TD 11 Suites numériques

Exercice 1: ★

Soit (u_n) une suite convergente. La suite $(\lfloor u_n \rfloor)$ est-elle convergente ?

Exercice 2: ★★

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$.

(1) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

(2) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+1}$.

(3) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Exercice 3: ★

Déterminer les limites des suites suivantes, $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $x \in \mathbb{R}$:

a. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ b. $u_n = \dfrac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$ c. $u_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n}$ d. $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$

e. $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$ f. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$ g. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ h. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

i. $u_n = \dfrac{1}{n^4}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ j. $u_n = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ k. $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ l. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$

Exercice 4: ★

Étudier la suite de terme général $u_n = \dfrac{n \sin n}{n^2+1}$.

Exercice 5: ★

Étudier la convergence des suites suivantes :

$$u_n = \frac{n^2 i^n}{n^3+1} \qquad v_n = \frac{1}{n} + (-1)^n i \qquad w_n = \frac{n}{n+3i} - \frac{ni}{n+1} \qquad x_n = \frac{n^2 i - in + 1 - 3i}{(2n+4i-3)(n-i)}$$

Exercice 6: ★

Déterminer les limites des suites de terme général :

(1) $u_n = \sqrt[n]{n}$

(2) $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$

(3) $u_n = n^2\left(\cos\dfrac{1}{n} - \cos\dfrac{1}{n+1}\right)$

(4) $u_n = \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{n \ln n}$

(5) $u_n = \left(\dfrac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\sqrt[n]{4}}{3}\right)^n$

(6) $u_n = \left(\dfrac{\text{Arctan}(n+1)}{\text{Arctan}\, n}\right)^{n^2}$.

Exercice 7: ★★

Étudier la convergence de la suite $\left(\lfloor a^n \rfloor^{1/n}\right)$ où $a > 0$.

Exercice 8: ★★★, Moyenne arithmético-géométrique

Soient $a \leq b$ deux réels strictement positifs. On définit deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$a_0 = a \text{ , } b_0 = b \text{ , et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

(1) Montrer que ces deux suites sont bien définies et ̀termes positifs.

(2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$.

(3) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Exercice 9: ★★★

Soient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $u_n = S_n - \ln n$ et $v_n = S_n - \ln(n+1)$.

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n+1} \leq \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n}$.

(2) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

(3) En déduire l'existence de $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ (γ est appelée la *constante d'Euler*).

(4) Donner un équivalent de S_n et sa limite en $+\infty$.

(5) Déterminer la limite de $\left(\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(6) Écrire un programme dans le langage de votre choix permettant de calculer $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. Donner les 5 premières décimales de γ.

Exercice 10: ★★★

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l.

(1) Si $l < 1$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(2) Si $l > 1$, monter que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

(3) Que dire quand $l = 1$?

Exercice 11: ★★★, convergence au sens de Cesàro

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels convergente, de limite ℓ. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i.$$

Le but de l'exercice est de prouver le théorème de Cesàro qui énonce que la suite (v_n) converge vers ℓ.

(1) On suppose que $\ell = 0$. Montrer en utilisant la définition (avec ε) que la suite (v_n) converge vers 0.

(2) On suppose à présent que $\ell \neq 0$. Comment peut-on ramener l'étude au cas précédent ?

(3) La réciproque du théorème de Cesàro est-elle vraie ?

Exercice 12: ★★★

Soit (u_n) une suite de réels vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leq \frac{1}{k} + \frac{k}{n}.$$

Montrer que (u_n) converge vers 0.

Exercice 13: ★★

Soit (u_n) une suite telle que les trois suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que la suite (u_n) converge.

Exercice 14: ★★

On donne deux réels a et b et la suite u définie pour tout n supérieur à la plus garnde racine du polynôme $X^2 + aX + b$ par

$$u_n = \sqrt{n^2 + 3n + 7} - \sqrt{n^2 + an + b}.$$

Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.

Exercice 15: ★★

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n - y_n) \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n) \end{cases}$$

En étudiant la suite de terme général $z_n = x_n + iy_n$, donner une expression des termes généraux des suites (x_n) et (y_n), ainsi que leur limite.

Exercice 16: ★★

Soient a et b deux réels, u et v deux suites vérifiant pour tout n, $u_n \leq a,\ v_n \leq b$ et telles que $\lim u_n + v_n = a + b$. Montrer que u converge vers a et v converge vers b.

Exercice 17: ★★★

Soit u une suite de réels strictement positifs telle que $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow \ell$.

(1) Montrer que si $\ell < 1$, alors $u_n \longrightarrow 0$.

(2) Montrer que si $\ell > 1$, alors $u_n \longrightarrow +\infty$.

Exercice 18: ★★★

Soit $k \in]0,1[$.

(1) Montrer que l'équation $x - k\sin x + 1 = 0$ admet une unique racine a dans l'intervalle $[-\pi, 0]$.

(2) On considère la suite réelle (x_n) définie par

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{a\} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = k \sin x_n - 1. \end{cases}$$

Montrer que pour tout n, $|x_{n+1} - a| \leq k|x_n - a|$. En déduire que (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 19: ★★★ suites de Cauchy

On dit d'une suite (u_n) qu'elle est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p > N,\ \forall q > N,\ |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

(1) Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.

(2) Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.

(3) On veut prouver la réciproque : toute suite de Cauchy converge. Soit donc (a_n) une suite de Cauchy. Pour tout n, on pose

$$b_n = \sup\{a_p \mid p \geq n\}.$$

(a) Montrer que la suite (b_n) converge. On note a sa limite.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Justifer l'existence d'un entier N tel que

$$b_N \leq a + \varepsilon \text{ et } \forall p, n \geq N,\ a_p \leq a_n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

(c) Montrer que

$$\forall n \geq N,\ a - \varepsilon \leq b_N - \frac{\varepsilon}{2} \leq a_n \leq b_N \leq a + \varepsilon.$$

Conclure.

Exercice 20: ★★★

Soit u une suite réelle.

(1) On suppose que u est croissante et qu'elle admet une sous-suite majorée. Montrer que u converge.

(2) On suppose que u n'est pas majorée. Montrer qu'elle admet une sous-suite qui tend vers $+\infty$.

Exercice 21: ★★★

Soit u une suite. On dit que ℓ est une *valeur d'adhérence* de u s'il existe une sous-suite de u qui converge vers ℓ.

(1) Quelles sont les valeurs d'adhérence d'une suite convergente ?

(2) Donner un exemple de suite qui diverge et qui possède une unique valeur d'adhérence.

(3) Prouver que si u est bornée et divergente, alors u a au moins 2 valeurs d'adhérence.

Exercice 22: ★★

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1} + u_n}{2}. \end{cases}$$

Exprimer u_n en fonction de n puis donner un équivalent simple de u_n.

Exercice 23: ★★★

Étudier le comportement asymptotique des suites suivantes.

(1) $u_0 \in]0,1|$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$.

(2) $u_0 \in]0,1|$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos(u_n)$.

(3) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2$.

(4) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

(5) $u_0 \in \mathbb{R} et \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}$.

(6) $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}u_n^2$.

(7) $u_0 \in]0,1[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}$.

(8) $u_0 \in [-2,2]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$.

Exercice 24: ★

Donner l'expression du terme général des suites suivantes.

(1) $u_0 = 0, u_1 = 1+4i,\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (3-2i)u_{n+1} - (5-5i)u_n$.

(2) $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$

(3) $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$

(4) $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

Exercice 25: ★★★

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère le polynôme $P_n = X^n + X^{n-1} + \cdots + X - 1$.

(1) Montrer que pour tout $n \geq 1$, P_n possède une unique racine positive, que l'on note u_n.

(2) Montrer que (u_n) est décroissante puis qu'elle converge.

(3) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq \dfrac{1}{2}$.

(4) Soit $\rho \in]1/2, 1[$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(\rho) > 0$.

(5) Démontrer que (u_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 26: ★★★

On dit qu'une suite (u_n) *converge au sens de Cesàro* si la suite $\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right)$ converge. Ce problème étudie le lien entre convergence au sens usuel et convergence au sens de Ceesàro.

On admet que si une suite converge vers ℓ, alors elle converge aussi au sens de Cesàro vers ℓ.

Partie 1

On considère la suite (x_n) définie par

$$x_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_{n+1} = \frac{x_n(1+x_n)}{1+2x_n}.$$

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n existe et $0 < x_n < 1$.

(2) Montrer que (x_n) est décroissante.

(3) La suite (x_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

(4) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{1+x_n}$.

(5) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{x_{n+1}} - \dfrac{1}{x_n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que (u_n) converge vers 1.

(6) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n en fonction de x_{n+1} et de x_1. En déduire un équivalent simple de (x_n).

Partie 2

Soit (y_n) une suite réelle.

(1) On suppose que (y_n) converge. Montrer que la suite $(y_{n+1} - y_n)$ converge.

(2) On suppose que la suite $(y_{n+1} - y_n)$ converge vers un nombre réel ℓ.

(a) Montrer que la suite $\left(\dfrac{y_n}{n}\right)$ converge et préciser sa limite.

(b) Étudier la convergence de la suite (y_n) dans le cas où $\ell \neq 0$.

(c) Dans le cas où $\ell = 0$, la suite (y_n) est-elle nécessairement convergente ?

Partie 3

Soit a un nombre réel. On pose, pour tout $n \geq 1$, $u_n = \sin(na)$ et $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

(1) Étudier la nature des suites (u_n) et (v_n) lorsque $a = 0[\pi]$.

(2) Pour $n \geq 1$, on pose $c_n = \cos(na)$. Exprimer $u_{n+2} - u_n$ en fonction de c_{n+1} et $u_{n+2} + u_n$ en fonction de u_{n+1}.

(3) On suppose dans cette question que $a \neq 0[\pi]$.

(a) On fait l'hypothèse que la suite (u_n) converge. En utilisant les deux relations établies à la question 2, démontrer que la suite (c_n) converge également et préciser les limites des suites (u_n) et (c_n).

(b) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

(c) En remarquant que $\sin(na) = \mathrm{Im}(e^{ika})$, montrer que la suite (v_n) converge et donner la valeur de sa limite.

Partie 4

Dans cette partie, on suppose que la suite (u_n) est croissante et que la suite $(v_n) = \left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k\right)$ converge.

(1) Démontrer, pour tout $n \geq 1$, l'inégalité

$$nu_{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k.$$

(2) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} \leq 2v_{2n} - v_n$.

(3) Établir la convergence de la suite (u_n) et préciser sa limite.

(4) Énoncer la propriété ainsi démontrée sous la forme d'un condition nécessaire et suffisante.