

CHAPITRE 02

Nombre

Hugo SALOU MP2I

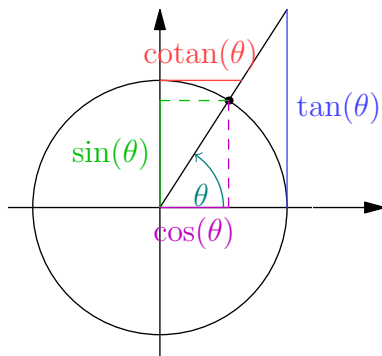
Dernière mise à jour le 25 avril 2022

Table des matières

I	Trigonométrie	2
II	Nombres complexes de module 1	5
III	Géométrie des nombres complexes	7
IV	Exponentielle complexe	13
V	Fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C}	15

Première partie

Trigonométrie



Définition: On définit, pour

$$\theta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$$

$$\iff \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

la tangente de θ par

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

Définition: Pour $\theta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -k\pi, (k+1)\pi \right[$, on définit la contangente de θ par

$$\cotan \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

Proposition: Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. $\cos(-a) = \cos(a)$
2. $\cos(a + 2\pi) = \cos(a)$
3. $\cos(a + \pi) = -\cos(a)$
4. $\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
5. $\sin(-a) = -\sin(a)$
6. $\sin(a + 2\pi) = \sin(a)$
7. $\sin(a + \pi) = -\sin(a)$
8. $\sin(\pi - a) = \sin(a)$
9. $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
10. $\sin(a + b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$
11. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a)$
12. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)$

■

Proposition: Soient a et b deux réels tels que $a \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ et $b \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

1. $\tan(a + \pi) = \tan(a)$
2. $\tan(-a) = -\tan(a)$
3. Si $a + b \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, alors, $\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$

■

Proposition: Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Si $a \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, alors, $1 + \tan^2(a) = \frac{1}{\cos^2(a)}$
2. Si $a \not\equiv \pi \pmod{2\pi}$
 - $\cos(a) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$
 - $\sin(a) = \frac{2 \tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$
 - Si $a \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, $\tan(a) = \frac{2 \tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$

■

Deuxième partie

Nombres complexes de module 1

Proposition: Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$(\cos(a) + i \sin(a)) \times (\cos(b) + i \sin(b)) = \cos(a + b) + i \sin(a + b)$$

■

Définition: Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $e^{ia} = \cos(a) + i \sin(a)$
Ainsi, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, e^{ia} \times e^{ib} = e^{i(a+b)}$

Proposition: Soient a, b, c trois nombres complexes avec $a \neq 0$ et z_1, z_2 les racines de $P : z \mapsto az^2 + bz + c$

Alors, $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$ et $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$

■

Proposition: Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et z_1, z_2, z_3 les solutions de

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

Alors,

$$\begin{cases} z_1 z_2 z_3 = -c \\ z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 = b \\ z_1 + z_2 + z_3 = -a \end{cases}$$

□

Proposition: Soient a_1, a_2, \dots, a_n des nombres complexes et z_1, z_2, \dots, z_n les solutions de

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = 1$$

Alors,

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} z_{i_1} \times z_{i_2} \times \dots \times z_{i_k} = (-1)^k a_{n-k}$$

$$\sum_{k=1}^n z_k = -a_{n-1}$$

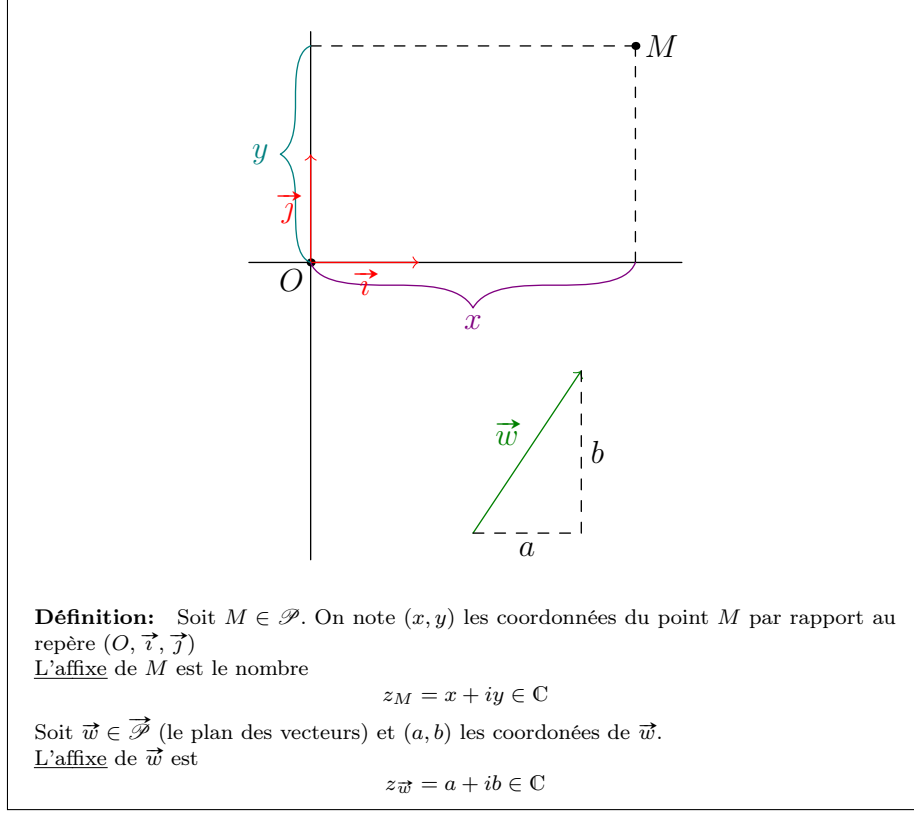
$$\prod_{k=1}^n z_k = (-1)^k a_0$$

■

Troisième partie

Géométrie des nombres complexes

Dans ce paragraphe, \mathcal{P} désigne un plan euclidien muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})



Proposition: Soit $(A, B) \in \mathcal{P}^2$ et $(\vec{w}_1, \vec{w}_2) \in \vec{\mathcal{P}}^2$

1. $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$
2. $z_{\vec{w}_1 + \vec{w}_2} = z_{\vec{w}_1} + z_{\vec{w}_2}$

□

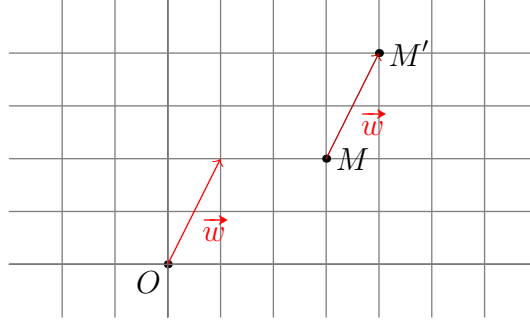
Proposition: Soit $(\vec{w}_1, \vec{w}_2) \in \vec{\mathcal{P}}^2$ avec $\vec{w}_1 \neq \vec{0}$ et $\vec{w}_2 \neq \vec{0}$
 Alors, $\left| \frac{z_{\vec{w}_1}}{z_{\vec{w}_2}} \right| = \frac{\|\vec{w}_1\|}{\|\vec{w}_2\|}$ et $\arg \left(\frac{z_{\vec{w}_1}}{z_{\vec{w}_2}} \right) = \underbrace{(\vec{w}_1, \vec{w}_2)}_{\text{l'angle entre } \vec{w}_1 \text{ et } \vec{w}_2}$

■

Corollaire: Avec les hypothèses et notations précédentes,

1. \vec{w}_1 et \vec{w}_2 sont collinéaires $\iff \frac{z_{\vec{w}_1}}{z_{\vec{w}_2}} \in \mathbb{R}$
2. \vec{w}_1 et \vec{w}_2 sont orthogonaux $\iff \frac{z_{\vec{w}_1}}{z_{\vec{w}_2}} \in i\mathbb{R}$

■



Définition: Soit $\vec{w} \in \vec{\mathcal{P}}$. La translation de vecteur \vec{w} est l'application

$$\begin{aligned} t_{\vec{w}} : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

où M' vérifie $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$

Proposition: Soit $\vec{w} \in \vec{\mathcal{P}}$ et $(M, M') \in \mathcal{P}^2$

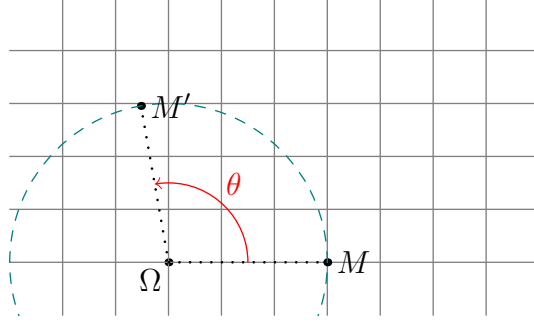
$$M' = t_{\vec{w}}(M) \iff z_{M'} = z_M + z_{\vec{w}}$$

■

Proposition: Soient $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \vec{\mathcal{P}}$.

$$t_{\vec{w}_2} \circ t_{\vec{w}_1} = t_{\vec{w}_1 + \vec{w}_2}$$

■



Définition: Soit $\Omega \in \mathcal{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

La rotation de centre Ω et d'angle θ est l'application

$$\begin{aligned} \rho_{\Omega, \theta} : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

où M' vérifie

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{\Omega M}\| = \|\overrightarrow{\Omega M'}\| \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta \end{cases}$$

Proposition: Soit $\Omega \in \mathcal{P}$ d'affixe ω , $\theta \in \mathbb{R}$ et $(M, M') \in \mathcal{P}^2$

$$(*) : \quad M' = \rho_{\Omega, \theta}(M) \iff z_{M'} = \omega + e^{i\theta}(z_M - \omega)$$

■

REMARQUE (Cas particulier):

Si $\Omega = O$ alors

$$(*) \iff z_{M'} = e^{i\theta} z_M$$

Corollaire: Soit $\Omega \in \mathcal{P}$ d'affixe ω et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \rho_{\Omega, \theta} &= t_{\overrightarrow{O\Omega}} \circ \rho_{O, \theta} \circ t_{\overrightarrow{\Omega O}} \\ &= t_{\overrightarrow{O\Omega}} \circ \rho_{O, \theta} \circ (t_{\overrightarrow{O\Omega}})^{-1} \end{aligned}$$

Proposition: Soient $(\Omega_1, \Omega_2) \in \mathcal{P}^2$ et $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\rho_{\Omega_1, \theta_1} \circ \rho_{\Omega_1, \theta_2} = \rho_{\Omega_1, \theta_1 + \theta_2} = \rho_{\Omega_1, \theta_2} \circ \rho_{\Omega_1, \theta_1}$$

Si $\begin{cases} \Omega_1 \neq \Omega_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases}$ alors $\rho_{\Omega_1, \theta_1} \circ \rho_{\Omega_2, \theta_2}$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$

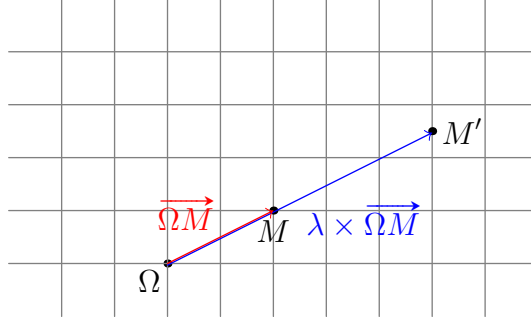
Si $\begin{cases} \Omega_1 \neq \Omega_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases}$ alors $\rho_{\Omega_1, \theta_1} \circ \rho_{\Omega_2, \theta_2}$ est une translation

■

Proposition: Soit $\Omega \in \mathcal{P}$ d'affixe ω , $\vec{w} \in \vec{\mathcal{P}}$ d'affixe u . Soit $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

- $t_{\vec{w}} \circ \rho_{\Omega, \theta}$ est une rotation d'angle θ
- $\rho_{\Omega, \theta} \circ t_{\vec{w}}$ est aussi une rotation d'angle θ

■



Définition: Soit $\Omega \in \mathcal{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

L'homothétie de centre Ω et de rapport λ est l'application

$$\begin{aligned} h_{\Omega, \lambda} : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

où M' vérifie $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$

Proposition: Soit $\Omega \in \mathcal{P}$ d'affixe ω , $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient $M \in \mathcal{P}$ d'affixe z et $M' \in \mathcal{P}$ d'affixe z' .

$$M' = h_{\Omega, \lambda}(M) \iff z' = \omega + \lambda(z - \omega)$$

■

Proposition: Soient $(\Omega_1, \Omega_2) \in \mathcal{P}^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{P}^2$

1. Si $\Omega_1 = \Omega_2$ alors, $h_{\Omega_1, \lambda_1} \circ h_{\Omega_2, \lambda_2} = h_{\Omega_1, \lambda_1 \lambda_2}$
2. Si $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et $\lambda_1 \lambda_2 \neq 1$, alors, $h_{\Omega_1, \lambda_1} \circ h_{\Omega_2, \lambda_2}$ est une homothétie de rapport $\lambda_1 \lambda_2$
3. Si $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, alors, $h_{\Omega_1, \lambda_1} \circ h_{\Omega_2, \lambda_2}$ est une translation.

□

Proposition: Soit $\Omega \in \mathcal{P}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\vec{w} \in \vec{\mathcal{P}}$.

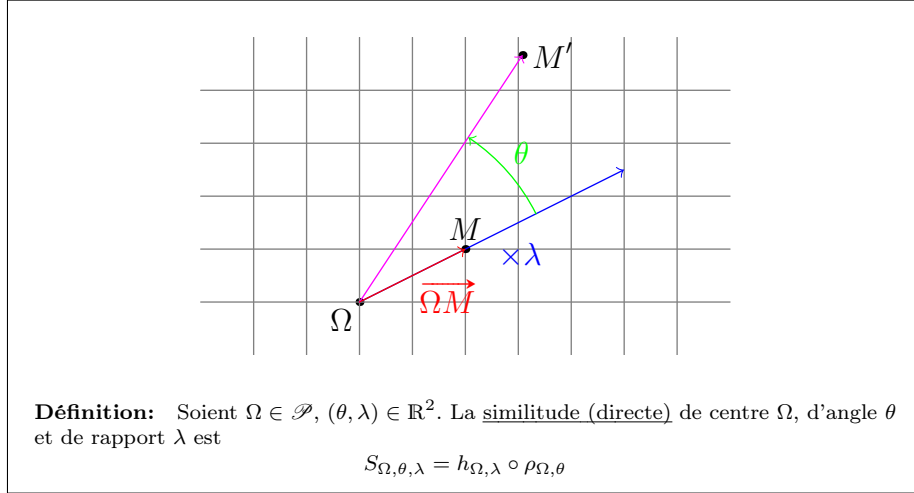
Alors, $t_{\vec{w}} \circ h_{\Omega, \lambda}$ et $h_{\Omega, \lambda} \circ t_{\vec{w}}$ sont homothéties de rapport λ .

□

REMARQUE (Cas particulier):

Soit $M \in \mathcal{P}$ d'affixe z , $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M' = h_{O, \lambda}(M)$ d'affixe z'

On a $z' = \lambda z$



Avec les notations précédentes,
Proposition:

$$S_{\Omega, \theta, \lambda} = \rho_{\Omega, \theta} \circ h_{\Omega, \lambda}$$

■

Proposition: L'expression complexe de $S_{\Omega, \theta, \lambda}$ est

$$z' = \omega + \lambda e^{i\theta}(z - \omega)$$

Quatrième partie

Exponentielle complexe

Définition: Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$\exp(z) = e^{\Re(z)} \times (\cos(\Im(z)) + i \sin(\Im(z)))$$

Ainsi, si $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\exp(z) = \exp(a + ib) = e^a \times (\cos(b) + i(\sin(b))) = e^a e^{ib}$$

Proposition: Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \times \exp(z_2)$$

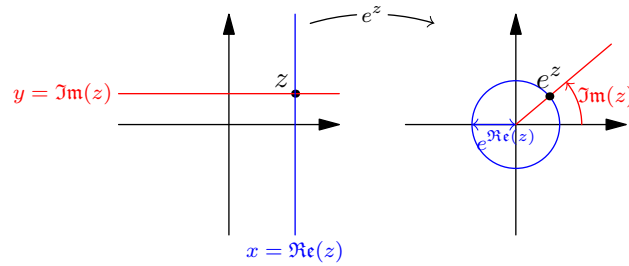
■

REMARQUE (Notation):

On écrit e^z à la place de $\exp(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$.

Proposition:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} |e^z| = e^{\Re(z)} \\ \arg(e^z) \equiv \Im(z) \pmod{2\pi} \end{cases}$$



REMARQUE:

$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ n'est pas bijective :

$$\begin{cases} \exp(0) = \exp(2i\pi) = 1 \\ 0 \neq 2i\pi \end{cases}$$

— 0 n'a pas d'antécédant

Il n'y a donc pas de logarithme complexe.

Cinquième partie

Fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C}

Définition: Soit f définie sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{C} ($\forall x \in D, f(x) \in \mathbb{C}$)
On pose :

$$\begin{aligned}\Re(f) : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \Re(f(x))\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Im(f) : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \Im(f(x))\end{aligned}$$

Définition: Soit $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que

- f est continue si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont continues
- f est dérivable si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont dérivables.

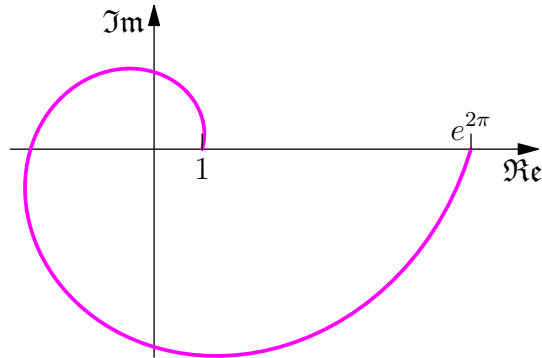
Dans ce cas, la dérivée de f est

$$\begin{aligned}f' : D &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \Re(f)'(x) + i\Im(f)'(x)\end{aligned}$$

REMARQUE:

On peut représenter f de la façon suivante.

$$\begin{aligned}f : [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{(1+i)t}\end{aligned}$$



Proposition: Soient u et v deux fonctions dérivables sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{C}

1. $u + v$ dérivable et $(u + v)' = u' + v'$
2. uv dérivable et $(uv)' = u'v + v'u$
3. Si $v \neq 0$, $\frac{u}{v}$ dérivable et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

■

Proposition: Soit $v : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables (avec $D \subset \mathbb{R}$). Alors, $u \circ v$ est dérivable et

$$(u \circ v)' = (u' \circ v) \times v'$$

■

Proposition: Soit $u : D \rightarrow \mathbb{C}$ et $f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{u(x)} \end{array}$
Alors, f est dérivable sur D et

$$\forall x \in D, f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

■