Maths DM_2

Hugo Salou

MP2I - Décembre 2021

Table des matières

I Des exemples

I.A

- $\mathbb{Q}_*^- \neq \varnothing$
- $\mathbb{Q}^+ \neq \varnothing$

— $\mathbb{Q}_*^- \cap \mathbb{Q}^+ = \varnothing$
— $\mathbb{Q}_*^- \cup \mathbb{Q}^+ = \mathbb{Q}$
— $\forall x \in \mathbb{Q}_*^-, \forall y \in \mathbb{Q}^+, x < y$ car $\forall x \in \mathbb{Q}_*^-, x < 0$ et $\forall y \in \mathbb{Q}^+, y \geqslant 0$
— $\mathbb{Q}_*^-$ est majorée par 0 et c'est le plus petit majorant. Or, $0 \notin \mathbb{Q}_*^-$. Donc $\mathbb{Q}_*^-$ n'a pas de plus grand élément.

$\boxed{\text{Donc } (\mathbb{Q}_*^-, \mathbb{Q}^+) \text{ est une coupure de } \mathbb{Q}}$

I.B

Soient $q \in \mathbb{Q}$, $L_q = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < q\}$ et $R_q = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant q\}$.
On pose $I(q) = (L_q, R_q)$

— $q - 1 \in L_q$ donc $L_q \neq \varnothing$ et $q \in R_q$ donc $R_q \neq \varnothing$
— $L_q \cup R_q = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < q \text{ ou } x \geqslant q\} = \mathbb{Q}$
— $L_q \cap R_q = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < q \text{ et } x \geqslant q\} = \varnothing$
— Soit $(x, y) \in L_q \times R_q$. Alors, $y \geqslant q > x$. Donc $y > x$.
— L_q est majorée par q et c'est le plus petit majorant. Or, $q \notin L_q$ donc L_q n'a pas de plus grand élément.

$\boxed{\text{Donc } (L_q, R_q) \text{ est une coupure de } \mathbb{Q}}$

I.C

Soient $L = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x^2 < 2\}$ et $R = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 \geqslant 2\}$.

— $0 \in L$ donc $L \neq \varnothing$
— $2 \in \mathbb{Q}^+$, $2^2 = 4 \geqslant 2$ donc $2 \in R$ donc $R \neq \varnothing$
$R = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \geqslant 2 \text{ et } x \geqslant 0\}$
Soit $x \in \mathbb{Q}$.

Cas 1 $x \leqslant 0$ et $x^2 < 2$. Donc, $x \in L$.
Comme $x \leqslant 0$, $x \notin R$. Donc $x \in L \cup R$ mais $x \notin L \cap R$.

Cas 2 $x > 0$ et $x^2 < 2$. Donc, $x \in L$.
Comme $x^2 < 2$, $x \notin R$. Donc $x \in L \cup R$ mais $x \notin L \cap R$.

Cas 3 $x \leqslant 0$ et $x^2 \geqslant 2$. Donc, $x \in L$.
Comme $x \leqslant 0$, $x \notin R$ Donc $x \in L \cup R$ mais $x \notin L \cap R$.

Cas 4 $x > 0$ et $x^2 \geqslant 2$. Donc, $x \in R$.
Comme $x \geqslant 0$ et $x^2 \geqslant 2$, $x \notin L$. Donc $x \in L \cup R$ mais $x \notin L \cap R$.

— Donc, $L \cap R = \varnothing$ et $L \cup R = \mathbb{Q}$
— Soient $x \in L$ et $y \in R$.
Si $x \leqslant 0$, alors $x \leqslant 0 \leqslant y$. Donc $x \leqslant y$.
Si $x > 0$, alors $x^2 < 2 \leqslant y^2$. Donc $x \leqslant y$.

Donc, $x \leqslant y$.
— On pose l'ensemble $A = \left\{x^2 \mid x \in L \text{ et } x > 0\right\} = \left\{x^2 \mid x^2 < 2 \text{ avec } x \in \mathbb{Q}\right\}$.
$A \neq \varnothing$ car $1 \in A$. Cet ensemble A est majorée par 2 et c'est le plus petit majorant. Donc, l'ensemble A n'a pas de plus grand élément.
Donc, L n'a pas de plus grand élément.

$\boxed{\text{Donc, } (L, R) \text{ est bien une coupure de } \mathbb{Q}}$

II

Soient (L, R) une coupure de $\mathbb{Q}$, $x \in L$ et $y \in \mathbb{Q}$. On suppose $y \leqslant x$.

Comme $L \cup R = \mathbb{Q}$ et $L \cap R = \varnothing$, $y \in L$ ou (exclusif) $y \in R$.
Montrons que $y \notin R$.
On suppose $y \in R$, alors $\forall u \in L, u \leqslant y$. Notamment, pour $u = x$, on a $x \leqslant y$.
Si $x \neq y$, on a une contradiction.
Si $x = y$, on a $y \in L$ et $y \in R$, donc $L \cap R \neq \varnothing$: une contradiction.

$\boxed{\text{Donc } y \in L}$

III Un ordre sur $\mathfrak{R}$

On a $(L_1, R_1) \preceq (L_2, R_2) \iff L_1 \subset L_2$.

III.A "$\preceq$" est une relation d'ordre

Réflectivité Soit (L, R) une coupure de $\mathbb{Q}$. Montrons $(L, R) \preceq (L, R)$.

$$(L, R) \preceq (L, R) \iff L \subset L$$

Ce qui est toujours vrai. Donc $\preceq$ est reflective.

Antisymétrie Soient $C_1 = (L_1, R_1)$ et $C_2 = (L_2, R_2)$ deux coupures de $\mathbb{Q}$.
On suppose $C_1 \preceq C_2$ et $C_2 \preceq C_1$. Montrons $C_1 = C_2$, i.e. $L_1 = L_2$ et $R_1 = R_2$.
— $C_1 \preceq C_2$ donc $L_1 \subset L_2$
— $C_2 \preceq C_1$ donc $L_2 \subset L_1$
On a donc $L_1 = L_2$.
Comme $L_1 \cup R_1 = \mathbb{Q}$ et $L_1 \cap R_1 = \varnothing$, on a $R_1 = \mathbb{Q} \setminus L_1$. De même, $R_2 = \mathbb{Q} \setminus L_2$. Donc, $R_1 = \mathbb{Q} \setminus L_1 = \mathbb{Q} \setminus L_2 = R_2$.
Donc, $\begin{cases} R_1 = R_2 \\ L_1 = L_2 \end{cases}$. Donc, $C_1 = C_2$.

Transitivité Soient $C_1 = (L_1, R_1)$, $C_2 = (L_2, R_2)$, et $C_3 = (L_3, R_3)$, trois coupures de $\mathbb{Q}$. On suppose

$$\begin{cases} C_1 \preceq C_2 \\ C_2 \preceq C_3 \end{cases} \iff L_1 \subset L_2 \subset L_3$$

. On en déduit que $L_1 \subset L_3$. Donc, $C_1 \preceq C_3$

$\boxed{\text{Donc, } \preceq \text{ est une relation d'ordre.}}$

III.B "$\preceq$" est un ordre total

Soient $C_1 = (L_1, R_1)$ et $C_2 = (L_2, R_2)$ deux coupures de $\mathbb{Q}$. C_1 et C_2 sont comparables avec $\preceq$ si et seulement si L_1 et L_2 sont comparables avec $\subset$. Comme deux ensembles sont toujours comparables avec $\subset$, deux coupures de $\mathbb{Q}$ sont toujours comparables avec $\preceq$.

$\boxed{\text{Donc, } (\mathbb{Q}, \preceq) \text{ est totalement ordonné.}}$

III.C

On a $I(0) = (L_0, R_0)$ avec $L_0 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$ et $R_0 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant 0\}$.
On remarque $L_0 = \mathbb{Q}_*^-$ et $R_0 = \mathbb{Q}^+$. On a $\mathscr{R}ac(2) = (L, R)$
avec $L = \big\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x^2 < 2\big\}$ et $R = \big\{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 \geqslant 2\big\}$.

$$I(0) \preceq \mathscr{R}ac(2) \iff \mathbb{Q}_*^- \subset L$$

Or,

$$L = \underbrace{\{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}}_{\mathbb{Q}_*^-} \cup \big\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x^2 < 2\big\}$$

$\boxed{\text{Donc, } \mathbb{Q}_*^- \subset L. \text{ Donc } I(0) \preceq \mathscr{R}ac(2)}$

IV Propriété de la borne supérieure

IV.A

- $\forall\,(L,R) \in A, (L \neq \varnothing \text{ et } R \neq \varnothing)\,;\ A \neq \varnothing$ Donc, $\mathscr{L} \neq \varnothing$
- On pose $n \in \mathbb{Q}$ tel que $\forall (L,R) \in A, \forall x \in L, n > x$. Ce nombre existe car tous les éléments de R associées à L seront toujours plus grand que n'importe quel élément de L. Donc, $\forall (L,R) \in A, n \notin L$, donc $\forall (L,R) \in A, n \in R$. Donc, $n \in \mathscr{R}$, donc $\mathscr{R} \neq \varnothing$ car $\mathscr{R} = \bigcap_{(L,R)\in A} R$ (cf raisonnement après).
- $\mathscr{L} \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathscr{L}) = \varnothing$
- $\mathscr{L} \cup (\mathbb{Q} \setminus \mathscr{L}) = \mathbb{Q}$
- $$\begin{aligned}\mathscr{R} &= \mathbb{Q} \setminus \mathscr{L} \\ \mathscr{R} &= \mathbb{Q} \setminus \bigcup_{(L,R)\in A} L \\ \mathscr{R} &= \bigcap_{(L,R)\in A} \mathbb{Q} \setminus L \\ \mathscr{R} &= \bigcap_{(L,R)\in A} R\end{aligned}$$

  Or,
  $$\forall (L,R) \in A, \forall (x,y) \in L \times R, x \leqslant y$$
  Donc,
  $$\forall y \in \mathscr{R}, \forall (L,R) \in A, \forall x \in L, x \leqslant y$$
  Donc,
  $$\forall y \in \mathscr{R}, \forall x \in \mathscr{L}, x \leqslant y$$
- Comme pour tout $(L,R) \in A$, L n'a pas de plus grand élément, $\mathscr{L}$ n'en a pas non plus.

$\boxed{\text{Donc, } (\mathscr{L}, \mathscr{R}) \text{ est une coupure de } \mathbb{Q}}$

IV.B

Montrons que $(\mathscr{L},\mathscr{R})$ est majorant de A puis que c'est le plus petit.

$$\begin{aligned}\forall(L,R)\in A,(L,R)\preceq(\mathscr{L},\mathscr{R}) &\iff \forall(L,R)\in A, L\subset\mathscr{L}\\ &\iff \forall(L,R)\in A, L\subset \bigcup_{(L',R')\in A} L'\\ &\iff \forall(L,R)\in A,(L,R)\in A\end{aligned}$$

Donc, $(\mathscr{L},\mathscr{R})$ majorant de A.
Montrons que $(\mathscr{L},\mathscr{R})$ est le plus petit majorant de A.
On suppose qu'il existe $(\mathscr{L}',\mathscr{R}')\in\mathfrak{R}$ majorant de A, et que $(\mathscr{L}',\mathscr{R}')\preceq(\mathscr{L},\mathscr{R})$.
Montrons que $(\mathscr{L}',\mathscr{R}')=(\mathscr{L},\mathscr{R})$, i.e. $\mathscr{L}'=\mathscr{L}$ car $\mathscr{R}'=\mathbb{Q}\setminus\mathscr{L}'$ et $\mathscr{R}=\mathbb{Q}\setminus\mathscr{L}$.
Montrons que $\mathscr{L}\subset\mathscr{L}'$, on sait déjà que $\mathscr{L}'\subset\mathscr{L}$.
Soit $x\in\mathscr{L}$. $\boxed{\text{Donc, } (\mathscr{L},\mathscr{R}) \text{ est le plus petit majorant de } A.}$

Je n'ai pas fini cette question

V Injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathfrak{R}$

Soit

$$\begin{aligned} I:\mathbb{Q}&\longrightarrow\mathfrak{R}\\ q&\longmapsto I(q)\end{aligned}$$

Montrons que I est une injective et croissante.

V.A I injective

Soient $(q,p)\in\mathbb{Q}$. On suppose $I(p)=I(q)$. Montrons $q=p$.

$I(p)=I(q)$ donc $\begin{cases}\{x\in\mathbb{Q}\mid x<q\}=\{x\in\mathbb{Q}\mid x<p\}\\ \{x\in\mathbb{Q}\mid x\geqslant q\}=\{x\in\mathbb{Q}\mid x\geqslant p\}\end{cases}$

Donc, $\forall x\in\mathbb{Q},\begin{cases}x<q\iff x<p\\ x\geqslant q\iff x\geqslant p\end{cases}$

Donc, $p=q$. Donc I injective

V.B I croissante

Soient $(p,q)\in\mathbb{Q}$, on suppose $p\leqslant q$. Montrons $I(p)\preceq I(q)$ i.e.
$\{x\in\mathbb{Q}\mid x<p\}=P\subset\{x\in\mathbb{Q}\mid x<q\}=Q$.
Soient $P=\{x\in\mathbb{Q}\mid x<p\}$, $Q=\{x\in\mathbb{Q}\mid x<q\}$ et $\Delta=\{x\in\mathbb{Q}\mid x\in P \text{ et } x\notin Q\}$. Montrons donc que $\Delta=\varnothing$. On a $\Delta=\{x\in\mathbb{Q}\mid q\leqslant x<p\}$.
Comme $p\leqslant q$, $\nexists x\in\mathbb{Q}, q\leqslant x<p$. Donc, $\Delta=\varnothing$.
Donc I croissante

$\boxed{\text{Donc, } I \text{ est une injection croissante}}$

VI Somme de deux coupures

VI.A

Soient (L_1,R_1) et (L_2,R_2) deux coupures de $\mathbb{Q}$. Montrons que $(L_1,R_1)+(L_2,R_2)$ est aussi une coupure de $\mathbb{Q}$.

Soit $(L,R) = (L_1,R_1) + (L_2,R_2)$. Donc, $L = \{x+y \mid x \in L_1, y \in L_2\}$ et $R = \mathbb{Q} \setminus L$.

— Comme $L_1 \neq \varnothing$ et $L_2 \neq \varnothing$, $L \neq \varnothing$
— Soient m_1 un majorant de L_1, et m_2 un majorant de L_2.
On sait que $m_1 \notin L_1$ et $m_2 \notin L_2$. Donc, $m = m_1 + m_2 \notin L$
Donc, $m \in R$. Donc, $R \neq \varnothing$
— $L \cap R = L \cap (\mathbb{Q} \setminus L) = \varnothing$
— $L \cup R = L \cup (\mathbb{Q} \setminus L) = \mathbb{Q}$
— L_1 et L_2 n'ont pas de plus grand élément. Donc, L n'en a pas non plus.
— Soient $(x_1,x_2) \in L_1 \times L_2$ et $(y_1,y_2) \in R_1 \times R_2$.

$$\left.\begin{matrix} x_1 \leqslant y_1 \\ x_2 \leqslant y_2 \end{matrix}\right\} \iff x_1 + x_2 \leqslant y_1 + x_2 \leqslant y_1 + y_2$$

Donc, $x_1 + x_2 \leqslant y_1 + y_2$

$\boxed{\text{Donc, } (L,R) \text{ est une coupure de } \mathbb{Q}.}$

VI.B

Soient $C_1 = (L_1,R_1)$, $C_2 = (L_2,R_2)$ et $C_3 = (L_3,R_3)$ trois coupures de $\mathbb{Q}$. Montrons que $C_1 + C_2 = C_2 + C_1$ et que $(C_1+C_2)+C_3 = C_1 + (C_2+C_3)$.

— Soient $(\mathscr{L}_1,\mathscr{R}_1) = C_1 + C_2$ et $(\mathscr{L}_2,\mathscr{R}_2) = C_2 + C_1$

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 = C_2 + C_1 &\iff \begin{cases} \mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2 \\ \mathscr{R}_1 = \mathscr{R}_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2 \\ \mathbb{Q} \setminus \mathscr{L}_1 = \mathbb{Q} \setminus \mathscr{L}_2 \end{cases} \\ &\iff \{x+y \mid x \in L_1, y \in L_2\} = \{y+x \mid y \in L_2, x \in L_1\} \end{aligned}$$

Donc, la loi "+" est commutative.
— Soient $(\mathscr{L}_1,\mathscr{R}_1) = C_1+C_2$, $(\mathscr{L}_2,\mathscr{R}_2) = C_2+C_3$, $(\mathscr{L}_3,\mathscr{R}_3) = (C_1+C_2)+C_3$ et $(\mathscr{L}_4,\mathscr{R}_4) = C_1 + (C_2+C_3)$.
On a $\mathscr{L}_1 = \{x+y \mid x \in L_1, y \in L_2\}$ et $\mathscr{L}_2 = \{y+z \mid y \in L_2, z \in L_3\}$.
Donc,

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_3 &= \{u+z \mid u \in \mathscr{L}_1, z \in L_3\} \\ &= \{(x+y)+z \mid x \in L_1, y \in L_2, z \in L_3\} \\ &= \{x+y+z \mid x \in L_1, y \in L_2, z \in L_3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_4 &= \{x+v \mid x \in L_1, v \in \mathscr{L}_2\} \\ &= \{x+(y+z) \mid x \in L_1, y \in L_2, z \in L_3\} \\ &= \{x+y+z \mid x \in L_1, y \in L_2, z \in L_3\} \end{aligned}$$

Donc, $(C_1+C_2)+C_3 = C_1+(C_2+C_3)$, la loi "+" est commutative.

VI.C

Soit (L, R) une coupure de $\mathbb{Q}$. Montrons que $(L, R) + I(0) = (L, R)$.
On sait que $L_0 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\} = \mathbb{Q}_*^-$.

$$(L, R) + I(0) = (L', \mathbb{Q} \setminus L') \text{ avec } L' = \{x + y \mid x \in L, y \in \mathbb{Q}_*^-\}$$

Montrons que $L' = L$ c'est à dire que $\forall x \in L, \forall y \in \mathbb{Q}_*^-, x + y \in L$. Soients $x \in L$ et $y \in \mathbb{Q}_*^-$.

$$x + y < x \text{ car } y < 0$$

Or, d'après II,

$$\forall x \in L, \forall z \in Q, \text{ si } z \leqslant x \text{ alors } z \in L$$

Je n'ai pas fini cette question

Donc, $(x + y) \in L$

$\boxed{\text{Donc, } I(0) \text{ est un élément neutre de } +}$

VI.D

Montrons que $\forall C \in \mathfrak{R}, \exists C' \in \mathfrak{R}, C + C' = I(0)$ c'est à dire montrons que $\forall (L, R) \in \mathfrak{R}, \exists (L', R') \in \mathfrak{R}, \{x + y \mid x \in L, y \in L'\} = L_0 = \mathbb{Q}_*^-$.
Soit $x \in L$. Trouvons $y \in \mathbb{Q}$ tel que $x + y < 0$ i.e. $x < -y$ On sait que L a une borne supérieur. On pose $M = \sup(L)$. Donc, $x < M$ donc $x - M < 0$

VI.E

Soient $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$. On sait que $(L, R) = (L', R') \iff L = L'$. On pose $x \in L_{q_1}$ et $y \in L_{q_2}$. Montrons que $x + y \in L_{q_1+q_2}$.

$$\begin{aligned} x + y \in L_{q_1+q_2} &= \{x + y \in \mathbb{Q} \mid x + y < q_1 + q_2\} \\ &\iff \begin{cases} x + y \in \mathbb{Q} \\ x + y < q_1 + q_2 \end{cases} \end{aligned}$$

On a $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q}$ donc on a bien $x + y \in \mathbb{Q}$.
On sait que $x \in L_{q_1}$ donc $x < q_1$.
On sait que $y \in L_{q_2}$ donc $y < q_2$.
Donc, $x + y < q_1 + q_2$. Donc, $x + y \in L_{q_1+q_2}$

$\boxed{\text{Donc } \forall (q_1, q_2) \in Q^2, I(q_1 + q_2) = I(q_1) + I(q_2)}$

VII

VII.A

On pose $C = (L, R)$ et $C' = (L', R')$ deux coupures positives. On a

$$\begin{cases} I(0) \preceq C \implies Q_*^- \subset L \\ I(0) \preceq C' \implies Q_*^- \subset L' \end{cases}$$

On doit montrer que $\mathbb{Q}_*^- \subset L''$ avec $(L'', \mathbb{Q} \setminus L'') = C \times C'$.
Soit $x \in \mathbb{Q}_*^-$, montrons que $x \in L''$. Comme $x \in L''$, on sait que $x \leqslant ab$ avec

$a \in L \cap Q^+$ et $b \in L' \cap \mathbb{Q}^+$. Donc, $ab \in \mathbb{Q}^+$.
Comme $x < 0$, $x < ab$ (avec $a \in L \cap Q^+$ et $b \in L' \cap Q^+$) donc $x \in L''$

$\boxed{\text{Donc, le produit de deux coupures positive est aussi positive}}$

VII.B

Soient $(q_1, q_2) \in (\mathbb{Q}^+)^2$. On pose $(L', \mathbb{Q} \setminus L') = I(q_1 q_2)$

$I(q_1) \times I(q_2) = (L, \mathbb{Q} \backslash L)$ avec $L = \{x \in \mathbb{Q} \mid \exists a \in L_{q_1} \cap \mathbb{Q}^+, b \in L_{q_2} \cap \mathbb{Q}^+, x \leqslant ab\}$

On veut montrer que $L = L'$.

$$L' = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < q_1 q_2\}$$

— On pose $x \in L'$. On sait que $x < q_1 q_2$. Or, $q_1 \in L_{q_1} \cap \mathbb{Q}^+$ et $q_2 \in L_{q_2} \cap \mathbb{Q}^+$. Donc,

$$\exists (a, b) \in L_{q_1}^+ \times L_{q_2}^+, x \leqslant ab$$

Donc $x \in L$.

— On pose $x \in L$. Montrons que $x \in L'$. On sait qu'il existe $(a, b) \in L_{q_1}^+ \times L_{q_2}^+$ tels que $x \leqslant ab$. On sait que $0 \leqslant a < q_1$ et $0 \leqslant b < q_2$ donc $0 \leqslant ab < q_1 q_2$ donc $x < q_1 q_2$ donc $x \in L'$

$\boxed{\text{Donc, } \forall (q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2, I(q_1 q_2) = I(q_1) \times I(q_2)}$