

CHAPITRE 0

Logique (rudiment

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 28 mars 2022

Table des matières

I	Algèbre de Boole	3
II	Déduction naturelle	6
III	Raisonnement par l'absurde	8
IV	Prédictat	10

Définition: Un proposition est un énoncé qui est soit vrai, soit faux.

Définition: Démontrer une proposition revient à prouver qu'elle est vraie

Première partie

Algèbre de Boole

Définition: Soient A et B deux propositions. La proposition A et B est définie par la table de vérité suivante :

A	B	A et B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Définition: Soient A et B deux propositions. La proposition A ou B est définie par la table de vérité suivante :

A	B	A ou B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Définition: Soit A une proposition. La négation de A , notée $\text{non}(A)$ est définie par :

A	$\text{non}(A)$
V	F
F	V

Définition: Deux propositions A et B sont équivalentes si elles ont la même table de vérité. Dans ce cas, on note $A \iff B$

Proposition: Soient A , B et C trois propositions.

1. $(A \text{ et } B) \text{ et } C \iff A \text{ et } (B \text{ et } C)$
2. $A \text{ et } A \iff A$
3. $A \text{ et } B \iff B \text{ et } A$
4. $(A \text{ ou } B) \text{ ou } C \iff A \text{ ou } (B \text{ ou } C)$
5. $A \text{ ou } A \iff A$
6. $A \text{ ou } B \iff B \text{ ou } A$
7. $\text{non}(\text{non}(A)) \iff A$

8. $A \text{ et } (B \text{ ou } C) \iff A \text{ et } B \text{ ou } A \text{ et } C$
 9. $A \text{ ou } (B \text{ et } C) \iff (A \text{ ou } B) \text{ et } (A \text{ et } C)$
 10. $\text{non } (A \text{ et } B) \iff \text{non } (A) \text{ ou } \text{non } (B)$
 11. $\text{non } (A \text{ ou } B) \iff \text{non } (A) \text{ et } \text{non } (B)$

■

Définition: Soient A et B deux propositions. La proposition $A \implies B$ (A implique B) est définie par :

A	B	$A \implies B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Définition: Soient A et B deux propositions telles que $A \implies B$ est vraie. On dit que A est une condition suffisante pour que B soit vraie. On dit que B est une condition nécessaire pour que A soit vraie.

Proposition (Contraposée): Soient A et B deux propositions.

$$(A \implies B) \iff (\text{non } B \implies \text{non } A)$$

■

Proposition: Soient A et B deux propositions.

$$(A \implies B) \iff ((A \implies B) \text{ et } (B \implies A))$$

■

Proposition: Soient A et B deux propositions.

$$(A \implies B) \iff (B \text{ ou } \text{non } (A))$$

■

Deuxième partie

Déduction naturelle

Dans ce paragraphe, A et B sont deux propositions.

A et B

Comment démontrer A et B ?

- On démontre A
- On démontre B

Comment utiliser l'hypothèse A et B ?

On utilise A ou on utilise B .

A ou B

Comment démontrer A ou B ?

On essaie de démontrer A . Si on y arrive, alors on a prouvé A ou B sinon on démontre B .

Variante

On suppose A faux. On démontre B .

Comment utiliser l'hypothèse A ou B ?

On fait une disjonction des cas :

- CAS 1 : On suppose A
- CAS 2 : On suppose B

$A \Rightarrow B$

Comment démontrer $A \Rightarrow B$?

On suppose A . On démontre B .

Comment utiliser l'hypothèse $A \Rightarrow B$?

On démontre A . On utilise B .

Troisième partie

Raisonnement par l'absurde

Situation :

Soient A et B deux propositions.

On veut montrer $A \implies B$.

On suppose A . On suppose aussi B faux.

On cherche à faire apparaître une contradiction (ζ)

Quatrième partie

Prédictat

Définition: Un prédicat $\mathcal{P}(x)$ est un énoncé dont la valeur de vérité dépend de l'objet x , élément d'un ensemble E .

Le domaine de validité de \mathcal{P} est l'ensemble des valeurs x de E pour lesquelles $\mathcal{P}(x)$ est vraie :

$$\{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$$

REMARQUE (Notation):

On écrit

$$\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$$

pour dire que $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tous les x de E .

On écrit

$$\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$$

pour dire qu'il existe (au moins) un élément $x \in E$ pour lesquels $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

On écrit

$$\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$$

pour dire qu'il existe un unique élément $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

$$\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$$

Comment démontrer $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$?

Soit $x \in E$ (fixé quelconque). Montrons $\mathcal{P}(x)$.

Comment utiliser $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$?

On choisit (spécialise) une ou plusieurs (voir toutes) valeurs de x et on exploite $\mathcal{P}(x)$.