TD 13 Systèmes linéaires et matrices

Exercice 1: ★

Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

(1) Calculer A^2, A^3, A^4.

(2) Proposer une formule pour A^n, puis démontrer cette formule par récurrence sur n.

Exercice 2: ★★

Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$. Calculer J^4 et en déduire que J est inversible.

Exercice 3: ★★

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(2) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, M^n, avec $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4: ★★

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ définie par $a_{i,i} = 0$ et $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$. Montrer que A est inversible et calculer son inverse. On pourra calculer $(A + I_n)^2$.

Exercice 5: ★★★

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$. On suppose que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible. (On pourra raisonner par l'absurde et considérer $X \in \mathcal{M}_{n,1}(K) - \{0\}$ tel que $AX = 0$).

Exercice 6: ★★

Résoudre

$$\begin{cases} x + y - 2z + t + 3u &= a \\ 2x - y + 2z + 2t + 6u &= b \\ 3x + 2y - 4z - 3t - 9u &= c \end{cases}$$

Exercice 7: ★

Calculer lorsque c'est possible les produits matriciels suivants :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 8 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -5 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 8: ★★

Résoudre, suivant les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les systèmes suivants.

$$\begin{cases} x + (m+1)y & = m+2 \\ mx + (m+4)y & = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} mx + (m-1)y & = m+2 \\ (m+1)x - my & = 5m+3 \end{cases}$$

Exercice 9: ★★★

Soient a, b, c trois complexes deux à deux distincts. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + ay - a^2 z = a^4 \\ x + by - b^2 z = b^4 \\ x + cy - c^2 z = c^4. \end{cases}$$

Exercice 10: ★★★

Montrer que le système homogène

$$\begin{cases} x = by + cz + dt \\ y = cz + dt + ax \\ z = dt + ax + by \\ t = ax + by + cz \end{cases}$$

admet des solutions non nulles si et seulement si les coefficients a, b, c, d vérifient la relation

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} + \frac{d}{d+1} = 1.$$

Exercice 11: ★★

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2. \end{cases}$$

Exercice 12: ★

Calculer le rang des matrices suivantes :

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad (3)\quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \qquad (4)\quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(5)\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad (8)\quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$