TD 23
DÉNOMBREMENT

Exercice 1: ★

En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères. Un bit (*binary digit*) est un élément qui prend la valeur 0 ou 1. Avec 8 bits (un octet), combien de caractères peut-on coder ?

Exercice 2: ★

(1) Combien y a-t-il de nombres de quatre chiffres (le premier étant non nul) ?
(2) Parmi ces nombres, combien y en a-t-il constitués de chiffres distincts ?
(3) Composés d'au moins deux chiffres identiques ?
(4) Composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et7 ?

Exercice 3: ★★

Combien y a-t-il d'anagrammes du mot MATHEMATIQUES ?

Exercice 4: ★★★

On extrait simultanément 5 cartes d'un jeu de 32. Cet ensemble de 5 cartes est appelé une *main*.

(1) Combien y a-t-il de mains différentes possibles ?
(2) Combien y a-t-il de mains contenant
  (a) un carré ?
  (b) deux paires distinctes ?
  (c) un full (trois cartes de même valeur, et deux autres de même valeurs) ?
  (d) un brelan (trois cartes de même valeur, sans full ni carré) ?
  (e) une quinte (5 cartes de même couleur se suivant dans l'ordre croissant) ?

Exercice 5: ★★

Dans une classe de 45 élèves, on compte 11 filles et 34 garçons. On doit élire deux délégués.

(1) Quel est le nombre de possibilités ?
(2) Quel est le nombre de choix si on impose un garçon et une fille ?
(3) Quel est le nombre de choix si on impose deux garçons ?

Exercice 6: ★★★

Montrer que, dans le monde, au moins deux pays ont le même nombre de voisins.

Exercice 7: ★★★

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Calculer

$$\sum_{X\in\mathscr{P}(E)} \mathrm{Card}(X), \quad \sum_{X,Y\in\mathscr{P}(E)} \mathrm{Card}(X\cap Y), \quad \sum_{X,Y\in\mathscr{P}(E)} \mathrm{Card}(X\cup Y).$$

Exercice 8: ★★★

Soit E un ensemble à n éléments. Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E telles que $X \subset Y$?

Exercice 9: ★★★

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. Quel est le coefficient de $a^2b^5c^3$ dans le développement de $(a+b+c)^{10}$? Plus généralement, quel est le coefficient de $a_1^{k_1}a_2^{k_2}\dots a_p^{k_p}$ dans le dévelopement de $(a_1+a_2+\cdots+a_p)^n$?

Exercice 10: ★★★★

Soit $n \in \mathbb{N}$. Combien existe-t-il de p-uplets $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ vérifiant $x_1+x_2+\cdots+x_p = n$?

Exercice 11: ★★★★

Soient E et F deux ensembles non vides de cardinaux respectifs n et p. On note S_n^p le nombre de surjections de E sur F.

(1) Calculer S_n^1, S_n^n et S_n^p pour $p > n$.

(2) On suppose $p \leq n$ et on considère a un élément de E. En observant qu'une surjection de E sur F réalise, ou ne réalise pas, une surjection de $E \setminus \{a\}$ sur F, établir

$$S_n^p = p\left(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p\right).$$

(3) En déduire que $S_n^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^n$.

Exercice 12: ★★★

(1) Soient E un ensemble non vide, $\{X, Y\}$ une partition de E . Montrer que $f : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(X) \times P(Y),\ A \mapsto (A\cap X, A\cap Y)$ est une bijection.

(2) Soient $p, q, r \in \mathbb{N}$ tels que $r \leq p+q$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i+j=r}\binom{p}{i}\binom{q}{j} = \binom{p+q}{r}$.

(3) En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercice 13: ★★★

Soient E un ensemble, $a \in E$ et f l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \\ X & \mapsto & \begin{cases} X \cup \{a\} & \text{si } a \notin X \\ X \setminus \{a\} & \text{si } a \in X \end{cases} \end{array}$$

(1) Montrer que f est une bijection.

(2) On suppose désormais que E est fini de cardinal n. On pose $\mathscr{P}_0(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal pair et $\mathscr{P}_1(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal impair.

Montrer que $\mathscr{P}_0(E)$ et $\mathscr{P}_1(E)$ ont même cardinal.

(3) Calculer ce cardinal et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$.

Exercice 14: ★★★★

1. Les nombres de Bell

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit le n-ième **nombre de Bell** b_n comme étant le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$.
Par exemple, $\{1, 2\}$ a deux partitions : $\{\{1, 2\}\}$ et $\{\{1\}, \{2\}\}$, donc $b_2 = 2$.
Par convention, on pose $b_0 = 1$.

(1) En utilisant la définition, déterminer b_3.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soit $\{P_1, \ldots, P_s\}$ une partition de $[\![1, n+1]\!]$ où $n+1 \in P_s$. On note $k = n+1-\text{Card}(P_s)$. Montrer que $\{P_1, \ldots, P_{s-1}\}$ est une partition d'un ensemble à k éléments.

(b) En déduire la formule $b_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$.

(c) Calculer 'a l'aide cette formule b_3, b_4 et b_5.

(d) Démontrer que $b_{n+1} \geq n b_{n-1}$. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $b_{2k} \geq \dfrac{(2k)!}{2^k k!}$ et $b_{2k+1} \geq 2^k k!$, puis finalement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+1} \geq \sqrt{n!}$.

(e) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} \leq (n+1) b_n$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \leq n!$.

(3) On considère le problème de Cauchy suivant

$$(E) \qquad \begin{cases} y' = e^x y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(a) Déterminer explicitement la solution f du problème de Cauchy (E).

(b) Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x) = e^x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n)}(x).$$

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = f^{(n)}(0)$.

(d) Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de f au voisinage de 0 et en déduire les valeurs de b_3, b_4 et b_5 (on citera avec précision le théorème utilisé).

2. Les nombres de Stirling de deuxième espèce

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Le **nombre de Stirling de deuxième espèce** noté $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ est le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$ à k parties exactement. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}.$$

(1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$.

(a) Soit s une surjection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, k]\!]$. On définit la relation $\sim_s$ par

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ i \sim_s j \iff s(i) = s(j).$$

Montrer que $\sim_s$ est une relation déquivalence, et qu'elle possède k classes d'équivalence.

(b) Soient s_1 et s_2 deux surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, k]\!]$. Montrer que s_1 et s_2 définissent la même relation d'équivalence (*i.e.* pour tout i, j, $i \sim_{s_1} j \iff i \sim_{s_2} j$) si et seulement s'il existe une permutation σ de $[\![1, k]\!]$ telle que $s_2 = \sigma \circ s_1$.

(c) En déduire que $k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ est égal au nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ à valeurs dans $[\![1, k]\!]$.

(d) En déduire les valeurs de $\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\}$, $\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\}$, $\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\}$ et $\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\}$.

(e) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\} = k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\}$.

(f) En déduire que $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \geq k^{n-k}$.

(2) (a) On note pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\gamma_k(x) = x(x-1)\dots(x-k+1)$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \gamma_k(x).$$

(b) En déduire que pour tout $a \in [\![1, n]\!]$, $\left\{ \begin{matrix} n \\ a \end{matrix} \right\} \leq \dfrac{a^n}{a!}$.

(3) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $f_k : x \mapsto \dfrac{1}{k!}(e^x - 1)^k$.

(a) En développant avec la formule du binôme, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_k^{(n+1)}(0) = k f_k^{(n)}(0) + f_{k-1}^{(n)}(0)$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f_k^{(n)}(0) = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$.

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

(d) En déduire finalement que $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{k^n}{k!}$.

3. Arithmétique des nombre de Bell et des nombres de Stirling de seconde espèce

Soit p un nombre premier.

(1) Montrer que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\dbinom{p}{k}$.

(2) On admet le “petit théorème de Fermat” :

$$\forall a \in [\![1, p-1]\!],\ p | (a^{p-1} - 1).$$

À l'aide de ce théorème et de la relation prouvée à la question 2a, montrer que pour tout $a \in [\![2, p-1]\!]$, p divise $\left\{ \begin{matrix} p \\ a \end{matrix} \right\}$.

(3) On suppose $p > 3$. Montrer que le reste de la division de b_p par p vaut 2, et que le reste de la division de b_{p+1} par p vaut 3.

(4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note d_n le PGCD de $\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} n \\ 3 \end{matrix} \right\}, \dots, \left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\}$. Soit p un diviseur premier de d_n.

(a) Montrer que p divise n ou $n-1$.

(b) On suppose que $p \leq n-1$. En utilisant la relation prouvée à la question 2a, aboutir à une contradiction.

(c) En déduire que $d_n = 1$ si n n'est pas premier et que $d_n = n$ si n est premier.