Chapitre 3

Étude de fonctions

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 28 mars 2022

Table des matières

Étudier une fonction c'est déterminer tous les éléments (tangentes, asymptotes) qui permettent d'obtenir l'allure de la courbe représentative de la fonction.

Exemple:

$$f : x \mapsto \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}$$

1. On détemine le domaine de définition de la fonction f.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.

   $$x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x \in \{-3, 1\} \quad \text{car} \begin{cases} -3 + 1 = -2 = -\dfrac{b}{a} \\ -3 \times 1 = -3 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

   Donc f est définie sur $\mathscr{D}$ avec $\mathscr{D} =]-\infty, -3[\cup]-3, -1[\cup]-1, +\infty[$
2. Asymptotes et limites
   Soit $x \in \mathscr{D}$

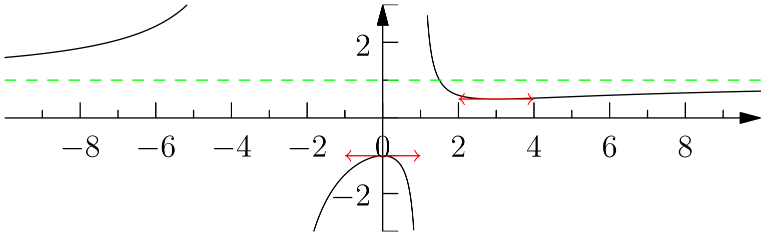
   $$f(x) = \frac{\cancel{x^2}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1$$

   $$\left.\begin{aligned} x^2 - 2x + 3 &\xrightarrow[x \to -3]{} 9 + 6 + 3 = 18 \\ x^2 + 2x - 3 &\xrightarrow[x \to -3]{} 0 \end{aligned}\right\} \text{donc} \begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \underset{<}{\to} -3]{} +\infty \\ f(x) \xrightarrow[x \underset{>}{\to} -3]{} -\infty \end{cases}$$

   $$\left.\begin{aligned} x^2 - 2x + 3 &\xrightarrow[x \to 1]{} 2 \\ x^2 + 2x - 3 &\xrightarrow[x \to 1]{} 0 \end{aligned}\right\} \text{donc} \begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \underset{<}{\to} 1]{} -\infty \\ f(x) \xrightarrow[x \underset{>}{\to} 1]{} +\infty \end{cases}$$
3. f est dérivable sur $\mathscr{D}$ et

   $$\begin{aligned} \forall x \in \mathscr{D}, f'(x) &= \frac{2(x-1)(x^2 + 2x - 3) - 2(x^2 - 2x + 3)(x + 1)}{(x^2 + 2x - 3)^2} \\ &= \frac{2(2x^2 - 6x)}{(x^2 - 2x + 3)^2} \\ &= \frac{4x(x - 4)}{(x^2 - 2x + 3)^2} \end{aligned}$$

x	$+\infty$		-3		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1


2
−2
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8