Chapitre 13

Ly
calcul

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 28 mars 2022

Table des matières

Exemple:

$$(S_1):\begin{cases} \overbrace{\boxed{x}}^{\text{pivot}} & +y & +z & -t & =1\\ x & +2y & +3z & +t & =0\\ x & & +z & =2 & \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\Longleftrightarrow}\begin{cases} \boxed{x} & +y & +z & -t & =1\\ & y & +2z & +2t=-1 & \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_1\leftarrow L_1-L_2\\ L_3\leftarrow L_3+L_2}}{\Longleftrightarrow}\begin{cases} \boxed{x} & & -z & -3t & =2\\ & \boxed{y} & +2z & +2t & =-1\\ & & 2z & +3t & =0\end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_1\leftarrow L_1+L_3\\ L_2\leftarrow L_2+\frac{2}{3}L_3}}{\Longleftrightarrow}\begin{cases} \boxed{x}+z=2\\ \boxed{y}+\dfrac{2}{3}z=-1\\ \boxed{3t}+2z=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=2-z\\ y--1-\dfrac{2}{3}z\\ t=-\dfrac{2}{3}z\end{cases}$$

L'ensemble des solutions est

$$\left\{\left(2-z,-1-\frac{2}{3}z,z,-\frac{2}{3}z\right)\mid z\in\mathbb{K}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
& \begin{cases} x+y+z-t=1 \\ x+2y+3z+t=0 \\ x+\boxed{z}=2 \end{cases} \\
\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3}}{\iff} & \begin{cases} \boxed{y}-t=-1 \\ -2x+2y+t=-6 \\ x+\boxed{z}=2 \end{cases} \\
\underset{L_2 \leftarrow \frac{L_2-2L_1}{-2}}{\iff} & \begin{cases} \boxed{y}-t=-1 \\ \boxed{x}-\frac{3}{2}t=2 \\ x+\boxed{z}=2 \end{cases} \\
\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} & \begin{cases} \boxed{y}-t=-1 \\ \boxed{x}-\frac{3}{2}t=2 \\ \boxed{z}+\frac{3}{2}t=0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} y=-1+t \\ x=2+\frac{3}{2}t \\ z=-\frac{3}{2}t \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{S} &= \left\{(2+\frac{3}{2}t,-1+t,-\frac{3}{2}t,t \mid t \in \mathbb{K}\right\} \\
&= \{\underbrace{(2,-1,0,0)}_{A} + t\underbrace{\left(\frac{3}{2},1,-\frac{3}{2},1\right)}_{u} \mid t \in \mathbb{K}\}
\end{aligned}
$$

Exemple:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ x-y-z=3 \\ y+3z=1 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{L_2-L_1}{-2} \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4-L_1}}{\iff} \begin{cases} \boxed{x}+y+z=0 \\ \boxed{y}=\frac{1}{2} \\ -3y-z=2 \\ -2y-2z=3 \\ y+3z=1 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1-L_2 \\ L_3 \leftarrow -(L_3-3L_2) \\ L_4 \leftarrow L_4+3L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5-L_2}}{\iff} \begin{cases} \boxed{x}+z=\frac{1}{2} \\ \boxed{y}=-\frac{1}{2} \\ \boxed{z}=-\frac{1}{2} \\ -2z=2 \\ 3z=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1-L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4+2L_3 \\ L_5 \leftarrow L_5-3L_3}}{\iff} \begin{cases} \boxed{x}=1 \\ \boxed{y}=-\frac{1}{2} \\ \boxed{z}=-\frac{1}{2} \\ \boxed{\begin{matrix} 0=1 \\ 0=3 \end{matrix}} \text{ incompatibilité} \end{cases}$$

Il n'y a pas de solution !

Exemple:

$$(S_2):\begin{cases} \boxed{x}+y-z=1 \\ y+z=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3-L_1}{\iff} (S_2'):\begin{cases} \boxed{x}+y-z=1 \\ \boxed{y}+z=0 \\ y+z=-1 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1-L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_2}}{\iff} \begin{cases} \boxed{x}-2z=1 \\ \boxed{y}+z=0 \\ \boxed{0=-1} \end{cases}$$

Exemple:

$$(S_1) \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$
$$\iff AX = B$$

$$(S_2) \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(S_2') \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A'} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A'}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \, \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \, \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K}) \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
A &\underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_1}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \end{pmatrix} \\
&\underset{\substack{C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\ C_3 \leftarrow \frac{C_3 - C_2}{2}}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} \\
&\underset{\substack{C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} \\
&\underset{C_2 \leftrightarrow C_3}{\sim} I_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}
$$

$$
I_3 = A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B}
$$

$$
A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K}) \text{ et } A^{-1} = I_3 \times B
$$

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_1}{\sim} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\substack{C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\ C_3 \leftarrow \frac{C_3 + C_2}{2}}}{\sim} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
\underset{\substack{C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3}}{\sim} &\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
\underset{C_2 \leftrightarrow C_3}{\sim} &\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{A^{-1}}
\end{aligned}
$$

Remarque (Résumé):

— Méthode du pivot : opérations sur les lignes :

1. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ($\lambda \in \mathbb{K}$)
2. $L_i \leftarrow \mu L_i$ ($\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$)
3. $L_i \leftrightarrow L_j$

En appliquant la méthode du pivot on obtient

$$
(S) \iff \begin{cases} x_{i_1} & = \ell_1(x_{j_1}, \dots, x_{j_n - r}) \\ x_{i_2} & = \ell_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_n - r}) \\ \vdots & \vdots \\ x_{i_r} & = \ell_r(x_{j_1}, \dots, x_{j_n - r}) \\ 0 & = * \end{cases}
$$

Les inconnues $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$ sont les <u>inconnues principales</u>, les autres sont appelées <u>paramètre</u>.
On peut supprimer les équations $0 = 0$. S'il y a une équation $0 = \lambda$ avec $\lambda \neq 0$, il n'y a pas de solution : le système est <u>incompatible</u>.
Les inconnues principales dépendent des choix de pivots !

— Représentation matricielle

$$
(S) \iff AX = B
$$

où A est la <u>matrice du système</u>, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et B est le <u>second membre</u>

(S) a n équations et p inconnues donc A a n lignes et p colonnes.
La matrice $(A \mid B)$ est la matrice augmentée du système.

— Faire un opération L sur les lignes d'une matrice M revient à multiplier M à gauche par une matrice R où R est obtenue en appliquant L sur I_n.
— La méthode du pivot matriciel par lignes :

EXEMPLE:
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & \boxed{1} & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 5 & \boxed{1} & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -3 & -4 \\ -3 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 5 & \boxed{1} & 3 & 4 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ -3 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & -2 & -\frac{8}{3} \\ \boxed{1} & 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 1 & -2 & -8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matrice échelonnée réduite par lignes}}$$

Définition (Rang d'une matrice)**:** Soit M une matrice et R la matrice échelonnée réduite par lignes associée à M. Le nombre de lignes non nulles de R (le nombre de pivots) est appelée rang de M.
Soit S un système de matrice augmentée $(A \mid B)$. Le rang de S est le rang de la matrice A.
Le rang est noté rg.

Proposition (Interprétation)**:**
— Soit S un système de n équations, p inconnues de rang r.
r est le nombre d'inconnues principales, il y a $p - r$ paramètres.
— Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r.
r est le nombre de lignes indépendantes : il y a $n - r$ lignes combinaisons linéaires des r lignes indépendantes.

Corollaire: Soit S un système de n équations, p inconnues de rang n. Alors S a au moins une solution.
Si $n = p$ alors S a exactement une solution.
Si $p > n$, il y a une infinité de solutions.

$\square$

Définition: Soit S un système à n équations, n inconnues et de rang n. On dit que S est un système de Cramer (il a une unique solution)

Proposition: Soit S un système de n équations, p inconnues de rang r.
- Si $r < n$ alors le système peut-être incompatible : il y a $n - r$ équations de la forme $0 = *$ après la méthode du pivot.
- Si $r < p$ alors il y a $p - r$ paramètres : si le système n'est pas incompatible, il y aura une infinité de solutions.

$\square$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & \boxed{1} & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2}}{\sim} & \begin{pmatrix} -9 & 0 & -1 \\ 5 & \boxed{1} & 2 \\ 4 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \\
\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{\sim} & \begin{pmatrix} \boxed{-5} & 0 & 0 \\ 5 & \boxed{1} & 2 \\ 4 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \\
\underset{L_1 \leftarrow -L_1/5}{\sim} & \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 5 & \boxed{1} & 2 \\ 4 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \\
\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3}}{\sim} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exemple:

$$(S) : \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z + 2t = 0 \\ 2y - t = 1 \\ 2x + 2z + 3t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{x} + y + z + t = 1 \\ x - y + z + 2t = 0 \\ 2y - t = 1 \\ 2x + 2z + 3t = 1 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}}{\iff} \begin{cases} \boxed{x} + y + z + t = 1 \\ -2y + \boxed{t} = -1 \\ 2y - t = 1 \\ -2y + t = -1 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2}}{\iff} \boxed{\begin{cases} \boxed{x} + y + z + t = 1 \\ -2y + \boxed{t} = -1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}} \ \underline{\text{Système triangulaire}}$$

$$\iff \begin{cases} t = -1 + 2y \\ x = 2 - 3y - z \end{cases}$$

La matrice du système triangulaire est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elle n'est pas échelonnée réduite par lignes !

Proposition: Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et C une opération élémentaire sur les colonnes de A. On pose A' la matrice obtenue en appliquant C sur les colonnes de A.

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A')$$

□

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ \boxed{1} & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 2 \\ 5 & -4 & -3 \\ \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 0 \\ 5 & -4 & \boxed{5} \\ \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\operatorname{rg}(A) = 3$

Exemple:

$$\operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$$

> **Proposition:** Le rang d'une matrice est aussi le nombre de colonnes indépendantes. □

Définition: Une <u>matrice triangulaire supérieure</u> est une matrice carrée avec des coefficients nuls sous sa diagonale :

$$T = \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

diagonale

et <u>triangulaire inférieure</u> si les coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls :

$$T = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Un <u>système triangulaire</u> est de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1p}x_p & = & b_1 & +\dots \\ & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2p}x_p & = & b_2 & +\dots \\ & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & a_{pp}x_p & = & b_p & +\dots \\ & & & 0 & = & \dots & \end{cases}$$

Remarque:

$$(S) \iff \begin{cases} AX = B \\ X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}), B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \end{cases}$$

On pose

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

On cherche $\varphi^{-1}(\{B\})$

On sait que
- $(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe
- $(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), +)$ aussi

Soient $X, Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$

$$\varphi(X+Y) = A(X+Y) = AX + AY = \varphi(X) + \varphi(Y)$$

Donc φ est un morphisme de groupes.
On peut résoudre (S) de la façon suivante :

— On cherche $X_0 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $\varphi(X_0) = B$
— On résout $\varphi(X) = 0$ ($X \in \mathrm{Ker}(\varphi)$)

C'est le système homogène associé :

$$\varphi(X) = B \iff \exists H \in \mathrm{Ker}(\varphi), X = X_0 + H$$

Proposition:

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$
$$B = (b_{k,\ell})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant p \\ 1 \leqslant \ell \leqslant q}} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

$$AB = (c_{i,\ell})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant \ell \leqslant q}} \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$
$$c_{i,\ell} = \sum_{j=1}^{n} = a_{i,j} b_{j,\ell}$$