Chapitre 8

Ensemble relations et lois de compo

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 28 mars 2022

Table des matières

Première partie

Théorie naïve des ensembles

> **Définition:** Un ensemble est une collection finie ou infinie d'objets de même nature ou non. L'ordre de ces objets n'a pas d'importance.

EXEMPLE:
1. $\{1, x \mapsto x^2, \{1\}\}$ est un ensemble : ses éléments dont l'entier 1, la fonction $x \mapsto x^2$ et un ensemble contenant uniquement 1 (un singleton).
2. $\mathbb{N}$ est un ensemble infini

REMARQUE (Notation):
Soit E un ensemble et x un objet de E.
On écrit $x \in E$ ou bien $x \ni E$.

REMARQUE (⚠ Paradoxe):
On note Ω l'ensemble de tous les ensembles. Alors, $\Omega \in \Omega$.
Ce n'est pas le cas de tous les ensembles :

$$\mathbb{N} \notin \mathbb{N} \text{ car } \mathbb{N} \text{ n'est pas un entier}$$

On distingue donc 2 types d'ensembles :
- ceux qui vérifient $E \notin E$, on dit qu'ils sont ordinaires
- ceux qui vérifient $E \in E$, on dit qu'ils sont extra-ordinaires

On note O l'ensemble de tous les ensembles ordinaires.
- Supposons O ordinaire. Alors, $O \notin O$
  Or, O est ordinaire et donc $O \in O$ ↯
- Supposons O extra-ordinaire.
  Alors $O \in O$ et donc O ordinaire ↯

C'est un paradoxe

Pour éviter ce type de paradoxe, on a donné une définition axiomatique qui explique quelles sont les opérations permettant de combiner des ensembles pour en faire un autre.

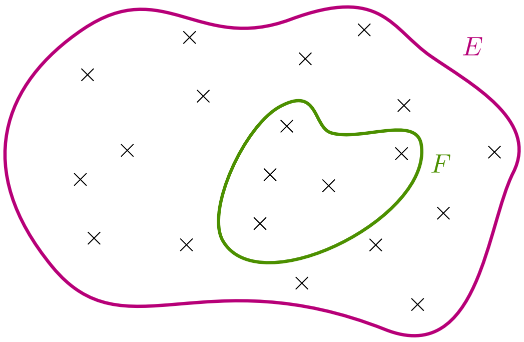
> **Définition:** Soit E un ensemble et F un autre ensemble. On dit que E et F sont égaux (noté $E = F$) si E et F contiennent les mêmes objets.

EXEMPLE:
1. $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{3, 2, 1, 2\}$
   On a bien $E = F$.
2. $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$ car $\begin{cases} -1 \in \mathbb{Z} \\ -1 \notin \mathbb{N} \end{cases}$
3. $E = \{0, \{0\}\} \neq \{0\} = F$
   car $\begin{cases} \{0\} \in E \\ \{0\} \notin F \end{cases}$
   mais, $F \in E$

> **Définition:** L'ensemble vide, noté $\varnothing$ est le seul ensemble à n'avoir aucun élément.

Définition: Soient E et F deux ensembles. On dit que F est <u>inclus</u> dans E, noté $F \subset E$ ou $E \supset F$ si tous les éléments de F sont aussi des éléments de E.

$$\forall x \in F, x \in E$$



Proposition: Pour tout ensemble E, $\varnothing \subset E$

Preuve (par l'absurde)*:*
Si $\varnothing \not\subset E$ alors $\exists x \in \varnothing, x \notin E$: une contradiction $\lightning$

$\square$

Exemple: 1. $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{1, 3\}$

On a $F \subset E$ mais pas $E \subset F$ car $\begin{cases} 2 \in E \\ 2 \notin F \end{cases}$

2. $F = \{0\}$ et $E = \{0, \{0\}\}$

— $F \in E$ car $\{0\} \in E$
— $F \subset E$ car $0 \in E$

3. $E = \{\{0\}\}$; $F = \{0\}$
— $F \not\subset E$ car $0 \notin E$
— $F \in E$

4. $E = \{\{\{0\}\}\}$; $F = \{0\}$
— $F \notin E$
— $F \not\subset E$
— $\varnothing \subset F$

— $\varnothing \subset E$

Définition: Soit E un ensemble. On peut former l'ensemble de toutes les parties de E (une partie de E est un ensemble F avec $F \subset E$). On le note $\mathscr{P}(E)$

$$A \in \mathscr{P}(E) \iff A \subset E$$

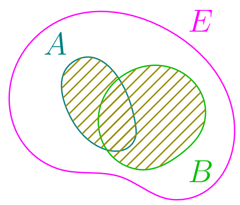
EXEMPLE:

1. $E = \{42\}$
   Les sous-ensembles de E sont $\varnothing$ et $\{42\} = E$ donc
   $$\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{42\}\}$$
2. $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$
3. $E = \{0, 1\}$ donc $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$
4. $E = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ donc $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$
5. $E = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

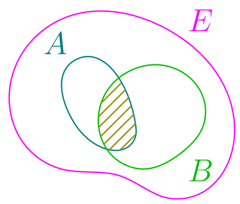
$$\begin{aligned}\mathscr{P}(\mathscr{P}(E)) &= \mathscr{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, E\}) \\ &= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}, \{E\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}, \{\varnothing, E\}, \{\{\varnothing\}, \\ &\quad \{\{\varnothing\}\}\}, \{\{\varnothing\}, E\}, \{\{\{\varnothing\}\}, E\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, E\}, \\ &\quad \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}, E\}, \{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, E\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, E\}\}\end{aligned}$$

Définition: Soit E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$

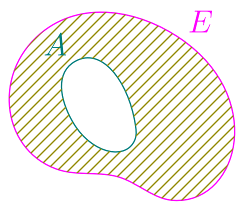
1. La réunion de A et B est
   $$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



2. L'intersection de A et B est
   $$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

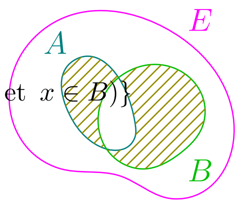


3. Le complémentaire de A dans E est
   $$E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\} = C_E A$$



4. La <u>différence symétrique</u> de A et B est

$$\begin{aligned} A\Delta B &= \{x \in E \mid (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \notin A \text{ et } x \in B)\} \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$



Proposition: Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$

1. $A \cap A = A$
2. $B \cap A = A \cap B$
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4. $A \cap \varnothing = \varnothing$
5. $A \cap E = A$
6. $A \cup A = A$
7. $B \cup A = A \cup B$
8. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
9. $A \cup \varnothing = A$
10. $A \cup E = E$
11. $(E \setminus A) \setminus A = E \setminus A$
12. $E \setminus (E \setminus A) = A$
13. $E \setminus \varnothing = E$
14. $E \setminus E = \varnothing$
15. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
16. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
17. $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$
18. $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$

Preuve: 16. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

— Soit $x \in A \cap (B \cup C)$ donc $x \in A$ et $x \in B \cup C$

<u>Cas 1</u> $x \in B$, alors $x \in A \cap B$ et donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
<u>Cas 2</u> $x \in C$, alors $x \in A \cap C$ et donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
On a prouvé

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

— Soit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
<u>Cas 1</u> $x \in A \cap B$ donc $x \in A$ et $x \in B$ donc $x \in B \cup C$ et donc $x \in A \cap (B \cup C)$
<u>Cas 2</u> $x \in A \cap C$ donc $x \in A$ et $x \in C$ donc $x \in B \cup C$ et donc $x \in A \cap (B \cup C)$
On a prouvé

$$A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

17. $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$

— Montrons que $x \in E \setminus (A \cup B) \implies x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$
Soit $x \in E \setminus (A \cup B)$ donc $x \notin A \cup B$
— Si $x \in A$, alors $x \in A \cup B$ ↯
donc $x \notin A$ i.e. $x \in E \setminus A$

  - — Si $x \in B$ alors, $x \in A \cup B$ $\lightning$
    Donc $x \notin B$ i.e. $x \in E \setminus B$

  On en déduit que $x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$
- $x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$. Montrons que $x \in E \setminus (A \cup B)$
  On suppose que $x \notin E \setminus (A \cup B)$ donc $x \in A \cup B$
  - Si $x \in A$, on a une contradiction car $x \in E \setminus A$
  - Si $x \in B$, on a une contradiction car $x \in E \setminus B$

  donc $x \in E \setminus (A \cup B)$

$\square$

Deuxième partie

Applications

Définition: Une <u>application</u> f est la donnée de
- un ensemble E appelé <u>ensemble de départ</u>
- un ensemble F appelé <u>ensemble d'arrivée</u>
- une fonction qui associe à tout élément x de E un unique élément de F noté $f(x)$

L'application est notée

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

EXEMPLE: 1. Soit $\mathscr{P}$ le plan (affine) et $A \in \mathscr{P}$. Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des droites.

$$\begin{aligned} f : \mathscr{P} \setminus \{A\} &\longrightarrow \mathscr{D} \\ B &\longmapsto (AB) \end{aligned}$$

2. $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$
$F = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

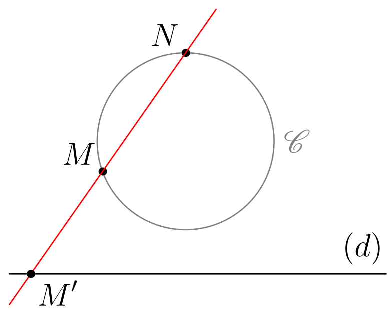
3. $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ f &\longmapsto f'\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

4. $E = [0,1]$ et $F = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$

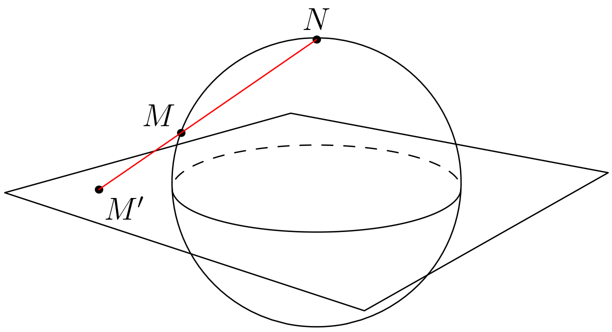
$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto \int_a^x t^2 \ln(t)\ dt \end{aligned}$$

5.



$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{C} \setminus \{N\} &\longrightarrow (d) \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

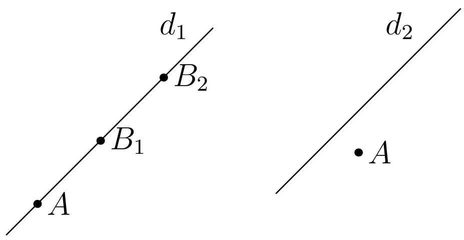
6.



> **Définition:** Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est
> — injective si tout élément de F a au plus un antécédent par f
> — bijective si tout élément de F a un unique antécédent par f
> — surjective si tout élément de F a au moins un antécédent par f

EXEMPLE (suite des exemples précédents):

1. L'application n'est ni injective ni surjective



B_1 et B_2 sont deux antécédants de d_1
d_2 n'a pas d'antécédant par f

2. L'application n'est pas injective :
— $f : x \mapsto x$ est continue
— $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ et $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + 42$ sont deux antécédants de f.
Mais, l'application est surjective d'après le théorème fondamental de l'analyse
3. L'application n'est pas injective ($x \mapsto 0$ et $x \mapsto 42$ sont deux antécédants de 0) mais elle est surjective ($\forall x \in \mathbb{R}, x \mapsto ax$ est un antécédant de a).
4. L'application est injective mais pas surjective (les images sont des primitives de $x \mapsto x^2 \ln(x)$)
5. et 6. sont bijectives

Définition: Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. L'application notée $g \circ f$ est définie par

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

On dit que c'est la composée de f et g.

Proposition: Soient $f : E \to F, g : F \to G, h : G \to G$. Alors, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Preuve:
Par définition, $g \circ f : E \to F$ donc $h \circ (g \circ f) : E \to H$
et $h \circ g : F \to H$ donc $(h \circ g) \circ f : E \to H$ Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f)(x) &= h(g \circ f(x)) \\ &= h(g(f(x))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (h \circ g) \circ f(x) &= h \circ g(f(x)) \\ &= h(g(f(x))) \end{aligned}$$

Donc, $h \circ (g \circ f)(x) = (h \circ g) \circ f(x)$ $\square$

Remarque (⚠ Attention):
En général, $g \circ f \neq f \circ g$

Par exemple, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$

Alors, $f \circ g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ et $g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$

donc $f \circ g \neq g \circ f$

Proposition: Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$

1. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective
2. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective
3. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective
4. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective

Preuve: 1. On suppose $g \circ f$ injective. On veut montrer que f est injective. Soient $(x, y) \in E^2$. On suppose $f(x) = f(y)$. Montrons que $x = y$.
Comme $f(x) = f(y)$, $g(f(x)) = g(f(y))$ i.e. $g \circ f(x) = g \circ f(y)$
Or, $g \circ f$ injective donc $x = y$

2. On suppose $g \circ f$ surjective. On veut montrer que g est surjective. Soit $y \in G$. On cherche $x \in F$ tel que $g(x) = y$.
Comme $g \circ f : E \to G$ surjective, y a un antécédant $z \in E$ par $g \circ f$.
On pose $x = f(z) \in F$ et on a bien $g(x) = y$
3. On suppose f et g injectives. Montrons que $g \circ f$ injective. Soient $x, y \in E$. On suppose $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Montrons $x = y$
On sait que $g(f(x)) = g(f(y))$. Comme g est injective, $f(x) = f(y)$ et comme f est injective, $x = y$
4. On suppose f et g surjectives. Soit $y \in G$. On cherche $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = y$
Comme g est surjective, y a un antécédant $z \in F$ par g
Comme f est surjectives, z a un antécédant $x \in E$ par f
On en déduit $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(z) = y$

□

Remarque:
$f : E \longrightarrow F$

$$f \text{ injective} \iff \Big(\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \implies x = y\Big)$$

Définition: Soit $f : E \to F$ une <u>bijection</u>. L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \text{l'unique antécédant de } y \text{ par } f \end{array} \right.$ est la <u>réciproque</u> de f notée f^{-1}

Définition: L'<u>identité de E</u> est id_E : $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$

Proposition: Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$

$$\left.\begin{array}{r} f \circ g = \mathrm{id}_F \\ g \circ f = \mathrm{id}_E \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} f \text{ bijective} \\ f^{-1} = g \end{array}\right.$$

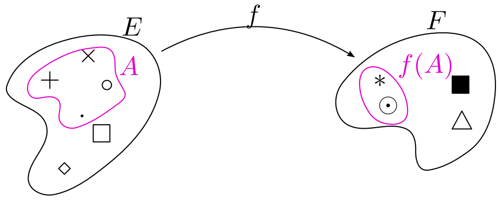
Preuve (déjà faite)*:*

□

Définition: Soit $f : E \to F$

1. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. L'image directe de A par f est

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$



2. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. L'image réciproque de B par f est

$$f^{-1}(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}$$