Chapitre 14

Continuité

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 28 mars 2022

Table des matières

Première partie

■

Remarque:
De même si $a \in \mathscr{D}$ et si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \leqslant}} f(x)$ existe (resp. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \leqslant}} f(x)$) alors $f(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ \leqslant}} f(x)$ (resp $f(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ \geqslant}} f(x)$)

Définition: Soit f définie sur $\mathscr{D}$ et $a \in \mathscr{D}$. On dit que f est <u>continue en a</u> si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe ou si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x) = f(a)$.

Proposition: f est continue en a si et seulement si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} = f(a)$$

■

Lemme: Soient $a \neq b$ deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$
Alors $\exists V \in \mathscr{V}_a, \exists W \in \mathscr{V}_b, V \cap W = \varnothing$

■

Théorème: Soit f définie sur $\mathscr{D}$ et $a \in \overline{\mathscr{D}}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \forall (x_n) \in \mathscr{D}^{\mathbb{N}} \left(x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a \implies f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \right)$$

■

Proposition: Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_2$
alors

1. $f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1 + \ell_2$
2. $f(x) \times g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell_1 \times \ell_2$
3. Si $\ell_2 \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$

■

Proposition: Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1$ et $g(x) \xrightarrow[x\to \ell_1]{} \ell_2$ alors $g(f(x)) \xrightarrow[x\to a]{}$ ℓ_2

■

Corollaire: Une somme, un produit, une composée de fonctions continues sont continues. □

REMARQUE:
Pour démontrer que $f(x)$ n'a pas de limite quands x tend vers a. On cherche deux suites (x_n) et (y_n) de limite a avec

$$\begin{cases} f(x_n) \longrightarrow \ell_1 \\ f(y_n) \longrightarrow \ell_2 \\ \ell_1 \neq \ell_2 \end{cases}$$

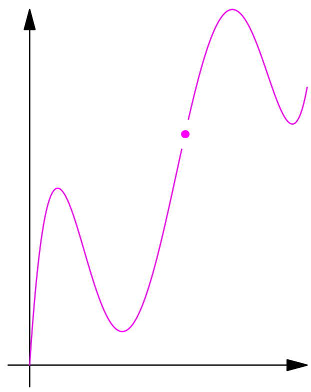
Théorème (Limite monotone)**:** Soit f une fonction croissante sur $]a,b[$ avec $a \neq b \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si f est majorée,
$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in]a,b[, f(x) \leqslant M$$
alors $\displaystyle\lim_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = \sup_{x\in]a,b[} f(x) \in \mathbb{R}$
2. Si f n'est pas majorée,
$$\lim_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = +\infty$$
3. Si f est minorée,
$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in]a,b[, f(x) \leqslant m$$
alors $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \inf_{]a,b[} f \in \mathbb{R}$
4. Si f n'est pas minorée, $\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$

■

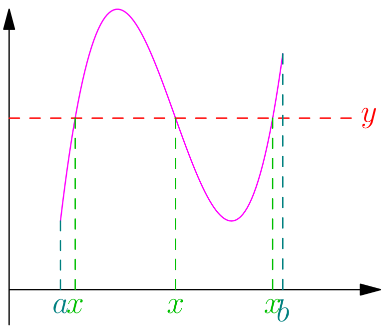
REMARQUE:
Avec les hypothèses ci-dessus, pour tout $x \in]a,b[$,
f est croissante sur $]a,x[$, et majorée par $f(x)$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{t \to x \\ <}} f(t) \in \mathbb{R}$
f est croissante sur $]x,b[$ et minorée par $f(x)$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{t \to x \\ >}} f(t) \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\substack{t \to x \\ <}} f(t) \leqslant f(x) \leqslant \lim_{\substack{t \to x \\ >}} f(t)$$



Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)**:** Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $a < b$ deux éléments de I.

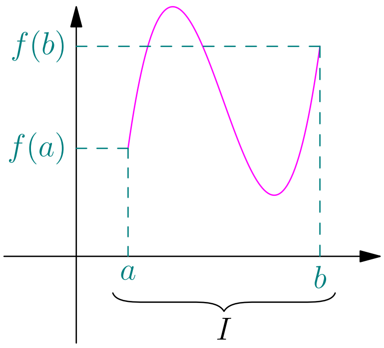
$$\forall y \in [f(a), f(b)] \cup [f(b), f(a)]\,,\ \exists x \in [a, b],\ y = f(x)$$



Lemme: Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $a < b$ deux éléments de I tels que $f(a) \leqslant 0 \leqslant f(b)$. Alors,

$$\exists x \in [a, b], f(x) = 0$$

Corollaire: Soit f continue sur un intervalle I. Alors, $f(I)$ est un intervalle.



■

Corollaire: On peut généraliser le théorème des valeurs intermédiaires au cas où $\begin{cases} a \in \overline{R} \\ b \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases}$ en remplaçant $f(a)$ par $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} a} f(x)$ et $f(b)$ par $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} b} f(x)$

□

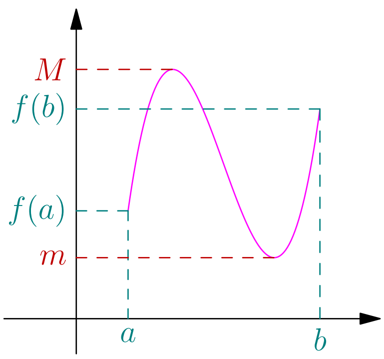
Théorème (Théorème de la bijection)**:** Soit f continue, strictement monotone sur un intervalle I. Alors, $J = f(I)$ est un intervalle de même nature (ouvert, semi-ouvert ou fermé) et f établit une bijection de I sur J.

■

Théorème: Soit f continue sur un segment $[a, b]$. Alors, f est bornée et atteint ses bornes, i.e.

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, f([a, b]) = [m, M]$$

⚠ On peut avoir $m \neq f(a)$ et $M \neq f(b)$



■

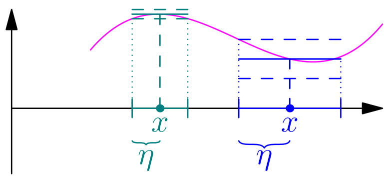
Deuxième partie

Continuité uniforme

REMARQUE:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue,

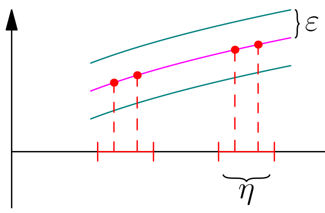
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in]x-\eta, x+\eta[, |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Ici, η dépend de ε et de x



Dans certaines situations, il serait préférable d'avoir

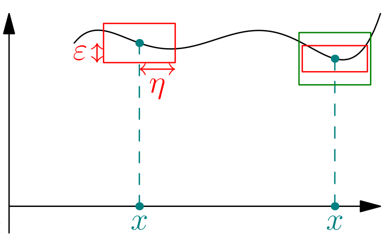
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - y| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$



Lemme: Soit f uniformément continue sur un intervalle I. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments dans I telles que $x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(f\left(x_n\right) - f\left(y_n\right)\right) = 0$ □

Théorème (Théorème de Heine)**:** Soit f une function continue sur $[a, b]$.
Alors, f est uniformément continue sur $[a, b]$.

■

REMARQUE: 

$$\begin{cases} \eta > 0 \\ \varepsilon > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-y| \leqslant \eta \\ |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

Définition: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle et $k \in \mathbb{R}$. On dit que f est k-lipschitzienne si

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|$$

On dit que f est lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que f soit k-lipschitzienne.

Proposition: Soit f une fonction lipschitzienne sur I. Alors, f est uniformément continue sur I donc continue sur I.

■

Théorème: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in I, |f'(x)| \leqslant M$$

Alors

$$\forall (a, b) \in I^2, |f(a) - f(b)| \leqslant M\,|a - b|$$

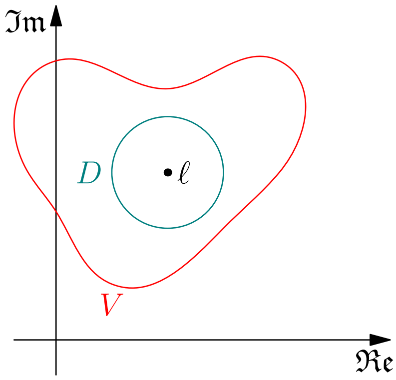
donc f est M-lipschitzienne.

Corollaire: Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors f est lipschitzienne.

■

Troisième partie

Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$



Définition:
V est un voisinage de ℓ s'il existe $r > 0$ tel que $V \supset D(\ell, r)$
où $D(l, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \ell| < r\}$

Proposition: Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$, $\ell \in \mathbb{C}$.

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathfrak{Re}(\ell) \\ \mathfrak{Im}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathfrak{Im}(\ell) \end{cases}$$

$\square$

Remarque (Rappel):
On dit que : $I \to \mathbb{C}$ est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, |f(x)| \leqslant M$$

Quatrième partie

Annexe

Théorème: *Théorème 2.11*
$f : I \to J$ bijective monotone avec I et J deux intervalles.
Alors, f^{-1} est continue (et f aussi)

■

Définition: Un homéomorphisme est une application bijective, continue dont la réciproque est continue.

REMARQUE:
Preuve du programme de colle ■