

CHAPITRE 19

A,

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

I	Premières propriétés	2
II	Noyau et image	5
III	Théorème du rang	7
IV	Formes linéaires	10
V	Projections et symétries	14

Première partie

Premières propriétés

Définition: Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$. On dit que f est linéaire si

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Définition: On dit qu'un problème est linéaire s'il se présente sous la forme :

$$\text{Résoudre } \varphi(x) = y$$

où l'inconnue est $x \in E$, y est un paramètre de F avec $\varphi : E \rightarrow F$ linéaire.

REMARQUE (Notation):

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est $\mathcal{L}(E, F)$.

Si $F = E$, alors on note plus simplement $\mathcal{L}(E)$ à la place de $\mathcal{L}(E, E)$.

Les éléments de $\mathcal{L}(E)$ sont appelés endomorphismes (linéaires) de E .

Proposition: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$. ■

Proposition: $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E . ■

Proposition: $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une \mathbb{K} -algèbre (non commutative en général). ■

Corollaire: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On peut former $P(u) \in \mathcal{L}(E)$: on dit que $P(u)$ est un polynôme d'endomorphisme.

Proposition: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ bijective. Alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. ■

REMARQUE (Notation):

On note $\text{GL}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E bijectifs, $\text{GL}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F bijectives.

Les éléments de $\text{GL}(E)$ sont appelés automorphismes (linéaires) de E .

Corollaire: $\text{GL}(E)$ est un sous-groupe de $(S(E), \circ)$

Définition: $\text{GL}(E)$ est dit “ le groupe linéaire de E ”.

Deuxième partie

Noyau et image

Proposition: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, U un sous-espace vectoriel de E et V un sous-espace vectoriel de F .

1. $f(U)$ est un sous-espace vectoriel de F .
2. $f^{-1}(V)$ est un sous-espace vectoriel de E .

■

Corollaire: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. $\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid f(x) = 0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E .
2. $\text{Im}(f) = f(E) = \{f(u) \mid u \in E\}$ est un sous-espace vectoriel de F .

□

REMARQUE (Rappel):
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$

$$\begin{aligned} f \text{ injective} &\iff \text{Ker}(f) = \{0_E\} \\ f \text{ surjective} &\iff \text{Im}(f) = F \end{aligned}$$

Troisième partie

Théorème du rang

Dans ce paragraphe, E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

Proposition: Soit $f : E \rightarrow F$ un isomorphisme (i.e. une application linéaire bijective). Alors, $\dim(E) = \dim(F)$

■

La première partie de la preuve précédente justifie le résultat suivant.

Proposition: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ injective. $\mathcal{L} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E . Alors $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est une famille libre de F . En particulier, $\dim(F) \geq \dim(E)$. \square

La deuxième partie de la preuve prouve :

Proposition: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ surjective et $\mathcal{G} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille génératrice de E . Alors $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est une famille génératrice de F . En particulier,

$$\dim(F) \leq \dim(E)$$

□

Théorème (Théorème du rang): Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$

■

REMARQUE:

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E .

CAS 1 $F = \{0_E\}$, alors E est un supplémentaire de F .

CAS 2 $F \neq \{0_E\}$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F . Alors \mathcal{B} est une famille libre de E . On complète \mathcal{B} en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E . On pose $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$. On démontre que

$$F \oplus G = E$$

Corollaire: Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de même dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\begin{aligned} f \text{ injective} &\iff f \text{ surjective} \\ &\iff f \text{ bijective} \end{aligned}$$

■

Corollaire: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. Alors,

$$f \in \text{GL}(E) \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$

□

REMARQUE:

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

$$\dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

Définition: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Le rang de f est

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$$

Quatrième partie

Formes linéaires

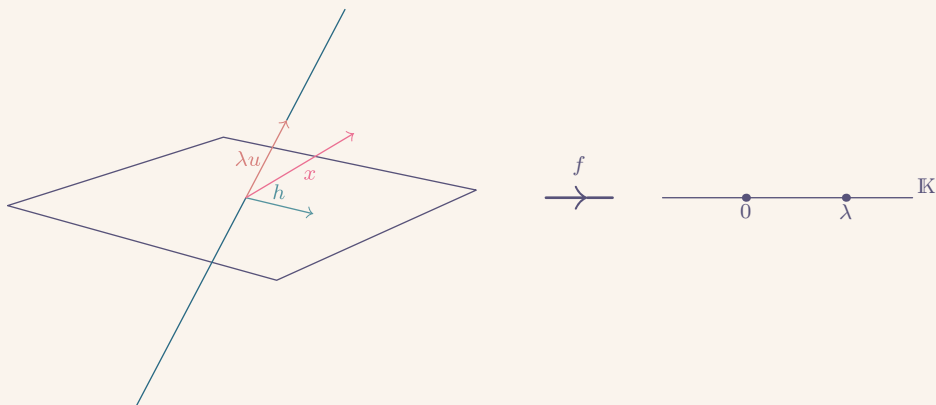
Définition: Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans \mathbb{K} . L'ensemble des formes linéaires est noté $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. E^* est appelé espace dual de E .

Proposition: Toute forme linéaire est soit nulle, soit surjective. ■

Proposition: Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et $f \in E^* \setminus \{0\}$. Alors $\text{Ker}(f)$ est de dimension $n - 1$. ■

Proposition: Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et H un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$. Alors,

$$\exists f \in E^*, \text{Ker}(f) = H$$



Proposition: Avec les notations précédentes, $\{f \in E^* \mid \text{Ker}(f) = H\}$ est une droite de E^* privée de l'application nulle. En d'autres termes, les équations de H sont 2 à 2 proportionnelles. ■

Définition: Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E . On dit que H est un hyperplan de E s'il existe une droite D de E telle que

$$H \oplus D = E$$

En reprenant les démonstrations précédentes, on a encore les résultats suivants :

Proposition: Soit H un hyperplan de E . Alors, $\{f \in E^* \mid \text{Ker}(f) = H\}$ est une droite de E^* privée de l'application nulle. \square

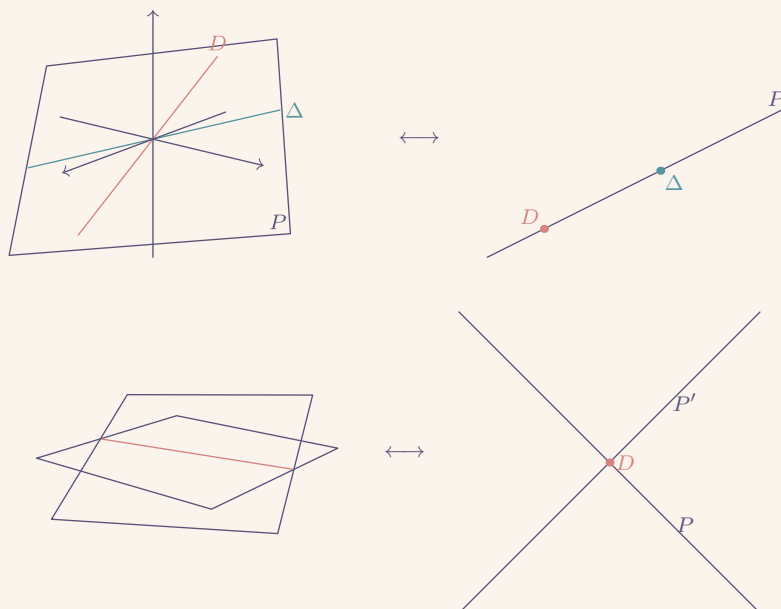
Proposition: Soit $f \in E^*$ non nulle. Alors $\text{Ker}(f)$ est un hyperplan de E . ■

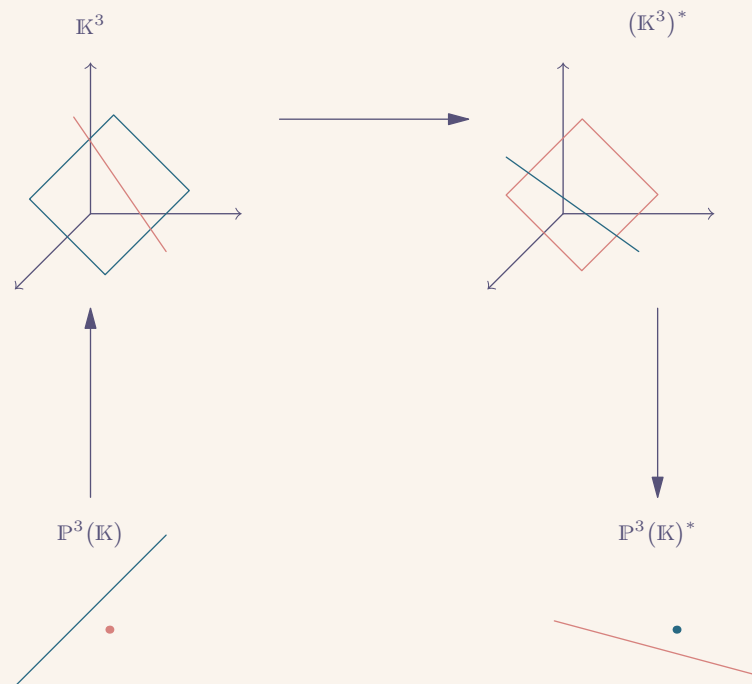
HORS-PROGRAMME

$$\mathbb{P}^3(\mathbb{K}) = \{D \setminus \{0\} \mid D \text{ droite vectorielle de } \mathbb{K}^3\}$$

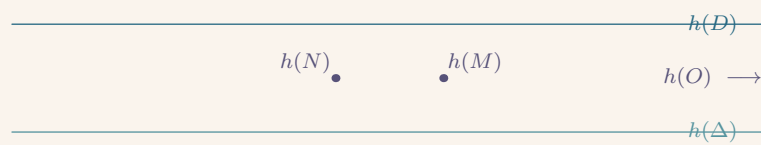
Une droite projective de $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ est un plan vectoriel de \mathbb{K}^3 privé de 0.

À faire : schéma A





À faire : schémas B et C



Cinquième partie

Projections et symétries

Définition: Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces de E supplémentaires :

$$E = F \oplus G$$

Soit $x \in E$.

$$\exists!(a, b) \in F \times G, x = a + b$$

Le vecteur a est appelé projeté de x sur F parallèlement à G .

Le vecteur b est appelé projeté de x sur G parallèlement à F .

La projection sur F parallèlement à G est l'application qui à $x \in E$ associe son projeté sur F parallèlement à G .

Proposition: Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires et p la projection sur F parallèlement à G .

1. $p \in \mathcal{L}(E)$
2. $p|_F = \text{id}_F$ et $p|_G = 0$
3. $p \circ p = p$
4. $\text{id}_E - p$ est la projection sur G parallèlement à F .

■

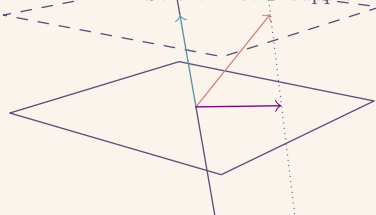
Définition: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est un projecteur si $f \circ f = f$

Proposition: Soit f un projecteur de E . Alors f est la projection sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\text{Ker}(f)$. En particulier,

$$\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = E$$

■

Définition: Soient F et G supplémentaires dans E : $E = F \oplus G$



Soit $x \in E$. On décompose x :

$$x = a + b \text{ avec } \begin{cases} a \in F \\ b \in G \end{cases}$$

et on forme

$$y = a - b$$

On dit que y est le symétrique de x par rapport à F parallèlement à G

La symétrie par rapport à F parallèlement à G est l'application qui à tout $x \in E$ associe son symétrique parallèlement à G par rapport à F .

Proposition: Soient F et G supplémentaires dans E , s la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

1. $s \in \mathcal{L}(E)$
2. $s|_F = \text{id}_F$ et $s|_G = -\text{id}_G$
3. $s \circ s = \text{id}_E$

■

Définition: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est involutive si $f \circ f = \text{id}_E$.

Proposition: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ involutif. Alors f est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(f - \text{id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(f + \text{id}_E)$. En particulier,

$$\text{Ker}(f - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f + \text{id}_E) = E$$

■

