

## CHAPITRE 20

# Fractions rationnelle

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 18 mai 2022

# TABLE DES MATIÈRES

I	Construction de $\mathbb{K}(X)$	2
II	Décomposition en éléments simples	8

Première partie

Construction de  $\mathbb{K}(X)$

**Proposition – Définition:** On définit la relation  $\sim$  sur  $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$  par

$$(P, Q) \sim (A, B) \iff PB = QA$$

Cette relation est une relation d'équivalence. On note  $(\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}))/\sim$ . Les éléments de  $\mathbb{K}(X)$  sont appelés fractions rationnelles.

On note  $\frac{P}{Q}$  la classe d'équivalence du couple  $(P, Q)$ .

*Preuve:*

On note  $E = \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ .

- Soit  $(P, Q) \in E$ .  $PQ = QP$  car  $\times$  est commutative dans  $\mathbb{K}[X]$ . Donc  $(P, Q) \sim (P, Q)$
- Soient  $(P, Q) \in E, (A, B) \in E$ . On suppose que  $(P, Q) \sim (A, B)$ . Donc  $PB = QA$ .  
Donc,  $(A, B) \sim (P, Q)$
- Soit  $((P, Q), (A, B), (C, D)) \in E^3$ . On suppose

$$\begin{cases} (P, Q) \sim (A, B) \\ (A, B) \sim (C, D) \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{cases} PB = QA \\ AD = BC \end{cases}$$

Donc

$$PBD = QAD = QBC$$

donc  $B(PD - QC) = 0$

Comme  $B \neq 0$  et comme  $\mathbb{K}[X]$  est intègre,

$$PD - QC = 0$$

et donc  $(P, Q) \sim (C, D)$

□

**Proposition:** Soient  $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$  et  $R \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ . Alors

$$\frac{PR}{QR} = \frac{P}{Q}$$

*Preuve:*

$$\begin{aligned} \frac{PR}{QR} = \frac{P}{Q} &\iff (PQ, QR) \sim (P, Q) \\ &\iff PRQ = QRP \end{aligned}$$

□

**Définition:** Soit  $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \setminus (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ . On dit que la fraction  $\frac{P}{Q}$  est sous forme irréductible si  $P \wedge Q = 1$ .

**Proposition – Définition:** Soient  $(P, Q) \sim (A, B)$ . Alors

$$\deg(P) - \deg(Q) = \deg(A) - \deg(B)$$

Le degré de  $\frac{P}{Q}$  est  $\deg(P) - \deg(Q)$ . On note ce “nombre”  $\deg\left(\frac{P}{Q}\right)$ .

*Preuve:*

On sait que  $PB = QA$  donc

$$\deg(P) + \deg(Q) = \deg(Q) + \deg(A)$$

et donc

$$\deg(P) - \deg(Q) = \deg(A) - \deg(B)$$

□

**Proposition – Définition:** Soient  $(P, Q) \sim (A, B)$  et  $(R, S) \sim (C, D)$ . Alors,  $(PR, QS) \sim (AC, BD)$ .

Le produit de  $\frac{P}{Q}$  avec  $\frac{R}{S}$  est  $\frac{PR}{QS}$

*Preuve:*

On sait que  $\begin{cases} PB = QA \\ RD = SC \end{cases}$ . D'où,

$$PBRD = QASC$$

et donc

$$(PR)(BD) = (QS)(AC)$$

donc

$$(PR, QS) \sim (AC, BD)$$

□

**Proposition – Définition:** Avec les notations précédentes,

$$(PS + RQ, QS) \sim (AD + BC, BD)$$

On définit la somme de  $\frac{P}{Q}$  et  $\frac{R}{S}$  par

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{PS + RQ}{QS}$$

*Preuve:*

On sait que  $\begin{cases} PB = QA \\ RD = SC \end{cases}$ . Donc,

$$\begin{aligned} (PS + RQ)BD &= PSBD + RQBD \\ &= QASD + SCQB \\ &= QS(AD + BC) \end{aligned}$$

□

**Théorème:**  $(\mathbb{K}(X), +, \times)$  est un corps.

*Preuve (partielle):* 1. “+” est associative : soient  $\left(\frac{P}{Q}, \frac{R}{S}, \frac{A}{B}\right) \in \mathbb{K}(X)^3$ .

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} + \left(\frac{R}{S} + \frac{A}{B}\right) &= \frac{P}{Q} + \frac{RB + AS}{SB} = \frac{PSB + QRB + QAS}{QSB} \\ &\parallel \\ \left(\frac{P}{Q} + \frac{R}{S}\right) + \frac{A}{B} &= \frac{PS + RQ}{QS} + \frac{A}{B} = \frac{PSB + RQB + AQS}{QSB} \end{aligned}$$

2. “+” est commutative  
3.  $\frac{0}{1}$  est neutre pour “+”

$$\frac{P}{Q} + \frac{0}{1} = \frac{P \times 1 + 0 \times Q}{Q \times 1} = \frac{P}{Q}$$

4. Soit  $\frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ .

$$\frac{P}{Q} + \frac{-P}{Q} = \frac{PQ - QP}{Q^2} = \frac{0}{Q^2} = \frac{0}{1}$$

5. “×” est associative  
6. “×” est commutative  
7.  $\frac{1}{1}$  est le neutre pour “×”  
8. Soient  $\left(\frac{P}{Q}, \frac{R}{S}, \frac{A}{B}\right) \in \mathbb{K}(X)^3$

$$\frac{P}{Q} \left(\frac{R}{S} + \frac{A}{B}\right) = \frac{P}{Q} \times \frac{RB + AS}{SB} = \frac{PRB + PAS}{QSB}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} + \frac{P}{Q} \times \frac{A}{B} &= \frac{PR}{QS} + \frac{PA}{QB} \\ &= \frac{PRQB + QSPA}{Q^2SB} \\ &= \frac{PRB + SPA}{QSB} \end{aligned}$$

9. Soit  $\frac{P}{Q} \neq \frac{0}{1}$  donc  $P \times 1 \neq Q \times 0$  donc  $P \neq 0$ .

$$\frac{P}{Q} \times \frac{Q}{P} = \frac{PQ}{PQ} = \frac{1}{1}$$

10.  $\frac{1}{1} \neq \frac{0}{1}$  car  $1 \times 1 \neq 0 \times 1$

□

**Proposition:**

$$\forall P, A \in \mathbb{K}[X], \forall Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}, \quad \frac{P}{Q} + \frac{A}{Q} = \frac{P+A}{Q}$$

**Proposition:**  $i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ P & \longmapsto & \frac{P}{1} \end{array}$  est un morphisme d'anneaux injectif.

*Preuve:*

Soient  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ .

$$i(P+Q) = \frac{P+Q}{1} = \frac{P}{1} + \frac{Q}{1} = i(P) + i(Q)$$

$$i(PQ) = \frac{PQ}{1} = \frac{PQ}{1 \times 1} = \frac{P}{1} \times \frac{Q}{1} = i(P) \times i(Q)$$

$$i(1) = \frac{1}{1}$$

Donc  $i$  est un morphisme d'anneaux.

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(i) &\iff i(P) = \frac{0}{1} \\ &\iff \frac{P}{1} = \frac{0}{1} \\ &\iff P \times 1 = 0 \times 1 \\ &\iff P = 0 \end{aligned}$$

donc  $i$  est injective.

□

**Définition:** Soient  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ . On pose

$$\lambda F = \frac{\lambda P}{Q} = \frac{\lambda}{1} \times \frac{P}{Q}$$

**Proposition:**  $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ P & \longmapsto & \frac{P}{1} \end{array}$  est linéaire. □

REMARQUE:

On peut identifier  $P \in \mathbb{K}[X]$  avec  $\frac{P}{1} \in \mathbb{K}(X)$  i.e. écrire  $P = \frac{P}{1}$  et alors  $\begin{cases} \mathbb{K}[X] \text{ est un sous-anneau de } \mathbb{K}(X) \\ \mathbb{K}[X] \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{K}(X) \end{cases}$   
De plus, les deux définitions de degré coïncident.

**Proposition:** Soit  $F, G \in \mathbb{K}(X)$ .

1.  $\deg(F + G) \leq \max(\deg F, \deg G)$   
Si  $\deg(F) \neq \deg(G)$  alors  $\deg(F + G) = \max(\deg F, \deg G)$  ;
2.  $\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G)$  ;
3. Si  $F \neq 0$ ,  $\deg\left(\frac{1}{F}\right) = -\deg(F)$ .

*Preuve:*

On pose  $F = \frac{A}{B}$  et  $G = \frac{P}{Q}$ .

1.  $F + G = \frac{AQ + PB}{BQ}$ . On suppose que  $\deg(F) \geq \deg(G)$  i.e.  $\deg A - \deg B \geq \deg P - \deg Q$ .

$$\deg(F + G) = \deg(AQ + PB) - \deg(BQ)$$

On a

$$\deg(AQ) = \deg(A) + \deg(Q) \geq \deg(P) + \deg(B) = \deg(PB).$$

D'où

$$\deg(F + G) \leq \deg(AQ) - \deg(BQ) = \deg\left(\frac{AQ}{BQ}\right) = \deg(F).$$

Si  $\deg(F) > \deg(G)$ , alors  $\deg(AQ) > \deg(PB)$  et donc

$$\deg(F + G) = \deg(AQ) - \deg(BQ) = \deg(F).$$

2.

$$\begin{aligned} \deg(FG) &= \deg\left(\frac{AP}{BQ}\right) \\ &= \deg(AP) - \deg(BQ) \\ &= \deg(A) + \deg(P) - \deg(B) - \deg(Q) \\ &= \deg F + \deg G. \end{aligned}$$

3.  $\deg\left(\frac{1}{F}\right) = \deg(1) - \deg(F) = -\deg(F)$

□



## Deuxième partie

# Décomposition en éléments simples

## Définition

**Lemme:**

$$\forall F \in \mathbb{K}(X), \exists!(E, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X), \begin{cases} F = E + G \\ \deg(G) < 0 \end{cases}$$

On dit que  $E$  est la partie entière de  $F$ .*Preuve:*On pose  $F = \frac{P}{Q}$  avec  $P \in \mathbb{K}[X], Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ .ANALYSE Soit  $E \in \mathbb{K}[X]$  et  $G \in \mathbb{K}(X)$  tels que

$$F = E + G \quad \deg(G) < 0.$$

On pose  $G = \frac{A}{Q}$  avec  $A \in \mathbb{K}[X]$ .

$$\begin{aligned} F = E + G &\iff \frac{P}{Q} = E + \frac{A}{Q} \\ &\iff P = EQ + A. \end{aligned}$$

 $\deg G < 0, \deg A < \deg Q$ .Don  $E$  est le quotient de la division euclidienne de  $P$  par  $Q$  et  $A$  sont reste.SYNTHÈSE Soient  $E$  le quotient et  $A$  le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $Q$ .

On a alors

$$\begin{cases} P = EQ + A \\ \deg(A) < \deg(Q) \end{cases}$$

et donc

$$F = E + \frac{A}{Q} \quad \deg\left(\frac{A}{Q}\right) < 0.$$

□

EXEMPLE:

$$F = \frac{X^3 + X - 1}{X^2 + 2}, \quad \deg F = 1.$$

$$\begin{array}{r|l} X^3 + X - 1 & X^2 + 2 \\ - & \\ \hline X^3 + 2X & X \\ \hline -X - 1 & \end{array}$$

Donc,

$$F = \frac{X(X^2 + 2) - (X + 1)}{X^2 + 2} = X - \frac{X + 1}{X^2 + 2}.$$

**Lemme:** Soit  $F = \frac{P}{AB}$  avec

$$\begin{cases} (P, A, B) \in \mathbb{K}[X]^3; \\ A \neq 0; B \neq 0; \\ A \wedge B = 1; \deg F < 0. \end{cases}$$

Alors,

$$\exists!(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2, \begin{cases} F = \frac{U}{A} + \frac{V}{B} \\ \deg\left(\frac{U}{A}\right) < 0 \text{ et } \deg\left(\frac{V}{B}\right) < 0 \end{cases}.$$

*Preuve:* ANALYSE On suppose que

$$\begin{cases} F = \frac{U}{A} + \frac{V}{B} \\ U \in \mathbb{K}[X], \deg U < \deg A \\ V \in \mathbb{K}[X], \deg V < \deg B. \end{cases}$$

D'où

$$\frac{P}{AB} = \frac{UB + VA}{AB}$$

et donc  $P = UB + VA$ . D'après le théorème de Bézout, il existe  $(R, S) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que

$$RB + SA = P.$$

On a alors

$$0 = B(R - U) + A(S - V)$$

donc

$$A(S - V) = B(U - R)$$

donc

$$A \mid B(U - R) \quad \text{dans } \mathbb{K}[X].$$

D'après le théorème de Gauss,

$$A \mid U - R$$

Donc  $U - R = AT$  avec  $T \in \mathbb{K}[X]$  donc

$$A(S - V) = BAT$$

donc

$$S - V = BT$$

donc

$$\begin{cases} R = -AT + U \\ S = BT + V \end{cases}.$$

On a

$$\begin{cases} S = BT + V \\ \deg V < \deg B \end{cases}$$

donc  $V$  est le reste de la division euclidienne de  $S$  par  $B$  et  $U$  est le reste de la division euclidienne de  $R$  par  $A$ .

SYNTHÈSE Soit  $(R, S) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que

$$P = RB + SA.$$

Soit  $V$  le reste de la division euclidienne de  $S$  par  $B$ .

$$\begin{cases} S = BT + V, T \in \mathbb{K}[X] \\ \deg V < \deg B \end{cases}$$

D'où,

$$\frac{P}{AB} = \frac{R}{A} + T + \frac{V}{B} = \frac{R + AT}{A} + \frac{V}{B}$$

et

$$\deg\left(\frac{V}{B}\right) = \deg(V) - \deg(B) < 0.$$

Si  $\deg\left(\frac{R+AT}{A}\right) \geq 0$ , alors

$$\deg\left(\frac{R+AT}{A}\right) > \deg\left(\frac{V}{B}\right)$$

et alors

$$\deg\left(\frac{P}{AB}\right) = \deg\left(\frac{R+AT}{A}\right) \geq 0.$$

Or,

$$\deg\left(\frac{P}{AB}\right) < 0.$$

Donc

$$\deg\left(\frac{R+AT}{A}\right) < 0.$$

On pose  $U = R + AT$ . On a bien

$$\frac{P}{AB} = \frac{U}{A} + \frac{V}{B} \text{ avec } \deg\left(\frac{U}{A}\right) < 0 \text{ et } \deg\left(\frac{V}{B}\right) < 0.$$

□

**Lemme:** Soit  $H \in \mathbb{K}[X]$  irréductible,  $n \in \mathbb{N}_*$ ,  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $F = \frac{P}{H^n}$  et  $\deg F < 0$ .  
Alors,

$$\begin{cases} \exists!(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2, F = \frac{U}{H^n} + \frac{V}{H^{n-1}}; \\ \deg U < \deg H; \\ \deg\left(\frac{V}{H^{n-1}}\right) < 0. \end{cases}$$

*Preuve:* ANALYSE  $F = \frac{U}{H^n} + \frac{V}{H^{n-1}}$  avec

$$\begin{cases} \deg U < \deg H, \\ U \in \mathbb{K}[X], V \in \mathbb{K}[X], \\ \deg\left(\frac{V}{H^{n-1}}\right) < 0. \end{cases}$$

D'où

$$P = U + VH, \deg U < \deg H.$$

Donc  $V$  est le quotient et  $U$  le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $H$ .

SYNTHÈSE Soient  $V$  et  $U$  le quotient et le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $H$  :

$$\begin{cases} P = U + VH \\ \deg U < \deg H. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} F &= \frac{U}{H^n} + \frac{V}{H^{n-1}} \\ \deg U &< \deg H \end{aligned}$$

Si  $\deg\left(\frac{V}{H^{n-1}}\right) \geq 0$ , alors  $\deg F = \deg\left(\frac{V}{H^{n-1}}\right) \geq 0$  : une contradiction. Donc  $\deg\left(\frac{V}{H^{n-1}}\right) < 0$ .

□

**Théorème** (Théorème de décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{C}(\mathbf{X})$ ): Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$ ,  $F = \frac{P}{Q}$  la forme irréductible de  $F$ . On note  $(z_1, \dots, z_p)$  les racines complexes de  $Q$  et  $(\mu_1, \dots, \mu_p)$  leur multiplicité.

Alors,

$$\exists! (E, a_{1,1}, \dots, a_{1,\mu_1}, a_{2,1}, \dots, a_{2,\mu_2}, \dots, a_{p,1}, \dots, a_{p,\mu_p}) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}^{\deg Q},$$

$$F = E + \sum_{i=1}^p \left( \sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{a_{i,j}}{(X - z_i)^j} \right).$$

EXEMPLE:

$$F = \frac{X^7 - 1}{X^5 + 2X^3 + X} \in \mathbb{C}(X)$$

$$\begin{array}{r|l} & X^7 - 1 \\ \hline - & X^7 + 2X^5 + X^3 \\ \hline & -2X^5 - X^3 - 1 \\ - & -2X^5 - 4X^3 - 2X \\ \hline & 3X^3 + 2X - 1 \end{array}$$

$$F = (X^2 - 2) + \frac{3X^3 + 2X - 1}{X^5 + 2X^3 + X}$$

$$\begin{aligned} X^5 + 2X^3 + X &= X(X^4 + 2X^2 + 1) \\ &= X(X^2 + 1)^2 \\ &= X(X - i)^2(X + i)^2 \end{aligned}$$

D'après le 2<sup>ème</sup> lemme,

$$\frac{3X^3 + 2X - 1}{X^5 + 2X^3 + X} = \frac{a}{X} + \frac{bX + c}{(X - i)^2}$$

D'après le 3<sup>ème</sup> lemme,

$$\begin{aligned} \frac{bX + c}{(X - i)^2} &= \frac{f}{(X - i)^2} + \frac{g}{X - i} \\ \frac{dX + e}{(X + i)^2} &= \frac{h}{(X + i)^2} + \frac{h}{X + i} \end{aligned}$$

$$F = (X^2 - 2) + \frac{a}{X} + \frac{f}{(X - i)^2} + \frac{g}{X - i} + \frac{h}{(X + i)^2} + \frac{k}{X + i}.$$

On multiplie par  $X$  :

$$\frac{X^7 - 1}{X^4 + 2X^2 + 1} = a + X \left( X^2 - 2 + \frac{f}{(X - i)^2} + \frac{g}{X - i} + \frac{h}{(X + i)^2} + \frac{k}{X + i} \right).$$

En remplaçant  $X$  par 0, on obtient

$$a = \frac{-1}{1} = -1.$$

On multiplie par  $(X - i)^2$  et on remplace  $X$  par  $i$  :

$$\frac{3i^2 + 2i - 1}{i(2i)^2} = f.$$

Donc,

$$f = \frac{-i - 1}{-4i} = \frac{1}{4} - \frac{i}{4}$$

De même,

$$h = \frac{3(-i)^3 + 2(-i) - 1}{-i(-2i)^2} = \bar{f} = \frac{1}{4} + \frac{i}{4}$$

$$\frac{3X^2 + 2X - 1}{X^5 + 2X^3} + \frac{1}{X} - \left(\frac{1}{4} - \frac{i}{4}\right) \frac{1}{(X-i)^2} - \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{4}\right) \frac{1}{(X+i)^2} = \frac{g}{X-i} + \frac{h}{X+i}$$

$$\begin{aligned} \frac{g}{X-i} + \frac{h}{X+i} &= \frac{3X^3 + 2X - 1 + X^4 + 2X^2 + 1 + X(X+i)^2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{i}{4}\right) - X(X-i)^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{i}{4}\right)}{X^5 + 2X^3 + X} \\ &= \frac{12X^3 + 8X - 4 + 4X^4 + 8X^2 + 4 + X^3(-1+i) + (1-i)X - X^3(1+i) - 2X^2(1-i) + X(1+i)}{4(X^5 + 2X^3 + X)} \\ &= \frac{4X^4 + 10X^3 + 8X^2 + 10X}{4(X^5 + 2X^3 + X)} \\ &= \frac{2X^3 + 5X^2 + 2X + 5}{2(X^4 + 2X^2 + 1)} \\ &= \frac{(X-i)(X+i)(2X+5)}{2(X-i)^2(X+i)^2} \\ &= \frac{2X+5}{2(X-i)(X+i)} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{cases} g = \frac{2i+5}{2 \times 2i} = \frac{(2i+5)i}{-4} = \frac{2-5i}{4} \\ h = \frac{2(-i)+5}{2(-2i)} = \frac{2+5i}{4} \end{cases}$$

*Preuve:*

On suppose  $\frac{P}{Q} \notin \mathbb{C}[X]$ . On peut supposer  $Q$  unitaire.

EXISTENCE D'après le lemme 1, il existe  $E \in \mathbb{C}[X]$ ,  $G \in \mathbb{C}(X)$  tels que

$$\begin{cases} \frac{P}{Q} = E + G \\ \deg(G) < 0 \end{cases}$$

Soit  $\frac{A}{B}$  la forme irréductible de  $G$  avec  $B$  unitaire ( $A \wedge B = 1$  et  $A \neq 0$ ).

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{A}{B}$$

donc

$$PB = EBQ + AQ \quad (*)$$

donc

$$AQ = PB - EBQ$$

donc

$$A \mid B(P - EQ)$$

D'après le théorème de Gauss,

$$A \mid P - EQ$$

Soit  $R \in \mathbb{C}[X]$  tel que

$$AR = P - EQ$$

D'où

$$\frac{AR}{Q} = \frac{P}{Q} - E = \frac{A}{B}$$

D'où

$$\frac{R}{Q} = \frac{1}{B}$$

donc  $B \mid Q$ .

De (\*), on a aussi

$$P \mid Q(EB + A)$$

Or,  $P \wedge Q = 1$ . Donc

$$P \mid EB + A$$

Soit  $S \in \mathbb{C}[X]$  tel que

$$PS = EB + A$$

Donc

$$\frac{PS}{B} = E + \frac{A}{B} = \frac{P}{Q}$$

Donc

$$\frac{S}{B} = \frac{1}{Q}$$

et donc  $Q \mid B$

Donc  $Q = B$  (car ils sont unitaires).

Donc  $G = \frac{A}{Q}$ .

Or,

$$Q = \prod_{j=1}^p (X - z_j)^{\mu_j}$$

$$\forall j \neq k, (X - z_j)^{\mu_j} \wedge (X - z_k)^{\mu_k} = 1$$



D'après le lemme 2, il existe  $(A_1, \dots, A_p) \in \mathbb{C}[X]^p$  tel que

$$\begin{cases} \frac{A}{Q} = \sum_{j=1}^p \frac{A_j}{(X - z_j)^{\mu_j}} \\ \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \deg(A_j) < \mu_j \end{cases}$$

Soit  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . D'après le lemme 3,

$$\frac{A_j}{(X - z_j)^{\mu_j}} = \frac{a_{j,\mu_j}}{(X - z_j)^{\mu_j}} + \frac{A_{j,1}}{(X - z_j)^{\mu_j-1}}$$

avec

$$\begin{cases} a_{j,\mu_j} \in \mathbb{C} \\ A_{j,1} \in \mathbb{C}_{\mu_j-2}[X] \end{cases}$$

En itérant ce procédé, on trouve  $(a_{j,\mu_j}, \dots, a_{j,1}) \in \mathbb{C}^{\mu_j}$  tel que

$$\frac{A_j}{(X - z_j)^{\mu_j}} = \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{j,k}}{(X - z_j)^k}$$

D'où

$$\frac{P}{Q} = E + \underbrace{\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{j,k}}{(X - z_j)^k}}_{\deg(\quad) < 0}$$

UNICITÉ Soit  $E_1 \in \mathbb{C}[X]$  et  $(b_{j,k})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq k \leq \mu_j}} \in \mathbb{C}^{\sum_{j=1}^p \mu_j}$  tels que

$$\frac{P}{Q} = E_1 + \underbrace{\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{b_{j,k}}{(X - z_j)^k}}_{\deg(\quad) < 0}$$

D'après le lemme 1,

$$E = E_1 \text{ et } \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{j,k}}{(X - z_j)^k} = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{b_{j,k}}{(X - z_j)^k}$$

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket,$$

$$\sum_{k=0}^{\mu_j} \frac{b_{j,k}}{(X - z_j)^k} = \frac{\sum_{k=1}^{\mu_j} b_{j,k} (X - z_j)^{\mu_j-k}}{(X - z_j)^{\mu_j}}$$

||

$$\sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{j,k}}{(X - z_j)^k} = \frac{\sum_{k=1}^{\mu_j} a_{j,k} (X - z_j)^{\mu_j-k}}{(X - z_j)^{\mu_j}}$$

Donc,

$$\sum_{k=1}^{\mu_j} a_{j,k} (X - z_j)^k = \sum_{k=1}^{\mu_j} b_{j,k} (X - z_j)^k$$

Comme  $(X - z_j, (X - z_j)^2, \dots, (X - z_j)^{\mu_j})$  est libre dans  $\mathbb{C}[X]$ ,

$$\forall k \in \llbracket 1, \mu_j \rrbracket, b_{j,k} = a_{j,k}$$

□

**Théorème** (Théorème de décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{R}(X)$ ): Soit  $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ ,  $P \wedge Q = 1$ ,  $Q$  unitaire,  $Q \notin \{0, 1\}$ . On pose

$$Q = \prod_{i=1}^p (X - a_i)^{\mu_i} \prod_{k=1}^q (X^2 + \alpha_k X + \beta_k)^{\nu_k}$$

avec

$$\begin{cases} p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, \\ (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_q) \in \mathbb{R}^{2q} \\ (\mu_1, \dots, \mu_p, \nu_1, \dots, \nu_q) \in \mathbb{N}^{p+q} \\ \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \alpha_k^2 - 4\beta_k < 0 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} & \exists! (E, \gamma_{1,1}, \dots, \gamma_{1,\mu_1}, \gamma_{2,1}, \dots, \gamma_{2,\mu_2}, \dots, \gamma_{p,1}, \dots, \gamma_{p,\mu_p}, \\ & \delta_{1,1}, \dots, \delta_{1,\nu_1}, \delta_{2,1}, \dots, \delta_{2,\nu_2}, \dots, \delta_{q,1}, \dots, \delta_{q,\nu_q}, \\ & \varepsilon_{1,1}, \dots, \varepsilon_{1,\nu_1}, \varepsilon_{2,1}, \dots, \varepsilon_{2,\nu_2}, \dots, \varepsilon_{q,1}, \dots, \varepsilon_{q,\nu_q}) \\ & \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}^{\mu_1 + \dots + \mu_p} \times \mathbb{R}^{2(\nu_1 + \dots + \nu_q)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} &= E + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{\gamma_{i,j}}{(X - a_i)^j} \\ &+ \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^{\nu_k} \frac{\delta_{k,j} X + \varepsilon_{k,j}}{(X^2 + \alpha_k X + \beta_k)^j} \end{aligned}$$

□

**Définition:** Soit  $F \in \mathbb{C}(X)$ . Soient  $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$  tels que  $\begin{cases} P \wedge Q = 1 \\ F = \frac{P}{Q} \end{cases}$ .

Les racines de  $P$  sont appelées zéros de  $F$   
Les racines de  $Q$  sont appelées pôles de  $F$

**Proposition:** Soit  $F \in \mathbb{C}(X)$  et  $z \in \mathbb{C}$  un pôle simple de  $F$ . Le coefficient devant  $\frac{1}{X - z}$  dans la décomposition en éléments simples de  $F$  est  $\frac{P(z)}{Q'(z)}$ .

*Preuve:*

Soit  $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$  tels que

$$\begin{cases} F = \frac{P}{Q} \\ P \wedge Q = 1 \\ Q \text{ unitaire} \end{cases}$$

On pose

$$Q = (X - z) \prod_{i=1}^q (X - z_i)^{\mu_i}$$

où  $z_1, \dots, z_q$  sont les racines distinctes de  $z$  du polynôme  $Q$ . Donc,

$$\frac{P}{Q} = F = \frac{a}{X - z} + \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{b_{i,k}}{(X - z_i)^k}$$

avec  $a, (b_{i,k})_{1 \leq i \leq q}$  des nombres complexes.

On multiplie par  $X - z$ .

$$\frac{P}{\prod_{i=1}^q (X - z_i)^{\mu_i}} = a + (X - z) \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{b_{i,k}}{(X - z_i)^k}$$

On remplace  $X$  par  $z$ .

$$\frac{P(z)}{\prod_{i=1}^q (z - z_i)^{\mu_i}} = a$$

Or,

$$Q = (X - z) \prod_{i=1}^q (X - z_i)^{\mu_i}$$

D'où

$$Q' = \prod_{i=1}^q (X - z_i)^{\mu_i} + (X - z) \left( \prod_{i=1}^q (X - z_i)^{\mu_i} \right)'$$

Donc

$$Q'(z) = \prod_{i=1}^q (z - z_i)^{\mu_i}$$

Donc

$$a = \frac{P(z)}{Q'(z)}$$

□

**Proposition:** Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  avec  $\deg(P) \geq 1$ ,  $(z_1, \dots, z_p)$  les racines de  $P$ ,  $\mu_1, \dots, \mu_p$  leur multiplicité. Alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^p \frac{\mu_i}{X - z_i}$$

*Preuve:*

On pose

$$P = \alpha \prod_{i=1}^p (X - z_i)^{\mu_i}$$

Donc

$$P' = \alpha \sum_{i=1}^p \left( \prod_{j \neq i} (X - z_j)^{\mu_j} \right) \mu_i (X - z_i)^{\mu_i - 1}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 \frac{P'}{P} &= \frac{\cancel{\alpha}^{\sum_{i=1}^p \mu_i} (X - z_i)^{\mu_i - 1} \prod_{j \neq i} (X - z_j)^{\mu_j}}{\cancel{\alpha}^{\prod_{i=1}^p} (X - z_i)^{\mu_i}} \\
 &= \sum_{i=1}^p \mu_i \frac{(X - z_i)^{\mu_i - 1} \prod_{j \neq i} (X - z_j)^{\mu_j}}{\prod_{j=1}^p (X - z_j)^{\mu_j}} \\
 &= \sum_{i=1}^p \mu_i \frac{1}{X - z_i}
 \end{aligned}$$

□

REMARQUE:

Il existe un “truc” pour retenir cette formule :

$$\frac{P'}{P} = \underbrace{\ln(P)'}_{\text{n'existe pas !}} = \left( \ln \left( \alpha \prod_{i=1}^p (X - z_i)^{\mu_i} \right) \right)' = \left( \sum_{i=1}^p \mu_i \ln(X - z_i) \right)' = \sum_{i=1}^p \mu_i \frac{1}{X - z_i}$$