

CHAPITRE 11

Suite

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 30 janvier 2022

Table des matières

I	Modes de définition	2
II	Limites	4
III	Limites et inégalités	8
IV	Suites extraites	11
V	Suites récurrentes	13
VI	Comparaison de suites	16
VII	Suites complexes	19
VIII	Annexe	22

Première partie

Modes de définition

Definition

Une suite peut être définie

- Explicitement On dispose pour tout $n \in \mathbb{N}$ de l'expression de u_n en fonction de n .

$$\boxed{\text{ex}} \quad \forall n \in \mathbb{N}_*, u_n = \frac{\ln(n)}{n} e^{-n}$$

- Par récurrence On connaît u_{n+1} en fonction de u_0, u_1, \dots, u_n

$$\boxed{\text{ex}} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$$

- Implicitement $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est le seul nombre vérifiant une certaine propriété

$$\boxed{\text{ex}} \quad u_n \text{ est le seul réel vérifiant } x^5 + nx - 1 = 0$$

Deuxième partie

Limites

Definition

Soit u une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que

- u converge vers ℓ
- u_n tends vers ℓ quand n tends vers $+\infty$
- ℓ est une limite de u

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

$$(\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon)$$

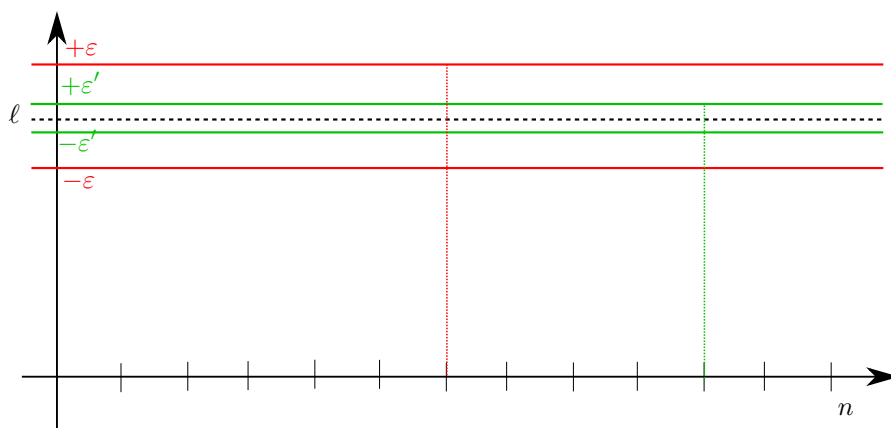


FIGURE 1 – Définition de la limite

Definition

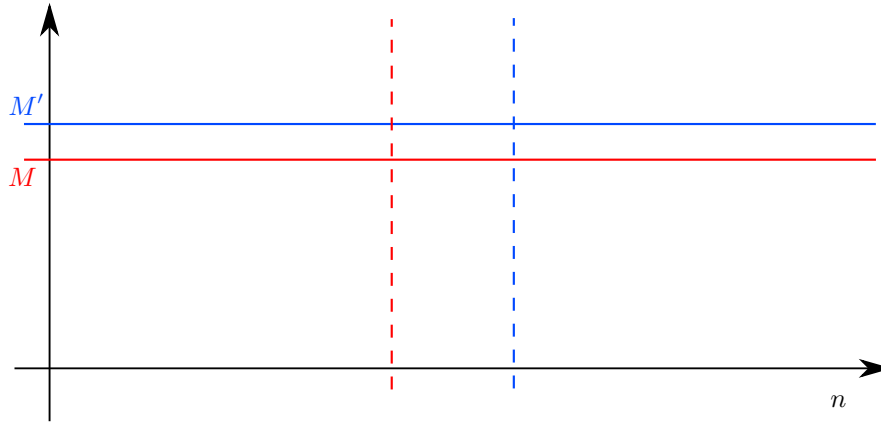
Soit u une suite réelle.

On dit que u tends vers $+\infty$ si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq M$$

On dit que u tends vers $-\infty$ si

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq m$$

**Définition**

Une suite qui ne converge pas est dite divergente (on dit qu'elle diverge). C'est le cas si cette suite n'a pas de limite quand elle tends vers $\pm\infty$.

Théorème**Unicité de la limite (réelle)**

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (\ell_1, \ell_2) \in \overline{\mathbb{R}}^2$
 Si $\begin{cases} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_1 \\ u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_2 \end{cases}$ alors $\ell_1 = \ell_2$

Remarque

Si u_n tends vers ℓ quand n tends vers $+\infty$, on écrit $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ ou $\lim u_n = \ell$

Proposition

Toute suite convergente est bornée

Proposition

Soient $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On pose $\ell_1 = \lim u_n$ et $\ell_2 = \lim v_n$

1. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$ alors $u_n + v_n \rightarrow \ell_1 + \ell_2$
2. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = +\infty$ alors $u_n + v_n \rightarrow +\infty$
3. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = -\infty$ alors $u_n + v_n \rightarrow -\infty$
4. si $\ell_1 = \ell_2 = +\infty$, alors $u_n + v_n \rightarrow +\infty$
5. si $\ell_1 = \ell_2 = -\infty$, alors $u_n + v_n \rightarrow -\infty$

Proposition

Soient u et v deux suites réelles. On pose $\ell_1 = \lim u_n$ et $\ell_2 = \lim v_n$

1. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$, alors $u_n v_n \rightarrow \ell_1 \ell_2$
2. si $\begin{cases} \ell_1 \in \mathbb{R}_*^+, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \rightarrow +\infty \\ \ell_1 \in \mathbb{R}_*^-, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \rightarrow -\infty \end{cases}$
3. si $\begin{cases} \ell_1 \in \mathbb{R}_*^+, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \rightarrow -\infty \\ \ell_1 \in \mathbb{R}_*^-, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \rightarrow +\infty \end{cases}$
4. si $\begin{cases} \ell_1 = -\infty, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \rightarrow -\infty \\ \ell_1 = -\infty, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \rightarrow +\infty \\ \ell_1 = +\infty, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \rightarrow +\infty \end{cases}$

Proposition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{R}_* . Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$

On pose $\ell = \lim u_n$ (si elle existe).

1. si $\ell = +\infty$ alors, $\frac{1}{u_n} \rightarrow 0$
2. si $\ell = 0$ alors, $\left| \frac{1}{u_n} \right| \rightarrow +\infty$

\triangleleft Si le signe de u_n ne se stabilise pas $\frac{1}{u_n}$ n'a pas de limite

$$\boxed{\text{ex}} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

3. si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ell}$

Troisième partie

Limites et inégalités

Proposition

Soient u et v deux suites réelles convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2 . On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$$

Alors, $\ell_1 \leq \ell_2$

Remarque

Si $\begin{cases} u_n \rightarrow \ell_1 \in \mathbb{R} \\ v_n \rightarrow \ell_2 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n \end{cases}$
on n'a pas forcément $\ell_1 < \ell_2$
ex $\forall n \in \mathbb{N}_*, \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ mais les deux convergent vers 0

Proposition

Soient u et v deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$$

1. si $u_n \rightarrow +\infty, v_n \rightarrow +\infty$
2. si $v_n \rightarrow -\infty, u_n \rightarrow -\infty$

Théorème**Théorème des "gendarmes"**

Soient u, v et w trois suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$$

On suppose que u et w convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, v converge vers ℓ

Théorème**Limite monotone**

1. Soit u une suite croissante majorée par M .
Alors, u converge et $\lim u_n \leq M$
2. Soit u une suite croissante non majorée.
Alors, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$
3. Soit u une suite décroissante minorée par m .
Alors, u converge et $\lim u_n \geq m$
4. Soit u une suite décroissante non minorée.
Alors, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$

Définition

Soient u et v deux suites réelles. On dit que u et v sont adjacentes si

- u est croissante
- v est décroissante
- $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Théorème

Soient u et v deux suites adjacentes. Alors, u et v convergent vers la même limite.

Théorème**Théorème des segments emboîtés**

Soit (I_n) une suite de segments (non vide) décroissante

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$$

On note $\ell(I)$ la longueur d'un intervalle I .

Si $\ell(I_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

Quatrième partie

Suites extraites

Definition

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

On dit que $(u_{\varphi(n)})$ est une **suite extraite** de u ou une **sous suite** de u . On dit alors que φ est une extractrice

Lemme

Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$$

Proposition

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante
alors $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Proposition

Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont la même limite ℓ alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$

Théorème**Théorème de Bolzano-Weierstrass**

Soit (u_n) une suite réelle bornée. Alors, il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge.

Cinquième partie

Suites récurrentes

Definition

On dit que u est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants s'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

L'équation caractéristique associée est

$$(C) : z^2 = az + b \text{ avec } z \in \mathbb{C}$$

Proposition

Avec les notations précédentes,

1. Si (C) a 2 racines simples $r_1 \neq r_2$ alors

$$\exists(A, B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

2. Si (C) a une racine double $r \in \mathbb{C}$ alors

$$\exists(A, B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)r^n$$

Proposition

avec les notations précédentes et avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

1. Si (C) a deux racines simples $r_1 \neq r_2$ alors

$$\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

2. Si (C) a une racine simple $r \in \mathbb{R}$ alors

$$\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)r^n$$

3. Si (C) a deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_*^+$ et $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors

$$\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n(A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))$$

□

Remarque

Étude de $u_{n+1} = f(u_n)$

1. On choisit rapidement la fonction f (au moins le tableau de variation)
- 1'. (OPTIONNEL) on représente graphiquement la fonction f et la droite d'équation $y = x$ pour conjecturer sa limite

2. On utilise le tableau de variation pour vérifier que (u_n) est bien définie par récurrence

$$P(n) : "u_n \text{ existe et } u_n \in \mathcal{D}_f"$$

3. On étudie le signe de $f(x) - x$
 4. On cherche les intervalles stables par f :

$$f(I) \subset I$$

les plus petits possible (ça permet de montrer que la suite est majorée (minorée) en particulier ceux sur lesquels $f(x) - x$ ne change pas de signe

- 4'. Donc on utilise le théorème de la limite monotone
 4''. Sinon, on essaie l'inégalité (voir théorème) des accroissements finis :
 Soit ℓ un point fixe de f : $f(\ell) = \ell$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| = M |u_n - \ell|$$

où M est un majorant de $|f'|$

Si $0 \leq M \leq 1$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq M^n |u_0 - \ell| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$

5. si (u_n) a une limite et si f continue alors $\lim(u_n)$ est une point fixe de f

Sixième partie

Comparaison de suites

Definition

Soient u et v deux suites réelles. On dit que u est dominée par v si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \leq M |v_n|$$

Dans ce cas, on note $u = O(v)$ ou $u_n = O(v_n)$ et on dit que " u est un grand o de v "

Proposition

O est une relation réflexive et transitive.

Definition

Soient u et v deux suites. On dit que u est négligeable devant v si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

Dans ce cas, on note $u = o(v)$ ou $u_n = o(v_n)$ ou on le lit " u est un petit o de v "

Proposition

o est une relation transitive, non-réflexive

Proposition

Soient u et v deux suites.

- $o(u) + o(u) = o(u)$
- $v \times o(u) = o(uv)$
- $o(u) \times o(v) = o(uv)$
- $o(o(u)) = o(u)$

□

Definition

Soient u et v deux suites. On dit que u et v sont équivalentes si

$$u = v + o(v)$$

i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - v_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

Dans ce cas, on le note $u \sim v$

Proposition

\sim est une relation d'équivalence

□

Proposition

Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang

1. $u = o(v) \iff \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ bornée
2. $u = o(v) \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
3. $u \sim v \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

□

Proposition**Suites de références**

1. $\ln^\alpha(n) = o(n^\beta)$ avec $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$
2. $n^\beta = o(a^n)$ avec $\beta > 0$ et $a > 1$
3. $a^n = o(n!)$ avec $a > 1$
4. $n! = o(n^n)$

Lemme**Exercice 10 du TD**

Soit $u \in (\mathbb{R}_*^+)^{\mathbb{N}}$

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell < 1$ avec $\ell \in \mathbb{R}$,

alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Septième partie

Suites complexes

Definition

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que (u_n) converge vers ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

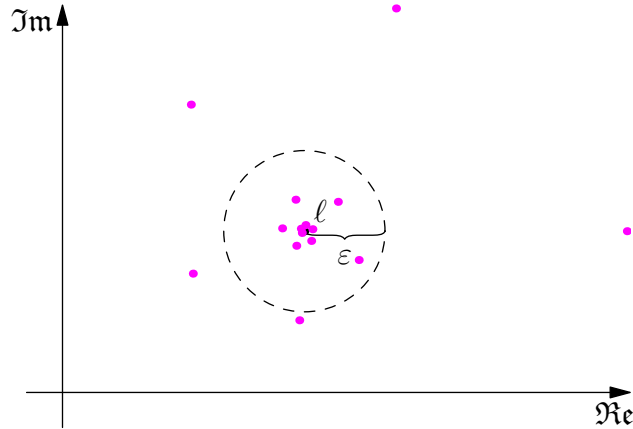


FIGURE 3 – Suite complexe convergente

Proposition

Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux limites de u alors $\ell_1 = \ell_2$

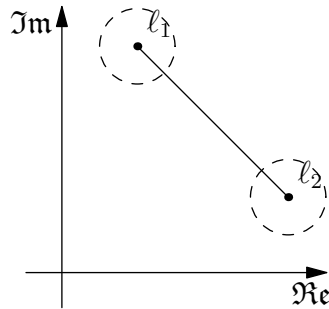


FIGURE 4 – Unicité de la limite de suites complexes

□

Proposition

Les limites de somme, produit, quotient de suites complexes respectent les mêmes lois que pour les suites réelles.

□

Théorème

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \iff \begin{cases} \Re(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \Re(\ell) \\ \Im(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \Im(\ell) \end{cases}$$

Proposition

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

Si $u_n \rightarrow \ell$ alors $|u_n| \rightarrow |\ell|$

Proposition

Tous les résultats (sauf ceux avec des limites infinies !) concernant les suites extraites sont encore valables dans \mathbb{C} y compris le théorème de Bolzano-Weierstrass (mais avec une autre preuve).

Définition

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$$

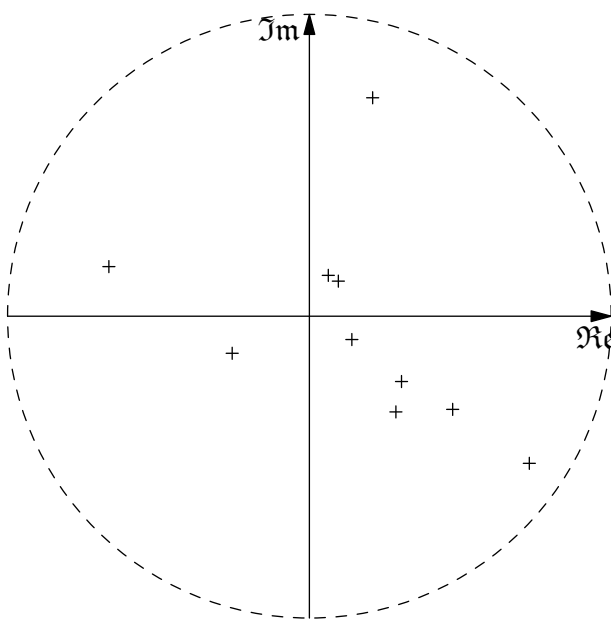


FIGURE 5 – Suite complexe bornée

Théorème

Bolzano Weierstrass

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ bornée. Il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge.

Huitième partie

Annexe

Proposition

Soit $f : I \rightarrow I$ continue et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

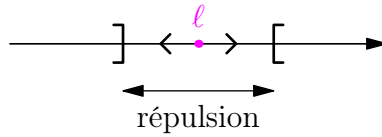
$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$
alors $f(\ell) = \ell$ i.e. (ℓ est un point fixe de f)

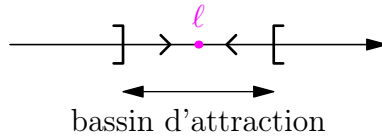
Remarque

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
Soit $\ell \in \mathbb{R}$ un point fixe de f . Donc, $f(\ell) = \ell$.

$|f'(\ell)| > 1$:



$|f'(\ell)| < 1$:



Par contre, si $|f'(\ell)| = 1$, on ne sait pas.

Remarque

Suite arithético-géométrique

$$(*) : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b = f(u_n)$$

MÉTHODE 1

— On cherche v une suite constante solution de $(*)$:

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, v_n = C$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, C = aC + b = f(C)$$

$$\text{Si } a \neq 1 : C = \frac{b}{1-a}$$

— Soit u qui vérifie $(*)$. On pose $w = u - v$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} &= u_{n+1} - v_{n+1} \\ &= au_n + b - av_n - b \\ &= a(u_n - v_n) \\ &= aw_n\end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = aw_n + 0$: équation homogène associée à $(*)$
 (w_n) est géométrique donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 a^n$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = w_0 a^n + \frac{b}{1-a}$$

MÉTHODE 2

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) &\longmapsto (u_{n+1} - au_n)\end{aligned}$$

φ morphisme de groupes additifs

$$\varphi(u) = (b) \iff u = v + w \text{ avec } w \in \text{Ker}(\varphi)$$

$$\begin{aligned}w \in \text{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(w) = 0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - aw_n = 0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = aw_n\end{aligned}$$