Chapitre 16

TD

Hugo Salou MP2I
Dernière mise à jour le 8 mai 2022

Table des matières

Exercice 1

$$\cos\left(\sqrt{x}\right) = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$$

Donc, $f : x \mapsto \cos\left(\sqrt{x}\right)$ est dérivable en 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$

Exercice 2

$$\begin{aligned}\frac{xf(a) - af(x)}{x-a} &= \frac{xf(a) - a\big(f(a) + (x-a)f'(a) + o(x-a)\big)}{x-a}\\ &= f(a) - af'(a) + o(1)\\ &\xrightarrow[x\to a]{} f(a) - af'(a)\end{aligned}$$

Exercice 3

Soit $x \geqslant 1$. f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$. Donc

$$\exists c \in]x, x+1[, f(x+1) - f(x) = f'(c) < f'(x)$$

De même,

$$\exists d \in]x-1, x[, f(x) - f(x-1) = f'(d) > f'(x)$$

On pose $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ donc

- $f(x+1) - f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell - \ell = 0$
- $f(x) - f(x-1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell - \ell = 0$

Par encadrement, $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Exercice 4

Soit

$$g_M : x \mapsto f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}\big(f'(x) + f'(a)\big) - (x-a)^3 M$$

g_M est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$
$g_M(a) = 0$
$g_M(b) = f(b) - f(a) - \dfrac{b-a}{2}\big(f'(b) - f'(a)\big) - (b-a)^3 M$
On pose $M = \dfrac{1}{(b-a)^3}\left(f(b) - f(a) - \dfrac{b-a}{2}\big(f'(b) + f'(a)\big)\right)$
Ainsi, $g_M(b) = 0$
D'après le théorème de Rolle, il existe $\gamma \in]a, b[$ tel que $g_M'(\gamma) = 0$
D'où,

$$\begin{aligned}0 &= f'(\gamma) - \frac{1}{2}\big(f'(\gamma) + f'(a)\big) - \frac{\gamma - a}{2} f''(\gamma) - 3(\gamma - a)^2 M\\ &= \frac{1}{2}\big(f'(\gamma) - f'(a)\big) - \frac{\gamma - a}{2} f''(\gamma) - 3(\gamma - a)^2 M\end{aligned}$$

Or,

$$g_M'(a) = 0$$

— g'_M est continue sur $[a, \gamma]$
— g'_M est dérivable sur $]a, \gamma[$
— $g'_M(a) = g'_M(\gamma)$

Donc, il existe $c \in]a, \gamma[\subset]a, b[$ tel que

$$g''_M(c) = 0$$

d'où $M = -\dfrac{1}{12} f^{(3)}(c)$
On en déduit

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}\big(f'(b) + f'(a)\big) - \frac{(b-a)^3}{12} f^{(3)}(c)$$

Idée de la solution

Exercice 7

$$f(2x) = f(x) + ax + o(x)$$

$$\begin{aligned} f(x) \xleftarrow[n\to+\infty]{} f(x) &= f\left(\frac{x}{2}\right) a\frac{x}{2} + o(x) \\ &= f\left(\frac{x}{4}\right) + a\frac{x}{2} + a\frac{x}{4} + o(x) \\ &= f\left(\frac{x}{2^n}\right) + a\sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2^k} + o(x) \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0) + ax + o(x) \end{aligned}$$

Solution

Donc, $f(x) = f(0) + ax + o(x)$

$\varepsilon(x) \to 0$

$$f(2x) = f(x) + ax + x\varepsilon(x)$$

$$\begin{aligned} f(x) \xleftarrow[n\to+\infty]{} f(x) &= f\left(\frac{x}{2}\right) a\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= f\left(\frac{x}{4}\right) + a\frac{x}{2} + a\frac{x}{4} + \frac{x}{4}\varepsilon\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x}{2}\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= f\left(\frac{x}{2^n}\right) + a\sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2^k} + x\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\varepsilon\left(\frac{x}{2^k}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} ?} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0) + ax + ? \end{aligned}$$

On pose

$$\forall x > 0, \varepsilon(x) = \frac{f(2x) - f(x)}{x} - a$$

D'après l'énoncé, $\varepsilon(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0 \\ >}]{}$ et

$$(\mathscr{E}) : \quad \forall x > 0, f(2x) = f(x) + ax + x\varepsilon(x)$$

On en déduit par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, P(n) \text{ est vraie, avec}$$

$$P(n) : \text{“}\forall x > 0, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) + ax\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} + x\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\varepsilon\left(\frac{x}{2^k}\right)\text{”}$$

— D'après $(\mathscr{E})$,

$$\forall x > 0, f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{ax}{2} + \frac{x}{2}\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)$$

donc $P(1)$ est vraie

— Soit $n \in \mathbb{N}_*$. On suppose $P(n)$ vraie.

$$\begin{aligned}\forall x > 0, f(x) &= f\left(\frac{x}{2^n}\right) + ax\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} + x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\varepsilon\left(\frac{x}{2^k}\right) \\ &= f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) + a\frac{x}{2^{n+1}} + \frac{x}{2^{n+1}}\,\varepsilon\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \\ &+ ax\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} + x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\varepsilon\left(\frac{x}{2^k}\right) \\ &= f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) + ax\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2^k} + x\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{2^k}\varepsilon\left(\frac{x}{2^k}\right)\end{aligned}$$

Donc, $P(n+1)$ est vraie

On fixe $x > 0$.

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0) \text{ car } f \text{ est continue en } 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \qquad = 1 - \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \varepsilon(x)0$, on sait que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in]0,\eta[, |\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. On considère $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]0,\eta[, |\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon$$

Soit $x \in]0,\eta[$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{x}{2^k} \leqslant x$$

donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{x}{2^k} \in]0,\eta[$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{N}, \left|\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)\right| \leqslant \varepsilon$$

Donc

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}_*, \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\varepsilon\left(\frac{x}{2^k}\right)\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\left|\varepsilon\left(\frac{x}{2^k}\right)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\varepsilon \\ &\leqslant \left(1-\frac{1}{2^n}\right)\varepsilon \\ &\leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

De plus, pour tout $x > 0$, il existe $N'_x \in \mathbb{N}_*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}'_*, \left|f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f(0)\right| \leqslant \varepsilon x$$

et il existe $N_x \in \mathbb{N}_*$ tel que

$$\forall n \geqslant N_x, \left|a\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} - a\right| \leqslant \varepsilon$$

donc

$$\forall n \geqslant N, ax - \varepsilon x \leqslant ax \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leqslant ax + \varepsilon x$$

$$\forall x \in]0, \eta''[, \forall n \geqslant \max(N, N'_x),$$
$$f(0) - \varepsilon x + ax - \varepsilon x - \varepsilon x \leqslant f(x) \leqslant f(0) + \varepsilon x + ax + \varepsilon x + \varepsilon x$$

donc

$$-3\varepsilon \leqslant \frac{f(x) - f(0)}{x} - a \leqslant 3\varepsilon$$

Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x} - a = 0$ et donc f est dérivable à droite en 0 et $f'(0) = a$

Exercice 5

1. On pose $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\big(z - f'(a)\big) > 0$.
   Il existe $\eta_1 > 0$ tel que

   $$\forall k \in]-\eta_1, \eta_1[\setminus\{0\}, a + h \in I, \left|\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)\right| \leqslant \varepsilon_1$$

   En particulier,

   $$\forall kh \in]0, \eta_1[, \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leqslant f'(a) + \varepsilon_1 < z$$

   De même, il existe $\eta_2 > 0$ tel que

   $$\forall h \in]0, \eta_2[, \left|\frac{f(b+h) - f(b)}{h} - f'(b)\right| \leqslant \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\big(f'(b) - z\big)$$

   donc

   $$\forall h \in]0, \eta_2[, \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \geqslant f'(b) - \varepsilon_2 > z$$

   On pose $\eta = \min(\eta_1, \eta_2) > 0$,

   $$\forall h \in]0, \eta[, \frac{f(a+h) - f(a)}{h} < z < \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

2. On fixe $h \in]0, \eta[$ et $g_h : x \mapsto \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
   g_h est continue sur son domaine de définition, et d'après 1.,

   $$g_h(a) < z < g_h(b)$$

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $y \in I$ tel que $y + h \in I$ et $z = g_h(y) = \frac{f(y+h) - f(y)}{h}$
   D'après le théorème des accroissements finis,

   $$\exists x \in]y, y+h[, f'(x) = \frac{f(y+h) - f(y)}{h} = z$$