

CHAPITRE 6

Équations différentielle linéaire

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 25 avril 2022

Table des matières

I	4
II Annexe	6

Définition: Une équation différentielle est une égalité faisant intervenir une fonction inconnue y ainsi que ses dérivées successives $y', y'', y^{(3)}, \dots, y^{(n)}$.

Définition: Une équation différentielle linéaire d'ordre n est de la forme

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b(t)$$

où b, a_0, a_1, \dots, a_n sont des fonctions connues et continues sur un intervalle I . On dit que b est le second membre de l'équation.

Proposition (Principe de superposition): Soient b_1 et b_2 continues sur I . Soient a_0, a_1, \dots, a_n également continues sur I .

$$(E_1) : \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = b_1$$

$$(E_2) : \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = b_2$$

Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$.

$$(E) : \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 \text{ solution de } (E_1) \\ y_2 \text{ solution de } (E_2) \end{array} \right\} \implies \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \text{ solution de } (E)$$

■

Proposition: Soit (E) l'équation différentielle $\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = b$ où a_0, a_1, \dots, a_n sont des fonctions homogènes. L'équation homogène associée à (E) est

$$(H) : \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = 0$$

Les solutions de (E) sont toutes de la forme $h + y_0$ où h est solution de (H) et y_0 solution de (E) .

■

Théorème (Théorème de Cauchy): Soit (E) une équation linéaire différentielle.

$$(E) : y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = b$$

où a_0, a_1, \dots, a_n sont continues sur un intervalle I .

Soit $t_0 \in I$ et $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$.

Il existe **une et une seule** fonction y telle que

$$\begin{cases} y \text{ solution de } (E) \\ \forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, y^{(i)}(t_0) = \alpha_i \end{cases}$$

Première partie

Soit (E) l'équation $y' + ay = b$ où a et b sont continues sur un intervalle I .

Proposition: Soit A une primitive de a sur un intervalle I .

$$(H) : \quad y' + ay = 0$$

Les solutions de (H) sont $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$

■

REMARQUE (pseudo preuve):

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + a(t)y = 0 &\iff \frac{dy}{y} = -a(t)dt \\ &\iff \int \frac{dy}{y} = \int -a(t)dt \\ &\iff \ln(y) = -A(t) + K \\ &\iff y = e^{-A(t)+K} \\ &\iff y = \lambda e^{-A(t)} \text{ avec } \lambda = e^K \end{aligned}$$

Deuxième partie

Annexe

$y : I \rightarrow E$ où E est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

$$\begin{aligned} (*) : \quad & y' + a(x)y = 0 \text{ et } y(x_0) = 0 \\ \iff & \forall x \in I, y(x) = - \int_{x_0}^x a(u)y(u) \, du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T : E^I &\longrightarrow E^I \\ y &\longmapsto \left(x \mapsto - \int_{x_0}^x a(u)y(u) \, du \right) \end{aligned}$$

donc $(*) \iff T(y) = y$