

TD 14 Limites de fonctions et continuité

Exercice 1: ★★

Une personne parcourt 4 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 minutes pendant lequel elle parcourt exactement 2km.

Exercice 2: ★★★

Soient f et g deux fonctions continues en $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto \max(f(x), g(x))$ est continue en a .

Exercice 3: ★★★

Étudier la continuité de la fonction $x \mapsto (x - \lfloor x \rfloor)^2 + \lfloor x \rfloor$.

Exercice 4: ★★★

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I , continues en $a \in I$ et telles que $f(a) \neq g(a)$. Montrer qu'il existe un intervalle J contenant a tel que $f(x) \neq g(x)$ pour tout $x \in J$.

Exercice 5: ★★

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe :

$$\exists a \in [0, 1], f(a) = a.$$

Exercice 6: ★★★

Soient

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $f : x \mapsto x^2(x-2)g(x)$. Montrer que f est continue en 0 et en 2, et discontinue en tout $x \notin \{0, 2\}$.

Exercice 7: ★★★

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Prouver que pour tout $a \in \mathbb{R}_*^+$, il existe $b \geq a$ en lequel f atteint son maximum sur $[a, +\infty[$.

Exercice 8: ★★★

Soit f une fonction définie et strictement croissante sur $[a, b]$ et telle que $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. Montrer que f est continue sur $[a, b]$.

Exercice 9: ★★★

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(x^2) = f(x)$ pour tout $x \geq 0$.

(1) Montrer que pour tout $a > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a) = f\left(a^{\frac{1}{2^n}}\right)$.

(2) En déduire que f est constante.

Exercice 10: ★★★

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue telle que $f \circ f = f$. On note $E_f = \{x \in [0, 1] \mid f(x) = x\}$. Montrer que E_f est un intervalle non vide. Trouver toutes les fonctions $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continues telles que $f \circ f = f$.

Exercice 11: ★★★★★

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \inf\{|x - a| \mid a \in A\}$. Montrer que f est continue.

Exercice 12: ★★★★★

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $y \in [0, 1]$, $\lim_{x \rightarrow y, x \neq y} f(x)$ existe. On note alors $\varphi(y)$ cette limite. Montrer que la fonction φ est continue sur $[0, 1]$.

Exercice 13: ★★★★★

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et $\varphi : x \mapsto \sup_{t \in [a, b]} (f(t) + xg(t))$. Montrer que φ est continue.