CHAPITRE 22
FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

1. Topologie de $\mathbb{R}^2$

Pour définir les notions de continuité et de dérivabilité d'une fonction de deux variables, il est nécessaire de généraliser à $\mathbb{R}^2$ la notion de voisinage.

Définition 1.1: Norme euclidienne

La *norme (euclidienne) de* $\mathbb{R}^2$ est l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & ||(x,y)|| = \sqrt{x^2+y^2}. \end{array}$$

La *distance euclidienne* entre deux points $A=(a,b)$ et $X=(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ est $d(A,X) = ||(x-a,y-b)||$.

Remarque 1.2

La norme euclidienne va jouer le même rôle que la valeur absolue de $\mathbb{R}$ ou le module de $\mathbb{C}$.

Définition 1.3

Soit $A=(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}^+$.

— La *boule ouverte de centre A et de rayon r* est $B_A(r) = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid d(A,X) < r\}$.

— La *boule fermée de centre A et de rayon r* est $\overline{B_A(r)} = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid d(A,X) \leq r\}$.

Remarque 1.4

Les boules ouvertes vont jouer le même rôle que les intervalles de la forme $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.

Définition 1.5

Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que A est une partie

— *ouverte* si pour tout $P \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B_P(r) \subset A$.

— *fermée* si $\mathbb{R}^2 \setminus A$ est ouverte.

Exemple 1.6

(1) $\mathbb{R}^2$ et $\emptyset$ sont des parties à la fois ouvertes et fermées.

(2) Une boule ouverte est une partie ouverte.

(3) Une boule fermée est une partie fermée.

(4) $A = \mathbb{R}_*^+ \times \{0\}$ n'est ni ouverte ni fermée.

Proposition 1.7

(1) Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

(2) Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Corollaire 1.8

(1) Une intersection quelconque de fermés est fermé.

(2) Une réunion finie de fermés est fermée.

Définition 1.9: Voisinage

Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ et $P \in A$. On dit que A est un *voisinage de* P s'il existe un ouvert contenant P inclus dans A.

Exemple 1.10

Un ouvert est un voisinage en chacun de ses points.

Proposition 1.11

L'intersection de deux voisinages d'un point P est encore un voisinage de P.

2. Continuité d'une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une telle fonction peut être représentée graphiquement comme une surface de $\mathbb{R}^3$.

Définition 2.1

On dit que f est continue en $P = (a, b) \in D$ si pour tout voisinage V de $f(P)$, il existe un voisinage $W \subset D$ de P tel que $f(W) \subset V$. En d'autres termes si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ ||(x-a, y-b)|| < r \implies |f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon.$$

Proposition 2.2

Soit $(a, b) \in D$, $l_a : y \mapsto f(a, y)$ et $r_b : x \mapsto f(x, b)$. Si f est continue en (a, b) alors r_b est continue en a et l_a est continue en b.

Remarque 2.3

La réciproque du résultat ci-dessus est fausse.

3. Dérivées partielles et gradient

Définition 3.1

Soit f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On dit que f admet une *dérivée partielle suivant la première coordonnée* en (a, b) si $l_a : y \mapsto f(a, y)$ est dérivable en b. Dans ce cas, $l'_a(b)$ est noté $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ (à condition de noter x la première coordonnée !). En d'autres termes, sous réserve d'existence de la limite ci-dessous,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}.$$

On dit que f admet une *dérivée partielle suivant la deuxième coordonnée* en (a,b) si $r_b : x \mapsto f(x,b)$ est dérivable en a. Dans ce cas, $r_b'(a)$ est noté $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ (à condition de noter y la deuxième coordonnée !). En d'autres termes, sous réserve d'existence de la limite ci-dessous,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}.$$

Remarque 3.2

L'existence de dérivées partielles de f ne garantit pas la continuité de f.

La définition de dérivée partielle peut être généralisée de la façon suivante.

Définition 3.3: Dérivée suivant un vecteur

Soit $u \in \mathbb{R}^2$ et $P \in D$. On dit que f a une *dérivée selon le vecteur* u (on dit aussi dans la *direction de* u) si $\lim_{h\to 0} \frac{f(P+hu)-f(P)}{h}$ existe et est finie. On note alors ce nombre $D_u(f)(P)$.

Exemple 3.4

Sous réserve d'existence, la dérivée partielle suivant la première coordonnée est la dérivée dans la direction de $(1,0)$ et la dérivée partielle suivant la deuxième coordonnée est la dérivée selon $(0,1)$.

Remarque 3.5

Puisque $(1,0)$ et $(0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$, on peut être tenté d'affirmer que si les dérivées partielles existent, alors les dérivée selon tout vecteur aussi. Il n'en est rien !

Définition 3.6

On dit que f est de classe C^1 si $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues.

Théorème 3.7: Développement limité à l'ordre 1

Soit f de classe C^1 en (a,b). Alors

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + o(||(h,k)||).$$

Corollaire 3.8

Une fonction de classe C^1 est continue.

Définition 3.9

Soit f de classe C^1 en (a,b). Le *gradient de f au point* (a,b) est le vecteur $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b), \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$. On le note $\nabla f(a,b)$.

Corollaire 3.10

Soit f de classe C^1 au point $P \in D$.. On note $\langle , \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$.

(1) Le développement limité à l'ordre 1 de f s'écrit aussi
$$f(P+u) = f(P) + \langle \nabla f(a,b), u\rangle + o(||u||).$$

(2) Pour tout vecteur u, f a une dérivée selon u et $D_u(f)(P) = \langle \nabla f(a,b), u\rangle$.

Corollaire 3.11

Soit f de classe C^1 sur D. Le champs de vecteurs ∇f est orthogonal aux lignes de niveau, et définit la direction dans laquelle f croît le plus vite.

Proposition 3.12

Soit f de classe C^1 sur un ouvert D à valeurs réelles et $P \in D$. Si f atteint un extrêmum local en P, alors $\nabla f(P) = (0,0)$.

Remarque 3.13

Attention, la réciproque de ce résultat est fausse !

Définition 3.14

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ de classe C^1, $P \in D$ et $u = f(P)$. On dit que P est un *point critique* de f si $\nabla f(P) = (0,0)$. Dans ce cas, on dit aussi que u est une *valeur critique* de f.

Corollaire 3.15: Règle de la chaîne

Soit f de classe C^1 sur D, et $\gamma : \to D, t \mapsto (x(t), y(t))$ de classe C^1 sur un intervalle I. Alors $f \circ \gamma$ est dérivable sur I et
$$\forall t_0 \in I,\ \frac{d(f\circ\gamma)}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t_0))x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t_0))y'(t_0).$$

Corollaire 3.16

Soit f de classe C^1 sur D et $\varphi : U \to D, (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$. On suppose que les applications x et y sont de classe C^1 sur D. Alors $f\circ\varphi$ est de classe C^1 sur U et pour tout $(u_0,v_0) \in U$, en notant $(x_0,y_0) = \varphi(u_0,v_0) \in D$:
$$\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial u}(u_0,v_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)$$
et
$$\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial v}(u_0,v_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)$$

Remarque 3.17

La formule ci-dessus est facile à retrouver à l'aide de la matrice *jacobienne* de φ : elle est définie par

$$\mathrm{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\nabla(f \circ \varphi)(u_0, v_0) = \mathrm{Jac}(\varphi)(u_0, v_0)\nabla(f)(x_0, y_0)$$

Exemple 3.18

Soit f de classe C^1 sur D à valeurs réelles et $\varphi : U \to D, (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ le changement de coordonnées polaires. On note $g = f \circ \varphi$. Alors

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r_0, \theta_0) = \cos\theta_0 \frac{\partial f}{\partial x}(r_0\cos\theta_0, r_0\sin\theta_0) + \sin\theta_0 \frac{\partial f}{\partial y}(r_0\cos\theta_0, r_0\sin\theta_0)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r_0.\theta_0) = -r_0\sin\theta_0 \frac{\partial f}{\partial x}(r_0\cos\theta_0, r_0\sin\theta_0) + r_0\cos\theta_0 \frac{\partial f}{\partial y}(r_0\cos\theta_0, r_0\sin\theta_0)$$