TD 19 Applications linéaires

Exercice 1: ★

E désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 ; à tout élément P de E, on fait correspondre le polynôme $Q = \varphi(P)$ défini par $Q = XP' - P$.

(1) Montrer que l'application φ est une application linéaire de E dans E.

(2) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Exercice 2: ★

Soient f,g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x + e^{-x}, \quad g(x) = e^x - e^{-x} \quad \text{ et } h(x) = 1.$$

On note E le sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendré par (f, g, h).

(1) Montrer que la famille (f, g, h) est libre.
Quelle est la dimension de E ?

(2) Montrer que la dérivation induit un endomorphisme φ de E.

Exercice 3: ★★

Soit $E = \mathbb{R}^4$ rapporté à la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) et f l'endomorphisme de E défini par

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \\ f(e_2) = e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4 \\ f(e_3) = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3 + 2e_4 \\ f(e_4) = -e_1 - 2e_2 - e_3 - e_4 \end{cases}$$

(1) Calculer $f((x, y, z, t))$ où $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

(2) Déterminer une base du noyau et de l'image de f.

(3) f est-elle injective, surjective ?

(4) Caractériser $Im(f)$ par un système d'équations.

Exercice 4: ★★

On note E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 , avec
$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On rappelle que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de E.
Soit U la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, on définit l'application f de E dans E par $f(M) = UM - MU$.

(1) Montrer que f est un endomorphisme de E.

(2) Calculer les matrices $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ et $f(e_4)$.

(3) Déterminer le noyau et l'image de f, on précisera en particulier une base de chacun de ces sous-espaces de E.

Exercice 5: ★★

Soit f et g des endomorphismes d'un espace vectoriel E.
On dit qu'un ensemble F est stable par f si et seulement si pour tout $u \in F$, $f(u) \in F$.
Établir que, si $f \circ g = g \circ f$, alors $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont stables par f.

Exercice 6: ★★★

On note S l'ensemble de toutes les suites (x_n) vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n,$$

où a et b sont deux réels vérifiant $a^2 + 4b > 0$, et on note

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & S & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x_n) & \mapsto & (x_0, x_1). \end{array}$$

Le but de l'exercice est de démontrer que S est l'ensemble des suites de la forme $(A\alpha^n + B\beta^n)$ où α et β sont les solutions de l'équation caractéristique $x^2 - ax - b = 0$, et A et B deux constantes déterminées par les valeurs initiales.

(1) Montrer que S est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(2) Montrer que Φ est un isomorphisme. En déduire la dimension de S.

(3) Montrer qu'une suite géométrique non nulle de raison r se trouve dans S si et seulement si r est solution de l'équation caractéristique.

(4) Montrer que les suites (α^n) et (β^n) forment une famille libre de S.

(5) Conclure.

Exercice 7: ★★★

Let E be a vector space and p a linear projector. Show that the map

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & L(E) & \to & L(E) \\ & f & \mapsto & \frac{1}{2}(f \circ p + p \circ f) \end{array}$$

is linear and find its kernel.

Exercice 8: ★★★

Let f and g be two endomorphisms of E such that $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

(1) Show that $\operatorname{Im} f$ is supplementary to $\ker g$.

(2) Show that $f(\operatorname{Im} g) = \operatorname{Im} f$.

Exercice 9: ★★★

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On note E^* l'ensemble de toutes les applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$. On dit que E^* est le dual de E.

(1) Montrer que E^* est un espace vectoriel.

(2) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On note pour tout i, e_i^* l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à tout vecteur u de E associe sa $i$ème coordonnée dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ forme une base de E^*. En déduire la dimension de E^*.

(3) Pour tout $u \in E$, on note $\Phi(u)$ l'application qui à $f \in E^*$ associe le réel $f(u)$. Montrer que $\Phi(u)$ est une application linéaire.

(4) On note E^{**} le dual de E^* (de sorte que $\Phi(u) \in E^{**}$ pour tout $u \in E$). On dit que E^{**} est le bidual de E. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & E & \to & E^{**} \\ & u & \mapsto & \Phi(u) \end{array}$$

est une application linéaire injective.

(5) En déduire que E et son bidual E^{**} sont isomorphes.

Exercice 10: ★★★

Let f be an endomorphism of E (E a finite dimensional vector space) and F a subspace of E. Show that $\dim(\ker f \cap F) \geq \dim F - \mathrm{rg}(f)$.

Exercice 11: ★★★

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n, f et g deux endomorphismes de E.

(1) Montrer que $\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g - n \leq \mathrm{rg}(f \circ g)$. (On pourra appliquer le théorème du rang à la restriction de f à $\mathrm{Im}\, g$.)

(2) Pour $n = 3$, trouver tous les endomorphismes de E tels que $f^2 = 0$.

Exercice 12: ★★

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_N[X]$, on pose $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

(1) Pour $P \in \mathbb{R}_N[X]$, exprimer $\deg(\Delta(P))$ en fonction de $\deg(P)$.

(2) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$.

(3) Déteriner le noyau de Δ.

(4) Calculer le rang de Δ et en déduire que Δ est surjective.

On considère la famille (P_n) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_n = \dfrac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n-1} (X-k) = \dfrac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}. \end{cases}$$

(1) Pour tout $k \leq N$, calculer $\Delta(P_k)$.

(2) Montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_N)$ est une base de $\mathbb{R}_N[X]$.

(3) Déterminer les coordonnées de X^3 dans la base $(P_0, \dots, P_3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ et en déduire un polynôme Q tel que $\Delta(Q) = X^3$. En déduire une formule pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.