

CHAPITRE 3

Étude de fonctions

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 8 mai 2022

TABLE DES MATIÈRES

I Calculs de limites 3

II Asymptotes, branches paraboliques et prolongement par continuité 6

Étudier une fonction c'est déterminer tous les éléments (tangentes, asymptotes) qui permettent d'obtenir l'allure de la courbe représentative de la fonction.

EXEMPLE:

$$f : x \mapsto \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}$$

1. On détermine le domaine de définition de la fonction f .
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x \in \{-3, 1\} \quad \text{car} \quad \begin{cases} -3 + 1 = -2 = -\frac{b}{a} \\ -3 \times 1 = -3 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Donc f est définie sur \mathcal{D} avec $\mathcal{D} =]-\infty, -3[\cup]-3, -1[\cup]-1, +\infty[$

2. Asymptotes et limites
Soit $x \in \mathcal{D}$

$$f(x) = \frac{\cancel{x^2} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{\cancel{x^2} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right)} \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} 1$$

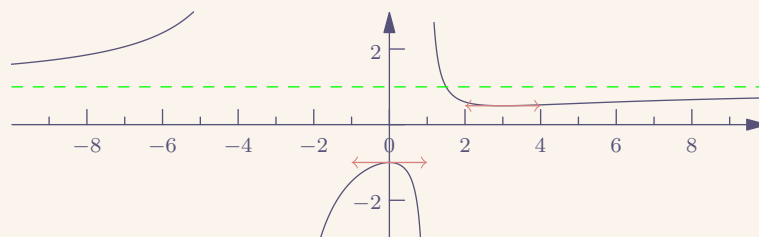
$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 2x + 3 \xrightarrow{x \rightarrow -3} 9 + 6 + 3 = 18 \\ x^2 + 2x - 3 \xrightarrow{x \rightarrow -3} 0 \end{array} \right\} \text{ donc } \begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \rightarrow -3]{<} +\infty \\ f(x) \xrightarrow[x \rightarrow -3]{>} -\infty \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 2x + 3 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 2 \\ x^2 + 2x - 3 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0 \end{array} \right\} \text{ donc } \begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1]{<} -\infty \\ f(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1]{>} +\infty \end{cases}$$

3. f est dérivable sur \mathcal{D} et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathcal{D}, f'(x) &= \frac{2(x-1)(x^2+2x-3) - 2(x^2-2x+3)(x+1)}{(x^2+2x-3)^2} \\ &= \frac{2(2x^2-6x)}{(x^2-2x+3)^2} \\ &= \frac{4x(x-4)}{(x^2-2x+3)^2}\end{aligned}$$

x	$+\infty$	-3	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	-	+
f	$+\infty$ \nearrow 1	$+\infty$ \nearrow $-\infty$	-1 \nearrow $-\infty$	$+\infty$ \searrow $\frac{1}{2}$	\nearrow 1	



Première partie

Calculs de limites

RAPPEL:

Soient f et g deux fonctions et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

On ne connaît pas, à l'avance, les limites de

$$- f(x) - g(x) \text{ si } \begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty \\ g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty \end{cases} \quad (\text{"}\infty - \infty\text{"})$$

$$- \frac{f(x)}{g(x)} \text{ si } \begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \\ g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \end{cases} \quad (\text{"}\frac{0}{0}\text{"})$$

$$- \frac{f(x)}{g(x)} \text{ si } \begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \pm \infty \\ g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \pm \infty \end{cases} \quad (\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"})$$

$$- f(x) \times g(x) \text{ si } \begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \\ g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \pm \infty \end{cases} \quad (\text{"}0 \times \infty\text{"})$$

EXEMPLE:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ?$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})}$$

et

$$\begin{cases} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \end{cases}$$

donc c'est une forme indéterminée.

Proposition:

Si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1 \\ g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \pm \infty \end{cases}$ alors, on ne sait pas à l'avance calculer $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)}$. \square

Définition: Soient f et g deux fonctions et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ où $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a (ou équivalentes en a) s'il existe une fonction u telle que

$$\begin{cases} f = g \times u \\ u(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1 \end{cases}$$

On note alors $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$.

Proposition: Un polynôme est équivalent en $\pm\infty$ à son terme de plus haut degré.

Preuve:

Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ avec $a_n \neq 0$. On pose $Q : x \mapsto a_n x^n$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, P(x) &= a_n x^n \left(\sum_{k=0}^n \frac{a_k x^k}{a_n x^n} \right) \\
&= Q(x) \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} \times \underbrace{\left(\frac{1}{x^{n-k}} \right)}_{u(x)} \right) \\
&= Q(x) u(x)
\end{aligned}$$

On a $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 1$ donc $P(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} Q(x)$.

□

Proposition: Un polynôme est équivalent en 0 à son terme de plus bas degré.

Preuve:
À faire

□

REMARQUE:

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a tel que

$$\forall x \in I, g(x) \neq 0$$

où I est un intervalle

- qui contient a si $a \in \mathbb{R}$,
- dont une borne est a si $a = \pm\infty$.

Alors,

$$f \underset{a}{\sim} g \iff \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\xrightarrow{\neq}} 1.$$

EXEMPLE:

$$x^2 + x^3 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2 \text{ car } \frac{x^2 + x^3}{x^2} = 1 + x \underset{x \rightarrow 0}{\xrightarrow{\neq}} 1.$$

EXEMPLE:

Soit f une fonction.

$$f \underset{0}{\sim} 0 \iff \exists I \text{ voisinage de } a, \forall x \in I, f(x) = 0.$$

Deuxième partie

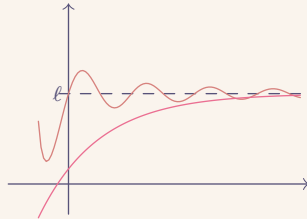
Asymptotes, branches paraboliques et prolongement par continuité

II Asymptotes, branches paraboliques et prolongement par continuité

Cas 1

Limite en $+\infty$:

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}.$$



On dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale.

Cas 2

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \pm\infty \quad \text{dans ce cas, on cherche } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

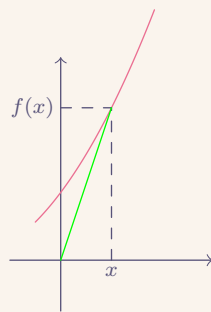
Sous cas 1

$$\frac{f(x)}{x} \text{ n'a pas de limite en } +\infty.$$

?

Sous cas 2

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

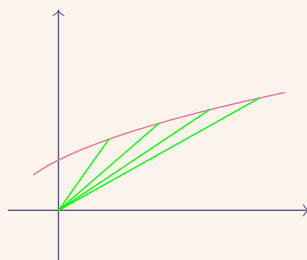


On dit que la courbe de f présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.

$\frac{f(x)}{x}$ est la pente de la droite verte.

Sous cas 3

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$



On dit que la courbe de f présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.

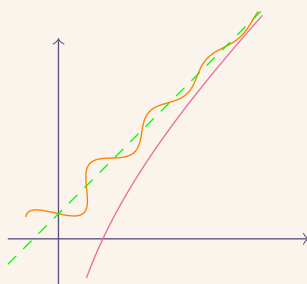
$\frac{f(x)}{x}$ est la pente de la droite verte.

Sous cas 4

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}^+. \text{ On cherche } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ell x).$$

Sous-sous cas 1

$$f(x) - \ell x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a \in \mathbb{R}$$

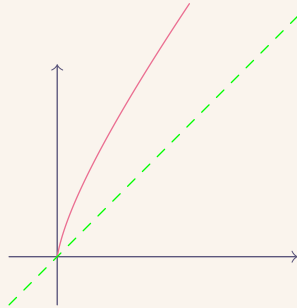


Asymptote oblique d'équation $y = \ell x + a$.

II Asymptotes, branches paraboliques et prolongement par continuité

Sous-sous cas 2

$$f(x) - \ell x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \pm\infty$$



Branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = \ell x$.

Sous-sous cas 2

$$f(x) - \ell x \text{ n'a pas de limite}$$

?

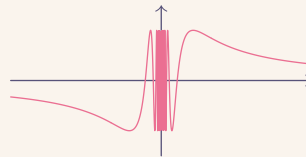
Limite en $a \in \mathbb{R}$:

On cherche $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

CAS 1

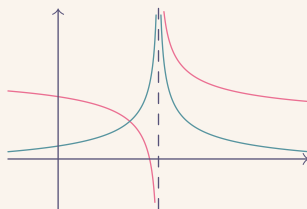
Pas de limite

$$\boxed{\text{ex}} \quad x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ en } 0 :$$



CAS 2

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \pm\infty$$



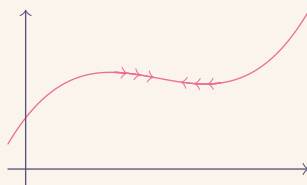
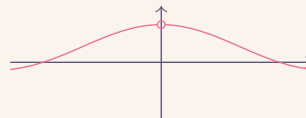
Asymptote verticale d'équation $x = a$.

CAS 3

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{\text{ex}} \quad f : x \mapsto \frac{\sin x}{x} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1, \text{ dans ce cas, on pose}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



On pose $f(a) = \ell$. On dit que l'on a prolongé par continuité la fonction f .