CHAPITRE 29

SOUS-ESPACES AFFINES D'UN ESPACE VECTORIEL

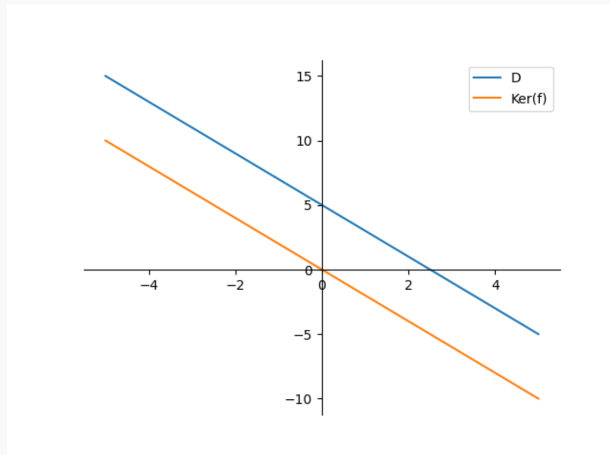
1. Motivation

Rappel 1.1

Résoudre un problème linéaire, c'est résoudre une équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$, le paramètre $y \in F$ étant fixé, et $f \in L(E, F)$. On a vu que l'ensemble des solutions est $S = \{h + x_0 \mid h \in \mathrm{Ker}(f)\}$ où x_0 est une solution particulière du problème. Si $y \neq 0_F$ alors S n'est pas un espace vectoriel.

Exemple 1.2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto 2x + y$. L'application f est linéaire et l'ensemble des solutions de l'équation $f(x, y) = 5$ est $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 5 - 2x\}$. Quand on représente D dans un plan muni d'un repère, on obtient une droite affine, parallèle à $\mathrm{Ker}(f)$.
On voudrait pouvoir généraliser ce vocabulaire à tous les problèmes linéaires : l'ensemble des solutions d'un problème linéaire est un espace affine parallèle au noyau de l'application linéaire.



2. Le plan affine

Pour définir la notion d'espace affine, on va s'inspirer du plan affine tel qu'il a été vu dans les classes précédentes (c'est-à-dire sans en donner de définition). Le plan affine contient des élements appelés *points*. Il n'y a pas de structure algébrique sur l'ensemble des points : ça n'a pas de sens de les additionner par exemple. Par contre, il est possible de *translater* un point selon un *vecteur*. Ces vecteurs sont des éléments d'un plan vectoriel (au sens des espcaes vectoriels.) Les translations vérifient une propriété importante : soient t_u et t_v deux translations suivant les vecteurs u et v respectivement ; alors $t_u \circ t_v = t_{u+v}$.

Une fois ces notions définies, on peut exprimer toutes les notions de géométrie affine usuelles :
— étant donnés deux points A et B, le vecteur $\vec{AB}$ est le seul vecteur u vérifiant $t_u(A) = B$.
— étant donnés deux points A et B, la droite (AB) est l'ensemble $\{t_u(A) \mid u \in \mathrm{Vect}(\vec{AB})\}$.
— Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulemet si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.

3. Espaces affines (Hors-programme)

Définition 3.1

Soit E un ensemble et $\vec{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\varphi : \vec{E} \times E \longrightarrow E$ telle que

(1) $\forall A \in E,\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{E},\ \varphi(\vec{v}, \varphi(\vec{u}, A)) = \varphi(\vec{u} + \vec{v}, A)$

(2) $\forall A, B \in E,\ \exists! \vec{u} \in \vec{E},\ \varphi(\vec{u}, A) = B.$

Alors on dit que $(E, \vec{E}, \varphi)$ est un $\mathbb{K}$-*espace affine* de *direction* $\vec{E}$. On note alors plutôt $\varphi(\vec{u}, A) = A + \vec{u}$. À $\vec{u}$ fixé, l'application $A \in E \mapsto A + \vec{u}$ est appelée *translation* de vecteur $\vec{u}$ et notée $t_{\vec{u}}$. La propriétée (1) devient alors $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$ pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}$.

Les éléments de E sont appelés *points*, ceux de $\vec{E}$ sont appelés *vecteurs*.

Soient deux points A, B de E. D'après (2), il existe un unique vecteur $\vec{u}$ tel que $A + \vec{u} = B$. Ce vecteur est noté $\vec{AB}$.

Notation 3.2

Soit E un espace affine de direction $\vec{E}$. Soient A et B deux points de E. On pose $B - A = \vec{AB}$.

Exemple 3.3

On considère l'ensemble S des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = x$. On a $S = \{x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) + x \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$. On pose $\vec{S} = \text{Vect}(\cos, \sin)$ et

$$\varphi \quad \begin{array}{ccc} \vec{S} \times S & \longrightarrow & S \\ (u, f) & \mapsto & u + f \end{array}$$

(où l'addition $u + f$ est l'addition des fonctions.) Montrons que $(S, \vec{S}, \varphi)$ est un $\mathbb{R}$-espace affine.

(1) Soient $f \in S, u, v \in \vec{S}$. Alors $\varphi(v, \varphi(u, f)) = v + (u + f) = (v + u) + f = \varphi(u + v, f)$.

(2) Soient $f, g \in S$, $u \in \vec{S}$. On a $g = \varphi(u, f) \iff g = u + f \iff u = g - f$.

Définition 3.4

Soit $(E, \vec{E}, \varphi)$ un $\mathbb{K}$-espace affine et $F \subset E$. On dit que F est un sous-espace affine de $(E, \vec{E}, \varphi)$ si $\{\vec{AB} \mid A, B \in F\}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.

Proposition 3.5

Avec les notations et hypothèses précédentes, $(F, \vec{F}, \psi)$ est un $\mathbb{K}$-espace affine où $\vec{F} = \{\vec{AB} \mid A, B \in F\}$ et $\psi = \varphi_{|\vec{F} \times F}$.

Théorème 3.6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On pose $\varphi : (x, y) \in E^2 \mapsto x + y \in E$. Alors (E, E, φ) est un espace affine.

Remarque 3.7

Un espace vectoriel peut être vu comme un espace affine : dans ce cas, ses éléments peuvent être vus à la fois comme des vecteurs et comme des points. La notation + désigne à la fois la somme des vecteurs et la translation, mais heureusement c'est la même chose dans ce cadre. En fait, c'est un fait déjà observé dans les classes précédentes : un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ désigne à la fois les coordonnées d'un point du plan ou d'un vecteur.

4. Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Dans ce paragraphe, on reformule la notion de sous-espace affine dans le cas où l'espace affine ambiant est un espace vectoriel.

Définition 4.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$. On dit que F est un *sous-espace affine* de E si $\vec{F} = \{B - A \mid A, B \in F\}$ est un sous-espace vectoriel de E. On dit alors que $\vec{F}$ est la *direction* de F.

Proposition 4.2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$. F est un sous-espace affine de E si et seulement s'il existe $A \in F$ et un sous-espace vectoriel $\vec{F}$ de E tel que $F = A + \vec{F} = \{A + \vec{u} \mid \vec{u} \in \vec{F}\}$.

Dans ce cas, on a $F = B + \vec{F}$ pour tout $B \in F$.

Corollaire 4.3

L'ensemble des solutions du problème linéaire $f(x) = y$ ($f \in L(E, F), y \in F$) est un sous-espace affine de E de direction $\operatorname{Ker} f$.

Proposition 4.4

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces affines. Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est soit vide, soit un sous-espace affine.

Proposition-Définition 4.5

Soit $A \subset E$. Alors l'intersection de tous les sous-espaces affines de E qui contiennent A est le plus petit sous-espace affine de E contenant A, on l'appelle *le sous-espace affine engendré par* A.

Définition 4.6

Soient F et G deux sous-espaces affines de E. On dit que F est *parallèle à* G si $\vec{F} \subset \vec{G}$.

5. Repère affine

Définition 5.1

Soit F un sous-espace affine de E. Un *repère* de F est la donnée d'un point A de F et d'une base $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in I}$ de $\vec{F}$.

Proposition 5.2

Soit F un sous-espace affine de E, et $\mathscr{R} = (A, e_1, ..., e_p)$ un repère de F. Alors

$$\forall B \in F, \exists!(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ B = A + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i.$$

On dit alors que $(\lambda_1, ..., \lambda_p)$ sont les *coordonnées* de B dans le repère $\mathscr{R}$.