

CHAPITRE 11

Suite

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

I	Modes de définition	2
II	Limites	4
III	Limites et inégalités	13
IV	Suites extraites	20
V	Suites récurrentes	25
VI	Comparaison de suites	28
VII	Suites complexes	33
VIII	Annexe	37

Première partie

Modes de définition

Définition: Une suite peut être définie

- Explicitement On dispose pour tout $n \in \mathbb{N}$ de l'expression de u_n en fonction de n .

$$\boxed{\text{ex}} \quad \forall n \in \mathbb{N}_*, u_n = \frac{\ln(n)}{n} e^{-n}$$

- Par récurrence On connaît u_{n+1} en fonction de u_0, u_1, \dots, u_n

$$\boxed{\text{ex}} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$$

- Implicitement $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est le seul nombre vérifiant une certaine propriété

$$\boxed{\text{ex}} \quad u_n \text{ est le seul réel vérifiant } x^5 + nx - 1 = 0$$

Deuxième partie

Limites

Définition: Soit u une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que

- u converge vers ℓ
- u_n tends vers ℓ quand n tends vers $+\infty$
- ℓ est une limite de u

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

$$(\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon)$$

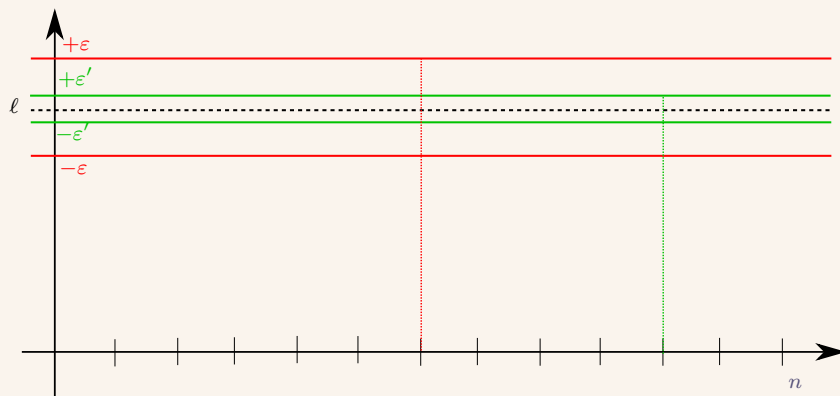


FIGURE 1 – Définition de la limite

EXEMPLE:

Montrer que $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, -\varepsilon \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon$$

Analyse Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N, -\varepsilon \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon$.

En particulier, $\frac{1}{N} \leq \varepsilon$ donc $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Synthèse On pose $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 \in \mathbb{N}^*$ et $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Soit $n \geq N$.

$$\frac{1}{n} > 0 > -\varepsilon \text{ donc } \frac{1}{n} \geq -\varepsilon$$

$$n \geq N > \frac{1}{\varepsilon} \text{ donc } n \geq \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{n} \leq \varepsilon$$

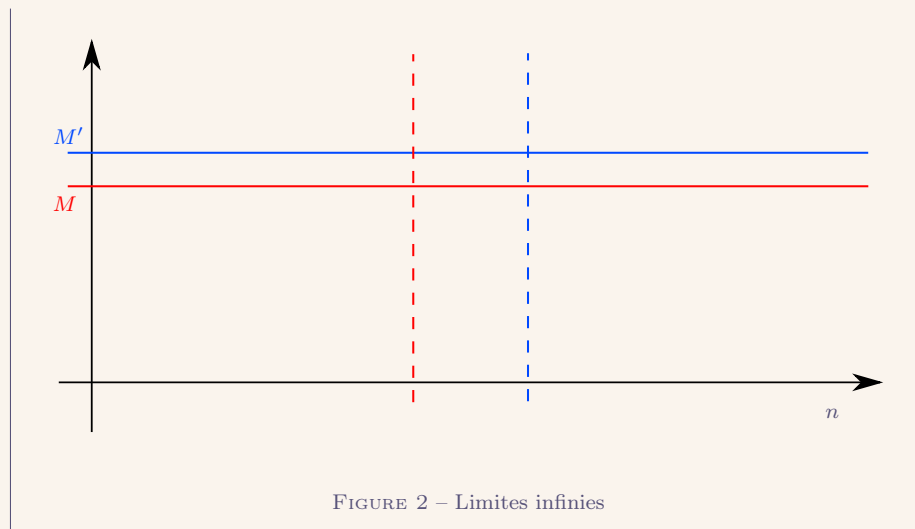
Définition: Soit u une suite réelle.

On dit que u tends vers $+\infty$ si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq M$$

On dit que u tends vers $-\infty$ si

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq m$$



EXEMPLE:

Montrons que $n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Soit $M \in \mathbb{R}$, on cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, n^2 \geq M$.

Analyse Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, n^2 \geq M$.

En particulier, $N^2 \geq M$ et donc $N \geq \sqrt{M}$ si $M \geq 0$

Synthèse On pose $N = \begin{cases} 0 & \text{si } M \leq 0 \\ \lfloor \sqrt{M} \rfloor + 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Ainsi $N \in \mathbb{N}$ et $N^2 \geq M$. Soit $n \geq N$. On a $n^2 \geq N^2 \geq M$.

Définition: Une suite qui ne converge pas est dite divergente (on dit qu'elle diverge). C'est le cas si cette suite n'a pas de limite quand elle tends vers $\pm\infty$.

Théorème (Unicité de la limite (réelle)): Soit $u \in \mathbb{R}^N, (\ell_1, \ell_2) \in \overline{\mathbb{R}}^2$

Si $\begin{cases} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_1 \\ u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_2 \end{cases}$ alors $\ell_1 = \ell_2$

Preuve: **CAS 1** $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$.

On suppose $\begin{cases} \ell_1 \neq \ell_2 \\ u_n \rightarrow \ell_1 \\ u_n \rightarrow \ell_2 \end{cases}$

Sans perte de généralité, on peut supposer $\ell_1 < \ell_2$

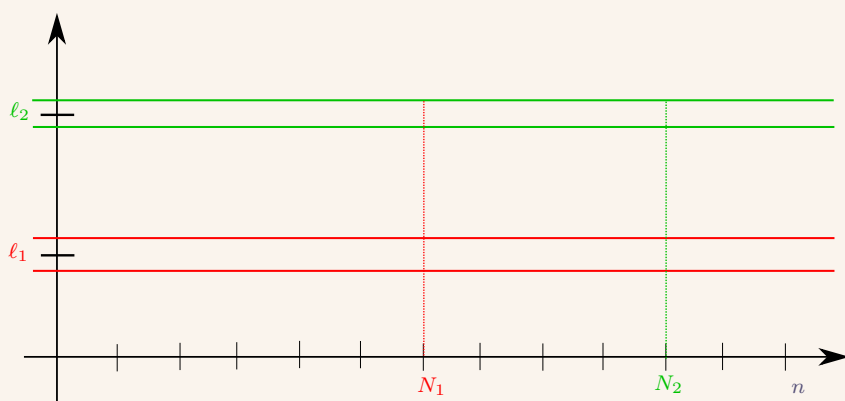


FIGURE 3 – Preuve unicité de la limite (cas 1)

On pose $\varepsilon = \frac{\ell_2 - \ell_1}{3} > 0$. On sait qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, \ell_1 - \varepsilon \leq u_n \leq \ell_1 + \varepsilon$$

et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, \ell_2 - \varepsilon \leq u_n \leq \ell_2 + \varepsilon$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. On a alors

$$u_n \leq \ell_1 + \varepsilon < \ell_2 + \varepsilon \leq u_n$$

une contradiction ($u_n < u_n$). En effet,

$$\begin{aligned} \ell_1 + \varepsilon < \ell_2 + \varepsilon &\iff 2\varepsilon < \ell_2 - \ell_1 \\ &\iff \frac{2}{3}(\ell_2 - \ell_1) < \ell_2 - \ell_1 \\ &\iff \frac{2}{3} < 1 \end{aligned}$$

Ainsi $\ell_1 = \ell_2$

CAS 2 $\ell_1 \in \mathbb{R}, \ell_2 = +\infty$

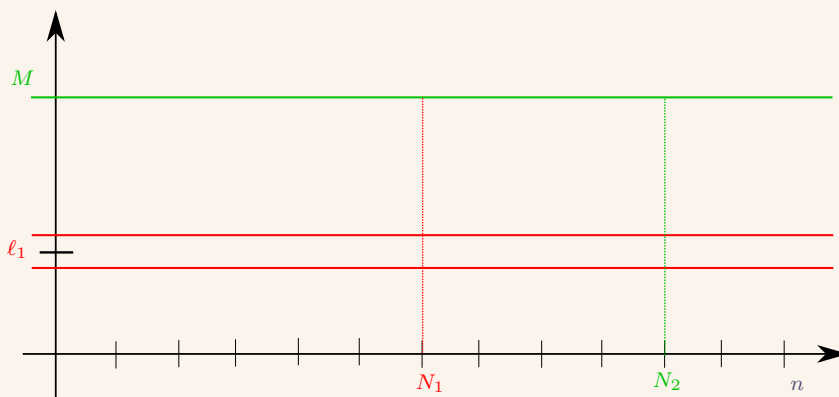


FIGURE 4 – Preuve unicité de la limite (cas 2)

$u_n \rightarrow \ell_1$ donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, \ell_1 - 1 \leq u_n \leq \ell_1 + 1$$

$u_n \rightarrow +\infty$ donc il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, u_n \geq \ell_1 + 2$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Ainsi

$$u_n \geq \ell_1 + 2 > \ell_1 + 1 \geq u_n$$

une contradiction

De la même manière, on peut prouver pour $(\mathbb{R}, -\infty)$ et $(+\infty, -\infty)$

□

REMARQUE:

Si u_n tends vers ℓ quand n tends vers $+\infty$, on écrit $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ ou $\lim u_n = \ell$

Proposition: Toute suite convergente est bornée

Preuve:

On pose $\ell = \lim u_n \in \mathbb{R}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \ell - 1 \leq u_n \leq \ell + 1$$

L'ensemble $\{u_n \mid n \leq N\}$ est fini, il a donc un plus grand élément et un plus petit élément. On pose

$$\begin{cases} M_1 = \max\{u_n \mid n \leq N\} \\ m_1 = \min\{u_n \mid n \leq N\} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} M = \max(\ell + 1, M_1) \\ m = \min(\ell - 1, m_1) \end{cases}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} m \leq m_1 \leq u_n \leq M_1 \leq M & \text{si } n \leq N \\ m \leq \ell_1 - 1 \leq u_n \leq \ell_1 + 1 \leq M & \text{si } n > N \end{cases}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$$

□

Proposition: Soient $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On pose $\ell_1 = \lim u_n$ et $\ell_2 = \lim v_n$

1. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$ alors $u_n + v_n \rightarrow \ell_1 + \ell_2$
2. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = +\infty$ alors $u_n + v_n \rightarrow +\infty$
3. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = -\infty$ alors $u_n + v_n \rightarrow -\infty$
4. si $\ell_1 = \ell_2 = +\infty$, alors $u_n + v_n \rightarrow +\infty$
5. si $\ell_1 = \ell_2 = -\infty$, alors $u_n + v_n \rightarrow -\infty$

Preuve: 1. On suppose $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\ell = \ell_1 + \ell_2$.
Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \ell - \varepsilon \leq u_n + v_n \leq \ell + \varepsilon$$

$\frac{\varepsilon}{2} > 0$ donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, \ell_1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq u_n \leq \ell_1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, \ell_2 - \frac{\varepsilon}{2} \leq v_n \leq \ell_2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geq N$ quelconque.

$$n \geq N \geq N_1 \text{ donc } \ell_1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq u_n \leq \ell_1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$n \geq N \geq N_2 \text{ donc } \ell_2 - \frac{\varepsilon}{2} \leq v_n \leq \ell_2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

D'où, en additionnant les inégalités

$$\ell - \varepsilon = \ell_1 + \ell_2 - \varepsilon \leq u_n + v_n \leq \ell_1 + \ell_2 + \varepsilon = \ell + \varepsilon$$

2. On suppose $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = +\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$ quelconque.
Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, \ell_1 - 1 \leq u_n \leq \ell_1 + 1$$

et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, v_n \geq M - \ell_1 + 1$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geq N$ quelconque

$$\begin{cases} n \geq N_1 \text{ donc } u_n \geq \ell_1 - 1 \\ n \geq N_2 \text{ donc } v_n \geq M - \ell_1 + 1 \end{cases}$$

D'où, $u_n + v_n \geq M$

□

Proposition: Soient u et v deux suites réelles. On pose $\ell_1 = \lim u_n$ et $\ell_2 = \lim v_n$

1. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$, alors $u_n v_n \rightarrow \ell_1 \ell_2$
2. si $\begin{cases} \ell_1 \in \mathbb{R}_*^+, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \rightarrow +\infty \\ \ell_1 \in \mathbb{R}_*^-, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \rightarrow -\infty \end{cases}$
3. si $\begin{cases} \ell_1 \in \mathbb{R}_*^+, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \rightarrow -\infty \\ \ell_1 \in \mathbb{R}_*^-, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \rightarrow +\infty \end{cases}$
4. si $\begin{cases} \ell_1 = -\infty, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \rightarrow -\infty \\ \ell_1 = -\infty, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \rightarrow +\infty \\ \ell_1 = +\infty, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \rightarrow +\infty \end{cases}$

Preuve: 1. $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| \leq \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| &= |(u_n - \ell_1)v_n + \ell_1(v_n - \ell_2)| \\ &\leq |v_n| |u_n - \ell_1| + |\ell_1| |v_n - \ell_2| \end{aligned}$$

Comme v_n converge, elle est bornée,

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq M$$

donc

$$|u_n v_n - \ell_1 \ell_2| \leq M \times |u_n - \ell_1| + |\ell_1| |v_n - \ell_2|$$

Cas 1 On suppose $M \neq 0$ et $\ell_1 \neq 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, |u_n - \ell_1| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$$

Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, |v_n - \ell_2| \leq \frac{\varepsilon}{2|\ell_1|}$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$.

$$\forall n \geq N, |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \times M + |\ell_1| \times \frac{\varepsilon}{2|\ell_1|} = \varepsilon$$

Cas 2 $M = 0$, ($\ell_1 \neq 0$)

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 0$

Donc

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n v_n = 0 \\ \ell_2 = 0 \\ \ell_1 \ell_2 = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n \end{cases}$$

Cas 3 $M \neq 0$ et $\ell_1 = 0$

Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n v_n - 0| \leq M |u_n|$

$\frac{\varepsilon}{M} > 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{M}$$

Donc,

$$\forall n \geq N, |u_n v_n| \leq M \times \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

Donc, $u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 = \ell_1 \ell_2$

2. $\ell_1 > 0$ et $\ell_2 = +\infty$

Soit $M \in \mathbb{R}_*^+$ On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, u_n v_n \geq M$$

On pose $\varepsilon = \frac{\ell_1}{2} > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, u_n \geq \ell_1 - \varepsilon = \frac{\ell_1}{2} > 0$$

et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, v_n \geq \frac{2M}{\ell_1} > 0$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Alors,

$$\forall n \geq N, u_n v_n \geq \frac{2M}{\ell_1} \times \frac{\ell_1}{2} = M$$

Donc $u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

□

Proposition: Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{R}_* . Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$
On pose $\ell = \lim u_n$ (si elle existe).

1. si $\ell = +\infty$ alors, $\frac{1}{u_n} \rightarrow 0$

2. si $\ell = 0$ alors, $\left| \frac{1}{u_n} \right| \rightarrow +\infty$

⚠ Si le signe de u_n ne se stabilise pas $\frac{1}{u_n}$ n'a pas de limite

ex $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

3. si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ell}$

Preuve: 3.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|\ell - u_n|}{|u_n| |\ell|}$$

On pose $\varepsilon = \frac{|\ell|}{2} > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$$

Si $\ell > 0$ alors

$$\forall n \geq N, u_n \geq \ell - \varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$$

et donc

$$\forall n \geq N, |u_n| \geq \frac{|\ell|}{2}$$

Si $\ell < 0$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell + \varepsilon = \frac{\ell}{2} < 0$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \geq \frac{|\ell|}{2}$$

Donc,

$$\forall n \geq N, \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| \leq \frac{|u_n| - \ell}{|\ell| \times \frac{|\ell|}{2}} = \frac{2|u_n - \ell|}{|\ell|^2}$$

Soit $\varepsilon' > 0$ quelconque. $\frac{\varepsilon' |\ell|^2}{2}$ donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N', |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon'}{2} |\ell|^2$$

On pose $N'', \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| \leq \frac{\varepsilon'}{2} |\ell|^2 \times \frac{2}{|\ell|^2} = \varepsilon'$

□

Troisième partie

Limites et inégalités

Proposition: Soient u et v deux suites réelles convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2 . On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$$

Alors, $\ell_1 \leq \ell_2$

Preuve:

On suppose $\ell_1 < \ell_2$. On pose $\varepsilon = \frac{\ell_2 - \ell_1}{3} > 0$.

Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, u_n \geq \ell_1 - \varepsilon$$

Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, v_n \leq \ell_2 + \varepsilon$$

Ainsi,

$$\forall n \geq \max(N_1, N_2), \ell_1 - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq \ell_2 + \varepsilon$$

et donc

$$\ell_1 - \varepsilon \leq \ell_2 + \varepsilon$$

donc, $\ell_1 - \ell_2 \leq 2\varepsilon$

donc, $1 \leq \frac{2}{3}$ une contradiction □

REMARQUE:

Si $\begin{cases} u_n \rightarrow \ell_1 \in \mathbb{R} \\ v_n \rightarrow \ell_2 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n \end{cases}$

on n'a pas forcément $\ell_1 < \ell_2$

ex $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ mais les deux convergent vers 0

Proposition: Soient u et v deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$$

1. si $u_n \rightarrow +\infty, v_n \rightarrow +\infty$
2. si $v_n \rightarrow -\infty, u_n \rightarrow -\infty$

Preuve: 1. On suppose $u_n \rightarrow +\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, u_n \geq M$$

Donc

$$\forall n \geq N, v_n \geq u_n \geq M$$

Donc $v_n \rightarrow +\infty$ □

Théorème (Théorème des "gendarmes"): Soient u, v et w trois suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$$

On suppose que u et w convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, v converge vers ℓ

Preuve:

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, w_n \leq \ell + \varepsilon$$

Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, u_n \leq \ell - \varepsilon$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. D'où,

$$\forall n \geq N, \ell - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq \ell + \varepsilon$$

Donc, $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$

□

Théorème (Limite monotone): 1. Soit u une suite croissante majorée par M .

Alors, u converge et $\lim u_n \leq M$

2. Soit u une suite croissante non majorée.

Alors, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

3. Soit u une suite décroissante minorée par m .

Alors, u converge et $\lim u_n \geq m$

4. Soit u une suite décroissante non minorée.

Alors, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$

Preuve: 1. $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ (u_0 y est) majorée (par hypothèse) par M .

On pose $\ell = \sup_{n \in \mathbb{N}} (u_n)$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque

$\ell - \varepsilon < \ell$ donc, $\exists N \in \mathbb{N}, u_N > \ell - \varepsilon$

u est croissante donc

$$\forall n \geq N, u_n \geq u_N > \ell - \varepsilon$$

donc,

$$\forall n \geq N, \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell \leq \ell + \varepsilon$$

Donc, $u_n \rightarrow \ell$

2. Soit $M \in \mathbb{R}$. M n'est pas un majorant de l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ donc

$$\exists N \in \mathbb{N}, u_N > M$$

Comme u est croissante

$$\forall n \geq N, u_n \geq u_N \geq M$$

donc

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

□

EXEMPLE:

$$\begin{cases} u_0 = a \in]0, 1[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(1 - u_n) \end{cases}$$

(suite logistique)

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f : x \mapsto x(1 - x)$$

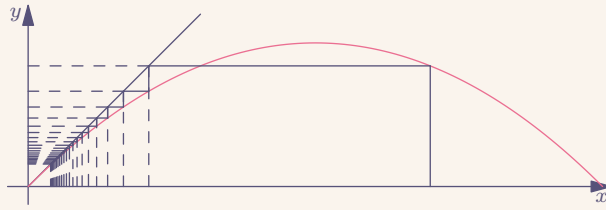


FIGURE 5 – Courbe logistique

— Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n(1 - u_n) - u_n \\ &= -u_n^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Donc, u est décroissante.

— Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, 1]$$

— $u_0 = a \in]0, 1[$ donc $u_0 \in [0, 1]$

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $u_n \in [0, 1]$

$$\begin{cases} 0 \leq u_n \leq 1 \\ 0 \leq 1 - u_n \leq 1 \end{cases}$$

donc

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

donc u minoré par 0

— D'après le théorème de la limite monotone, u converge. On pose ℓ sa limite :

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

Alors, $u_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$

$$u_n(1 - u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell(1 - \ell)$$

Par unicité de la limite,

$$\begin{aligned} \ell &= \ell(1 - \ell) \\ \Leftrightarrow 1 &= 1 - \ell \\ \Leftrightarrow 0 &= -\ell \Leftrightarrow \ell = 0 \end{aligned}$$

EXEMPLE:

$$\begin{cases} u_0 = a \in]0, 1[\\ u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n) \end{cases}$$

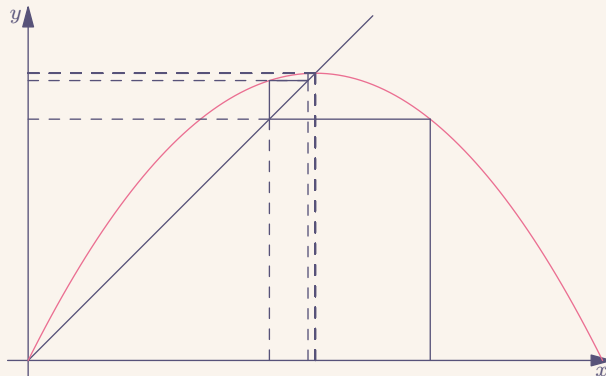


FIGURE 6 – Courbe logistique (2)

EXEMPLE:

$$\begin{cases} u_0 = a \in]0, 1[\\ u_{n+1} = 3u_n(1 - u_n) \end{cases}$$

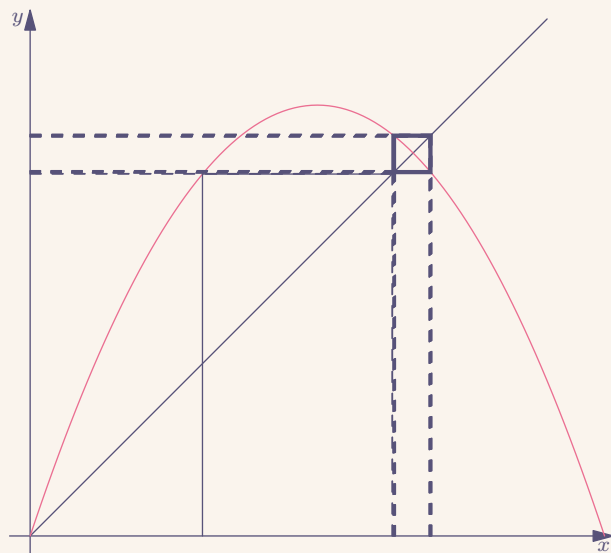


FIGURE 7 – Courbe logistique (3)

EXEMPLE:

$$\begin{cases} u_0 = a \in]0, 1[\\ u_{n+1} = 4u_n(1 - u_n) \end{cases}$$

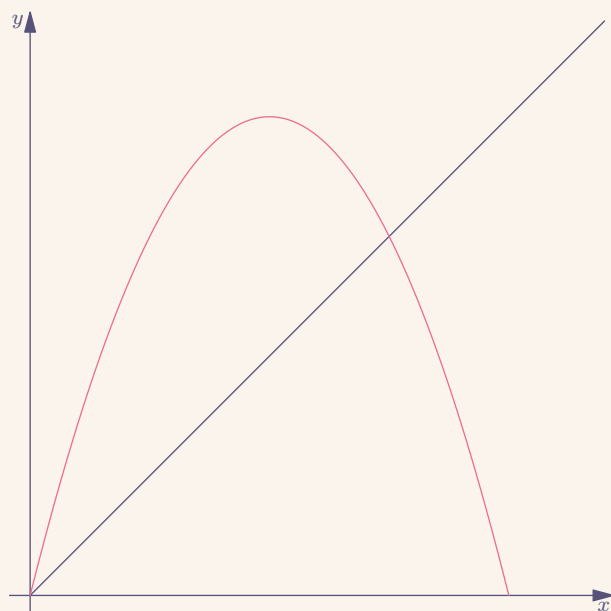


FIGURE 8 – Courbe logistique (4)

Définition: Soient u et v deux suites réelles. On dit que u et v sont adjacentes si

- u est croissante
- v est décroissante
- $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Théorème: Soient u et v deux suites adjacentes. Alors, u et v convergent vers la même limite.

Preuve:

$u - v$ est croissante donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - v_n \leq 0$$

v décroissante donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_0$$

donc u majorée par v_0 donc u converge.

u est croissante donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0$$

donc v est minorée par u_0 donc v converge.

Donc, $u_n - v_n \rightarrow \lim(u_n) - \lim(v_n)$ Par unicité de la limite,

$$\begin{aligned} \lim(u_n) - \lim(v_n) &= 0 \\ \iff \lim(u_n) &= \lim(v_n) \end{aligned}$$

□

Théorème (Théorème des segments emboîtés): Soit (I_n) une suite de segments (non vide) décroissante

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$$

On note $\ell(I)$ la longueur d'un intervalle I .

Si $\ell(I_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

Preuve:

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = [a_n, b_n]$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$I_{n+1} \subset I_n$ donc $a_{n+1} \in I_{n+1} \subset I_n$

donc $a_{n+1} \geq a_n$. De même, $b_{n+1} \in I_{n+1} \subset I_n$ donc $b_{n+1} \leq b_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \ell(I_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc (a_n) et (b_n) sont adjacentes, elles convergent donc vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

(a_n) croissante de limite ℓ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \ell$$

(b_n) est décroissante de limite ℓ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n \geq \ell$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \ell \in I_n$ donc $\ell \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

Soit $\ell' \neq \ell$.

— Si $\ell' < \ell = \sup_{n \in \mathbb{N}} (a_n)$ donc ℓ' ne majore pas (a_n)

$$\exists N \in \mathbb{N}, a_N > \ell'$$

donc $\ell' \notin I_N$ donc $\ell' \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$

— Si $\ell' > \ell = \inf_{n \in \mathbb{N}} (b_n)$ donc ℓ' ne minore pas (b_n)

$$\exists N' \in \mathbb{N}, b_{N'} < \ell'$$

et donc $\ell' \notin I_{N'}$ donc $\ell' \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$

□

Quatrième partie

Suites extraites

Définition: Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.
On dit que $(u_{\varphi(n)})$ est une **suite extraite** de u ou une **sous suite** de u . On dit alors que φ est une **extractrice**.

EXEMPLE:

u_0 u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 u_7 \dots

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1 \\ \varphi(1) = 4 \\ \varphi(2) = 5 \end{cases}$$

Lemme: Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$$

Preuve (par récurrence): — $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ donc $\varphi(0) \geq 0$
— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\varphi(n) \geq n$.
 $n+1 > n$ donc $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$ donc $\varphi(n+1) > n$
Comme $\varphi(n+1) \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) \geq n+1$

□

Proposition: Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante
alors $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Preuve: CAS 1 $\ell \in \mathbb{R}$
Soit $\varepsilon > 0$ on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Soit $n \geq N$ alors $\varphi(n) \geq n \geq N$ donc

$$|u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \varepsilon$$

Donc, $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$

CAS 2 $\ell = +\infty$

Soit $M \in \mathbb{R}$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, u_n \geq M$$

Soit $n \geq N$, on a $\varphi(n) \geq n \geq N$ donc

$$u_{\varphi(n)} \geq M$$

Donc $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

CAS 3 $\ell = -\infty$ similaire au CAS 2

□

EXEMPLE:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$$

$$u_{2n} = 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

$$u_{2n+1} = -1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -1$$

donc u_n n'a pas de limite.

Proposition: Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont la même limite ℓ alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$

Preuve: CAS 1 $\ell \in \mathbb{R}$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, |u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$$

Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, |u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon$$

On pose $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$. Soit $n \geq N$.

Si n pair alors $n = 2k$ avec $k \geq N_1$ et donc, $|u_{2k} - \ell| \leq \varepsilon$, i.e. $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$

Si n impair alors $n = 2k + 1$ avec $k \geq N_2$ et donc, $|u_{2k+1} - \ell| \leq \varepsilon$, i.e. $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$

Donc,

$$\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Donc $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$

□

Théorème (Théorème de Bolzano-Weierstrass): Soit (u_n) une suite réelle bornée. Alors, il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge.

Preuve: MÉTHODE 1 par dichotomie

Soient $m, M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$$

On pose

$$A_1 = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid m \leq u_n \leq \frac{m+M}{2} \right\}$$

$$A_2 = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{m+M}{2} \leq u_n \leq M \right\}$$

Comme $A_1 \cup A_2 = \mathbb{N}$, A_1 et A_2 ne peuvent pas être finis tous les deux.

On pose

$$B_0 = \begin{cases} A_1 & \text{si } A_1 \text{ est infini} \\ A_2 & \text{sinon} \end{cases}$$

B_0 est infini donc non vide. On pose $\varphi(0) = \min(B_0)$

On pose aussi

$$m_0 = \begin{cases} m & \text{si } B_0 = A_1 \\ \frac{m+M}{2} & \text{si } B_0 = A_2 \end{cases}$$

et

$$M_0 = \begin{cases} \frac{m+M}{2} & \text{si } B_0 = A_1 \\ M & \text{si } B_0 = A_2 \end{cases}$$

Ainsi, $B_0 = \{n \in \mathbb{N} \mid m_0 \leq u_n \leq M_0\}$. On pose

$$B'_1 = \left\{ n \in B_0 \mid n > \varphi(0) \text{ et } m_0 \leq u_n \leq \frac{M_0 + m_0}{2} \right\}$$

$$B'_2 = \left\{ n \in B_0 \mid n > \varphi(0) \text{ et } \frac{m_0 + M_0}{2} \leq u_n \leq M_0 \right\}$$

$$B'_1 \cup B'_2 = \{n \in B \mid n > \varphi(0)\} = B_0 \setminus \{\varphi(0)\}$$

$B_0 \setminus \{\varphi(0)\}$ est infini donc B'_1 ou B'_2 est infini. On pose

$$B_1 = \begin{cases} B'_1 & \text{si } B'_1 \text{ est infini} \\ B'_2 & \text{sinon} \end{cases}$$

B_1 est infini donc non vide et admet un plus petit élément :

$$\varphi(1) = \min(B_1)$$

$\varphi(1) \in B_1$ donc $\varphi(1) > \varphi(0)$

On pose

$$m_1 = \begin{cases} m_0 & \text{si } B_1 = B'_1 \\ \frac{m_0 + M_0}{2} & \text{si } B_1 = B'_2 \end{cases}$$

$$M_1 = \begin{cases} \frac{m_0 + M_0}{2} & \text{si } B_1 = B'_1 \\ M_0 & \text{si } B_1 = B'_2 \end{cases}$$

On construit une suite décroissante (B_n) , deux suites de réels (m_n) et (M_n) et une suite d'entiers $(\varphi(n))$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} B_{n+1} = \{k \in B_n \mid k > \varphi(n) \text{ et } m_{n+1} \leq u_k \leq M_{n+1}\} \\ \varphi(n+1) = \min(B_{n+1}) > \varphi(n) \\ M_{n+1} - m_{n+1} = \frac{1}{2}(M_n - m_n) \end{cases}$$

La suite (m_n) est croissante, (M_n) est décroissante et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n - m_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (M_0 - m_0) = 0$$

Donc, (m_n) et (M_n) sont adjacentes donc convergentes avec la même limite $\ell \in \mathbb{R}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, m_n \leq u_{\varphi(n)} \leq M_n$$

Par encadrement, $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$

□

MÉTHODE 2 On pose $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall k > n, u_n > u_k\}$

CAS 1 On suppose A infini.

On pose $\varphi(0) = \min(A)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n)$ soient déjà construits. On pose

$$\varphi(n+1) = \min(A \setminus \{\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n)\})$$

Soit $n \in \mathbb{N}_*$

$$\varphi(n+1) \in A \setminus \{\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n)\}$$

donc

$$\varphi(n+1) \in A \setminus \{\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n-1)\}$$

donc

$$\varphi(n+1) \geq \varphi(n)$$

Or, par définition, $\varphi(n+1) \neq \varphi(n)$ donc $\varphi(n+1) > \varphi(n)$

On a aussi $\varphi(1) \in A$ donc $\varphi(1) \geq \varphi(0)$ Or, on sait que $\varphi(1) \neq \varphi(0)$. Donc, $\varphi(1) > \varphi(0)$ Soit $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \in A$ donc

$$\forall k > \varphi(n), u_k < u_{\varphi(n)}$$

or $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ donc $u_{\varphi(n+1)} < u_{\varphi(n)}$.

La sous suite $(u_{\varphi(n)})$ est décroissante et minorée (car u est minorée) donc elle converge

CAS 2 On suppose A fini. Soit $N = \max(A)$,

$$\forall n > N, n \notin A$$

Donc $\forall n > N, \exists k > n, u_n \leq u_k$.

Par exemple, en posant $\varphi(0) = N+1$, on a

$$A_1 = \{k > N+1 \mid u_{N+1} \leq u_k\} \neq \emptyset$$

On pose $\varphi(1) = \min(A_1)$ donc $\begin{cases} \varphi(1) > N+1 = \varphi(0) \\ u_{\varphi(0)} < u_{\varphi(1)} \end{cases}$

Avec $n = \varphi(1)$

$$\exists k > n, u_{\varphi(1)} \leq u_k$$

Donc, $A_2 = \{k \in \mathbb{N} \mid k > \varphi(1) \text{ et } u_{\varphi(1)} \leq u_k\} \neq \emptyset$

On pose $\varphi(2) = \min(A_2)$. On a alors $\varphi(2) > \varphi(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\varphi(n)$ déjà construit avec $\varphi(n) > N$. On sait alors que

$$A_{n+1} = \{k \in \mathbb{N} \mid k > \varphi(n) \text{ et } u_{\varphi(n)} \leq u_k\} \neq \emptyset$$

On pose $\varphi(n+1) = \min(A_{n+1})$. Donc,

$$\begin{cases} \varphi(n+1) > \varphi(n) > N \\ u_{\varphi(n)} \leq u_{\varphi(n+1)} \end{cases}$$

On vient de construire une sous suite croissante majorée (car u est majorée) donc convergente.

□

Cinquième partie

Suites récurrentes

Définition: On dit que u est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants s'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

L'équation caractéristique associée est

$$(C) : z^2 = az + b \text{ avec } z \in \mathbb{C}$$

Proposition: Avec les notations précédentes,

1. Si (C) a 2 racines simples $r_1 \neq r_2$ alors

$$\exists (A, B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

2. Si (C) a une racine double $r \in \mathbb{C}$ alors

$$\exists (A, B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)r^n$$

Preuve (Récurrence double):

□

Proposition: avec les notations précédentes et avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

1. Si (C) a deux racines simples $r_1 \neq r_2$ alors

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

2. Si (C) a une racine simple $r \in \mathbb{R}$ alors

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)r^n$$

3. Si (C) a deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_*^+$ et $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))$$

□

REMARQUE:

Étude de $u_{n+1} = f(u_n)$

1. On choisit rapidement la fonction f (au moins le tableau de variation)
- 1'. (OPTIONNEL) on représente graphiquement la fonction f et la droite d'équation $y = x$ pour conjecturer sa limite
2. On utilise le tableau de variation pour vérifier que (u_n) est bien définie par récurrence

$$P(n) : "u_n \text{ existe et } u_n \in \mathcal{D}_f"$$

3. On étudie le signe de $f(x) - x$
4. On cherche les intervalles stables par f :

$$f(I) \subset I$$

les plus petits possible (ça permet de montrer que la suite est majorée (minorée) en particulier ceux sur lesquels $f(x) - x$ ne change pas de signe

- 4'. Donc on utilise le théorème de la limite monotone

- 4". Sinon, on essaie l'inégalité (voir théorème) des accroissements finis :
Soit ℓ un point fixe de $f : f(\ell) = \ell$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| = M |u_n - \ell|$$

où M est un majorant de $|f'|$

Si $0 \leq M \leq 1$ alors

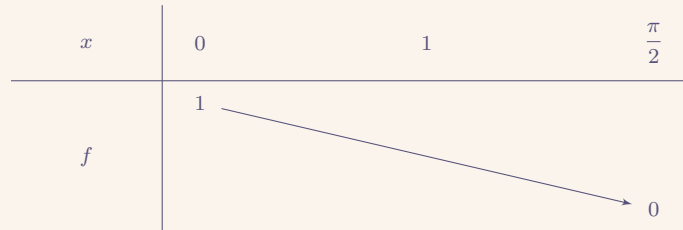
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq M^n |u_0 - \ell| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$

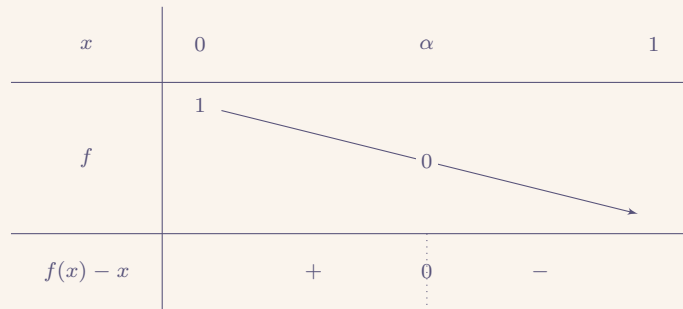
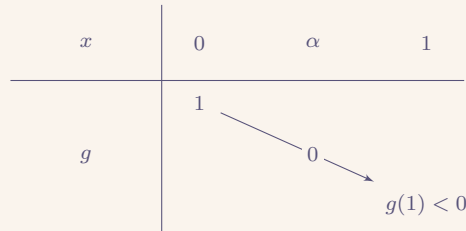
5. si (u_n) a une limite et si f continue alors $\lim(u_n)$ est une point fixe de f

EXEMPLE: 1.

$$\begin{cases} u_{n+1} = \cos(u_n) \\ u_0 \in]0, 1[\end{cases}$$



On pose $g : x \mapsto \cos(x) - x$ dérivable et
 $\forall x \in [0, 1], g'(x) = -\sin(x) - 1 \leq 0$



$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1], |f'(x)| &= |-\sin(x)| \\ &= \sin(x) \leq \sin(1) < 1 \end{aligned}$$

$$\forall n, |u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \sin(1) |u_n - \alpha|$$

donc

$$\forall n, |u_n - \alpha| \leq \underbrace{\sin^n(1)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} |u_0 - \alpha|$$

Donc, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$

Sixième partie

Comparaison de suites

Définition: Soient u et v deux suites réelles. On dit que u est dominée par v si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \leq M |v_n|$$

Dans ce cas, on note $u = O(v)$ ou $u_n = O(v_n)$ et on dit que " u est un grand o de v "

EXEMPLE:

En informatique, on dit qu'un algorithme a une complexité linéaire si son temps d'exécution est un $O(n)$. Par exemple, on calcule a^n

— Approche naïve Complexité linéaire $O(n)$

```

1:  $p \leftarrow 1$ 
2: for  $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  do
3:    $p \leftarrow p \times a$ 
4: end for
5: return  $p$ 

```

— Exponentiation rapide
On écrit n en binaire :

$$\begin{aligned} n &= \overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}^{(2)} \\ &= \sum_{i=0}^k a_i 2^i \end{aligned}$$

avec $(a_i) \in \{0, 1\}^{k+1}$

$$\begin{aligned} a^n &= a^{\sum_{i=0}^k a_i 2^i} \\ &= \prod_{i=0}^k a^{a_i 2^i} \end{aligned}$$

```

1:  $s \leftarrow 0$ 
2:  $p \leftarrow a$ 
3: for  $i \in \llbracket 0, \log_2(n) \rrbracket$  do
4:    $p \leftarrow p \times p$ 
5:   if  $a[i] = 1$  then
6:      $s \leftarrow s + p$ 
7:   end if
8: end for
9: return  $s$ 

```

Complexité logarithmique $O(\log_2(n))$

Proposition: O est une relation réflexive et transitive.

Preuve: — Soit u une suite. On pose $M = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M |u_n|$$

Donc $u = O(u)$.

— Soient u, v, w trois suites telles que

$$\begin{cases} u = O(v) \\ v = O(w) \end{cases}$$

Soient $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ et $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{cases} \forall n \geq N_1, |u_n| \leq M_1 |v_n| \\ \forall n \geq N_2, |v_n| \leq M_2 |w_n| \end{cases}$$

Nécessairement, $M_1 \geq 0$ et $M_2 \geq 0$.

Soit $N = \max(N_1, N_2)$.

$$\forall n \geq N, |u_n| \leq M_1 |v_n| \leq M_1 M_2 |w_n|$$

Donc $u = O(w)$

□

Définition: Soient u et v deux suites. On dit que u est négligeable devant v si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

Dans ce cas, on note $u = o(v)$ ou $u_n = o(v_n)$ ou on le lit " u est un petit o de v "

Proposition: o est une relation transitive, non-réfléctive

Preuve: — Soient u, v et w trois suites telles que

$$\begin{cases} u = o(v) \\ v = o(w) \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, |u_n| \leq \sqrt{\varepsilon} |v_n|$$

Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, |v_n| \leq \sqrt{\varepsilon} |w_n|$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$, alors

$$\forall n \geq N, |u_n| \leq \sqrt{\varepsilon} |v_n| \leq \underbrace{\sqrt{\varepsilon} \times \sqrt{\varepsilon}}_{\varepsilon} |w_n|$$

donc $u = o(w)$

— Soit u une suite tel qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, u_n > 0$$

On suppose que $u = o(u)$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \leq \varepsilon |u_n|$$

On pose $\varepsilon = \frac{1}{2}$ alors

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \leq \frac{1}{2} |u_n|$$

une contradiction

□

Proposition: Soient u et v deux suites.

- $o(u) + o(u) = o(u)$
- $v \times o(u) = o(uv)$
- $o(u) \times o(v) = o(uv)$
- $o(o(u)) = o(u)$

□

Définition: Soient u et v deux suites. On dit que u et v sont équivalentes si

$$u = v + o(v)$$

i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - v_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

Dans ce cas, on le note $u \sim v$

Proposition: \sim est une relation d'équivalence

□

Proposition: Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang

1. $u = o(v) \iff \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ bornée
2. $u = o(v) \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
3. $u \sim v \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

□

- Proposition** (Suites de références):
1. $\ln^\alpha(n) = o(n^\beta)$ avec $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$
 2. $n^\beta = o(a^n)$ avec $\beta > 0$ et $a > 1$
 3. $a^n = o(n!)$ avec $a > 1$
 4. $n! = o(n^n)$

Lemme (Exercice 10 du TD): Soit $u \in (\mathbb{R}_*^+)^{\mathbb{N}}$

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell < 1$ avec $\ell \in \mathbb{R}$,
alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Preuve (de la proposition): 1. par croissance comparée

2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n^\beta}{a^n}$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \left(\frac{n+1}{n} \right)^\beta \times \frac{1}{a} \\ &= \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^\beta \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} < 1 \end{aligned}$$

Donc, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

3. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{a^n}{n!}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

4. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n!}{n^n}$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} &= (n+1) \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= e^{n \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)} \\ &= e^{n \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)} \\ &= e^{n \left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)} \\ &= e^{-1+o(1)} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} < 1 \end{aligned}$$

donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

□

Septième partie

Suites complexes

Définition: Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que (u_n) converge vers ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

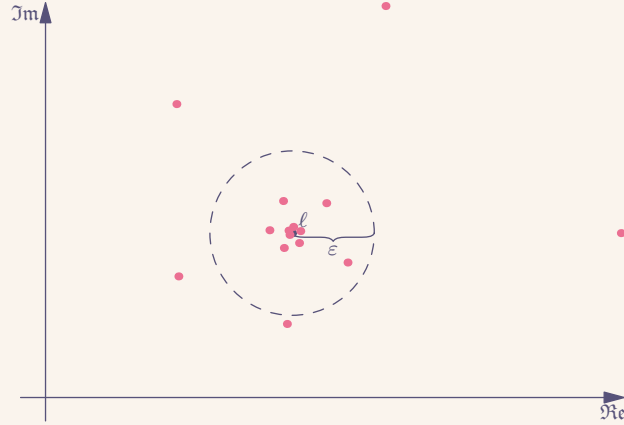


FIGURE 9 – Suite complexe convergente

Proposition: Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux limites de u alors $\ell_1 = \ell_2$

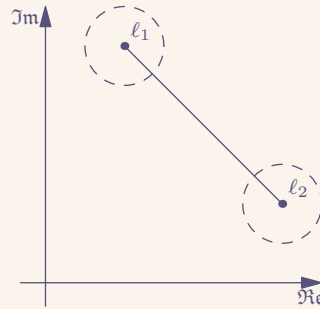


FIGURE 10 – Unicité de la limite de suites complexes

□

Proposition: Les limites de somme, produit, quotient de suites complexes respectent les mêmes lois que pour les suites réelles. □

Théorème: Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \iff \begin{cases} \Re(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Re(\ell) \\ \Im(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Im(\ell) \end{cases}$$

Preuve: \implies On suppose $u_n \rightarrow \ell$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Or,

$$\forall n \geq N, \begin{cases} \Re(u_n) - \Re(\ell) = \Re(u_n - \ell) \leq |u_n - \ell| \leq \varepsilon \\ \Im(u_n) - \Im(\ell) = \Im(u_n - \ell) \leq |u_n - \ell| \leq \varepsilon \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \Re(u_n) \rightarrow \Re(\ell) \\ \Im(u_n) \rightarrow \Im(\ell) \end{cases}$$

$$\Longleftarrow \text{ On suppose } \begin{cases} \Re(u_n) \rightarrow \Re(\ell) \\ \Im(u_n) \rightarrow \Im(\ell) \end{cases}$$

Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \Re(u_n) + i\Im(u_n) \rightarrow \Re(\ell) + i\Im(\ell) = \ell$$

□

Proposition: Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.
Si $u_n \rightarrow \ell$ alors $|u_n| \rightarrow |\ell|$

Preuve:

On suppose $u_n \rightarrow \ell$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = \sqrt{\Re^2(u_n) + \Im^2(u_n)} \rightarrow \sqrt{\Re^2(\ell) + \Im^2(\ell)} = |\ell|$$

□

Proposition: Tous les résultats (sauf ceux avec des limites infinies!) concernant les suites extraites sont encore valables dans \mathbb{C} y compris le théorème de Bolzano-Weierstrass (mais avec une autre preuve).

Définition: Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$$

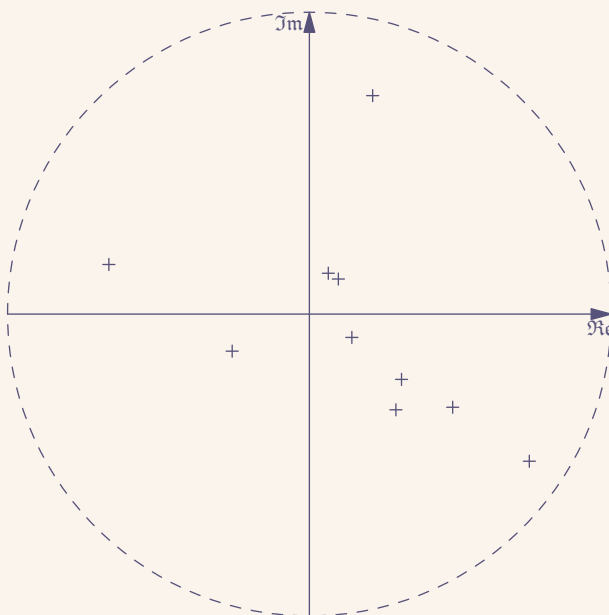


FIGURE 11 – Suite complexe bornée

Théorème (Bolzano Weierstrass): Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ bornée. Il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge.

Preuve:

Soit $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, |\Re(u_n)| \leq |u_n| \leq M$ Donc $(\Re(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Donc, il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(\Re(u_{\varphi(n)}))$ converge.

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\Im(u_{\varphi(n)})| \leq |u_{\varphi(n)}| \leq M$$

donc $(\Im(u_{\varphi(n)}))$ est bornée. Soit $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(\Im(u_{\varphi(\psi(n))}))$ converge. Or, $(\Re(u_{\varphi(\psi(n))}))$ est une sous suite de la suite convergente $(\Re(u_{\varphi(n)}))$ donc $(\Re(u_{\varphi(\psi(n))}))$ converge.

Donc, $(u_{\varphi(\psi(n))})$ converge.

Comme $\varphi \circ \psi$ est strictement croissante, $(u_{\varphi(\psi(n))})$ est une sous suite de (u_n) □

Huitième partie

Annexe

Proposition: Soit $f : I \rightarrow I$ continue et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$
alors $f(\ell) = \ell$ i.e. (ℓ est un point fixe de f)

Preuve:

On suppose que (u_n) converge vers ℓ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$ car (u_{n+1}) est une sous suite de (u_n) .

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

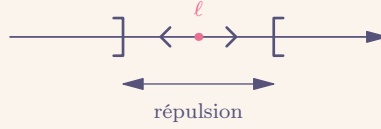
Comme f est continue alors $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$. Par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$ \square

REMARQUE:

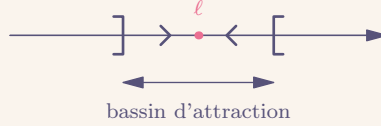
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ un point fixe de f . Donc, $f(\ell) = \ell$.

$|f'(\ell)| > 1$:



$|f'(\ell)| < 1$:



Par contre, si $|f'(\ell)| = 1$, on ne sait pas.

REMARQUE (Suite arithético-géométrique):

$$(*) : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b = f(u_n)$$

MÉTHODE 1

— On cherche v une suite constante solution de $(*)$:

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, v_n = C$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, C = aC + b = f(C)$$

$$\text{Si } a \neq 1 : C = \frac{b}{1-a}$$

— Soit u qui vérifie $(*)$. On pose $w = u - v$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} &= u_{n+1} - v_{n+1} \\ &= au_n + b - av_n - b \\ &= a(u_n - v_n) \\ &= aw_n\end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = aw_n + 0$: équation homogène associée à $(*)$
 (w_n) est géométrique donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 a^n$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = w_0 a^n + \frac{b}{1-a}$$

MÉTHODE 2

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) &\longmapsto (u_{n+1} - au_n)\end{aligned}$$

φ morphisme de groupes additifs

$$\varphi(u) = (b) \iff u = v + w \text{ avec } w \in \text{Ker}(\varphi)$$

$$\begin{aligned}w \in \text{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(w) = 0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - aw_n = 0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = aw_n\end{aligned}$$