Chapitre 3

Étude de fonctions

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 20 février 2022

Table des matières

Étudier une fonction c'est déterminer tous les éléments (tangentes, asymptotes) qui permettent d'obtenir l'allure de la courbe représentative de la fonction.

Exemple

$$f : x \mapsto \frac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}$$

1. On détemine le domaine de définition de la fonction f.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x^2+2x-3=0 \iff x \in \{-3,1\} \quad \text{car} \quad \begin{cases} -3+1=-2=-\dfrac{b}{a} \\ -3\times 1=-3=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

   Donc f est définie sur $\mathscr{D}$ avec $\mathscr{D} =]-\infty,-3[\cup]-3,-1[\cup]-1,+\infty[$

2. Asymptotes et limites
   Soit $x \in \mathscr{D}$

$$f(x) = \frac{\cancel{x^2}\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1$$

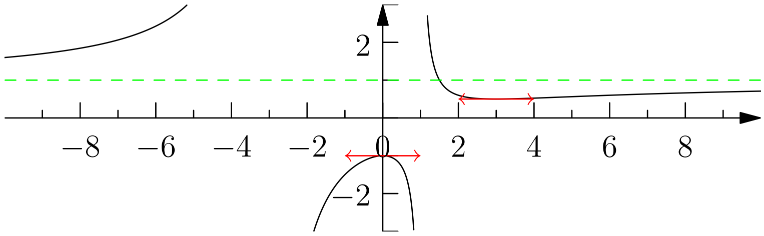
$$\left.\begin{array}{l} x^2-2x+3 \xrightarrow[x\to-3]{} 9+6+3=18 \\ x^2+2x-3 \xrightarrow[x\to-3]{} 0 \end{array}\right\} \text{donc} \begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \underset{<}{\to} -3]{} +\infty \\ f(x) \xrightarrow[x \underset{>}{\to} -3]{} -\infty \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2-2x+3 \xrightarrow[x\to1]{} 2 \\ x^2+2x-3 \xrightarrow[x\to1]{} 0 \end{array}\right\} \text{donc} \begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \underset{<}{\to} 1]{} -\infty \\ f(x) \xrightarrow[x \underset{>}{\to} 1]{} +\infty \end{cases}$$

3. f est dérivable sur $\mathscr{D}$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathscr{D}, f'(x) &= \frac{2(x-1)(x^2+2x-3)-2(x^2-2x+3)(x+1)}{(x^2+2x-3)^2} \\ &= \frac{2(2x^2-6x)}{(x^2-2x+3)^2} \\ &= \frac{4x(x-4)}{(x^2-2x+3)^2} \end{aligned}$$

x	$+\infty$		-3		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1


2
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
−2