CHAPITRE 13

Systèmes d'équations linéaires

1. Système linéaire et matrice

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1. Représentation matricielle.

Définition 1.1

On appelle *système lin'eaire de n équations à p inconnues* un système (S) de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & \dots & +a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \dots & +a_{n,p}x_p & = & b_n \end{cases}$$

avec les $a_{i,j}$ et les b_i dans $\mathbb{K}$. On appelle *solution* du système tout p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ satisfaisant aux équations ci-dessus. On notera $\mathscr{S}(S)$ l'ensemble des solutions de (S).

Exemple 1.2

En géométrie plane, déterminer l'intersection de deux droites revient à résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues. Celui-ci peut donc posséder 0, 1 ou une infinité de solutions suivant que les deux droites sont strictement parallèles, sécantes ou confondues.

Définition 1.3

(1) Une *matrice* à n lignes et p colonnes est un tableau rectangulaire de nombres, appelés *coefficients* de la matrice, de n lignes et p colonnes (de sorte qu'il y a np coefficients).

(2) La *matrice A associée au système linéaire* (S) est la matrice à n lignes et p colonnes telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $j \in [\![1, p]\!]$, le coefficient situé à la i-ème ligne et j-ème colonne est le nombre $a_{i,j}$.

(3) Notons B la matrice colonne (*i.e.* constituée d'une seule colonne) dont les coefficients sont b_i. La *matrice augmentée* du système est la matrice $(A|B)$. On dit aussi que B est le *second membre* du système.

(4) Le *système homogène* associé à (S) est le système obtenu en remplaçant le second membre par 0, *i.e.* la matrice augmentée du système homogène est $(A|0)$.

Proposition 1.4

Soit (S) un système de n équations linéaires à p inconnues et (H) le système homogène associé. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une solution particulière du système. Alors toute solution $(x_1, \dots, x_p)$ de (S) est de la forme $(x_1, \dots, x_p) = (y_1, \dots, y_p) + (u_1, \dots, u_p)$ où $(y_1, \dots, y_p)$ est une solution de (H).

Proposition 1.5

Soit (H) un système linéaire homogène. Si $(x_1, \ldots, x_p)$ et $(y_1, \ldots, y_p)$ sont deux solutions de (H), alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $(\lambda x_1 + \mu y_1, \ldots, \lambda x_p + \mu y_p)$ est aussi une solution de (H).

1.2. Opérations élémentaires sur les lignes.

Définition 1.6

On appelle *opération élémentaire sur les lignes* d'une matrice M l'une des opérations suivantes :
- intervertir les lignes i et j, notée $L_i \leftrightarrow L_j$.
- ajouter à la ligne i, λ fois la ligne j, notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
- multiplier la ligne i par $\lambda \neq 0$, notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$.

Remarque 1.7

Si $(A|B)$ est la matrice associée à un système (S), alors une opération élémentaire sur les lignes de $(A|B)$ correspond à une opération élémentaire sur les équations du système, de sorte que les solutions restent les mêmes.

Définition 1.8

- Deux systèmes linéaires sont *équivalents* si l'on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.
- Deux matrices A et A' sont *équivalentes par lignes* si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

Proposition 1.9

- Deux systèmes équivalents ont même ensemble de solution.
- Si l'on passe d'un système (S) à un système (S') par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, alors la matrice augmentée de (S') s'obtient à partir de la matrice augmentée de (S) en faisant la même suite d'opérations élémentaires sur les lignes.

2. Élimination gaussienne

Exemple 2.1

Considérons le système dont la matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système associé est donc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \\ 0 = 0, \end{cases}$$

qui est facile à résoudre : $x_1 = 2 - x_2$ et $x_3 = 1$, de sorte que pour tout choix de la valeur de x_2, on trouve une solution. Il y a donc une infinité de solutions.

On a résolu facilement ce système grâce à la forme particulière de la matrice du système : elle est échelonnée réduite.

Définition 2.2

- Une matrice est dite *échelonnée par lignes* si
  (1) si une ligne est nulle, alors toutes les lignes suivantes (situées plus bas) le sont aussi ;
  (2) à partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul (à partir de la gauche) est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.
- On appelle alors *pivot* le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle.
- Une matrice échelonnée par lignes est dite *réduite* si elle est nulle ou si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

Définition 2.3

L'algorithme de Gauss consiste à transfomer une matrice en une matrice échelonnée réduite par lignes à l'aide d'une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. Plus précisément :

(1) on cherche dans la première colonne un coefficient non nul ;
   (a) si un tel coefficient existe, alors on intervertit la première ligne avec la ligne contenant ce coefficient non nul, puis on divise la première ligne par ce coefficient de sorte qu'elle commence par 1 qui joue alors le rôle de pivot ; enfin on remplace L_i par $L_i - a_{i,1}L_1$ pour amener des 0 sur la première colonne ;
   (b) si on n'en trouve pas, on fait la même chose mais pour la deuxième colone ;
(2) on recommence le même procédé avec les colonnes suivantes, en prenant garde de chercher un coefficient non nul sur les lignes qui ne contiennent pas encore de pivot.

Exemple 2.4

Appliquer l'algorithme de Gauss à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Proposition 2.5

Toute matrice est équivalente par ligne à une unique matrice échelonnée réduite par ligne.

Démonstration. On prouve l'existence en appliquant l'algorithme de Gauss. La preuve de l'unicité n'est pas exigible mais s'explique bien par des raisonnements élémentaires, en prouvant que les pivots se trouvent aux mêmes endroits en exploitant les colonnes de 0. $\square$

Définition 2.6

Le *rang* d'un système (S), noté $\mathrm{rg}(S)$, est le nombre de pivots de la réduite échelonnée par lignes de la matrice du système homogène associé.

Définition 2.7

Soit (H) un système homogène de n équations linéaires à p inconnues, dont la matrice associée est échelonnée réduite par lignes, de rang r. Alors les r inconnues correspondant aux pivots sont dites *principales*, les $p - r$ autres inconnues sont dites *secondaires*, ou encore appelées *paramètres*.

Proposition 2.8

Soit (H) un système homogène de n équations linéaires à p inconnues, dont la matrice associée est échelonnée réduite par lignes, de rang r. Alors pour tout choix des valeurs des paramètres, il existe une et une seule solution du système.

Définition 2.9

Soit (S) un système linéaire de matrice augmentée $(A|B)$ et $S')$ le système équivalent obtenu en produisant la réduite échelonnée par lignes de A. Le système (S) est *incompatible* si l'une des équations de (S') se présente sous la forme $0 = b$ avec $b \neq 0$. Sinon, (S) est dit *compatible*.

Proposition 2.10

Le système (S) n'admet aucune solution si et seulement s'il est incompatible. Si (S) est compatible, alors pour tout choix de valeurs des paramètres, il existe une et une seule soltion à (S).

Définition 2.11

On dit qu'un système linéaire (S) de n équations à p inconnues est *de Cramer* si $n = p = \mathrm{rg}(S)$.

Proposition 2.12

Si un système est de Cramer, alors il admet une unique solution.

Démonstration. Soit (S) un système de Cramer, de matrice augmentée $(A|B)$, et (S') le système équivalent obtenu en produisant la réduite échelonnée par lignes de A. On note $(A'|B')$ la matrice augmentée de (S'). On sait que (S) et (S') ont le même ensemble de solutions. Puisque A est une matrice carrée, A' aussi. Puisque (S) est de rang n, il n'y a pas de ligne nulle, et donc $A' = I_n$. On en déduit que B' est l'unique solution de (S'). $\square$

3. Opérations matricielles

Définition 3.1

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes, p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$. Si $n = p$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 3.2

On définit sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'addition en posant $(a_{i,j}) + (b_{i,j}) = (a_{i,j} + b_{i,j})$ et la multiplication par un scalaire $\lambda(a_{i,j}) = (\lambda a_{i,j})$.

Définition 3.3

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, la *matrice élémentaire* $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients nuls sauf le coefficient sur la i-ème ligne et j-ème colonne qui vaut 1.

Proposition 3.4

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $A = \displaystyle\sum_{i,j} a_{i,j} E_{i,j}$.

Définition 3.5

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on définit le produit de A et B par la matrice $C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$.

Définition 3.6

— On appelle *vecteur colonne* un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
— On appelle *vecteur ligne* un élément de $\mathcal{M}_{1,p}$.

Exemple 3.7

Soit (S) un système de n équations linéaires à p inconnues $x_1, \ldots, x_p$, et $(A|B)$ la matrice augmentée de (S). On note X le vecteur colonne dont les coefficients sont $x_1, \ldots, x_p$. Alors le système (S) s'écrit $AX = B$.

Le produit AB peut être nul, sans que A ou B soit nul. C'est le cas par exemple avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

En général, les produits AB et BA sont différents : le produit n'est pas commutatif en général.

Définition 3.8

La *matrice identité* I_n est la matrice à n lignes et n colonnes,; dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients diagonaux qui valent tous 1.

Proposition 3.9

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $AI_p = A = I_n A$.

Définition 3.10

Une matrice est dite *carrée* si elle a autant de lignes que de colonnes. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition 3.11

Soit A une matrice carrée. On définit la k-ème puissance A^k de A de manière récursive : $A^1 = A$ et $A^{k+1} = A.A^k = A^k.A$.

Proposition 3.12

Soient k et l deux entiers. Alors $A^k A^l = A^l A^k = A^{k+l}$.

Proposition 3.13

$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau non commutatif.

Corollaire 3.14: Formule du binôme

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $AB = BA$, alors
$$\forall N \in \mathbb{N},\ (A+B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k}.$$

Définition 3.15

On dit qu'une matrice carrée A est
- *triangulaire supérieure* si elle n'a que des zéros sous sa diagonale ($a_{i,j} = 0$ si $i > j$) ;
- *triangulaire inférieure* si elle n'a que des zéros au-dessus de sa diagonale ($a_{i,j} = 0$ si $i < j$) ;
- *diagonale* si elle n'a que des zéros, à part sur sa diagonale ($a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$).

Proposition 3.16

La somme et le produit de deux matrices carrées (resp. triangulaires supérieures, triangulaires inférieures, diagonales) est une matrice carrée (resp. triangulaire supérieure, triangulaire inférieure, diagonale).

Définition 3.17

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la transposée de A, notée ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ en posant en coefficient de la ligne i et de la colonne j, $a_{j,i}$.

Proposition 3.18

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

Définition 3.19

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est symétrique si ${}^tA = A$, antisymétrique si ${}^tA = -A$.

Proposition 3.20

(1) Une matrice est diagonale si et seulement si elle est triangulaire supérieure et inférieure.

(2) Une matrice A est triangulaire supérieure si et seulement si ${}^tA$ est triangulaire inférieure.

4. Algorithme du pivot

Proposition 4.1

À chaque opération élémentaire sur les lignes (resp. les colonnes) correspond une matrice E inversible telle que pour toute matrice M, EM (resp. ME) soit le résultat de cette opération. Cette matrice E s'obtient en effectuant la même opération sur la matrice identité.
- Intervertir les lignes (resp. colonnes) i et j revient à multiplier A à gauche (resp. à droite) par $R_{i,j}$.
- Ajouter à la ligne (resp. colonne) i, λ fois la ligne (resp. colonne) j revient à multiplier A à gauche (resp. à droite) par $I_n + \lambda E_{i,j}$.
- Multiplier la ligne (resp. colonne) i par λ revient à multiplier A à gauche (rep. à droite) par $I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$.

Démonstration. Il faut surtout montrer l'inversibilité. $R_{i,j}^2 = I_n$ donc est inversible. $(I_n + \lambda E_{i,j})$ a pour inverse $I_n - \lambda E_{i,j}$ pour $i \neq j$ et $I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ a pour inverse $I_n + (\frac{1}{\lambda} - 1)E_{ii}$. $\square$

Proposition 4.2

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors il existe une matrice E produit de matrices élémentaires et une unique matrice échelonnée réduite R telles que $A = ER$.

Démonstration. On applique l'algorithme du pivot, que l'on traduit matriciellement. $\square$

Proposition 4.3

Par opérations élémentaires sur les lignes, on peut transformer une matrice A inversible en la matrice I_n. Plus précisément si l'on fait $E_q \dots E_1 A = I_n$, alors $A = E_1^{-1} \dots E_q^{-1} I_n$ et $A^{-1} = E_q \dots E_1 I_n$ et les mêmes opérations effectuées sur A transforment I_n en la matrice A^{-1}.

5. Matrices carrées inversibles

Définition 5.1

On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AM = MA = I_n$. Dans ce cas A est unique et on l'appelle inverse de M, notée M^{-1}. On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles. On l'appelle le *groupe linéaire*.

Proposition 5.2

Une matrice diagonale à coefficients non nuls est inversible, et son inverse est la diagonale de l'inverse des coefficients.

Proposition 5.3

Tout système de Cramer admet une unique solution.

Démonstration. On note $(A|B)$ la matrice augmentée du système, de sorte que le système s'écrit $AX = B$. Puisque le système est de Cramer, la matrice A est équivalente par lignes à la matrice identité donc A est inversible. Donc $AX = B \iff A^{-1}AX = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B$. $\square$

Proposition 5.4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) A est inversible ;

(2) $A \sim_L I_n$;

(3) le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle ;

(4) pour tout vecteur colonne B, le système $AX = B$ admet une unique solution ;

(5) pour tout vecteur colonne B, le système $AX = B$ admet au moins une solution.

Proposition 5.5

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices inversibles. Alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.