TD 22 Fonctions de deux variables

Exercice 1: ★★

Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés.

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-1| < 1\} \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\}$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1, |y| \leq 1\} \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}$$
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}\} \quad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4\}.$$

Exercice 2: ★★

(1) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $2|xy| \leq x^2+y^2$.

(2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Montrer que f a une limite en $(0,0)$.

Exercice 3: ★★

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 4: ★★★

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x^2+y^2-1 & \text{si } x^2+y^2 > 1 \\ x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5: ★

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

(1) $f : (x,y) \mapsto e^x \cos(y)$.

(2) $g : (x,y) \mapsto (x^2+y^2)\cos(xy)$.

(3) $h : (x,y) \mapsto \sqrt{1+x^2y^2}$.

Exercice 6: ★★

Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

(1) $(x,y) \mapsto f(y,x)$

(2) $(x,y) \mapsto f(y, f(x,x))$

(3) $x \mapsto f(x,x)$.

Exercice 7: ★★★

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées suivant tout vecteur en $(0,0)$ mais qu'elle n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 8: ★

Soit $g : (x,y) \mapsto \dfrac{x\mathrm{e}^{-x}}{y} + \dfrac{y}{e}$. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et que g y admet un unique point critique. Est-ce que g y présente un extrémum ?

Exercice 9: ★★★

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) = \frac{f(x^2+y^2) - f(0)}{x^2+y^2}.$$

(1) Déterminer $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$. On prolonge F par continuité en $(0,0)$ par cette valeur.

(2) Montrer que F est de classe C^1.

Exercice 10: ★★★

On note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique. Quel est le paramètre maximal d'un triangle dont les sommets sont sur $\mathscr{C}$?

Exercice 11: ★★★

Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

On pourra effectuer le changement de variables $u = x+y$, $v = x-y$.

Exercice 12: ★★★

Déterminer les fonctions de classe C^1 solutions des systèmes suivants.

(1) $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = xy^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 y \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-y}{x^2+y^2}. \end{cases}$