

## CHAPITRE 6

# Équations différentielle linéaire

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 8 mai 2022

# TABLE DES MATIÈRES

I	4
II   Annexe	6

---

**Définition:** Une équation différentielle est une égalité faisant intervenir une fonction inconnue  $y$  ainsi que ses dérivées successives  $y', y'', y^{(3)}, \dots, y^{(n)}$ .

**Définition:** Une équation différentielle linéaire d'ordre  $n$  est de la forme

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b(t)$$

où  $b, a_0, a_1, \dots, a_n$  sont des fonctions connues et continues sur un intervalle  $I$ . On dit que  $b$  est le second membre de l'équation.

**Proposition** (Principe de superposition): Soient  $b_1$  et  $b_2$  continues sur  $I$ . Soient  $a_0, a_1, \dots, a_n$  également continues sur  $I$ .

$$(E_1) : \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = b_1$$

$$(E_2) : \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = b_2$$

Soient  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ .

$$(E) : \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 \text{ solution de } (E_1) \\ y_2 \text{ solution de } (E_2) \end{array} \right\} \implies \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \text{ solution de } (E)$$

■

**Proposition:** Soit  $(E)$  l'équation différentielle  $\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = b$  où  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont des fonctions homogènes. L'équation homogène associée à  $(E)$  est

$$(H) : \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = 0$$

Les solutions de  $(E)$  sont toutes de la forme  $h + y_0$  où  $h$  est solution de  $(H)$  et  $y_0$  solution de  $(E)$ .

■

**Théorème** (Théorème de Cauchy): Soit  $(E)$  une équation linéaire différentielle.

$$(E) : y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = b$$

où  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont continues sur un intervalle  $I$ .

---

Soit  $t_0 \in I$  et  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ .  
 Il existe **une et une seule** fonction  $y$  telle que

$$\begin{cases} y \text{ solution de } (E) \\ \forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, y^{(i)}(t_0) = \alpha_i \end{cases}$$

## Première partie

Soit  $(E)$  l'équation  $y' + ay = b$  où  $a$  et  $b$  sont continues sur un intervalle  $I$ .

**Proposition:** Soit  $A$  une primitive de  $a$  sur un intervalle  $I$ .

$$(H) : \quad y' + ay = 0$$

Les solutions de  $(H)$  sont  $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$

■

REMARQUE (pseudo preuve):

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + a(t)y = 0 &\iff \frac{dy}{y} = -a(t)dt \\ &\iff \int \frac{dy}{y} = \int -a(t)dt \\ &\iff \ln(y) = -A(t) + K \\ &\iff y = e^{-A(t)+K} \\ &\iff y = \lambda e^{-A(t)} \text{ avec } \lambda = e^K \end{aligned}$$

## Deuxième partie

### Annexe

$y : I \rightarrow E$  où  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

$$\begin{aligned} (*) : \quad & y' + a(x)y = 0 \text{ et } y(x_0) = 0 \\ \iff & \forall x \in I, y(x) = - \int_{x_0}^x a(u)y(u) \, du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T : E^I &\longrightarrow E^I \\ y &\longmapsto \left( x \mapsto - \int_{x_0}^x a(u)y(u) \, du \right) \end{aligned}$$

donc  $(*) \iff T(y) = y$