Chapitre 19

Hugo Salou MP2I
Dernière mise à jour le 18 mai 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Premières propriétés

Définition: Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$. On dit que f est <u>linéaire</u> si
$$\forall (x,y) \in E^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Exemple:

1. $E = \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{C})$
$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \int_a^b f(t)\ dt \end{aligned}$$
φ est linéaire
2. $E = \mathscr{D}(I,\mathbb{C})$ et $F = \mathbb{C}^I$
$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$
φ est linéaire
3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax \end{array}$ est linéaire.
$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha a x + \beta a y = \alpha f(x) + \beta f(y)$$
4. $E = \mathscr{C}^1(I,\mathbb{C})$ et $F = \mathscr{C}^0(I,\mathbb{C})$. $a \in F$
$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ y & \longmapsto & y' + ay \end{array}$ est linéaire
$$y' + a(x)y = b(x) \iff \varphi(y) = b$$
5. $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}} = F$
$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ (u_n) & \longmapsto & (u_{n+2} - u_{n+1} - u_n) \end{array}$
$$\forall n, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \iff \varphi(u) = 0$$
6. $E = \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $F = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$
$AX = B \iff \varphi(X) = B$

Définition: On dit qu'un problème est <u>linéaire</u> s'il se présente sous la forme :
$$\text{Résoudre } \varphi(x) = y$$
où l'inconnue est $x \in E$, y est un paramètre de F avec $\varphi : E \to F$ linéaire.

Exemple:
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) - f(x-1) = \lambda$$
où $\lambda \in \mathbb{R}$ est fixé.
On pose $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$,
$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto \varphi(f) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x+1) - f(x-1) \end{array} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \lambda \end{aligned}$$

Le problème est équivalent à

$$\begin{cases} \varphi(f) = y \\ f \in E \end{cases}$$

Soient $f, g \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda f + \mu g)(x) &= (\lambda f + \mu g)(x+1) - (\lambda f + \mu g)(x-1) \\ &= \lambda f(x+1) - \mu g(x+1) - \lambda f(x-1) - \mu g(x-1) \\ &= \lambda\big(f(x+1) - f(x-1)\big) + \mu\big(g(x+1) - g(x-1)\big) \\ &= \lambda\varphi(f)(x) + \mu\varphi(g)(x) \end{aligned}$$

Donc, $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$

Remarque (Notation):
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
L'ensemble des applications linéaires de E dans F est $\mathscr{L}(E, F)$.
Si $F = E$, alors on note plus simplement $\mathscr{L}(E)$ à la place de $\mathscr{L}(E, E)$.
Les éléments de $\mathscr{L}(E)$ sont appelés endomorphismes (linéaires) de E.

Proposition: Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $g \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E, G)$.

Preuve:
Soient $u, v \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\alpha u + \beta v) &= g\big(f(\alpha u + \beta v)\big) \\ &= g\big(\alpha f(u) + \beta f(v)\big) \\ &= \alpha g\big(f(u)\big) + \beta g\big(f(v)\big) \\ &= \alpha(g \circ f)(u) + \beta(g \circ f)(v) \end{aligned}$$

□

Proposition: $\mathscr{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E.

Preuve:
Soient $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda f + \mu g \in \mathscr{L}(E, F)$.
Soient $u, v \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)(\alpha u + \mu v) &= \lambda f(\alpha u + \beta v) + \mu g(\alpha u + \beta v) \\ &= \lambda\big(\alpha f(u) + \beta f(v)\big) + \mu\big(\alpha g(u) + \beta g(v)\big) \\ &= \alpha\big(\lambda f(u) + \mu g(u)\big) + \beta\big(\lambda f(v) + \mu g(v)\big) \\ &= \alpha\big((\lambda f + \mu g)(u)\big) + \beta\big((\lambda f + \mu g)(v)\big) \end{aligned}$$

De plus, $\tilde{0}: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}$ est linéaire donc $\mathscr{L}(E,F) \neq \varnothing$. $\square$

Proposition: $\big(\mathscr{L}(E), +, \circ, \cdot\big)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre (non commutative en général).

Preuve: — $\big(\mathscr{L}(E), +, \cdot\big)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel d'après la proposition précédente.

— $\big(\mathscr{L}(E), +\big)$ est un groupe abélien.
"$\circ$" est associative et interne sur $\mathscr{L}(E)$.
$\mathrm{id}_E \in \mathscr{L}(E)$.
Soient $f, g, h \in \mathscr{L}(E)$.

$$\begin{aligned} \forall x \in E, f \circ (g+h)(x) &= f\big((g+h)(x)\big) \\ &= f\big(g(x) + h(x)\big) \\ &= f\big(g(x)\big) + f\big(h(x)\big) \text{ car } f \text{ est linéaire} \\ &= (f \circ g + f \circ h)(x) \end{aligned}$$

Donc,

$$f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$$

$$\begin{aligned} \forall x \in E, (g+h) \circ f(x) &= (g+h)\big(f(x)\big) \\ &= g\big(f(x)\big) + h\big(f(x)\big) \\ &= (g \circ f + h \circ f)(x) \end{aligned}$$

Donc,

$$(g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f$$

Donc, $\big(\mathscr{L}(E), +, \circ\big)$ est un anneau

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $f, g \in \mathscr{L}(E)$.

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \lambda \cdot (f \circ g)(x) &= \lambda f\big(g(x)\big) \\ (\lambda \cdot f) \circ g(x) &= \lambda f\big(g(x)\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \circ (\lambda \cdot g)(x) &= f\big(\lambda g(x)\big) \\ &= \lambda f\big(g(x)\big) \text{ car } f \in \mathscr{L}(E) \end{aligned}$$

$\square$

Corollaire: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. On peut former $P(u) \in \mathscr{L}(X)$: on dit que $P(u)$ est un polynôme d'endomorphisme.

Proposition: Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ bijective. Alors $f^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$.

Preuve:

Soit $u, v \in F$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} & f^{-1}(\alpha u + \beta v) = \alpha f^{-1}(u) + \beta f^{-1}(v) \\ \iff & \alpha u + \beta v = f\big(\alpha f^{-1}(u) + \beta f^{-1}(v)\big) \\ \iff & \alpha u + \beta v = \alpha f\left(f^{-1}(u)\right) + \beta f\left(f^{-1}(v)\right) \\ \iff & \alpha u + \beta v = \alpha u + \beta v \end{aligned}$$

Donc, $f^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$ $\square$

Remarque (Notation):
On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E bijectifs, $\mathrm{GL}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F bijectives.
Les éléments de $\mathrm{GL}(E)$ sont appelés automorphismes (linéaires) de E.

Corollaire: $\mathrm{GL}(E)$ est un sous-groupe de $\big(S(E), \circ\big)$

Définition: $\mathrm{GL}(E)$ est dit “ le groupe linéaire de E”.

Deuxième partie

Noyau et image

Proposition: Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, U un sous-espace vectoriel de E et V un sous-espace vectoriel de F.

1. $f(U)$ est un sous-espace vectoriel de F.
2. $f^{-1}(V)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve: 1. $0_F = f(0_E)$ et $0_E \in U$ donc $0_F \in f(U)$ donc $f(U) \neq \varnothing$
Soient $(x,y) \in f(U)^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Soient $a,b \in U$ tels que $\begin{cases} x = f(a) \\ y = f(b) \end{cases}$.

$$\lambda x + \mu y = \lambda f(a) + \mu f(b) = f(\lambda a + \mu b) \text{ car } f \in \mathscr{L}(E,F)$$

U est un sous-espace vectoriel de E.
Donc $\lambda a + \mu v \in U$
donc $f(\lambda u + \mu v) \in f(U)$
donc $\lambda x + \mu y \in f(U)$.

2. $f(0_E) = 0_F \in V$ donc $0_E \in f^{-1}(V)$. Donc $f^{-1}(V) \neq \varnothing$.
Soient $x,y \in f^{-1}(V)$, $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$.

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda \underbrace{f(x)}_{\in V} + \mu \underbrace{f(y)}_{\in V} \in V$$

donc $\lambda x + \mu y \in f^{-1}(V)$.

□

Corollaire: Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid f(x) = 0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{f(u) \mid u \in E\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

□

Remarque (Rappel):
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$

$$f \text{ injective} \iff \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$$
$$f \text{ surjective} \iff \mathrm{Im}(f) = F$$

Exemple: 1. Soit I un intervalle, $E = \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}^I$

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

$$\mathrm{Ker}(\varphi) = \left\{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ constante } \right\}$$
$$\mathrm{Im}(\varphi) \supset \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$$

2. $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \mathbb{R}$, $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ P & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 P(t)\ dt \end{array}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(\varphi) &= \left\{ P = a + bX + cX^2 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \int_0^1 P(t)\ dt = 0 \right\} \\
&= \left\{ a + bX + cX^2 \mid a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 0 \right\} \\
&= \left\{ a + bX + cX^2 \mid a = -\frac{b}{2} - \frac{c}{3} \right\} \\
&= \left\{ -\frac{b}{2} - \frac{c}{3} + bX + cX^2 \mid b, c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ b\left(-\frac{1}{2} + X\right) + c\left(-\frac{1}{3} + X^2\right) \mid b, c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(-\frac{1}{2} + X, -\frac{1}{3} + X^2\right)
\end{aligned}$$

$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$.

Troisième partie

Théorème du rang

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Proposition: Soit $f : E \to F$ un isomorphisme (i.e. une application linéaire bijective). Alors, $\dim(E) = \dim(F)$

Preuve:
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On pose

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_i = f(e_i) \in F$$

— Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. On suppose que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i u_i = 0_F$. D'où,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) \text{ donc } f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) &= 0_F \\ \text{donc } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i &\in \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\} \\ \text{donc } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i &= 0_E \\ \text{donc } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i &= 0 \end{aligned}$$

Donc $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.
Soit $y \in F$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Comme $\mathscr{B}$ engendre E, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Comme f est linéaire,

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Donc, $F = \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$
Donc $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de F donc

$$\dim(E) = n = \dim(F)$$

□

La première partie de la preuve précédente justifie le résultat suivant.

Proposition: Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ injective. $\mathscr{L} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de E. Alors $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ est une famille libre de F. En particulier, $\dim(F) \geqslant \dim(E)$. □

La deuxième partie de la preuve prouve :

Proposition: Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ surjective et $\mathscr{G} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille génératrice de E. Alors $\big(f(e_1), \ldots, f(e_p)\big)$ est une famille génératrice de F. En particulier,

$$\dim(F) \leqslant \dim(E)$$

□

Théorème (Théorème du rang)**:** Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\dim(E) = \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) + \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big)$$

Preuve (À connaître)*:*
On pose

$$\begin{aligned} u : U &\longrightarrow \operatorname{Im}(f) \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

où U est un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(f)$ dans E.
(U existe : voir remarque qui suit)

— $u \in \mathscr{L}\big(U, \operatorname{Im}(f)\big)$, en effet, soient $x, y \in U, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} u(\lambda x + \mu v) &= f(\lambda x + \mu v) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) \\ &= \lambda u(x) + \mu u(y) \end{aligned}$$

— Soit $y \in \operatorname{Im}(f)$. Soit $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $E = U \oplus \operatorname{Ker}(f)$. On peut écrire

$$\begin{cases} x = a + b \\ a \in U, b \in \operatorname{Ker}(f) \end{cases}$$

D'où,

$$y = f(x) = f(a + b) = f(a) + f(b) = u(a) + 0_E = u(a)$$

Donc u est surjective.
Soit $x \in U$.

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker}(u) &\iff u(x) = 0_F \\ &\iff f(x) = 0_F \\ &\iff x \in \operatorname{Ker}(f) \\ &\iff x = 0_E \text{ car } U \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\} \end{aligned}$$

Donc u est injective.
Ainsi, $\dim(U) = \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big)$
Or,

$$\begin{aligned} \dim(E) &= \dim\big(U \oplus \operatorname{Ker}(f)\big) \\ &= \dim(U) + \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) \end{aligned}$$

donc

$$\dim(U) = \dim(E) - \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big)$$

Donc,

$$\dim(E) = \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) + \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big)$$

□

Remarque:
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E.

Cas 1 $F = \{0_E\}$, alors E est un supplémentaire de F.

<u>Cas 2</u> $F \neq \{0_E\}$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F. Alors $\mathscr{B}$ est une famille libre de E. On complète $\mathscr{B}$ en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E. On pose $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$. On démontre que

$$F \oplus G = E$$

Corollaire: Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de <u>même dimension finie</u> et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\begin{aligned} f \text{ injective } &\iff f \text{ surjective} \\ &\iff f \text{ bijective} \end{aligned}$$

Preuve:
D'après le théorème du rang,

$$\dim(E) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$$

<u>Si f est injective</u>, alors $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$
et donc $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 0$
et donc $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim(F)$
et donc $\mathrm{Im}(f) = F$
et donc f est surjective.

<u>Si f est surjective</u>, alors $\mathrm{Im}(f) = F$
et donc $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim(F) = \dim(E)$
et donc $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 0$
et donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$
et donc f est injective □

Exemple:
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\forall i \neq j, x_i \neq x_j$$

Soit $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ P & \longmapsto & \big(P(x_1), \dots, P(x_n)\big) \end{array}$

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(P) = 0 \\ &\iff \forall i \in [\![1, n]\!], P(x_i) = 0 \\ &\iff P = 0 \text{ car } \deg(P) \leqslant n - 1 \end{aligned}$$

Donc φ est injective et donc φ est bijective.
Donc,

$$\exists! P \in \mathbb{K}_{n-1}[X], \forall i \in [\![1, n]\!], P(x_i) = y_i$$

De plus, $\varphi^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}_{n-1}[X]$ est un isomorphisme.
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique d $\mathbb{K}^n$. $\big(\varphi^{-1}(e_1) \dots, \varphi^{-1}(e_n)\big)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
$\forall i \in [\![1, n]\!], \varphi^{-1}(e_i) = L_i$ es tle i-ème polynôme interpolateur de Lagrange.

$$
\begin{aligned}
P &= \varphi^{-1}(y_1, \dots, y_n) \\
&= \varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n y_i e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^n y_i \varphi^{-1}(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^n y_i L_i
\end{aligned}
$$

Exercice (Interpolation de Hermite):
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ avec

$$\forall i \neq j, x_i \neq x_j$$

Soit $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{K}^n$.
Trouver un polynôme de plus bas degré tel que

$$(*) \qquad \forall i \in [\![1, n]\!], \begin{cases} P(x_i) = y_i \\ P'(x_i) = z_i \end{cases}$$

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{2n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{2n} \\ P & \longmapsto & \big(P(x_1), \dots, P(x_n), P'(x_1), \dots, P'(x_n)\big) \end{array}$

$$(*) \iff \varphi(P) = (y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n)$$

$$
\begin{aligned}
P \in \operatorname{Ker}(\varphi) &\iff \forall i, \begin{cases} P(x_i) = 0 \\ P'(x_i) = 0 \end{cases} \\
&\iff P = 0 \text{ car } \deg(P) \leqslant 2n - 1
\end{aligned}
$$

Donc φ est un isomorphisme.

Corollaire: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ avec E de dimension finie. Alors,

$$f \in \mathrm{GL}(E) \iff f \text{ injective } \iff f \text{ surjective}$$

□

Remarque:
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors

$$\boxed{\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)}$$

$\dim\big(\operatorname{Im}(f)\big) = \operatorname{rg}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$

Définition: Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Le <u>rang</u> de f est

$$\operatorname{rg}(f) = \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big)$$

Quatrième partie

Formes linéaires

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble des formes linéaires est noté $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. E^* est appelé espace dual de E.

Proposition: Toute forme linéaire est soit nulle, soit surjective.

Preuve:
Soit $f \in E^*$.
$\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$ donc $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(\mathbb{K}) = 1$.
Si $\mathrm{rg}(f) = 0$, alors $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$ et donc

$$\forall x \in E, f(x) = 0$$

Si $\mathrm{rg}(f) = 1$, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}$ et donc f est surjective. $\square$

Proposition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in E^* \setminus \{0\}$. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension $n-1$.

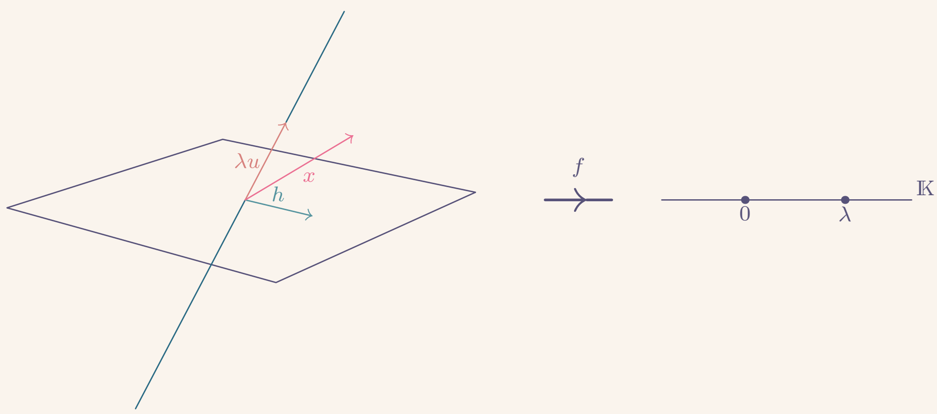
Preuve:
Comme $f \neq 0$, donc $\mathrm{rg}(f) = 1$
D'après le théorème du rang,

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f) = n - 1$$

$\square$

Proposition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et H un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$. Alors,

$$\exists f \in E^*, \mathrm{Ker}(f) = H$$



Preuve:
Soit D un supplémentaire de H dans E :

$$E = H \oplus D$$

Nécessairement,

$$\dim(D) = \dim(E) - \dim(H) = 1$$

Soit $u \in D \setminus \{0\}$. $D = \mathrm{Vect}(u)$

On pose $f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = h + \lambda u & \longmapsto & \lambda \\ (h \in H, \lambda \in \mathbb{K}) & & \end{array}$

Montrons que $f \in E^*$.
Soient $(x, y) \in E^2, (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.
On pose

$$\begin{cases} x = h + \lambda u, & h \in H, \lambda \in \mathbb{K} \\ y = h' + \lambda' u, & h' \in H, \lambda' \in \mathbb{K} \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= \alpha(h + \lambda u) + \beta(h' + \lambda' u) \\ &= \underbrace{(\alpha h + \beta h')}_{\in H} + \underbrace{(\alpha\lambda + \beta\lambda')}_{\in \mathbb{K}} u \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \alpha\lambda + \beta\lambda' \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \end{aligned}$$

Soit $x \in E$. On pose $x = h + \lambda u$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f(x) = 0 \\ &\iff \lambda = 0 \\ &\iff x = y \\ &\iff x \in H \end{aligned}$$

Donc, $H = \mathrm{Ker}(f)$.

$\square$

Exemple:
$E = \mathbb{R}^4$, $H = \mathrm{Vect}\big((1,0,0,1), (1,1,0,0), (0,1,1,0)\big)$
Soit $u = (1,2,1,1) \notin H$.
Soit $(x, y, z, t) \in E$. On cherche $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$(*) \qquad (x, y, z, t) = \alpha(1,0,0,1) + \beta(1,1,0,0) + \gamma(0,1,1,0) + \lambda(1,2,1,1)$$

Plus précisément, on cherche à exprimer λ en fonction de x, y, z, t.

$$(*) \iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = x \\ \beta + \gamma + 2\lambda = y \\ \gamma + \lambda = z \\ \alpha + \lambda = t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{\alpha} + \beta + \lambda = x \\ \beta + \gamma + 2\lambda = y \\ \boxed{\gamma} + \lambda = z \\ -\beta = t - x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{\alpha} + \beta + \lambda = x \\ \beta + \lambda = y - z \\ \boxed{\gamma} + \lambda = z \\ \beta = x - t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = y - z - x + t \\ \quad \vdots \end{cases}$$

Donc,

$$(x, y, z, t) \in H \iff y - z - x + t = 0$$

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & x - y + z - t \end{array}$ et $H = \mathrm{Ker}(f)$

Proposition: Avec les notations précédentes, $\{f \in E^* \mid \mathrm{Ker}(f) = H\}$ est une droite de E^* privée de l'application nulle. En d'autres termes, les équations de H sont 2 à 2 proportionelles.

Preuve:
Soient $f, g \in E^*$ telles que

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$$

On pose $H = \mathrm{Ker}(f)$. Soit $u \notin H$ de sorte que

$$H \oplus \mathrm{Vect}(u) = E$$

$u \notin H$ donc $f(u) \neq 0$.
On pose $\alpha = \dfrac{g(u)}{f(u)}$. Montrons que $g = \alpha f$.
Soit $x \in E$. On pose $x = h + \lambda u$ avec $\begin{cases} h \in H \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{cases}$

$$g(x) = g(h) + \lambda g(u) = 0 + \lambda \alpha f(u)$$
$$\|$$
$$\alpha f(x) = \alpha\big(f(h) + \lambda f(u)\big) = \lambda \alpha f(u)$$

$\square$

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E. On dit que H est un <u>hyperplan</u> de E s'il existe une droite D de E telle que

$$H \oplus D = E$$

En reprenant les démonstrations précédentes, on a encore les résultats suivants :

Proposition: Soit H un hyperplan de E. Alors, $\{f \in E^* \mid \mathrm{Ker}(f) = H\}$ est une droite de E^* privée de l'application nulle. $\square$

Proposition: Soit $f \in E^*$ non nulle. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un hyperplan de E.

Preuve:
f non nulle. Soit $x \in E$ tel que

$$f(x) \neq 0$$

On pose $H = \mathrm{Ker}(f)$ et $D = \mathrm{Vect}(x)$. Montrons que $H \oplus D = E$.

<u>Analyse</u> Soit $y \in E$. On suppose $y = h + \lambda x$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors,
$f(y) = f(h) + \lambda f(x) = \lambda f(x)$ donc $\begin{cases} \lambda = f(y) f(x)^{-1} \\ h = y - f(y) f(x)^{-1} x \end{cases}$

<u>Synthèse</u> Soit $y \in E$. On pose $\begin{cases} \lambda = f(y) f(x)^{-1} \\ h = y - \lambda x \end{cases}$.

Évidemment, $\begin{cases} h + \lambda x = y \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{cases}$

$$\begin{aligned} f(h) &= f(y - \lambda x) \\ &= f(y) - \lambda f(x) \\ &= f(y) - f(y) f(x)^{-1} f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

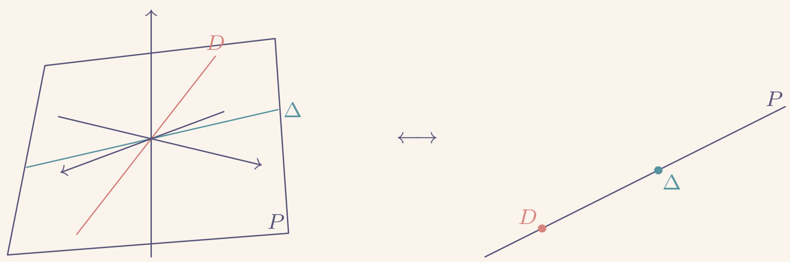
$\square$

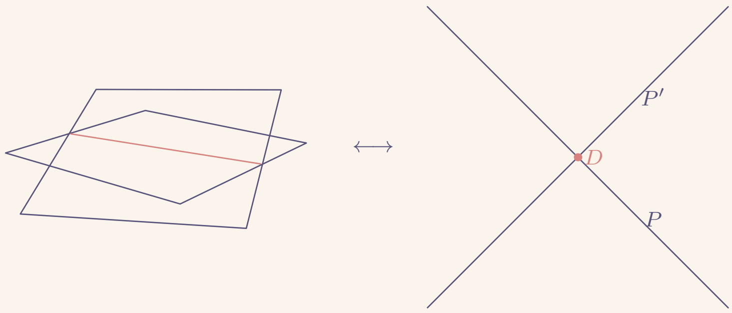
Hors-Programme

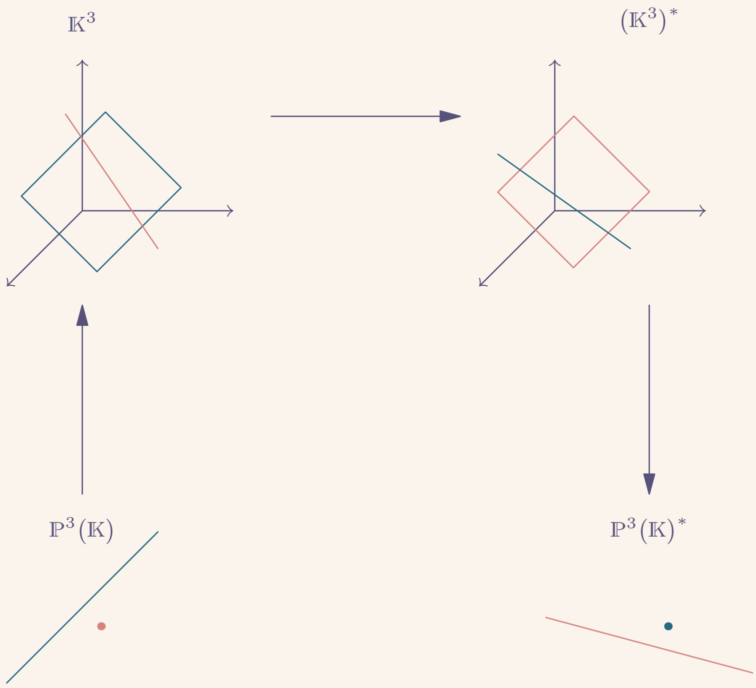
$$\mathbb{P}^3(\mathbb{K}) = \{D \setminus \{0\} \mid D \text{ droite vectorielle de } \mathbb{K}^3\}$$

Une <u>droite</u> projective de $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ est un plan vectoriel de $\mathbb{K}^3$ privé de 0.

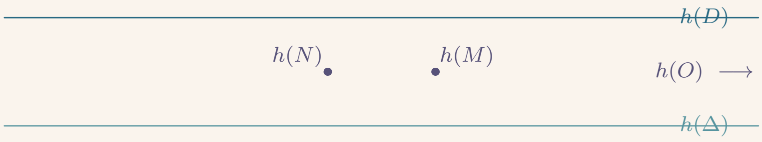
À faire : schéma A







À faire : schémas B et C


$h(D)$
$h(N)$
$h(M)$
$h(O)$
$h(\Delta)$

Cinquième partie

Projections et symétries

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces de E supplémentaires :

$$E = F \oplus G$$

Soit $x \in E$.

$$\exists!(a,b) \in F \times G, x = a + b$$

Le vecteur a est appelé projeté de x sur F parallèlement à G.
Le vecteur b est appelé projeté de x sur G parallèlement à F.
La projection sur F parallèlement à G est l'application qui à $x \in E$ associe son projeté sur F parallèlement à G.

Exemple:
$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F = \{f \in E \mid f \text{ paire}\}$ et $G = \{f \in E \mid f \text{ impaire}\}$
On a $E = F \oplus G$.
Soient p la projection sur F parallèlement à G et q la projection sur G parallèlement à F.

$$\forall x \in E, \begin{cases} p(f) : x \mapsto \dfrac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) \\ q(f) : x \mapsto \dfrac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big) \end{cases}$$

Proposition: Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires et p la projection sur F parallèlement à G.

1. $p \in \mathscr{L}(E)$
2. $p_{|F} = \mathrm{id}_F$ et $p_{|G} = 0$
3. $p \circ p = p$
4. $\mathrm{id}_E - p$ est la projection sur G parallèlement à F.

Preuve:

1. $\forall x \in E, p(x) \in F \subset E$
   Soit $(x,y) \in E^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$.
   On pose $x = a + b$ avec $\begin{cases} a \in F \\ b \in G \end{cases}$ et $y = c + d$ avec $\begin{cases} c \in F \\ d \in G \end{cases}$
   donc,
   $$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &= \lambda(a+b) + \mu(c+d) \\ &= \underbrace{(\lambda a + \mu c)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda b + \mu d)}_{\in G} \end{aligned}$$
   Donc,
   $$p(\lambda x + \mu y) = \lambda a + \mu b = \lambda p(x) + \mu p(y)$$
2. $\forall x \in F, x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0}_{\in G}$ donc $p(x) = x$
   $\forall x \in G, x = \underbrace{0}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G}$ donc $p(x) = 0$
3. $\forall x \in E, p(x) \in F$ donc $p(p(x)) = p(x)$
4. Soit $x \in E$. On pose $x = a + b$ avec $\begin{cases} a \in F \\ b \in G \end{cases}$. Donc $p(x) = a$. D'où, $x - p(x) = b$ est le projeté de x sur G parallèlement à F.

□

Définition: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On dit que f est un projecteur si $f \circ f = f$

Proposition: Soit f un projecteur de E. Alors f est la projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$. En particulier,

$$\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$$

Preuve: Analyse Soit $x \in E$. On suppose que $x = a + b$ avec $\begin{cases} a \in \mathrm{Ker}(f) \\ b \in \mathrm{Im}(f) \end{cases}$. D'où,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f(b) \\ &= 0 + f(b) \\ &= f(b) \end{aligned}$$

Soit $y \in E$ tel que $b = f(y)$. Donc,

$$f(b) = f\big(f(y)\big) = f(y) = b$$

Donc, $\underline{f(x) = b}$ et donc $\underline{a = x - b = x - f(x)}$

Synthèse Soit $x \in E$. On pose $\begin{cases} a = x - f(x) \\ b = f(x) \end{cases}$. Évidemment, $\begin{cases} a + b = x \\ b \in \mathrm{Im}(f) \end{cases}$

$$\begin{aligned} f(a) &= f\big(x - f(x)\big) \\ &= f(x) - f\big(f(x)\big) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $a \in \mathrm{Ker}(f)$. On a montré

$$\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$$

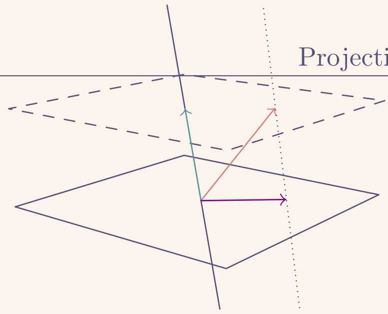
On considère la projection p sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.
Soit $x \in E$. On a montré que

$$x = \underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Im}(f)} + \underbrace{x - f(x)}_{\in \mathrm{Ker}(f)}$$

donc $p(x) = f(x)$ et donc $p = f$

$\square$

Définition: Soient F et G supplémentaires dans E : $E = F \oplus G$



Soit $x \in E$. On décompose x :

$$x = a + b \text{ avec } \begin{cases} a \in F \\ b \in G \end{cases}$$

et on forme

$$y = a - b$$

On dit que y est le <u>symétrique de x par rapport à F parallèlement à G</u>
La <u>symétrie par rapport à F parallèlement à G</u> est l'application qui à tout $x \in E$ associe son symétrique parallèlement à G par rapport à F.

Proposition: Soient F et G supplémentaires dans E, $\mathscr{s}$ la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

1. $\mathscr{s} \in \mathscr{L}(E)$
2. $\mathscr{s}_{|E} = \mathrm{id}_F$ et $\mathscr{s}_{|G} = -\,\mathrm{id}_G$
3. $\mathscr{s} \circ \mathscr{s} = \mathrm{id}_E$

Preuve:
Soient p la projection sur F parallèlement à G et q la projection sur G parallèlement à F.
On remarque que $\mathscr{s} = p - q$.

1. p et q sont des endomorphismes donc $\mathscr{s}$ aussi
2. $\forall x \in E, \mathscr{s}(x) = p(x) - q(x) = x - 0 = x$
   $\forall x \in G, \mathscr{s}(x) = p(x) - q(x) = 0 - x = -x$
3.

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \mathscr{s}\big(\mathscr{s}(x)\big) &= \mathscr{s}\big(p(x) - q(x)\big) \\ &= \mathscr{s}\big(\underbrace{p(x)}_{\in F}\big) - \mathscr{s}\big(\underbrace{q(x)}_{\in G}\big) \\ &= p(x) - \big(-q(x)\big) \\ &= x \end{aligned}$$

□

Définition: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On dit que f est <u>involutive</u> si $f \circ f = \mathrm{id}_E$.

Proposition: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ involutif. Alors f est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$. En particulier,

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E) = E$$

Preuve: <u>Analyse</u> Soit $x \in E$. On suppose que $x = a + b$ avec $\begin{cases} a \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \\ b \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E) \end{cases}$

$$\begin{aligned} a \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) &\iff (f - \mathrm{id}_E)(a) = 0 \\ &\iff f(a) - a = 0 \\ &\iff a = f(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E) &\iff f + \mathrm{id}_E)(b) = 0 \\ &\iff f(b) + b = 0 \\ &\iff f(b) = -b \end{aligned}$$

On sait que $x = a + b$ et $f(x) = f(a) + f(b) = a - b$
D'où,

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\big(x + f(x)\big) \\ b &= \frac{1}{2}\big(x - f(x)\big) \end{aligned}$$

<u>Synthèse</u> Soit $x \in E$. On pose

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\big(x + f(x)\big) \\ b &= \frac{1}{2}\big(x - f(x)\big) \end{aligned}$$

Alors $a + b = x$

$$\begin{aligned} f(a) &= f\left(\frac{1}{2}\big(x + f(x)\big)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x) + f\big(f(x)\big)\right) \\ &= \frac{1}{2}\big(f(x) + x\big) \\ &= a \end{aligned}$$

Donc $a \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$

$$\begin{aligned} f(b) &= f\left(\frac{1}{2}\big(x - f(x)\big)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x) - f\big(f(x)\big)\right) \\ &= \frac{1}{2}\big(f(x) - x\big) \\ &= -b \end{aligned}$$

donc $b \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$
Ainsi,

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E) = E$$

Soit $\mathscr{s}$ la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$.
Soit $x \in E$. On a vu que

$$x = \underbrace{\frac{1}{2}\big(x + f(x)\big)}_{\in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)} + \underbrace{\frac{1}{2}\big(x - f(x)\big)}_{\in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)}$$

Donc,

$$\mathscr{s}(x) = \frac{1}{2}\big(x + f(x)\big) - \frac{1}{2}\big(x - f(x)\big) = f(x)$$

Donc $\mathscr{s} = f$ □

Exemple:
$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et

$$\mathscr{s} : E \longrightarrow E$$
$$f \longmapsto \mathscr{s}(f) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(-x) \end{array}$$

$\mathscr{s}(f) = f \circ (-\mathrm{id}_{\mathbb{R}})$
$\mathscr{s} \in \mathscr{L}(E)$, en effet :

$$\begin{aligned} &\forall f, g \in \mathscr{L}(E), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \\ &\mathscr{s}(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g) \circ (-\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) \\ &\qquad = \alpha\big(f \circ (-\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\big) + \beta\big(g \circ (-\mathrm{id}_{\mathbb{R}})\big) \\ &\qquad = \alpha \mathscr{s}(f) + \beta \mathscr{s}(g) \end{aligned}$$

De plus, $\mathscr{s} \circ \mathscr{s} = \mathrm{id}_E$. Donc $\mathscr{s}$ est une symétrie.

$$\mathrm{Ker}(\mathscr{s} - \mathrm{id}_E) = \{f \in E \mid f \text{ paire}\} = \mathscr{P}$$
$$\mathrm{Ker}(\mathscr{s} + \mathrm{id}_E) = \{f \in E \mid f \text{ impaire}\} = \mathscr{I}$$

D'où,

$$\mathscr{P} \oplus \mathscr{I} = E$$

Exemple:
$E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
Pour $A \in E$, on note ${}^tA$ la transposée de A la matrice obtenue en écrivant en ligne les colonnes de A.
Soit

$$\mathscr{s} : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$
$$A \longmapsto {}^tA$$

$\mathscr{s}$ est linéaire, $\mathscr{s} \circ \mathscr{s} = \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$

$$\mathrm{Ker}(\mathscr{s} - \mathrm{id}_E) = S_n(\mathbb{K})$$
$$\mathrm{Ker}(\mathscr{s} + \mathrm{id}_E) = A_n(\mathbb{K})$$