-1}(x) \end{pmatrix}$
et l'ordre de σ est k.

Le support de σ est l'ensemble des éléments qui “changent” après l'application de σ :
$$\mathrm{Supp}(\sigma) = \left\{ x \in [\![1, n]\!] \mid \sigma(x) \neq x \right\}.$$

Toute permutation peut être décomposée, de manière unique, en cycles à supports disjoints.

Soit γ un k-cycle :
$$\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n - k \end{pmatrix}.$$
Alors, pour toute permutation σ,
$$\sigma\gamma\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(a_1) & \cdots & \sigma(a_k) \end{pmatrix} I$$
et c'est un k-cycle.

Une transposition est un cycle de longueur 2.

Toute permutation se décompose en produit de transpositions mais cette décomposition n'est pas unique.

Une inversion est un couple (i, j) avec $i < j$ mais $\sigma(i) > \sigma(j)$.

La signature d'une permutation σ est $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$ où k est le nombre d'inversions. C'est un morphisme de groupes donc
$$\varepsilon\left(\prod_{i=1}^{N} \sigma_i\right) = \prod_{i=1}^{N} \varepsilon(\sigma_i).$$
La signature d'une transposition est -1.

Une permutation paire est une permutation de signature 1.

Une permutation impaire est une permutation de signature -1.

L'ensemble des permutations paires forment un sous-groupe : le groupe alterné.

CHAPITRE

25

SÉRIES NUMÉRIQUES

1 Défintions et premières propriétés

Définition: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La suite des sommes partielles associée à (u_n) est

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Étudier la série des (u_n), c'est étudier la convergence de la suite (S_n).

On dit que la série $\sum u_n$ converge si (S_n) converge. Dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ et on l'appelle la somme de la série, et la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

est appelée suite des restes partiels.

Exemple (À connaître : série géométrique):
Soit $q \in \mathbb{C}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} q_k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Cette série converge si et seulement si $|q| < 1$, et dans ce cas $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$.

Par exemple, avec $q = 1/2$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

et

$$\begin{aligned} R_n &= 2 - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= 2 - \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2 - 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Proposition: Soit $(v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
La série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge si et seulement si (v_n).

Preuve:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_k.$$

□

Proposition: Soit $\sum u_n$ une série.
SI $\sum u_n$ converge ALORS $u_n \longrightarrow 0$.

REMARQUE:
La réciproque est FAUSSE.

CONTRE-EXEMPLE (série harmonique):
La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. En effet, on a vu en T.D. :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$$

où γ est la constante d'Euler.

Preuve:
On pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

On suppose que (S_n) converge vers $S \in \mathbb{C}$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} S - S = 0.$$

□

REMARQUE:
Avec les notations précédentes, si $u_n \not\longrightarrow 0$, alors $\sum u_n$ diverge. On dit qu'elle diverge grossièrement.

2 Séries à termes positifs

Proposition: Soit $(u_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}}$. Alors $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Preuve:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} \geqslant 0.$$

$\square$

Théorème: Soient u et v deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{0 \leqslant u_n} \leqslant v_n.$$

1. SI $\sum v_n$ converge, ALORS $\sum u_n$ converge
2. SI $\sum u_n$ diverge, ALORS $\sum v_n$ diverge.

Preuve: 1. On suppose que $\sum v_n$ converge. On note

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n(v) = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Donc $\big(S_n(v)\big)$ est majorée. Soit V un majorant et $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall k, 0 \leqslant u_k \leqslant v_k$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k = S_n(v) \leqslant V$$

donc $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Or, elle est croissante, donc elle converge.

2. C'est la contraposée du 1.

$\square$

CONTRE-EXEMPLE:
$\sum \frac{1}{n}$ diverge, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (vers $\frac{\pi^2}{6}$) et

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Corollaire: Soient u, v deux suites réelles POSITIVES telles que $u = O(v)$.

1. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

$\square$

Théorème: Soient u et v deux suites réelles POSITIVES telles que $u = o(v)$.

1. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

$\square$

Théorème (règle des équivalents)**:** Soient u et v deux suites réelles POSITIVES telles que $u \sim v$. Alors

$$\sum u_n \text{ converge } \iff \sum v_n \text{ converge.}$$

Preuve:
On suppose

$$u_n = v_n + o(v_n)$$

et donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - v_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$$

En particulier, on peut considerer $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, -\frac{1}{2} v_n \leqslant u_n - v_n \leqslant \frac{1}{2} v_n$$

et donc

$$\forall n \geqslant N, \frac{1}{2} v_n \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2} v_n$$

et donc $\begin{cases} u = O(v), \\ v = O(u). \end{cases}$

Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge car $u = O(v)$.
Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge car $v = O(u)$. $\square$

Exemple:
Déterminer la nature de $\sum \dfrac{1}{n^3 + n\ln(n)}$ *?*

$$\forall n \geqslant 3, \frac{1}{n^3 + n \ln n} \geqslant 0.$$

et

$$\frac{1}{n^3 + n \ln n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}.$$

$$\forall n \geqslant 1, \frac{1}{n^3} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum \frac{1}{n^3}$ converge donc $\sum \dfrac{1}{n^3 + n \ln n}$ converge.

3 Comparaison avec une intégrale

Théorème: Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1$$

Dans ce cas, on note

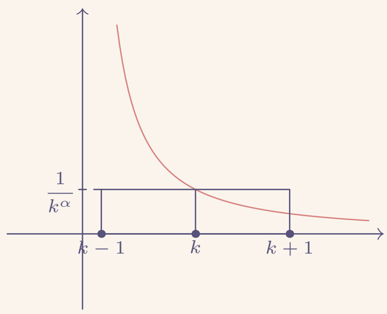
$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Preuve:

$$\frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge pour $\alpha \leqslant 0$.

On suppose $\alpha > 0$. Soit $f_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha} \end{array}$



Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2$. comme f_α est décroissante,

$$\forall k \in [k, k+1], f_\alpha(x) \leqslant f_\alpha(k)$$

et donc

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{k^\alpha}.$$

De même,

$$\forall k \in [k-1, k], f_\alpha(x) \geqslant f_\alpha(k)$$

et donc

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{k^\alpha}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.

$$\forall k \in [\![2, n]\!], \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x$$

donc

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^{n} \frac{1}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x$$

<u>Cas1</u> On suppose $\alpha > 1$. Alors

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant 2, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} &\leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = 1 + \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^n \\ &\leqslant 1 + \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right) \\ &\leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \\ &\leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}.\end{aligned}$$

La suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right)_n$ est croissante et majorée donc elle converge.

<u>Cas2</u> On suppose $\alpha = 1$.

$$\forall n \geqslant 2, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \geqslant \underbrace{1 + \ln(n+1) - \ln 2}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

Par comparaison, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

<u>Cas3</u> On suppose $\alpha > 1$.

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant 2, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} &\geqslant 1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant 1 + \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_2^{n+1} \\ &\geqslant \underbrace{1 + \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \text{ car } \alpha<1}\end{aligned}$$

Donc, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

□

Théorème: Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue, décroissante de limite nulle, avec $a \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\sum_{n\geqslant a} f(n) \text{ converge } \iff \left(\int_a^n f(x)\,\mathrm{d}x\right)_n \text{ converge.}$$

Preuve:
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant a+1$.

$$\forall x \in [k, k+1], f(x) \leqslant f(k)$$

donc

$$\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}x = f(k)$$

et

$$\forall x \in [k-1, k], f(x) \geqslant f(k)$$

et donc
$$\int_{k-1}^{k} f(x)\ \mathrm{d}x \geqslant \int_{k-1}^{k} f(k)\ \mathrm{d}x = f(k).$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant a+1$
$$\int_{a+1}^{n+1} f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \sum_{a+1 \leqslant k \leqslant n} f(k) \leqslant \int_{a}^{n} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

<u>Cas1</u> On suppose que $\left(\int_a^n f(x)\ \mathrm{d}x\right)_n$ converge. Cette suite est croissante, donc majorée. Soit M un majorant donc
$$\forall n \geqslant a+1, \sum_{a \leqslant k \leqslant n} f(k) \leqslant f(a) + M.$$

donc la série converge.

— On suppose que $\left(\int_a^n f(x)\ \mathrm{d}x\right)_n$ diverge donc, par croissance de cette suire,
$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^n f(x)\ \mathrm{d}x = +\infty$$

et donc
$$\begin{aligned}\forall n \geqslant a+1, \sum_{k=a}^{n} f(k) &= f(a) + \sum_{k=a+1}^{n} f(k) \\ &\geqslant \underbrace{f(a) + \int_a^n f(x)\ \mathrm{d}x - \int_a^{a+1} f(x)\ \mathrm{d}x}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}\end{aligned}$$

donc la série diverge.

$\square$

Exercice:
Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ *?*

Exercice:
Quelle est la nature de la série $\sum \frac{\ln^\alpha(n)}{n^\beta}$ *en fonction de* α *et* β *?*

4 Opérations sur les séries

Proposition: L'ensemble $E = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n \text{ converge}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et
$$\begin{aligned} S : E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ u &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{aligned}$$
est une forme linéaire. $\square$

Remarque:
La somme d'une série convergente et d'une série divergente diverge. Le produit d'une série divergente par un scalaire non nul diverge.

5 Séries absolument convergente

Théorème: Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. SI $\sum |u_n|$ converge, ALORS $\sum u_n$ converge.

REMARQUE:
La réciproque est FAUSSE. On a vu en exercice que la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge vers $\ln 2$, alors que $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Preuve: CAS1 On suppose $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n^+ = \begin{cases} u_n & \text{si } u_n \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } u_n < 0 \end{cases}$$

et

$$u_n^- = \begin{cases} -u_n & \text{si } u_n \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } u_n > 0. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n^+ \geqslant 0, \\ u_n^- \geqslant 0, \\ u_n = u_n^+ - u_n^-, \\ |u_n| = u_n^+ + u_n^-. \end{cases}$$

On suppose que $\sum |u_n|$ converge. Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n^+ \leqslant u_n^+ + u_n^- = |u_n|$$

donc $\sum u_n^+$ converge. De même,

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n^- \leqslant u_n^- + u_n^+ = |u_n|$$

donc $\sum u_n^-$ converge. Par linéarité, $\sum u_n$ converge.
CAS2 $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\sum |u_n|$ converge. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} v_n = \mathfrak{Re}(u_n) \in \mathbb{R} \\ w_n = \mathfrak{Im}(u_n) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant |v_n| \leqslant |u_n|$$

donc $\sum |v_n|$ converge donc d'après le CAS 1, $\sum v_n$ converge.
De même,

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant |w_n| \leqslant |u_n|$$

donc $\sum w_n$ converge.
Par linéarité, $\sum u_n$ converge.

□

Définition: Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge.
On dit que $\sum u_n$ est semi-convergente si

$$\begin{cases} \sum u_n \text{ converge}, \\ \sum |u_n| \text{ diverge}. \end{cases}$$

Corollaire: Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}}$ telles que $u = O(v)$.
Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument. □

EXEMPLE:
Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n^2} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ *?*

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{n^2}\left|\sin\frac{1}{n}\right| \sim \frac{1}{n^3}$$

donc $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ converge.

EXEMPLE:
Quelle est la nature de $\sum (-1)^n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ *?*

$$\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc

$$(-1)^n \sin\frac{1}{n} = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$\sum O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge absolument donc converge.

$\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge.

Par linéarité, $\sum (-1)^n \sin\dfrac{1}{n}$ converge.

6 Séries alternées

Théorème: Soit $u \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle. Alors $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Preuve:
On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$$

Montrons que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

— Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= (-1)^{2n+1} u_{2n+1} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2} \\ &= u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0 \end{aligned}$$

Donc $(S_{2n})_n$ est décroissante.

— Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geqslant 0$$

Donc la suite $\left(S_{2n+1}\right)_n$ est croissante.

— $\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ainsi, (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent et ont la même limite, donc (S_n) converge. On note $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_{2n+1} \geqslant 0 \geqslant R_{2n}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$|R_{2n+1}| = R_{2n+1} = S - S_{2n+1} \leqslant S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1},$$

$$|R_{2n}| = -R_{2n} = S_{2n} - S \leqslant S_{2n} - S_{2n+1} \leqslant u_{2n+1} \leqslant u_{2n}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leqslant u_n.$$

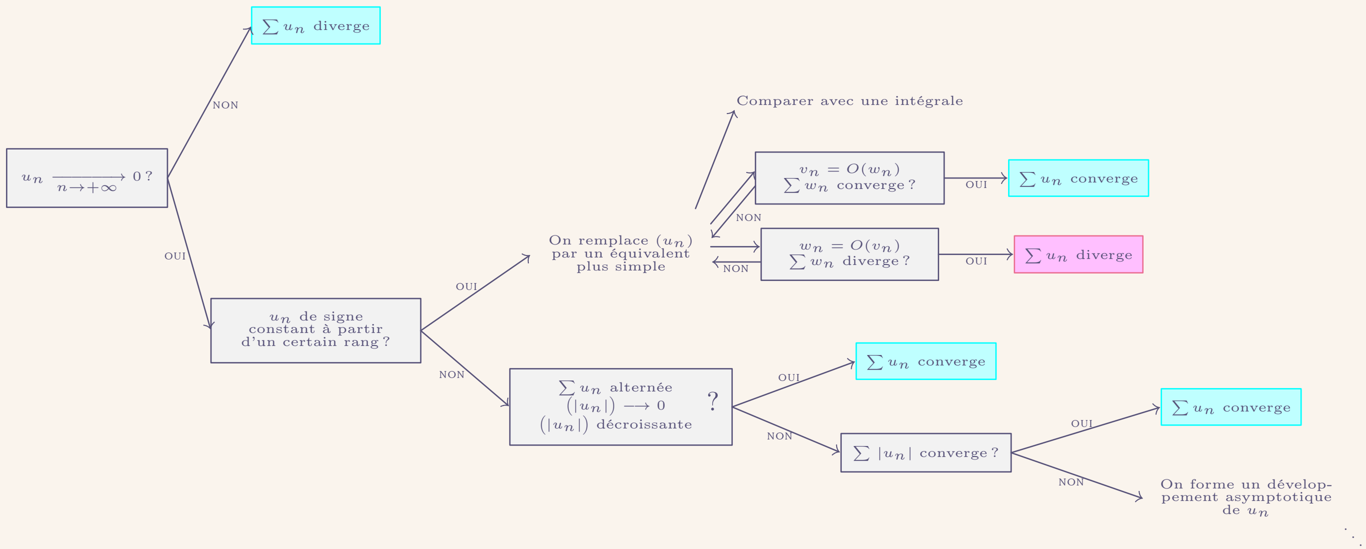
$\square$

Proposition: Soit u une suite de signe constant telle que $\big(|u_n|\big)_n$ est décroissante de limite nulle. Alors, $\sum(-1)^n u_n$ converge et

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n \text{ est du signe de } (-1)^{n+1}u_{n+1} \text{ et } |R_n| \leqslant |u_n|$$

$\square$

7 Résumé et exemples



$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$?
NON
$\sum u_n$ diverge
OUI
u_n de signe constant à partir d'un certain rang ?
OUI
On remplace (u_n) par un équivalent plus simple
Comparer avec une intégrale
$v_n = O(w_n)$ $\sum w_n$ converge ?
OUI
$\sum u_n$ converge
NON
$w_n = O(v_n)$ $\sum w_n$ diverge ?
OUI
$\sum u_n$ diverge
NON
NON
$\sum u_n$ alternée $(|u_n|) \longrightarrow 0$ $(|u_n|)$ décroissante ?
OUI
$\sum u_n$ converge
NON
$\sum |u_n|$ converge ?
OUI
$\sum u_n$ converge
NON
On forme un développement asymptotique de u_n

Exercice: 1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$,

2. $\forall n \geqslant 2$, $u_n = u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$,
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$,
4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$f_n : x \mapsto x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln x}$$
donc
$$\forall x > 0, f_n'(x) = \frac{1}{nx} e^{\frac{1}{n}\ln(x)} = \frac{1}{nx} e^{\frac{1}{n}\ln x}.$$
D'après le théorème des accroissements finis,
$$\exists c_n \in [n, n+1], f_n(n+1) - f(n) = f_n'(c_n)$$
donc
$$u_n = \frac{1}{c_n} e^{\frac{1}{n}\ln c_n}.$$
$$\forall n, 1 \leqslant \frac{c_n}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{n}$$
donc $c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ donc $c_n = n + o(n)$:
$$\begin{aligned}\ln c_n &= \ln\big(n + o(n)\big)\\ &= \ln\Big(n\big(1 + o(1)\big)\Big)\\ &= \ln n + \ln\big(1 + o(1)\big)\\ &= \ln(n) + o(1)\\ &\sim \ln n\end{aligned}$$
donc $\frac{\ln c_n}{n} \sim \frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
donc $e^{\frac{1}{n}\ln c_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$
donc $u_n \sim \frac{1}{n^2}$
donc $\sum u_n$ converve.
2. $$\forall n \geqslant 2, u_n = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge et $\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge absolument. Donc, $\sum u_n$ converge.
3. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n} \geqslant 0$ donc $\sum u_n$ diverge.
4. $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \begin{cases} \underbrace{\zeta(\alpha)}_{>0} & \text{si } \alpha > 1,\\ +\infty & \text{si } \alpha \leqslant 1,\end{cases}$$
donc
$$u_n \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\zeta(\alpha)} \neq 0 & \text{si } \alpha > 1,\\ 0 & \text{si } \alpha \leqslant 1\end{cases}$$
Si $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ diverge. On suppose $\alpha \leqslant 1$.
Équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$?

Si $\alpha < 1$,

$$\underbrace{\frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}\right)}_{\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}} = \int_2^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right)}_{\sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

donc

$$u_n \sim \frac{1-\alpha}{n^{1-\alpha}}$$

$$\begin{aligned}\sum u_n \text{ converge } &\iff 1-\alpha > 1 \\ &\iff \alpha < 0\end{aligned}$$

Si $\alpha = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$ et donc $u_n \sim \dfrac{1}{\ln n}$.

A-t-on $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)$ avec $\beta > 1$ ou $\dfrac{1}{n^\beta} = o(u_n)$ avec $\beta \leqslant 1$?

Si $\beta \geqslant 0$,

$$n^\beta u_n \sim \frac{n^\beta}{\ln(n)} \longrightarrow +\infty$$

En particulier avec $\beta = \dfrac{1}{2}$:

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = o(u_n)$$

et $\displaystyle\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ diverge car $\dfrac{1}{2} < 1$. Donc, $\sum u_n$ diverge.

On a donc

— avec $\alpha \leqslant 0$, $\sum u_n$ converge,

— avec $\alpha > 0$, $\sum u_n$ diverge.

8 Applications

8.1 Formule de Stirling

Proposition: On a :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n ?.$$

Preuve:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \ln k.$$

$x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [k, k+1], \ln x \geqslant \ln k$$

donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_k^{k+1} \ln x\,\mathrm{d}x \geqslant \int_k^{k+1} \ln k\,\mathrm{d}x = \ln k$$

et

$$\forall k \geqslant 2, \forall x \in [k-1, k], \ln x \leqslant \ln k$$

et docn

$$\forall k \geqslant 2, \int_{k-1}^{k} \ln x \, \mathrm{d}x \leqslant \int_{k-1}^{k} \ln k \, \mathrm{d}x = \ln k$$

Ainsi

$$\forall n \geqslant 2, \int_{1}^{n} \ln x \, \mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=2}^{n} \leqslant \int_{2}^{n+1} \ln x \, \mathrm{d}x$$

Or

$$\begin{aligned}
\forall n \geqslant 2, \int_{1}^{n} \ln x \, \mathrm{d}x &= [x \ln x]_0^n \\
&= n \ln(n) - n + 1 \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln n \\
\int_{2}^{n+1} \ln x \, \mathrm{d}x &= (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln(2) + 2 \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)\ln(n+1) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln n
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
\ln(n+1) &= \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \ln n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&\sim \ln n
\end{aligned}$$

Donc

$$\ln(n!)) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln n$$

Cependant, on a un problème :

$$\begin{aligned}
\ln(n!) &= n \ln n + o(n \ln n) \\
\text{donc } n! &= n^n \underbrace{e^{o(n \ln n)}}_{?}
\end{aligned}$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \ln(n!) - n \ln n$$

(u_n) a même nature que $\sum(u_{n+1} - u_n)$ et

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n &= \ln\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right) - (n+1)\ln(n+1) + n \ln n \\
&= n\big(\ln n - \ln(n+1)\big) \\
&= n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\
&= n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\
&\sim -\frac{n}{n+1} \sim -1 < 0
\end{aligned}$$

$\sum(-1)$ diverge donc (u_n) diverge.

Conjecture

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \underbrace{\sim}_{\substack{\downarrow \\ \text{On n'a absolument pas le droit !}}} \sum_{k=1}^{n-1} (-1) = -(n-1) \sim -n$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_n + n$$

et donc

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n &= n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + 1 \\
&= n\left(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\left(\frac{1}{n+1}\right)^2\right)\right) + 1 \\
&= n\left(-\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} - \frac{1}{2n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + 1 \\
&= -\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{2n} \times \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= -\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + 1 \\
&= \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&\sim \frac{1}{2n} > 0.
\end{aligned}$$

$$v_n \sim \sum_{k=1}^{n-1} (v_{k-1} - v_k) \sim \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} \sim \frac{1}{2} \ln(n)$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = v_n - \frac{1}{2} \ln n$$

et donc

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, w_{n+1} - w_n &= n \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\ln(n+1) + \frac{1}{2}\ln(n) + 1 \\
&= n\left(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{3(n+1)^3} + o\left(\frac{1}{(n+1)^3}\right)\right) \\
&\quad + 1 + \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= -1 - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{3(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2} + 1 \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right) \qquad \sim -\frac{1}{12(n+1)^2} \\
&\sim -\frac{1}{12n^2} < 0
\end{aligned}$$

donc $\sum(w_{n+1} - w_n)$ converge et donc (w_n) converge.

On pose $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \ell + o(1)$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2}\ln(n) + \ell + o(1)$$

et alors

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, n! &= n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{\ell} \underbrace{e^{o(1)}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1} \\ &\sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \times K\end{aligned}$$

avec $K = e^{\ell}$.

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

et (c.f. TD5 / Exercice 8)

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned}I_{2n} &\sim \frac{\pi}{2} \cancel{\left(\frac{2n}{2e}\right)^{2n}} \sqrt{2n} K \cancel{\left(\frac{e}{n}\right)^{2n}} \frac{1}{n} \times \frac{1}{K^2} \\ &\sim \frac{\pi}{K\sqrt{2n}}.\end{aligned}$$

Or

$$I_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}.$$

Donc

$$\frac{\sqrt{\frac{\pi}{4n}}}{\frac{\pi}{K\sqrt{2n}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

donc

$$\frac{K}{\sqrt{2\pi}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

et donc $K = \sqrt{2\pi}$. □

8.2 Développement décimal

Exemple: — Avec $x = 0,54\underline{54}\ldots$, que vaut $2x$?
— Avec $x = 0,333\underline{3}\ldots$, que vaut $3x$?
— $0.999\underline{9}\ldots$?
— $3 \times \frac{1}{3} = 1$?

Proposition: Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} a_0 \in \mathbb{Z}, \\ \forall n \geqslant 1, a_n \in [\![0, 9]\!] \end{cases}$$

La série $\sum \frac{a_n}{10^n}$ converge.

Preuve:

$$\forall n \geqslant 1, 0 \leqslant \frac{a_n}{10^n} \leqslant \frac{9}{10^n}$$

$\sum \frac{1}{10^n}$ converge car $\frac{1}{10} \in [0,1[$. Donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{10^n}$ converge donc $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{10^n}$ converge. □

Définition: Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit que x admet un <u>développement décimal</u> si

$$\exists a_0 \in \mathbb{Z}, (a_n)_{n\geqslant 1} \in [\![0,9]\!]^N, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

Théorème: Tou réel $x \in [0,1[$ admet un développement décimal :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor}{10^n}$$

Preuve:

$$\begin{aligned} \forall n \geqslant 1, \qquad & 10^n x - 1 < \lfloor 10^n x \rfloor \leqslant 10^n x \\ & -10^n x + 10 > -10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor \geqslant -10^n x \end{aligned}$$

donc

$$-1 < \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor < 10$$

et donc

$$\lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor \in [\![0,9]\!].$$

De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor 10^k x \rfloor - 10 \lfloor 10^{k-1} x \rfloor}{10^k} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\lfloor 10^k x \rfloor}{10^k} - \frac{\lfloor 10^{k-1} x \rfloor}{10^{k-1}} \right) \\ &= \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} - \underbrace{\lfloor x \rfloor}_{=0} \\ &\xrightarrow[n \to +\infty]{} x. \end{aligned}$$

□

Théorème: Soit $x \in]0,1[$.

1. Si x n'est pas décimal (i.e. on ne peut pas l'écrire comme $p/10^n$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$), alors x a un unique développement décimal.
2. Si x est décimal, alors x a exactement 2 développements décimaux :
   — il y en a un où, à partir d'un certain rang, tous les chiffres sont nuls,
   — et un autre où tous les chiffres sont égaux à 9 à parir d'un certain rang.

Preuve:
Soit $(a_n)_{n\geqslant 1} \in [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1} \in [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}^*}$ telles que

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{10^n}$$

On pose $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid a_n \neq b_n\}$:

$$\begin{cases} \forall n < n_0, a_n = b_n, \\ a_{n_0} \neq b_{n_0}. \end{cases}$$

Sans perte de généralité, on suppose $a_{n_0} < b_{n_0}$. On a donc

$$0 < \frac{b_{n_0} - a_{n_0}}{10^{n_0}} = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{a_n - b_n}{10^n}$$

$$\forall n \geqslant n_0, \begin{cases} 0 \leqslant a_n \leqslant 9 \\ 0 \leqslant b_n \leqslant 9 \end{cases}$$

donc

$$\forall n \geqslant n_0, -9 \leqslant a_n - b_n \leqslant 9$$

donc

$$-9 \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{10^n} \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{a_n - b_n}{10^n} \leqslant 9 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{10^n} &= \frac{1}{10^{n_0+1}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} \\ &= \frac{1}{10^{n_0+1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{1}{9 \times 10^{n_0}} \end{aligned}$$

D'où,

$$0 < \frac{b_{n_0} - a_{n_0}}{10^{n_0}} \leqslant \frac{1}{10^{n_0}}$$

donc

$$0 < \underbrace{b_{n_0} - a_{n_0}}_{\in \mathbb{Z}} \leqslant 1$$

donc $b_{n_0} - a_{n_0} = 1$ et donc

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{a_n - b_n}{10^n} = \frac{1}{10^{n_0}}$$

donc

$$\forall n > n_0, a_n - b_n = 9$$

et donc

$$\forall n > n_0, \begin{cases} a_n = 9 \\ b_n = 0 \end{cases}$$

Comme

$$\forall n > n_0, b_n = 0$$

x est décimal et les deux développements de x sont alors

$$\begin{aligned} x &= 0, a_1 \dots a_{n_0 - 1} a_{n_0} \underline{9} \dots \\ &= 0, a_1 \dots a_{n_0 - 1} (a_{n_0} + 1) \underline{0} \dots \end{aligned}$$

□

Remarque:
Avec $x = 0{,}54\underline{54}\dots$, $100x = 54{,}54\underline{54}\dots = 54 + x$. On a donc $x = \frac{54}{99}$.

Avec $x = 0{,}987\,123\,\underline{123}\dots$, on a

$$\begin{aligned} x &= \frac{987}{1000} + 0{,}000\,\underline{123}\dots \\ &= \frac{987}{1000} + \frac{1}{10^3} \underbrace{(0{,}\underline{123}\dots)}_{y} \end{aligned}$$

On a $1000y = 123 + y$ et donc $y = \frac{123}{999}$ et donc $x = \frac{987 + \frac{123}{999}}{1000}$.

8.3 Exponentielle

Proposition:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Preuve:
(formule de Taylor avec reste intégral)

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x e^t \frac{(x-t)^n}{n} \,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned} \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| &\leqslant \int_0^x e^t \frac{|x-t|^n}{n!} \,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^x e^x \frac{(x-t)^n}{n!} \,\mathrm{d}t \\ &\leqslant e^x \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x \\ &\leqslant e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

car
Méthode 1

$$\begin{aligned} \frac{x^n}{n!} \sim \frac{x^n}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{ex}{n}\right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{n \ln\left(\frac{ex}{n}\right)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Méthode 2

$$\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{x}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1.$$

$\square$

Proposition:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

$\square$

CHAPITRE

26

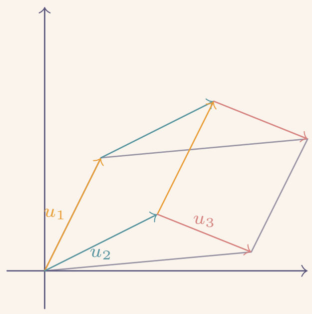
DÉTERMINANT

1 Motivation

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Soit $\mathscr{C} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de E. On souhaite trouver un “calcul” sur les coordonées des vecteurs de $\mathscr{C}$ qui nous dira si $\mathscr{C}$ est un base ou non de E.

Exemple:
Avec $E = \mathbb{R}^2$, $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathscr{C} = (u_1, u_2)$ avec $u_1 = (x, y)$ et $u_2 = (x', y')$.



On note A l'aire orientée (ou algébrique) du parallélogramme engendré par u_1 et u_2.

Cette aire vérifie :

$$\begin{cases} A(u_1 + u_3, u_2) = A(u_1, u_2) + A(u_3, u_2) \\ A(\lambda u_1, u_2) = \lambda A(u_1, u_2) \\ A(u_2, u_1) = -A(u_1, u_2) \\ A(e_1, e_2) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}A(u_1,u_2) &= A(xe_1+ye_2,u_2)\\ &= xA(e_1,u_2)+yA(e_2,u_2)\\ &= xA(e_1,x'e_1+y'e_2)+yA(e_2,x'e_1+y'e_2)\\ &= xx'A(e_1,e_1)+xy'A(e_1,e_2)+yx'A(e_2,e_1)+yy'A(e_2,e_2)\\ &= xy'-yx'\end{aligned}$$

$$(u_1,u_2) \text{ base de } \mathbb{R}^2 \iff xy'-yx' \neq 0$$

Remarque:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$$

Exemple:
$E=\mathbb{R}^3$, (e_1,e_2,e_3) base canonique, $\mathscr{C}=(u_1,u_2,u_3)$ famille de E.

Soit V le volume algébrique du parallélépipède orienté engendré par u_1, u_2 et u_3.

V est trilinéaire et

$$\begin{cases} V(u_2,u_1,u_3) = -V(u_1,u_2,u_3)\\ V(u_3,u_1,u_2) = V(u_1,u_2,u_3)\\ V(e_1,e_2,e_3)=1\end{cases}$$

On pose $\begin{cases} u_1=(x_1,y_1,z_1)\\ u_2=(x_2,y_2,z_2)\\ u_3=(x_3,y_3,z_3).\end{cases}$

$$\begin{aligned}V(u_1,u_2,u_3) &= V(x_1e_1+y_1e_2+z_1e_3,u_2,u_3)\\ &= x_1V(e_1,u_2,u_3)+y_1V(e_2,u_2,u_3)+z_1V(e_3,u_2,u_3)\\ &= \quad x_1y_2z_3V(e_1,e_2,e_3)+x_1z_2y_3V(e_1,e_3,e_2)+y_1x_2z_3V(e_2,e_1,e_3)\\ &\quad +y_1z_2x_3V(e_2,e_3,e_1)+z_1x_2y_3V(e_3,e_1,e_2)+z_1y_2x_3V(e_3,e_2,e_1)\\ &= x_1y_2z_3+y_1z_2x_3+z_1x_2y_3-x_1z_2y_3-y_1x_2z_3-z_1y_2x_3\end{aligned}$$

C'est la formule de Sarrus (hors-programme).

2 Définitions

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n<+\infty$ et $f: E^n \longrightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est <u>multilinéaire</u> si

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \forall (u_1,\dots,u_{i-1},u_{i+1},\dots,u_n)\in E^{n-1},$$

$$\text{l'application } \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ u & \longmapsto & f(u_1,\dots,u_{i-1},u,u_{i+1},\dots,u_n)\end{array} \text{ est linéaire.}$$

On dit que f est <u>antisymétrique</u> si

$$\begin{gathered}\forall i<j, \forall (u_1,\dots,u_n)\in E^n,\\ f(u_1,\dots,u_{i-1},u_j,u_{i+1},\dots,u_{j-1},u_i,u_{j+1},\dots,u_n)\\ =-f(u_1,\dots,u_{i-1},u_i,u_{i+1},\dots,u_{j-1},u_j,u_{j+1},\dots,u_n).\end{gathered}$$

On dit que f est alternée si

$$\forall (u_1, \ldots, u_n) \in E^n, \big(\exists i < j, u_i = u_j \implies f(u_1, \ldots, u_n) = 0\big).$$

Proposition: Soit $\mathbb{K}$ un corps tel que $1+1 \neq 0$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme multilinéaire.

Alors,

$$f \text{ alternée} \iff f \text{ antisymétrique.}$$

Preuve: " $\implies$ " On suppose f alternée.
Soit $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i < j$.

$$\begin{aligned}
0 = f(&u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i + u_j, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_i + u_j, u_{j+1}, \ldots, u_n) \\
&= f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_i + u_j, u_{j+1}, \ldots, u_n) \\
&\quad + f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_i + u_j, u_{j+1}, \ldots, u_n) \\
&= f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \ldots, u_n) \\
&\quad + f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_n) \\
&\quad + f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \ldots, u_n) \\
&\quad + f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_n)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \ldots, u_n) \\
&= -f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_n).
\end{aligned}$$

Donc, f est antisymétrique.
" $\impliedby$ " On suppose f antisymétrique. Soit $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tels que $i < j$ et $u_i < u_j$.

$$\begin{aligned}
&f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_n) \\
=&f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \ldots, u_n) \\
= &-f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_n)
\end{aligned}$$

D'où,

$$f(u_1, \ldots, u_n) \underbrace{(1+1)}_{\neq 0} = 0$$

donc $f(u_1, \ldots, u_n) = 0$.

□

Dans le reste du chapitre, $\mathbb{K}$ est un corps avec $1 + 1 \neq 0$.

Théorème: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. L'ensemble des formes multilinéaires alternées de E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{(E^n)}$ de dimension 1.

Preuve (pas exigible)*:*
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit f une forme multilinéaire alternée. Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$.

$$\forall j \in [\![1, n]\!]\,,\ \exists (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n},\ u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$$

$$\begin{aligned}
f(u_1, \dots, u_n) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,1} e_i, u_2, \dots, u_n\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} f(e_i, u_2, \dots, u_n) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1} f\left(e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2,2} e_{i_2}, u_3, \dots, u_n\right) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_1,1} a_{i_2,2}, f(e_{i_1}, e_{i_2}, u_3, \dots, u_n) \\
&\ \vdots \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1,1} a_{i_2,2} \cdots a_{i_n,n} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} f(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\
&= \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \left(\varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}\right)}_{A(u_1,\dots,u_n)} \underbrace{f(e_1, \dots, e_n)}_{\in \mathbb{K}}
\end{aligned}$$

D'où, $f = f(e_1, \dots, e_n)\, A$.

Donc, l'ensemble des formes multilinéaires alternées est $\mathrm{Vect}(A)$. De plus,

$$\begin{aligned}
A(e_1, \dots, e_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} \delta_{\sigma(j),j} \\
&= \varepsilon(\mathrm{id}) \prod_{j=1}^{n} 1 = 1 \neq 0.
\end{aligned}$$

□

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Il existe une unique forme f multilinéaire alternée sur E telle que $f(e_1, \dots, e_n) = 1$. Elle est donnée par la formule

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, f(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}$$

où
$$\forall i,j,\ a_{i,j} \text{ est la } i\text{-ème coordonnée de } u_j \text{ dans la base } \mathscr{B}.$$
Cette application est appelée déterminant dans la base $\mathscr{B}$ et noté $\det_{\mathscr{B}}$.

Proposition: Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{C} = (u_1, \dots, u_n)$ deux bases de E. Alors
$$\det_{\mathscr{C}} = \det_{\mathscr{C}}(e_1, \dots, e_n)\ \det_{\mathscr{B}}$$
i.e.
$$\forall (v_1, \dots, v_n) \in E^n, \det_{\mathscr{C}}(v_1, \dots, v_n) = \det_{\mathscr{C}}(e_1, \dots, e_n)\ \det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n).$$

Preuve:
On sait que $\det_{\mathscr{B}}$ et $\det_{\mathscr{C}}$ sont colinéaires :
$$\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (v_1, \dots, v_n) \in E^n,\ \det_{\mathscr{C}}(v_1, \dots, v_n) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n).$$
En particulier,
$$\det_{\mathscr{C}}(e_1, \dots, e_n) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_n) = \lambda.$$
□

Remarque (notation):
Avec les notations précédentes, on note $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$ au lieu de $\det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n)$.

Corollaire: Avec les notations précédentes, $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) \neq 0$ et
$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = (\det_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}))^{-1}$$

Preuve:
On sait que
$$\forall (v_1, \dots, v_n) \in E^n, \det_{\mathscr{C}}(v_1, \dots, v_n) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})\ \det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n).$$
En particulier,
$$1 = \det_{\mathscr{C}}(\mathscr{C}) = \det_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})\ \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}).$$
□

Théorème: Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\mathscr{C} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille liée (i.e. $\mathscr{C}$ n'est pas libre). Alors $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = 0$.

Preuve:
Sans perte de généralité, on peut supposer que $u_n \in \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_{n-1})$:
$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k u_k \text{ où } \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}.$$

$$\begin{aligned}\det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_{n-1},u_n) &= \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k \underbrace{\det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_{n-1},u_k)}_{=0}\\ &= 0\end{aligned}$$

□

3 Déterminant d'un endomorphisme

Proposition: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Alors,

$$\exists! \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (u_1,\dots,u_n) \in E,\ \det_{\mathscr{B}}\big(f(u_1),\dots,f(u_n)\big) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n).$$

Preuve:
Soit $g : \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (u_1,\dots,u_n) & \longmapsto & \det_{\mathscr{B}}\big(f(u_1),\dots,f(u_n)\big)\end{array}$. g est clairement alternée.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$, $(u_1,\dots,u_i,u_{i+1},\dots,u_n) \in E^{n-1}$. L'application $u \mapsto g(u_1,\dots,u_{i-1},u,u_{i+1},\dots,u_n)$ est la composée de f et de $v \mapsto \det_{\mathscr{B}}\big(f(u_1),\dots,f(u_{i-1}),v,f(u_{i+1}),\dots,f(u_n)\big)$ donc elle est linéaire.

Donc, g est une forme multilinéaire alternée donc colinéaire à $\det_{\mathscr{B}}$. □

Proposition: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ deux bases de E. Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que

$$\forall (u_1,\dots,u_n) \in E^n, \begin{cases}\det_{\mathscr{B}}\big(f(u_1),\dots,f(u_n)\big) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n),\\ \det_{\mathscr{C}}\big(f(u_1),\dots,f(u_n)\big) = \mu \det_{\mathscr{C}}(u_1,\dots,u_n).\end{cases}$$

Alors, $\lambda = \mu$.

Preuve:
On pose $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$.

$$\begin{array}{c}\det_{\mathscr{C}}\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big) = \mu \det_{\mathscr{C}}(e_1,\dots,e_n) = \mu \det_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})\\ \parallel \\ \det_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})\ \det_{\mathscr{B}}\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big)\\ \parallel \\ \lambda \underbrace{\det_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})}_{\neq 0} \underbrace{\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B})}_{=1}\end{array}$$

donc $\lambda = \mu$. □

Définition: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Le <u>déterminant</u> de f est le seul scalaire vérifiant,

$$\forall \mathscr{B} \text{ base de } E,\ \forall (u_1,\dots,u_n), \det_{\mathscr{B}}\big(f(u_1),\ \dots,f(u_n)\big) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n)$$

et on le note $\lambda = \det(f)$.

Remarque:

Si $n = 2$,

$$\operatorname{Aire}\big(f(u_1), f(u_2)\big) = \det(f) \operatorname{Aire}(u_1, u_2).$$

Proposition: Soient f et g deux endomorphismes de E. Alors,

$$\det(f \circ g) = \det f \times \det g.$$

Preuve:
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

$$\begin{array}{ll} \det_{\mathscr{B}} \big(f \circ g(e_1), \dots, f \circ g(e_n)\big) = \det(f \circ g) \det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_n) = \det(f \circ g) \\ \| \\ \det_{\mathscr{B}} \Big(f\big(g(e_1)\big), \dots, f\big(g(e_n)\big)\Big) \\ \| \\ (\det f) \ \det_{\mathscr{B}} \big(g(e_1), \dots, g(e_n)\big) \\ \| \\ (\det f)(\det g) \ \underbrace{\det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_n)}_{=1}. \end{array}$$

□

Corollaire: Si $f \in \mathrm{GL}(E)$, alors $\det(f) \neq 0$ et $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$.

Preuve:
On suppose $f \in \mathrm{GL}(E)$:

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_E\,.$$

Donc,

$$\det(f) \ \det(f^{-1}) = \det(f \circ f^{-1}) = \det(\mathrm{id}_E).$$

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

$$\begin{array}{c} \det_{\mathscr{B}} \big(\mathrm{id}_E(e_1), \dots, \mathrm{id}_E(e_n)\big) = \det(id_E) \times 1 \\ \| \\ \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1 \end{array}$$

□

Proposition: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose $f \notin \mathrm{GL}(E)$. Alors $\det(f) = 0$.

Preuve:
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

$$\det(f) = \det_{\mathscr{B}} \big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big).$$

f n'est pas surjective donc $\operatorname{rg}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big) < n$ donc $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est liée donc $\det_{\mathscr{B}} \big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big) = 0$. □

4 Déterminant d'une matrice carrée

Définition: Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Le déterminant de A est

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}$$

Proposition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ et $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n)$.

Alors,

$$\det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n) = \det(A).$$

Proposition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Alors, $\det(A) = \det(f)$.

Preuve:
$\det(f) = \det_{\mathscr{B}}\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$, $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$.

$$\begin{aligned} \det A &= \det_{\mathscr{B}}\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big) \\ &= \det(f). \end{aligned}$$

□

Proposition: Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$.

$$\det(AB) = \det(A)\,\det(B).$$

Preuve:
Soit $E = \mathbb{K}^n$, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de E, $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $B = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$.

$$\begin{aligned} \det(AB) = \det(f \circ g) &= (\det f)\,(\deg g) \\ &= \det(A)\,\det(B). \end{aligned}$$

□

Proposition: Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$$

Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$. □

Proposition:

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \det({}^tA) = \det(A).$$

Preuve:
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}\det({}^tA) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma(j)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(k),k} \\ &= \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon\left({\sigma'}^{-1}\right) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma'(k),k} \\ &= \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma') \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma'(k),k} \\ &= \det(A)\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}\forall \sigma' \in S_n, \varepsilon\left({\sigma'}^{-1}\right) = \varepsilon(\sigma')^{-1} &= \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon(\sigma') = 1 \\ -1 & \text{si } \varepsilon(\sigma') = -1 \end{cases} \\ &= \varepsilon(\sigma').\end{aligned}$$

□

Proposition: Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, C une opération sur les colonnes et A' la matrice obtenue en appliquant C sur les colonnes A.

1. Si $C = c_i \longleftrightarrow c_j$ (avec $i \neq j$), alors $\det(A') = -\det(A)$.
2. Si $C = c_i \longleftrightarrow \lambda c_i$, alors $\det(A') = \lambda \det(A)$.
3. Si $C = c_i \longleftrightarrow c_i + \lambda c_j$ (avec $i \neq j$), alors $\det(A') = \det(A)$.

Preuve:
Soit $(u_1, \ldots, u_n) \in (\mathbb{K}^n)^n$ tel que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], c_i = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_i)$$

où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et c_i la i-ème colonne de A.

1.

$$\begin{array}{c} -\det(A) = -\det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n) \\ \| \\ \det(A') = \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_{i-1},u_j,u_{i+1},\dots,u_{j-1},u_i,u_{j+1},\dots,u_n). \end{array}$$

2.

$$\begin{aligned} \det(A') &= \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_{i-1},\lambda u_i,u_{i+1},\dots,u_n) \\ &= \lambda \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_{i-1},u_i,u_{i+1},\dots,u_n) \\ &= \lambda \det(A). \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \det(A') &= \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_{i-1},u_i+\lambda u_j,u_{i+1},\dots,u_n) \\ &= \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_{i-1},u_i,u_{i+1},\dots,u_n) + \lambda \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_{i-1},u_j,u_{i+1},\dots,u_n) \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

car, comme u_j apparaît deux fois dans le second déterminant, il vaut 0.

□

Corollaire: Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Preuve:

Soit $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & & * \\ & & \lambda_n & \end{pmatrix}$. S'il existe $i \in [\![1,n]\!]$, avec $\lambda_i = 0$, alors $\mathrm{rg}(T) < n$ et donc $T \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et donc $\det(T) = 0 = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$.

On suppose que $\forall i, \lambda_i \neq 0$. On a

$$\frac{1}{\lambda_1}\det(T) = \det \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et

$$\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\det(T) = \det \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \lambda_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

D'où

$$\frac{1}{\lambda_1\cdots\lambda_n}\det(T) = \begin{vmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

donc $\det(T) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$. □

Proposition: Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, L une opération sur les lignes, A' la matrice obtenue en appliquant L sur les lignes de A.

1. Si $L = \ell_i \longleftrightarrow \ell_j$ (avec $i \neq j$), $\det(A') = -\det(A)$.
2. Si $L = \ell_i \longleftrightarrow \lambda\ell_i$, $\det(A') = \lambda\det(A)$.
3. Si $L = \ell_i \longleftrightarrow \ell_i + \lambda\ell_j$ (avec $i \neq j$), $\det(A') = \det(A)$.

□

Exemple:
$(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & c \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & c \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & b-c \end{vmatrix} = (a+b+c)(a-b)(b-c)$$

5 Développement suivant une ligne ou une colonne

Exemple:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \\ 7 & 8 & 9 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 7 & 9 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & -1 \\ 7 & 9 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \\ 7 & 8 & 9 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \\ 7 & 8 & 9 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & -1 \\ 8 & 9 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & -1 \\ 7 & 9 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$E = \mathbb{C}^4$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ base canonique de E.

On pose $\begin{cases} u_1 = (1,4,7,3), \\ u_2 = (2,5,8,2), \\ u_3 = (3,6,9,1), \\ u_4 = (0,-1,-2,0). \end{cases}$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, 2e_1 + 5e_2 + 8e_3 + 2e_4, u_3, u_4)$.

Donc,

$$\begin{aligned} \det A &= \det_{\mathscr{B}}(u_1, 2e_1 + 5e_2 + 8e_3 + 2e_4, u_3, u_4) \\ &= \quad 2\det_{\mathscr{B}}(u_1, e_1, u_3, u_4) \\ &\quad + 5\det_{\mathscr{B}}(u_1, e_2, u_3, u_4) \\ &\quad + 9\det_{\mathscr{B}}(u_1, e_3, u_3, u_4) \\ &\quad + 2\det_{\mathscr{B}}(u_1, e_4, u_3, u_4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det_{\mathscr{B}}(u_1, e_1, u_3, u_4) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & -1 \\ 7 & 0 & 9 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & -1 \\ 0 & 7 & 9 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\left|\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 6 & -1 \\ 0 & 7 & 9 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right| \\ &= \dots \\ &= -\left|\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \ddots & * \\ (0) & \ddots \end{matrix} \end{array}\right| \end{aligned}$$

Idem pour e_2, e_3, e_4.

Proposition (Laplace)**:** Soit $A=(a_{ij})\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\forall j\in[\![1,n]\!]\,,\ \det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}m_{i,j}$$

où $m_{i,j}$ est le <u>mineur</u> d'indices (i,j), i.e. le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de la matrice A.

$$\forall i\in[\![1,n]\!]\,,\ \det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}m_{i,j}.$$

$\square$

Proposition (Vandermonde)**:** Soient $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^n$.

$$\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{j<i}(a_j-a_i)$$

Preuve (par récurrence sur n)*:* — Soit $n\in\mathbb{N}$. Soient $a_1,\dots,a_{n+1}\in\mathbb{K}$. On pose

$$\Delta_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & a_1 & \cdots & a_1^n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_{n+1} & \cdots & a_{n+1}^n\end{vmatrix}$$

On développe Δ_{n+1} suivant la dernière ligne et on obtient une expression polynomial en a_{n+1} :

$$\Delta_{n+1}=P(a_{n+1})\text{ avec }P\in\mathbb{K}_n[X]$$

et le coefficent devant X^n est Δ_n.

Cas 1 On suppose $\Delta_n\neq 0$. D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{cases}\forall i,j\in[\![1,n]\!]\,,\ i\neq j\implies a_i\neq a_j\\ \mathrm{dom}(P_n)=\Delta_n=\displaystyle\prod_{n\geqslant j>i\geqslant 1}(a_j-a_i)\\ \deg(P_n)=n\\ \forall i\in[\![1,n]\!]\,,P(a_i)=0\end{cases}$$

donc

$$P=\Delta_n(X-a_1)\cdots(X-a_n)$$

donc

$$\begin{aligned}\Delta_{n+1}&=\prod_{n\geqslant j>i\geqslant 1}(a_j-a_i)\,(a_{n+1}-a_1)\cdots(a_{n+1}-a_n)\\ &=\prod_{n+1\geqslant j>i\geqslant 1}(a_j-a_i)\end{aligned}$$

Cas 2 On suppose $\Delta_n=0$:

$$\exists i,j\in[\![1,n]\!]\,,\ i\neq j\ \text{ et }\ a_i=a_j.$$

Alors,
$$\Delta_{n+1} = 0 = \prod_{n+1 \geqslant j > i \geqslant 1} (a_j - a_i).$$

□

Proposition – Définition: Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et $\mathrm{com}(A)$ la <u>comatrice</u> de A : c'est la matrice
$$\left((-1)^{i+j}\ m_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$
où $m_{i,j}$ est le mineur d'indices (i,j) de A.

On a
$$A\ {}^t\mathrm{com}(A) = {}^t\mathrm{com}(A)\ A = \det(A)\ I_n.$$

Si $\det A \neq 0$, alors
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ {}^t\mathrm{com}(A).$$

Exemple:
Avec $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, on a $\det A = ad - bc$.
$$\mathrm{com}\, A = \begin{pmatrix} +d & -b \\ -c & +a \end{pmatrix} \text{ donc } {}^t\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$
Si $\det(A) \neq 0$,
$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Exemple:
Avec $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, on a
$$\mathrm{com}\, A = \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 & a_3c_2 - a_2c_3 & a_2b_3 - a_3b_2 \\ c_1b_3 - b_1c_3 & a_1c_3 - a_3c_1 & a_3b_1 - a_1b_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 & a_2c_1 - a_1c_2 & a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Preuve:
On note $C = A\ {}^t\mathrm{com}(A) = (c_{i,j})$.
$$\forall i \in [\![1,n]\!]\,, c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} m_{ij} = \det(A).$$
Soient $i \in [\![1,n]\!]$, $j \in [\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$.
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{j+k} m_{jk}.$$
C'est le déterminant de la matrice obtenue en rempla c ant la j-ème ligne de A par la i-ème, qui a donc 2 lignes identiques donc $c_{ij} = 0$.

L'autre formule “ ${}^t\mathrm{com}(A)\ A = \det(A) I_n$” se démontre de la même fa c on. □

Remarque:
En pratique, on n'utilise jamais cette formule pour trouver A^{-1} (sauf si $n = 2$).

Exercice (Formules de Cramer):

Inutiles et Hors-Programme

Soit S le système $AX = B$ avec $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

L'unique solution du système S est donnée par

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ où } \forall i,\ x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

où A_i est obtenue en repla c ant la i-ème colonne de A par B.

<u>Solution :</u> Soit $(x_1, \dots, x_n)$ l'unique solution de S.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i C_i(A) = B$$

où $C_i(A)$ est la i-ème colonne de A.

$$\begin{aligned} \forall j, \det(A_j) &= \det\big(C_1(A), C_2(A), \dots, C_{j-1}(A), B, C_{j+1}(A), \dots, C_n(A)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \det\big(C_1(A), \dots, C_{j-1}(A), C_i(A), C_{j+1}(A), \dots, c_n(A)\big) \\ &= x_j \det(A) \end{aligned}$$

Retour sur la diagonalisation

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On cherche $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$P\ A\ P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A$ où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On cherche $\mathscr{C} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que

$$\exists \lambda_i, f(u_i) = \lambda_i u_i$$

$$\begin{aligned} & \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \exists u \neq 0,\ f(u) = \lambda u \\ \iff & \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \exists u \neq 0,\ u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) \\ \iff & \exists \lambda \in \mathbb{K},\ f - \lambda\, \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} \text{ n'est pas injective} \\ \iff & \exists \lambda \in \mathbb{K},\ f - \lambda\, \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} \notin \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n) \\ \iff & \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \det(\lambda - \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) = 0 \\ \iff & \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \underbrace{\det(A - \lambda I_n)}_{\text{polynôme caractéristique de } A} = 0 \end{aligned}$$

CHAPITRE

27 ESPACE PROBABILISÉ FINI

1 Définitions

Définition: Soit Ω un ensemble fini. Une probabilité sur Ω est une application

$$P : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$

telle que

1. $P(\Omega) = 1$,
2. $\forall A, B \in \mathscr{P}(W),\ A \cap B = \varnothing \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Dans ce cas, on dit que (Ω, P) est un espace probabilisé.

Exemple (équiprobabilité):
Soit Ω un ensemble fini non vide. Soit

$$\begin{aligned} P : \mathscr{P}(\Omega) &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto \frac{\#A}{\#\Omega}. \end{aligned}$$

En effet,

1. $P(\Omega) = \dfrac{\#\Omega}{\#\Omega} = 1.$
2. Soient $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ avec $A \cap B = \varnothing$.

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{\#(A \cup B)}{\#\Omega} \\ &= \frac{\#A + \#B}{\#\Omega} \\ &= P(A) + P(B) \end{aligned}$$

De plus, on pose $n = \#\Omega$.

$$\forall \omega \in \Omega, P\big(\{\omega\}\big) = \frac{1}{n} \text{ et ne dépend pas de } \omega.$$

Définition: Soit (Ω, P) un espace probabilisé.

L'ensemble Ω est appelé univers, les singletons $\{\omega\}$ avec $\omega \in \Omega$ sont appelés événements élémentaires, les parties de Ω sont appelées événements, $\varnothing$ est appelé événement impossible et Ω est appelé événement certain.

Soient $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$. On dit que A et B sont incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.

Proposition: Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un ensemble de cardinal n et $(p_1, \ldots, p_n) \in [0,1]^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Il existe une unique probabilité P sur Ω que

$$\forall i \in [\![1,n]\!]\,,\ P\big(\{\omega_i\}\big) = p_i.$$

Preuve: Éxistence On pose

$$\begin{aligned} P : \mathscr{P}(\Omega) &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto \sum_{i \in I_A} p_i \end{aligned}$$

où $I_A = \big\{i \in [\![1,n]\!] \mid \omega_i \in A\big\}$.

— Soit $a \in \mathscr{P}(\Omega)$.

$$0 \leqslant P(A) = \sum_{i \in I_A} p_i \leqslant \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

— $P(\Omega) = \displaystyle\sum_{i \in I_\Omega} p_i = \sum_{i=1}^n p_i = 1.$

— Soient $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ incompatibles.

$$\begin{aligned} I_{A\cup B} &= \{i \in [\![1,n]\!]\,, \omega_i \in A \cup B\} \\ &= I_A \cupdot I_B \end{aligned}$$

$$P(A \cup B) = \sum_{i \in I_{A\cup B}} p_i = \sum_{i \in I_A} p_i + \sum_{i \in I_B} p_i = P(A) + P(B).$$

Unicité Soit Q une probabilité sur Ω tel que

$$\forall i \in [\![1,n]\!]\,, Q\big(\{\omega_i\}\big) = p_i.$$

Soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$.

$$A = \bigcupdot_{\omega \in A} \{\omega\} = \bigcupdot_{i \in I_A} \{\omega_i\}.$$

En utilisant le lemme suivant,

$$\begin{aligned} Q(A) &= Q\left(\bigcupdot_{i \in I_A} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i \in I_A} Q\big(\{\omega_i\}\big) \\ &= \sum_{i \in I_A} p_i = P(A). \end{aligned}$$

□

Lemme: Soit P une probabilité sur Ω et $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'événements 2 à 2 incompatibles. Alors
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Preuve:
par récurrence sur n. □

Proposition: Soit P une probabilitésur Ω.
1. $P(\varnothing) = 0$;
2. $\forall A, B \in \mathscr{P}(\Omega),\ A \subset B \implies P(A) \leqslant P(B)$;
3. $\forall A, B \in \mathscr{P}(\Omega),\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Preuve: 1. $\Omega = \varnothing \cup \Omega$ donc $P(\Omega) = P(\varnothing) + P(\Omega)$ donc $P(\varnothing) = 0$.

2. Soient $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ avec $A \subset B$. On pose $C = B \setminus A$:
$$\begin{cases} B = A \cup C; \\ A \cap C = \varnothing. \end{cases}$$
Donc, $P(B) = P(A) + \underbrace{P(C)}_{\geqslant 0} \geqslant P(A)$.

3. On pose $\begin{cases} A' = A \setminus (A \cap B), \\ B' = B \setminus (A \cap B), \\ C = A \cap B. \end{cases}$
$$\begin{cases} A' \cup B' \cup C = A \cup B \\ A' \cap C = B' \cap C = A' \cap B' = \varnothing \end{cases}$$
donc
$$P(A \cup B) = P(A') + P(B') + P(C).$$
De plus,
$$\begin{cases} A = A' \cup C \text{ donc } P(A) = P(A') + P(C); \\ B = B' \cup C \text{ donc } P(B) = P(B') + P(C). \end{cases}$$
D'où
$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) - P(C) + P(B) - \cancel{P(C)} + \cancel{P(C)} \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$
□

2 Probabilité conditionnelle

Proposition – Définition: Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(A) \neq 0$.

L'application

$$\begin{aligned} \mathscr{P}(\Omega) &\longrightarrow [0,1] \\ X &\longmapsto \frac{P(A\cap X)}{P(A)} \end{aligned}$$

est une probabilité. Elle est notée P_A et est appelée probabilité sachant A.

Elle est parfois notée $P(A \mid B)$.

Preuve:

— Soit $X \in P(\Omega)$.

$$0 \leqslant P(A\cap X) \leqslant P(A) \text{ car } A\cap X \subset A$$

Comme $P(A) > 0$,

$$0 \leqslant \frac{P(A\cap X)}{P(A)} \leqslant 1$$

—

$$\frac{P(A\cap \Omega)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

— Soient $X, Y \in P(\Omega)$ avec $X \cap Y = \varnothing$.

$$\begin{aligned} \frac{P\big(A\cap (X\cup Y)\big)}{P(A)} &= \frac{P\big((X\cap A)\uplus(Y\cap A)\big)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A\cap X)+P(A\cap Y)}{P(A)} \end{aligned}$$

□

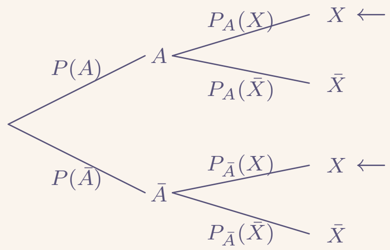
Proposition: Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(A) \neq 0$.

$$\forall X \in \mathscr{P}(\Omega),\ P(A\cap X) = P(A)\ P_A(X).$$

□

Proposition: Soit (Ω, P) un espace probabilisé, $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(A) \in \,]0,1[$.

$$\forall X \in \mathscr{P}(\Omega),\ P(X) = P(A)\,P_A(X) + P\left(\bar{A}\right)\ P_{\bar{A}}(X).$$



Preuve:
Soit $X \in \mathscr{P}(\Omega)$.

$$\begin{aligned} X &= X \cap \Omega \\ &= X \cap \left(A \cup \bar{A}\right) \\ &= (X \cap A) \cup \left(X \cap \bar{A}\right) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} P(X) &= P(X \cap A) + P\left(X \cap \bar{A}\right) \\ &= P(A)\, P_A(X) + P\left(\bar{A}\right)\, P_{\bar{A}}(X). \end{aligned}$$

□

Définition: Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Un système complet d'événements est une partition de Ω.

Proposition (probabilités totales)**:** Soit (Ω, P) un espace probabilisé, $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un système complet d'événements tel que

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ P(A_i) > 0.$$

Alors,

$$\forall x \in \mathscr{P}(\Omega),\ P(X) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(X).$$

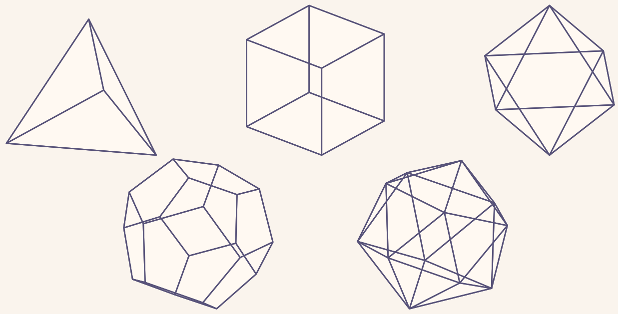
Preuve:
Soit $X \in \mathscr{P}(\Omega)$.

$$\begin{aligned} P(X) &= P(X \cap \Omega) \\ &= P\left(X \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (X \cap A_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(X \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(X) \end{aligned}$$

□

Exemple:
On dispose de 5 dés : un à 4 faces, un à 6 faces, un à 8 faces, un à 8 faces, un à 12 faces et un à 20 faces que l'on suppose bien équilibré.

Pour qu'un dé soit bien équilibré, il faut que ce soit un polyèdre régulier, aussi appelé polyèdre de Platon. Il y en a 5 : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre, et l'icosaèdre.



On choisit au hasard l'un de ces dés, on le lance et on note le résultat.

Quelle est la probabilité que ce résultat soit égal à 7 ?

Modélisation 1 : $\Omega = [\![1, 20]\!]$, $P = ?$.

Modélisation 2 : $\Omega = \big\{(x, y) \mid x \in \{4, 6, 8, 12, 20\} \text{ et } y \in [\![1, x]\!]\big\}$ et P une probabilité sur Ω.

On pose $\forall x \in \overbrace{\{4, 6, 8, 12, 20\}}^{X}$, $A_x = \{x\} \times [\![1, x]\!]$. On suppose que

$$\forall x \in X,\ P(A_x) = \frac{1}{5}.$$

On note

$$\forall y \in [\![1, 20]\!],\ B_y = \big\{(x, y) \mid x \in X \text{ et } y \leqslant x\big\}$$

et donc

$$\forall x \in X,\ \forall y \in [\![1, x]\!],\ P_{A_x}(B_y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } y \leqslant x, \\ 0 & \text{si } y > x. \end{cases}$$

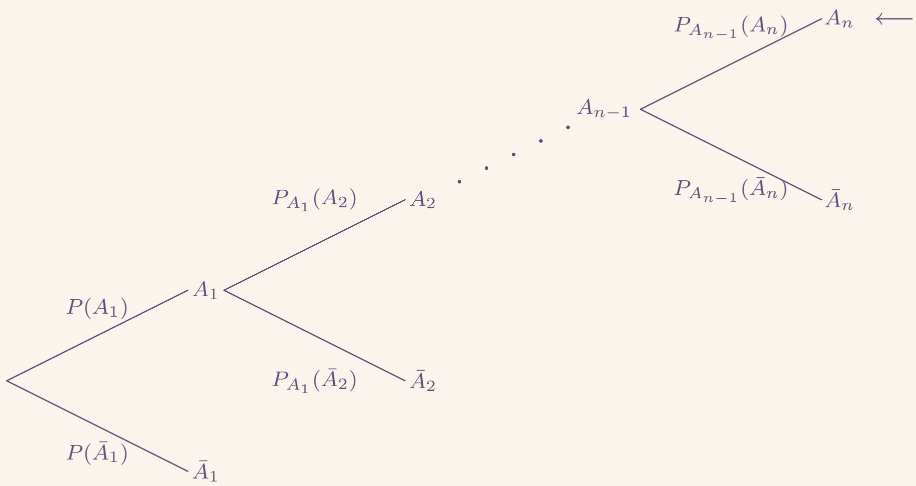
Implémentation en Python de l'experience :

```python
import random as rd

def exp():
    faces = rd.choice([4, 6, 8, 12, 20])
    result = rd.randint(1, faces)
    return result == 7

def proba(N = 1000):
    cpt = 0
    for _ in range(N):
        if exp():
            cpt += 1
    return cpt / N
```

Solution :

$$\begin{aligned} P(B_7) &= \sum_{x \in X} P_{A_x}(B_7) P(A_x) \\ &= \frac{1}{5}\left(P_{A_8}(B_7) + P_{A_{12}}(B_7) + P_{A_{20}}(B_7)\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}\right). \end{aligned}$$

Proposition (probabilités composées)**:** Soit (Ω, P) un espace probabilisé, $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des événements tels que
$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0.$$
Alors,
$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\, P_{A_1\cap A_2}(A_3) \cdots P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$



Preuve:

$$\forall i, A_1 \cap \cdots \cap A_i \supset A_1 \cap \cdots \cap A_n \text{ donc } P(A_1 \cap \cdots \cap A_i) > 0.$$

$$\begin{aligned}
&P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\, P_{A_1\cap A_2}(A_3) \cdots P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)\\
&= P(A_1) \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} \frac{P(A_3 \cap A_2 \cap A_1)}{P(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{P(A_n \cap A_{n-1} \cap \cdots \cap A_1)}{P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})}\\
&= P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)
\end{aligned}$$

□

Exemple:
On reprend l'expérience précédente aléatoire précédente. On sait qu'on a obtenu 7.

Quel dé a été utilisé ?

On veut calculer $P_{B_7}(A_x)$ pour tout x. Soit $x \in X$.

$$\begin{aligned}
P_{B_7}(A_x) &= \frac{P(A_x \cap B_7)}{P(B_7)} \\
&= \frac{P_{A_x}(B_7)\, P(A_x)}{P(B_7)} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \{4,6\} \\ \dfrac{\frac{1}{8} \times \frac{1}{5}}{P(B_7)} & \text{si } x = 8 \\ \dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}}{P(B_7)} & \text{si } x = 12 \\ \dfrac{\frac{1}{20} \times \frac{1}{5}}{P(B_7)} & \text{si } x = 20 \end{cases}
\end{aligned}$$

On a utilisé la formule de Bayes.

Proposition (Bayes)**:** Soit (Ω, P) un espace probabilisé, $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \in]0,1[$.

$$P_A(B) = \frac{P_B(A)\; P(B)}{P(A)} = \frac{P_B(A)\; P(B)}{P_B(A)\, P(B) + P_{\bar{B}}(A)\, P\left(\bar{B}\right)}.$$

□

Remarque:
On appèle $P_A(B)$ la vraissemblance (*likelyhood* en anglais), $P(A)$ la probabilité a-priori (*prior distribution*), et $P_B(A)$ la probabilité a-posteriori (*posterior distribution*).

Exemple (filtre bayésien):
On peut utiliser cette formule pour filtrer les SPAMs dans les emails. On utilise des données de la forme :

	mot 1	mot 2	$\cdots$	mot p	spam ?
mail 1					
mail 2					
$\vdots$					
mail n					

On peut donc calculer la probabilité qu'un email soit un SPAM en fonction des mots qu'il contient :

$$\begin{aligned}
P_{(\text{mot } 1, \overline{\text{mot } 2}, \ldots)}(\text{spam}) &= \frac{P(\text{spam})\, P_{\text{spam}}(\text{mot } 1, \overline{\text{mot } 2}, \ldots)}{P(\text{mot } 1, \overline{\text{mot } 2}, \ldots)} \\
&\simeq \frac{P_{\text{spam}}(\text{mot } 1) \times P_{\text{spam}}(\overline{\text{mot } 2}) \times \cdots}{P(\text{mot } 1, \overline{\text{mot } 2}, \ldots)}.
\end{aligned}$$

Exemple (Test médical):
On estime qu'une personne sur 10 000 est atteinte d'une certaine maladie. On invente un test T.

$$\begin{cases} P_{\text{malade}}(T = \text{positif}) = \dfrac{99}{100}, \\ P_{\overline{\text{malade}}}(T = \text{positif}) = \dfrac{1}{1000}. \end{cases}$$

On fait un test et il revient positif. Quelle est la probabilité d'avoir la maladie : $P_{T^+}(M)$?

$$\begin{aligned}
P_{T^+}(M) &= \frac{P_M(T^+)\,P(M)}{P(T)} \\
&= \frac{\frac{99}{100} \times \frac{1}{10\,000}}{\frac{99}{100} \times \frac{1}{10\,000} \times \frac{9\,999}{10\,000}} \\
&= \frac{990}{990 + 9999} \simeq 9\,\%
\end{aligned}$$

On a 9 % d'avoir la maladie : le test n'est pas très précis.

Exemple (QCM):
On a un QCM de 20 questions où l'on peut répondre par vrai ou faux (donc c'est pas vraiment un QCM). Si un étudiant connaît la réponse, il réponds correctement. Sinon, il choisit l'une des réponses au hasard.

Soit p la probabilité qu'il connaisse la réponse à une question. Cela représente le niveau du candidat : un élève ayant travaillé aura une valeur de p plus importante qu'un élève n'ayant pas travaillé.

L'étudiant obtient $^{13}/_{20}$. Estimer p.

Comme $p \in [0, 1]$, on découpe l'intervalle en 10 : on pose

$$\forall k \in [\![0, 9]\!]\,,\ A_k : \text{“}p = \frac{k + 0,5}{10}\text{”}.$$

On pose aussi

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, 20]\!]\,,\ B_i : \text{“la } i\text{-ème réponse est correcte”}, \\ \forall j \in [\![0, 20]\!]\,,\ C_j : \text{“l'étudiant a } {}^{j}/_{20}\text{”}, \end{cases}$$

On cherche donc $P_{C_{13}}(A_k)$. S'il n'y a pas de “pic” de probabilité (en fonction de k), il faut changer le QCM : augmenter le nombre de questions, mettre des questions plus faciles / difficiles…

On utilise la formule de Bayes :

$$P_{C_{13}}(A_k) = \frac{P_{A_k}(C_{13})\,P(A_k)}{P(C_{13})}.$$

On peut choisir $P(A_k)$: c'est subjectif. On peut avoir une distribution uniforme, ou suivant une courbe de Gauss, …

On choisit $P(A_k) = \dfrac{1}{10}$: distribution uniforme.

$$P(C_{13}) = \sum_{k=0}^{9} P_{A_k}(C_{13})\,P(A_k);$$

$$P_{A_k}(C_{13}) = \binom{20}{13}\left(\frac{p+1}{2}\right)^{13}\left(1 - \frac{p+1}{2}\right)^{7}.$$

Proposition (Bayes)**:** Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_k)_{k\in K}$ un système complet d'événements tel que

$$\forall k \in K,\ P(A_k) \neq 0.$$

Soit $X \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(X) \neq 0$. On a

$$\forall k \in K,\ P_X(A_k) = \frac{P_{A_k}(X)\,P(A_k)}{\sum_{j\in K} P_{A_j}(X) P(A_j)}.$$

□

||

3 Événements indépendants

Définition: Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, P). On dit que A et B sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B).$$

Remarque:
L'indépendance d'événements au sens mathématique n'est pas la même chose que l'indépendance dans le sens commun : elle dépend de la probabilité utilisé !

Exemple:
On considère un objet, qui est défectueux avec une probabilité $p \in]0,1[$. On effectue deux contrôles indépendants. Chaque contrôle permet de détecter un défaut (s'il y en a un) avec une probabilité q (il n'y a pas de faux positifs : on ne peut pas trouver un défaut s'il n'y en a pas).

Les deux contrôles sont négatifs. Quelle est la probabilité qu'il y ait quand même un défaut ?

SimulationenPython :

```python
import random as rd

def experience(p, q):
    defaut = bernoulli(p)
    controles = [False, False]

    for i in range(2):
        if defaut:
            controles[i] = bernoulli(q)

    return (controles, defaut)

def proba(p, q, N = 10000):
    cpt = 0
    pr = 0
    while cpt < N:
        c, d = experience(p, q)
        if not any(c): # deux controles negatifs
            cpt += 1

            if d:
                pr += 1
    return pr / N
```

Pour générer une variable aléatoire de probabilité p en Python, on génère un réel $x \in [0,1]$ et on le compare à p :

```python
def bernoulli(p):
        return rd.random() < p
```

Modélisation : $\Omega = \{0,1\}^3$;
$D = \{0,1\}^2 \times \{1\}$ et $P(D) = p$;
$C_1 = \{1\} \times \{0,1\}^2$ et $P_D(C_1) = q$;
$C_2 = \{0,1\} \times \{1\} \times \{0,1\}$ et $P_D(C_2) = q$.

On sait que $P_{\bar{D}}(C_1) = P_{\bar{D}}(C_2) = 0$.

On suppose que C_1 et C_2 indépendants relativement à P_D.

$$P_{\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2}(D) = \frac{P_D\left(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2\right) P(D)}{P\left(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2\right)}.$$

On a :

$$\begin{aligned} P_D\left(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2\right) &= P_D\left(\bar{C}_1\right) P_D\left(\bar{C}_2\right) \\ &= (1-q)^2, \end{aligned}$$

$$P(D) = p,$$

et

$$\begin{aligned} P\left(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2\right) &= P_D(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2)\, P(D) + P_{\bar{D}}(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2)\, P(\bar{D}). \\ &= p(1-q)^2 + 1 - p. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} P\left(\bar{C}_1\right)\, P\left(\bar{C}_2\right) &= \left((1-q)p + 1 - p\right)^2 \\ &\neq P\left(\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2\right) \text{ en général.} \end{aligned}$$

Finalement,

$$P_{\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2}(D) = \frac{p(1-q)^2}{p(1-q)^2 + 1 - p}.$$

Si $q = 1$, on a $P_{\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2}(D) = 0$. Si $q = 0$, on a $P_{\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2}(D) = p$.

Définition: Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{i \in I}$ une famille finie d'événements.

1. On dit que ces événements sont 2 à 2 indépendants si
$$\forall i \neq j, \quad P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\, P(A_j)$$
2. On dit qu'ils sont mutuellement indépendants si
$$\forall J \in \mathscr{P}(I) \setminus \{\varnothing\}, \quad P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

Exemple:

À faire

$\Omega = \ldots$, $P = \ldots$, $A, B, C = \ldots$ tels que

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A)\, P(B) \\ P(A \cap C) = P(A)\, P(C) \\ P(B \cap C) = P(B)\, P(C) \end{cases}$$

mais

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A)\, P(B)\, P(C).$$

Exercice:

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, A et B deux événements indépendants (par rapport à P).

1. *Montrer que A et $\bar{B}$ sont indépendants.*
2. *Montrer que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.*

Solution :

1. On suppose $P(A) \neq 0$.
$$\begin{aligned} P\left(A \cap \bar{B}\right) &= P_A\left(\bar{B}\right) P(A) \\ &= P(A)\left(1 - P_A(B)\right) \\ &= P(A)\big(1 - P(B)\big) \\ &= P(A)\, P\left(\bar{B}\right) \end{aligned}$$
On suppose $P(A) = 0$. $A \cap \bar{B} \subset A$ donc
$$0 \leqslant P\left(A \cap \bar{B}\right) \leqslant P(A) = 0$$
et donc
$$P\left(A \cap \bar{B}\right) = 0 = P(A)\, P\left(\bar{B}\right).$$
2. C'est une conséquence du 1. : on remplace B par A et A par $\bar{B}$.

Proposition: Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements mutuellement indépendants. Soit $J \in \mathscr{P}(I)$ et on pose
$$\forall i \in I,\ B_i = \begin{cases} \bar{A}_i & \text{si } i \in J \\ A_i & \text{sinon.} \end{cases}$$
Alors, $(B_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Preuve:
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$\mathscr{P}(n) : \text{ “}\forall K \subset I \text{ avec } \#K = n,\ P\left(\bigcap_{i\in K} B_i\right) = \prod_{i\in K} P(B_i)\text{”}.$$
□

4 Bilan

Une probabilité est une application de la forme
$$P : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$$
vérifiant
1. $P(\Omega) = 1$;
2. $\forall A, B,\ P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Si $A \cap B = \varnothing$, on dit qu'il sont incompatibles.

Si on associe à chaque événement élémentaire ω_i une “valeur” ($\simeq$ probabilité) p_i, alors il existe une unique probabilité P sur Ω vérifiant $P(\omega_i) = p_i$.

Équiprobabilité

$$\begin{aligned} P : \mathscr{P}(\Omega) &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto \frac{\#A}{\#\Omega}. \end{aligned}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

$\forall A, B, P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Probabilité conditionnelle

Pour tout événement A de Ω de probabilité non nulle,

$$\begin{aligned} P_A : \mathscr{P}(\Omega) &\longrightarrow [0,1] \\ X &\longmapsto \frac{P(A \cap X)}{P(A)}. \end{aligned}$$

Un système complet d'événements est une partition de Ω.

Probabilités totales

$$\forall X \in \mathscr{P}(\Omega), P(X) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P_{A_i}(X).$$

A et B sont deux événements indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B).$$

$(A_i)_{i \in I}$ est une famille finie d'événements mutuellement indépendants si

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Probabilités composées

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\, P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Bayes

$$P_A(B) = \frac{P_B(A)\, P(B)}{P(A)}.$$

Pour plusieurs événements

$$\forall k \in K,\ P_X(A_k) = \frac{P_{A_k}(X)\, P(A_k)}{\sum_{j \in K} P_{A_j}(X)\, P(A_j)}.$$

CHAPITRE

28

SOUS-ESPACES AFFINES D'UN ESPACE VECTORIEL

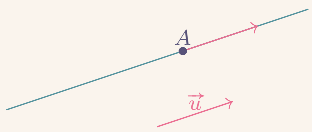
1 Espace affine (Hors Programme)

Motivation géométrique :

Dans les petites classes, la géométrie du plan distingue deux types d'objets élémentaires :
- le point
- le vecteur

reliés par la notion de translation.

Par exemple, une droite peut être décrite avec un point et un vecteur :



Soit $\mathbb{K}$ un corps.

Définition: Un $\mathbb{K}$-espace affine est un triplet $\left(E, \vec{E}, \tau\right)$ où
- E est un ensemble ;
- $\vec{E}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ;

— $\tau : E \times \vec{E} \longrightarrow E$ telle que

$$\begin{cases} \forall M \in E,\ \tau\left(M, \vec{0}\right) = M, \\ \forall M \in E,\ \forall\left(\vec{u}, \vec{v}\right) \in \vec{E}^2, \tau\Big(\tau\left(M, \vec{u}\right), \vec{v}\Big) = \tau\left(M, \vec{u} + \vec{v}\right), \\ \forall (A, B) \in E^2,\ \exists! \vec{u} \in \vec{E}, \tau\left(A, \vec{u}\right) = B. \end{cases}$$

Les éléments de E sont appelés points, ceux de $\vec{E}$ vecteurs.

Pour tout $\vec{u} \in \vec{E}$, l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \tau\left(M, \vec{u}\right) \end{array}$$

est la translation de vecteur $\vec{u}$.

En général, pour $M \in E$ et $\vec{u} \in \vec{E}$, au lieu d'écrire $\tau\left(M + \vec{u}\right)$, on écrit $M + \vec{u}$. Soient $(A, B) \in E^2$. L'unique vecteur $\vec{u}$ tel que $A + \vec{u} = B$ est noté $\overrightarrow{AB} = B - A$.

Exemple: 1. On pose

$$(\mathscr{E}) : \quad y' = xy + xe^x$$

Soit E l'ensemble des solutions de $(\mathscr{E})$, $\vec{E}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions de

$$(\mathscr{H}) : \quad y' = xy,$$

et

$$\begin{aligned} \tau : E \times \vec{E} &\longrightarrow E \\ (f, \vec{u}) &\longmapsto f + \vec{u} \end{aligned}$$

où $+$ correspond à l'addition de fonctions.

— $\forall f \in E,\ \tau\left(f, \vec{0}\right) = f + 0 = f.$

—

$$\begin{aligned} \forall f \in E,\ \forall (h_1, h_2) \in \vec{E}^2,\ \tau\big(\tau(f, h_1), h_2\big) &= \tau(f + h_1, h_2) \\ &= (f + h_1) + h_2 \\ &= f + (h_1 + h_2) \\ &= \tau\big(f, \tau(h_1, h_2)\big) \end{aligned}$$

— Soient $(f_1, f_2) \in E^2$. On pose $h = f_2 - f_1 \in \vec{E}$ ($-$ est la soustraction de fonctions) et alors $\tau(f_1, h) = f_2$ et h est unique.

2. On pose $E = \mathbb{R}^2$, $\vec{E} = \mathbb{R}^2$ et

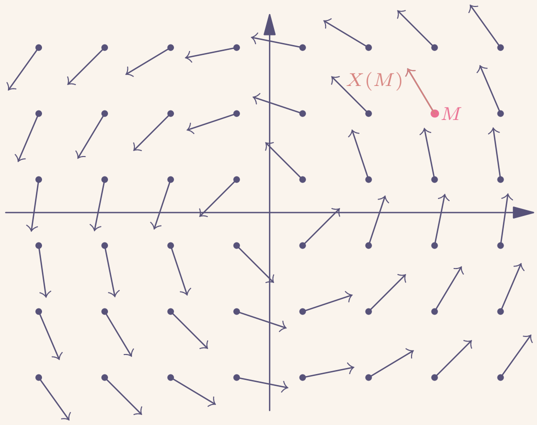
$$\begin{aligned} \tau : E \times \vec{E} &\longrightarrow E \\ \big((x, y), (u, v)\big) &\longmapsto (x + u, y + v). \end{aligned}$$

$\left(E, \vec{E}, \tau\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace affine.

Proposition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors $(E, E, +)$ est un $\mathbb{K}$-espace affine. □

Exemple:
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un champ de vecteur est une application

$$X : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{points}}}{E} \longrightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vecteurs}}}{E}.$$



EXEMPLE:
Avec $F = \mathbb{R}^2$ et $E = \left\{(x,y) \in F \mid 2x+3y=5\right\}$, $(E,+,\cdot)$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel : $(0,0) \notin E$.

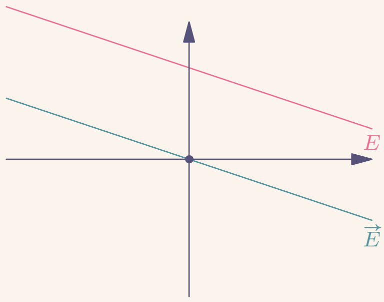
On pose $\vec{E} = \left\{(x,y) \in F \mid 2x+3y=0\right\}$, c'est un sous-espace vectoriel de F. On pose

$$\begin{aligned} \tau : E \times \vec{E} &\longrightarrow E \\ \big((x,y),(u,v)\big) &\longmapsto (x+u, y+v). \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in E, \forall (u,v) \in \vec{E}, 2(x+u)+3(y+v) &= 2x+3y+2u+3v \\ &= 5+0=5 \end{aligned}$$

donc $\tau\big((x,y),(u,v)\big) \in E$.



EXEMPLE:
Avec E les solutions de $y' = 3y + e^x$, $\vec{E} = \mathbb{R}$, et

$$\begin{aligned} \tau : E \times \vec{E} &\longrightarrow E \\ (y,\lambda) &\longmapsto \left(x \mapsto y(x) + \lambda e^{3x}\right). \end{aligned}$$

Proposition: Soit $\left(E, \vec{E}, \tau\right)$ un $\mathbb{K}$-espace affine. Si $E \neq \varnothing$,

$$\vec{E} = \left\{\overrightarrow{AB} \mid (A,B) \in \vec{E}\right\}.$$

Preuve: — $\forall A, B \in E,\ \overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{E}$.
— Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$. Comme $E \neq \varnothing$, on choisit $A \in E$. On pose $B = A + \overrightarrow{u}$. D'où $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.

□

Remarque:
On a même démontré que, pour tout $A \in E$, l'application

$$\begin{aligned} \varphi_A : \overrightarrow{E} &\longrightarrow E \\ \overrightarrow{u} &\longmapsto A + \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

est bijective. On dit qu'on a vectorialisé E au point A :

$$\begin{cases} M + N := A + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \\ \lambda N := A + \lambda\overrightarrow{AM} \end{cases}$$

Proposition: Soit $\left(E, \overrightarrow{E}, \tau\right)$ un $\mathbb{K}$-espace affine.

1. $\forall A \in E,\ \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$;
2. $\forall A, B, C \in E,\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;
3. $\forall A, B \in E,\ \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Preuve: 1. Soit $A \in E$. $\tau\left(A, \overrightarrow{AA}\right) = A = \tau\left(A, \overrightarrow{0}\right)$ donc $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

2. Soient $A, B, C \in E$. On pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$.

$$\begin{array}{l} \tau\left(\tau\left(A, \overrightarrow{u}\right), \overrightarrow{v}\right) = \tau\left(B, \overrightarrow{v}\right) = C = \tau\left(A, \overrightarrow{AC}\right) \\ \quad\quad \| \\ \tau\left(A, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) \end{array}$$

3. Soient $A, B \in E$. D'après 1. $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ et, d'après 2. $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$. Donc $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

□

2 Sous-espaces affines

Définition: Soit $\left(E, \overrightarrow{E}, \tau\right)$ un $\mathbb{K}$-espace affine et $F \in \mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$.

Pour tout $A \in F$, on pose $\overrightarrow{F_A} = \left\{\overrightarrow{AB} \mid B \in F\right\}$. On dit que F est un sous-espace affine de $\left(E, \overrightarrow{E}, \tau\right)$ s'il existe $A \in F$ tel que $\overrightarrow{F_A}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$.

Proposition: Avec les notations précédentes, $\left(F, \overrightarrow{F_A}, \tau_{|F \times \overrightarrow{F_A}}\right)$ est un espace affine.

Preuve: — Soit $M \in F$, $\vec{u} \in \overrightarrow{F_A}$.

$$M + \vec{u} = A + \underbrace{\underbrace{\overrightarrow{AM}}_{\in \overrightarrow{F_A}} \underbrace{\vec{u}}_{\in \overrightarrow{F_A}}}_{\in \overrightarrow{F_A}} = A + \underbrace{\overrightarrow{AB}}_{B \in F} = B \in F.$$

— Soit $M \in F$, $\vec{u}, \vec{v} \in \overrightarrow{F_A}$.

$$(M + \vec{u}) + \vec{v} = M + (\vec{u} + \vec{v})$$

car $M \in E$ et $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$.

— Soient $M, N \in F \subset E$. On sait que

$$\exists! \vec{u} \in \vec{E},\ M + \vec{u} = N.$$

$$\begin{aligned}\vec{u} = \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} \\ &= \underbrace{\overrightarrow{AN}}_{\in \overrightarrow{F_A}} - \underbrace{\overrightarrow{AM}}_{\in \overrightarrow{F_A}} \in \overrightarrow{F_A}\end{aligned}$$

□

Proposition: Soit F un sous-espace affine de $\left(E, \vec{E}, \tau\right)$. Alors

$$\forall (A, B) \in F^2,\ \overrightarrow{F_A} = \overrightarrow{F_B}.$$

Preuve:
Soit A comme dans la définition $\left(\overrightarrow{F_A}\text{ sous-espace vectoriel de } \vec{E}\right)$ et $B \in F$. Soit $\vec{u} \in \overrightarrow{F_B}$. Alors $\vec{u} = \overrightarrow{BM}$ avec $M \in F$.

$$\vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{F_A}.$$

Soit $\vec{v} \in \overrightarrow{F_A}$. On pose $M = \underbrace{M}_{} + \underbrace{\vec{v}}_{\in \overrightarrow{F_A}} \in F$. Donc $\vec{v} = \overrightarrow{BM} \in \overrightarrow{F_B}$. □

Corollaire: Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $y \in F$.
Les solutions de l'équation $f(x) = y$ est un sous-espace affine de direction $\operatorname{Ker} f$. □

Proposition: Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces affines de F. Alors, $\displaystyle\bigcap_{i \in I} F_i$ est soit vide, soit un sous-espace affine de F.

De même que pour les groupes et les espaces vectoriels, on peut définir le sous-espace engendré par une partie de E.

Proposition – Définition: Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Le sous-espace affine engendré par A est

$$\bigcap_{\substack{F \text{ sous-espace affine de } E \\ A \subset F}} F.$$

C'est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace affine contenant A.

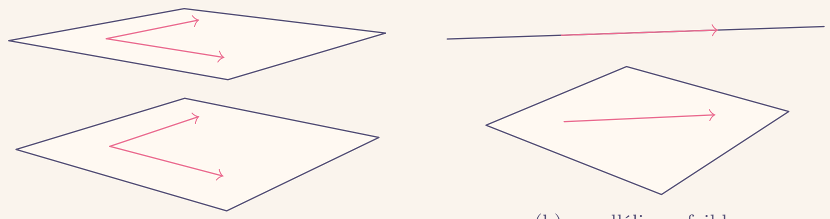
Remarque:
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace affine de E, alors

$$\begin{cases} \forall A \in F,\ F = A + \vec{F} = \{A + \vec{u} \mid \vec{u} \in \vec{F}\}, \\ \vec{F} \text{ sous-espace vectoriel de } E. \end{cases}$$

3 Parallélisme et hyperplans

Définition: Soit $\left(E, \vec{E}, \tau\right)$ un espace affine, F et G deux sous-espaces affines de E.

1. On dit que F et G sont fortement parallèles si $\vec{F} = \vec{G}$.
2. On dit que F et G sont faiblement parallèles si $\vec{F} \subset \vec{G}$ ou $\vec{G} \subset \vec{F}$.



(a) parallélisme fort

(b) parallélisme faible

Définition: Soit F un sous-espace affine de $\left(E, \vec{E}, \tau\right)$. L'espace

$$\vec{F} = \left\{ \overrightarrow{AB} \mid A, B \in F \right\}$$

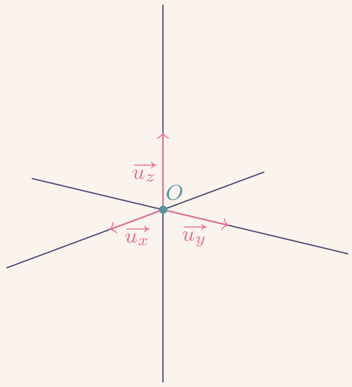
est appelé direction de F.

On dit que
- F est une droite affine si $\vec{F}$ est une droite vectorielle,
- F est une plan affine si $\vec{F}$ est un plan vectorielle,
- F est une hyperplan affine si $\vec{F}$ est un hyperplan vectorielle.

4 Repère affine

Définition: Soit F un sous-espaca affine de E. Un repère de F est la donnée d'un point $A \in F$ ("l'origine du repère") et d'une base $\mathscr{B} = (\vec{e_i})_{i \in I}$ de $\vec{F}$ ("vecteurs direction").

Exemple (mécanique – physique):
On pose $E = (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3, +)$, un $\mathbb{R}$-espace affine. $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ est une base de E : la base carthésienne. Il existe plusieurs bases de E : $(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ (base cylindrique) et $(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$ (base sphérique) sont deux autres bases de E.



Proposition – Définition: Soit F un sous-espace affine de E, et $\mathscr{R} = (A, \overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ un repère de F. Alors, pour tout $B \in F$,

$$\exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ B = A + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{e_i}.$$

On dit que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont les <u>coordonées</u> de B.

CHAPITRE

29

PRODUIT SCALAIRE

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On sait déjà calculer le produit scalaire en dimension 2 et 3 mais l'objectif de ce chapitre est de le généraliser en dimension potentiellement infinie.

1 Définitions

Définition: Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive :

$$f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

1. $\forall(u_1, u_2, v) \in E^3, \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, f(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha f(u_1, v) + \beta f(u_2, v)$, (bilinéaire)
2. $\forall(u, v) \in E^2,\ f(u, v) = f(v, u)$, (symétrie)
3. $\forall u \in E,\ f(u, u) \geqslant 0$, (positive)
4. $\forall u \in E,\ \big(f(u, u) = 0 \iff u = 0_E\big)$. (définie)

On dit alors que (E, f) est un espace préhilbertien. Si, de plus, E est de dimension finie, alors on dit que (E, f) est un espace euclidien.

En général, on note $\langle u \mid v\rangle$, $\langle u, v\rangle$ ou $(u \mid v)$ à la place de $f(u, v)$.

Remarque:
Même si elle est utilisée (notament au lycée), la notation $u \cdot v$ est dangeureuse car elle peut être facilement confondue par la multiplication.

Exemple:

1. Avec $E = \mathbb{R}^2$, on a $\big\langle (x, y) \mid (x', y')\big\rangle = xx' + yy'$.
2. Avec $E = \mathbb{R}^n$, on a $\big\langle (x_1, \dots, x_n) \mid (y_1, \dots, y_n)\big\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
3. Avec $E = \mathscr{C}^0\big([a, b], \mathbb{R}\big)$, on a $\langle f \mid g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$.
4. Avec $E = \ell^1(\mathbb{R}) = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum |u_n| \text{ converge}\}$, on a $\langle u \mid v\rangle = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. En effet,

$v \in E$ donc $\sum |v_n|$ converge et donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On a donc

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |v_n| \leqslant 1$$

donc

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n v_n| \leqslant |u_n|.$$

Comme $\sum |u_n|$ converge, on en déduit que $\sum |u_n v_n|$ aussi.

5. Avec $E = \mathbb{R}^2$, on a $\big\langle (x,y) \mid (x',y') \big\rangle = xx' + 2xy' + 2yx' + 5yy'$.

— On fixe $(x',y') \in E$. Soient $(x_1,y_1) \in E$, $(x_2,y_2) \in E$ et $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\big\langle \lambda_1(x_1,y_1) + \lambda_2(x_2,y_2) \mid (x',y') \big\rangle &= \big\langle (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \mid (x',y') \big\rangle \\ &= \quad (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)x' + 2(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)y' \\ &\quad + 2(\lambda y_1 + \lambda_2 y_2)x' + 5(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)y' \\ &= \quad \lambda_1(x_1x' + 2x_1y' + 2y_1x' + 5y_1y') \\ &\quad + \lambda_2(x_2x' + 2x_2y' + 2y_2x' + 5y_2y') \\ &= \lambda_1 \big\langle (x_1,y_1) \mid (x',y') \big\rangle + \lambda_2 \big\langle (x_2,y_2) \mid (x',y') \big\rangle\end{aligned}$$

— Soit $(x,y) \in E$ et $(x',y') \in E$.

$$\begin{aligned}\big\langle (x',y') \mid (x,y) \big\rangle &= x'x + 2x'y + 2y'x + 3y'y \\ &= \big\langle (x,y) \mid (x',y') \big\rangle\end{aligned}$$

— Soit $(x,y) \in E$.

$$\begin{aligned}\big\langle (x,y) \mid (x,y) \big\rangle &= x^2 + 4xy + 5y^2 \\ &= (x+2y)^2 + y^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

— Soit $(x,y) \in E$.

$$\begin{aligned}\big\langle (x,y) \mid (x,y) \big\rangle = 0 &\iff (x+2y)^2 + y^2 = 0 \\ &\iff \begin{cases} y^2 = 0 \\ (x+2y)^2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Définition: Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un esapce préhilbertien. Soit $x \in E$.

La <u>norme (euclidienne)</u> de x est

$$\sqrt{\langle x \mid x \rangle} = \|x\|.$$

Proposition:
1. $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \iff x = 0_E$ (séparation)
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ (homogénéité positive)
3. $\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

□

L'inégalité triangulaire sera prouvée dans la suite du chapitre (paragraphe 2.).

Définition: Soit $(x, y) \in E^2$. On dit que x et y sont orthogonaux si $\langle x \mid y \rangle = 0$. On note cette situation $x \perp y$.

Exemple:
Avec $E = \mathscr{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ et $\langle f \mid g \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$. Soit f paire et g impaire. Alors $f \perp g$. Dans ce cas, on peut appliquer le théorème de Pythagore (vu dans la suite du chapitre) :

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

2 Quelques formules

Dans ce paragraphe, $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien.

Proposition: Soient $x, y \in E$.

1. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x \mid y \rangle$.
2. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$. (identité du parallélogramme)
3. $\langle x \mid y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$. (polarisation)

Preuve: 1.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y \mid x + y \rangle \\ &= \langle x \mid x + y \rangle + \langle y \mid x + y \rangle \\ &= \langle x \mid x \rangle + \langle x \mid y \rangle + \langle y \mid x \rangle + \langle y \mid y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x \mid y \rangle \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x \mid y \rangle \\ &\quad + \|x\|^2 + \|-y\|^2 + 2\langle x \mid -y \rangle \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \end{aligned}$$

3.

□

Théorème (inégalité de Cauchy–Schwarz)**:** Soient $x, y \in E$. Alors

$$\big|\langle x \mid y \rangle\big| \leqslant \|x\|\,\|y\|$$

et

$$\big|\langle x \mid y \rangle\big| = \|x\|\,\|y\| \iff x \text{ et } y \text{ sont colinéaires.}$$

Preuve:
On fixe $(x, y) \in E^2$.

— On suppose $y \neq 0_E$. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \|x+ty\|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) &= \|x\|^2 + 2\langle x \mid ty\rangle + \|ty\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2t\langle x \mid y\rangle + t^2\|y\|^2. \end{aligned}$$

Comme $y \neq 0_E$, $\|y\|^2 \neq 0$ et f est donc une fonction polynomiale de degré 2. En outre,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \geqslant 0.$$

Donc le discriminant Δ de f est négatif ou nul. Or,

$$\Delta = 4\langle x \mid y\rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2.$$

Ainsi

$$\langle x \mid y\rangle^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2$$

et donc

$$|\langle x \mid y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

On suppose que $|\langle x \mid y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$. Dans ce cas, $\Delta = 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(\lambda) = 0$, i.e. $\|x+\lambda y\| = 0$ et donc $x = -\lambda y$, donc x et y sont colinéaires.
La réciproque est immédiate.

— On suppose $y = 0_E$.

$$|\langle x \mid y\rangle| = |\langle x \mid 0_E\rangle| = 0 \qquad \text{et} \qquad \|x\|\,\|y\| = \|x\| \times 0 = 0.$$

On a bien

$$\begin{cases} |\langle x \mid y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|; \\ y \text{ et } x \text{ sont colinéaires.} \end{cases}$$

□

Corollaire (inégalité triangulaire)**:** Soi $(x, y) \in E^2$.

1. $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
2. $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^+,\ \big(x = \lambda y \text{ ou } y = \lambda x\big)$.

Preuve: 1.

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x \mid y\rangle \\ &\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x \mid y\rangle| \\ &\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| \\ &\leqslant \big(\|x\| + \|y\|\big)^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

2.

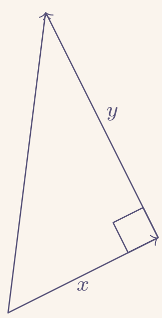
$$\begin{aligned}
\|x+y\| = \|x\| + \|y\| &\iff \|x+y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2 \\
&\iff \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x \mid y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| \\
&\iff \langle x \mid y\rangle = \|x\| + \|y\| \\
&\iff \begin{cases} \langle x \mid y\rangle \geqslant 0 \\ |\langle x \mid y\rangle| = \|x\| + \|y\| \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R},\ x = \lambda y \ \text{ ou } \ y = \lambda x \\ \langle x \mid y\rangle \geqslant 0 \end{cases} \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^+,\ x = \lambda y \ \text{ ou } \ y = \lambda x.
\end{aligned}$$

□

3 Familles orthogonales

Théorème (Pythagore)**:** Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff x \perp y.$$



Preuve:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff 2\langle x \mid y\rangle = 0 \iff x \perp y.$$

□

Définition: Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On dit que cette famille est orthogonale si

$$\forall i \neq j\ e_i \perp e_j.$$

Si, en plus, on a

$$\forall i \in I,\ \|e_i\| = 1,$$

alors on dit que la famille est orthonormale ou orthonormée.

Proposition (Pythagore)**:** Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille orthogonale. Alors

$$\left\| \sum_{i=1}^n e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2.$$

Théorème: Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Preuve:
Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthogonale telle que

$$\forall i \in I,\, e_i \neq 0_E.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. On suppose

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{i_k} = 0_E.$$

Soit $j \in [\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{i_k} \mid e_{i_j} \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left\langle e_{i_k} \mid e_{i_j} \right\rangle \\ &= \lambda_j \underbrace{\|e_{i_j}\|^2}_{\neq 0} \end{aligned}$$

donc $\lambda_j = 0$. □

Algorithme (Orthonormalisation de Gran–Schmidt)**:** On suppose E de dimension finie. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

— *Étape1* : On pose $v_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$ de sorte que $\|v_1\| = 1$.

— *Étape2* : On pose

$$u_2 = e_2 - \langle e_2 \mid v_1 \rangle\, v_1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \langle u_2 \mid v_1 \rangle &= \langle e_2 - \langle e_2 \mid v_1 \rangle\, v_1 \mid v_1 \rangle \\ &= \langle e_2 \mid v_1 \rangle - \langle e_2 \mid v_1 \rangle \langle v_1 \mid v_1 \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

On pose $v_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|}$ donc $v_2 \perp v_1$ et $\|v_2\| = 1$.

— *Étape3* : On pose

$$u_2 = e_3 - \langle e_3 \mid v_1 \rangle\, v_1 - \langle e_3 \mid v_2 \rangle\, v_2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \langle u_3 \mid v_1 \rangle &= \langle e_3 \mid v_1 \rangle - \langle e_3 \mid v_1 \rangle \underbrace{\langle v_1 \mid v_1 \rangle}_{=1} - \langle e_3 \mid v_2 \rangle \underbrace{\langle v_2 \mid v_1 \rangle}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\langle u_3 \mid v_2\rangle &= \langle e_3 \mid v_2\rangle - \langle e_3 \mid v_1\rangle \underbrace{\langle v_1 \mid v_2\rangle}_{=0} - \langle e_3 \mid v_2\rangle \underbrace{\langle v_2 \mid v_2\rangle}_{=1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

On pose $v_3 = \dfrac{u_3}{\|u_3\|}$ de sorte que $v_3 \perp v_1$, $v_3 \perp v_2$ et $\|v_3\| = 1$.

— *Étape $i+1$* : On pose

$$u_{i+1} = e_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} \langle e_{i+1} \mid v_k\rangle\, v_k.$$

Ainsi, pour tout $j \in [\![1, i]\!]$, on a

$$\begin{aligned}\langle u_{i+1} \mid v_j\rangle &= \langle e_{i+1} \mid v_j\rangle - \sum_{k=1}^{i} \langle e_{i+1} \mid v_k\rangle \langle v_k \mid v_j\rangle \\ &= \langle e_{i+1} \mid v_j\rangle - \langle e_{i+1} \mid v_j\rangle \|v_j\|^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

On pose $v_{i+1} = \dfrac{u_{i+1}}{\|u_{i+1}\|}$.

Exemple:

Avec $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\langle P \mid Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,Q(t)\ \mathrm{d}t$ et $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$.

1. $\|1\|^2 = \langle 1 \mid 1\rangle = \displaystyle\int_0^1 1\ \mathrm{d}t = 1$ et donc $v_1 = 1$.
2. $u_2 = X - \langle X \mid v_1\rangle\, v_1$. Or, $\langle X \mid v_1\rangle = \displaystyle\int_0^1 t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. D'où $u_2 = X - \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\|u_2\|^2 &= \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right)\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

   On en déduit que $v_2 = \sqrt{12}\left(X - \dfrac{1}{2}\right)$.
3. $u_3 = X^2 - \left\langle X^2 \mid v_1\right\rangle v_1 - \left\langle X^2 \mid v_2\right\rangle v_2$. On a

$$\left\langle X^2 \mid v_1\right\rangle = \int_0^1 t^2\ \mathrm{d}t = \frac{1}{3}$$

   et

$$\begin{aligned}\left\langle X^2 \mid v_2\right\rangle &= \sqrt{12}\int_0^1 t^2\left(t - \frac{1}{2}\right)\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{\sqrt{12}}{12}.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} u_3 &= X^2 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{12}}{12}\sqrt{12}\left(X - \frac{1}{2}\right) \\ &= X^2 - \frac{1}{3} - X + \frac{1}{2} \\ &= X^2 - X + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|u_3\|^2 &= \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right) \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(t^4 + t^2 + \frac{1}{36} - 2t^3 + \frac{t^2}{3} - \frac{t}{3}\right) \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{36} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{36 + 60 + 5 - 90 + 20 - 30}{180} \\ &= \frac{1}{180} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$v_3 = 6\sqrt{5}\left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right).$$

4. Exercice : calculer v_4.

Proposition: Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{C}$ la base obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt. Alors,

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_i).$$

□

Exemple (orthogonalisation): — $u_1 = 1$.

—

$$\left.\begin{aligned} &u_2 \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2) \\ &u_2 \perp u_1 \end{aligned}\right\} \iff \begin{cases} u_2 = ae_1 + be_2 & (a,b) \in \mathbb{R}^2 \\ \langle u_1 \mid u_2 \rangle = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} u_2 = a + bX \\ \displaystyle\int_0^1 (a + bt) \,\mathrm{d}t = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (a+bt)\,\mathrm{d}t = 0 &\iff a + \frac{b}{2} = 0 \\ &\iff a = -\frac{b}{2} \\ &\iff u_2 = -\frac{b}{2} + bX. \end{aligned}$$

Par exemple, $u_2 = -1 + 2X$.

— $\begin{cases} u_3 \in \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3) \\ u_3 \perp u_1 \\ u_3 \perp u_2 \end{cases}$

On pose $u_3 = a + bX + cX^2$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 \left(a+bt+ct^2\right)\, \mathrm{d}t = 0 \\ &\int_0^1 \left(a+bt+ct^2\right)(2t-1)\, \mathrm{d}t = 0 \end{aligned}\right\} \iff \begin{cases} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 0 \\ \int_0^1 \left(2ct^3 + (-c+2b)t^2 + (2a-b)t - a\right)\, \mathrm{d}t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 0 \\ \frac{c}{2} + \frac{2b-c}{3} + \frac{2\cancel{a}-b}{2} - \cancel{a} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = -\frac{b}{2} - \frac{c}{3} = \frac{c}{2} - \frac{c}{3} = \frac{c}{6} \\ b = -c. \end{cases}$$

On en déduit que

$$u_3 = 1 - 6X + 6X^2.$$

Corollaire (théorème de la base orthonormée incomplète)**:** Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base orthonormée d'un espace euclidien. On peut trouver $e_{k+1}, \dots, e_n$ tels que $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ soit une base orthonormée de E.

Preuve:
On sait que $(e_1, \dots, e_k)$ est libre. On complète $(e_1, \dots, e_k)$ en une base $\mathscr{B}$ de E. On orthonormalise $\mathscr{B}$: on obtient une base orthonormée $\mathscr{C}$ de E. En détaillant l'algorithme de Gram–Schmidt, on s'aper c oit que les k premiers vecteurs de $\mathscr{C}$ sont ceux de $\mathscr{B}$. $\square$

Théorème: Soit E un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $(x,y) \in E^2$. On pose $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \qquad y = \sum_{i=1}^n y_i e_i.$$

Alors

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors,

$$\langle x \mid y \rangle = X^\top Y.$$

Preuve:

$$\begin{aligned}\langle x \mid y\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i \mid y \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \langle e_i \mid y\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left\langle e_i \mid \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j \underbrace{\langle e_i \mid e_j\rangle}_{\delta_i^j} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i.\end{aligned}$$

□

Proposition: Soit E un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Alors,

$$\forall x \in E,\ x = \sum_{i=1}^n \langle x \mid e_i\rangle\, e_i.$$

Preuve:
Soit $x \in E$. On pose

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

avec $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On a

$$\begin{aligned}\langle x \mid e_j\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i \mid e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \langle e_i \mid e_j\rangle \\ &= x_j.\end{aligned}$$

□

4 Projection orthogonale

Dans ce paragraphe, $\big(E, \langle\cdot \mid \cdot\rangle\big)$ est un espace préhilbertien (de dimension quelconque).

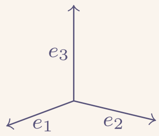
Définition: Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. L'orthogonal de A est

$$A^\perp = \{u \in E \mid \forall a \in A,\ a \perp u\}.$$

Exemple: 1. $\varnothing^\perp = E$; $\{0_E\}^\perp = E$; $E^\perp = \{0_E\}$.

Attention ⚠ , $\left(\varnothing^\perp\right)^\perp = \{0_E\} \neq \varnothing$.

2. Avec $E = \mathbb{R}^3$, et $A = \{e_3\}$.



$$A^\perp = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$$

et

$$A^{\perp\perp} = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)^\perp = \mathrm{Vect}(e_3) \neq A.$$

Proposition:

$$\forall A \in \mathscr{P}(E),\ A^\perp \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.$$

Preuve:
Soit $A \in \mathscr{P}(E)$.
— $\forall a \in A, \langle a \mid 0_E \rangle = 0$ donc $0_E \in A^\perp$ et donc $A^\perp \neq \varnothing$.
— Soient $(u, v) \in A^\perp$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Soit $a \in A$.

$$\begin{aligned}\langle \alpha u + \beta v \mid a \rangle &= \alpha \langle u \mid a \rangle + \beta \langle v \mid a \rangle \\ &= \alpha \times 0 + \beta \times 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Théorème: Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors

$$F \oplus F^\perp = E.$$

Preuve:
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F.

Analyse Soit $x \in E$. On suppose $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in F^\perp$. On pose $u = \sum_{i=1}^{p} u_i e_i$. De plus,

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ \langle v \mid e_i \rangle = 0.$$

Soit $i \in [\![1, p]\!]$.

$$\begin{aligned}\langle x \mid e_i \rangle &= \langle u + v \mid e_i \rangle \\ &= \langle u \mid e_i \rangle + \langle v \mid e_i \rangle \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^{p} u_j e_j \mid e_i \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{p} u_j \langle e_j \mid e_i \rangle \\ &= u_i\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i \rangle e_i \\ v = x - \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i \rangle e_i. \end{cases}$$

<u>Synthèse</u> Soit $x \in E$. On pose

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i \rangle e_i \\ v = x - \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i \rangle e_i \end{cases}$$

On a clairement $u + v = x$ et $u \in F$.

Soit $a \in F$. On pose $a = \sum_{i=1}^{p} a_i e_i$.

$$\begin{aligned} \langle v \mid a \rangle &= \langle x \mid a \rangle - \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i \rangle \underbrace{\langle e_i \mid a \rangle}_{=a_i} \\ &= \sum_{i=1}^{p} a_i \langle x \mid e_i \rangle - \sum_{i=1}^{p} a_i \langle x \mid e_i \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $v \in F^{\perp}$.

□

INDEX