Chapitre 18

Polynôme

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 26 février 2022

Table des matières

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps

Première partie

Définition

Definition

- Un polynôme à coefficiants dans $\mathbb{K}$ est une suite presque nulle de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
- Le polynôme nul, noté 0 est la suite nulle.
- Soit $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un polynôme non nul.
  $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0_{\mathbb{K}}\}$ est non-vide et majoré. Le degré de P est $\max\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0_{\mathbb{K}}\}$, et on le note $\deg(P)$ et $a_{\deg(P)}$ est le coefficiant dominant de P, il est noté $\mathrm{dom}(P)$.
- Le degré du polynôme nul est $-\infty$

Proposition Définition

Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes à coefficiants dans $\mathbb{K}$. Alors, $P + Q = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un polynôme appelé somme de P et Q

Preuve

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1, a_n = 0$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_2, b_n = 0$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$ donc

$$\forall n \geqslant N, a_n + b_n = 0 + 0 = 0$$

donc $P + Q$ est une suite presque nulle. □

Proposition Définition

Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes à coefficiants dans $\mathbb{K}$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque nulle. Ce polynôme est appelé produit de P et Q et noté PQ.

Preuve

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1, a_n = 0$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_2, b_n = 0$$

On pose $N = N_1 + N_2$

$$\forall n \geqslant N, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{N_1} a_k b_{n-k} + \sum_{k=N_1+1}^{n} a_k b_{n-k}$$

$\forall k \geqslant N_1 + 1$, $a_k = 0$ donc $\displaystyle\sum_{k=N_1+1}^{n} a_k b_{n-k} = 0$
$\forall k \leqslant N_1$, $b - k \geqslant n - N_1 \geqslant N_1 + N_2 - N_1 \geqslant N_2$ donc $\forall k \leqslant N_1, b_{n-k} = 0$ et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{N_1} a_k b_{n-k} = 0$
Donc

$$\forall n \geqslant N, c_n = 0$$

□

Remarque *Notation*
Soit $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, un polynôme à coefficiants dans $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Le polynôme $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est noté λP

Remarque *Notation*
On pose $X = (0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \dots) = (\delta_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$

Exemple

$$\begin{aligned} X^2 &= XX \\ &= (0 \times 0, 0 \times 1 + 1 \times 0, 0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0, 0, \dots) \\ &= (0, 0, 1, 0, \dots) \end{aligned}$$

Théorème

Soit $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un polynôme non nul à coefficiants dans $\mathbb{K}$. Alors

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{où } n = \deg(P) \text{ et } X^0 = (1, 0, \dots)$$

Preuve

Pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: “$X^k = (\delta_{k,n})_{\in\mathbb{N}}$” où $\delta_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$

— $\delta_{0,n} = (1, 0, \dots) = X^0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vrai

— Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}(k)$ vraie.
$$X^{k+1} = X^k\, X = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$$
où
$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{j=0}^{n} \delta_{k,j}\delta_{1,n-j}$$
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in [\![0, n]\!]$
$$\begin{aligned}\delta_{k,j}\delta_{1,n-j} \neq 0 &\iff \begin{cases} k = j \\ 1 = n - j \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} k = j \\ n = k + 1 \end{cases}\end{aligned}$$
Donc, si $n \neq k + 1$, alors
$$\forall j \in [\![0, n]\!]\,, \delta_{k,j}\delta_{1,n-j} = 0$$
et donc $c_n = 0$
$$c_{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} \delta_{k,j}\delta_{1,j+1-j} = \delta_{k,k}\delta_{1,1} = 1$$
Donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \delta_{k+1,n}$$
donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie

Ainsi, $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $P = (a_0, \dots, a_n, 0, \dots)$ un polynôme de degré n.
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k X^k &= a_0(1,0,0,0,\dots) \\ &+ a_1(0,1,0,0,\dots) \\ &+ a_2(0,0,1,0,\dots) \\ &\vdots \\ &+ a_n(0,\dots,0,1,0,\dots) \\ &= (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots) \\ &= P\end{aligned}$$

□

Remarque *Notation*
On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficiants dans $\mathbb{K}$ dont l'indéterminée $(0, 1, 0, \dots)$ est notée X.

Proposition

$\big(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot\big)$ est une <u>$\mathbb{K}$-algèbre commutative</u> i.e.

1. $\left(\mathbb{K}[X],+,\times\right)$ est un anneau commutatif
2. $\left(\mathbb{K}[X],+,\cdot\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
3. $\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall(P,Q)\in\left(\mathbb{K}[X]\right)^2,\lambda\cdot(P\times Q)=(\lambda\cdot P)\times Q=P\times(\lambda\cdot Q)$

Preuve

1. $(\mathbb{K}[X],+)$ est un groupe abélien car $(\mathbb{K}[X],+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

— $X^0=(1,0,\dots)$ est le neutre de $\times$
En effet, $\forall P=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}[X]$, en posant $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}=PX^0$ on a

$$\forall n\in\mathbb{N},c_n=\sum_{k=0}^{n}a_k\delta_{k,n-k}=a,$$

donc $PX^0=P$
— $\times$ est commutative : $\forall P=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}[X],\forall Q=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}[X]$, on pose $R=(c_n)_{n\in\mathbb{N}}=PQ$, $S=(d_n)_{n\in\mathbb{N}}=QP$ alors

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N},c_n&=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\\&=\sum_{j=0}^{n}a_{n-j}b_j\qquad(j=n-k)\\&=\sum_{j=0}^{n}b_ja_{n-j}\\&=d_n\end{aligned}$$

donc $PQ=QP$
— Soient

$$\begin{cases}P=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}[X]\\Q=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}[X]\\R=(c_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}[X]\end{cases}$$

On pose

$$\begin{cases}S=(d_n)_{n\in\mathbb{N}}=PQ\\T=(e_n)_{n\in\mathbb{N}}=SR=(PQ)R\\U=(f_n)_{n\in\mathbb{N}}=QR\\V=(g_n)_{n\in\mathbb{N}}=PU=P(QR)\end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, e_n &= \sum_{k=0}^{n} d_k c_{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) c_{n-k} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} a_j b_{k-j} c_{n-k} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=j}^{n} b_{k-j} c_{n-k} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{\ell=0}^{n-j} b_\ell c_{n-j-\ell} \qquad (\ell = k-j) \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j f_{n-j} \\
&= g_n
\end{aligned}$$

Donc $T = V$

— Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, R = (C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois polynômes et $P(Q+R) = (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $PQ + PR = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, d_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k (b_{n-k} + c_{n-k}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k} \\
&= e_n
\end{aligned}$$

Donc, $\big(\mathbb{K}[X], +, \times\big)$ est un anneau commutatif

2. $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
$\big(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot\big)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. D'après la propriété précédente,

$$\mathbb{K}[X] = \operatorname{Vect}\big((X^n \mid n \in \mathbb{N})\big)$$

donc $\mathbb{K}[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}, P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes. On pose $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = PQ, R = (d_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda(PQ), S = (e_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda P)Q, T =$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = P(\lambda Q)$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, d_n = \lambda c_n &= \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) b_{n-k} = e_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (\lambda b_{n-k}) = f_n\end{aligned}$$

□

Remarque

$(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative (si $n > 1$)

Proposition

$i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ \lambda & \longmapsto & \lambda X^0 \end{array}$ est un morphisme d'algèbre injectif, i.e.

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \begin{cases} i(\lambda + \mu) = i(\lambda) + i(\mu) \\ i(\lambda \cdot \mu) = i(\lambda) \times i(\mu) \end{cases}$$

et i est injective.

Remarque *Notation*

On identifie $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $\lambda X^0 \in \mathbb{K}[X]$. Ainsi, on peut écrire $X^0 = 1$, on peut écrire $2 + X + 3X^2$ au lieu de $2X^0 + X + 3X^2$

Proposition

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$

- $\deg(P + Q) \leqslant \max\big(\deg(P), deg(Q)\big)$
- Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors
  - $\deg(P + Q) = \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$
  - $\text{dom}(P + Q) = \begin{cases} \text{dom}(P) & \text{si } \deg(P) > \deg(Q) \\ \text{dom}(Q) & \text{si } \deg(P) < \deg(Q) \end{cases}$
- Si $\deg(P) = \deg(Q)$ et $\text{dom}(P) + \text{dom}(Q) \neq 0$,

  alors $\begin{cases} \deg(P + Q) = \deg(P) = \deg(Q) \\ \text{dom}(P + Q) = \text{dom}(P) + \text{dom}(Q) \end{cases}$
- Si $\deg(P) = \deg(Q)$ et $\deg(P) + \deg(Q) = 0$, alors $\deg(P + Q) < \deg(P)$

Preuve

— Si $P=0$, alors $\deg(P+Q)=\deg(Q)$ et donc $\max\big(\deg(P),\deg(Q)\big) = \max\big(-\infty,\deg(Q)\big)$
On a bien $\deg(P+Q) \leqslant \max\big(\deg(P),\deg(Q)\big)$
— De même avec $Q=0$
— On suppose $P\neq 0$ et $Q\neq 0$
On pose $\begin{cases} P=\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k & p=\deg(P) \\ Q=\displaystyle\sum_{k=0}^{q} b_k X^k & q=\deg(Q) \end{cases}$
On peut supposer $p\geqslant q$. On pose $b_{q+1}=\ldots=b_p=0$ si $p>q$
Ainsi, $Q=\displaystyle\sum_{k=0}^{p} b_k X^k$
$P+Q=\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(a_k+b_k)X^k$ donc $\deg(P+Q)\leqslant p$ et $p=\max\big(\deg(P),\deg(Q)\big)$
De plus, $a_p+b_p=\begin{cases} \underset{\neq 0}{\operatorname{dom}(P)} & \text{si } p>q \\ \operatorname{dom}(P)+\operatorname{dom}(Q) & \text{si } p=q \end{cases}$

$\square$

Proposition

Soient $P,Q\in\mathbb{K}[X]$. Alors
$$\deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)$$

Preuve

Si P ou Q est nul, alors la formule est vraie car
$$\begin{cases} \deg(PQ)=-\infty \\ \deg(P)+\deg(Q)=\begin{cases} \text{cste}-\infty=-\infty \\ -\infty+\text{cste}=-\infty \\ -\infty-\infty=-\infty \end{cases} \end{cases}$$

On suppose $P\neq 0$ et $Q\neq 0$. On pose $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ avec $a_p\neq 0$ et $Q=\displaystyle\sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ avec $b_q\neq 0$

$$\begin{aligned} PQ &= \left(\sum_{k=0}^{p} a_k X^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{q} b_\ell X^\ell\right) \\ &= \sum_{k=0}^{p}\sum_{\ell=0}^{q} a_k b_\ell X^{k+\ell} \end{aligned}$$

donc $\deg(PQ) \leqslant p+q$ et le coefficient devant X^{p+q} est $a_p b_q \neq 0$ (car $\mathbb{K}$ est intègre)
donc $\deg(PQ) = p+q$ $\square$

Deuxième partie

Évaluation

Definition

Soit A une $\mathbb{K}$-algèble et $P \in \mathbb{K}[X]$. On pose $P = \sum_{k=0}^{n} e_k X^k$. Soit $a \in A$.

On pose

$$\begin{aligned} P(a) &= \sum_{k=0}^{n} e_k a^k \\ &= e_0 1_A + e_1 a + e_2 a^2 + \cdots + e_n a^n \in A \end{aligned}$$

On dit qu'on a évalué P en a, ou spécialisé X avec la valeur de a, ou remplacé X par a, substitué a à X.

Definition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.
On dit que a est une racine de P si $P(a) = 0_{\mathbb{K}}$

Definition

Soit $P \in \mathbb{K}[X] \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que c'est un polynôme de matrices.

Exemple

$P = 1 + 2X - 3X^2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} P(A) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definition

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Alors $P(Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k \quad \in \mathbb{K}[X]$
C'est la composée de P et Q.

Remarque ⚠ *Attention*

Ne pas confondre $\underbrace{P(X+1)}_{\text{composée}}$ et $\underbrace{P(X+1)}_{\text{produit}}$.

On a $\underbrace{P(X+1)}_{\text{produit}} = (X+1)\,P = P(X)\,(X+1) = P \times (X+1)$

Proposition

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $\begin{cases} Q \neq 0 \\ P \neq 0 \end{cases}$. On a

$$\deg\big(P(Q)\big) = \deg(P) \times \deg(Q)$$

$\square$

Exemple

$$\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$$

$P = X^2 + X + 1 \in \mathbb{K}[X]$ et $Q = 1 \in \mathbb{K}[X]$
$P \neq Q$

$$\begin{aligned} f_P : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ x &\longmapsto P(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Q : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ x &\longmapsto Q(x) \end{aligned}$$

$f_P\left(\overline{0}\right) = \overline{1} = f_Q\left(\overline{0}\right)$
$f_P\left(\overline{1}\right) = \overline{1} + \overline{1} + \overline{1} = \overline{1} = f_Q\left(\overline{1}\right)$
donc $f_P = f_Q$ alors que $P \neq Q$

Théorème

Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre. L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow A^A \\ P &\longmapsto f_P : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ a & \longmapsto & P(a) \end{array} \end{aligned}$$

vérifie

1. $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \varphi(P+Q) = \varphi(P) + \varphi(Q)$
2. $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \varphi(PQ) = \varphi(P) \times \varphi(Q)$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall P \in \mathbb{K}[X], \varphi(\lambda P) = \lambda \varphi(P)$

$\square$

Exemple

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$
$X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$

— $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre donc

$$\forall z \in \mathbb{C}, z^2 - 1 = (z - 1)(z + 1)$$

— $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre

$$\forall A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), A^2 - I_2 = (A - I_2)(A + I_2)$$