

TD 22 Fonctions de deux variables

Exercice 1: ★★

Déterminer si les ensembles suivants sont **ouverts** ou fermés.

$$\begin{aligned} \textcolor{blue}{A} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x - 1| < 1\} & B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\} \\ C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1, |y| \leq 1\} & D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\} \\ E &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}\} & \textcolor{green}{F} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}. \end{aligned}$$

Exercice 2: ★★

(1) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $2|xy| \leq x^2 + y^2$.

(2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Montrer que f a une limite en $(0, 0)$.

Exercice 3: ★★

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue en $(0, 0)$?

Exercice 4: ★★★

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 5: ★

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

- (1) $f : (x, y) \mapsto e^x \cos(y)$.
- (2) $g : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2) \cos(xy)$.
- (3) $h : (x, y) \mapsto \sqrt{1 + x^2 y^2}$.

Exercice 6: ★★

Soit f une application de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} . Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

- (1) $(x, y) \mapsto f(y, x)$
- (2) $(x, y) \mapsto f(y, f(x, x))$
- (3) $x \mapsto f(x, x)$.

Exercice 7: ★★★

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées suivant tout vecteur en $(0, 0)$ mais qu'elle n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 8: ★

Soit $g : (x, y) \mapsto \frac{xe^{-x}}{y} + \frac{y}{e}$. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et que g y admet un unique point critique. Est-ce que g y présente un extrémum ?

Exercice 9: ★★★

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x, y) = \frac{f(x^2 + y^2) - f(0)}{x^2 + y^2}.$$

- (1) Déterminer $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} F(x, y)$. On prolonge F par continuité en $(0, 0)$ par cette valeur.
- (2) Montrer que F est de classe C^1 .

Exercice 10: ★★★

On note \mathcal{C} le cercle trigonométrique. Quel est le paramètre maximal d'un triangle dont les sommets sont sur \mathcal{C} ?

Exercice 11: ★★★

Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

On pourra effectuer le changement de variables $u = x + y$, $v = x - y$.

Exercice 12: ★★★

Déterminer les fonctions de classe C^1 solutions des systèmes suivants.

- (1) $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = xy^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2y \end{cases}$
- (2) $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$
- (3) $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \end{cases}.$