Chapitre 16

# Dérivation

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 23 février 2022

# Table des matières

# Première partie

# Définition et premières propriétés

Dans ce paragraphe, $f$ désigne une fonction définie sur un intervalle ouver non vide $I$ à valeurs réelles.

**Definition**

Soit $a \in I$. On dit que $f$ est dérivable en $a$ si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite qui est finie quand $x \to a$.
Dans ce cas, cette limite est notée $f'(a)$ et est appelée nombre dérivée de $f$ en $a$
On dit que $f$ est dérivable sur $I$ si $f$ est dérivable en tout $a \in I$.
L'application $\begin{array}{c} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ a \longmapsto f'(a) \end{array}$ est la dérivée de $f$ et est notée $f'$

**Proposition**

$f$ est dérivable en $a \iff f$ a un développement limité d'ordre 1 au voisinage de $a$

■

**Proposition**

Si $f$ est dérivable en $a$ alors $f$ est continue en $a$.

■

**Proposition**

Soient $f$ et $g$ dérivables en $a$

1. $f+g$ est dérivable en $a$ et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2. $f \times g$ est dérivable en $a$ et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
3. Si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en $a$ et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

■

**Proposition**

Soit $f$ dérivable en $a$ et $g$ dérivable en $f(a)$. Alors, $f \circ g$ est dérivable en $a$ et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

■

**Proposition**

On suppose que $f$ est bijective dérivable en $a$ et $f'(a) \neq 0$. Si $f^{-1}$ est continue, alors $f^{-1}$ est dérivable en $f(a)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

■

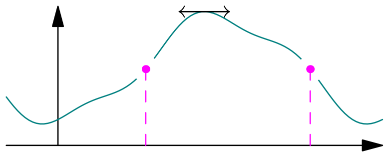
# Deuxième partie

# Théorème de Rolle et accroissements finis

**Théorème** **Théorème de Rolle**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$.
Alors,

$$\exists c \in ]a,b[, f'(c) = 0$$



$\blacksquare$

**Definition**

On dit que $f$ présente un maximum local en $a$ s'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in ]a-\eta, a+\eta[, f(x) \leqslant f(a)$$

et un minimum local en $a$ s'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in ]a-\eta, a+\eta[, f(x) \geqslant f(a)$$

Un extremum local est un minimum local ou un maximum local.

**Proposition**

Soit $a \in I$ tel que $f(a)$ est un extremum local de $f$ où $f$ est dérivable en $a$.
Alors, $f'(a) = 0$ $\square$

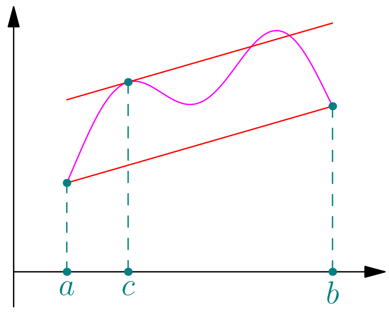
**Definition**

Soit $f$ dérivable et $a \in I$. On dit que $a$ est un point critique de $f$ si $f'(a) = 0$.
On dit que $f(a)$ est une valeur critique

**Théorème** **Théorème des accroissements finis**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Alors, il existe $c \in ]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$$




■

**Proposition**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable avec $I$ un intervalle non vide.

1. $f$ est croissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$
2. $f$ est décroissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \leqslant 0$
3. $\forall x \in I, f'(x) > 0 \implies f$ strictement croissante
4. $\forall x \in I, f'(x) < 0 \implies f$ strictement décroissante
5. $f$ constante $\iff \forall x \in I, f'(x) = 0$

■

**Théorème** **Théorème de la limite de la dérivée**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue (sur $I$), $a \in I$. On suppose $f$ dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et que $\lim\limits_{x \underset{\neq}{\to} a} f'(x)$ existe.

Alors,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \underset{\neq}{\to} a]{} \lim_{x \underset{\neq}{\to} a} f'(a)$$

■

**Proposition**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, |f'(x)| \leqslant M$$

Alors $f$ est $M$-lipschitzienne sur $I$.

■

# Troisième partie

# Dérivées $n$-ièmes

**Definition**

On dit que $f$ est une fois dérivable si $f$ est dérivable. Dans ce cas, on note $f^{(1)}$ la fonction $f'$.
Pour $n \in \mathbb{N}_*$, on dit que $f$ est dérivable $n$ fois si $f$ est dérivable $n-1$ fois et $f^{(n-1)}$ est dérivable une fois. Dans ce cas, $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

*Remarque* *Convention*

$$f^{(0)} = f$$

**Definition**

$f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ si $f$ est dérivables $n$ fois et $f^{(n)}$ est continue.

**Proposition**

Soit $f$ dérivable $n$ fois et $k \leqslant n$.
Alors $f$ est dérivables $k$ fois et $f^{(n)} = \left(f^{(k)}\right)^{(n-k)}$ □

**Proposition**

Soit $f$ et $g$ deux fonctions dérivables $n$ fois en $a$.
Alors, $f+g$ est dérivable $n$ fois en $a$ et

$$(f+g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)$$

Si $f$ et $g$ sont de classe $\mathscr{C}^n$, alors, $f+g$ est de classe $\mathscr{C}^n$

■

**Proposition** **Leibniz**

Soient $f$ et $g$ dérivables $n$ fois en $a$. Alors, $f \times g$ est dérivables $n$ fois en $a$. et

$$(*): \qquad (f \times g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n)}(a) g^{(n-k)}(a)$$

Si $f$ et $g$ sont de classe $\mathscr{C}^n$ alors $f \times g$ est de classe $\mathscr{C}^n$.

■

**Proposition**

Soient $f$ et $g$ dérivables $n$ fois (resp. de classe $\mathscr{C}^n$). On suppose $g(a) \neq 0$.
Alors, $\dfrac{f}{g}$ est dérivables $n$ fois (resp. $\mathscr{C}^n$) en $a$.

■

**Proposition**

Soit $f$ dérivable $n$ fois en $a$ et $g$ dérivable $n$ fois en $f(a)$ (resp. $f$ et $g$ de classe $\mathscr{C}^n$).
Alors, $g \circ f$ est dérivable $n$ fois en $a$ (resp. de classe $\mathscr{C}^n$).

■

**Definition**

On dit que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si $f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, i.e. $f$ est dérivable une infinité de fois.

**Proposition** **formule de Taylor avec reste intégral**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et $a \in I$. Alors

$$(*) \qquad \forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt$$

■

**Proposition** **Inégalité de Taylor-Lagrange**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M$$

Alors, pour tout $a \in I$,

$$\forall x \in I, \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| \leqslant M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

■

# Quatrième partie

# Fonctions à valeurs complexes

**Definition**

Soient $f : I \to \mathbb{C}$, ($I$ intervalle de $\mathbb{R}$) et $a \in I$.
$f$ est <u>dérivable en $a$</u> si $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{C}$

**Proposition**

$$f \text{ est dérivable en } a \iff \mathfrak{Re}(f) \text{ et } \mathfrak{Im}(f) \text{ sont dérivables en } a$$

Dans ce cas, $f'(a) = \mathfrak{Re}(f)'(a) + i\mathfrak{Im}(f)'(a)$ □

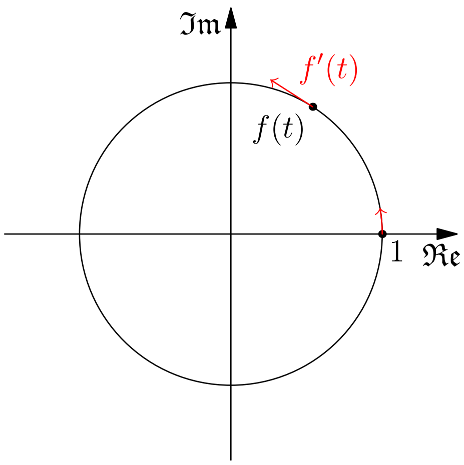
**Proposition**

La somme, le produit, de fonctions dérivables sont dérivables ; le quotient également si le dénominateur ne s'annule pas. □

**Proposition**

idem avec les dérivées $n$-ièmes □

*Remarque* *Attention* ⚠
Le théorème de Rolle n'est plus vraie.




$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{it} \end{aligned}$$

$f(0) = f(2\pi) = 1$
$f$ est continue sur $[0, 2\pi]$ et dérivable sur $]0, 2\pi[$
$\forall t, f'(t) = ie^{it} \neq 0$

**Proposition**

La formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange sont aussi vrais dans $\mathbb{C}$. $\square$