Chapitre 13

Sy calcul

Hugo Salou MP2I
Dernière mise à jour le 8 mai 2022

TABLE DES MATIÈRES

Remarque (Résumé): — Méthode du pivot : opérations sur les lignes :

1. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ($\lambda \in \mathbb{K}$)
2. $L_i \leftarrow \mu L_i$ ($\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$)
3. $L_i \leftrightarrow L_j$

En appliquant la méthode du pivot on obtient

$$(S) \iff \begin{cases} x_{i_1} & = \ell_1(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-r}}) \\ x_{i_2} & = \ell_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-r}}) \\ \vdots & \vdots \\ x_{i_r} & = \ell_r(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-r}}) \\ 0 & = * \end{cases}$$

Les inconnues $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$ sont les <u>inconnues principales</u>, les autres sont appelées <u>paramètre</u>.
On peut supprimer les équations $0 = 0$. S'il y a une équation $0 = \lambda$ avec $\lambda \neq 0$, il n'y a pas de solution : le système est <u>incompatible</u>.
Les inconnues principales dépendent des choix de pivots !

— Représentation matricielle

$$(S) \iff AX = B$$

où A est la <u>matrice du système</u>, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et B est le <u>second membre</u>
(S) a n équations et p inconnues donc A a n lignes et p colonnes.
La matrice $(A \mid B)$ est la <u>matrice augmentée du système</u>.

— Faire un opération L sur les lignes d'une matrice M revient à multiplier M à gauche par une matrice R où R est obtenue en appliquant L sur I_n.
— La méthode du pivot matriciel par lignes :

Définition (Rang d'une matrice)**:** Soit M une matrice et R la matrice échelonnée réduite par lignes associée à M. Le nombre de lignes non nulles de R (le nombre de pivots) est appelée <u>rang</u> de M.
Soit S un système de matrice augmentée $(A \mid B)$. Le <u>rang</u> de S est le rang de la matrice A.
Le rang est noté rg.

Proposition (Interprétation)**:** — Soit S un système de n équations, p inconnues de rang r.
r est le nombre d'inconnues principales, il y a $p - r$ paramètres.
— Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r.
r est le nombre de lignes indépendantes : il y a $n-r$ lignes combinaisons linéaires des r lignes indépendantes.

Corollaire: Soit S un système de <u>n équations</u>, p inconnues de <u>rang n</u>. Alors S a au moins une solution.
Si $n = p$ alors S a exactement une solution.
Si $p > n$, il y a une infinité de solutions.

□

Définition: Soit S un système à n équations, n inconnues et de rang n. On dit que S est un <u>système de Cramer</u> (il a une unique solution)

Proposition: Soit S un système de n équations, p inconnues de rang r.
— Si $r < n$ alors le système peut-être incompatible : il y a $n - r$ équations de la forme $0 = *$ après la méthode du pivot.
— Si $r < p$ alors il y a $p - r$ paramètres : si le système n'est pas incompatible, il y aura une infinité de solutions.

□

Proposition: Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et C une opération élémentaire sur les colonnes de A. On pose A' la matrice obtenue en appliquant C sur les colonnes de A.

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A')$$

□

Proposition: Le rang d'une matrice est aussi le nombre de colonnes indépendantes. □

Définition: Une <u>matrice triangulaire supérieure</u> est une matrice carrée avec des coefficients nuls sous sa diagonale :

$$T = \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

diagonale

et <u>triangulaire inférieure</u> si les coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls :

$$T = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Un <u>système triangulaire</u> est de la forme

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1p}x_p & = & b_1 & +\dots \\ & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2p}x_p & = & b_2 & +\dots \\ & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & a_{pp}x_p & = & b_p & +\dots \\ & & & 0 & = & \dots & \end{array} \right.$$

Remarque:

$$(S) \iff \begin{cases} AX = B \\ X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}), B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \end{cases}$$

On pose

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

On cherche $\varphi^{-1}(\{B\})$

On sait que
— $(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe
— $(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), +)$ aussi

Soient $X, Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$

$$\varphi(X+Y) = A(X+Y) = AX + AY = \varphi(X) + \varphi(Y)$$

Donc φ est un morphisme de groupes.
On peut résoudre (S) de la façon suivante :
— On cherche $X_0 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $\varphi(X_0) = B$
— On résout $\varphi(X) = 0$ $(X \in \mathrm{Ker}(\varphi))$

C'est le système homogène associé :

$$\varphi(X) = B \iff \exists H \in \mathrm{Ker}(\varphi), X = X_0 + H$$

Proposition:

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$
$$B = \left(b_{k,\ell}\right)_{\substack{1\leqslant k\leqslant p \\ 1\leqslant \ell\leqslant q}} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

$$AB = \left(c_{i,\ell}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant \ell\leqslant q}} \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$
$$c_{i,\ell} = \sum_{j=1}^{n} = a_{i,j} b_{j,\ell}$$