Chapitre 20

Fractions rationnelle

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 12 mars 2022

Table des matières

Première partie

Construction de $\mathbb{K}(X)$

Proposition Définition On définit la relation $\sim$ sur $\mathbb{K}[X] \times \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)$ par

$$(P,Q) \sim (A,B) \iff PB = QA$$

Cette relation est une relation d'équivalence. On note $\big(\mathbb{K}[X] \times \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)\big)/\sim$.
Les éléments de $\mathbb{K}(X)$ sont appelés <u>fractions rationnelles</u>.
On note $\dfrac{P}{Q}$ la classe d'équivalence du couple (P,Q).

Preuve

On note $E = \mathbb{K}[X]\big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)$.
- Soit $(P,Q) \in E$. $PQ = QP$ car $\times$ est commutative dans $\mathbb{K}[X]$. Donc $(P,Q) \sim (P,Q)$
- Soient $(P,Q) \in E, (A,B) \in E$. On suppose que $(P,Q) \sim (A,B)$. Donc $PB = QA$
  Donc, $(A,B) \sim (P,Q)$
- Soit $\big((P,Q),(A,B),(C,D)\big) \in E^3$. On suppose

  $$\begin{cases} (P,Q) \sim (A,B) \\ (A,B) \sim (C,D) \end{cases}$$

  D'où,

  $$\begin{cases} PB = QA \\ AD = BC \end{cases}$$

  Donc

  $$PBD = QAD = QBC$$

  donc $B(PD - QC) = 0$
  Comme $B \neq 0$ et comme $\mathbb{K}[X]$ est intègre,

  $$PD - QC = 0$$

  et donc $(P,Q) \sim (C,D)$

$\square$

Proposition

Soient $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)$ et $R \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Alors

$$\frac{PR}{QR} = \frac{P}{Q}$$

Preuve

$$\begin{aligned} \frac{PR}{QR} = \frac{P}{Q} &\iff (PQ, QR) \sim (P,Q) \\ &\iff PRQ = QRP \end{aligned}$$

$\square$

Definition

Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \setminus \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)$. On dit que la fraction $\dfrac{P}{Q}$ est sous forme irréductible si $P \wedge Q = 1$.

Proposition Définition

Soient $(P,Q) \sim (A,B)$. Alors

$$\deg(P) - \deg(Q) = \deg(A) - \deg(B)$$

Le degré de $\dfrac{P}{Q}$ est $\deg(P) - \deg(Q)$. On note ce "nombre" $\deg\left(\dfrac{P}{Q}\right)$.

Preuve

On sait que $PB = QA$ donc

$$\deg(P) + \deg(Q) = \deg(Q) + \deg(A)$$

et donc

$$\deg(P) - \deg(Q) = \deg(A) - \deg(B)$$

$\square$

Proposition Définition

Soient $(P,Q) \sim (A,B)$ et $(R,S) \sim (C,D)$. Alors, $(PR,QS) \sim (AC,BD)$.
Le produit de $\dfrac{P}{Q}$ avec $\dfrac{R}{S}$ est $\dfrac{PR}{QS}$

Preuve

On sait que $\begin{cases} PB = QA \\ RD = SC \end{cases}$. D'où,

$$PBRD = QASC$$

et donc

$$(PR)(BD) = (QS)(AC)$$

donc

$$(PR,QS) \sim (AC,BD)$$

$\square$

Proposition Définition

Avec les notations précédentes,

$$(PS + RQ, QS) \sim (AD + BC, BD)$$

On définit la somme de $\dfrac{P}{Q}$ et $\dfrac{R}{S}$ par

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{PS + RQ}{QS}$$

Preuve

On sait que $\begin{cases} PB = QA \\ RD = SC \end{cases}$. Donc,

$$\begin{aligned}(PS + RQ)BD &= PSBD + RQBD \\ &= QASD + SCQB \\ &= QS(AD + BC)\end{aligned}$$

$\square$

Théorème

$\big(\mathbb{K}(X), +, \times\big)$ est un corps.

Preuve *(partielle)*

1. " $+$ " est associative : soient $\left(\dfrac{P}{Q}, \dfrac{R}{S}, \dfrac{A}{B}\right) \in \mathbb{K}(X)^3$.

$$\begin{array}{c} \dfrac{P}{Q} + \left(\dfrac{R}{S} + \dfrac{A}{B}\right) = \dfrac{P}{Q} + \dfrac{RB + AS}{SB} = \dfrac{PSB + QRB + QAS}{QSB} \\ \hfill \parallel \\ \left(\dfrac{P}{Q} + \dfrac{R}{S}\right) + \dfrac{A}{B} = \dfrac{PS + RQ}{QS} + \dfrac{A}{B} = \dfrac{PSB + RQB + AQS}{QSB} \end{array}$$

2. " $+$ " est commutative
3. $\dfrac{0}{1}$ est neutre pour " $+$ "

$$\frac{P}{Q} + \frac{0}{1} = \frac{P \times 1 + 0 \times Q}{Q \times 1} = \frac{P}{Q}$$

4. Soit $\dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$.

$$\frac{P}{Q} + \frac{-P}{Q} = \frac{PQ - QP}{Q^2} = \frac{0}{Q^2} = \frac{0}{1}$$

5. " $\times$ " est associative
6. " $\times$ " est commutative

7. $\dfrac{1}{1}$ est le neutre pour " $\times$ "
8. Soient $\left(\dfrac{P}{Q}, \dfrac{R}{S}, \dfrac{A}{B}\right) \in \mathbb{K}(X)^3$

$$\frac{P}{Q}\left(\frac{R}{S}+\frac{A}{B}\right) = \frac{P}{Q} \times \frac{RB+AS}{SB} = \frac{PRB+PAS}{QSB}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{P}{Q}\times\frac{R}{S}+\frac{P}{Q}\times\frac{A}{B} &= \frac{PR}{QS}+\frac{PA}{QB}\\ &= \frac{PRQB+QSPA}{Q^2SB}\\ &= \frac{PRB+SPA}{QSB}\end{aligned}$$

9. Soit $\dfrac{P}{Q} \neq \dfrac{0}{1}$ donc $P \times 1 \neq Q \times 0$ donc $P \neq 0$.

$$\frac{P}{Q}\times\frac{Q}{P} = \frac{PQ}{PQ} = \frac{1}{1}$$

10. $\dfrac{1}{1} \neq \dfrac{0}{1}$ car $1 \times 1 \neq 0 \times 1$

□

Proposition

$$\forall P, A \in \mathbb{K}[X], \forall Q \in \mathbb{K}[X]\setminus\{0\}, \qquad \frac{P}{Q}+\frac{A}{Q} = \frac{P+A}{Q}$$

Proposition

$$i : \begin{array}{ccc}\mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X)\\ P & \longmapsto & \dfrac{P}{1}\end{array} \quad \text{est un morphisme d'anneaux injectif.}$$

Preuve

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

$$\begin{aligned}i(P+Q) &= \frac{P+Q}{1} = \frac{P}{1}+\frac{Q}{1} = i(P)+i(Q)\\ i(PQ) &= \frac{PQ}{1} = \frac{PQ}{1\times 1} = \frac{P}{1}\times\frac{Q}{1} = i(P)\times i(Q)\\ i(1) &= \frac{1}{1}\end{aligned}$$

Donc i est un morphisme d'anneaux.

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(i) &\iff i(P) = \frac{0}{1} \\ &\iff \frac{P}{1} = \frac{0}{1} \\ &\iff P \times 1 = 0 \times 1 \\ &\iff P = 0 \end{aligned}$$

donc i est injective. □

Definition

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On pose

$$\lambda F = \frac{\lambda P}{Q} = \frac{\lambda}{1} \times \frac{P}{Q}$$

Proposition

$\big(\mathbb{K}(X), +, \cdot\big)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ P & \longmapsto & \dfrac{P}{1} \end{array}$ est linéaire.

□

Remarque

On peut identifier $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $\dfrac{P}{1} \in \mathbb{K}(X)$ i.e. écrire $P = \dfrac{P}{1}$ et alors
$\begin{cases} \mathbb{K}[X] \text{ est un sous-anneau de } \mathbb{K}(X) \\ \mathbb{K}[X] \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{K}(X) \end{cases}$
De plus, les deux définitions de degré coïncident.

Proposition

Soit $F, G \in \mathbb{K}(X)$.

1. $\deg(F+G) \leqslant \max(\deg F, \deg G)$
   Si $\deg(F) \neq \deg(G)$ alors $\deg(F+G) = \max(\deg F, \deg G)$;
2. $\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G)$;
3. Si $F \neq 0$, $\deg\left(\dfrac{1}{F}\right) = -\deg(F)$.

Preuve

On pose $F = \dfrac{A}{B}$ et $G = \dfrac{P}{Q}$.

1. $F + G = \dfrac{AQ+PB}{BQ}$. On suppose que $\deg(F) \geqslant \deg(G)$ i.e. $\deg A - \deg B \geqslant \deg P - \deg Q$.

$$\deg(F+G) = \deg(QA+PB) - \deg(BQ)$$

On a

$$\deg(AQ) = \deg(A) + \deg(Q) \geqslant \deg(P) + \deg(B) = \deg(PB).$$

D'où

$$\deg(F+G) \leqslant \deg(AQ) - \deg(BQ) = \deg\left(\frac{AQ}{BQ}\right) = \deg(F).$$

Si $\deg(F) > \deg(G)$, alors $\deg(AQ) > \deg(PB)$ et donc

$$\deg(F+G) = \deg(AQ) - \deg(BQ) = \deg(F).$$

2.

$$\begin{aligned}\deg(FG) &= \deg\left(\frac{AP}{BQ}\right)\\ &= \deg(AP) - \deg(BQ)\\ &= \deg(A) + \deg(P) - \deg(B) - \deg(Q)\\ &= \deg F + \deg G.\end{aligned}$$

3. $\deg\left(\frac{1}{F}\right) = \deg(1) - \deg(F) = -\deg(F)$

$\square$

Deuxième partie

Décomposition en éléments simples

Définition
Lemme

$$\forall F \in \mathbb{K}(X), \exists!(E, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X), \begin{cases} F = E + G \\ \deg(G) < 0 \end{cases}$$

On dit que E est la partie entière de F.

Preuve

On pose $F = \dfrac{P}{Q}$ avec $P \in \mathbb{K}[X], Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

ANALYSE Soit $E \in \mathbb{K}[X]$ et $G \in \mathbb{K}(X)$ tels que

$$F = E + G \deg(G) < 0.$$

On pose $G = \dfrac{A}{Q}$ avec $A \in \mathbb{K}[X]$.

$$\begin{aligned} F = E + G &\iff \frac{P}{Q} = E + \frac{A}{Q} \\ &\iff P = EQ + A. \end{aligned}$$

$\deg G < 0, \deg A < \deg Q$.
Don E est le quotient de la division euclidienne de P par Q et A sont reste.

SYNTHÈSE Soient E le quotient et A le reste de la division euclidienne de P par Q. On a alors

$$\begin{cases} P = EQ + A \\ \deg(A) < \deg(Q) \end{cases}$$

et donc

$$F = E + \frac{A}{Q} \deg\left(\frac{A}{Q}\right) < 0.$$

□

Exemple

$F = \dfrac{X^3 + X - 1}{X^2 + 2}$, $\deg F = 1$.

$$\begin{array}{r|l} X^3 + X - 1 & X^2 + 2 \\ \cline{2-2} -\quad X^3 + 2X & \qquad X \\ \cline{1-1} -X - 1 & \end{array}$$

Donc,

$$F = \frac{X(X^2 + 2) - (X + 1)}{X^2 + 2} = X - \frac{X + 1}{X^2 + 2}.$$

Lemme

Soit $F = \dfrac{P}{AB}$ avec
$$\begin{cases} (P,A,B) \in \mathbb{K}[X]^3; \\ A \neq 0; B \neq 0; \\ A \wedge B = 1; \deg F < 0. \end{cases}$$
Alors,
$$\exists!(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2, \begin{cases} F = \dfrac{U}{A} + \dfrac{V}{B} \\ \deg\left(\dfrac{U}{A}\right) < 0 \text{ et } \deg\left(\dfrac{V}{R}\right). \end{cases}$$

Preuve

<u>Analyse</u> On suppose que
$$\begin{cases} F = \dfrac{U}{A} + \dfrac{V}{B} \\ U \in \mathbb{K}[X], \deg U < \deg A \\ V \in \mathbb{K}[X], \deg V < \deg B. \end{cases}$$
D'où
$$\frac{P}{AB} = \frac{UB + VA}{AB}$$
et donc $P = UB + VA$. D'après le théorème de Bézout, il existe $(R,S) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que
$$RB + SA = P.$$
On a alors
$$0 = B(R-U) + A(S-V)$$
donc
$$A(S-V) = B(U-R)$$
donc
$$A \mid B(U-R) \qquad \text{dans } \mathbb{K}[X].$$
D'après le théorème de Gauss,
$$A \mid U - R$$
Donc $U - R = AT$ avec $T \in \mathbb{K}[X]$ donc
$$A(S-V) = BAT$$
donc
$$S - V = BT$$
donc
$$\begin{cases} R = -AT + U \\ S = BT + V \end{cases}.$$

On a

$$\begin{cases} S = BT + V \\ \deg V < \deg B \end{cases}$$

donc V est le reste de la division euclidienne de S par B et U est le reste de la division euclidienne de R par A.

<u>Synthèse</u> Soit $(R, S) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$P = RB + SA.$$

Soit V le reste de la division euclidienne de S par B.

$$\begin{cases} S = BT + V, T \in \mathbb{K}[X] \\ \deg V < \deg B \end{cases}$$

D'où,

$$\frac{P}{AB} = \frac{R}{A} + T + \frac{V}{B} = \frac{R + AT}{A} + \frac{V}{B}$$

et

$$\deg\left(\frac{V}{B}\right) = \deg(V) - \deg(B) < 0.$$

Si $\deg\left(\frac{R + AT}{A}\right) \geqslant 0$, alors

$$\deg\left(\frac{R + AT}{A}\right) > \deg\left(\frac{V}{B}\right)$$

et alors

$$\deg\left(\frac{P}{AB}\right) = \deg\left(\frac{R + AT}{A}\right) \geqslant 0.$$

Or,

$$\deg\left(\frac{P}{AB}\right) < 0.$$

Donc

$$\deg\left(\frac{R + AT}{A}\right) < 0.$$

On pose $U = R + AT$. On a bien

$$\frac{P}{AB} = \frac{U}{A} + \frac{V}{B} \text{ avec } \deg\left(\frac{U}{V}\right) < 0 \text{ et } \deg\left(\frac{V}{R}\right) < 0.$$

□

Lemme

Soit $H \in \mathbb{K}[X]$ irréductible, $n \in \mathbb{N}_*$, $P \in \mathbb{K}[X]$, $F = \dfrac{P}{H^n}$ et $\deg F < 0$. Alors,

$$\begin{cases} \exists!(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2, F = \dfrac{U}{H^n} + \dfrac{V}{H^{n-1}}; \\ \deg U < \deg H; \\ \deg\left(\dfrac{V}{H^{n+1}}\right) < 0. \end{cases}$$

Preuve

<u>Analyse</u> $F = \dfrac{U}{H^n} + \dfrac{V}{H^{n-1}}$ avec

$$\begin{cases} \deg U < \deg H, \\ U \in \mathbb{K}[X], V \in \mathbb{K}[X], \\ \deg\left(\dfrac{V}{H^{n-1}}\right) < 0. \end{cases}$$

D'où

$$P = U + VH, \deg U < \deg H.$$

Donc V est le quotient et U le reste de la division euclidienne de P par H.

<u>Synthèse</u> Soient V et U le quotient et le reste de la division euclidienne de P par H :

$$\begin{cases} P = U + VH \\ \deg U < \deg H. \end{cases}$$

D'où

$$F = \frac{U}{H^n} + \frac{V}{H^{n-1}}$$

$$\deg U < \deg H$$

Si $\deg\left(\dfrac{V}{H^{n-1}}\right) \geqslant 0$, alors $\deg F = \deg\left(\dfrac{V}{H^{n-1}}\right) \geqslant 0$: une contradiction. Donc $\deg\left(\dfrac{V}{H^{n-1}}\right) < 0$.

□

Théorème **Théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$**

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $F = \dfrac{P}{Q}$ la forme irréductible de F. On note $(z_1, \dots, z_p)$ les racines complexes de Q et $(\mu_1, \dots, \mu_p)$ leur multiplicité.
Alors,

$$\exists!(E, a_{1,1}, \dots, a_{1,\mu_1}, a_{2,1}, \dots, a_{2,\mu_2}, \dots, a_{p,1}, \dots, a_{p,\mu_p}) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}^{\deg Q},$$

$$F = E + \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{a_{i,j}}{(X - z_i)^j} \right).$$

Exemple

$$F = \frac{X^7 - 1}{X^5 + 2X^3 + X} \in \mathbb{C}(X)$$

$$
\begin{array}{rr|l}
 & X^7 - 1 & X^5 + 2X^3 + X \\
 - & X^7 + 2X^5 + X^3 & X^2 - 2 \\
\hline
 & -2X^5 - X^3 - 1 & \\
 - & -2X^5 - 4X^3 - 2X & \\
\hline
 & 3X^3 + 2X - 1 &
\end{array}
$$

$$F = (X^2 - 2) + \frac{3X^3 + 2X - 1}{X^5 + 2X^3 + X}$$

$$
\begin{aligned}
X^5 + 2X^3 + X &= X(X^4 + 2X^2 + 1) \\
&= X(X^2 + 1)^2 \\
&= X(X - i)^2(X + i)^2
\end{aligned}
$$

D'après le $2^{\text{ème}}$ lemme,

$$\frac{3X^3 + 2X - 1}{X^5 + 2X^3 + X} = \frac{a}{X} + \frac{bX + c}{(X - i)^2}$$

D'après le $3^{\text{ème}}$ lemme,

$$
\begin{aligned}
\frac{bX + c}{(X - i)^2} &= \frac{f}{(X - i)^2} + \frac{g}{X - i} \\
\frac{dX + e}{(X + i)^2} &= \frac{h}{(X + i)^2} + \frac{h}{X + i}
\end{aligned}
$$

$$F = (X^2 - 2) + \frac{a}{X} + \frac{f}{(X - i)^2} + \frac{g}{X - i} + \frac{h}{(X - i)^2} + \frac{k}{X + i}.$$

On multiplie par X :

$$\frac{X^7 - 1}{X^4 + 2X^2 + 1} = a + X\left(X^2 - 2 + \frac{f}{(X - i)^2} + \frac{g}{X - i} + \frac{h}{(X - i)^2} + \frac{k}{X + 1}\right).$$

En remplaçant X par 0, on obtient

$$a = \frac{-1}{1} = -1.$$

On multiplie par $(X - i)^2$ et on remplace X par i :

$$\frac{3i^2 + 2i - 1}{i(2i)^2} = f.$$

Donc,

$$f = \frac{-i - 1}{-4i} = \frac{1}{4} - \frac{i}{4}$$

De même,

$$h = \frac{3(-i)^3 + 2(-i) - 1}{-i(-2i)^2} = \overline{f} = \frac{1}{4} + \frac{i}{4}$$

$$\frac{3X^2+2X-1}{X^5+2X^3}+\frac{1}{X}-\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{4}\right)\frac{1}{(X-i)^2}-\left(\frac{1}{4}+\frac{i}{4}\right)\frac{1}{(X+i)^2}=\frac{g}{X-i}+\frac{h}{X+i}$$

$$\begin{aligned}
\frac{g}{X-i}+\frac{h}{X+i} &= \frac{3X^3+2X-1+X^4+2X^2+1+X(X+i)^2\left(-\frac{1}{4}+\frac{i}{4}\right)-X(X-i)^2\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{4}\right)}{X^5+2X^3+X} \\
&= \frac{12X^3+8X-4+4X^4+8X^2+4+X^3(-1+i)+(1-i)X-X^3(1+i)-2X^2(1-i)+X(1+i)}{4(X^5+2X^3+X)} \\
&= \frac{4X^4+10X^3+8X^2+10X}{4\left(X^5+2X^3+X\right)} \\
&= \frac{2X^3+5X^2+2X+5}{2(X^4+2X^2+1)} \\
&= \frac{(X-i)(X+i)(2X+5)}{2(X-i)^2(X+i)^2} \\
&= \frac{2X+5}{2(X-i)(X+i)}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{cases} g = \dfrac{2i+5}{2 \times 2i} = \dfrac{(2i+5)i}{-4} = \dfrac{2-5i}{4} \\ \\ h = \dfrac{2(-i)+5}{2(-2i)} = \dfrac{2+5i}{4} \end{cases}$$