

## CHAPITRE 3

# Étude de fonctions

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 25 avril 2022

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Calculs de limites</b>	<b>2</b>
----------	---------------------------	----------

<b>II</b>	<b>Asymptotes, branches paraboliques et prolongement par continuité</b>	<b>4</b>
-----------	---	----------

Étudier une fonction c'est déterminer tous les éléments (tangentes, asymptotes) qui permettent d'obtenir l'allure de la courbe représentative de la fonction.

Première partie

Calculs de limites

**RAPPEL:**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions et  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

On ne connaît pas, à l'avance, les limites de

$$\begin{aligned}
 & \text{--- } f(x) - g(x) \text{ si } \begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty \\ g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty \end{cases} & (“\infty - \infty”) \\
 & \text{--- } \frac{f(x)}{g(x)} \text{ si } \begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \\ g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \end{cases} & (“\frac{0}{0}”) \\
 & \text{--- } \frac{f(x)}{g(x)} \text{ si } \begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \pm \infty \\ g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \pm \infty \end{cases} & (“\frac{\infty}{\infty}”) \\
 & \text{--- } f(x) \times g(x) \text{ si } \begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \\ g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \pm \infty \end{cases} & (“0 \times \infty”)
 \end{aligned}$$

**Proposition:**

Si  $\begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1 \\ g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \pm \infty \end{cases}$  alors, on ne sait pas à l'avance calculer  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)}$ .  $\square$

**Définition:** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions et  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  où  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ .

On dit que  $f$  et  $g$  sont équivalentes au voisinage de  $a$  (ou équivalentes en  $a$ ) s'il existe une fonction  $u$  telle que

$$\begin{cases} f = g \times u \\ u(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1 \end{cases}$$

On note alors  $f \underset{a}{\sim} g$  ou  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ .

**Proposition:** Un polynôme est équivalent en  $\pm\infty$  à son terme de plus haut degré.  $\blacksquare$

**Proposition:** Un polynôme est équivalent en 0 à son terme de plus bas degré.  $\blacksquare$

**REMARQUE:**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $a$  tel que

$$\forall x \in I, g(x) \neq 0$$

où  $I$  est un intervalle

- qui contient  $a$  si  $a \in \mathbb{R}$ ,
- dont une borne est  $a$  si  $a = \pm\infty$ .

Alors,

$$f \underset{a}{\sim} g \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a, x \neq a} 1.$$

## Deuxième partie

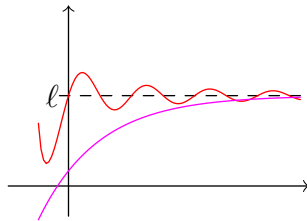
### Asymptotes, branches paraboliques et prolongement par continuité

## II Asymptotes, branches paraboliques et prolongement par continuité

Cas 1

Limite en  $+\infty$  :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}.$$



On dit que la droite d'équation  $y = \ell$  est une asymptote horizontale.

Cas 2

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \pm\infty \quad \text{dans ce cas, on cherche } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

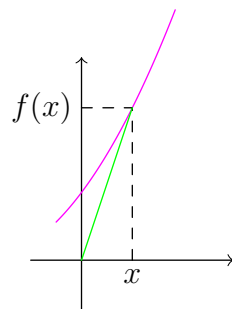
Sous cas 1

$$\frac{f(x)}{x} \text{ n'a pas de limite en } +\infty.$$

?

Sous cas 2

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

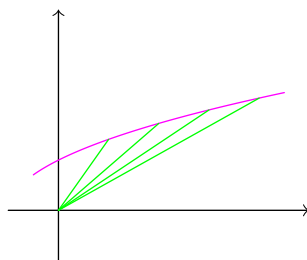


On dit que la courbe de  $f$  présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.

$\frac{f(x)}{x}$  est la pente de la droite verte.

Sous cas 3

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$



On dit que la courbe de  $f$  présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.

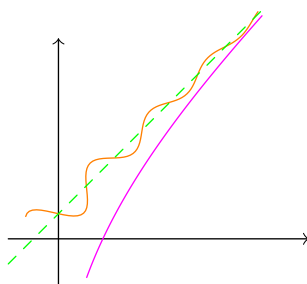
$\frac{f(x)}{x}$  est la pente de la droite verte.

Sous cas 4

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}^+. \text{ On cherche } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ell x).$$

Sous-sous cas 1

$$f(x) - \ell x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a \in \mathbb{R}$$

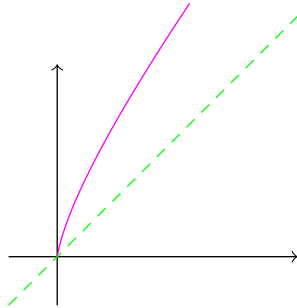


Asymptote oblique d'équation  $y = \ell x + a$ .

## II Asymptotes, branches paraboliques et prolongement par continuité

Sous-sous cas 2

$$f(x) - \ell x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \pm\infty$$



Branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation  $y = \ell x$ .

Sous-sous cas 2

$$f(x) - \ell x \text{ n'a pas de limite}$$

?

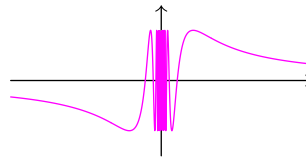
Limite en  $a \in \mathbb{R}$  :

On cherche  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

CAS 1

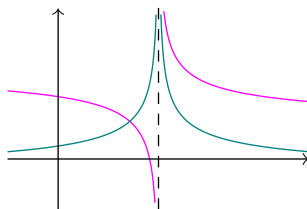
Pas de limite

ex  $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  en 0 :



CAS 2

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \pm\infty$$



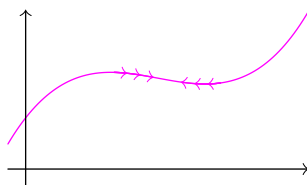
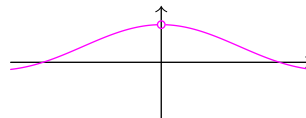
Asymptote verticale d'équation  $x = a$ .

CAS 3

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R}.$$

ex  $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$   $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ , dans ce cas, on pose

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



On pose  $f(a) = \ell$ . On dit que l'on a prolongé par continuité la fonction  $f$ .