Chapitre 14

Continuité

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 30 mai 2022

TABLE DES MATIÈRES

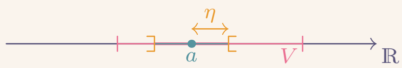
Première partie

Définition d'une limite de fonctions

Définition: Soit $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et $V \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

1. Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que V est un voisinage si

$$\exists \eta > 0,\ ]a-\eta, a+\eta[\subset V.$$



2. Si $a = +\infty$, on dit que V est un voisinage de a si

$$\exists M \in \mathbb{R},\ ]M, +\infty[\ \subset V.$$

3. Si $a = -\infty$, on dit que V est un voisinage de a si

$$\exists m \in \mathbb{R},\ ]-\infty, m[\ \subset V.$$

On note $\mathscr{V}_a$ l'ensemble des voisinages de a.

L'utilisation des voisinages permet d'exprimer une limite finie ou infinie plus simplement, sans disjonction de cas.

Exemple:
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de limite $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

— Si $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - a| \leqslant \varepsilon \\ \text{i.e. } &\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ a - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant a + \varepsilon \\ \text{i.e. } &\forall V \in \mathscr{V}_a,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \in V. \end{aligned}$$

— Si $a = +\infty$,

$$\begin{aligned} &\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant M \\ \text{i.e. } &\forall M \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \in [M, +\infty[\\ \text{i.e. } &\forall V \in \mathscr{V}_a,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \in V. \end{aligned}$$

— Si $a = -\infty$,

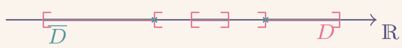
$$\begin{aligned} &\forall m \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant m \\ \text{i.e. } &\forall m \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \in]-\infty, m] \\ \text{i.e. } &\forall V \in \mathscr{V}_a,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \in V. \end{aligned}$$

Même si, dans chacun des cas, la définition de limite de la suite u est différente, en utilisant les voisinages, la notation est identique :

$$\forall V \in \mathscr{V}_a,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \in V.$$

En utilisant cette nouvelle notation, on peut redéfinir la limite plus simplement.

Définition: Soit f une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles. Soit $a \in \overline{D} = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall V \in \mathscr{V}_x,\ V \cap D \neq \varnothing\}$ (on “rajoute” chacune des bornes exclues des intervalles composant D) :



On dit que $f(x)$ tends vers ℓ si

$$\forall V \in \mathscr{V}_\ell,\ \exists W \in \mathscr{V}_a,\ \forall x \in W \cap D,\ f(x) \in V.$$

Exemple:
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) \xrightarrow[x \to -1]{} 1$.

$$\forall V \in \mathscr{V}_1,\ \exists W \in \mathscr{V}_{-1},\ \forall x \in W,\ f(x) \in V$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \left]-1-\eta, -1+\eta\right[,\ f(x) \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$$

i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \big(|x-(-1)| < \eta \implies |f(x) - 1| \leqslant \varepsilon\big).$$

Si $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$,

$$\forall V \in \mathscr{V}_{+\infty},\ \exists W \in \mathscr{V}_{-\infty},\ \forall x \in W,\ f(x) \in V$$

i.e.

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in \left]-\infty, m\right],\ f(x) \in [M, +\infty[$$

i.e.

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \big(x \leqslant m \implies f(x) \geqslant M\big).$$

Définition: Soit $a \in \mathbb{R}$.

Un voisinage à gauche de a est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient un inveralle $]a-\eta, a]$ avec $\eta > 0$.

Un voisinage à droite de a est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient un inveralle $[a, a+\eta[$ avec $\eta > 0$.

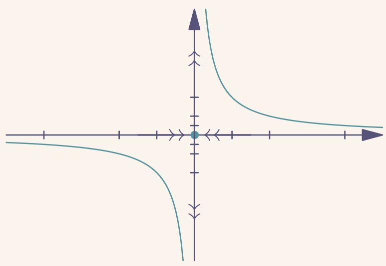
Exemple:
Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ *existe ? Si oui, que vaut elle ?*
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \leqslant}} f(x)$ *existe ? Si oui, que vaut elle ?*

Réponse : $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas. Pour le prouver, on raisonne par l'absurde.

$$\ell = \bigcap_{V \in \mathscr{V}_\ell} V$$

Si ℓ existe, alors $\ell = f(0)$.
Or, $0 \neq \lim\limits_{x \to 0} f(x)$



Proposition: Si f admet une limite finie en $a \in I$, alors cette limite vaut $f(a)$.

Preuve:
Soit $\ell = \lim\limits_{x \to a}$ et $a \in \mathscr{D}$.

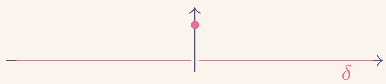
On sait que
$$\forall V \in \mathscr{V}_\ell, \exists W \in \mathscr{V}_a, \forall x \in W \cap \mathscr{D}, f(x) \in V.$$

Soit $V \in \mathscr{V}_\ell$. Alors, $f(a) \in V$.

$$f(a) \in \bigcap_{V \in \mathscr{V}_\ell} V = \begin{cases} \{\ell\} & \text{si } \ell \in \mathbb{R}, \\ \varnothing & \text{si } \ell = \pm\infty. \end{cases}$$

Donc $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell = f(a)$. □

Remarque:
De même si $a \in \mathscr{D}$ et si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \leqslant}} f(x)$ existe (resp. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \leqslant}} f(x)$) alors $f(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ \leqslant}} f(x)$ (resp $f(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ \geqslant}} f(x)$)



Exemple:
$\lim\limits_{x \to 0} \delta(x)$ n'existe pas
$\lim\limits_{x \to 0^+} \delta(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^-}$ n'existent pas non plus.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \delta(x)$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \delta(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \delta(x) = 0$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Définition: Soit f définie sur D et $a \in D$. On dit que f est <u>continue en a</u> si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe ou si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x) = f(a)$.

Exemple:
Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0)$
Donc f est continue en 0.

Proposition: f est continue en a si et seulement si

$$\lim_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ >}} = f(a)$$

Preuve (unicité de la limite)*:*
On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to u]{} a$, $f(x) \xrightarrow[x\to u]{} b$ avec $a \neq b$.
Soient V et W conne dans le lemme (suivant),

$$\begin{cases} \exists W_1 \in \mathscr{V}_u, \forall x \in W_1 \cap \mathscr{D}, f(x) \in V \\ \exists W_2 \in \mathscr{V}_u, \forall x \in W_2 \cap \mathscr{D}, f(x) \in W \end{cases}$$

Donc

$$\forall x \in \underbrace{W_1 \cap W_2 \cap \mathscr{D}}_{\neq \varnothing \text{ car } W_1 \cap W_2 \in \mathscr{V}_u} \quad f(x) \in V \cap W = \varnothing$$

□

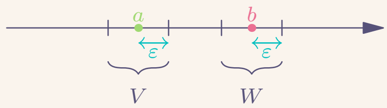
Lemme: Soient $a \neq b$ deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$
Alors $\exists V \in \mathscr{V}_a, \exists W \in \mathscr{V}_b, V \cap W = \varnothing$

Preuve: Cas 1 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $a < b$.

On pose $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$,

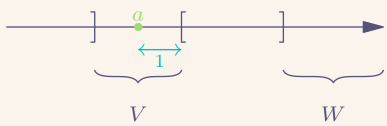
$$\begin{cases} V =]a-\varepsilon; a+\varepsilon[\\ W =]b-\varepsilon; b+\varepsilon[\end{cases}$$

On vérifie que $V \cap W = \varnothing$



Cas 2 $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$

$$\begin{cases} V =]a-1; a+1[\\ W =]a+2; +\infty[\end{cases}$$



Cas 3 $a = -\infty$, $b = +\infty$

$$\begin{cases} V =]-\infty; 0[\\ W =]0; +\infty[\end{cases}$$

□

Théorème: Soit f définie sur $\mathscr{D}$ et $a \in \overline{\mathscr{D}}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \iff \forall (x_n) \in \mathscr{D}^{\mathbb{N}} \left(x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \implies f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \right)$$

Preuve: " $\implies$ " On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

Soit $(x_n) \in \mathscr{D}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Soit $V \in \mathscr{V}_\ell$. Soit $W \in \mathscr{V}_a$ tel que

$$\forall x \in W \cap \mathscr{D}, f(x) \in V$$

$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, x_n \in W \cap \mathscr{D}$$

Donc

$$\forall n \geqslant N, f(x_n) \in V$$

D'où, $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

" $\impliedby$ " On suppose que $f(x) \not\xrightarrow[x\to a]{} \ell$

$$\exists V \in \mathscr{V}_\ell, \forall W \in \mathscr{V}_a, \exists x \in W \cap \mathscr{D}, f(x) \notin V$$

Soit V comme ci dessus. Soit $W_1 \in \mathscr{V}_a$.

Cas 1 $a \in \mathscr{D}$ et $\forall x \in W \cap \mathscr{D} \setminus \{a\}, f(x) \in V$.

On le prouve par la contraposée. On suppose $f(x) \not\xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}$

Donc,

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in]a-\eta, a+\eta[, |f(x) - \ell| > \varepsilon$$

On considère un tel ε donc

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, \exists x_n \in \left] a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right[, |f(x_n) - \ell| > \varepsilon$$

Par encadrement, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et $f(x_n) \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Cas 2 Soit $x_1 \in W_1 \cap \mathscr{D}$ tel que $f(x_1) \notin V$

$\begin{cases} x_1 \in \mathscr{D} \\ a \notin \mathscr{D} \end{cases}$ donc $x_1 \neq a$

Cas 3 $\exists x \in W_1 \cap \mathscr{D} \setminus \{a\}, f(x) \notin V$

Soit x_1 un tel élément :

$$x_1 \in W_1 \cap \mathscr{D}$$
$$x_1 \neq a$$
$$f(x_1) \notin V$$

Dans les cas 2 et 3, on pose $W_2 \in \mathscr{V}_a$ tel que

$$W_2 \subset W_1 \setminus \{x_1\}$$

En itérant ce procédé, on construit une suite (x_n) qui tend vers a et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \notin V$$

et donc $f(x_n) \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

□

Proposition: Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_2$
alors

1. $f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1 + \ell_2$
2. $f(x) \times g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1 \times \ell_2$
3. Si $\ell_2 \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$

Preuve: 1. Soit (x_n) une suite qui tends vers a alors $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell_1$ et $g(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell_2$
Donc, $f(x_n) + g(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell_1 + \ell_2$
Donc $f(x) + g(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell_1 + \ell_2$

□

Proposition: Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1$ et $g(x) \xrightarrow[x \to \ell_1]{} \ell_2$ alors $g(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_2$

Preuve:
Soit (x_n) une suite qui tend vers a. Alors, $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell_1$ donc $g(f(x_n)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell_2$
donc $g(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_2$ □

Corollaire: Une somme, un produit, une composée de fonctions continues sont continues. □

Remarque:
Pour démontrer que $f(x)$ n'a pas de limite quands x tend vers a. On cherche deux suites (x_n) et (y_n) de limite a avec

$$\begin{cases} f(x_n) \longrightarrow \ell_1 \\ f(y_n) \longrightarrow \ell_2 \\ \ell_1 \neq \ell_2 \end{cases}$$

Exemple:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sin(2\pi n) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

Or,

$$2\pi n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$
$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

Donc, sin n'a pas de limite en $+\infty$

Théorème (Limite monotone)**:** Soit f une fonction croissante sur $]a,b[$ avec $a \neq b \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si f est majorée,
$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in]a,b[, f(x) \leqslant M$$
alors $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = \sup\limits_{x \in]a,b[} f(x) \in \mathbb{R}$
2. Si f n'est pas majorée,
$$\lim_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = +\infty$$
3. Si f est minorée,
$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in]a,b[, f(x) \leqslant m$$
alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \inf\limits_{]a,b[} f \in \mathbb{R}$
4. Si f n'est pas minorée, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$

Preuve:

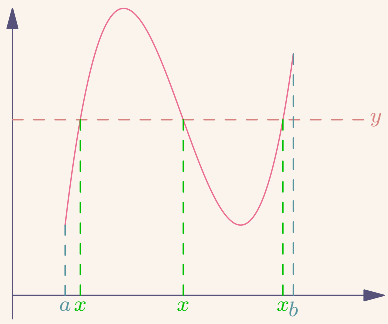
1. $\sup\limits_{]a,b[} f$ existe
$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in]a,b[, f(x) > \sup_{]a,b[}(f) - \varepsilon$$
donc
$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in]a,b[, \forall y \in [x,b[, \sup_{]a,b[}(f) - \varepsilon < f(y) \leqslant \sup_{]a,b[}(f) < \sup_{]a,b[}(f) + \varepsilon$$
donc $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to b \\ <}]{} \sup\limits_{]a,b[}(f)$
2. f n'est pas majorée
$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in]a,b[, f(x) > M$$
donc
$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in]a,b[, \forall y \in [x,b[, f(y) \in [M, +\infty[$$

□

Remarque:
Avec les hypothèses ci-dessus, pour tout $x \in]a,b[$,
f est croissante sur $]a,x[$, et majorée par $f(x)$ donc $\lim\limits_{\substack{t \to x \\ <}} f(t) \in \mathbb{R}$
f est croissante sur $]x,b[$ et minorée par $f(x)$ donc $\lim\limits_{\substack{t \to x \\ >}} f(t) \in \mathbb{R}$
$\lim\limits_{\substack{t \to x \\ <}} f(t) \leqslant f(x) \leqslant \lim\limits_{\substack{t \to x \\ >}} f(t)$

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)**:** Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $a < b$ deux éléments de I.

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \cup [f(b), f(a)]\,,\ \exists x \in [a, b],\ y = f(x)$$



Lemme: Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $a < b$ deux éléments de I tels que $f(a) \leqslant 0 \leqslant f(b)$. Alors,

$$\exists x \in [a, b], f(x) = 0$$

Preuve (du lemme)*:*
On pose $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leqslant 0\}$
$A \neq \varnothing$ car $a \in A$ et A est majorée par b.
On pose $u = \sup(A)$. Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers u.
$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a \leqslant x_n \leqslant b \\ f(x_n) \leqslant 0 \end{cases}$
On sait que $x_n \longrightarrow u$ et $f(x_n) \longrightarrow f(u)$ par continuité de f.
Donc, $\begin{cases} a \leqslant u \leqslant b \\ f(u) \leqslant 0 \end{cases}$ (donc $u = \max(A)$)
De plus,

$$\forall x \in]u, b], f(x) > 0$$

donc
$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to u \\ >}} f(x) = f(u) \\ \\ \lim\limits_{\substack{x \to u \\ >}} f(x) \geqslant 0 \end{cases}$$
Donc, $f(u) \geqslant 0$ donc $f(u) = 0$

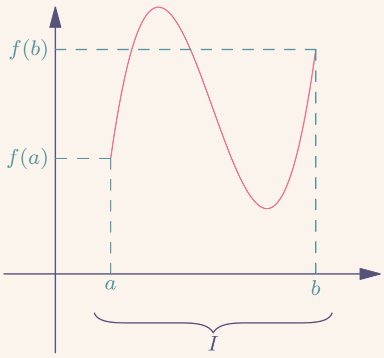
$\square$

Preuve (du théorème)*:*
On pose $g : x \mapsto f(x) - y$. g est continue sur I.

Si $f(a) < f(b)$ alors $\begin{cases} g(a) \leqslant 0 \\ g(b) \geqslant 0 \end{cases}$
D'après le lemme, il existe $x \in [a, b]$ tel que $g(x) = 0$ et donc $f(x) = y$

Si $f(a) < f(b)$ alors $\begin{cases} h(a) \leqslant 0 \\ h(b) \geqslant 0 \end{cases}$ où $h : x \mapsto -g(x) = y - f(x)$ est continue
D'après le lemme, il existe $x \in [a, b]$ tel que $h(x) = 0$ et donc $f(x) = y$ $\square$

Corollaire: Soit f continue sur un intervalle I. Alors, $f(I)$ est un intervalle.



Preuve:
Montrons que $f(I)$ est convexe
Soit $\alpha \in f(I), \beta \in f(I)$ avec $\alpha < \beta$. Montrons que
$$\forall \gamma \in [\alpha, \beta], f(\gamma) \in f(I)$$
Or, $\begin{cases} \alpha \in f(I) & \exists a \in I, \alpha = f(a) \\ \beta \in f(I) & \exists b \in I, \beta = f(b) \end{cases}$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [a, b]$ tel que $\gamma = f(x)$ donc, $f(\gamma) \in f(I)$ $\square$

Corollaire: On peut généraliser le théorème des valeurs intermédiaires au cas où

$\begin{cases} a \in \overline{R} \\ b \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases}$ en remplaçant $f(a)$ par $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$ et $f(b)$ par $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x)$

□

Théorème (Théorème de la bijection)**:** Soit f continue, strictement monotone sur un intervalle I. Alors, $J = f(I)$ est un intervalle de même nature (ouvert, semi-ouvert ou fermé) et f établit une bijection de I sur J.

Preuve:
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, J est un intervalle. f est strictement monotone donc f injective. Donc f établit une bijection de I sur J.

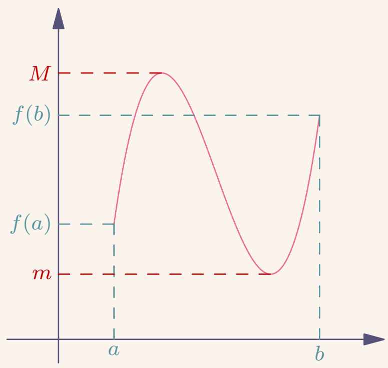
Cas 1 $I = [a, b]$ et f croissante
$\forall x \in I, a \leqslant x \leqslant b$
donc $\forall x \in I, f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$
donc $J \subset [f(a), f(b)]$
Or, $[f(a), f(b)] \subset J$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires
Donc $J = [f(a), f(b)]$

Les autres cas se démontrent de la même façon. □

Théorème: Soit f continue sur un segment $[a, b]$. Alors, f est bornée et atteint ses bornes, i.e.

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, f([a, b]) = [m, M]$$

⚠ On peut avoir $m \neq f(a)$ et $M \neq f(b)$



Preuve:
On suppose que f n'est pas majorée :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in [a, b], f(x) \geqslant M$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b], f(x_n) \geqslant n$$

Donc, $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$
La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée apr a et majorée par b donc bornée.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})_{\in\mathbb{N}}$ converge. On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}$. On a bien $\ell \in [a,b]$ et $f(\ell) = \lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right)$ par continuité de f.
Or, $\left(f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(f(x_n))$ donc $f\left(x_{\varphi(n)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$: une contradiction
Donc f est majorée et on pose

$$M = \sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$$

On prouve de même que f est minorée. On pose donc

$$m = \inf_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$$

Soit $(y_n) \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ telle que $f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$.
(y_n) est bornée donc il existe une sous-suite $\left(y_{\psi(n)}\right)$ de (y_n) convergente. On pose $y = \lim\limits_{n\to+\infty} y_{\psi(n)} \in [a,b]$
Comme f continue sur y,

$$f(y) = \lim_{n\to+\infty} f\left(y_{\psi(n)}\right)$$

Or, $\left(f\left(y_{\psi(n)}\right)\right)$ est une sous-suite de $(f(y_n))$ donc

$$M = \lim_{n\to+\infty} f\left(y_{\psi(n)}\right)$$

Par unicité de la limite, $M = f(y)$
Donc, $M = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$. De même, $m \in f([a,b])$

Enfin, en posant $\begin{cases} M = f(y) & \text{avec } y \in [a,b] \\ m = f(z) & \text{avec } z \in [a,b] \end{cases}$, on obtient

$$[m,M] = [f(z), f(y)] \underbrace{\subset}_{\text{théorème des valeurs intermédiaires}} f([a,b]) \underbrace{\subset}_{\substack{m \text{ minimum} \\ M \text{ maximum}}} [m,M]$$

donc $f([a,b]) = [m,M]$ $\square$

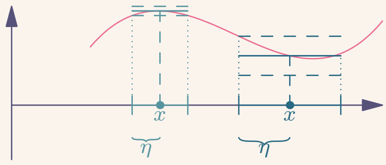
Deuxième partie

Continuité uniforme

Remarque:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue,

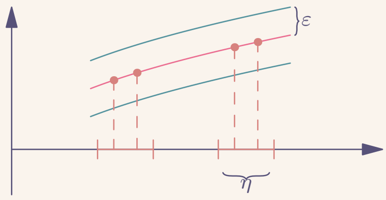
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in]x-\eta, x+\eta[, |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Ici, η dépend de ε et de x



Dans certaines situations, il serait préférable d'avoir

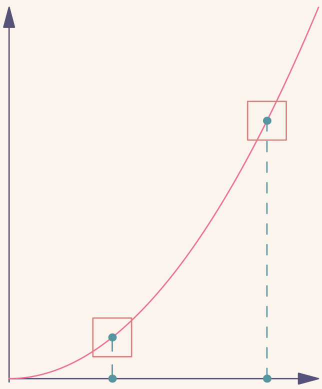
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x-y| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$



Lemme: Soit f uniformément continue sur un intervalle I. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments dans I telles que $x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(f\left(x_n\right) - f\left(y_n\right)\right) = 0$ □

Exemple:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$



On pose $\forall n \in \mathbb{N}_*, \begin{cases} x_n = n \\ y_n = n + \dfrac{1}{n} \end{cases}$. On a bien $\forall n \in \mathbb{N}_*, x_n - y_n = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, {x_n}^2 - {y_n}^2 = n^2 - n^2 - \frac{1}{n^2} - 2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -2 \neq O$$

Donc, f n'est pas uniformément continue.

Théorème (Théorème de Heine)**:** Soit f une function continue sur $[a,b]$. Alors, f est uniformément continue sur $[a,b]$.

Preuve:
On suppose f continue sur $[a,b]$ mais pas uniformément continue.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x,y) \in [a,b]^2 \text{ avec } |x-y| \leqslant \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$ comme ci-dessus. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (x_n, y_n) \in [a,b]^2 \text{ avec } \left| x_n - y_n \leqslant \frac{1}{n+1} \right| \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$$

(x_n) est bornée donc il existe une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ de (x_n) convergente. On note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} \in [a,b]$ $\left(y_{\varphi(n)}\right)$ est bornée, $\left(y_{\varphi(n)}\right)$ a une sous-suite $\left(y_{\varphi(\psi(n))}\right)$ convergente. On pose $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} y_{\varphi(\psi(n))}$. $\left(x_{\varphi(\psi(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre sous-suite de $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ donc $x_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| x_{\varphi(\psi(n))} - y_{\varphi(\psi(n))} \right| \leqslant \frac{1}{\varphi(\psi(n)) + 1}$$

On a vu que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(\psi(n)) \geqslant n$$

car $\varphi \circ \psi$ est strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Donc, $x_{\varphi(\psi(n))} - y_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
On en déduit que $\ell - \ell' = 0$. De plus

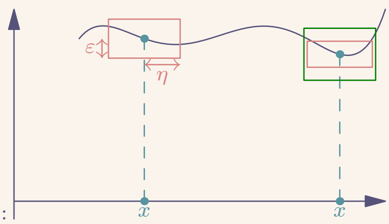
$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| f\left(x_{\varphi(\psi(n))}\right) - f\left(x_{\varphi(\psi(n))}\right) \right| > \varepsilon$$

En passant à la limite,

$$0 = |f(\ell) - f(\ell)| > \varepsilon > 0$$

car f continue en ℓ
On a obtenu une contradiction. $\lightning$ $\square$

Remarque:



$$\begin{cases} \eta > 0 \\ \varepsilon > 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} |x-y| \leqslant \eta \\ |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

Définition: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle et $k \in \mathbb{R}$. On dit que f est <u>k-lipschitzienne</u> si

$$\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x-y|$$

On dit que f est <u>lipschitzienne</u> s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que f soit k-lipschitzienne.

Proposition: Soit f une fonction lipschitzienne sur I. Alors, f est uniformément continue sur I donc continue sur I.

Preuve:
Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x-y|$$
Soit $\varepsilon > 0$.
Si $k = 0$ alors f est constante donc uniformément continue.
On suppose $k \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\underbrace{\eta = \frac{\varepsilon}{k}}_{\text{ne dépend pas de } x} > 0$ car $k > 0$.
Soit $(x,y) \in I^2$. On suppose $|x - y \leqslant \eta|$. Alors,
$$|f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x-y| \leqslant k\eta = \varepsilon$$
$\square$

Exemple:
$x \mapsto |x|$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, ||x| - |y|| \leqslant |x-y|$$
(inégalité triangulaire)

Théorème: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ vérifiant
$$\forall x \in I, \left|f'(x)\right| \leqslant M$$
Alors
$$\forall (a,b) \in I^2, |f(a) - f(b)| \leqslant M\,|a-b|$$
donc f est M-lipschitzienne.

Corollaire: Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors f est lipschitzienne.

Preuve:
f' est continue sur un segment donc bornée. $\square$

Exemple:
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$
$$\forall x > 0, \left|f'(x)\right| = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$$
Par contre,
$$\forall x \geqslant 1, \left|f'(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}$$
Donc f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[1, +\infty[$ donc uniformément continue sur $[1, +\infty[$.
f est continue sur $[0,1]$ donc uniformément continue sur $[0,1]$ (théorème de Heine).

Soit $\varepsilon > 0$. Soient $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}_*^+$ tels que

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in [0,1]^2, |x-y| \leqslant \eta_1 \implies \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \forall (x,y) \in [1,+\infty[^2, |x-y| \leqslant \eta_2 \implies \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

On pose $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Soient $(x,y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$. On suppose $|x-y| \leqslant \eta$

Cas 1 $\begin{cases} x \leqslant 1 \\ y \leqslant 1 \end{cases}$

Alors, $|x-y| \leqslant \eta \leqslant \eta_1$ donc $\left|\sqrt{x}-\sqrt{y} \leqslant \varepsilon_2\right| \leqslant \varepsilon$

Cas 2 $\begin{cases} x \geqslant 1 \\ y \geqslant 1 \end{cases}$

Alors, $|x-y| \leqslant \eta \leqslant \eta_2$ donc $\left|\sqrt{x}-\sqrt{y} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon\right|$

Cas 3 $x \leqslant 1 \leqslant y$

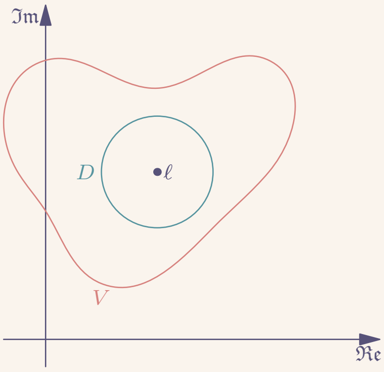
$$\begin{aligned} \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| &= \left|\sqrt{x}-\sqrt{1}+\sqrt{1}-\sqrt{y}\right| \\ &\leqslant \left|\sqrt{x}-\sqrt{1}\right| + \left|\sqrt{y}-\sqrt{1}\right| \end{aligned}$$

$$|x-1| \leqslant |x-y| \leqslant \eta \leqslant \eta_1 \text{ donc } \left|\sqrt{x}-\sqrt{1}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
$$|y-1| \leqslant |x-y| \leqslant \eta \leqslant \eta_2 \text{ donc } \left|\sqrt{y}-\sqrt{1}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc $\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Troisième partie

Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$



Définition:

V est un <u>voisinage</u> de ℓ s'il existe $r > 0$ tel que $V \supset D(\ell, r)$
où $D(l, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \ell| < r\}$

Proposition: Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$, $\ell \in \mathbb{C}$.

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathfrak{Re}(\ell) \\ \mathfrak{Im}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathfrak{Im}(\ell) \end{cases}$$

□

Remarque (Rappel):
On dit que : $I \to \mathbb{C}$ est <u>bornée</u> s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, |f(x)| \leqslant M$$

Quatrième partie

Annexe

Théorème: *Théorème 2.11*
$f : I \to J$ bijective monotone avec I et J deux intervalles.
Alors, f^{-1} est continue (et f aussi)

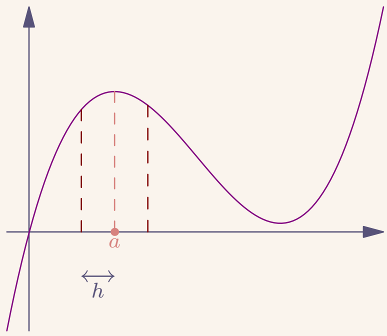
Preuve:
f monotone donc $f(I) = J$
donc f continue (d'après 2.10).
f^{-1} monotone, $f^{-1}(J) = I$
donc f^{-1} est continue □

Définition: Un homéomorphisme est une application bijective, continue dont la réciproque est continue.

Remarque:
Preuve du programme de colle

Preuve:

$$\exists \eta > 0, \forall h \in] - \eta, +\eta[, f(a) \geqslant f(a+h)$$



$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leqslant 0$$
$$= \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geqslant 0$$

Donc, $f(a) = 0$ □