Chapitre 8

Ensemble relations et lois de compo

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 8 mai 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Théorie naïve des ensembles

Définition: Un ensemble est une collection finie ou infinie d'objets de même nature ou non. L'ordre de ces objets n'a pas d'importance.

Remarque (Notation):
Soit E un ensemble et x un objet de E.
On écrit $x \in E$ ou bien $x \ni E$.

Remarque (⚠ Paradoxe):
On note Ω l'ensemble de tous les ensembles. Alors, $\Omega \in \Omega$.
Ce n'est pas le cas de tous les ensembles :

$$\mathbb{N} \notin \mathbb{N} \text{ car } \mathbb{N} \text{ n'est pas un entier}$$

On distingue donc 2 types d'ensembles :
- ceux qui vérifient $E \notin E$, on dit qu'ils sont ordinaires
- ceux qui vérifient $E \in E$, on dit qu'ils sont extra-ordinaires

On note O l'ensemble de tous les ensembles ordinaires.
- Supposons O ordinaire. Alors, $O \notin O$
  Or, O est ordinaire et donc $O \in O$ ↯
- Supposons O extra-ordinaire.
  Alors $O \in O$ et donc O ordinaire ↯

C'est un paradoxe

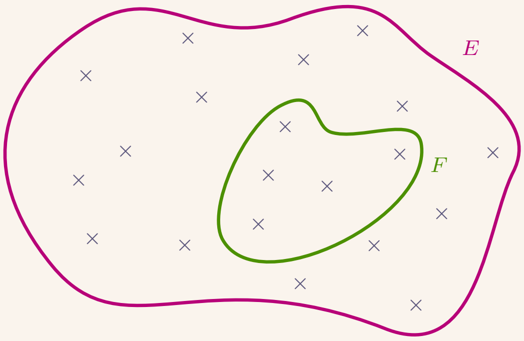
Pour éviter ce type de paradoxe, on a donné une définition axiomatique qui explique quelles sont les opérations permettant de combiner des ensembles pour en faire un autre.

Définition: Soit E un ensemble et F un autre ensemble. On dit que E et F sont égaux (noté $E = F$) si E et F contiennent les mêmes objets.

Définition: L'ensemble vide, noté $\varnothing$ est le seul ensemble à n'avoir aucun élément.

Définition: Soient E et F deux ensembles. On dit que F est inclus dans E, noté $F \subset E$ ou $E \supset F$ si tous les éléments de F sont aussi des éléments de E.

$$\forall x \in F, x \in E$$



Proposition: Pour tout ensemble E, $\varnothing \subset E$

■

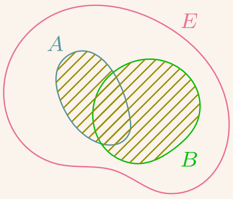
Définition: Soit E un ensemble. On peut former l'ensemble de toutes les parties de E (une partie de E est un ensemble F avec $F \subset E$). On le note $\mathscr{P}(E)$

$$A \in \mathscr{P}(E) \iff A \subset E$$

Définition: Soit E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$

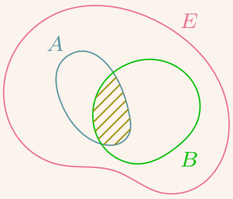
1. La réunion de A et B est

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



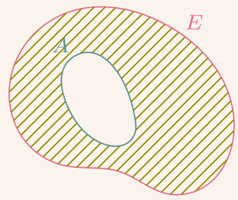
2. L'intersection de A et B est

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$



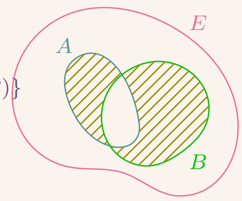
3. Le complémentaire de A dans E est

$$E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\} = C_E A$$



4. La différence symétrique de A et B est

$$\begin{aligned} A \Delta B &= \{x \in E \mid (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \notin A \text{ et } x \in B)\} \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$



Proposition: Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$

1. $A \cap A = A$
2. $B \cap A = A \cap B$
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4. $A \cap \varnothing = \varnothing$
5. $A \cap E = A$
6. $A \cup A = A$
7. $B \cup A = A \cup B$
8. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
9. $A \cup \varnothing = A$
10. $A \cup E = E$
11. $(E \setminus A) \setminus A = E \setminus A$
12. $E \setminus (E \setminus A) = A$
13. $E \setminus \varnothing = E$
14. $E \setminus E = \varnothing$
15. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
16. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
17. $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$
18. $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$

■

Deuxième partie

Applications

Définition: Une <u>application</u> f est la donnée de
- un ensemble E appelé <u>ensemble de départ</u>
- un ensemble F appelé <u>ensemble d'arrivée</u>
- une fonction qui associe à tout élément x de E un unique élément de F noté $f(x)$

L'application est notée

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Définition: Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est
- <u>injective</u> si tout élément de F a au plus un antécédent par f
- <u>bijective</u> si tout élément de F a un unique antécédent par f
- <u>surjective</u> si tout élément de F a au moins un antécédent par f

Définition: Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. L'application notée $g \circ f$ est définie par

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

On dit que c'est la <u>composée</u> de f et g.

Proposition: Soient $f : E \to F, g : F \to G, h : G \to G$. Alors, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

■

Remarque (⚠ Attention):
En général, $g \circ f \neq f \circ g$

Par exemple, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$

Alors, $f \circ g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ et $g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$

donc $f \circ g \neq g \circ f$

Proposition: Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$
1. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective
2. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective
3. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective
4. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective

■

Remarque:

$f : E \longrightarrow F$

$$f \text{ injective} \iff \left(\forall (x,y) \in E^2, f(x) = f(y) \implies x = y\right)$$

Définition: Soit $f : E \to F$ une <u>bijection</u>. L'application $\left\{\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f \end{array}\right.$ est la <u>réciproque</u> de f notée f^{-1}

Définition: L'<u>identité de E</u> est $\mathrm{id}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$

Proposition: Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$

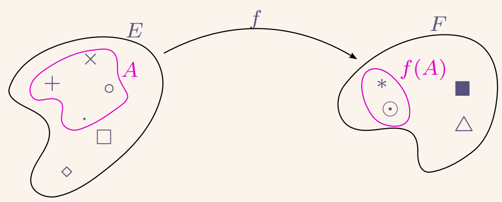
$$\left.\begin{array}{l} f \circ g = \mathrm{id}_F \\ g \circ f = \mathrm{id}_E \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} f \text{ bijective} \\ f^{-1} = g \end{array}\right.$$

■

Définition: Soit $f : E \to F$

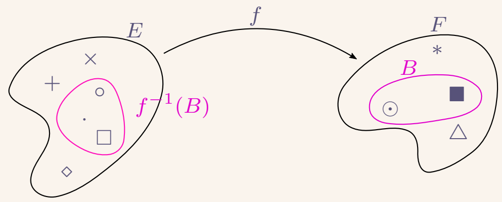
1. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. L'<u>image directe</u> de A par f est

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$



2. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. L'<u>image réciproque</u> de B par f est

$$f^{-1}(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}$$



Remarque:

— $y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)$,
— $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$.

Proposition: Soient $f : E \to F$, $A \in \mathscr{P}(E)$ et $F \in \mathscr{P}(F)$.

1. $f^{-1}\big(f(A)\big) \supset A$,
2. Si f est injective alors $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$,
3. $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$,
4. Si f est surjective, alors $f\big(f^{-1}(B\big) = B$.

■

Proposition: Soit $f : E \to F$ et $(A, B) \in \mathscr{P}(F)^2$. Alors

$$\begin{cases} f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), & (1) \\ f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). & (2) \end{cases}$$

■

Proposition: Soient $f : E \to F$ et $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$.

1. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
2. Si f est injective, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
3. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

■

Remarque (Contre-exemple pour 2.):
Cas d'une application qui n'est pas injective

On pose $A = \mathbb{R}_*^+$, $B = \mathbb{R}_*^-$ et

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

On a $A \cap B = \varnothing$ donc $f(A \cap B) = \varnothing$.

Or, $\left.\begin{aligned} f(A) = \mathbb{R}_*^+ \\ f(B) = \mathbb{R}_*^+ \end{aligned}\right\}$ donc $f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}_*^+$.

On a

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

Définition: Soit $f : E \to F$ et $A \in \mathscr{P}(E)$.

La restriction de f à A est

$$\begin{aligned} f_{|A} : A &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x)a \end{aligned}$$

On dit aussi que f est **un** prolongement de $f_{|A}$.

Remarque (Notation):
L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E.

Troisième partie

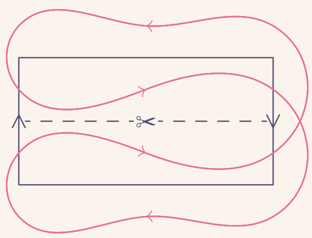
Relations binaires

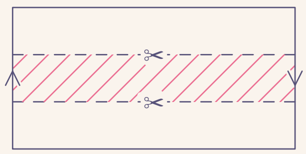
Définition: Soit E un ensemble. Un relation (binaire) sur E est un prédicat définit sur E^2.

Définition: Soit E un ensemble, $\diamond$ une relation sur E. On dit que $\diamond$ est un relation d'équivalence si

1. $\forall x \in E, x \diamond x,$ (réflectivité)
2. $\forall x, y, \in E, x \diamond y \implies y \diamond x,$ (symétrie)
3. $\forall x, y, z \in E, \quad \left.\begin{matrix} x \diamond y \\ y \diamond z \end{matrix}\right\} \implies x \diamond z$ (transitivité)

Remarque:
Le but d'une relation d'équivalence est d'identifier des objets différents.





Définition: Soit E un ensemble et $\diamond$ une relation d'équivalence sur E. Soit $x \in E$. La classe de x (modulo $\diamond$) est

$$\mathscr{Cl}_\diamond(x) = \mathscr{Cl}(x) = \overline{x} = \{y \in E \mid y \diamond x\}.$$

Proposition: Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\diamond$. Alors

$$\forall x, y \in E, x \diamond y \iff \overline{x} = \overline{y}.$$

■

Hors-Programme

Définition: Soit E un ensemble et $\diamond$ une relation d'équivalence.

L'ensemble

$$\{\overline{x} \mid x \in E\} = {}^{E}/_{\diamond}$$

est appelé quotient de E modulo $\diamond$.

Définition: Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E.

On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E si

$$\begin{cases} E = \bigcup_{i\in I} A_i \\ \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing \end{cases}$$

On a donc

$$\forall x \in E, \exists! i \in I, x \in A_i.$$

Proposition: Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\diamond$. Les classes d'équivalences de E modulo $\diamond$ forment une partition de E.

■

Proposition: Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une partition de E telle que

$$\forall i \in I, A_i \neq \varnothing.$$

Alors il existe une relation d'équivalence $\diamond$ telle que pour tout $i \in I$, A_i est une classe d'équivalence modulo $\diamond$.

■

Définition: Soit E un ensemble et $\diamond$. On dit que $\diamond$ est une relation d'ordre sur E si

1. $\diamond$ est réfléctive $(\forall x \in E, x \diamond x)$,
2. $\diamond$ est anti-symétrique :
$$\forall x, y \in E, \quad \left.\begin{matrix} x \diamond y \\ y \diamond x \end{matrix}\right\} \implies x = y,$$
3. $\diamond$ est transitive $\Big(\forall x, y, z \in E, (x \diamond y \text{ et } y \diamond z) \implies x \diamond z\Big)$.

En général, la relation $\diamond$ est notée $\leqslant$ ou $\preccurlyeq$. On dit aussi que $(E, \diamond)$ est un ensemble ordonné.

Définition: Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. Soient $x, y \in E$. On dit que x et y sont comparables si

$$x \leqslant y \text{ ou } y \leqslant x.$$

On dit que $\leqslant$ est un ordre total si tous les éléments de E sont comparables 2 à 2.

Définition: Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, $A \in \mathscr{P}(E)$ et $M \in E$. On dit que A est majorée par M, que M majore A ou que M est un majorant de A si

$$\forall a \in A, a \leqslant M.$$

Soit $m \in E$. On dit que A est minorée par m, que m minore A ou que m est un minorant de A si

$$\forall a \in A, m \leqslant a.$$

Il manque une partie du cours ici

Proposition: Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $A \in \mathscr{P}(E)$. Si A a une borne supérieure, alors celle-ci est unique. On la note $\sup A$.

■

Proposition – Définition: Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $A \in \mathscr{P}(E)$ minorée par $m \in E$. On dit que m est une borne inférieur de A si

$$\begin{cases} \forall a \in A,\ m \leqslant a, \\ \forall x \in E,\ (\forall a \in A,\ x \leqslant a) \implies x \leqslant m. \end{cases}$$

Dans ce cas, m est unique et on la note $\inf(A)$. □

Définition: Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $A \in \mathscr{P}(E)$.

1. Soit $M \in E$. On dit qye M est le plus grand élément de A ou que M est le maximum de A si
$$\begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant M, \\ M \in A. \end{cases}$$
Dans ce cas, on le note $M = \max(A)$.
2. Soit $m \in E$. On dit que m est le plus petit élément de A ou que m est le minimum de A si
$$\forall a \in A,\ a \geqslant m m \in A$$
Dans ce cas, on le note $m = \min(A)$.

Proposition: En cas d'éxistence, il y a unicité du minimum et du maximum.

■

Proposition: Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, $A \in \mathscr{P}(E)$ et $M \in E$.

$$M = \max(A) \iff \begin{cases} M = \sup(A), \\ M \in A; \end{cases}$$

$$M = \min(A) \iff \begin{cases} M = \inf(A), M \in A. \end{cases}$$

■

Définition: Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, $A \in \mathscr{P}(E)$ et $M \in A$.

On dit que M est un élément maximal de A si aucun élément de A n'est strictement supérieur à M :

$$\nexists a \in A, \begin{cases} M \leqslant a, \\ M \neq a. \end{cases}$$

On dit que M est un élément minimal de A si aucun élément de A n'est strictement inférieur à M :

$$\nexists a \in A, \begin{cases} M \geqslant a, \\ M \neq a. \end{cases}$$

Proposition: Avec les notations précédentes, si A a un maximum M alors M est le seul élément maximal de A.

■

Définition: Soient $(E, \leqslant)$ et $(F, \preccurlyeq)$ deux ensembles ordonnés et $f : E \to F$. On dit que

1. f est croissante si
$$\forall (x, y) \in E^2, x \leqslant y \implies f(x) \preccurlyeq f(y);$$
2. f est décroissante si
$$\forall (x, y) \in E^2, x \leqslant y \implies f(x) \succcurlyeq f(y).$$

Définition: Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $A \in \mathscr{P}(E)$. On dit que A est bornée si A est à la fois majorée et minorée.

Définition: Avec les notations précédentes, un extremum de A (sous reserve d'éxistence) est un maximum ou un minimum de A.

Quatrième partie

Lois de composition

Définition: Une loi de composition interne est une application f de $E \times E$ dans E. On la note $x * y$ au lieu de $f(x, y)$ (on est libre de choisir le symbôle).

Définition: Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $\boxtimes$.
On dit que $\boxtimes$ est associative si

$$\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x \boxtimes y) \boxtimes z = x \boxtimes (y \boxtimes z).$$

Dans ce cas, on écrit plutôt $x \boxtimes y \boxtimes z$.

Définition: On dit que $\boxtimes$ est commutative si

$$\forall (x, y) \in E^2, x \boxtimes y = y \boxtimes x.$$

Définition: Soit $e \in E$. On dit que e est un
- élément neutre à gauche si
$$\forall x \in E,\ e \boxtimes x = x;$$
- élément neutre à droite si
$$\forall x \in E,\ x \boxtimes e = x;$$
- élément neutre si
$$\forall x \in E,\ e \boxtimes x = x \boxtimes e = x.$$

Proposition: Sous reserve d'existence, il y a unicité de l'élément neutre.

■

Axiome (axiome du choix)**:** Soit E un ensemble non vide. Il existe $f : \mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\} \to E$ telle que

$$\forall A \in \mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\},\ f(A) \in A.$$

Définition: Soit $f : E \to F$. Le graphe de f est

$$\Big\{ \big(x, f(x)\big) \mid x \in E \Big\} \subset E \times F.$$

Proposition: Soit $G \subset E \times F$. G est le graphe d'une application si et seulement si

$$\forall x \in E, \exists! y \in F, (x, y) \in G.$$

■

Définition: Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. L'indicatrice de A est

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : E &\longrightarrow \{0,1\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

Définition: Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $\boxtimes$ et $x \in E$.

1. On dit que x est simplifiable à gauche si

$$\forall (y,z) \in E^2,\ (x \boxtimes y = x \boxtimes z) \implies x = z.$$

et que x est simplifiable à droite si

$$\forall (y,z) \in E^2,\ (y \boxtimes x = z \boxtimes y) \implies x = z.$$

2. On dit que x est symétrisable à gauche s'il exiiste $y \in E$ tel que $y \boxtimes x = e$ où e est l'élément neutre de $\boxtimes$.
De même, on dit que x est symétrisable à droite s'il existe $y \in E$ tel que $x \boxtimes y = e$.
On dit que x est symétrisable s'il est symétrisable à gauche et à droite, donc s'il existe $y \in E$ tel que $x \boxtimes y = y \boxtimes x = e$.

Proposition: Avec les notations précédentes, si $\boxtimes$ est associative, et x est symétrisable, alors x est simplifiable.

■

Proposition – Définition: On suppose $\boxtimes$ associative. Soit $x \in E$ symétrisable. Alors

$$\exists ! y \in E,\ x \boxtimes y = y \boxtimes x = e.$$

On dit que y est le symétrique de x et on le note $y = x^*$.

■

Remarque:
1. Si la loi est notée $+$, on parle d'opposé plutôt que de symétrique et on le note $-x$ au lieu de x^*. L'élément neutre est noté 0_E.
2. Si la loi est notée $\times$, on parle d'élément inversible au lieu de symétrisable, d'inverse au lieu de symétrique et on note x^{-1} au lieu de x^*. On note le neutre 1_E.

Cinquième partie

Divers

Définition: Soient E et F deux ensembles. Un <u>couple</u> (x, y) est la donnée d'un élément x de E et d'un élément y de F où

$$\forall x, x' \in E,\ \forall y, y' \in F, \qquad (x, y) = (x', y') \iff \begin{cases} x = x', \\ y = y'. \end{cases}$$

On note $E \times F$ l'ensemble des couples ; c'est le <u>produit cartésien</u> de E et F.

Définition: Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont <u>équipotents</u> s'il existe une bijection de E dans F.

Définition: Soit $f : E \to F$. L'<u>image de f</u> est

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \big\{ f(x) \mid x \in E \big\}.$$

Proposition: Soit $f : E \to F$.

$$f \text{ est surjective} \iff f(E) = F.$$

Définition: Une <u>suite de E</u> est une application de $\mathbb{N}$ dans E.

Remarque (Notation):
Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on écrit u_n à la place de $u(n)$.

Définition: Soient E et I deux ensembles. Une <u>famille de E indéxée par I</u> est une application de I dans E.

À la place de $u(i)$ (avec $i \in I$), on écrit u_i.

Définition: Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E. On suppose $I \neq \varnothing$. On pose

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I,\ x \in A_i\}$$

et

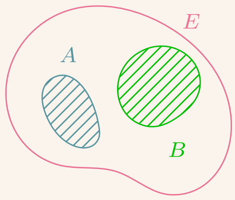
$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I,\ x \in A_i\}.$$

On pose aussi $\displaystyle\bigcup_{i \in \varnothing} A_i = \varnothing$ et $\displaystyle\bigcap_{i \in \varnothing} A_i = E$.

Remarque:
De même que pour les sommes et produits de complexes, on peut intervertir des réunions doubles.

Proposition: Soit E un ensemble, $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$.

$$A \subset (E \setminus B) \iff A \cap B = \varnothing.$$



■

Proposition: Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

□

Remarque (⚠ Attention):
$g \circ f$ peut-être bijective alors que f et g ne le sont pas.