Chapitre 19

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 11 mars 2022

Table des matières

Première partie

Premières propriétés

Definition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$. On dit que f est linéaire si

$$\forall (x,y) \in E^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Definition

On dit qu'un problème est linéaire s'il se présente sous la forme :

$$\text{Résoudre } \varphi(x) = y$$

où l'inconnue est $x \in E$, y est un paramètre de F avec $\varphi : E \to F$ linéaire.

Remarque *Notation*
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
L'ensemble des applications linéaires de E dans F est $\mathscr{L}(E,F)$.
Si $F = E$, alors on note plus simplement $\mathscr{L}(E)$ à la place de $\mathscr{L}(E,E)$.
Les éléments de $\mathscr{L}(E)$ sont appelés endomorphismes (linéaires) de E.

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.

■

Proposition

$\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E.

■

Proposition

$\big(\mathscr{L}(E), +, \circ, \cdot\big)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre (non commutative en général).

■

Corollaire

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. On peut former $P(u) \in \mathscr{L}(X)$: on dit que $P(u)$ est un polynôme d'endomorphisme.

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ bijective. Alors $f^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$.

■

Remarque *Notation*
On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E bijectifs, $\mathrm{GL}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F bijectives.
Les éléments de $\mathrm{GL}(E)$ sont appelés automorphismes (linéaires) de E.

Corollaire

GL(E) est un sous-groupe de $\big(S(E), \circ\big)$

Definition

GL(E) est dit “ le groupe linéaire de E ”

Deuxième partie

Noyau et image

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, U un sous-espace vectoriel de E et V un sous-espace vectoriel de F.

1. $f(U)$ est un sous-espace vectoriel de F.
2. $f^{-1}(V)$ est un sous-espace vectoriel de E.

■

Corollaire

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}\big(\{0_F\}\big) = \{x \in E \mid f(x) = 0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{f(u) \mid u \in E\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

□

Remarque *Rappel*
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$

$$\begin{aligned} f \text{ injective} &\iff \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \\ f \text{ surjective} &\iff \mathrm{Im}(f) = F \end{aligned}$$

Troisième partie

Théorème du rang

Proposition Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soit $f : E \to F$ un isomorphisme (i.e. une application linéaire bijective). Alors, $\dim(E) = \dim(F)$

■

La première partie de la preuve précédente justifie le résultat suivant.

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ injective. $\mathscr{L} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E. Alors $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est une famille libre de F. En particulier, $\dim(F) \geqslant \dim(E)$.

□

La deuxième partie de la preuve prouve :

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ surjective et $\mathscr{G} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille génératrice de E. Alors $\big(f(e_1), \dots, f(e_p)\big)$ est une famille génératrice de F. En particulier,

$$\dim(F) \leqslant \dim(E)$$

□

Théorème **Théorème du rang**

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

$$\dim(E) = \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) + \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big)$$

■

Remarque

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E.

- <u>Cas 1</u> $F = \{0_E\}$, alors E est un supplémentaire de F.
- <u>Cas 2</u> $F \neq \{0_E\}$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F. Alors $\mathscr{B}$ est une famille libre de E. On complète $\mathscr{B}$ en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E. On pose $G = \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$. On démontre que

$$F \oplus G = E$$

Corollaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de <u>même dimension finie</u> et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

$$\begin{aligned} f \text{ injective} &\iff f \text{ surjective} \\ &\iff f \text{ bijective} \end{aligned}$$

■

Corollaire

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ avec E de dimension finie. Alors,

$$f \in \mathrm{GL}(E) \iff f \text{ injective } \iff f \text{ surjective}$$

□

Remarque

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)}$$

$\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \mathrm{rg}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$

Definition

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Le <u>rang</u> de f est

$$\mathrm{rg}(f) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$$

Quatrième partie

Formes linéaires

Definition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble des formes linéaires est noté $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. E^* est appelé espace dual de E.

Proposition

Toute forme linéaire est soit nulle, soit surjective.

■

Proposition

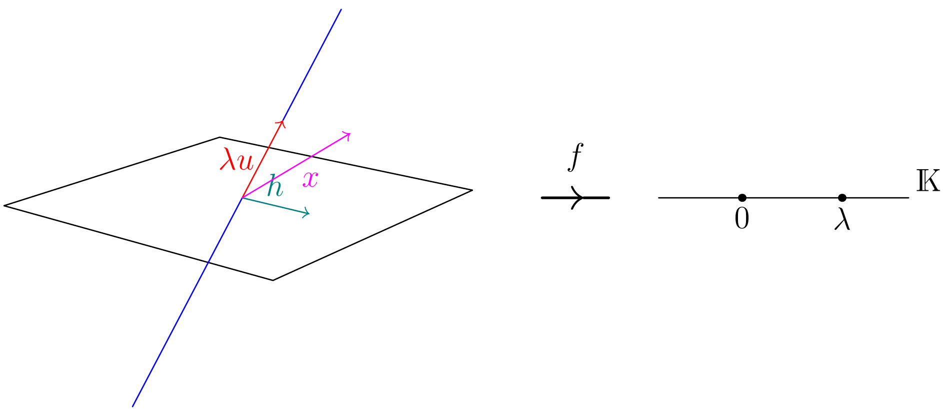
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in E^* \setminus \{0\}$. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension $n-1$.

■

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et H un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$. Alors,

$$\exists f \in E^*, \mathrm{Ker}(f) = H$$



■

Proposition

Avec les notations précédentes,
$\{f \in E^* \mid \mathrm{Ker}(f) = H\}$ est une droite de E^* privée de l'application nulle. En d'autres termes, les équations de H sont 2 à 2 proportionelles.

■

Definition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E. On dit que H

est un <u>hyperplan</u> de E s'il existe une droite D de E telle que

$$H \oplus D = E$$

En reprenant les démonstrations précédentes, on a encore les résultats suivants :

Proposition

Soit H un hyperplan de E. Alors, $\{f \in E^* \mid \mathrm{Ker}(f) = H\}$ est une droite de E^* privée de l'application nulle. □

Proposition

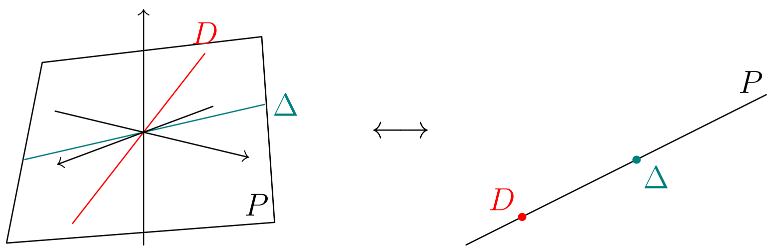
Soit $f \in E^*$ non nulle. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un hyperplan de E.

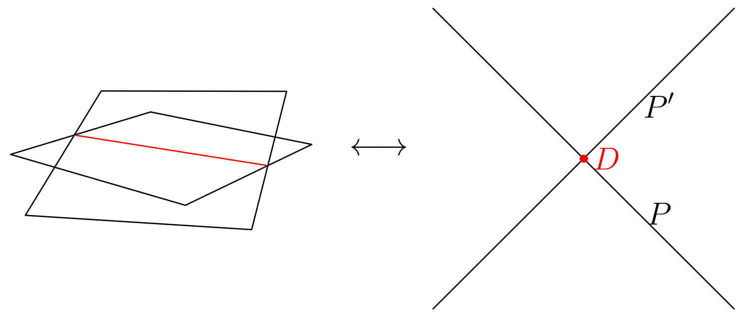
■

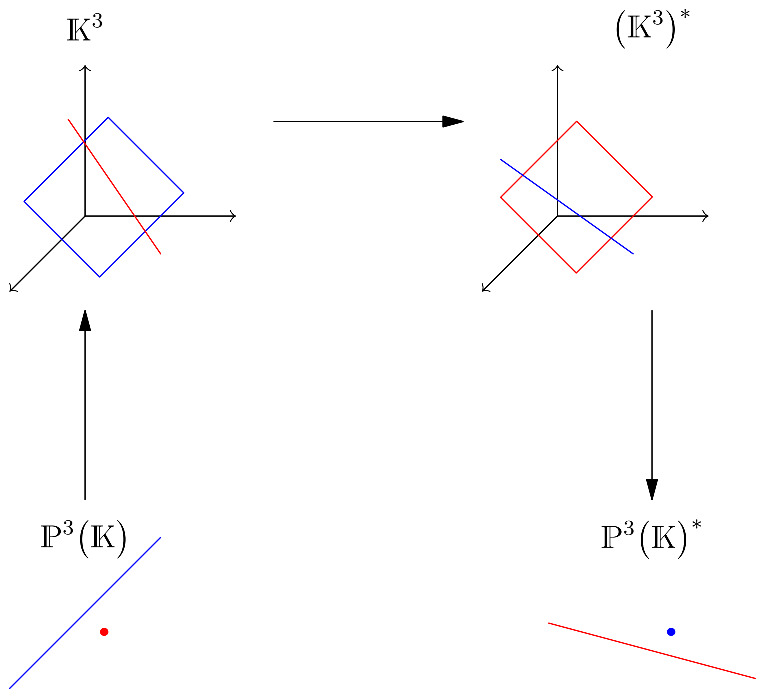
<u>Hors-Programme</u>

$$\mathbb{P}^3(\mathbb{K}) = \{D \setminus \{0\} \mid D \text{ droite vectorielle de } \mathbb{K}^3\}$$

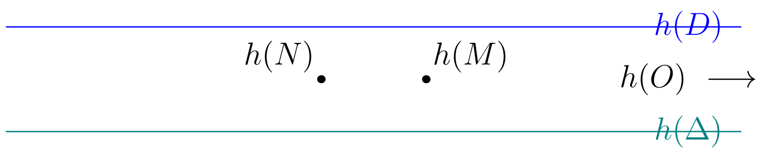
Une <u>droite</u> projective de $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ est un plan vectoriel de $\mathbb{K}^3$ privé de 0.
À faire : schéma A







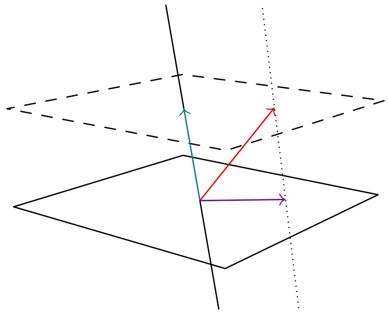
À faire : schémas B et C



Cinquième partie

Projections et symétries

Definition



Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces de E supplémentaires :

$$E = F \oplus G$$

Soit $x \in E$.

$$\exists!(a,b) \in F \times G, x = a + b$$

Le vecteur a est appelé projeté de x sur G parallèlement à G.
Le vecteur b est appelé projeté de x sur G parallèlement à F.
La projection sur G parallèlement à G est l'application qui à $x \in E$ associe son projeté sur F parallèlement à G.

Proposition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires et p la projection sur F parallèlement à G.

1. $p \in \mathscr{L}(E)$
2. $p_{|F} = \mathrm{id}_F$ et $p_{|G} = 0$
3. $p \circ p = p$
4. $\mathrm{id}_E - p$ est la projection sur G parallèlement à F.

■

Definition

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On dit que f est un projecteur si $f \circ f = f$

Proposition

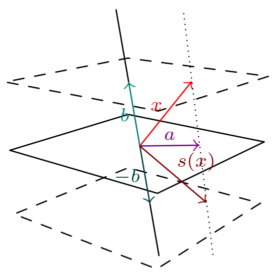
Soit f un projecteur de E. Alors f est la projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$. En particulier,

$$\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$$

■

Definition

Soient F et G supplémentaires dans E : $E = F \oplus G$



Soit $x \in E$. On décompose x :

$$x = a + b \text{ avec } \begin{cases} a \in F \\ b \in G \end{cases}$$

et on forme

$$y = a - b$$

On dit que y est le symétrique de x par rapport à F parallèlement à G
La symétrie par rapport à F parallèlement à G est l'application qui à tout $x \in E$ associe son symétrique parallèlement à G par rapport à F.

Proposition

Soient F et G supplémentaires dans E, s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

1. $s \in \mathscr{L}(E)$
2. $s_{|E} = \mathrm{id}_F$ et $s_{|G} = -\,\mathrm{id}_G$
3. $s \circ s = \mathrm{id}_E$

■

Definition

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On dit que f est involutive si $f \circ f = \mathrm{id}_E$

Proposition

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ involutif. Alors f est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$. En particulier,

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E) = E$$

Proposition

ANALYSE Soit $x \in E$. On suppose que $x = a + b$ avec $\begin{cases} a \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \\ b \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E) \end{cases}$

$$\begin{aligned} a \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) &\iff (f - \mathrm{id}_E)(a) = 0 \\ &\iff f(a) - a = 0 \\ &\iff a = f(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E) &\iff f + \mathrm{id}_E)(b) = 0 \\ &\iff f(b) + b = 0 \\ &\iff f(b) = -b \end{aligned}$$

On sait que $x = a + b$ et $f(x) = f(a) + f(b) = a - b$
D'où,

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\big(x + f(x)\big) \\ b &= \frac{1}{2}\big(x - f(x)\big) \end{aligned}$$

<u>Synthèse</u> Soit $x \in E$. On pose

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\big(x + f(x)\big) \\ b &= \frac{1}{2}\big(x - f(x)\big) \end{aligned}$$

Alors $a + b = x$

$$\begin{aligned} f(a) &= f\left(\frac{1}{2}\big(x + f(x)\big)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x) + f\big(f(x)\big)\right) \\ &= \frac{1}{2}\big(f(x) + x\big) \\ &= a \end{aligned}$$

Donc $a \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$

$$\begin{aligned} f(b) &= f\left(\frac{1}{2}\big(x - f(x)\big)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x) - f\big(f(x)\big)\right) \\ &= \frac{1}{2}\big(f(x) - x\big) \\ &= -b \end{aligned}$$

donc $b \in \operatorname{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$
Ainsi,

$$\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(f + \mathrm{id}_E) = E$$

Soit $\mathscr{s}$ la symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$.
Soit $x \in E$. On a vu que

$$x = \underbrace{\frac{1}{2}\big(x + f(x)\big)}_{\in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)} + \underbrace{\frac{1}{2}\big(x - f(x)\big)}_{\in \operatorname{Ker}(f + \mathrm{id}_E)}$$

Donc,

$$\mathscr{s}(x) = \frac{1}{2}\big(x + f(x)\big) - \frac{1}{2}\big(x - f(x)\big) = f(x)$$

Donc $\mathscr{s} = f$