Chapitre 8

Ensemble relations et lois de compo

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 21 février 2022

Table des matières

Première partie

Théorie naïve des ensembles

Definition

Un ensemble est une collection finie ou infinie d'objets de même nature ou non. L'ordre de ces objets n'a pas d'importance.

Exemple

1. $\{1, x \mapsto x^2, \{1\}\}$ est un ensemble : ses éléments dont l'entier 1, la fonction $x \mapsto x^2$ et un ensemble contenant uniquement 1 (un singleton).
2. $\mathbb{N}$ est un ensemble infini

Remarque *Notation*
Soit E un ensemble et x un objet de E.
On écrit $x \in E$ ou bien $x \ni E$.

Remarque ⚠ *Paradoxe*
On note Ω l'ensemble de tous les ensembles. Alors, $\Omega \in \Omega$.
Ce n'est pas le cas de tous les ensembles :

$$\mathbb{N} \notin \mathbb{N} \text{ car } \mathbb{N} \text{ n'est pas un entier}$$

On distingue donc 2 types d'ensembles :
- ceux qui vérifient $E \notin E$, on dit qu'ils sont ordinaires
- ceux qui vérifient $E \in E$, on dit qu'ils sont extra-ordinaires

On note O l'ensemble de tous les ensembles ordinaires.
- Supposons O ordinaire. Alors, $O \notin O$
  Or, O est ordinaire et donc $O \in O$ $\lightning$
- Supposons O extra-ordinaire.
  Alors $O \in O$ et donc O ordinaire $\lightning$

C'est un paradoxe

Pour éviter ce type de paradoxe, on a donné une définition axiomatique qui explique quelles sont les opérations permettant de combiner des ensembles pour en faire un autre.

Definition

Soit E un ensemble et F un autre ensemble. On dit que E et F sont égaux (noté $E = F$) si E et F contiennent les mêmes objets.

Exemple

1. $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{3, 2, 1, 2\}$
   On a bien $E = F$.

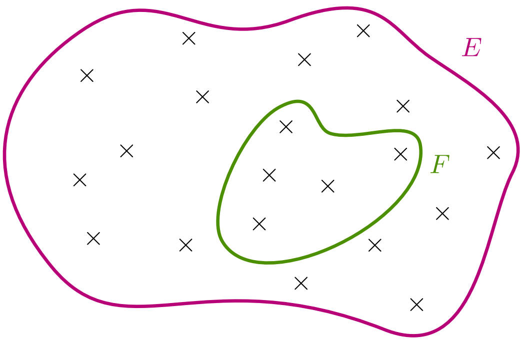
2. $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$ car $\begin{cases} -1 \in \mathbb{Z} \\ -1 \notin \mathbb{N} \end{cases}$
3. $E = \{0, \{0\}\} \neq \{0\} = F$
   car $\begin{cases} \{0\} \in E \\ \{0\} \notin F \end{cases}$
   mais, $F \in E$

Definition

L'ensemble <u>vide</u>, noté $\varnothing$ est le seul ensemble à n'avoir aucun élément.

Definition

Soient E et F deux ensembles. On dit que F est <u>inclus</u> dans E, noté $F \subset E$ ou $E \supset F$ si tous les éléments de F sont aussi des éléments de E.



$\forall x \in F, x \in E$

Proposition

Pour tout ensemble E, $\varnothing \subset E$

Preuve *par l'absurde*
Si $\varnothing \not\subset E$ alors $\exists x \in \varnothing, x \notin E$: une contradiction ↯

□

Exemple

1. $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{1, 3\}$
   On a $F \subset E$ mais pas $E \subset F$ car $\begin{cases} 2 \in E \\ 2 \notin F \end{cases}$
2. $F = \{0\}$ et $E = \{0, \{0\}\}$

   — $F \in E$ car $\{0\} \in E$
   — $F \subset E$ car $0 \in E$

3. $E = \{\{0\}\}\,; F = \{0\}$
   — $F \not\subset E$ car $0 \notin E$
   — $F \in E$
4. $E = \{\{\{0\}\}\}; F = \{0\}$
   — $F \notin E$
   — $F \not\subset E$
   — $\varnothing \subset F$
   — $\varnothing \subset E$

Definition

Soit E un ensemble. On peut former l'ensemble de toutes les parties de E (une partie de E est un ensemble F avec $F \subset E$). On le note $\mathscr{P}(E)$

$$A \in \mathscr{P}(E) \iff A \subset E$$

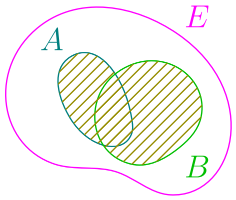
Exemple

1. $E = \{42\}$
   Les sous-ensembles de E sont $\varnothing$ et $\{42\} = E$ donc
   $$\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{42\}\}$$
2. $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$
3. $E = \{0, 1\}$ donc $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$
4. $E = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ donc $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$
5. $E = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

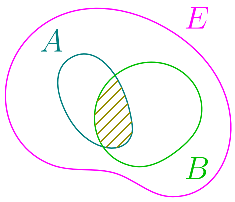
$$\begin{aligned}\mathscr{P}(\mathscr{P}(E)) &= \mathscr{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, E) \\ &= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}, \{E\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}, \{\varnothing, E\}, \{\{\varnothing\}, \\ &\quad \{\{\varnothing\}\}\}, \{\{\varnothing\}, E\}, \{\{\{\varnothing\}\}, E\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, E\}, \\ &\quad \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}, E\}, \{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, E\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, E\}\}\end{aligned}$$

Definition

Soit E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$

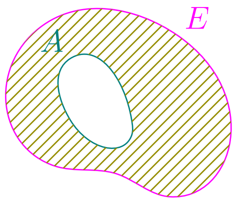
1. 

   La réunion de A et B est
   $$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

2. 

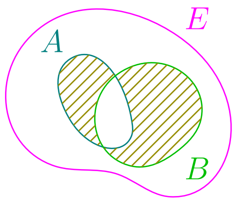
L'<u>intersection</u> de A et B est

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

3. 

Le <u>complémentaire</u> de A dans E est

$$E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\} = C_E A$$

4. 

La <u>différence symétrique</u> de A et B est

$$\begin{aligned} A \Delta B &= \{x \in E \mid (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \notin A \text{ et } x \in B)\} \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$

Proposition

Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$

1. $A \cap A = A$
2. $B \cap A = A \cap B$
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4. $A \cap \varnothing = \varnothing$
5. $A \cap E = A$
6. $A \cup A = A$
7. $B \cup A = A \cup B$
8. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
9. $A \cup \varnothing = A$
10. $A \cup E = E$
11. $(E \setminus A) \setminus A = E \setminus A$
12. $E \setminus (E \setminus A) = A$
13. $E \setminus \varnothing = E$
14. $E \setminus E = \varnothing$
15. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
16. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
17. $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$
18. $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$

Preuve

16. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
    — Soit $x \in A \cap (B \cup C)$ donc $x \in A$ et $x \in B \cup C$

    <u>Cas 1</u> $x \in B$, alors $x \in A \cap B$ et donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
    <u>Cas 2</u> $x \in C$, alors $x \in A \cap C$ et donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

On a prouvé

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

— Soit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

<u>Cas 1</u> $x \in A \cap B$ donc $x \in A$ et $x \in B$ donc $x \in B \cup C$ et donc $x \in A \cap (B \cup C)$

<u>Cas 2</u> $x \in A \cap C$ donc $x \in A$ et $x \in C$ donc $x \in B \cup C$ et donc $x \in A \cap (B \cup C)$

On a prouvé

$$A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

17. $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$
    - Montrons que $x \in E \setminus (A \cup B) \implies x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$
      Soit $x \in E \setminus (A \cup B)$ donc $x \notin A \cup B$
      - Si $x \in A$, alors $x \in A \cup B$ $\lightning$
        donc $x \notin A$ i.e. $x \in E \setminus A$
      - Si $x \in B$ alors, $x \in A \cup B$ $\lightning$
        Donc $x \notin B$ i.e. $x \in E \setminus B$

      On en déduit que $x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$
    - $x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$. Montrons que $x \in E \setminus (A \cup B)$
      On suppose que $x \notin E \setminus (A \cup B)$ donc $x \in A \cup B$
      - Si $x \in A$, on a une contradiction car $x \in E \setminus A$
      - Si $x \in B$, on a une contradiction car $x \in E \setminus B$

      donc $x \in E \setminus (A \cup B)$

$\square$

Deuxième partie

Applications

Definition

Une application f est la donnée de
- un ensemble E appelé ensemble de départ
- un ensemble F appelé ensemble d'arrivée
- une fonction qui associe à tout élément x de E un unique élément de F noté $f(x)$

L'application est notée

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Exemple

1. Soit $\mathscr{P}$ le plan (affine) et $A \in \mathscr{P}$. Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des droites.

$$\begin{aligned} f : \mathscr{P} \setminus \{A\} &\longrightarrow \mathscr{D} \\ B &\longmapsto (AB) \end{aligned}$$

2. $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$
$F = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

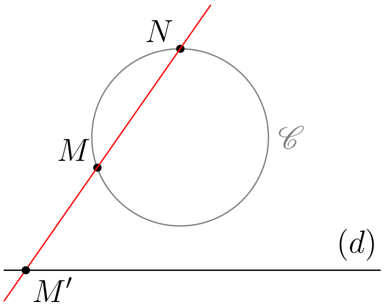
3. $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ f &\longmapsto f'\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

4. $E = [0,1]$ et $F = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$

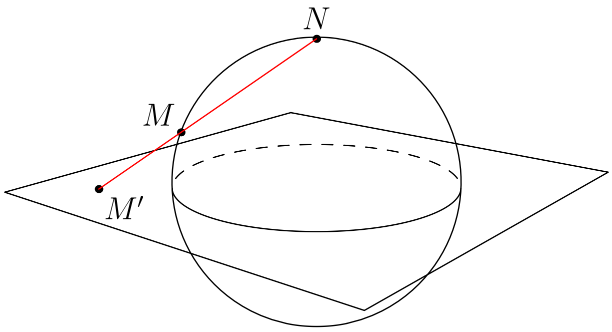
$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto \int_a^x t^2 \ln(t)\ dt \end{aligned}$$

5.



$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{C} \setminus \{N\} &\longrightarrow (d) \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

6.



Definition

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est

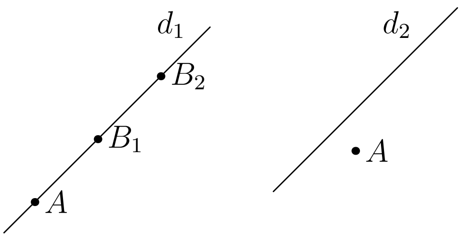
— injective si tout élément de F a au plus un antécédant par f

— bijective si tout élément de F a un unique antécédant par f

— surjective si tout élément de F a au moins un antécédant par f

Exemple suite des exemples précédents

1. L'application n'est ni injective ni surjective



B_1 et B_2 sont deux antécédants de d_1
d_2 n'a pas d'antécédant par f

2. L'application n'est pas injective :
   - $f : x \mapsto x$ est continue
   - $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ et $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + 42$ sont deux antécédants de f.

   Mais, l'application est surjective d'après le théorème fondamental de l'analyse
3. L'application n'est pas injective ($x \mapsto 0$ et $x \mapsto 42$ sont deux antécédants de 0) mais elle est surjective ($\forall x \in \mathbb{R}, x \mapsto ax$ est un antécédant de a).
4. L'application est injective mais pas surjective (les images sont des primitives de $x \mapsto x^2 \ln(x)$)
5. et 6. sont bijectives

Definition

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. L'application notée $g \circ f$ est définie par

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

On dit que c'est la composée de f et g.

Proposition

Soient $f : E \to F, g : F \to G, h : G \to G$. Alors, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Preuve

Par définition, $g \circ f : E \to F$ donc $h \circ (g \circ f) : E \to H$
et $h \circ g : F \to H$ donc $(h \circ g) \circ f : E \to H$ Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f)(x) &= h(g \circ f(x)) \\ &= h(g(f(x))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (h \circ g) \circ f(x) &= h \circ g(f(x)) \\ &= h(g(f(x))) \end{aligned}$$

Donc, $h \circ (g \circ f)(x) = (h \circ g) \circ f(x)$ □

Remarque ⚠ *Attention*
En général, $g \circ f \neq f \circ g$

Par exemple, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$

Alors, $f \circ g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ et $g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$

donc $f \circ g \neq g \circ f$

Proposition

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$

1. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective
2. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective
3. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective
4. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective

Preuve

1. On suppose $g \circ f$ injective. On veut montrer que f est injective. Soient $(x, y) \in E^2$. On suppose $f(x) = f(y)$. Montrons que $x = y$.
   Comme $f(x) = f(y)$, $g(f(x)) = g(f(y))$ i.e. $g \circ f(x) = g \circ f(y)$
   Or, $g \circ f$ injective donc $x = y$
2. On suppose $g \circ f$ surjective. On veut montrer que g est surjective. Soit $y \in G$. On cherche $x \in F$ tel que $g(x) = y$.
   Comme $g \circ f : E \to G$ surjective, y a un antécédant $z \in E$ par $g \circ f$.
   On pose $x = f(z) \in F$ et on a bien $g(x) = y$
3. On suppose f et g injectives. Montrons que $g \circ f$ injective. Soient $x, y \in E$.
   On suppose $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Montrons $x = y$
   On sait que $g(f(x)) = g(f(y))$. Comme g est injective, $f(x) = f(y)$ et comme f est injective, $x = y$
4. On suppose f et g surjectives. Soit $y \in G$. On cherche $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = y$
   Comme g est surjective, y a un antécédant $z \in F$ par g
   Comme f est surjectives, z a un antécédant $x \in E$ par f
   On en déduit $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(z) = y$

$\square$

Remarque

$f : E \longrightarrow F$

$$f \text{ injective} \iff \left(\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \implies x = y\right)$$

Definition

Soit $f : E \to F$ une <u>bijection</u>. L'application $\left\{ \begin{array}{ccl} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \text{l'unique antécédant de } y \text{ par } f \end{array} \right.$ est la <u>réciproque</u> de f notée f^{-1}

Definition

L'<u>identité de E</u> est $\mathrm{id}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$

Proposition

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$

$$\left.\begin{array}{l} f \circ g = \mathrm{id}_F \\ g \circ f = \mathrm{id}_E \end{array}\right\} \iff \begin{cases} f \text{ bijective} \\ f^{-1} = g \end{cases}$$

Preuve *déjà faite*

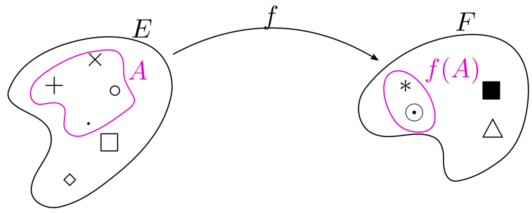
□

Definition

Soit $f : E \to F$

1. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. L'<u>image directe</u> de A par f est

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$



2. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. L'<u>image réciproque</u> de B par f est

$$f^{-1}(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}$$