Chapitre 11

# Suite

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 28 mars 2022

# Table des matières

# Première partie

# Modes de définition

**Définition:** Une suite peut être définie

- <u>Explicitement</u> On dispose pour tout $n \in \mathbb{N}$ de l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.
  $\boxed{\text{ex}}$ $\forall n \in \mathbb{N}_*, u_n = \dfrac{\ln(n)}{n} e^{-n}$
- <u>Par récurrence</u> On connait $u_{n+1}$ en fonction de $u_0, u_1, \dots, u_n$
  $\boxed{\text{ex}}$ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$
- <u>Implicitement</u> $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est le seul nombre verifiant une certaine propriété
  $\boxed{\text{ex}}$ $u_n$ est le seul réel vérifiant $x^5 + nx - 1 = 0$

# Deuxième partie

# Limites

**Définition:** Soit $u$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que
- $u$ converge vers $\ell$
- $u_n$ tends vers $\ell$ quand $n$ tends vers $+\infty$
- $\ell$ est une limite de $u$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \qquad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$
$$(\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon)$$

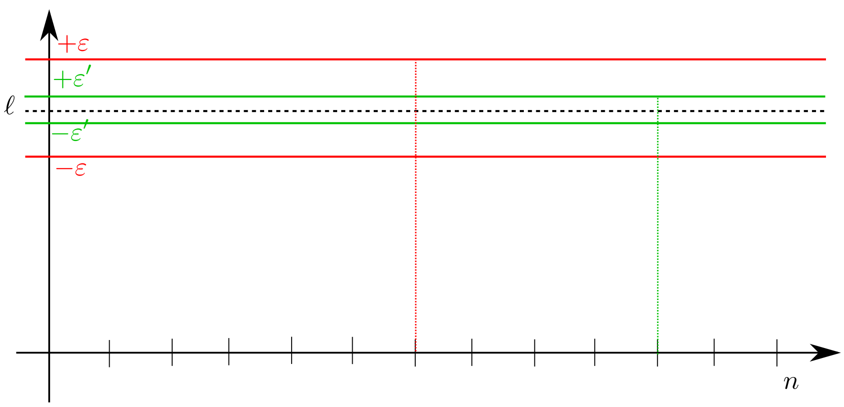



FIGURE 1 – Définition de la limite

EXEMPLE:
Montrer que $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, -\varepsilon \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$$

Analyse Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant N, -\varepsilon \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$.
En particulier, $\frac{1}{N} \leqslant \varepsilon$ donc $N \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$.

Synthèse On pose $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$ et $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Soit $n \geqslant N$.

$$\frac{1}{n} > 0 > -\varepsilon \text{ donc } \frac{1}{n} \geqslant -\varepsilon$$

$$n \geqslant N > \frac{1}{\varepsilon} \text{ donc } n \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$$

**Définition:** Soit $u$ une suite réelle.

On dit que $u$ tends vers $+\infty$ si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant M$$

On dit que $u$ tends vers $-\infty$ si

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \leqslant m$$

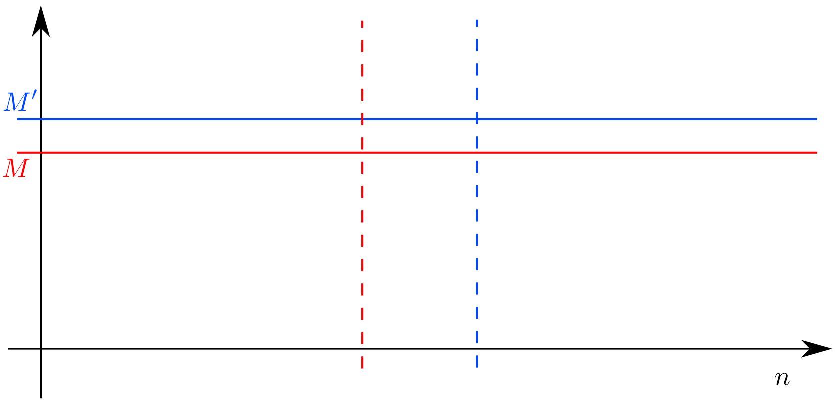



FIGURE 2 – Limites infinies

EXEMPLE:
Montrons que $n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Soit $M \in \mathbb{R}$, on cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, n^2 \geqslant M$.

Analyse Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, n^2 \geqslant M$.
En particulier, $N^2 \geqslant M$ et dont $N \geqslant \sqrt{M}$ si $M \geqslant 0$

Synthèse On pose $N = \begin{cases} 0 & \text{si } M \leqslant 0 \\ \left\lfloor \sqrt{M} \right\rfloor + 1 & \text{sinon} \end{cases}$
Ainsi $N \in \mathbb{N}$ et $N^2 \geqslant M$. Soit $n \geqslant N$. On a $n^2 \geqslant N^2 \geqslant M$.

**Définition:** Une suite qui ne converge pas est dite divergente (on dit qu'elle diverge). C'est le cas si cette suite n'a pas de limite quand elle tends vers $\pm\infty$.

**Théorème** (Unicité de la limite (réelle))**:** Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (\ell_1, \ell_2) \in \overline{\mathbb{R}}^2$
Si $\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1 \\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2 \end{cases}$ alors $\ell_1 = \ell_2$

*Preuve:* **Cas 1** $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$.

On suppose $\begin{cases} \ell_1 \neq \ell_2 \\ u_n \to l_1 \\ u_n \to l_2 \end{cases}$

Sans perte de généralité, on peut supposer $\ell_1 < \ell_2$

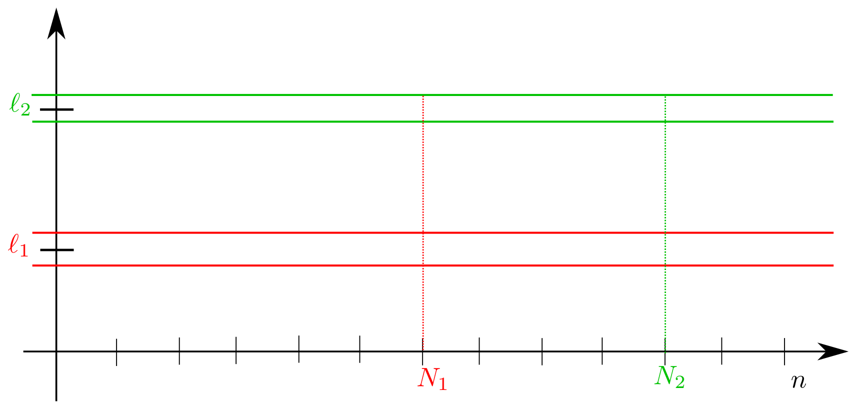



Figure 3 – Preuve unicité de la limite (cas 1)

On pose $\varepsilon = \dfrac{\ell_2 - \ell_1}{3} > 0$. On sait qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, \ell_1 - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + \varepsilon$$

et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, \ell_2 - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell_2 + \varepsilon$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. On a alors

$$u_n \leqslant \ell_1 + \varepsilon < \ell_2 + \varepsilon \leqslant u_n$$

une contradiction ($u_n < u_n$). En effet,

$$\begin{aligned} \ell_1 + \varepsilon < \ell_2 + \varepsilon &\iff 2\varepsilon < \ell_2 - \ell_1 \\ &\iff \frac{2}{3}(\ell_2 - \ell_1) < \ell_2 - \ell_1 \\ &\iff \frac{2}{3} < 1 \end{aligned}$$

Ainsi $\ell_1 = \ell_2$

**Cas 2** $\ell_1 \in \mathbb{R}, \ell_2 = +\infty$

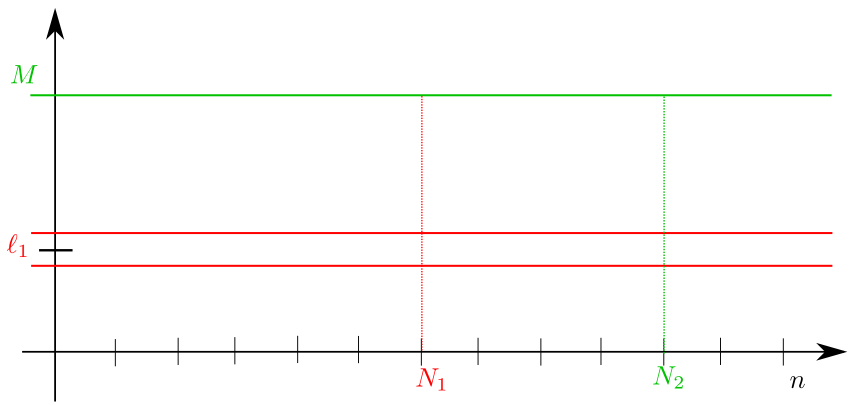



FIGURE 4 – Preuve unicité de la limite (cas 2)

$u_n \to \ell_1$ donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, \ell_1 - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + 1$$

$u_n \to +\infty$ donc il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, u_n \geqslant \ell_1 + 2$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Ainsi

$$u_n \geqslant \ell_1 + 2 > \ell_1 + 1 \geqslant u_n$$

une contradiction

De la même manière, on peut prouver pour $(\mathbb{R}, -\infty)$ et $(+\infty, -\infty)$ $\square$

REMARQUE:
Si $u_n$ tends vers $\ell$ quand $n$ tends vers $+\infty$, on écrit $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $\lim u_n = \ell$

**Proposition:** Toute suite convergente est bornée

*Preuve:*
On pose $\ell = \lim u_n \in \mathbb{R}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \ell - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell + 1$$

L'ensemble $\{u_n \mid n \leqslant N\}$ est fini, il a donc un plus grand élément et un plus petit élément. On pose

$$\begin{cases} M_1 = \max\{u_n \mid n \leqslant N\} \\ m_1 = \min\{u_n \mid n \leqslant N\} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} M = \max(\ell_1 + 1, M_1) \\ m = \min(\ell_1 - 1, m_1) \end{cases}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} m \leqslant m_1 \leqslant u_n \leqslant M_1 \leqslant M & \text{si } n \leqslant N \\ m \leqslant \ell_1 - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + 1 \leqslant M & \text{si } n > N \end{cases}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant u_n \leqslant M$$

□

**Proposition:** Soient $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On pose $\ell_1 = \lim u_n$ et $\ell_2 = \lim v_n$

1. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$ alors $u_n + v_n \to \ell_1 + \ell_2$
2. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = +\infty$ alors $u_n + v_n \to +\infty$
3. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = -\infty$ alors $u_n + v_n \to -\infty$
4. si $\ell_1 = \ell_2 = +\infty$, alors $u_n + v_n \to +\infty$
5. si $\ell_1 = \ell_2 = -\infty$, alors $u_n + v_n \to -\infty$

*Preuve:* 1. On suppose $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\ell = \ell_1 + \ell_2$.
Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \ell - \varepsilon \leqslant u_n + v_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

$\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, \ell_1 - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, \ell_2 - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant v_n \leqslant \ell_2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geqslant N$ quelconque.

$$n \geqslant N \geqslant N_1 \text{ donc } \ell_1 - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$n \geqslant N \geqslant N_2 \text{ donc } \ell_2 - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant v_n \leqslant \ell_2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

D'où, en additionnant les inégalités

$$\ell - \varepsilon = \ell_1 + \ell_2 - \varepsilon \leqslant u_n + v_n \leqslant \ell_1 + \ell_2 + \varepsilon = \ell + \varepsilon$$

2. On suppose $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = +\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$ quelconque.
Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, \ell_1 - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + 1$$

et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, v_n \geqslant M - \ell_1 + 1$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geqslant N$ quelconque

$$\begin{cases} n \geqslant N_1 \text{ donc } u_n \geqslant \ell_1 - 1 \\ n \geqslant N_2 \text{ donc } v_n \geqslant M - \ell_1 + 1 \end{cases}$$

D'où, $u_n + v_n \geqslant M$

□

**Proposition:** Soient $u$ et $v$ deux suites réelles. On pose $\ell_1 = \lim u_n$ et $\ell_2 = \lim v_n$

1. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$, alors $u_n v_n \to \ell_1 \ell_2$
2. si $\begin{cases} \ell_1 \in \mathbb{R}_*^+, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \to +\infty \\ \ell_1 \in \mathbb{R}_*^-, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \to -\infty \end{cases}$
3. si $\begin{cases} \ell_1 \in \mathbb{R}_*^+, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \to -\infty \\ \ell_1 \in \mathbb{R}_*^-, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \to +\infty \end{cases}$
4. si $\begin{cases} \ell_1 = -\infty, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \to -\infty \\ \ell_1 = -\infty, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \to +\infty \\ \ell_1 = +\infty, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \to +\infty \end{cases}$

*Preuve:* 1. $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$
Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| &= |(u_n - \ell_1) v_n + \ell_1 (v_n - \ell_2)| \\ &\leqslant |v_n| \, |u_n - \ell_1| + |\ell_1| \, |v_n - \ell_2| \end{aligned}$$

Comme $v_n$ converge, elle est bornée,

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leqslant M$$

donc

$$|u_n v_n - \ell_1 \ell_2| \leqslant M \times |u_n - \ell_1| + |\ell_1| \, |v_n - \ell_2|$$

**Cas 1** On suppose $M \neq 0$ et $\ell_1 \neq 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, |u_n - \ell_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}$$

Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, |v_n - \ell_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\,|\ell_1|}$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$.

$$\forall n \geqslant N, |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M} \times M + |\ell_1| \times \frac{\varepsilon}{2\,|\ell_1|} = \varepsilon$$

**Cas 2** $M = 0$, ($\ell_1 \neq 0$)
Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 0$
Donc

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n v_n = 0 \\ \ell_2 = 0 \\ \ell_1 \ell_2 = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n \end{cases}$$

**Cas 3** $M \neq 0$ et $\ell_1 = 0$
Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n v_n - 0| \leqslant M\,|u_n|$
$\frac{\varepsilon}{M} > 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$$

Donc,

$$\forall n \geqslant N, |u_n v_n| \leqslant M \times \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

Donc, $u_n v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 = \ell_1 \ell_2$

2. $l_1 > 0$ et $l_2 = +\infty$
Soit $M \in \mathbb{R}_*^+$ On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, u_n v_n \geqslant M$$

On pose $\varepsilon = \frac{\ell_1}{2} > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, u_n \geqslant \ell_1 - \varepsilon = \frac{\ell_1}{2} > 0$$

et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, v_n \geqslant \frac{2M}{\ell_1} > 0$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Alors,

$$\forall n \geqslant N, u_n v_n \geqslant \frac{2M}{\ell_1} \times \frac{\ell_1}{2} = M$$

Donc $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

$\square$

**Proposition:** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_*$.Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$
On pose $\ell = \lim u_n$ (si elle existe).

1. si $\ell = +\infty$ alors, $\dfrac{1}{u_n} \to 0$
2. si $\ell = 0$ alors, $\left|\dfrac{1}{u_n}\right| \to +\infty$

   ⚠ Si le signe de $u_n$ ne se stabilise pas $\dfrac{1}{u_n}$ n'a pas de limite

   $\boxed{\text{ex}}$ $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
3. si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\ell}$

*Preuve:* 3.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|\ell - u_n|}{|u_n|\,|\ell|}$$

On pose $\varepsilon = \dfrac{|\ell|}{2} > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

Si $\ell > 0$ alors

$$\forall n \geqslant N, u_n \geqslant \ell - \varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$$

et donc

$$\forall n \geqslant N, |u_n| \geqslant \frac{|\ell|}{2}$$

Si $\ell < 0$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \ell + \varepsilon = \frac{\ell}{2} < 0$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \geqslant \frac{|\ell|}{2}$$

Donc,

$$\forall n \geqslant N, \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| \leqslant \frac{|u_n| - \ell}{|\ell| \times \frac{|\ell|}{2}} = \frac{2\,|u_n - \ell|}{|\ell|^2}$$

Soit $\varepsilon' > 0$ quelconque. $\dfrac{\varepsilon'\,|\ell|^2}{2}$ donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N', |u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon'}{2}\,|\ell|^2$$

On pose $N''$, $\left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon'}{2}\,|\ell|^2 \times \dfrac{2}{|\ell|^2} = \varepsilon'$

$\square$

Troisième partie

# Limites et inégalités

**Proposition:** Soient $u$ et $v$ deux suites réelles convergentes de limites respectives $\ell_1$ et $\ell_2$. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$$

Alors, $\ell_1 \leqslant \ell_2$

*Preuve:*
On suppose $\ell_1 < \ell_2$. On pose $\varepsilon = \dfrac{\ell_1 - \ell_2}{3} > 0$.
Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, u_n \geqslant \ell_1 - \varepsilon$$

Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, v_n \leqslant \ell_2 + \varepsilon$$

Ainsi,

$$\forall n \geqslant \max(N_1, N_2), \ell_1 - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant \ell_2 + \varepsilon$$

et donc

$$\ell_1 - \varepsilon \leqslant \ell_2 + \varepsilon$$

donc, $\ell_1 - \ell_2 \leqslant 2\varepsilon$
donc, $1 \leqslant \dfrac{2}{3}$ une contradiction □

Remarque:
Si $\begin{cases} u_n \to \ell_1 \in \mathbb{R} \\ v_n \to \ell_2 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n \end{cases}$
on n'a pas forcément $\ell_1 < \ell_2$
$\boxed{\text{ex}}$ $\forall n \in \mathbb{N}_*, \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ mais les deux convergent vers 0

**Proposition:** Soient $u$ et $v$ deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$$

1. si $u_n \to +\infty$,$v_n \to +\infty$
2. si $v_n \to -\infty$,$u_n \to -\infty$

*Preuve:* 1. On suppose $u_n \to +\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, u_n \geqslant M$$

Donc

$$\forall n \geqslant N, v_n \geqslant u_n \geqslant M$$

Donc $v_n \to +\infty$

□

**Théorème** (Théorème des "gendarmes")**:** Soient $u$, $v$ et $w$ trois suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

On suppose que $u$ et $w$ convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, $v$ converge vers $\ell$

*Preuve:*
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, w_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, u_n \leqslant \ell - \varepsilon$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. D'où,

$$\forall n \geqslant N, \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

Donc, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ □

**Théorème** (Limite monotone)**:** 1. Soit $u$ une suite croissante majorée par $M$.
Alors, $u$ converge et $\lim u_n \leqslant M$
2. Soit $u$ une suite croissante non majorée.
Alors, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
3. Soit $u$ une suite décroissante minorée par $m$.
Alors, $u$ converge et $\lim u_n \geqslant m$
4. Soit $u$ une suite décroissante non minorée.
Alors, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

*Preuve:* 1. $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing$ ($u_0$ y est) majorée (par hypothèse) par $M$.
On pose $\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}}(u_n)$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque
$\ell - \varepsilon < \ell$ donc, $\exists N \in \mathbb{N}, u_N > \ell - \varepsilon$
$u$ est croissante donc

$$\forall n \geqslant N, u_n \geqslant u_N > \ell - \varepsilon$$

donc,

$$\forall n \geqslant N, \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell \leqslant \ell + \varepsilon$$

Donc, $u_n \to \ell$

2. Soit $M \in \mathbb{R}$. $M$ n'est pas un majorant de l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ donc

$$\exists N \in \mathbb{N}, u_N > M$$

Comme $u$ est croissante

$$\forall n \geqslant N, u_n \geqslant u_N \geqslant M$$

donc

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

□

Exemple:

$$\begin{cases} u_0 = a \in ]0,1[ \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(1-u_n) \end{cases}$$

(suite logistique)

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f : x \mapsto x(1-x)$$

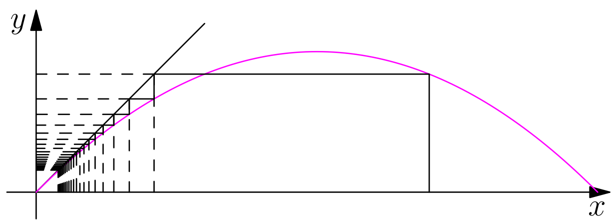



Figure 5 – Courbe logistique

— Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n(1-u_n) - u_n \\ &= -{u_n}^2 \leqslant 0 \end{aligned}$$

Donc, $u$ est décroissante.

— Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$$

— $u_0 = a \in ]0,1[$ donc $u_0 \in [0,1]$

— Soit $n \in N$. On suppose $u_n \in [0,1]$

$$\begin{cases} 0 \leqslant u_n \leqslant 1 \\ 0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1 \end{cases}$$

donc

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$

donc $u$ minoré par 0

— D'après le théorème de la limite monotone, $u$ converge. On pose $\ell$ sa limite :

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n$$

Alors, $u_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

$$u_n(1-u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell(1-\ell)$$

Par unicité de la limite,

$$\begin{aligned} & \ell = \ell(1-\ell) \\ \iff & 1 = 1 - \ell \\ \iff & 0 = -\ell \iff \ell = 0 \end{aligned}$$

Exemple:

$$\begin{cases} u_0 = a \in ]0,1[ \\ u_{n+1} = 2u_n(1-u_n) \end{cases}$$

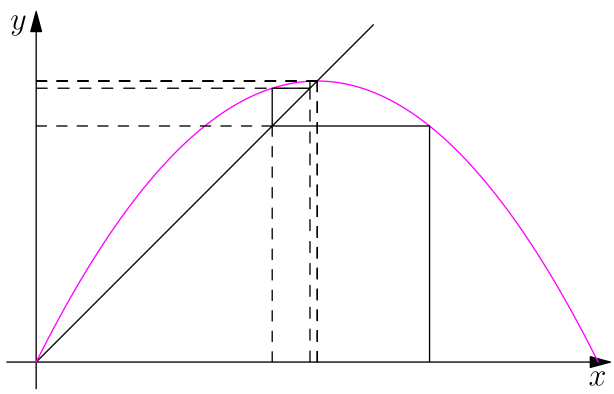



Figure 6 – Courbe logistique (2)

Exemple:

$$\begin{cases} u_0 = a \in ]0,1[ \\ u_{n+1} = 3u_n(1-u_n) \end{cases}$$

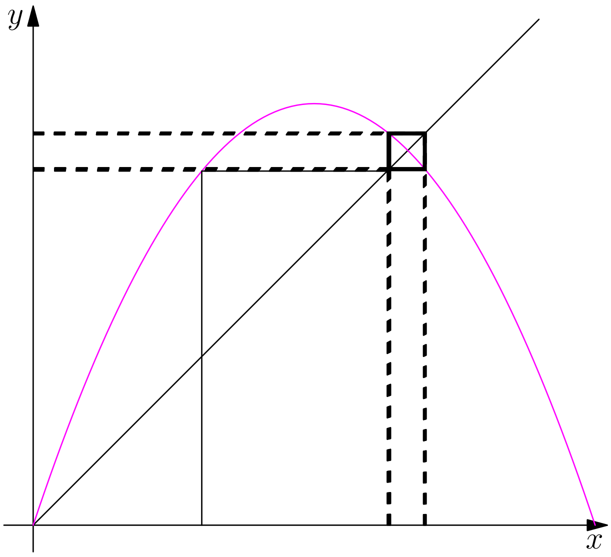



Figure 7 – Courbe logistique (3)

Exemple:

$$\begin{cases} u_0 = a \in ]0,1[ \\ u_{n+1} = 4u_n(1-u_n) \end{cases}$$

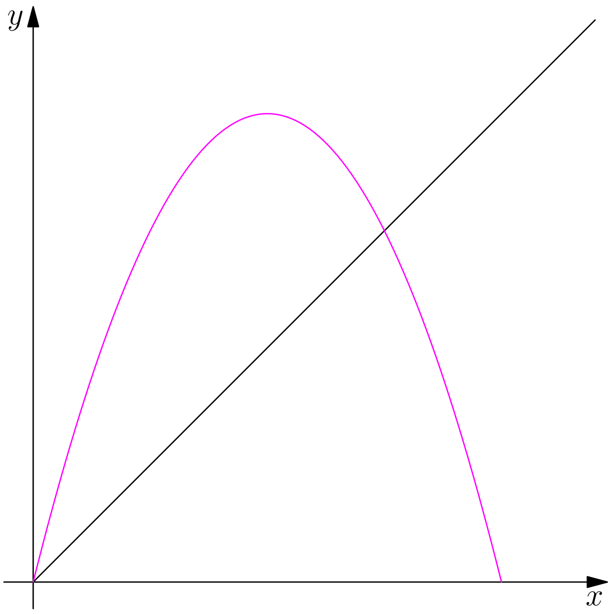



FIGURE 8 – Courbe logistique (4)

**Définition:** Soient $u$ et $v$ deux suites réelles. On dit que $u$ et $v$ sont adjacentes si
- $u$ est croissante
- $v$ est décroissante
- $u_n - v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

**Théorème:** Soient $u$ et $v$ deux suites adjacentes. Alors, $u$ et $v$ convergent vers la même limite.

*Preuve:*
$u - v$ est croissante donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - v_n \leqslant 0$$

$v$ décroissante donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant v_0$$

donc $u$ majorée par $v_0$ donc $u$ converge.
$u$ est croissante donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant u_0$$

donc $v$ est minorée par $u_0$ donc $v$ converge.

Donc, $u_n - v_n \to \lim(u_n) - \lim(v_n)$ Par unicité de la limite,

$$\begin{aligned} &\lim(u_n) - \lim(v_n) = 0 \\ \iff &\lim(u_n) = \lim(v_n) \end{aligned}$$

□

**Théorème** (Théorème des segments emboîtés)**:** Soit $(I_n)$ une suite de segments (non vide) décroissante

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$$

On note $\ell(I)$ la longueur d'un intervalle $I$.
Si $\ell(I_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

*Preuve:*
On pose $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = [a_n, b_n]$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant b_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$I_{n+1} \subset I_n$ donc $a_{n+1} \in I_{n+1} \subset I_n$
donc $a_{n+1} \geqslant a_n$. De même, $b_{n+1} \in I_{n+1}$ donc $b_{n+1} \in I_n$ donc $b_{n+1} \leqslant b_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \ell(I_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $(a_n)$ et $(b_n)$ sont adjacentes, elles convergent donc vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.
$(a_n)$ croissante de limite $\ell$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant \ell$$

$(b_n)$ est décroissante de limite $\ell$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n \geqslant \ell$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \ell \in I_n$ donc $\ell \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.
Soit $\ell' \neq \ell$.

— Si $\ell' < \ell = \sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n)$ donc $\ell'$ ne majore pas $(a_n)$

$$\exists N \in \mathbb{N}, a_N > \ell'$$

donc $\ell' \notin I_N$ donc $\ell' \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$

— Si $\ell' > \ell = \inf_{n\in\mathbb{N}}(b_n)$ donc $\ell'$ ne minore pas $(b_n)$

$$\exists N' \in \mathbb{N}, b_{N'} < \ell'$$

et donc $\ell' \notin I_{N'}$ donc $\ell' \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$

$\square$

# Quatrième partie

# Suites extraites

**Définition:** Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.
On dit que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ est une **suite extraite** de $u$ ou une **sous suite** de $u$.
On dit alors que $\varphi$ est une extractrice

EXEMPLE:
$u_0$ $\boxed{u_1}$ $u_2$ $u_3$ $\boxed{u_4}$ $\boxed{u_5}$ $u_6$ $u_7$ ...

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1 \\ \varphi(1) = 4 \\ \varphi(2) = 5 \end{cases}$$

**Lemme:** Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geqslant n$$

*Preuve* (par récurrence)*:*
— $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ donc $\varphi(0) \geqslant 0$
— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $(\varphi(n) \geqslant n$.
$n+1 > n$ donc $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$ donc $\varphi(n+1) > n$
Comme $\varphi(n+1) \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) \geqslant n+1$

□

**Proposition:** Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante
alors $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

*Preuve:* CAS 1 $\ell \in \mathbb{R}$
Soit $\varepsilon > 0$ on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Soit $n \geqslant N$ alors $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N$ donc

$$\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$

Donc, $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

CAS 2 $\ell = +\infty$
Soit $M \in \mathbb{R}$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, u_n \geqslant M$$

Soit $n \geqslant N$, on a $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N$ donc

$$u_{\varphi(n)} \geqslant M$$

Donc $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

CAS 3 $\ell = -\infty$ similaire au CAS 2

□

EXEMPLE:
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$

$$\begin{array}{rcl} u_{2n} = 1 & \xrightarrow[n\to+\infty]{} & 1 \\ & & \not= \\ u_{2n+1} = -1 & \xrightarrow[n\to+\infty]{} & -1 \end{array}$$

donc $u_n$ n'a pas de limite.

**Proposition:** Si $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ ont la même limite $\ell$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

*Preuve:* CAS 1 $\ell \in \mathbb{R}$
Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, |u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, |u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On pose $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$. Soit $n \geqslant N$.
Si $n$ pair alors $n = 2k$ avec $k \geqslant N_1$ et donc, $|u_{2k} - \ell| \leqslant \varepsilon$, i.e. $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
Si $n$ impair alors $n = 2k + 1$ avec $k \geqslant N_2$ et donc, $|u_{2k+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$, i.e. $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
Donc,

$$\forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

□

**Théorème** (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**:** Soit $(u_n)$ une suite réelle bornée. Alors, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\big(u_{\varphi(n)}\big)$ converge.

*Preuve:* MÉTHODE 1 par dichotomie

Soitent $m, M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant u_n \leqslant M$$

On pose

$$A_1 = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid m \leqslant u_n \leqslant \frac{m+M}{2} \right\}$$
$$A_2 = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{m+M}{2} \leqslant u_n \leqslant M \right\}$$

Comme $A_1 \cup A_2 = \mathbb{N}$, $A_1$ et $A_2$ ne peuvent pas être finis tous les deux.

On pose

$$B_0 = \begin{cases} A_1 & \text{si } A_1 \text{ est infini} \\ A_2 & \text{sinon} \end{cases}$$

$B_0$ est infini donc non vide. On pose $\varphi(0) = \min(B_0)$

On pose aussi

$$m_0 = \begin{cases} m & \text{si } B_0 = A_1 \\ \dfrac{m+M}{2} & \text{si } B_0 = A_2 \end{cases}$$

et

$$M_0 = \begin{cases} \dfrac{m+M}{2} & \text{si } B_0 = A_1 \\ M & \text{si } B_0 = A_2 \end{cases}$$

Ainsi, $B_0 = \{n \in \mathbb{N} \mid m_0 \leqslant u_n \leqslant M_0\}$. On pose

$$B_1' = \left\{ n \in B_0 \mid n > \varphi(0) \text{ et } m_0 \leqslant u_n \leqslant \frac{M_0 + m_0}{2} \right\}$$
$$B_2' = \left\{ n \in B_0 \mid n > \varphi(0) \text{ et } \frac{m_0 + M_0}{2} \leqslant u_n \leqslant M_0 \right\}$$

$$B_1' \cup B_2' = \{n \in B \mid n > \varphi(0)\} = B_0 \setminus \{\varphi(0)\}$$

$B_0 \setminus \{\varphi(0)\}$ est infini donc $B_1'$ ou $B_2'$ est infini. On pose

$$B_1 = \begin{cases} B_1' & \text{si } B_1' \text{ est infini} \\ B_2' & \text{sinon} \end{cases}$$

$B_1$ est infini donc non vide et admet un plus petit élément :

$$\varphi(1) = \min(B_1)$$

$\varphi(1) \in B_1$ donc $\varphi(1) > \varphi(0)$
On pose

$$m_1 = \begin{cases} m_0 & \text{si } B_1 = B_1' \\ \dfrac{m_0 + M_0}{2} & \text{si } B_1 = B_2' \end{cases}$$
$$M_1 = \begin{cases} \dfrac{m_0 + M_0}{2} & \text{si } B_1 = B_1' \\ M_0 & \text{si } B_1 = B_2' \end{cases}$$

On construit une suite décroissante $(B_n)$, deux suites de réels $(m_n)$ et $(M_n)$ et une suite d'entiers $(\varphi(n))$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} B_{n+1} = \{k \in B_n \mid k > \varphi(n) \text{ et } m_{n+1} \leqslant u_k \leqslant M_{n+1}\} \\ \varphi(n+1) = \min(B_{n+1}) > \varphi(n) \\ M_{n+1} - m_{n+1} = \dfrac{1}{2}(M_n - m_n) \end{cases}$$

La suite $(m_n)$ est croissante, $(M_n)$ est décroissante et

$$\lim_{n \to +\infty} M_n - m_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (M_0 - m_0) = 0$$

Donc, $(m_n)$ et $(M_n)$ sont adjacentes donc convergentes avec la même limite $\ell \in \mathbb{R}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, m_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant M_n$$

Par encadrement, $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ □

MÉTHODE 2 On pose $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall k > n, u_n > u_k\}$

CAS 1 On suppose $A$ infini.

On pose $\varphi(0) = \min(A)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n)$ soient déjà construits. On pose

$$\varphi(n+1) = \min(A \setminus \{\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n)\})$$

Soit $n \in \mathbb{N}_*$

$$\varphi(n+1) \in A \setminus \{\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n)\}$$

donc

$$\varphi(n+1) \in A \setminus \{\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n-1)\}$$

donc

$$\varphi(n+1) \geqslant \varphi(n)$$

Or, par définition, $\varphi(n+1) \neq \varphi(n)$ donc $\varphi(n+1) > \varphi(n)$
On a aussi $\varphi(1) \in A$ donc $\varphi(1) \geqslant \varphi(0)$ Or, on sait que $\varphi(1) \neq \varphi(0)$. Donc, $\varphi(1) > \varphi(0)$ Soit $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \in A$ donc

$$\forall k > \varphi(n), u_k < u_{\varphi(n)}$$

or $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ donc $u_{\varphi(n+1)} < u_{\varphi(n)}$.
La sous suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ est décroissante et minorée (car $u$ est minorée) donc elle converge

CAS 2 On suppose $A$ fini. Soit $N = \max(A)$,

$$\forall n > N, n \notin A$$

Donc $\forall n > N, \exists k > n, u_n \leqslant u_k$.
Par exemple, en posant $\varphi(0) = N+1$, on a

$$A_1 = \{k > N+1 \mid u_{N+1} \leqslant u_k\} \neq \varnothing$$

On pose $\varphi(1) = \min(A_1)$ donc $\begin{cases} \varphi(1) > N+1 = \varphi(0) \\ u_{\varphi(0)} < u_{\varphi(1)} \end{cases}$

Avec $n = \varphi(1)$

$$\exists k > n, u_{\varphi(1)} \leqslant u_k$$

Donc, $A_2 = \{k \in \mathbb{N} \mid k > \varphi(1) \text{ et } u_{\varphi 1)} \leqslant u_k\} \neq \varnothing$
On pose $\varphi(2) = \min(A_2)$. On a alors $\varphi(2) > \varphi(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\varphi(n)$ déjà construit avec $\varphi(n) > N$. On sait alors que

$$A_{n+1} = \{k \in \mathbb{N} \mid k > \varphi(n) \text{ et } u_{\varphi(n)} \leqslant u_k\} \neq \varnothing$$

On pose $\varphi(n+1) = \min(A_{n+1})$. Donc,

$$\begin{cases} \varphi(n+1) > \varphi(n) > N \\ u_{\varphi(n)} \leqslant u_{\varphi(n+1)} \end{cases}$$

On vient de construire une sous suite croissante majorée (car $u$ est majorée) donc convergente.

□

# Cinquième partie

# Suites récurrentes

**Définition:** On dit que $u$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants s'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

L'équation caractéristique associée est

$$(C) : z^2 = az + b \text{ avec } z \in \mathbb{C}$$

**Proposition:** Avec les notations précédentes,

1. Si $(C)$ a 2 racines simples $r_1 \neq r_2$ alors

$$\exists (A, B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A{r_1}^n + B{r_2}^n$$

2. Si $(C)$ a une racine double $r \in \mathbb{C}$ alors

$$\exists (A, B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)r^n$$

*Preuve* (Récurrence double)*:*

□

**Proposition:** avec les notations précédentes et avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

1. Si $(C)$ a deux racines simples $r_1 \neq r_2$ alors

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A{r_1}^n + B{r_2}^n$$

2. Si $(C)$ a une racine simple $r \in \mathbb{R}$ alors

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)r^n$$

3. Si $(C)$ a deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_*^+$ et $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$$

□

Remarque:
Étude de $u_{n+1} = f(u_n)$

1. On choisit rapidement la fonction $f$ (au moins le tableau de variation)

1'. (optionnel) on représente graphiquement la fonction $f$ et la droite d'équation $y = x$ pour conjecturer sa limite

2. On utilise le tableau de variation pour vérifier que $(u_n)$ est bien définie par récurrence
$$P(n) : \text{"}u_n \text{ existe et } u_n \in \mathscr{D}_f\text{"}$$
3. On étudie le signe de $f(x) - x$
4. On cherche les intervalles stables par $f$ :
$$f(I) \subset I$$
les plus petits possible (ça permet de montrer que la suite est majorée (minorée) en particulier ceux sur lesquels $f(x) - x$ ne change pas de signe

4'. Donc on utilise le théorème de la limite monotone

4". Sinon, on essaie l'inégalité (voir théorème) des accroissements finis :
Soit $\ell$ un point fixe de $f$ : $f(\ell) = \ell$
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| = M\,|u_n - \ell|$$
où M est un majorant de $|f|$
Si $0 \leqslant M \leqslant 1$ alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leqslant M^n\,|u_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

5. si $(u_n)$ a une limite et si $f$ continue alors $\lim(u_n)$ est une point fixe de $f$

Exemple: 1.
$$\begin{cases} u_{n+1} = \cos(u_n) \\ u_0 \in \left]0, 1\right[ \end{cases}$$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $1$ | | $\searrow$ | | $0$ |

On pose $g : x \mapsto \cos(x) - x$ dérivable et
$\forall x \in [0, 1]\,, g'(x) = -\sin(x) - 1 \leqslant 0$

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $g(1) < 0$ |

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | |
| $f(x)-x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1]\,, |f'(x)| &= |-\sin(x)| \\ &= \sin(x) \leqslant \sin(1) < 1\end{aligned}$$

$$\forall n, |u_{n+1}-\alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \sin(1)\,|u_n - \alpha|$$

donc

$$\forall n, |u_n - \alpha| \leqslant \underbrace{\sin^n(1)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} |u_0 - \alpha|$$

Donc, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$

# Sixième partie

# Comparaison de suites

> **Définition:** Soient $u$ et $v$ deux suites réelles. On dit que $u$ est dominée par $v$ si
> $$\exists M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant M |v_n|$$
> Dans ce cas, on note $u = O(v)$ ou $u_n = O(v_n)$ et on dit que "$u$ est un grand o de $v$"

EXEMPLE:
En informatique, on dit qu'un alogirithme a une complexité linéaire si son temps d'éxécution est un $O(n)$ Par exemple, on calcule $a^n$

— Approche naïve Complexité linéaire $O(n)$

```
p ← 1
for i ∈ ⟦0, n − 1⟧ do
    p ← p × a
end for
return p
```

— Exponentiation rapide
On écrit $n$ en binaire :

$$\begin{aligned} n &= \overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}^{(2)} \\ &= \sum_{i=0}^{k} a_i 2^i \end{aligned}$$

avec $(a_i) \in \{0,1\}^{k+1}$

$$\begin{aligned} a^n &= a^{\sum_{i=0}^{k} a_i 2^i} \\ &= \prod_{i=0}^{k} a^{a_i 2^i} \end{aligned}$$

```
s ← 0
p ← a
for  i ∈ ⟦0, log₂(n)⟧ do
    p ← p × p
    if a[i] = 1 then
        s ← s + p
    end if
end for
return s
```

Compléxité logarithmique $O(\log_2(n))$

**Proposition:** $O$ est une relation réfléctive et transitive.

*Preuve:* — Soit $u$ une suite. On pose $M = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M\,|u_n|$$

Donc $u = O(u)$.

— Soient $u, v, w$ trois suites telles que

$$\begin{cases} u = O(v) \\ v = O(w) \end{cases}$$

Soient $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ et $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{cases} \forall n \geqslant N_1, |u_n| \leqslant M_1\,|v_n| \\ \forall n \geqslant N_2, |v_n| \leqslant M_2\,|w_n| \end{cases}$$

Nécéssairement, $M_1 \geqslant 0$ et $M_2 \geqslant 0$.
Soit $N = \max(N_1, N_2)$.

$$\forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant M_1\,|v_n| \leqslant M_1 M_2\,|w_n|$$

Donc $u = O(w)$

□

**Définition:** Soient $u$ et $v$ deux suites. On dit que $u$ est négligeable devant $v$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \varepsilon\,|v_n|$$

Dans ce cas, on note $u = o(v)$ ou $u_n = o(v_n)$ ou on le lit "$u$ est un petit o de $v$"

**Proposition:** $o$ est une relation transitive, non-réfléctive

*Preuve:* — Soient $u$, $v$ et $w$ trois suites telles que

$$\begin{cases} u = o(v) \\ v = o(w) \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, |u_n| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\,|v_n|$$

Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, |v_n| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\, |w_n|$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$, alors

$$\forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\, |v_n| \leqslant \underbrace{\sqrt{\varepsilon} \times \sqrt{\varepsilon}}_{\varepsilon} |w_n|$$

donc $u = o(w)$

— Soit $u$ une suite tel qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, u_n > 0$$

On suppose que $u = o(u)$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \varepsilon\, |u_n|$$

On pose $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ alors

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \frac{1}{2}\, |u_n|$$

une contradiction

□

**Proposition:** Soient $u$ et $v$ deux suites.
- $o(u) + o(u) = o(u)$
- $v \times o(u) = o(uv)$
- $o(u) \times o(v) = o(uv)$
- $o(o(u)) = o(u)$

□

**Définition:** Soient $u$ et $v$ deux suites. On dit que $u$ et $v$ sont <u>équivalentes</u> si

$$u = v + o(v)$$

i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - v_n| \leqslant \varepsilon\, |v_n|$$

Dans ce cas, on le note $u \sim v$

**Proposition:** $\sim$ est une relation d'équivalence □

**Proposition:** Soient $(u,v) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $v$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang

1. $u = o(v) \iff \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ bornée
2. $u = o(v) \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
3. $u \sim v \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$\square$

**Proposition** (Suites de références)**:**

1. $\ln^{\alpha}(n) = o(n^{\beta})$ avec $(\alpha,\beta) \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$
2. $n^{\beta} = o(a^n)$ avec $\beta > 0$ et $a > 1$
3. $a^n = o(n!)$ avec $a > 1$
4. $n! = o(n^n)$

**Lemme** (Exercice 10 du TD)**:** Soit $u \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^{\mathbb{N}}$
Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell < 1$ avec $\ell \in \mathbb{R}$,
alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

*Preuve* (de la proposition)*:*

1. par croissance comparée
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n^{\beta}}{a^n}$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\beta} \times \frac{1}{a} \\ &= \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\beta} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{a} < 1\end{aligned}$$

Donc, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

3. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{a^n}{n!}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$$

donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

4. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} &= (n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= e^{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} \\
&= e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} \\
&= e^{n(-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})} \\
&= e^{-1+o(1)} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1} < 1
\end{aligned}$$

donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

□

# Septième partie

# Suites complexes

**Définition:** Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que $(u_n)$ converge vers $\ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

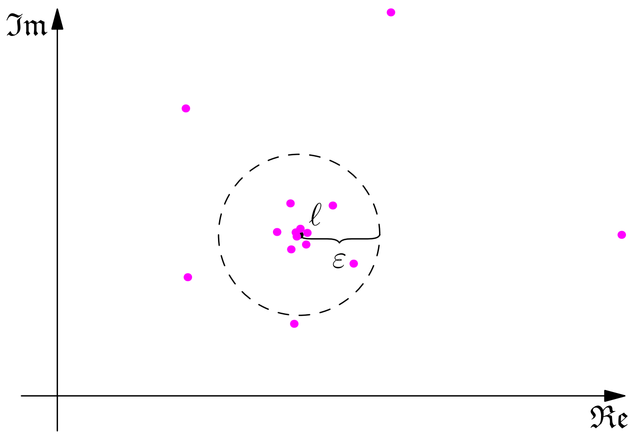



FIGURE 9 – Suite complexe convergente

**Proposition:** Si $\ell_1$ et $\ell_2$ sont deux limites de $u$ alors $\ell_1 = \ell_2$

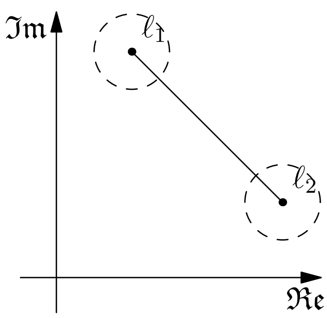



FIGURE 10 – Unicité de la limite de suites complexes

□

**Proposition:** Les limites de somme, produit, quotient de suites complexes respectent les mêmes lois que pour les suites réelles. □

**Théorème:** Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathfrak{Re}(\ell) \\ \mathfrak{Im}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathfrak{Im}(\ell) \end{cases}$$

*Preuve:* $\Longrightarrow$ On suppose $u_n \to \ell$.
Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Or,

$$\forall n \geqslant N, \begin{cases} \mathfrak{Re}(u_n) - \mathfrak{Re}(\ell) = \mathfrak{Re}(u_n - \ell) \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \\ \mathfrak{Im}(u_n) - \mathfrak{Im}(\ell) = \mathfrak{Im}(u_n - \ell) \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \mathfrak{Re}(u_n) \to \mathfrak{Re}(\ell) \\ \mathfrak{Im}(u_n) \to \mathfrak{Im}(\ell) \end{cases}$$

$\Longleftarrow$ On suppose $\begin{cases} \mathfrak{Re}(u_n) \to \mathfrak{Re}(\ell) \\ \mathfrak{Im}(u_n) \to \mathfrak{Im}(\ell) \end{cases}$

Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \mathfrak{Re}(u_n) + i\mathfrak{Im}(u_n) \to \mathfrak{Re}(\ell) + i\mathfrak{Im}(\ell) = \ell$$

$\square$

**Proposition:** Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.
Si $u_n \to \ell$ alors $|u_n| \to |\ell|$

*Preuve:*
On suppose $u_n \to \ell$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = \sqrt{\mathfrak{Re}^2(u_n) + \mathfrak{Im}^2(u_n)} \to \sqrt{\mathfrak{Re}^2(\ell) + \mathfrak{Im}^2(\ell)} = |\ell|$$

$\square$

**Proposition:** Tous les résultats (sauf ceux avec des limites infinies !) concernant les suites extraites sont encore valables dans $\mathbb{C}$ y compris le théorème de Bolzano-Weierstrass (mais avec une autre preuve).

**Définition:** Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que $u$ est <u>bornée</u> s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$$

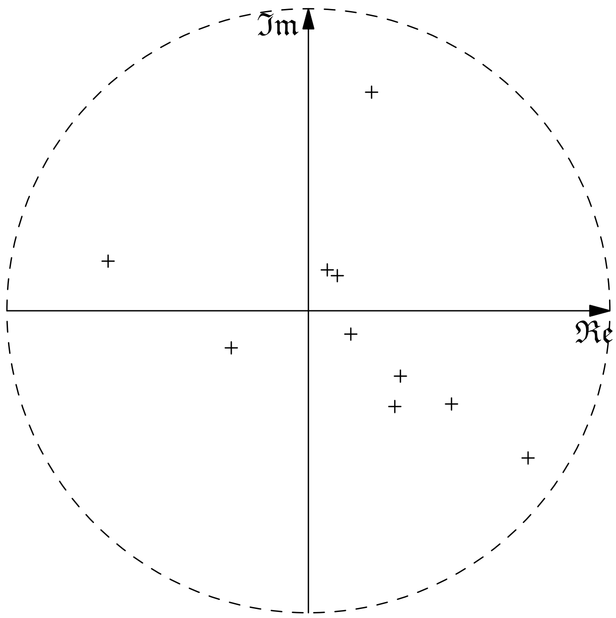



FIGURE 11 – Suite complexe bornée

**Théorème** (Bolzano Weierstrass)**:** Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ bornée. Il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ converge.

*Preuve:*
Soit $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, |\mathfrak{Re}(u_n)| \leqslant |u_n| \leqslant M$ Donc $(\mathfrak{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Donc, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(\mathfrak{Re}\left(u_{\varphi(n)}\right)\right)$ converge.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\mathfrak{Im}\left(u_{\varphi(n)}\right)\right| \leqslant \left|u_{\varphi(n)}\right| \leqslant M$$

donc $\left(\mathfrak{Im}(u_{\varphi(n)}\right)$ est bornée. Soit $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(\mathfrak{Im}\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)\right)$ converge. Or, $\left(\mathfrak{Re}\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)\right)$ est une sous suite de la suite convergente $\left(\mathfrak{Re}\left(u_{\varphi(n)}\right)\right)$ donc $\left(\mathfrak{Re}\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)\right)$ converge.
Donc, $\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)$ converge.

Comme $\varphi \circ \psi$ est strictement croissante, $\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)$ est une sous suite de $(u_n)$ $\square$

# Huitième partie

# Annexe

**Proposition:** Soit $f : I \to I$ continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

**Si** $(u_n)$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$
alors $f(\ell) = \ell$ i.e. ($\ell$ est un point fixe de $f$)

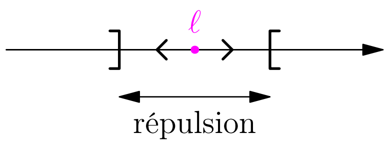
*Preuve:*
On suppose que $(u_n)$ converge vers $\ell$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ car $(u_{n+1})$ est une sous suite de $(u_n)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

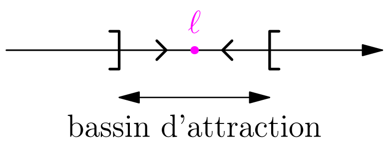
Comme $f$ est continue alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$. Par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$ □

Remarque:
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
Soit $\ell \in \mathbb{R}$ un point fixe de $f$. Donc, $f(\ell) = \ell$.

$|f'(\ell)| > 1$ :




$|f'(\ell)| < 1$ :




Par contre, si $|f'(\ell)| = 1$, on ne sait pas.
Remarque (Suite arithético-géométrique):

$$(*) : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b = f(u_n)$$

Méthode 1

— On cherche $v$ une suite constante solution de $(*)$ :

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, v_n = C$$

donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, C = aC + b = f(C)$$
Si $a \neq 1 : C = \dfrac{b}{1-a}$

— Soit $u$ qui vérifie $(*)$. On pose $w = u - v$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} &= u_{n+1} - v_{n+1} \\ &= au_n + b - av_n - b \\ &= a(u_n - v_n) \\ &= aw_n \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = aw_n + 0$ : équation homogène associée à $(*)$
$(w_n)$ est géométrique donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 a^n$$
et donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = w_0 a^n + \frac{b}{1-a}$$

Méthode 2

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) &\longmapsto (u_{n+1} - au_n) \end{aligned}$$

$\varphi$ morphisme de groupes additifs
$$\varphi(u) = (b) \iff u = v + w \text{ avec } w \in \operatorname{Ker}(\varphi)$$

$$\begin{aligned} w \in \operatorname{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(w) = 0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - aw_n = 0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = aw_n \end{aligned}$$