Exercice 1: ★★

Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants.

$$1)\ \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} \qquad 2)\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \qquad 3)\ \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

$$4)\ \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \qquad 5)\ \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} \qquad 6)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}.$$

Exercice 2: ★★

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall i, j,\ a_{i,j} = \pm 1.$$

Montrer que $2^{n-1} | \det A$.

Exercice 3: ★★★ CCP MP

Soient $a \neq b$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & \lambda_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \cdots & b+x & \lambda_n + x \end{vmatrix}.$$

(1) Montrer que $\Delta_n(x)$ est une fonction affine de x.

(2) Calculer $\Delta_n(x)$ et en déduire $\Delta_n(0)$.

Exercice 4: ★★★

Soient a, b, c des réels et Δ_n l déterminant tridiagonal suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}.$$

(1) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n$.

(2) On suppose que $a^2 = 4bc$. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $\Delta_n = \dfrac{(n+1)a^n}{2^n}$.

Exercice 5: ★★★

Soient $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} s_1 & \cdots & \cdots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \cdots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 6: ★★★

Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$ des nombres complexes et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Calculer $\det(A - xI_n)$.

Exercice 7: ★★★

Soient $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p$ et $Q = b_0 + b_1 X + \cdots + b_q X^q$ deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, $a_p \neq 0$, $b_q \neq 0$. On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X] & \to & \mathbb{C}_{p+q-1}[X] \\ (U,V) & \mapsto & UP + VQ. \end{array}$$

(1) Montrer que φ est une application $\mathbb{C}$-linéaire et écrire sa matrice M dans les bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ où $\mathscr{B}_2$ est la base canonique de $\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$ et $\mathscr{B}_1 = \Big((1,0), (X,0), \dots, (X^{q-1}, 0), (0,1), (0,X), \dots, (0, X^{p-1})\Big)$.

Le déterminant de M est appelé *résultant de P et Q*.

(2) On suppose dans cette question seulement, que P et Q admettent une racine commune $a \in C$. Montrer que φ n'est pas surjective. En déduire que le résultat de P et Q est nul.

(3) Réciproquement, montrer que si le résultant de P et Q est nul, alors P et Q ont une racine commune.

(4) Dans cette question, $P = X^3 + aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{K}$. Montrer que P admet une racine multiple si et seulement si $4a^3 + 27b^2 = 0$.

Exercice 8: ★

Calculer le déterminant des endomorphismes u de $\mathbb{R}_n[X]$ suivants.

(1) $u(P) = P + P'$

(2) $u(P) = P(X+1) - P(X)$

(3) $u(P) = XP' + P(1)$.

Exercice 9: ★

Soient E un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de E satisfaisant $f \circ f = -\operatorname{id}_E$. Montrer que E est de dimension paire.

Exercice 10: ★★★

Soit $u : A \in M_n(\mathbb{K}) \mapsto^t A$. Calculer $\det u$.