

## CHAPITRE 17

# TD

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 8 mai 2022

---

## Table des matières

### Exercice 4

$$E = \mathbb{R}^4$$

$$a = (0, 1, -1, 2)$$

$$b = (1, 3, 0, 2)$$

$$c = (2, 1, -3, 4)$$

$$d = (0, 0, 2, 1)$$

$$e = (-1, 1, 0, 3)$$

$$F = \text{Vect}(a, b, c) \text{ et } G = \text{Vect}(d, e)$$

Soient  $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ .

$$\begin{aligned} \lambda a + \mu b + \nu c = 0 &\iff \begin{cases} \mu + 2\nu = 0 \\ \lambda + 3\mu + \nu = 0 \\ -\lambda - 3\nu = 0 \\ 2\lambda + 2\mu + 4\nu = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \mu = -2\nu \\ \lambda = -3\nu \\ -8\nu = 0 \\ -6\nu = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \nu = 0 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc  $(a, b, c)$  est libre et donc  $(a, b, c)$  est une base de  $F$ . Donc,  $\boxed{\dim(F) = 3}$

$d, e$  ne sont pas colinéaires donc  $(d, e)$  est une base de  $G$ . Donc,  $\boxed{\dim(G) = 2}$

$$F + G = \text{Vect}(a, b, c, d, e)$$

MÉTHODE 1 Soient  $\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}
\lambda a + \mu b + \nu c + \alpha d + \beta e = 0 &\iff \begin{cases} \boxed{\mu} + 2\nu - \beta = 0 \\ \lambda + 3\mu + \nu + \beta = 0 \\ -\lambda - 3\nu + 2\alpha = 0 \\ 2\lambda + 2\mu + 4\nu + \alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \boxed{\mu} + 2\nu - \beta = 0 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{cases} \begin{cases} \lambda - 5\nu + 4\beta = 0 \\ -\lambda - 3\nu + 2\alpha = 0 \\ 2\lambda + \boxed{\alpha} + 5\beta = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \boxed{\mu} + 2\nu - \beta = 0 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_4 \end{cases} \begin{cases} \boxed{\lambda} - 5\nu + 4\beta = 0 \\ -5\lambda - 3\nu - 10\beta = 0 \\ 2\lambda + \boxed{\alpha} + 5\beta = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \boxed{\mu} + 2\nu - \beta = 0 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{cases} \begin{cases} \boxed{\lambda} - 5\nu + 4\beta = 0 \\ -28\nu + \boxed{10\beta} = 0 \\ \boxed{\alpha} + 10\nu - 3\beta = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \beta = \frac{28}{10}\nu \\ \mu = \dots \\ \lambda = \dots \\ \alpha = \dots \end{cases}
\end{aligned}$$

Avec  $\nu = 1$ , on a  $\lambda a + \mu b + c + \alpha d + \beta e = 0$  et donc  $c = -\lambda a - \mu b - \alpha d - \beta e$  donc  $c \in \text{Vect}(a, b, d, e)$

Avec  $\nu = 0$ , on a  $\lambda a + \mu b + \alpha d + \beta e = 0 \iff \beta = \mu = \lambda = \alpha = 0$  et donc  $(a, b, d, e)$  est libre.

Donc,  $(a, b, d, e)$  est une base de  $F + G$  et donc  $\boxed{\dim(F + G) = 4}$  (donc  $F + G = \mathbb{R}^4$ )  
D'après la formule de Grassmann,

$$\boxed{\dim(F \cap G) = 3 + 2 - 4 = 1}$$

MÉTHODE 2  $\dim(F + G) = \text{rg}(a, b, c, d, e)$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ \boxed{1} & 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(a, b, c, d, e) = \text{rg}(M)$$

$$\begin{aligned}
M &\overset{\sim}{\begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_5 \leftarrow C_5 - C_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & \boxed{1} \\ 2 & -4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\overset{\sim}{\begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - 3C_5 \\ C_3 \leftarrow C_3 + 2C_5 \\ C_4 \leftarrow C_4 + 2C_5 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & -2 & 1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 2 & -7 & 4 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \\
&\overset{\sim}{\begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 + 7C_4 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 4C_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 0 & -10 & \boxed{8} & -2 & -1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 2 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc  $\text{rg}(M) = 4$

$$\begin{array}{l} \dim(F + G) = 4 \\ \dim(F \cap G) = 1 \end{array}$$

MÉTHODE 3  $F + G \subset \mathbb{R}^4$  donc  $\dim(F + G) \leq 4$   
 $F \subset F + G$  donc  $\dim(F + G) \geq 3$   
Donc  $\dim(F + G) \in \{3, 4\}$

On suppose  $\dim(F + G) = 3$ . Alors  $F = F + G$ . Or,  $G \subset F + G = F$   
On va caractériser  $F$  par un système d'équations.  
Soit  $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$$u \in F \iff \exists(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3, u = \lambda a + \mu b + \nu c$$

$$\iff \exists(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3 \begin{cases} x = \mu + 2\nu \\ y = \boxed{\lambda} + 3\mu + \nu \\ z = -\lambda - 3\nu \\ t = 2\lambda + 2\mu + 4\nu \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{array} \iff \exists(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \boxed{\mu} + 2\nu = x \\ \boxed{\lambda} + 3\mu + \nu = y \\ 3\mu - 2\nu = y + z \\ -4\mu + 2\nu = t - 2y \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow \frac{L_4 + 4L_2}{10} \end{array} \iff \exists(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \boxed{\mu} + 2\nu = x \\ \boxed{\lambda} - 5\nu = y - 3x \\ -8\nu = y + z - 3x \\ \boxed{\nu} = \frac{t - 2y + 4x}{10} \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + 8L_4 \iff \exists(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \mu = \dots \\ \lambda = \dots \\ 0 = \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}y + z + \frac{16}{5}t \\ \nu = \dots \end{cases}$$

$$\iff x + 3y + 5z + 16t = 0$$

$$(x, y, z, t) \in F \iff x - 3y + 5z + 16t = 0$$

Or,  $0 - 3 \times 0 + 5 \times 2 + 16 = 26 \neq 0$  donc  $d \notin F$   
Donc  $\dim(F + G) = 4$  et donc  $\dim(F \cap G) = 1$

MÉTHODE 4 On caractérise  $F$  et  $G$  par des équations. On reprend les calculs de la méthode 3.

$$(x, y, z, t) \in F \iff x - 3y + 5z + 16t = 0$$

$$(x, y, z, t) \in G \iff \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (x, y, z, t) = \alpha d + \beta e$$

$$\iff \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} -\beta = x \\ \beta = y \\ 2\alpha = z \\ \alpha + 3\beta = t \end{cases}$$

$$\iff \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}z \\ \beta = y \\ x + y = 0 \\ \frac{1}{2}z + 3y = t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ z + 6y - 2t = 0 \end{cases}$$

$$(x, y, z, t) \in F \cap G \iff \begin{cases} x - 3y + 5z + 16t = 0 \\ \boxed{x} + y = 0 \\ z + 6y - 2t = 0 \end{cases}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \iff \begin{cases} -4y + 5z + 16t = 0 \\ \boxed{x} + y = 0 \\ \boxed{z} + 6y - 2t = 0 \end{cases}$$

$$L_1 \leftarrow \frac{L_1 - 5L_3}{26} \iff \begin{cases} -\frac{34}{26}y + t = 0 \\ \boxed{x} + y = 0 \\ \boxed{z} + 6y - 2t = 0 \end{cases}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \iff \begin{cases} t = \frac{17}{13}y \\ x = -y \\ z = -\frac{44}{13}y \end{cases}$$

$$\iff (x, y, z, t) = \left(-y, y, -\frac{44}{13}y, \frac{17}{13}y\right)$$

$$\iff (x, y, z, t) = \frac{y}{13}(-13, 13, -44, 17)$$

Donc,  $F \cap G = \text{Vect}((-13, 13, -44, 17))$  donc  $\dim(F \cap G) = 1$

Et donc,  $\dim(F + G) = 4$

## Exercice 7

$F$  et  $G$  deux hyperplans

$F \cap G \subset F$  donc  $\dim(F \cap G) \leq n - 1$

$$\dim(F \cap G) = n - 1 \iff F \cap G = F$$

$$\iff F \subset G$$

$$\iff F = G$$

$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G)$$

$$\begin{aligned}
F + G &\subset \mathbb{R}^n \\
\text{donc } \dim(F + G) &\leq n \\
\text{donc } -\dim(F + G) &\geq -n \\
\text{donc } \dim(F \cap G) &\geq 2(n-1) - n = n-2
\end{aligned}$$

Si  $F = G$ , alors  $\dim(F \cap G) = n-1$   
Si  $F \neq G$ , alors  $\dim(F \cap G) = n-2$

## Exercice 9

Soit  $u \in E$ .

$\forall n, u_n = u_r$  où  $r$  est le reste de la division de  $n$  par  $p$

$$\begin{aligned}
(u_n) &= (u_0, u_1, \dots, u_{p-1}, u_0, u_1, \dots, u_{p-1}, u_0, u_1, \dots) \\
&= u_0(1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \\
&\quad + u_1(0, 1, \dots, 0, 0, 1, \dots, 0, 0, 1, \dots) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + u_{p-1}(0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots)
\end{aligned}$$

$$\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, v_k = (v_{k,n}) \text{ où } \forall n, v_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv k \pmod{p} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On vient de montrer que

$$E \subset \text{Vect}(v_0, v_1, \dots, v_{p-1})$$

Or,

$$\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, v_k \in E$$

car

$$\begin{aligned}
\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \forall n \in \mathbb{N}, v_{k,n+p} &= \begin{cases} 1 & \text{si } p+n \equiv k \pmod{p} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv k \pmod{p} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= v_{k,n}
\end{aligned}$$

Donc  $E = \text{Vect}(v_0, \dots, v_{p-1})$

Donc  $\begin{cases} E \text{ sous-espace vectoriel de } \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ \dim(E) \leq p \end{cases}$

Soit  $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, q^{n+p} &= q^n q^p = q^n \\
&\iff q^p = 1 \\
&\iff \exists k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, q = e^{\frac{2ik\pi}{p}}
\end{aligned}$$

On pose

$$\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, w_k = \left( e^{\frac{2ik\pi n}{p}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Montrons que  $(w_0, \dots, w_{p-1})$  est libre.  
Soient  $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ . On suppose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k e^{\frac{2ik\pi n}{p}} = 0$$

On pose

$$P(X) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k X^k \quad \deg(P) \leq p-1$$

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, P\left(e^{\frac{2i\pi n}{p}}\right) = 0$$

donc  $P$  a au moins  $p$  racines :  $1, e^{\frac{2i\pi}{p}}, e^{\frac{4i\pi}{p}}, \dots, e^{\frac{2i(p-1)\pi}{p}}$   
Donc  $P = 0$ , donc  $\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \lambda_k = 0$   
Donc  $(w_0, \dots, w_{p-1})$  est libre donc  $\dim(E) \geq p$   
Donc  $\dim(E) = p$   
Donc  $(w_0, \dots, w_{p-1})$  est une base de  $E$ .

## Exercice 6

Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \in \mathbb{R}$ . On suppose

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 + \lambda_5 f_5 = 0$$

$$\forall x > 0, f(x) = \lambda_1 \ln x + \lambda_2 x + \lambda_3 e^x + \lambda_4 e^{x+3} + \lambda_5 \frac{1}{x} = 0$$

Si  $\lambda_5 \neq 0$ , alors  $f(x) \sim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lambda_5}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \pm\infty \not= 0$

Donc  $\boxed{\lambda_5 = 0}$

Si  $\lambda_1 \neq 0$ , alors  $f(x) \sim_{x \rightarrow 0^+} \lambda_1 \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \pm\infty \not= 0$

Donc  $\boxed{\lambda_1 = 0}$

Si  $\lambda_3 + e^3 \lambda_4 \neq 0$ , alors  $f(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} (\lambda_3 + e^3 \lambda_4) e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \pm\infty$

Donc  $\boxed{\lambda_3 + e^3 \lambda_4 = 0}$

D'où,

$$\forall x > 0, \lambda_2 x = 0$$

donc  $\boxed{\lambda_2 = 0}$

$f_4 = e^3 f_3$  donc  $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$  n'est pas libre  
Mais,  $(f_1, f_2, f_3, f_5)$  est libre ( $\lambda_4 = 0$ )

## Exercice 8

“  $\Leftarrow$  ” Soient  $F, G, U$  tels que

$$F \oplus U = E = G \oplus U$$

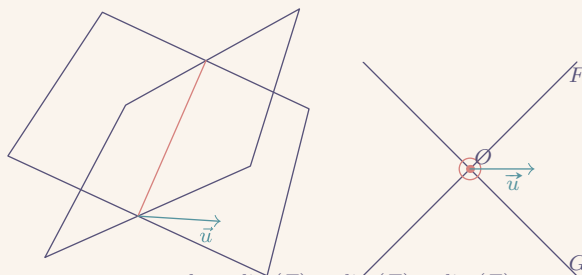
Donc,

$$\dim(F) + \dim(U) = \dim(E)$$

$$\dim(G) + \dim(U) = \dim(E)$$

Donc,  $\dim(F) = \dim(G)$

“  $\Rightarrow$  ”



On raisonne par récurrence sur la  $\text{codim}(F) = \dim(E) - \dim(F)$

— Soient  $F$  et  $G$  deux hyperplans de  $E$

$F \cup G \neq E$  d'après l'exercice classique suivant :

$$F \cup G \text{ sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F$$

Solution de l'exercice :

“  $\Leftarrow$  ”

$$F \subset G \implies F \cup G = G$$

$$G \subset F \implies F \cup G = F$$

“  $\Rightarrow$  ” On suppose  $G \not\subset F$ . Soit  $u \in F$ . Soit  $v \in G \setminus F$ .

$u + v \in F \cup G$  car  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Si  $u + v \in F$ , alors  $v = \underbrace{u + v}_{\in F} - \underbrace{u}_{\in F} \in F$   $\nmid$

Si  $u + v \in G$ , alors  $u = \underbrace{u + v}_{\in G} - \underbrace{v}_{\in G} \in G$   $\nmid$

Donc  $F \subset G$

Soit  $u \in E \setminus (F \cup G)$ .  $u \neq 0$  donc  $\langle u \rangle$  est de dimension 1.  $\langle u \rangle \cap F = \{0\}$  donc  $F \oplus \langle u \rangle = E$

$\langle u \rangle \cap G = \{0\}$  donc  $G \oplus \langle u \rangle = E$

— Soit  $n \in \mathbb{N}_*$  tels que pour tous  $F$  et  $G$  sous-espaces vectoriels de  $E$  de codimension  $n$ ,  $F$  et  $G$  ont un supplémentaire commun.

Soient  $F$  et  $G$  de codimension  $n+1$ . De nouveau,  $F \cup G \neq E$ . Soit  $u \in E \setminus (F \cup G)$ .

$\langle u \rangle \cap F = \{0\}$ . On pose  $F' = F \oplus \langle u \rangle$ .

$\dim(F') = \dim(F) + 1$  donc  $\text{codim}(F') = n$

De même,  $\langle u \rangle \cap G = \{0\}$ . On pose  $G' = G \oplus \langle u \rangle$  donc  $\text{codim}(G') = n$

Soit  $U$  un supplémentaire commun à  $F'$  et  $G'$ . On pose  $U' = \langle u \rangle \oplus U$

$$\begin{aligned} E &= F' \oplus U \\ &= F \oplus \langle u \rangle \oplus U \\ &= F \oplus U' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= G' \oplus U \\ &= G \oplus \langle u \rangle \oplus U \\ &= G \oplus U' \end{aligned}$$



## Exercice 5

1. — On pose  $G = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ . On sait que  $F \oplus G = E$   
Soit  $x \in F \cap G_a$ . On considère  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k$  tel que

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^k \lambda_i (a + e_i) \\ &= \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i \right) a + \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i \end{aligned}$$

D'où,

$$x - \underbrace{\left( \sum_{i=1}^k \lambda_i \right) a}_{\in F} = \underbrace{\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i}_{\in G}$$

Or,  $F \cap G = \{0\}$  Donc  $\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i = 0$

Comme  $(e_1, \dots, e_k)$  est libre,

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \lambda_i = 0$$

Donc,  $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i (a + e_i) = 0$

On a prouvé que  $F \cap G_a = \{0\}$ .

- $(e_1, \dots, e_k)$  est une base de  $G$  donc  $\dim(G) = k$ , donc  $\dim(F) = \dim(E) - k$   
— Soient  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{K}^k$ . On suppose que

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i (a + e_i) = 0$$

D'où,

$$\underbrace{\left( \sum_{i=1}^k \lambda_i \right) a}_{\in F} = - \underbrace{\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i}_{\in G}$$

Donc,

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i \in F \cap G = \{0\}$$

donc

$$\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \lambda_i = 0$$

Donc  $(a + e_1, \dots, a + e_k)$  est libre, c'est donc une base de  $G_a$ , donc

$$\dim(G_a) = k$$

D'où,

$$\dim(F) + \dim(G_a) = \dim(E) - k + k = \dim(E)$$

Ainsi,

$$F \oplus G_a = E$$

2. On suppose  $K$  infini. Dans ce cas,  $F$  contient une infinité de vecteurs.  
Soient  $a, b \in F$  avec  $a \neq b$  et  $a \neq 0$ . Montrons que  $G_a \neq G_b$ .  
Soit  $x \in G_a \cap G_b$  donc

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^k \mu_i (a + e_i) \\ &= \sum_{i=1}^k \lambda_i (b + e_i) \end{aligned}$$

---

D'où,

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^k \mu_i\right) a - \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\right) b}_{\in F} = \underbrace{\sum_{i=1}^k (\lambda_i - \mu_i) e_i}_{\in G}$$

Donc,

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^k \mu_i\right) a = \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\right) b \\ \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0 \end{cases}$$

Donc,

$$a = b \text{ ou } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0 \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \lambda_i = \mu_i$$

Or,  $a \neq b$ , donc  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$  donc  $x \in G$

Si  $G_a = G_b$ , alors

$$G_a = G_a \cap G_b \subset G$$

donc

$$G_a = G$$

Or,

$$\sum_{i=1}^k (a + e_i) \in G_a \setminus G$$

En effet, si  $\sum_{i=1}^k (a + e_i) = y \in G$ , alors

$$\underbrace{ka}_{\in F} = g - \underbrace{\sum_{i=1}^k e_i}_{\in G}$$

donc  $ka = 0$  Or  $l \neq 0$  et  $a \neq 0$ .