

## CHAPITRE 02

# Nombre

Hugo SALOU MP2I

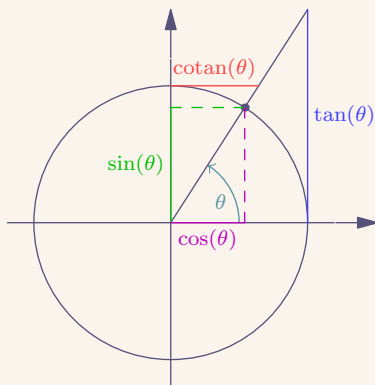
Dernière mise à jour le 18 mai 2022

# TABLE DES MATIÈRES

I	Trigonométrie	2
II	Nombres complexes de module 1	7
III	Géométrie des nombres complexes	10
IV	Exponentielle complexe	19
V	Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$	21

Première partie

Trigonométrie



**Définition:** On définit, pour

$$\theta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$$

$$\iff \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

la tangente de  $\theta$  par

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

**Définition:** Pour  $\theta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ] -k\pi, (k+1)\pi[$ , on définit la contangente de  $\theta$  par

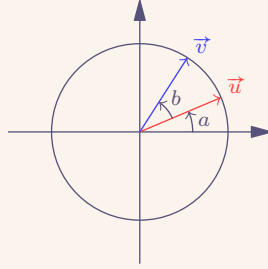
$$\cotan \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

**Proposition:** Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

1.  $\cos(-a) = \cos(a)$
2.  $\cos(a + 2\pi) = \cos(a)$
3.  $\cos(a + \pi) = -\cos(a)$
4.  $\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
5.  $\sin(-a) = -\sin(a)$
6.  $\sin(a + 2\pi) = \sin(a)$
7.  $\sin(a + \pi) = -\sin(a)$
8.  $\sin(\pi - a) = \sin(a)$
9.  $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
10.  $\sin(a + b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$
11.  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a)$

$$12. \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)$$

*Preuve:* 8. Soient  $\vec{u} = (\cos(a), \sin(a))$  et  $\vec{v} = (\cos(b), \sin(b))$



D'une part,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

D'autre part,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \cos(a - b)$

On a montré que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\text{d'où } \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$11. \forall a \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{=0} \cos(a) + \overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{=1} \sin(a) = \sin(a)$$

$$12. \forall a \in \mathbb{R}, \cos(a) = \cos\left(-a + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$$

10.

$$\begin{aligned} \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \sin(a + b) &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(b) \\ &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \end{aligned}$$

□

**Proposition:** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$  et  $b \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$ .

$$1. \tan(a + \pi) = \tan(a)$$

$$2. \tan(-a) = -\tan(a)$$

$$3. \text{ Si } a + b \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi], \text{ alors, } \tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

*Preuve:* 3. On suppose  $a + b \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$

$$\begin{aligned}
\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} \\
&= \frac{\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} \\
&= \frac{\frac{\sin(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} + \frac{\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}} \\
&= \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}
\end{aligned}$$

□

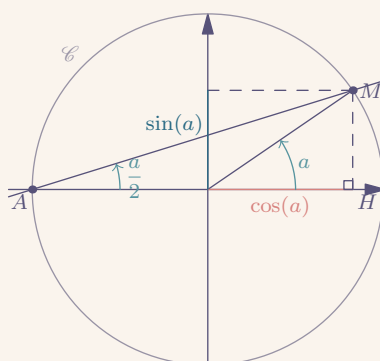
**Proposition:** Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

1. Si  $a \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ , alors,  $1 + \tan^2(a) = \frac{1}{\cos^2(a)}$
2. Si  $a \not\equiv \pi \pmod{2\pi}$ 
  - $\cos(a) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$
  - $\sin(a) = \frac{2 \tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$
  - Si  $a \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ ,  $\tan(a) = \frac{2 \tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$

*Preuve:* 1. On suppose que  $a \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$

$$1 + \tan^2(a) = 1 + \frac{\sin^2(a)}{\cos^2(a)} = \frac{\cos^2(a) + \sin^2(a)}{\cos^2(a)} = \frac{1}{\cos^2(a)}$$

2. On peut le prouver par le calcul avec les formules de la tangente mais on peut également le prouver géométriquement.



Soit  $M(x_0, y_0) \neq A$  sur le cercle trigonométrique  $\mathcal{C}$ . On note  $t$  la pente de la demi-droite  $[AM)$ .

On en déduit que l'équation de la droite  $(AM)$  est

$$y = tx + t = t(x + 1)$$

On sait que  $M \in (AM)$  donc

$$y_0 = t(x_0 + 1)$$

On sait aussi que  $x_0^2 + y_0^2 = 1$

Donc,

$$x_0 + t^2(x_0 + 1)^2 = 1$$

et donc

$$x_0^2 \underbrace{(1 + t^2)}_{\neq 0} + 2t^2 x_0 + t^2 - 1 = 0$$

On résout cette équation du second degré et on trouve deux racines :  $x_0 = -1$  et

$$x_0 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Comme  $M \neq A$ ,  $x_0 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$  et  $y_0 = t \left( \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 1 \right) = \frac{2t}{1 + t^2}$

Enfin,

$$t = \frac{|HM|}{|AH|} = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$$

car  $AHM$  est rectangle en  $H$  (d'après le théorème de Thalès)

Donc,

$$\begin{cases} \cos(a) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{a}{2}\right)} \\ \sin(a) = \frac{2 \tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{a}{2}\right)} \end{cases}$$

□

## Deuxième partie

### Nombres complexes de module 1



**Proposition:** Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

$$(\cos(a) + i \sin(a)) \times (\cos(b) + i \sin(b)) = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$$

*Preuve:*

$$\begin{aligned} (\cos(a) + i \sin(a)) \times (\cos(b) + i \sin(b)) &= \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \\ &\quad + i(\cos(a) \sin(b) + \cos(b) \sin(a)) \\ &= \cos(a+b) + i \sin(a+b) \end{aligned}$$

□

**Définition:** Pour  $a \in \mathbb{R}$ , on pose  $e^{ia} = \cos(a) + i \sin(a)$   
Ainsi,  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, e^{ia} \times e^{ib} = e^{i(a+b)}$

**Proposition:** Soient  $a, b, c$  trois nombres complexes avec  $a \neq 0$  et  $z_1, z_2$  les racines de  $P : z \mapsto az^2 + bz + c$

Alors,  $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$  et  $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$

EXEMPLE:

$(E) : z^2 - 3z + 2 = 0$

On remarque que  $2 \times 1 = 2$  et  $2 + 1 = 3$  donc 2 et 1 sont deux solutions de  $(E)$ .

*Preuve:* MÉTHODE 1 Soit  $\Delta = b^2 - 4ac$  et  $\delta$  une racine carrée de  $\Delta$

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

Donc,

$$z_1 \times z_2 = \frac{b^2 - \delta^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \quad z_1 + z_2 = \frac{-b - b - \delta + \delta}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

MÉTHODE 2

$$\forall z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) = a(z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2)$$

En particulier,

$$\begin{cases} \text{avec } z = 0, & c = az_1 z_2 \\ \text{avec } z = 0, & \cancel{a} + b + \cancel{c} = a(\cancel{1} - (z_1 + z_2) + \cancel{z_1 z_2}) \end{cases}$$

donc

$$b = -a(z_1 + z_2)$$

et donc

$$\begin{cases} z_1 z_2 = \frac{c}{a} \\ z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

□

**Proposition:** Soient  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$  et  $z_1, z_2, z_3$  les solutions de

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

Alors,

$$\begin{cases} z_1 z_2 z_3 = -c \\ z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 = b \\ z_1 + z_2 + z_3 = -a \end{cases}$$

□

**Proposition:** Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$  des nombres complexes et  $z_1, z_2, \dots, z_n$  les solutions de

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = 1$$

Alors,

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} z_{i_1} \times z_{i_2} \times \dots \times z_{i_k} &= (-1)^k a_{n-k} \\ \sum_{k=1}^n z_k &= -a_{n-1} \\ \prod_{k=1}^n z_k &= (-1)^k a_0 \end{aligned}$$

*Preuve (incomplète pour  $n = 3$ ):*

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}, z^3 + az^2 + bz + c &= (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 + z^2(-z_1 - z_2 - z_3) \\ &\quad + z(z_2 z_3 + z_1 z_2 + z_1 z_3) \\ &\quad - z_1 z_2 z_3 \end{aligned}$$

$$\text{On identifie } \begin{cases} a = -z_1 - z_2 - z_3 \\ b = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 \\ c = -z_1 z_2 z_3 \end{cases}$$

□

EXEMPLE:

On pose

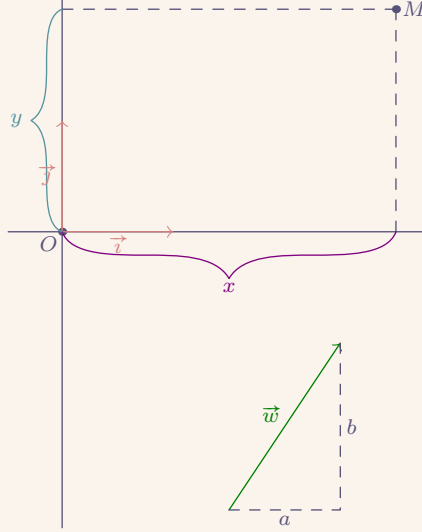
$$\begin{cases} s = z_1 + z_2 + z_3 \\ q = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 \\ p = z_1 z_2 z_3 \end{cases}$$

$$\text{et } P = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3$$

## Troisième partie

# Géométrie des nombres complexes

Dans ce paragraphe,  $\mathcal{P}$  désigne un plan euclidien muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$



**Définition:** Soit  $M \in \mathcal{P}$ . On note  $(x, y)$  les coordonnées du point  $M$  par rapport au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

L'affixe de  $M$  est le nombre

$$z_M = x + iy \in \mathbb{C}$$

Soit  $\vec{w} \in \vec{\mathcal{P}}$  (le plan des vecteurs) et  $(a, b)$  les coordonnées de  $\vec{w}$ .

L'affixe de  $\vec{w}$  est

$$z_{\vec{w}} = a + ib \in \mathbb{C}$$

**Proposition:** Soit  $(A, B) \in \mathcal{P}^2$  et  $(\vec{w}_1, \vec{w}_2) \in \vec{\mathcal{P}}^2$

1.  $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
2.  $z_{\vec{w}_1 + \vec{w}_2} = z_{\vec{w}_1} + z_{\vec{w}_2}$

□

**Proposition:** Soit  $(\vec{w}_1, \vec{w}_2) \in \vec{\mathcal{P}}^2$  avec  $\vec{w}_1 \neq \vec{0}$  et  $\vec{w}_2 \neq \vec{0}$

Alors,  $\left| \frac{z_{\vec{w}_1}}{z_{\vec{w}_2}} \right| = \frac{\|\vec{w}_1\|}{\|\vec{w}_2\|}$  et  $\arg \left( \frac{z_{\vec{w}_1}}{z_{\vec{w}_2}} \right) = \underbrace{(\widehat{\vec{w}_1, \vec{w}_2})}_{\text{l'angle entre } \vec{w}_1 \text{ et } \vec{w}_2}$

*Preuve:*

Soient  $(r_1, r_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$  et  $(\theta_1, \theta_2) \in ([0, 2\pi[)^2$  tels que

$$z_{\vec{w}_1} = r_1 e^{i\theta_1} \text{ et } z_{\vec{w}_2} = r_2 e^{i\theta_2}$$

Alors,

$$\frac{z_{\vec{w}_1}}{z_{\vec{w}_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

donc

$$\begin{cases} \left| \frac{z_{\vec{w}_1}}{z_{\vec{w}_2}} \right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\|\vec{w}_1\|}{\|\vec{w}_2\|} \\ \arg\left(\frac{z_{\vec{w}_1}}{z_{\vec{w}_2}}\right) \equiv \theta_1 - \theta_2 \pmod{2\pi} \end{cases}$$

car  $\theta_1 - \theta_2$  est l'angle entre  $\vec{w}_1$  et  $\vec{w}_2$

□

**Corollaire:** Avec les hypothèses et notations précédentes,

1.  $\vec{w}_1$  et  $\vec{w}_2$  sont colinéaires  $\iff \frac{z_{\vec{w}_1}}{z_{\vec{w}_2}} \in \mathbb{R}$
2.  $\vec{w}_1$  et  $\vec{w}_2$  sont orthogonaux  $\iff \frac{z_{\vec{w}_1}}{z_{\vec{w}_2}} \in i\mathbb{R}$

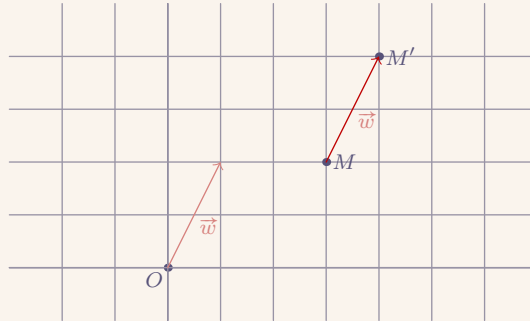
*Preuve:* 1.

$$\begin{aligned} \vec{w}_1 \text{ et } \vec{w}_2 \text{ sont colinéaires} &\iff (\widehat{\vec{w}_1, \vec{w}_2}) \equiv 0 \pmod{\pi} \\ &\iff \arg\left(\frac{z_{\vec{w}_1}}{z_{\vec{w}_2}}\right) \equiv 0 \pmod{\pi} \\ &\iff \frac{z_{\vec{w}_1}}{z_{\vec{w}_2}} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \vec{w}_1 \text{ et } \vec{w}_2 \text{ sont orthogonaux} &\iff (\widehat{\vec{w}_1, \vec{w}_2}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \\ &\iff \arg\left(\frac{z_{\vec{w}_1}}{z_{\vec{w}_2}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \\ &\iff \frac{z_{\vec{w}_1}}{z_{\vec{w}_2}} \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

□



**Définition:** Soit  $\vec{w} \in \vec{\mathcal{P}}$ . La translation de vecteur  $\vec{w}$  est l'application

$$\begin{aligned} t_{\vec{w}} : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

où  $M'$  vérifie  $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$

**Proposition:** Soit  $\vec{w} \in \vec{\mathcal{P}}$  et  $(M, M') \in \mathcal{P}^2$

$$M' = t_{\vec{w}}(M) \iff z_{M'} = z_M + z_{\vec{w}}$$

*Preuve:*

$$\begin{aligned} M' = t_{\vec{w}}(M) &\iff \overrightarrow{MM'} = \vec{w} \\ &\iff z_M - z_{M'} = z_{\vec{w}} \\ &\iff z_{M'} = z_M + z_{\vec{w}} \end{aligned}$$

□

EXEMPLE (Décrire l'ensemble  $E = \{M \in \mathcal{P} \mid \exists t \in \mathbb{R}, z_M = 1 + e^{it}\}$ ):

L'ensemble  $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} \mid \exists t \in \mathbb{R}, z_M = e^{it}\}$  est le cercle trigonométrique. La translation  $t_{\vec{u}}$  a pour expression complexe  $z \mapsto z + 1$ . Donc,  $E = t_{\vec{u}}(\mathcal{C})$  est le cercle de rayon 1 et de centre le point d'affixe 1.

**Proposition:** Soient  $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \vec{\mathcal{P}}$ .

$$t_{\vec{w}_2} \circ t_{\vec{w}_1} = t_{\vec{w}_1 + \vec{w}_2}$$

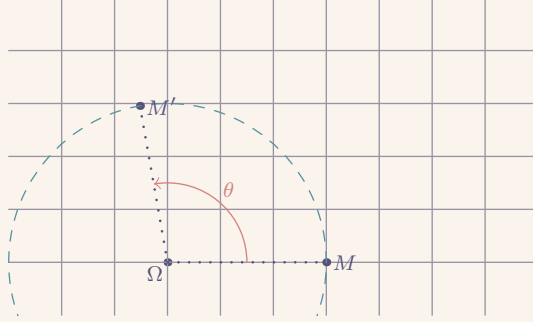
*Preuve:*

Soit  $M \in \mathcal{P}$  d'affixe  $z$ . On pose  $M_1 = t_{\vec{w}_1}(M)$  et  $M' = t_{\vec{w}_2}(M_1)$  et on note également  $M'' = t_{\vec{w}_1 + \vec{w}_2}(M)$

$$\begin{aligned} z_{M'} &= z_{M_1} + z_{\vec{w}_2} \\ &= (z + z_{\vec{w}_1}) + z_{\vec{w}_2} \\ &= z + z_{\vec{w}_1 + \vec{w}_2} \end{aligned}$$

Donc,  $M' = M''$

□



**Définition:** Soit  $\Omega \in \mathcal{P}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ .

La rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\theta$  est l'application

$$\begin{aligned} \rho_{\Omega, \theta} : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

où  $M'$  vérifie

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{\Omega M}\| = \|\overrightarrow{\Omega M'}\| \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta \end{cases}$$

**Proposition:** Soit  $\Omega \in \mathcal{P}$  d'affixe  $\omega$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $(M, M') \in \mathcal{P}^2$

$$(*) : \quad M' = \rho_{\Omega, \theta}(M) \iff z_{M'} = \omega + e^{i\theta}(z_M - \omega)$$

*Preuve:* CAS 1 On suppose  $M \neq \Omega$ .

$$\begin{aligned} M' = \rho_{\Omega, \theta}(M) &\iff \begin{cases} \|\overrightarrow{\Omega M}\| = \|\overrightarrow{\Omega M'}\| \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} |z_{\overrightarrow{\Omega M}}| = |z_{\overrightarrow{\Omega M'}}| \\ \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{\Omega M}}}{z_{\overrightarrow{\Omega M'}}}\right) = \theta \end{cases} \\ &\iff e^{i\theta} = \frac{z_{\overrightarrow{\Omega M}}}{z_{\overrightarrow{\Omega M'}}} \\ &\iff z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = e^{i\theta} z_{\overrightarrow{\Omega M}} \\ &\iff z_{M'} - \omega = e^{i\theta}(z_M - \omega) \\ &\iff z_{M'} = \omega + e^{i\theta}(z_M - \omega) \end{aligned}$$

CAS 2 On suppose  $M = \Omega$ .

Alors,

$$\begin{aligned} M' = \rho_{\Omega, \theta}(M) &\iff M' = M \\ &\iff z_{M'} = z_M \\ &\iff z_{M'} = z_M + e^{i\theta}(z_M - z_M) \\ &\iff z_{M'} = \omega + e^{i\theta}(z_M - \omega) \end{aligned}$$

□

REMARQUE (Cas particulier):

Si  $\Omega = O$  alors

$$(*) \iff z_{M'} = e^{i\theta} z_M$$

**Corollaire:** Soit  $\Omega \in \mathcal{P}$  d'affixe  $\omega$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \rho_{\Omega, \theta} &= t_{\overrightarrow{O\Omega}} \circ \rho_{O, \theta} \circ t_{\overrightarrow{\Omega O}} \\ &= t_{\overrightarrow{O\Omega}} \circ \rho_{O, \theta} \circ (t_{\overrightarrow{O\Omega}})^{-1} \end{aligned}$$

**Proposition:** Soient  $(\Omega_1, \Omega_2) \in \mathcal{P}^2$  et  $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ 

$$\rho_{\Omega_1, \theta_1} \circ \rho_{\Omega_1, \theta_2} = \rho_{\Omega_1, \theta_1 + \theta_2} = \rho_{\Omega_1, \theta_2} \circ \rho_{\Omega_1, \theta_1}$$

Si  $\begin{cases} \Omega_1 \neq \Omega_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases}$  alors  $\rho_{\Omega_1, \theta_1} \circ \rho_{\Omega_2, \theta_2}$  est une rotation d'angle  $\theta_1 + \theta_2$

Si  $\begin{cases} \Omega_1 \neq \Omega_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases}$  alors  $\rho_{\Omega_1, \theta_1} \circ \rho_{\Omega_2, \theta_2}$  est une translation

*Preuve:*

On note  $\omega_1$  l'affixe de  $\Omega_1$  et  $\omega_2$  l'affixe de  $\Omega_2$ . On pose  $\rho_1 = \rho_{\Omega_1, \theta_1}$  et  $\rho_2 = \rho_{\Omega_2, \theta_2}$ . Soit  $M \in \mathcal{P}$  d'affixe  $z$ . On pose

$$\begin{aligned} M_2 &= \rho_2(M) \\ M' &= \rho_1 \circ \rho_2(M) = \rho_1(M_2) \end{aligned}$$

et on note  $z_2$  et  $z'$  les affixes de  $M_2$  et  $M'$ 

On a

$$\begin{aligned} z' &= \omega_1 + e^{i\theta_1}(z_2 - \omega_1) \\ &= \omega_1 + e^{i\theta_1}(\omega_2 + e^{i\theta_2}(z - \omega_2) - \omega_1) \\ &= \omega_1 + \omega_2 e^{i\theta_1} - \omega_1 e^{i\theta_1} + e^{i(\theta_1 + \theta_2)}(z - \omega_2) \end{aligned}$$

1. On suppose  $\Omega_1 = \Omega_2$  donc  $\omega_1 = \omega_2$ . On a donc

$$z' = \omega_1 + e^{i(\theta_1 + \theta_2)}(z - \omega_1)$$

On reconnaît l'expression d'une rotation de centre  $\Omega_1$  et d'angle  $\theta_1 + \theta_2$ 2. On suppose  $\Omega_1 \neq \Omega_2$  et  $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0 \pmod{2\pi}$ . On a donc

$$\begin{aligned} z' &= \underbrace{\omega_1 + \omega_2 e^{i\theta_1} - \omega_1 e^{i\theta_1} - \omega_2}_{= z + \omega} + z \\ &= z + \omega \end{aligned}$$

On reconnaît l'expression d'une translation de vecteur  $\omega$ .3. On suppose  $\Omega_1 \neq \Omega_2$  et  $\theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$



On cherche  $\omega \in \mathbb{C}$  tel que

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}, \omega + e^{i(\theta_1+\theta_2)}(z - \omega) &= \omega_1 + \omega_2 e^{i\theta_1} - \omega_1 e^{i\theta_1} + e^{i(\theta_1+\theta_2)}(z - \omega_2) \\ \iff \omega - e^{i(\theta_1+\theta_2)}\omega &= \omega_1 + \omega_2 e^{i\theta_1} - \omega_1 e^{i\theta_1} - \omega_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ \iff \omega &= \frac{\omega_1 + \omega_2 e^{i\theta_1} - \omega_1 e^{i\theta_1} - \omega_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}}{1 - e^{i(\theta_1+\theta_2)}} \end{aligned}$$

On reconnaît l'expression complexe d'une rotation d'angle  $\theta_1 + \theta_2$  de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega$

□

**Proposition:** Soit  $\Omega \in \mathcal{P}$  d'affixe  $\omega$ ,  $\vec{w} \in \vec{\mathcal{P}}$  d'affixe  $u$ . Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  avec  $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ .

- $t_{\vec{w}} \circ \rho_{\Omega, \theta}$  est une rotation d'angle  $\theta$
- $\rho_{\Omega, \theta} \circ t_{\vec{w}}$  est aussi une rotation d'angle  $\theta$

*Preuve:*

Soit  $M \in \mathcal{P}$  d'affixe  $z$  et  $M' = t_{\vec{w}} \circ \rho_{\Omega, \theta}(M)$  d'affixe  $z'$

On a alors :

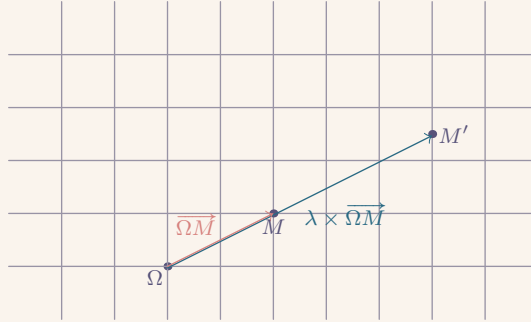
$$z' = (\omega + e^{i\theta}(z - \omega)) + u$$

On cherche  $\omega' \in \mathbb{C}$  tel que

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}, \omega + u + e^{i\theta}(z - \omega) &= \omega' + e^{i\theta}(z - \omega') \\ \iff \omega + u - e^{i\theta}\omega &= \omega' - e^{i\theta}\omega' \\ \iff \omega' &= \frac{\omega + u - e^{i\theta}\omega}{1 - e^{i\theta}} \end{aligned}$$

On reconnaît l'expression complexe d'une rotation d'angle  $\theta$

□



**Définition:** Soit  $\Omega \in \mathcal{P}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

L'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $\lambda$  est l'application

$$\begin{aligned} h_{\Omega, \lambda} : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

où  $M'$  vérifie  $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$

**Proposition:** Soit  $\Omega \in \mathcal{P}$  d'affixe  $\omega$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Soient  $M \in \mathcal{P}$  d'affixe  $z$  et  $M' \in \mathcal{P}$  d'affixe  $z'$ .

$$M' = h_{\Omega, \lambda}(M) \iff z' = \omega + \lambda(z - \omega)$$

*Preuve:*

$$\begin{aligned} M' = h_{\Omega, \lambda}(M) &\iff \overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M} \\ &\iff z' - \omega = \lambda(z - \omega) \\ &\iff z' = \omega + \lambda(z - \omega) \end{aligned}$$

□

**Proposition:** Soient  $(\Omega_1, \Omega_2) \in \mathcal{P}^2$  et  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{P}^2$

1. Si  $\Omega_1 = \Omega_2$  alors,  $h_{\Omega_1, \lambda_1} \circ h_{\Omega_2, \lambda_2} = h_{\Omega_1, \lambda_1 \lambda_2}$
2. Si  $\Omega_1 \neq \Omega_2$  et  $\lambda_1 \lambda_2 \neq 1$ , alors,  $h_{\Omega_1, \lambda_1} \circ h_{\Omega_2, \lambda_2}$  est une homothétie de rapport  $\lambda_1 \lambda_2$
3. Si  $\Omega_1 \neq \Omega_2$  et  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ , alors,  $h_{\Omega_1, \lambda_1} \circ h_{\Omega_2, \lambda_2}$  est une translation.

□

**Proposition:** Soit  $\Omega \in \mathcal{P}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $\vec{w} \in \vec{\mathcal{P}}$ .

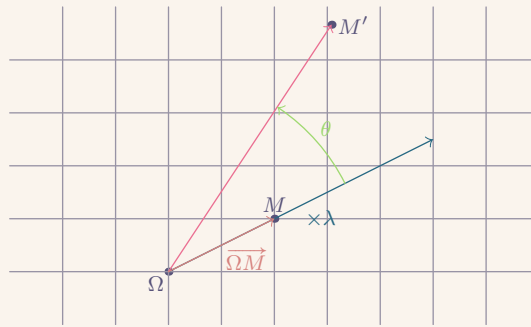
Alors,  $t_{\vec{w}} \circ h_{\Omega, \lambda}$  et  $h_{\Omega, \lambda} \circ t_{\vec{w}}$  sont homothéties de rapport  $\lambda$ .

□

REMARQUE (Cas particulier):

Soit  $M \in \mathcal{P}$  d'affixe  $z$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $M' = h_{O, \lambda}(M)$  d'affixe  $z'$

On a  $z' = \lambda z$



**Définition:** Soient  $\Omega \in \mathcal{P}$ ,  $(\theta, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ . La similitude (directe) de centre  $\Omega$ , d'angle  $\theta$  et de rapport  $\lambda$  est

$$S_{\Omega, \theta, \lambda} = h_{\Omega, \lambda} \circ \rho_{\Omega, \theta}$$

Avec les notations précédentes,

**Proposition:**

$$S_{\Omega,\theta,\lambda} = \rho_{\Omega,\theta} \circ h_{\Omega,\lambda}$$

*Preuve:*

On note  $\omega$  l'affixe de  $\Omega$ . L'expression complexe de  $S_{\Omega,\theta,\lambda}$  est

$$\begin{aligned} z' &= \omega + \lambda(\omega + e^{i\theta}(z - \omega) - \omega) \\ &= \omega + \lambda e^{i\theta}(z - \omega) \end{aligned}$$

L'expression complexe de  $\rho_{\Omega,\theta} \circ h_{\Omega,\lambda}$  est

$$\begin{aligned} z' &= \omega + e^{i\theta}(\omega + \lambda(z - \omega) - \omega) \\ &= \omega + \lambda e^{i\theta}(z - \omega) \end{aligned}$$

Les deux expressions sont identiques. □

**Proposition:** L'expression complexe de  $S_{\Omega,\theta,\lambda}$  est

$$z' = \omega + \lambda e^{i\theta}(z - \omega)$$

Quatrième partie

Exponentielle complexe

**Définition:** Pour  $z \in \mathbb{C}$ , on pose

$$\exp(z) = e^{\Re(z)} \times (\cos(\Im(z)) + i \sin(\Im(z)))$$

Ainsi, si  $z = a + ib$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\exp(z) = \exp(a + ib) = e^a \times (\cos(b) + i(\sin(b))) = e^a e^{ib}$$

**Proposition:** Soient  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \times \exp(z_2)$$

*Preuve:*

On pose  $\begin{cases} z_1 = a + ib \\ z_2 = c + id \end{cases}$  avec  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} \exp(z_1) \times \exp(z_2) &= e^a \times e^{ib} \times e^c \times e^{id} \\ &= e^{a+c} e^{i(b+d)} \\ &= \exp(z_1 + z_2) \end{aligned}$$

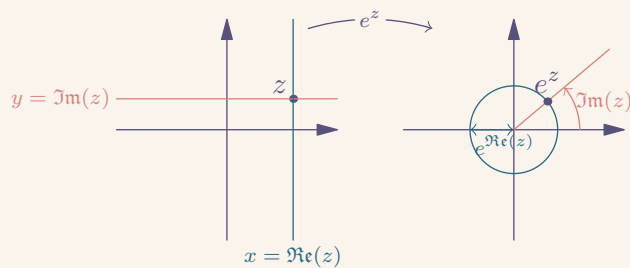
□

REMARQUE (Notation):

On écrit  $e^z$  à la place de  $\exp(z)$  pour  $z \in \mathbb{C}$ .

**Proposition:**

$$\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} |e^z| = e^{\Re(z)} \\ \arg(e^z) \equiv \Im(z) \pmod{2\pi} \end{cases}$$



REMARQUE:

$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  n'est pas bijective :

$$\begin{cases} \exp(0) = \exp(2i\pi) = 1 \\ 0 \neq 2i\pi \end{cases}$$

— 0 n'a pas d'antécédant

Il n'y a donc pas de logarithme complexe.

## Cinquième partie

# Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

**Définition:** Soit  $f$  définie sur  $D \subset \mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  ( $\forall x \in D, f(x) \in \mathbb{C}$ )  
On pose :

$$\begin{aligned}\Re(f) : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \Re(f(x))\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Im(f) : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \Im(f(x))\end{aligned}$$

EXEMPLE:

$$\begin{aligned}f : [0, 2\pi[ &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto e^{(1+i)x}\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}\Re(f) : [0, 2\pi[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x \cos(x)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Im(f) : [0, 2\pi[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x \sin(x)\end{aligned}$$

**Définition:** Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ . On dit que  
—  $f$  est continue si  $\Re(f)$  et  $\Im(f)$  sont continues  
—  $f$  est dérivable si  $\Re(f)$  et  $\Im(f)$  sont dérivables.  
Dans ce cas, la dérivée de  $f$  est

$$\begin{aligned}f' : D &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \Re(f)'(x) + i\Im(f)'(x)\end{aligned}$$

EXEMPLE:

$$\begin{aligned}f : [0, 2\pi[ &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto e^{(1+i)x}\end{aligned}$$

$x \mapsto e^x$  et  $x \mapsto \cos(x)$  sont dérivables sur  $[0, 2\pi[$  donc  $\Re(f)$  est dérivable.  
 $x \mapsto e^x$  et  $x \mapsto \sin(x)$  sont dérivables sur  $[0, 2\pi[$  donc  $\Im(f)$  est dérivable.  
Donc  $f$  est dérivable.

$$\forall x \in [0, 2\pi[, \begin{cases} \Re(f)'(x) = e^x \cos(x) - e^x \sin(x) \\ \Im(f)'(x) = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) \end{cases}$$

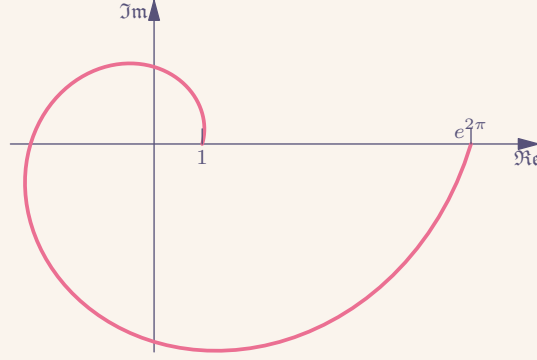
Donc,

$$\forall x \in [0, 2\pi[, f'(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x)) + ie^x(\sin(x) + \cos(x))$$

REMARQUE:

On peut représenter  $f$  de la façon suivante.

$$\begin{aligned}f : [0, 2\pi[ &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{(1+i)t}\end{aligned}$$



**Proposition:** Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur  $D \subset \mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$

1.  $u + v$  dérivable et  $(u + v)' = u' + v'$
2.  $uv$  dérivable et  $(uv)' = u'v + v'u$
3. Si  $v \neq 0$ ,  $\frac{u}{v}$  dérivable et  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

*Preuve:*

On pose  $\begin{cases} a = \Re(u) \\ b = \Im(u) \end{cases}$  et  $\begin{cases} c = \Re(v) \\ d = \Im(v) \end{cases}$

1.  $\begin{cases} \Re(u + v) = a + c \\ \Im(u + v) = b + d \end{cases}$  donc  $\begin{cases} \Re(u + v)' = a' + c' \\ \Im(u + v)' = b' + d' \end{cases}$  Donc,

$$\begin{aligned} (u + v)' &= a' + c' + i(b' + d') \\ &= (a' + ib') + (c' + id') \\ &= u' + v' \end{aligned}$$

2.  $\begin{cases} \Re(uv) = ac - bd \\ \Im(uv) = ad + bc \end{cases}$  donc  $\Re(uv)$  et  $\Im(uv)$  sont dérivables et

$$\begin{cases} \Re(uv)' = a'c + c'a - b'd - d'b \\ \Im(uv)' = a'd + d'a + b'c + c'b \end{cases}$$

Donc,

$$(uv)' = a'c + c'a - b'd - d'b + i(a'd + d'a + b'c + c'b)$$

Or,

$$\begin{cases} u'v = (a' + ib')(c + id) = a'c - b'd + i(b'c + a'd) \\ v'u = (a + ib)(c' + id') = ac' - bd' + i(bc' + ad') \end{cases}$$

Donc,

$$(uv)' = u'v + v'u$$

3. On suppose que

$$\forall x \in D, v(x) \neq 0$$

On a donc

$$\forall x \in D, \frac{u}{v} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$



C'est plus simple de voir  $\frac{u}{v}$  comme le produit de  $u$  et de  $\frac{1}{v}$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{c + id} = \frac{c - id}{c^2 + d^2}$$

$\underbrace{\frac{c}{c^2 + d^2}}_{=\Re(\frac{1}{v})}$  et  $\underbrace{-\frac{d}{c^2 + d^2}}_{=\Im(\frac{1}{v})}$  sont dérivables donc  $\frac{1}{v}$  aussi

$$\begin{cases} \Re\left(\frac{1}{v}\right)' = \left(\frac{c}{c^2 + d^2}\right)' = \frac{c'(c^2 + d^2) - c(2cc' + 2dd')}{(c^2 + d^2)^2} \\ \Im\left(\frac{1}{v}\right)' = \left(-\frac{d}{c^2 + d^2}\right)' = \frac{-d'(c^2 + d^2) + d(2cc' + 2dd')}{(c^2 + d^2)^2} \end{cases}$$

Donc, d'une part,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{v}\right)' &= \frac{c'(c^2 + d^2) - c(2cc' + 2dd') - id'(c^2 + d^2) + d(2cc' + 2dd')}{(c^2 + d^2)^2} \\ &= \frac{(c^2 + d^2)(c' - id') + (2cc' + 2dd')(-c + id)}{(c^2 + d^2)^2} \\ &= \frac{-c'c^2 + c'd^2 - 2cdd' + i(2cc'd - d'c^2 + d^2d')}{(c^2 + d^2)^2} \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{-v'}{v^2} &= \frac{-c' - d'i}{(c + di)^2} \\ &= \frac{-(c' + id')(c - id)^2}{(c^2 + d^2)^2} \\ &= -\frac{(c' + id')(c^2 - 2icd - d^2)}{(c^2 + d^2)^2} \\ &= \frac{-c'c^2 + c'd^2 - 2cdd' + i(2cc'd - d'c^2 + d^2d')}{(c^2 + d^2)^2} \\ &= \left(\frac{1}{v}\right)' \end{aligned}$$

Donc,  $\frac{u}{v}$  dérivable et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = u' \left(\frac{1}{v}\right) + u \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

□

**Proposition:** Soit  $v : D \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  deux fonctions dérivables (avec  $D \subset \mathbb{R}$ ). Alors,  $u \circ v$  est dérivable et

$$(u \circ v)' = (u' \circ v) \times v'$$

*Preuve:*

On pose  $u = a + ib$  avec  $\begin{cases} a = \Re(u) \\ b = \Im(u) \end{cases}$  donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = a(x) + ib(x)$$

Donc,

$$\forall x \in D, (u \circ v)(x) = a(v(x)) + ib(v(x))$$

Donc,

$$\begin{aligned} \Re(u \circ v) &= a \circ v \\ \Im(u \circ v) &= b \circ v \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \Re(u \circ v)' &= (a \circ v)' = (a' \circ v) \times v' \\ \Im(u \circ v)' &= (b \circ v)' = (b' \circ v) \times v' \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} (u \circ v)' &= (a' \circ v) \times v' + i(b' \circ v) \times v' \\ &= (a' \circ v + ib' \circ v) \times v' \\ &= ((a' + ib') \circ v) \times v' \\ &= (u' \circ v) \times v' \end{aligned}$$

□

**Proposition:** Soit  $u : D \rightarrow \mathbb{C}$  et  $f : \begin{matrix} D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{u(x)} \end{matrix}$

Alors,  $f$  est dérivable sur  $D$  et

$$\forall x \in D, f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

*Preuve:*

On pose  $\begin{cases} a = \Re(u) \\ b = \Im(u) \end{cases}$  donc

$$\begin{aligned} \forall x \in D, f(x) &= e^{u(x)} \\ &= e^{a(x) + ib(x)} \\ &= e^{a(x)} (\cos(b(x)) + i \sin(b(x))) \end{aligned}$$

Donc,  $\begin{cases} \Re(f) : x \mapsto e^{a(x)} \cos(b(x)) \\ \Im(f) : x \mapsto e^{a(x)} \sin(b(x)) \end{cases}$

$a, b, \cos, \sin, \exp$  sont dérivables donc  $\Re(f)$  et  $\Im(f)$  aussi donc  $f$  est dérivable.

□