TD 16 Dérivation

Exercice 1: ★

La fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 2: ★

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{xf(a) - af(x)}{x - a}$.

Exercice 3: ★★

Soit f une fonction dérivable sur $[0, +\infty[$ telle que f' soit positive et strictement décroissante. Montrer que

$$\forall x \geq 1,\ f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1).$$

En déduire que si f a une limite finie en $+\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

Exercice 4: ★★★

Soit f une fonction trois fois dérivable sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{2}(f'(b) + f'(a)) - \frac{(b-a)^3}{12} f^{(3)}(c).$$

Exercice 5: ★★★

On désigne par I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et par f une fonction numérique dérivable sur I. La dérivée de f n'est pas supposée continue.

(1) Soient a et b deux éléments quelconques de I tels que $f'(a) < f'(b)$ et soit z un réel quelconque vérifiant $f'(a) < z < f'(b)$. Montrer que pour $h > 0$ assez petit,

$$\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)) < z < \frac{1}{h}(f(b+h) - f(b)).$$

(2) En déduire qu'il existe $h > 0$ et $y \in I$ tels que

$$y + h \in I \text{ et } \frac{1}{h}(f(y+h) - f(y)) = z.$$

Montrer ensuite qu'il existe $x \in I$ tel que $z = f'(x)$.

(3) À l'aide des résultats précédents, montrer que f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 6: ★★

Soit f une fonction numérique n fois dérivable, et on note $g : x \mapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Montrer que

$$\forall x \neq 0,\ g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} \times \frac{1}{x^{2n-k}} f^{(n-k)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exercice 7: ★★★★

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0. On suppose que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}.$$

Montrer que f admet une dérivée à droite en 0.