

CHAPITRE 17

Dimension finie

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 28 mars 2022

Définition: Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie si E a au moins une famille génératrice finie. On dit que E est de dimension infinie sinon.

Théorème (Théorème de la base extraite): Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel non nul de dimension finie. Soit \mathcal{G} une famille génératrice finie de E . Alors, il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$. ■

Corollaire: Tout espace de dimension finie a une base. □

Théorème (Théorème de la base incomplète): Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, \mathcal{G} une famille génératrice finie de E . \mathcal{L} une famille libre de E . Alors, il existe une base \mathcal{B} de E telle que

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{B} \setminus \mathcal{L} \subset \mathcal{G}$$

■

Théorème: Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E ont le même cardinal. ■

Lemme: Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E telles que $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$. Alors, $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$. ■

Lemme (Lemme d'échange): Soient \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 deux bases de E et $u \in \mathcal{B}_1 \setminus \mathcal{B}_2$. Alors, il existe $v \in \mathcal{B}_2$ tel que $(\mathcal{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ soit une base de E . ■
■

Définition: Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Le cardinal commun à toutes les bases de E est appelé dimension de E est notée $\dim(E)$ ou $\dim_{\mathbb{K}}(E)$
C'est donc aussi le nombre de coordonnées de n'importe quel vecteur dans n'importe quelle base.

Corollaire: Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, \mathcal{L} une famille libre de E , \mathcal{G} une famille génératrice de E . On note $n = \dim(E)$

1. $\#\mathcal{G} \geq n$ et $(\#\mathcal{G} = n \implies \mathcal{G} \text{ est une base de } E)$
2. $\#\mathcal{L} \leq n$ et $(\#\mathcal{L} = n \implies \mathcal{L} \text{ est une base de } E)$

Corollaire: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de dimension infinie. $\forall i \in \mathbb{N}, e_i : x \mapsto x^i$
 $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Proposition: Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. Alors $E \times F$ est de dimension finie et $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$

REMARQUE (Convention):

$$\dim(\{0_E\}) = 0$$

Théorème: Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E . Alors, F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$
Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$

Proposition (Formule de Grassmann): Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espace vectoriels de E . Alors,

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Corollaire: Avec les hypothèses précédentes,

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases}$$

Proposition: Soit F un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n . Soit

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F . L'application

$$f : \mathbb{K}^n \longrightarrow F$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

est bijective.

Si \mathbb{K} est infini, \mathbb{K}^n aussi et donc F aussi.

Si $\#\mathbb{K} = p \in \mathbb{N}_*$,

$$\begin{aligned} \#\mathbb{K}^n &= p^n \\ &\parallel \\ \#F & \end{aligned}$$