

TD 23

DÉNOMBREMENT

Exercice 1: ★

En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères. Un bit (*binary digit*) est un élément qui prend la valeur 0 ou 1. Avec 8 bits (un octet), combien de caractères peut-on coder ?

Exercice 2: ★

- (1) Combien y a-t-il de nombres de quatre chiffres (le premier étant non nul) ?
- (2) Parmi ces nombres, combien y en a-t-il constitués de chiffres distincts ?
- (3) Composés d'au moins deux chiffres identiques ?
- (4) Composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7 ?

Exercice 3: ★★

Combien y a-t-il d'anagrammes du mot MATHEMATIQUES ?

Exercice 4: ★★★

On extrait simultanément 5 cartes d'un jeu de 32. Cet ensemble de 5 cartes est appelé une *main*.

- (1) Combien y a-t-il de mains différentes possibles ?
- (2) Combien y a-t-il de mains contenant
 - (a) un carré ?
 - (b) deux paires distinctes ?
 - (c) un full (trois cartes de même valeur, et deux autres de même valeurs) ?
 - (d) un brelan (trois cartes de même valeur, sans full ni carré) ?
 - (e) une quinte flush (5 cartes de même couleur se suivant dans l'ordre croissant) ?

Exercice 5: ★★

Dans une classe de 45 élèves, on compte 11 filles et 34 garçons. On doit élire deux délégués.

- (1) Quel est le nombre de possibilités ?
- (2) Quel est le nombre de choix si on impose un garçon et une fille ?
- (3) Quel est le nombre de choix si on impose deux garçons ?

Exercice 6: ★★★

Montrer que, dans le monde, au moins deux pays ont le même nombre de voisins.

Exercice 7: ★★★

Soit E un ensemble fini de cardinal n . Calculer

$$\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \text{Card}(X), \quad \sum_{X, Y \in \mathcal{P}(E)} \text{Card}(X \cap Y), \quad \sum_{X, Y \in \mathcal{P}(E)} \text{Card}(X \cup Y).$$

Exercice 8: ★★★

Soit E un ensemble à n éléments. Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E telles que $X \subset Y$?

Exercice 9: ★★★

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. Quel est le coefficient de $a^2 b^5 c^3$ dans le développement de $(a + b + c)^{10}$? Plus généralement, quel est le coefficient de $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_p^{k_p}$ dans le développement de $(a_1 + a_2 + \dots + a_p)^n$?

Exercice 10: ★★★★★

Soit $n \in \mathbb{N}$. Combien existe-t-il de p -uplets $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ vérifiant $x_1 + x_2 + \dots + x_p = n$?

Exercice 11: ★★★★★

Soient E et F deux ensembles non vides de cardinaux respectifs n et p . On note S_n^p le nombre de surjections de E sur F .

- (1) Calculer S_n^1, S_n^n et S_n^p pour $p > n$.
- (2) On suppose $p \leq n$ et on considère a un élément de E . En observant qu'une surjection de E sur F réalise, ou ne réalise pas, une surjection de $E \setminus \{a\}$ sur F , établir

$$S_n^p = p \left(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p \right).$$

- (3) En déduire que $S_n^p = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$.

Exercice 12: ★★★

- (1) Soient E un ensemble non vide, $\{X, Y\}$ une partition de E . Montrer que $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$, $A \mapsto (A \cap X, A \cap Y)$ est une bijection.

- (2) Soient $p, q, r \in \mathbb{N}$ tels que $r \leq p + q$. Montrer que $\sum_{i+j=r} \binom{p}{i} \binom{q}{j} = \binom{p+q}{r}$.

- (3) En déduire $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercice 13: ★★★

Soient E un ensemble, $a \in E$ et f l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(E) &\rightarrow \mathcal{P}(E) \\ X &\mapsto \begin{cases} X \cup \{a\} & \text{si } a \notin X \\ X \setminus \{a\} & \text{si } a \in X \end{cases} \end{aligned}$$

- (1) Montrer que f est une bijection.
- (2) On suppose désormais que E est fini de cardinal n . On pose $\mathcal{P}_0(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal pair et $\mathcal{P}_1(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal impair.

Montrer que $\mathcal{P}_0(E)$ et $\mathcal{P}_1(E)$ ont même cardinal.

- (3) Calculer ce cardinal et en déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$.

Exercice 14: ★★★★★**1. Les nombres de Bell**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit le n -ième **nombre de Bell** b_n comme étant le nombre de partitions de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Par exemple, $\{1, 2\}$ a deux partitions : $\{\{1, 2\}\}$ et $\{\{1\}, \{2\}\}$, donc $b_2 = 2$.

Par convention, on pose $b_0 = 1$.

(1) En utilisant la définition, déterminer b_3 .

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soit $\{P_1, \dots, P_s\}$ une partition de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ où $n+1 \in P_s$. On note $k = n+1 - \text{Card}(P_s)$. Montrer que $\{P_1, \dots, P_{s-1}\}$ est une partition d'un ensemble à k éléments.

(b) En déduire la formule $b_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k$.

(c) Calculer 'a l'aide cette formule b_3 , b_4 et b_5 .

(d) Démontrer que $b_{n+1} \geq n b_{n-1}$. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $b_{2k} \geq \frac{(2k)!}{2^k k!}$ et $b_{2k+1} \geq 2^k k!$, puis finalement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+1} \geq \sqrt{n!}$.

(e) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} \leq (n+1)b_n$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \leq n!$.

(3) On considère le problème de Cauchy suivant

$$(E) \quad \begin{cases} y' = e^x y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(a) Déterminer explicitement la solution f du problème de Cauchy (E).

(b) Montrer que f est C^∞ sur \mathbb{R} . Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+1)}(x) = e^x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x).$$

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = f^{(n)}(0)$.

(d) Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de f au voisinage de 0 et en déduire les valeurs de b_3 , b_4 et b_5 (on citera avec précision le théorème utilisé).

2. Les nombres de Stirling de deuxième espèce

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Le **nombre de Stirling de deuxième espèce** noté $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ est le nombre de partitions de $\llbracket 1, n \rrbracket$ à k parties exactement. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}.$$

(1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

(a) Soit s une surjection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, k \rrbracket$. On définit la relation \sim_s par

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \sim_s j \iff s(i) = s(j).$$

Montrer que \sim_s est une relation d'équivalence, et qu'elle possède k classes d'équivalence.

(b) Soient s_1 et s_2 deux surjections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, k \rrbracket$. Montrer que s_1 et s_2 définissent la même relation d'équivalence (i.e. pour tout i, j , $i \sim_{s_1} j \iff i \sim_{s_2} j$) si et seulement s'il existe une permutation σ de $\llbracket 1, k \rrbracket$ telle que $s_2 = \sigma \circ s_1$.

(c) En déduire que $k! \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ est égal au nombre de surjections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ à valeurs dans $\llbracket 1, k \rrbracket$.

(d) En déduire les valeurs de $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n-1 \end{smallmatrix} \right\}$ et $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\}$.

- (e) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\} = k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\}$.
- (f) En déduire que $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \geq k^{n-k}$.
- (2) (a) On note pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\gamma_k(x) = x(x-1)\dots(x-k+1)$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^n = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \gamma_k(x).$$

- (b) En déduire que pour tout $a \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\left\{ \begin{matrix} n \\ a \end{matrix} \right\} \leq \frac{a^n}{a!}$.
- (3) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $f_k : x \mapsto \frac{1}{k!}(e^x - 1)^k$.
- (a) En développant avec la formule du binôme, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_k^{(n+1)}(0) = k f_k^{(n)}(0) + f_{k-1}^{(n)}(0)$.
- (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f_k^{(n)}(0) = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$.
- (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

- (d) En déduire finalement que $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k^n}{k!}$.

3. Arithmétique des nombre de Bell et des nombres de Stirling de seconde espèce

Soit p un nombre premier.

- (1) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, p divise $\binom{p}{k}$.
- (2) On admet le “petit théorème de Fermat” :

$$\forall a \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, p \mid (a^{p-1} - 1).$$

À l'aide de ce théorème et de la relation prouvée à la question 2a, montrer que pour tout $a \in \llbracket 2, p-1 \rrbracket$, p divise $\left\{ \begin{matrix} p \\ a \end{matrix} \right\}$.

- (3) On suppose $p > 3$. Montrer que le reste de la division de b_p par p vaut 2, et que le reste de la division de b_{p+1} par p vaut 3.
- (4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note d_n le PGCD de $\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} n \\ 3 \end{matrix} \right\}, \dots, \left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\}$. Soit p un diviseur premier de d_n .
- (a) Montrer que p divise n ou $n-1$.
- (b) On suppose que $p \leq n-1$. En utilisant la relation prouvée à la question 2a, aboutir à une contradiction.
- (c) En déduire que $d_n = 1$ si n n'est pas premier et que $d_n = n$ si n est premier.