

CHAPITRE 13

Sy
calcul

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 18 mai 2022

TABLE DES MATIÈRES

EXEMPLE:

$$\begin{aligned}
 (S_1) : \left\{ \begin{array}{cccccc} \widehat{\boxed{x}}^{\text{pivot}} & +y & +z & -t & = & 1 \\ \boxed{x} & +2y & +3z & +t & = & 0 \\ x & & +z & & = & 2 \end{array} \right. \\
 \begin{array}{l} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \\ \xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \end{array} \left\{ \begin{array}{cccccc} \boxed{x} & +y & +z & -t & = & 1 \\ & y & +2z & +2t & = & -1 \end{array} \right. \\
 \begin{array}{l} \xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \\ \xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \end{array} \left\{ \begin{array}{cccccc} \boxed{x} & & -z & -3t & = & 2 \\ & \boxed{y} & +2z & +2t & = & -1 \\ & & 2z & +3t & = & 0 \end{array} \right. \\
 \begin{array}{l} \xLeftrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_3} \\ \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{2}{3}L_3} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x} + z = 2 \\ \boxed{y} + \frac{2}{3}z = -1 \\ \boxed{3t} + 2z = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - z \\ y = -1 - \frac{2}{3}z \\ t = -\frac{2}{3}z \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est

$$\left\{ \left(2 - z, -1 - \frac{2}{3}z, z, -\frac{2}{3}z \right) \mid z \in \mathbb{K} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} x + y + z - t = 1 \\ x + 2y + 3z + t = 0 \\ x + \boxed{z} = 2 \end{cases} \\
& \begin{matrix} \Longleftrightarrow \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{matrix} \begin{cases} \boxed{y} - t = -1 \\ -2x + 2y + t = -6 \\ x + \boxed{z} = 2 \end{cases} \\
& \begin{matrix} \Longleftrightarrow \\ L_2 \leftarrow \frac{L_2 - 2L_1}{-2} \end{matrix} \begin{cases} \boxed{y} - t = -1 \\ \boxed{x} - \frac{3}{2}t = 2 \\ x + \boxed{z} = 2 \end{cases} \\
& \begin{matrix} \Longleftrightarrow \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} \boxed{y} - t = -1 \\ \boxed{x} - \frac{3}{2}t = 2 \\ \boxed{z} + \frac{3}{2}t = 0 \end{cases} \\
& \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -1 + t \\ x = 2 + \frac{3}{2}t \\ z = -\frac{3}{2}t \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \left\{ \left(2 + \frac{3}{2}t, -1 + t, -\frac{3}{2}t, t \mid t \in \mathbb{K} \right) \right\} \\
&= \underbrace{\left\{ (2, -1, 0, 0) \right\}}_A + t \underbrace{\left(\frac{3}{2}, 1, -\frac{3}{2}, 1 \right)}_u \mid t \in \mathbb{K}
\end{aligned}$$

EXEMPLE:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y - z = 3 \\ y + 3z = 1 \end{cases} \\
& \begin{aligned} & \Longleftrightarrow \\ L_2 & \leftarrow \frac{L_2 - L_1}{-2} \\ L_3 & \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 & \leftarrow L_4 - L_1 \end{aligned} \begin{cases} \boxed{x} + y + z = 0 \\ \boxed{y} = \frac{1}{2} \\ -3y - z = 2 \\ -2y - 2z = 3 \\ y + 3z = 1 \end{cases} \\
& \begin{aligned} & \Longleftrightarrow \\ L_1 & \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 & \leftarrow -(L_3 - 3L_2) \\ L_4 & \leftarrow L_4 + 3L_2 \\ L_5 & \leftarrow L_5 - L_2 \end{aligned} \begin{cases} \boxed{x} + z = \frac{1}{2} \\ \boxed{y} = -\frac{1}{2} \\ \boxed{z} = -\frac{1}{2} \\ -2z = 2 \\ 3z = \frac{3}{2} \end{cases} \\
& \begin{aligned} & \Longleftrightarrow \\ L_1 & \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_4 & \leftarrow L_4 + 2L_3 \\ L_5 & \leftarrow L_5 - 3L_3 \end{aligned} \begin{cases} \boxed{x} = 1 \\ \boxed{y} = -\frac{1}{2} \\ \boxed{z} = -\frac{1}{2} \\ \boxed{0 = 1} \\ \boxed{0 = 3} \end{cases} \text{incompatibilit }
\end{aligned}$$

Il n'y a pas de solution !

EXEMPLE :

$$\begin{aligned}
& (S_2) : \begin{cases} \boxed{x} + y - z = 1 \\ y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \\
& \begin{aligned} & \Longleftrightarrow \\ L_3 & \leftarrow L_3 - L_1 \end{aligned} (S'_2) : \begin{cases} \boxed{x} + y - z = 1 \\ \boxed{y} + z = 0 \\ y + z = -1 \end{cases} \\
& \begin{aligned} & \Longleftrightarrow \\ L_1 & \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 & \leftarrow L_3 - L_2 \end{aligned} \begin{cases} \boxed{x} - 2z = 1 \\ \boxed{y} + z = 0 \\ \boxed{0 = -1} \end{cases}
\end{aligned}$$

EXEMPLE :

$$\begin{aligned}
(S_1) & \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_B \\
& \Longleftrightarrow AX = B
\end{aligned}$$

$$(S_2) \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(S'_2) \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A'} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A'}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \text{GL}_3(\mathbb{K})} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \text{GL}_3(\mathbb{K})} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \in \text{GL}_3(\mathbb{K}) \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{K})$$

EXAMPLE:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \quad C_3 \leftarrow \widetilde{C_3 - C_1} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} C_1 \leftarrow \widetilde{C_1 - C_2} \\ C_3 \leftarrow \frac{C_3 - C_2}{2} \end{array} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} C_1 \leftarrow \widetilde{C_1 + C_3} \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_2 \xleftrightarrow{\sim} C_3 \quad I_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_B$$

$$A \in \text{GL}_3(\mathbb{K}) \text{ et } A^{-1} = I_3 \times B$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ C_3 & \leftarrow \overset{\sim}{C_3} - C_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ C_1 & \leftarrow \overset{\sim}{C_1 - C_2} \\ C_3 & \leftarrow \frac{C_3 + C_2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ C_1 & \leftarrow \overset{\sim}{C_1 + C_3} \\ C_2 & \leftarrow C_2 - C_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ C_2 & \leftrightarrow C_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{A^{-1}} \end{aligned}$$

REMARQUE (Résumé): — Méthode du pivot : opérations sur les lignes :

1. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ($\lambda \in \mathbb{K}$)
2. $L_i \leftarrow \mu L_i$ ($\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$)
3. $L_i \leftrightarrow L_j$

En appliquant la méthode du pivot on obtient

$$(S) \iff \begin{cases} x_{i_1} &= \ell_1(x_{j_1}, \dots, x_{j_n-r}) \\ x_{i_2} &= \ell_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_n-r}) \\ \vdots & \vdots \\ x_{i_r} &= \ell_r(x_{j_1}, \dots, x_{j_n-r}) \\ 0 &= * \end{cases}$$

Les inconnues x_{i_1}, \dots, x_{i_r} sont les inconnues principales, les autres sont appelées paramètre.

On peut supprimer les équations $0 = 0$. S'il y a une équation $0 = \lambda$ avec $\lambda \neq 0$, il n'y a pas de solution : le système est incompatible.

Les inconnues principales dépendent des choix de pivots!

— Représentation matricielle

$$(S) \iff AX = B$$

où A est la matrice du système, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et B est le second membre

(S) a n équations et p inconnues donc A a n lignes et p colonnes.

La matrice $(A | B)$ est la matrice augmentée du système.

- Faire une opération L sur les lignes d'une matrice M revient à multiplier M à gauche par une matrice R où R est obtenue en appliquant L sur I_n .
- La méthode du pivot matriciel par lignes :

EXEMPLE:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & \boxed{1} & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 5 & \boxed{1} & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -3 & -4 \\ -3 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\sim} \begin{matrix} L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 5 & \boxed{1} & 3 & 4 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ -3 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\sim} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & -2 & -\frac{8}{3} \\ \boxed{1} & 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\sim} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \end{matrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matrice échelonnée réduite par lignes}}$$

Définition (Rang d'une matrice): Soit M une matrice et R la matrice échelonnée réduite par lignes associée à M . Le nombre de lignes non nulles de R (le nombre de pivots) est appelée rang de M .

Soit S un système de matrice augmentée $(A | B)$. Le rang de S est le rang de la matrice A .

Le rang est noté rg .

Proposition (Interprétation): — Soit S un système de n équations, p inconnues de rang r .
 r est le nombre d'inconnues principales, il y a $p - r$ paramètres.
 — Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r .
 r est le nombre de lignes indépendantes : il y a $n - r$ lignes combinaisons linéaires des r lignes indépendantes.

Corollaire: Soit S un système de n équations, p inconnues de rang n . Alors S a au moins une solution.

Si $n = p$ alors S a exactement une solution.

Si $p > n$, il y a une infinité de solutions.

□

Définition: Soit S un système à n équations, n inconnues et de rang n . On dit que S est un système de Cramer (il a une unique solution)

Proposition: Soit S un système de n équations, p inconnues de rang r .

- Si $r < n$ alors le système peut-être incompatible : il y a $n - r$ équations de la forme $0 = *$ après la méthode du pivot.
- Si $r < p$ alors il y a $p - r$ paramètres : si le système n'est pas incompatible, il y aura une infinité de solutions.

□

EXEMPLE:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & \boxed{1} & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\sim} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} -9 & 0 & -1 \\ 5 & \boxed{1} & 2 \\ 4 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\sim} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{-5} & 0 & 0 \\ 5 & \boxed{1} & 2 \\ 4 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\sim} \begin{matrix} L_1 \leftarrow -L_1/5 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 5 & \boxed{1} & 2 \\ 4 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\sim} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

EXEMPLE:

$$(S) : \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z + 2t = 0 \\ 2y - t = 1 \\ 2x + 2z + 3t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} \boxed{x} + y + z + t = 1 \\ x - y + z + 2t = 0 \\ 2y - t = 1 \\ 2x + 2z + 3t = 1 \end{cases} &\xleftrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix}} \begin{cases} \boxed{x} + y + z + t = 1 \\ -2y + \boxed{t} = -1 \\ 2y - t = 1 \\ -2y + t = -1 \end{cases} \\ &\xleftrightarrow{\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix}} \boxed{\begin{cases} \boxed{x} + y + z + t = 1 \\ -2y + \boxed{t} = -1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}} \text{Système triangulaire} \\ &\xleftrightarrow{\quad} \begin{cases} t = -1 + 2y \\ x = 2 - 3y - z \end{cases} \end{aligned}$$

La matrice du système triangulaire est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elle n'est pas échelonnée réduite par lignes !

Proposition: Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et C une opération élémentaire sur les colonnes de A . On pose A' la matrice obtenue en appliquant C sur les colonnes de A .

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A')$$

□

EXEMPLE:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ \boxed{1} & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 2 \\ 5 & -4 & -3 \\ \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 0 \\ 5 & -4 & \boxed{5} \\ \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\text{rg}(A) = 3$

EXEMPLE:

$$\text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = 1$$

Proposition: Le rang d'une matrice est aussi le nombre de colonnes indépendantes. □

Définition: Une matrice triangulaire supérieure est une matrice carrée avec des coefficients nuls sous sa diagonale :

$$T = \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix}$$

diagonale

et triangulaire inférieure si les coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls :

$$T = \begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \dots & \dots & * \end{pmatrix}$$

Un système triangulaire est de la forme

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1p}x_p & = & b_1 & +\dots \\ & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2p}x_p & = & b_2 & +\dots \\ & & & & & \vdots & \\ & & & & a_{pp}x_p & = & b_p & +\dots \\ & & & & 0 & = & \dots \end{array} \right.$$

REMARQUE:

$$(S) \iff \begin{cases} AX = B \\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \end{cases}$$

On pose

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

On cherche $\varphi^{-1}(\{B\})$

On sait que

- $(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe
- $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), +)$ aussi

Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$

$$\varphi(X + Y) = A(X + Y) = AX + AY = \varphi(X) + \varphi(Y)$$

Donc φ est un morphisme de groupes.

On peut résoudre (S) de la façon suivante :

- On cherche $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $\varphi(X_0) = B$
- On résout $\varphi(X) = 0$ ($X \in \text{Ker}(\varphi)$)

C'est le système homogène associé :

$$\varphi(X) = B \iff \exists H \in \text{Ker}(\varphi), X = X_0 + H$$

Proposition:

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

$$B = (b_{k,\ell})_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq \ell \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

$$AB = (c_{i,\ell})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq \ell \leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

$$c_{i,\ell} = \sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{j,\ell}$$