Sujet de mathématiques du baccalauréat général

Mercredi 11 mai 2022

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le date

Première partie

Sujet

Exercice 1 (7 points) **Thèmes : fonction exponentielle, suites.**

Dans le cadre d'un essai clinique, on envisage deux protocoles de traitement d'une maladie.
L'objectif decet exercice est d'étudier, pour ces deux protocoles, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Etude du premier protocole

Le premier protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient.
On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par $f(t) = 3te^{-0,5t+1}$, où t désigne le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.

1. a. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 10]$ et on note f' sa fonction dérivée.

Montrer que, pour tout nombre réel t de $[0; 10]$, on a : $f'(t) = 3(-0,5t + 1)e^{-0,5t+1}$.

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 10]$.

c. Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale ? Quelle est alors cette quantité maximale ?

2. a. Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; 2]$, notée α, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2; 10]$, notée β, et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} près est 3,46.

b. On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg.
Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole.

Partie B : Etude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.

On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.

On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.

On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ème heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1 de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq u_{n+1} < 6$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

c. Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.

b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

c. Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg.

Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

Exercice 2 (7 points) **Thème : géométrie dans l'espace**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère :

• le point A de coordonnées $(-1; 1; 3)$,

• la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

On admet que le point A n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.

1. a. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathcal{D}$.

b. Montrer que le point $B(-1; 3; 0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.

c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\vec{u}$.

2. On note $\mathcal{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathcal{D}$, et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$.

a. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne : $2x - y + 2z - 3 = 0$.

b. En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}; \frac{19}{9}; \frac{16}{9}\right)$.

c. Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.

3. Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathcal{D}$, par une autre méthode.

On rappelle que le point $B(-1; 3; 0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

a. Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

b. Montrer que $k = \frac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.

c. Calculer la valeur du nombre réel k et retrouver les coordonnées du point H.

4. On considère un point C appartenant au plan $\mathcal{P}$ tel que le volume du tétraèdre $ABCH$ soit égal à $\frac{8}{9}$.
Calculer l'aire du triangle ACH.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

Exercice 3 (7 points) **Thème : probabilités**

Le directeur d'une grande entreprise a proposé à l'ensemble de ses salariés un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel.

Ce stage a été suivi par 25 % des salariés.

1. Dans cette entreprise, 52 % des salariés sont des femmes, parmi lesquelles 40 % ont suivi le stage.

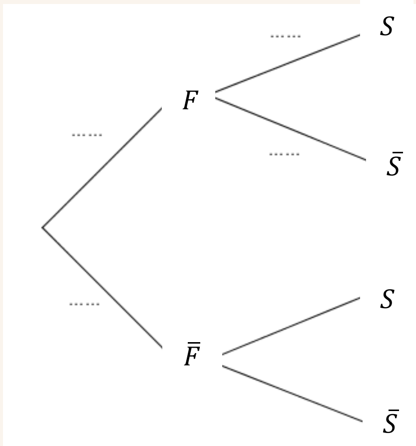
On interroge au hasard un salarié de l'entreprise et on considère les événements :

- F : « le salarié interrogé est une femme »,
- S : « le salarié interrogé a suivi le stage ».

$\bar{F}$ et $\bar{S}$ désignent respectivement les événements contraires des événements F et S.

a. Donner la probabilité de l'événement S.

b. Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-contre sur les quatre branches indiquées.



c. Démontrer que la probabilité que la personne interrogée soit une femme ayant suivi le stage est égale à $0{,}208$.

d. On sait que la personne interrogée a suivi le stage. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

e. Le directeur affirme que, parmi les hommes salariés de l'entreprise, moins de 10 % ont suivi le stage.
Justifier l'affirmation du directeur.

2. On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 20 salariés de cette entreprise choisis au hasard associe le nombre de salariés de cet échantillon ayant suivi le stage. On suppose que l'effectif des salariés de l'entreprise est suffisamment important pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

a. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X.

b. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que 5 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.

c. Le programme ci-contre, écrit en langage Python, utilise la fonction **binomiale**$(\boldsymbol{i},\boldsymbol{n},\boldsymbol{p})$ créée pour l'occasion qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X=i)$ dans le cas où la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

```
def proba(k):
       P=0
       for i in range(0,k+1):
            P=P+binomiale(i,20,0.25)
       return P
```

Déterminer, à 10^{-3} près, la valeur renvoyée par ce programme lorsque l'on saisit proba(5) dans la console Python. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

d. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au moins 6 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.

3. Cette question est indépendante des questions **1** et **2**.
Pour inciter les salariés à suivre le stage, l'entreprise avait décidé d'augmenter les salaires des salariés ayant suivi le stage de 5%, contre 2% d'augmentation pour les salariés n'ayant pas suivi le stage.
Quel est le pourcentage moyen d'augmentation des salaires de cette entreprise dans ces conditions ?

Exercice 4 (7 points) **Thème : fonctions numériques**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Les six questions sont indépendantes.

1. La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-2x^2+3x-1}{x^2+1}$ admet pour asymptote la droite d'équation :

a. $x = -2$; **b.** $y = -1$;

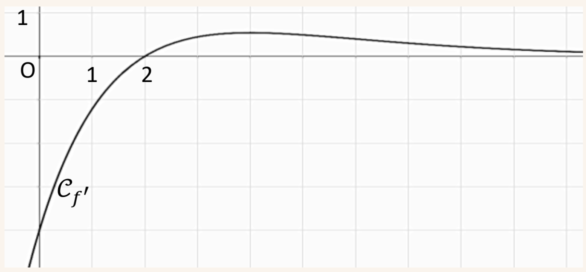
c. $y = -2$; **d.** $y = 0$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2}$.
La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = 1$ est définie par :

a. $F(x) = \frac{x^2}{2}e^{x^2}$; **b.** $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$;

c. $F(x) = (1 + 2x^2)e^{x^2}$; **d.** $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{2}$.

3. On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}_{f'}$ **de la fonction dérivée** f' d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



On peut affirmer que la fonction f est :

a. concave sur $]0; +\infty[$;

b. convexe sur $]0; +\infty[$;

c. convexe sur $[0; 2]$;

d. convexe sur $[2; +\infty[$.

4. Parmi les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{-x^2} + 2$:

a. toutes sont croissantes sur $\mathbb{R}$; **b.** toutes sont décroissantes sur $\mathbb{R}$;

c. certaines sont croissantes sur $\mathbb{R}$ et d'autres décroissantes sur $\mathbb{R}$; **d.** toutes sont croissantes sur $]-\infty; 0]$ et décroissantes sur $[0; +\infty[$.

5. La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2\ln x}{3x^2+1}$ est égale à :

a. $\frac{2}{3}$; **b.** $+\infty$; **c.** $-\infty$; **d.** 0 .

6. L'équation $e^{2x} + e^x - 12 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$:

a. trois solutions ; **b.** deux solutions ; **c.** une seule solution ; **d.** aucune solution.

Deuxième partie

Réponses

Exercice 1 (7 points)

Partie A : Étude du premier protocole

1. (a) On a $f = u \times \exp(v)$ avec $\forall t \in [0,10]$, $\begin{cases} u(t) = 3t \\ v(t) = -\dfrac{1}{2}t + 1 \end{cases}$.

   De cela, on en déduit que $\forall t \in [0,10]$, $\begin{cases} u'(t) = 3 \\ v'(t) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

   Or, $f' = u' \exp(v) + uv' \exp(v)$. D'où,

$$\forall t \in [0,10],\ f'(t) = 3e^{-\frac{1}{2}t+1} - \frac{3}{2}te^{-\frac{1}{2}t+1}.$$

   (b) On cherche pour quelles valeurs de t, $f'(t)$ s'annule.

$$\begin{aligned} f'(t) = 0 &\iff \left(3 - \frac{3}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}t+1} = 0 \\ &\iff 3 - \frac{3}{2}t = 0 \text{ car } \forall u \in \mathbb{R},\ e^u > 0 \\ &\iff t = 2 \end{aligned}$$

   Donc, f' s'annule en 2.
   Comme dit précédemment, $\forall u \in \mathbb{R}$, $e^u > 0$. Donc, le signe de f' est celui de $t \mapsto 3 - \dfrac{3}{2}t$.

$$f'(t) > 0 \iff 3 - \frac{3}{2}t > 0 \iff t > 2.$$

   On calcule les valeurs de f pour 0, 2 et 10 :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(2) = 6 \\ f(10) = \dfrac{30}{e^4} \end{cases}.$$

   D'où,

x	0		2		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	6	$\searrow$	$\dfrac{30}{e^4}$

   (c) Selon cette modélisation, la quantité de médicament est maximale au bout de 2 jours : le patient présente 5 mg de médicament dans le sang.

2. (a) Sur $[0,2]$, la fonction f est strictement croissante, continue et on a $f(0) \leqslant 5 \leqslant f(2)$. Donc, d'après le corolaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(t) = 5$ admet une unique solution $\alpha \in [0,2]$. On a $\alpha \simeq 1{,}02$ jours (?).

   (b) On a $\forall t \in [\alpha, \beta]$, $f(t) \geqslant 5$ mg. La durée efficace du médicament est donc $\beta - \alpha \simeq$ 2.44 jours . On en déduit que le médicament est efficace pendant environ 3 514 minutes.

Partie B : Étude du second protocole

1. On a $u_1 = \left(1 - \dfrac{30}{100}\right)u_0 + 1{,}8 = 0{,}7u_0 + 1{,}8 = 1{,}4 + 1{,}8 = 3{,}2$ mg.

2. On ne conserve que 70 % du médicament d'une heure à l'autre et on nous injecte 1,8 mg. D'où
$$u_{n+1} = 0{,}7u_n + 1{,}8.$$

3. (a) On pose, pour tout entier n,
$$P(n) : \text{“}u_n \leqslant u_{n+1} < 6\text{”}.$$
   — Pour $n = 0$, on a bien $u_0 \leqslant u_1 < 6$ car $u_0 = 2$ mg et $u_1 = 3{,}2$ mg.
   — Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $P(n)$ vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie également. Comme $u_{n+1} < 6$, alors, $u_{n+2} = 0{,}7u_n + 1{,}8 < 0{,}7 \times 6 + 1{,}8 = 6$. Comme $u_n \leqslant u_{n+1}$, on a $0{,}7u_n \leqslant 0{,}7u_{n+1}$ et donc
$$\underbrace{0{,}7u_n + 1{,}8}_{u_{n+1}} \leqslant \underbrace{0{,}7u_{n+1} + 1{,}8}_{u_{n+2}}.$$
   On a bien vérifié $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6$.

   On en déduit que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ , u_n \leqslant u_{n+1} < 6.$$

   (b) Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 6, d'après le théorème de la convergence des suites monotones, (u_n) converge vers ℓ.

   (c) On cherche un point fixe de la fonction $x \mapsto 0{,}7x + 1{,}8$.
$$\frac{7}{10}x + \frac{18}{10} = x \iff \frac{3}{10}x = \frac{18}{10} \iff x = \frac{18}{3} = 6.$$
   On en déduit que, comme (u_n) converge, elle converge vers 6. Le quantité de médicament va s'approcher progressivement de 6 (mais ne l'atteindra jamais).

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n < 6$, on a $v_n = 6 - v_n > 0$.
$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{6 - u_{n+1}}{6 - u_n}\\ &= \frac{4{,}2 - 0{,}7u_n}{6 - u_n}\\ &= 0{,}7 \times \frac{6 - u_n}{6 - u_n}\\ &= 0{,}7\end{aligned}$$
   Donc, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 0,7.

   (b) On a $v_0 = 6 - u_0 = 4$. D'où
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 4 \times (0{,}7)^n.$$
   On en déduit que, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6 - v_n$,
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 6 - 4 \times (0{,}7)^n.$$

   (c) On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$\begin{aligned}u_n \geqslant 5{,}5 &\iff 6 - 4 \times (0{,}7)^n = 5{,}5\\ &\iff 4 \times (0{,}7)^n = 0{,}5\\ &\iff (0{,}7)^n = \frac{1}{8}\\ &\iff n\ln(0{,}7) = \ln\frac{1}{8}\\ &\iff n = \frac{-\ln 8}{\ln 0{,}7} \simeq 5.83 \text{ jours}\end{aligned}$$
   On peut donc arrêter les injections après 6 jours.

Exercice 2 (7 points)

1. (a) On procède par identification : la droite ayant pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ et passant par le point de coordonnées (M_x, M_y, M_z) est donnée par le système

$$\begin{cases} x = M_x + u_x\, t \\ y = M_y + u_y\, t \\ z = M_z + u_z\, t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

On en déduit donc que $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) On a, d'après la première équation du système, $-1 = 1 + 2t \iff t = -1$. En replaçant t par -1 dans les autres équations, on obtient bien les coordonnées se de B selon $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$:

$$\begin{cases} y = 2 - (-1) = 3 \\ z = 2 - 2 = 0 \end{cases}.$$

Donc, B appartient bien à la droite $\mathcal{D}$.

(c) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et donc

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \times 2 - 1 \times 2 - 3 \times 2 = -8.$$

2. (a) Comme $\mathcal{P}$ est orthogonal à $\mathcal{D}$, un vecteur normal de $\mathcal{P}$ est $\vec{u}$. On sait donc que l'équation de $\mathcal{P}$ est de la forme

$$\mathcal{P} : \qquad 2x - y + 2z = d.$$

Déterminons la valeur de d. Comme $A \in \mathcal{P}$, les coordonnées de A vérifient l'équation du plan, d'où

$$d = 2 \times -1 - 1 + 2 \times 3 = 3.$$

On en déduit que $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne

$$\mathcal{P} : \qquad 2x - y + 2z - 3 = 0.$$

(b) En utilisant les expressions de x, y et z, provenant du système $\mathcal{D}$, dans l'équation de $\mathcal{P}$, on a

$$2(1 + 2t) - 2 + t + 2(2 + 2t) - 3 = 0.$$

On résout pour cette valeur de t :

$$\cancel{2} + 4t - \cancel{2} + t + 4 + 4t - 3 = 0 \iff 9t = -1 \iff t = -\frac{1}{9}.$$

On en déduit les coordonnées de H :

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9} \\ y = 2 + \frac{1}{9} = \frac{19}{9} \\ z = 2 - \frac{2}{9} = \frac{16}{9} \end{cases}.$$

On a donc $H\left(\frac{7}{9}, \frac{19}{9}, \frac{16}{9}\right)$.

(c)

$$\begin{aligned}
AH^2 &= \left(\frac{7}{9}+1\right)^2 + \left(\frac{19}{9}-1\right)^2 + \left(\frac{16}{9}-3\right)^2 \\
&= \left(\frac{16}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2 + \left(-\frac{11}{9}\right)^2 \\
&= \frac{256+100+121}{9^2} \\
&= \frac{477}{9^2} \\
&= \left(\frac{\sqrt{53}}{3}\right)^2
\end{aligned}$$

Ainsi, $AH = \dfrac{\sqrt{53}}{3}$.

3. (a) On sait que H et B sont tous les deux sur la droite. Donc, $\overrightarrow{HB}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

   (b) On a $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{HB} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{HB} \cdot \vec{u}$ car $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires (donc $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0$).
   Or, $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$. Donc, $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = k\vec{u} \cdot \vec{u}$. En divisant par $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, on obtient

$$k = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}.$$

   (c) On a $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = -8$, et $\|\vec{u}\|^2 = 2^2 + 1 + 2^2 = 9$. On en déduit donc la valeur de k : en effet, on a

$$k = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} = -\frac{8}{9}.$$

   Or, $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$, donc $\overrightarrow{OH} = -k\vec{u} + \overrightarrow{OB}$ et donc

$$\overrightarrow{OH} = \frac{8}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{9} - 1 \\ 3 - \frac{8}{9} \\ \frac{16}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} \\ \frac{19}{9} \\ \frac{16}{9} \end{pmatrix}.$$

D'où $H\left(\frac{7}{9}, \frac{19}{9}, \frac{16}{9}\right)$.

4. On a $V_{ABCH} = \dfrac{8}{9}$. Or, $V_{ABCH} = \dfrac{1}{3}\, A_{ACH}\, BH$. On calcule donc BH :

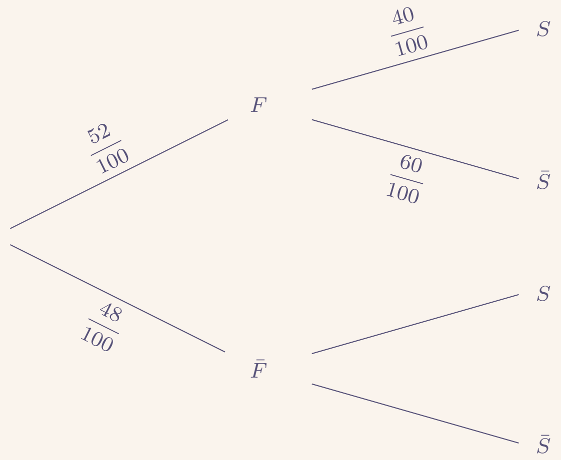
$$BH^2 = k^2\|\vec{u}\|^2 = \frac{64}{81}(2^2 + 1 + 2^2) = \frac{8^2}{9}.$$

On en déduit que $BH = \dfrac{8}{3}$. Ainsi,

$$A_{ACH} = 3 \times V_{ABCH} \times BH = 3 \times \frac{8}{9} \times \frac{3}{8} = 1.$$

Exercice 3 (7 points)

1. (a) On a $P(S) = \dfrac{25}{100}$.



(b)

(c) On cherche $P(F \cap S) = P_F(S) \times P(F) = \dfrac{40}{100} \times \dfrac{52}{100} = \dfrac{208}{1000} = 0{,}208$.

(d) On cherche $P_S(F) = \dfrac{P(F \cap S)}{P(S)} = \dfrac{208/1000}{25/100} = 0{,}052$.

(e) On a $P(S) = P_{\bar{F}}(S) \times P(\bar{F}) + P_F(S) \times P(F)$. D'où,

$$\begin{aligned} P_{\bar{F}}(S) &= \frac{P(S) - P_F(S) \times P(F)}{P(\bar{F})} \\ &= \frac{0{,}25 - 0{,}40 \times 0{,}52}{1 - 0{,}58} \\ &= \frac{0{,}25 - 0{,}208}{0{,}42} \\ &= \frac{0{,}042}{0{,}42} \\ &= 0{,}10. \end{aligned}$$

Ce qui valide l'affirmation du directeur.

2. (a) La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(20, \frac{1}{4}\right)$. En effet, le choix d'un salarié est indépendant des autres (tirage avec remise). De plus, on demande de manière identique à chaque salariés.

(b) On a

$$P(X = 5) = \binom{20}{5} \frac{1}{4^5} \left(\frac{3}{4}\right)^{15} \simeq 0{,}202.$$

(c) Le programme retourne (environ) :

```
>>>   0.617.
```

Cela correspond à $P(X \leqslant 5)$.

(d) On a $P(X \leqslant 6) = P(X \leqslant 5) + P(X = 6) = 0{,}617 + 0{,}169 = 0{,}786$.

3. On note s le salaire moyen d'un employé. Le nouveau salaire moyen d'un employé, s', est

$$s' = \frac{1}{4} \times (1.05) \times s + \frac{3}{4} \times (1.02) \times s = 1.0275 \times s.$$

En moyenne, le salaire augment de 2,75 %.

Exercice 4 (7 points)

Question	Réponse
1.	c. $y = -2$
2.	b. $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$
3.	d. Convexe sur $[2, +\infty[$
4.	a. Toutes sont croissantes sur $\mathbb{R}$
5.	d. 0
6.	c. Une seule solution