Chapitre 11

Suite

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 8 mai 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Modes de définition

Définition: Une suite peut être définie

- <u>Explicitement</u> On dispose pour tout $n \in \mathbb{N}$ de l'expression de u_n en fonction de n.
  $\boxed{\text{ex}}$ $\forall n \in \mathbb{N}_*, u_n = \dfrac{\ln(n)}{n} e^{-n}$
- <u>Par récurrence</u> On connait u_{n+1} en fonction de $u_0, u_1, \dots, u_n$
  $\boxed{\text{ex}}$ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$
- <u>Implicitement</u> $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est le seul nombre vérifiant une certaine propriété
  $\boxed{\text{ex}}$ u_n est le seul réel vérifiant $x^5 + nx - 1 = 0$

Deuxième partie

Limites

Définition: Soit u une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que
- u converge vers ℓ
- u_n tends vers ℓ quand n tends vers $+\infty$
- ℓ est une limite de u

si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \qquad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$
$$(\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon)$$

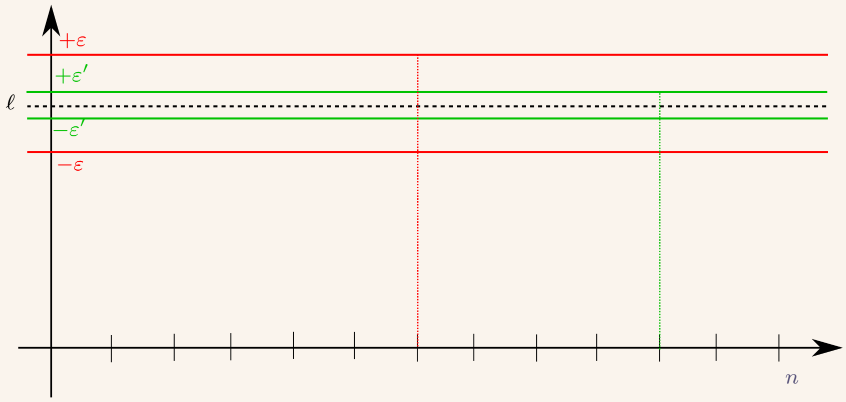


Figure 1 – Définition de la limite

Définition: Soit u une suite réelle.
On dit que u tends vers $+\infty$ si
$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant M$$

On dit que u tends vers $-\infty$ si
$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \leqslant m$$

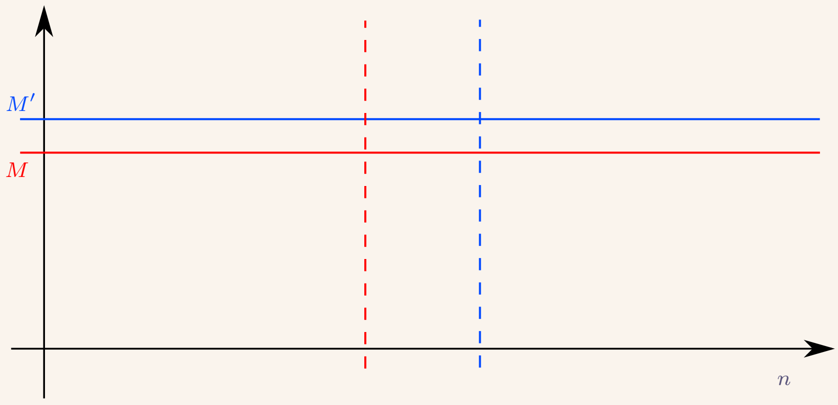


FIGURE 2 – Limites infinies

Définition: Une suite qui ne converge pas est dite divergente (on dit qu'elle diverge). C'est le cas si cette suite n'a pas de limite quand elle tends vers $\pm\infty$.

Théorème (Unicité de la limite (réelle))**:** Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (\ell_1, \ell_2) \in \overline{\mathbb{R}}^2$

Si $\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1 \\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2 \end{cases}$ alors $\ell_1 = \ell_2$

■

REMARQUE:
Si u_n tends vers ℓ quand n tends vers $+\infty$, on écrit $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $\lim u_n = \ell$

Proposition: Toute suite convergente est bornée

■

Proposition: Soient $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On pose $\ell_1 = \lim u_n$ et $\ell_2 = \lim v_n$

1. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$ alors $u_n + v_n \to \ell_1 + \ell_2$
2. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = +\infty$ alors $u_n + v_n \to +\infty$
3. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = -\infty$ alors $u_n + v_n \to -\infty$
4. si $\ell_1 = \ell_2 = +\infty$, alors $u_n + v_n \to +\infty$
5. si $\ell_1 = \ell_2 = -\infty$, alors $u_n + v_n \to -\infty$

■

Proposition: Soient u et v deux suites réelles. On pose $\ell_1 = \lim u_n$ et $\ell_2 = \lim v_n$

1. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$, alors $u_n v_n \to \ell_1 \ell_2$
2. si $\begin{cases} \ell_1 \in \mathbb{R}_*^+, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \to +\infty \\ \ell_1 \in \mathbb{R}_*^-, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \to -\infty \end{cases}$
3. si $\begin{cases} \ell_1 \in \mathbb{R}_*^+, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \to -\infty \\ \ell_1 \in \mathbb{R}_*^-, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \to +\infty \end{cases}$
4. si $\begin{cases} \ell_1 = -\infty, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \to -\infty \\ \ell_1 = -\infty, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \to +\infty \\ \ell_1 = +\infty, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \to +\infty \end{cases}$

■

Proposition: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_*$.Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$
On pose $\ell = \lim u_n$ (si elle existe).

1. si $\ell = +\infty$ alors, $\dfrac{1}{u_n} \to 0$
2. si $\ell = 0$ alors, $\left|\dfrac{1}{u_n}\right| \to +\infty$

   ⚠ Si le signe de u_n ne se stabilise pas $\dfrac{1}{u_n}$ n'a pas de limite

   $\boxed{\text{ex}}$ $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
3. si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\ell}$

■

Troisième partie

Limites et inégalités

Proposition: Soient u et v deux suites réelles convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$$

Alors, $\ell_1 \leqslant \ell_2$

■

Remarque:

Si $\begin{cases} u_n \to \ell_1 \in \mathbb{R} \\ v_n \to \ell_2 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n \end{cases}$

on n'a pas forcément $\ell_1 < \ell_2$

$\boxed{\text{ex}}$ $\forall n \in \mathbb{N}_*, \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ mais les deux convergent vers 0

Proposition: Soient u et v deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$$

1. si $u_n \to +\infty$,$v_n \to +\infty$
2. si $v_n \to -\infty$,$u_n \to -\infty$

■

Théorème (Théorème des "gendarmes")**:** Soient u, v et w trois suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

On suppose que u et w convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, v converge vers ℓ

■

Théorème (Limite monotone)**:**

1. Soit u une suite croissante majorée par M.
   Alors, u converge et $\lim u_n \leqslant M$
2. Soit u une suite croissante non majorée.
   Alors, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
3. Soit u une suite décroissante minorée par m.
   Alors, u converge et $\lim u_n \geqslant m$
4. Soit u une suite décroissante non minorée.
   Alors, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

■

Définition: Soient u et v deux suites réelles. On dit que u et v sont adjacentes si
- u est croissante

- v est décroissante
- $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Théorème: Soient u et v deux suites adjacentes. Alors, u et v convergent vers la même limite.

■

Théorème (Théorème des segments emboîtés)**:** Soit (I_n) une suite de segments (non vide) décroissante

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$$

On note $\ell(I)$ la longueur d'un intervalle I.
Si $\ell(I_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

■

Quatrième partie

Suites extraites

Définition: Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.
On dit que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ est une **suite extraite** de u ou une **sous suite** de u. On dit alors que φ est une extractrice.

Lemme: Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geqslant n$$

■

Proposition: Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante alors $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

■

Proposition: Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont la même limite ℓ alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

■

Théorème (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**:** Soit (u_n) une suite réelle bornée. Alors, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ converge.

■

Cinquième partie

Suites récurrentes

Définition: On dit que u est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants s'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

L'équation caractéristique associée est

$$(C) : z^2 = az + b \text{ avec } z \in \mathbb{C}$$

Proposition: Avec les notations précédentes,

1. Si (C) a 2 racines simples $r_1 \neq r_2$ alors
$$\exists (A, B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A{r_1}^n + B{r_2}^n$$
2. Si (C) a une racine double $r \in \mathbb{C}$ alors
$$\exists (A, B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)r^n$$

■

Proposition: avec les notations précédentes et avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

1. Si (C) a deux racines simples $r_1 \neq r_2$ alors
$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A{r_1}^n + B{r_2}^n$$
2. Si (C) a une racine simple $r \in \mathbb{R}$ alors
$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)r^n$$
3. Si (C) a deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_*^+$ et $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors
$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$$

□

Remarque:
Étude de $u_{n+1} = f(u_n)$

1. On choisit rapidement la fonction f (au moins le tableau de variation)

1'. (optionnel) on représente graphiquement la fonction f et la droite d'équation $y = x$ pour conjecturer sa limite

2. On utilise le tableau de variation pour vérifier que (u_n) est bien définie par récurrence
$$P(n) : \text{"}u_n \text{ existe et } u_n \in \mathscr{D}_f\text{"}$$
3. On étudie le signe de $f(x) - x$
4. On cherche les intervalles stables par f :
$$f(I) \subset I$$
les plus petits possible (ça permet de montrer que la suite est majorée (minorée) en particulier ceux sur lesquels $f(x) - x$ ne change pas de signe

4'. Donc on utilise le théorème de la limite monotone

4". Sinon, on essaie l'inégalité (voir théorème) des accroissements finis :
Soit ℓ un point fixe de f : $f(\ell) = \ell$
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| = M\,|u_n - \ell|$$

où M est un majorant de $|f|$
Si $0 \leqslant M \leqslant 1$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leqslant M^n \, |u_n - \ell| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

5. si (u_n) a une limite et si f continue alors $\lim(u_n)$ est une point fixe de f

Sixième partie

Comparaison de suites

Définition: Soient u et v deux suites réelles. On dit que u est dominée par v si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant M |v_n|$$

Dans ce cas, on note $u = O(v)$ ou $u_n = O(v_n)$ et on dit que "u est un grand o de v"

Proposition: O est une relation réfléctive et transitive.

Définition: Soient u et v deux suites. On dit que u est négligeable devant v si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$$

Dans ce cas, on note $u = o(v)$ ou $u_n = o(v_n)$ ou on le lit "u est un petit o de v"

Proposition: o est une relation transitive, non-réfléctive

Proposition: Soient u et v deux suites.
- $o(u) + o(u) = o(u)$
- $v \times o(u) = o(uv)$
- $o(u) \times o(v) = o(uv)$
- $o(o(u)) = o(u)$

Définition: Soient u et v deux suites. On dit que u et v sont équivalentes si

$$u = v + o(v)$$

i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - v_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$$

Dans ce cas, on le note $u \sim v$

Proposition: $\sim$ est une relation d'équivalence

Proposition: Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang

1. $u = o(v) \iff \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ bornée
2. $u = o(v) \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
3. $u \sim v \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

□

Proposition (Suites de références)**:** 1. $\ln^{\alpha}(n) = o(n^{\beta})$ avec $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$

2. $n^{\beta} = o(a^n)$ avec $\beta > 0$ et $a > 1$
3. $a^n = o(n!)$ avec $a > 1$
4. $n! = o(n^n)$

Lemme (Exercice 10 du TD)**:** Soit $u \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^{\mathbb{N}}$
Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell < 1$ avec $\ell \in \mathbb{R}$,
alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

■

Septième partie

Suites complexes

Définition: Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que (u_n) converge vers ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

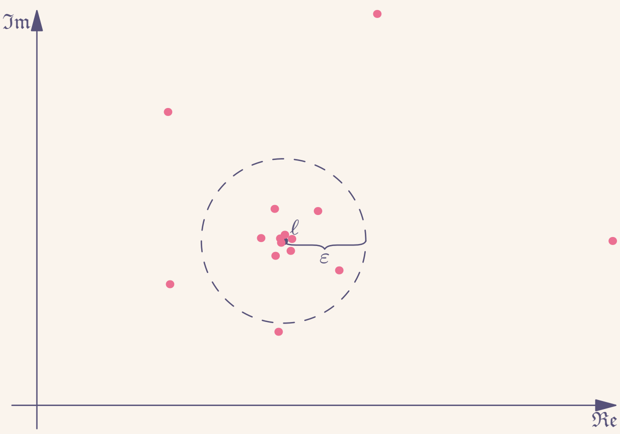


Figure 3 – Suite complexe convergente

Proposition: Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux limites de u alors $\ell_1 = \ell_2$

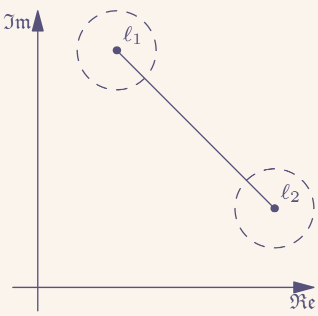


Figure 4 – Unicité de la limite de suites complexes

□

Proposition: Les limites de somme, produit, quotient de suites complexes respectent les mêmes lois que pour les suites réelles. □

Théorème: Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathfrak{Re}(\ell) \\ \mathfrak{Im}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathfrak{Im}(\ell) \end{cases}$$

■

Proposition: Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.
Si $u_n \to \ell$ alors $|u_n| \to |\ell|$

■

Proposition: Tous les résultats (sauf ceux avec des limites infinies !) concernant les suites extraites sont encore valables dans $\mathbb{C}$ y compris le théorème de Bolzano-Weierstrass (mais avec une autre preuve).

Définition: Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$$

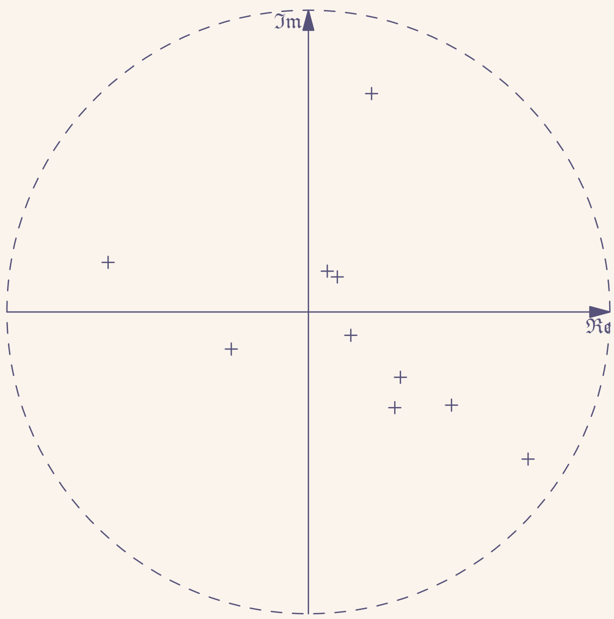


Figure 5 – Suite complexe bornée

Théorème (Bolzano Weierstrass)**:** Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ bornée. Il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ converge.

■

Huitième partie

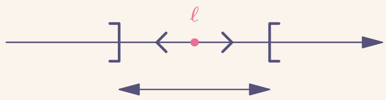
Annexe

> **Proposition:** Soit $f : I \to I$ continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
>
> $$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
>
> **Si** (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$
> alors $f(\ell) = \ell$ i.e. (ℓ est un point fixe de f)

■

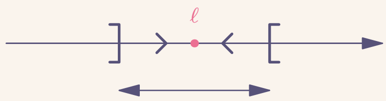
Remarque:
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
Soit $\ell \in \mathbb{R}$ un point fixe de f. Donc, $f(\ell) = \ell$.

$\left|f'(\ell)\right| > 1$:



répulsion

$\left|f'(\ell)\right| < 1$:



bassin d'attraction

Par contre, si $\left|f'(\ell)\right| = 1$, on ne sait pas.

Remarque (Suite arithético-géométrique):

$$(*) : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b = f(u_n)$$

Méthode 1

- On cherche v une suite constante solution de $(*)$:

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, v_n = C$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, C = aC + b = f(C)$$

Si $a \neq 1 : C = \dfrac{b}{1-a}$

- Soit u qui vérifie $(*)$. On pose $w = u - v$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} &= u_{n+1} - v_{n+1} \\ &= au_n + b - av_n - b \\ &= a(u_n - v_n) \\ &= aw_n \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = aw_n + 0$: équation homogène associée à $(*)$
(w_n) est géométrique donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 a^n$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = w_0 a^n + \frac{b}{1-a}$$

Méthode 2

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\\ (u_n) &\longmapsto (u_{n+1} - au_n)\end{aligned}$$

φ morphisme de groupes additifs

$$\varphi(u) = (b) \iff u = v + w \text{ avec } w \in \mathrm{Ker}(\varphi)$$

$$\begin{aligned}w \in \mathrm{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(w) = 0\\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - aw_n = 0\\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = aw_n\end{aligned}$$