TD 10 Nombres entiers

Exercice 1: ★

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2n\sqrt{n} < 3\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}\right)$.

Exercice 2: ★

Soit (u_n) la suite définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n$.

Exercice 3: ★

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}$.

Exercice 4: ★

(1) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on dire de (a_n) ?

(2) Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $b_0 = 1$ et $b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} b_k b_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $b_n \geq 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5: ★

Le raisonnement par récurrence suivant est faux. Trouver l'erreur.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$ la propriété : "n caryons de couleur sont toujours de la même couleur".

— La propriété $P(1)$ est vraie car un crayon de couleur est de la même couleur que lui-même.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ est vraie. On considère $n+1$ crayons de couleur. On en retire un. Il reste donc n crayons de couleur, qui d'après $P(n)$ sont tous de même couleur. On repose le crayon et on en retire un autre. De nouveau, les n crayons restants sont tous de même couleur, et donc le premier crayon retiré est bien de la même couleur que les autres. Ils sont donc tous de même couleur, donc $P(n+1)$ est vraie.

Exercice 6: ★★★, récurrence de Cauchy

. Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ telle que

— $1 \in A$

— $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n \in A \implies 2n \in A)$

— $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1 \in A \implies n \in A)$.

Montrer que $A = \mathbb{N}^*$. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des réels positifs, $\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$.

Exercice 7: ★★★

Soit P un prédicat dépendant d'un paramètre n entier tel que $P(0)$ est vraie, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \implies P(n+3)$ et $P(n+4)$.

A-t-on $P(n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$? pour n assez grand ?

Exercice 8: ★

On considère la suite (a_n) définie par

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1} a_{n-1}. \end{cases}$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$.

Exercice 9: ★★

Montrer que tout entier $n \geq 1$ peut s'écrire comme somme de puissances de 2 toutes distinctes.

Exercice 10: ★★★

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction g_n par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} e^{x^k}.$$

On note aussi $e_k : x \mapsto e^{x^k}$.

0.1) Soit $j, k \in \mathbb{N}^*$. Écrire le développement limité à l'ordre kj de e^{x^k} au voisinage de 0.

0.2) En déduire que pour tout $k, n \in \mathbb{N}^*$,

$$e_k^{(n)}(0) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n/k)!} & \text{si } k \text{ divise } n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

0.3) En déduire que n est premier si et seulement si $g_n^{(n)}(0) = 1$.

Exercice 11: ★

On considère un triangle rectangle dont les trois côtés sont de longueurs entières.

(1) Montrer qu'au moins l'une des longueurs des côtés est paire.

(2) Montrer qu'au moins l'une des longueurs des côtés est multiple de 3.

(3) Montrer qu'au moins l'une des longueurs des côtés est multiple de 5.

Exercice 12: ★

Soient k, a et b trois entiers. Montrer que $(ka) \wedge (kb) = k(a \wedge b)$.

Exercice 13: ★

Trouver deux entiers naturels connaissant leur somme 360 et leur PGCD 18. Combien de solutions le problème admet-il ?

Exercice 14: ★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver le PPCM de n, $n+1$ et $n(n+2)$.

Exercice 15: ★

Le nombre d'élèves dans une classe est inférieur à 40. Si l'on range les élèves par files de 12 ou de 9, il en reste 1 chaque fois. Quel est le nombre d'élèves de cette classe ?

Exercice 16: ★

Soient a et b deux entiers. Montrer que $a^2 \vee ab \vee b^2 = (a \vee b)^2$.

Exercice 17: ★

On va prouver qu'il existe une infinité de nombres premiers. On raisonne pour cela par l'absurde : on suppose qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombre premiers.

(1) On forme N le produit de tous les nombres premiers. Montrer qu'il existe un nombre premier p qui divise $N+1$.

(2) Montrer que p divise N.

(3) En déduire que p divise 1.

Exercice 18: ★

Trouver un nombre N de quatre chiffres, terminé par 9, divisible par 147 et qui soit un carré parfait.

Exercice 19: ★

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. 6 jours plus tard, il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome. Le but de l'exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.

(1) Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1. Montrer que le couple (u, v) est solution de l'équation :

$$35x - 27y = 2.$$

(2) Résoudre cette équation diophantienne.

(3) Déterminer la solution (u, v) permettant de donner J_1.

(4) Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?

(5) Si l'astronome a manqué ce rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

Exercice 20: ★★

En utilisant la formule du binôme, démontrer que

(1) $2^n + 1$ est divisible par 3 si et seulement si n est impair ;

(2) $3^{2n+1} + 2^{4n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 21: ★★★

Soit $n \in \mathbb{N}$.

(1) Montrer qu'il existe deux entiers a_n et b_n tels que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

(2) Montrer que $(1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$.

(3) En déduire que $a_n \wedge b_n = 1$.

Exercice 22: ★★★

On pose a la somme des chiffres de 4444^{4444}, b la somme des chiffres de a, et c la somme des chiffres de b. Trouver c.

Exercice 23: ★★

Combien 15! admet-il de diviseurs ?

Exercice 24: ★

Montrer que si x et y sont des entiers naturels tels que x^2 divise y^2, alors x divise y.

Exercice 25: ★★★

Soit p un nombre premier et $k \in [\![1, p-1]\!]$. Montrer que p divise $\binom{p}{k}$.

Exercice 26: ★★★★

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\pi(x)$ le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à x. Le but de cet exercice est de prouver la minoration

$$\forall n \geq 3,\ \pi(2n+1) \geq \ln(2) \times \frac{2n+1}{\ln(2n+1)}.$$

On fixe un entier $n \geq 3$.

(1) Calculer $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^n\,dx$ pour $(p,q) \in \mathbb{N}$.

(2) On note D_n le ppcm de $n+1, n+2, \cdots, 2n+1$. En calculant autrement $I_{n,n}$, établir l'inégalité $D_n \geq \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}$.

(3) Montrer que $D_n \leq (2n+1)^{\pi(2n+1)}$ et conclure.

Exercice 27: ★★★

Soit p un nombre premier et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n < p$. Montrer que $\dfrac{(p-1)(p-2)\dots(p-n)}{n!} - (-1)^n$ est un entier divisible par p.

Exercice 28: ★★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe n entiers consécutifs non premiers.

Exercice 29: ★★★

Une application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ est dite *multiplicative* si

$$\forall a, b \in \mathbb{N},\ \Big(a \wedge b = 1 \implies f(ab) = f(a)f(b)\Big).$$

(1) Montrer que f est uniquement déterminée par ses valeurs en les entiers de la forme p^α où p est un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}$.

(2) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f(a)f(b) = f(a \wedge b)f(a \vee b)$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\sigma(n)$ la somme de tous les diviseurs positifs de n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sigma(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d>0}} d.$$

(1) On veut montrer que σ est une fonction multiplicative.

(a) Soit p un nombre premier. Calculer $\sigma(p)$.

(b) Soit p un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}$. Calculer $\sigma(p^\alpha)$.

(c) Soit $a \in \mathbb{N}^*$, p un nombre premier tel que $p \nmid a$, et $\alpha \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sigma(ap^\alpha) = \sigma(a)\sigma(p^\alpha)$.

(d) En déduire que σ est multiplicative.

On définit la *fonction de Moebius* par la formule

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1\,; \\ (-1)^k & \text{si } n = p_1 \dots p_k \text{ où } p_1, \dots, p_k \text{ sont des nombres premiers distincts}\,; \\ 0 & \text{si } n \text{ est divisible par un entier de la forme } p^2 \text{ avec } p \text{ premier.} \end{cases}$$

(1) Montrer que μ est une fonction multiplicative.

(2) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers distincts.

(a) Dénombrer les diviseurs positifs de n.

(b) Soit $t \in [\![1, r]\!]$. Combien y a-t-il de diviseurs de n de la forme $p_{i_1} \dots p_{i_t}$ avec $i_1, \dots, i_t$ deux-à-deux distincts ?

(c) En déduire que $\sum_{\substack{d|n \\ d>0}} \mu(d) = 0$.

(3) Que vaut $\sum_{\substack{d|n \\ d>0}} \mu(d)$ quand $n = 1$?