Chapitre 15
Espaces vectoriels

1. Espaces vectoriels

Dans le reste du chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $+$, et d'une loi de composition externe $\cdot$ à opérateurs dans $\mathbb{K}$. On dit que E est un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* s'il vérifie les proriétés suivantes :

(P_1) $(E,+)$ est un groupe aben.

(P_2) Pour tout couple de réels (λ,μ) et tout $x\in E$, on a $\lambda\cdot(\mu\cdot x)=(\lambda\mu)\cdot x$ (pseudo-associativité).

(P_3) Pour tout $x\in E$, $1\cdot x=x$ (pseudo-neutre).

(P_4) Pour tout λ,μ réels et $x\in E$, on a $(\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x$ (pseudo-distributivité à gauche).

(P_5) Pour tout λ réel et $x,y\in E$, on a $\lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y$ (pseudo-distributivité à droite).

Remarque 1.2

Les éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont appelés *vecteurs*, et ceux de $\mathbb{K}$ sont dits *scalaires*.

Exemple 1.3

— Notons $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets de réels. On le munit de l'addition $+$ définie par la relation

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n),$$

et de la multiplication scalaire définie par

$$\lambda\cdot(x_1,\dots,x_n)=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n).$$

Alors $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ est un espace vectoriel.

— Soit D un ensemble quelconque. On note $\mathbb{K}^D$ l'ensemble de toutes les applications f de D à valeurs dans $\mathbb{K}$. On le munit de l'addition $+$ suivante

$$f+g : x\mapsto (f+g)(x)=f(x)+g(x),$$

et de la multiplication scalaire définie par

$$\lambda\cdot f : x\mapsto(\lambda\cdot f)(x)=\lambda f(x).$$

Alors $\mathbb{K}^D$ est un espace vectoriel.

— En particulier, l'ensemble des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel.

— L'ensemble des fonctions polynômiales efficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel.

— L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel.

Remarque 1.4

Dorénavant, on allège les notations en écrivant λx au lieu de $\lambda\cdot x$ pour $\lambda\in\mathbb{K}$ et $x\in E$.

Proposition 1.5: Équations dans un espace vectoriel

Soient $(u, v) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On a

(1) $\lambda u = 0_E \iff \lambda = 0$ ou $u = 0_E$.

(2) $\lambda u = \lambda v \iff \lambda = 0$ ou $u = v$.

(3) $\lambda u = \mu u \iff \lambda = \mu$ ou $u = 0_E$.

Définition 1.6

Un vecteur x de E est *combinaison linéaire* d'une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs s'il existe n scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

2. Sous-espaces vectoriels

Proposition-Définition 2.1

Soient E un espace vectoriel et F un sous-ensemble non vide de E et stable par combinaisons linéaires : si x et y sont deux vecteurs dans F, et λ, μ deux réels, alors $\lambda x + \mu y$ appartient à F. Dans ce cas, F est lui-même un espace vectoriel. On dit que c'est un *sous-espace vectoriel* de E.

Ce résultat est très pratique pour prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel.

Proposition 2.2

Soit F un sous-ensemble de E. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

— $0_E \in F$,

— $\forall x, y \in F$, $x + y \in F$,

— $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in F$, $\lambda x \in F$.

Exemple 2.3

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n variables est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Proposition 2.4

Soit $u_1, \ldots, u_n$ n vecteurs d'un espace vectoriel E. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $(u_1, \ldots, u_n)$ forme un sous-espace vectoriel F de E. On dit alors que F est *engendré* par $u_1, \ldots, u_n$ ou encore que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une *famille génératrice* de F.

Proposition 2.5

Toute intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.

Remarque 2.6

(1) Plus généralement, si $F_1, F_2, \ldots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, alors $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_p$ est un sous-espace vectoriel de E.

(2) L'union de deux sous-espaces vectoriels n'est en général pas un sev de E.

Exemple 2.7

Soient $E = \mathbb{K}^3$, $F = \{(\lambda - \mu, 2\lambda + 4\mu, 3\lambda + 2\mu) \mid \lambda \in \mathbb{K},\ \mu \in \mathbb{K}\}$ et
$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

(1) Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

(2) Caractériser $F \cap G$ par un système d'équations.

Conclusion : pour montrer qu'un ensemble E est un espace vectoriel, on prouve l'un des points suivants :
- E est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu (avec la proposition-définition 2.1 ou la proposition 2.2.)
- E est engendré par une famille de vecteurs d'un espace vectoriel connu (voir chapitre suivant).
- E est l'intersection de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel connu.
- (en dernier recours !!) E vérifie les propriétés de la définition d'un espace vectoriel.

3. Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 3.1

Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels. On définit la *somme* de F et G par

$$F + G = \{f + g \mid f \in F,\ g \in G\}.$$

Proposition 3.2

Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels. La somme $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 3.3

Soit $u_1, \dots, u_n$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E et F le spus-espace de E engendré par $u_1, \dots, u_n$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note D_i l'espace vectoriel engendré par u_i. Alors $F = D_1 + \cdots + D_n$.

Définition 3.4

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme de F et G est *directe* si tout élément de $F + G$ se décompose de façon unique comme somme $f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. On note alors $F \oplus G$ à la place de $F + G$.

Proposition 3.5

Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Définition 3.6

Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E sont dits *supplémentaires* si $E = F \oplus G$.

Remarque 3.7

En d'autres termes, deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires si et seulement si tout vecteur de E se décompose de feçon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

4. Familles génératrices, libres et bases d'un espace vectoriel

4.1. Familles génératrices.

Proposition 4.1: Opérations sur les familles génératrices

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille génératrice de E. Si :

(1) on change l'ordre des vecteurs de la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$,
(2) ou l'on ajoute à la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ un vecteur quelconque de E,
(3) ou l'on remplace l'un des vecteurs e_i par la somme de e_i et d'une combinaison linéaire des autres,
(4) ou l'on remplace l'un des vecteurs e_i par le produit de e_i avec un scalaire non nul,
(5) ou l'on enlève de $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ un de ses vecteurs qui serait lui-même une combinaison linéaire des autres,

alors chacune de ces nouvelles familles est encore une famille génératrice de E.

Exemple 4.2

Montrer que $\{(1;1),(1;-1),(2;3)\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

L'intérêt de disposer d'une famille génératrice finie est qu'elle permet l'introduction de coordonnées. En effet, un vecteur x de E peut alors s'écrire sous la forme $x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$, et on peut utiliser alors les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ comme coordonnées. Le problème est qu'*a priori*, deux n-uplets distincts peuvent correspondre au même vecteur. Les notions de bases et de familles libres vont pallier à ce problème.

4.2. Familles libres. Si on veut qu'à tout vecteur de E corresponde un seul n-uplet (pour avoir des coordonnées), alors il faut que ce soit déjà le cas pour le vecteur nul 0_E, ce qui conduit à la définition suivante.

Définition 4.3: Famille libre

On dit qu'une famille $(v_1, \dots, v_n)$ est *libre* si pour tout n-uplet $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de réels, on a

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

On dit aussi que les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ sont *linéairement indépendants*. Une famille qui n'est pas libre est dite *liée*.

Remarque 4.4

(1) Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille de vecteurs de F un sous-espace vectoriel de E, alors :

$$(e_1, e_2, \dots, e_n) \text{ est une famille libre de } F \iff (e_1, e_2, \dots, e_n) \text{ est une famille libre de } E.$$

Autrement dit, on vérifie qu'une famille est libre sans obligatoirement préciser l'espace sur lequel on travaille.

(2) Une famille libre ne comporte pas le vecteur nul. Donc si une famille comporte le vecteur nul, alors elle est automatiquement liée.

Proposition 4.5

(1) Une famille de vecteurs libre dont on change l'ordre des vecteurs reste une famille libre.
(2) Toute sous famille d'une famille libre est libre.

4.3. Bases.

Définition 4.6: Base

On dit qu'une famille $(v_1, \dots, v_n)$ est une *base* si elle est à la fois génératrice et libre.

Proposition-Définition 4.7: Base canonique

Dans $\mathbb{K}^n$, on considère pour tout i le vecteur e_i dont toutes les composantes sont nulles sauf la i-ème qui vaut 1. Alors la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base. On l'appelle *base canonique* de $\mathbb{K}^n$.

Proposition 4.8

Soient $(v_1, \dots, v_n)$ une base de E. Tout vecteur de E se décompose de façon unique sous la forme $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$.

Exemple 4.9

Trouver une base de $F = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

Remarque 4.10

Un même espace vectoriel admet des bases différentes.
Exemple : si $E = \mathbb{R}^2$ alors $((1; 0), (-1; 1))$ et $((1; 1), (0; 1))$ sont deux bases de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 4.11

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe, $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F et $(e'_1, \dots, e'_q)$ une base de G. Alors $(e_1, \dots, e_p, e'_1, \dots, e'_q)$ est une base de $F \oplus G$. On dit que cette base est *adaptée* à la somme directe.

Proposition 4.12

Soient $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ une famille libre de E. Alors les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\mathrm{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ sont en somme directe.