Chapitre 6

Équations différentielle linéaire

Hugo Salou MP2I

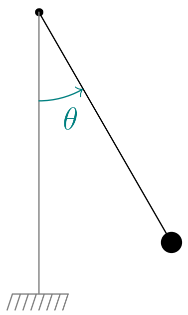
Dernière mise à jour le 28 mars 2022

Table des matières

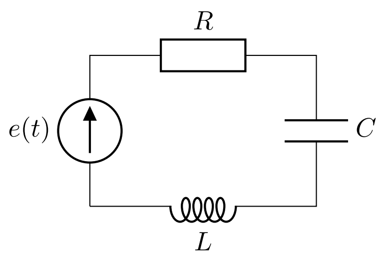
Première partie

Définition: Une <u>équation différentielle</u> est une égalité faisant intervenir une fonction inconnue y ainsi que ses dérivées successives $y', y'', y^{(3)}, \dots, y^{(n)}$.

EXEMPLE:

1. $y^{(3)} + \ln(y') = e^y$
2. 

   On a $\ddot{\theta} + \sin(\theta) = 0$ i.e. $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \sin(\theta) = 0$

   Pour les "petits angles", $\sin(\theta) \simeq 0$. On résout donc
   $$\ddot{\theta} = -\theta$$
3. $$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = e(t)$$
   $$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = e(t)$$
   

4. Modèle de population : $\dfrac{dN}{dt} = \lambda N(1-N)$

Définition: Une <u>équation différentielle linéaire d'ordre n</u> est de la forme
$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b(t)$$
où $b, a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des fonctions connues et continues sur un intervalle I. On dit que b est le <u>second membre</u> de l'équation.

EXEMPLE ($\cos(t)y'' + \sin(t)y' = \tan(t)$):

Proposition (Principe de superposition)**:** Soient b_1 et b_2 continues sur I. Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ également continues sur I.
$$(E_1) : \quad \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = b_1$$
$$(E_2) : \quad \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = b_2$$

Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$.

$$(E) : \quad \sum_{k=1}^{n} a_k y^{(k)} = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 \text{ solution de } (E_1) \\ y_2 \text{ solution de } (E_2) \end{array}\right\} \implies \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \text{ solution de } (E)$$

Preuve:
On pose $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ dérivable n fois car c'est le cas de y_1 et y_2 Donc,

$$\forall k \in [\![0, n]\!], y^{(k)} = \lambda_1 y_1^{(k)} + \lambda_2 y_2^{(k)}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\lambda_1 y_1^{(k)} + \lambda_2 y_2^{(k)} \right) \\ &= \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} a_k y_1^{(k)} + \lambda_2 \sum_{k=1}^{n} a_k y_2^{(k)} \\ &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \end{aligned}$$

□

Proposition: Soit (E) l'équation différentielle $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = b$ où $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des fonctions homogènes. L'équation homogène associée à (E) est

$$(H) : \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0$$

Les solutions de (E) sont toutes de la forme $h + y_0$ où h est solution de (H) et y_0 solution de (E).

Preuve:
Soit y une solution de (E) et y_0 une solution particulière de (E). On pose $h = y - y_0$.
D'après le principe de superposition, h est une solution de (H).
Réciproquement, si h est une solution de (H) et y_0 une solution de (E) alors $h + y_0$ est aussi solution de (E). □

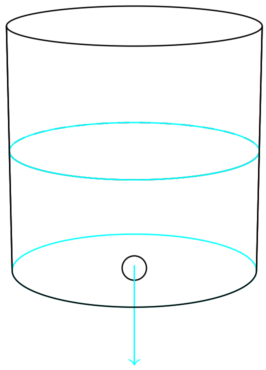
Théorème (Théorème de Cauchy)**:** Soit (E) une équation linéaire différentielle.

$$(E): \quad y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = b$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont continues sur un intervalle I.
Soit $t_0 \in I$ et $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$.
Il existe **une et une seule** fonction y telle que

$$\begin{cases} y \text{ solution de } (E) \\ \forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, y^{(i)}(t_0) = \alpha_i \end{cases}$$

Exemple:



On ne peut pas déduire le passé d'un sceau percé, son équation est non-linéaire.

$$h' = -c\sqrt{h} \text{ avec } c \in \mathbb{R}_*^+$$

Deuxième partie

Soit (E) l'équation $y' + ay = b$ où a et b sont continues sur un intervalle I.

Proposition: Soit A une primitive de a sur un intervalle I.

$$(H): \quad y' + ay = 0$$

Les solutions de (H) sont $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$

Preuve:
Soit y une fonction dérivable sur I. On pose

$$z : t \mapsto y(t)e^{A(t)}$$

dérivable sur I et

$$\begin{aligned} \forall t \in I, z'(t) &= y'(t)e^{A(t)} + y(t)A'(t)e^{A(t)} \\ &= \left(y'(t) + a(t)y(t)\right)e^{A(t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (H) &\iff \forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = 0 \\ &\iff \forall t \in I, z'(t) = 0 \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall t \in I, z(t) = \lambda \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall t \in I, y(t) = \lambda e^{-A(t)} \end{aligned}$$

□

Remarque (pseudo preuve):

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + a(t)y = 0 &\iff \frac{dy}{y} = -a(t)dt \\ &\iff \int \frac{dy}{y} = \int -a(t)dt \\ &\iff \ln(y) = -A(t) + K \\ &\iff y = e^{-A(t)+K} \\ &\iff y = \lambda e^{-A(t)} \text{ avec } \lambda = e^K \end{aligned}$$

Troisième partie

Annexe

$y : I \to E$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$$\begin{aligned} (*) : \qquad & y' + a(x)y = 0 \text{ et } y(x_0) = 0 \\ \iff & \forall x \in I, y(x) = -\int_{x_0}^{x} a(u)y(u)\ du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T : E^I &\longrightarrow E^I \\ y &\longmapsto \left(x \mapsto -\int_{x_0}^{x} a(u)y(u)\ du \right) \end{aligned}$$

donc $(*) \iff T(y) = y$