Chapitre 12

TD

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 3 février 2022

Table des matières

Première partie
Exercice 1

On pose $E = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

- On sait que $\circ$ est associatif.
- $\circ$ admet un élément neutre $id_{\mathbb{R}_*}$ $(\forall f \in E, id_{\mathbb{R}_*} \circ f = f \circ id_{\mathbb{R}_*} = f)$ et $id_{\mathbb{R}_*}(x) = x$ donc $id_{\mathbb{R}_*} \in E$.
- Montrons que $\forall f \in E, \exists g \in E f \circ g = f_1$.
  - $f_1 \circ f_1 = f_1$
  - $f_2 \circ f_2 = f_1$
  - $f_3 \circ f_3 = f_1$
  - $f_4 \circ f_4 = f_1$
- Montrons que $\forall (f, g) \in E^2, f \circ g \in E$
  - $\forall f \in E, f_1 \circ f = f \in E$
  - $\forall f \in E, f \circ f_1 = f \in E$
  - $f_2 \circ f_3 = f_4 \in E$
  - $f_3 \circ f_2 = f_4 \in E$
  - $f_3 \circ f_4 = f_2 \in E$
  - $f_4 \circ f_3 = f_2 \in E$
  - $f_2 \circ f_4 = f_3 \in E$
  - $f_4 \circ f_2 = f_3 \in E$

  Donc, $\forall (f, g) \in E^2, f \circ g \in E$

Donc, $(E, \circ)$ est un groupe

Deuxième partie

Exercice 2

1. (a) On suppose G abélien donc $\cdot$ est une loi commutative.

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$$

et

$$(ab)^2 = abab = aabb = a^2b^2$$

   (b) On suppose que $\forall (a,b) \in G^2, (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$
   donc, $b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ donc $\cdot$ est commutative donc G est abélien.

   (c) On suppose $\forall (a,b) \in G^2, (ab)^2 = a^2b^2$
   donc $abab = aabb$ donc $ba = ab$ donc $\cdot$ est commutative donc G est abélien

2. On suppose que $\forall x \in G, x^2 = e$.

$$\forall (a,b) \in G^2$$

$$\begin{array}{ccccc} (ab)^2 & = & a^2 & \cdot & b^2 \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ e & = & e & \cdot & e \end{array}$$

Troisième partie

Exercice 4

1. $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$
   L'élément neutre de $\times$ est $1 \notin E$ donc E n'est pas un groupe.
2. $0 \in E$. Or, 0 n'a pas d'inverse donc E n'est pas un groupe
3. Avec, $a = b = 0$, on a $(g : x \mapsto 0) \in E$ car elle n'a pas d'inverse.
   Soit $f : ax+b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, $(g \times f)(x) = g(ax+b) = 0(ax+b) = 0$. Donc, $\nexists f \in E, g \times f = id_{\mathbb{R}}$

Quatrième partie

Exercice 6

— $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ d'après le cours c'est le plus petit sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ qui contient 1.
— $2\mathbb{Z} = \langle 2 \rangle$ pour la même raison

Cinquième partie

Exercice 21

1 Préliminaires

1. Soit $(x, y, z) \in G^3$
   — $f(x) = f(x)$ donc $x \diamond x$
   — Si $x \diamond y$, $f(x) = f(y)$ donc $f(y) = f(x)$ donc $y \diamond x$
   — On suppose $x \diamond y$ et $y \diamond z$ donc $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$ donc $f(x) = f(z)$, et donc $x \diamond z$
2.

Sixième partie

Exercice 18

Montrons que
— $(\mathbb{R}, \oplus)$ est un groupe abélien
— $(\mathbb{R}, \otimes)$ est un monoïde commutatif
— $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0_\mathbb{R}\}, \exists y \in \mathbb{R}, x \otimes y = 1_\mathbb{R}$
— $1_\mathbb{R} \neq 0_\mathbb{R}$

Trouvons $1_\mathbb{R}$ et $0_\mathbb{R}$:
Soit $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 0_\mathbb{R} \oplus a = a &\iff 0_\mathbb{R} + a - 1 = a \\ &\iff 0_\mathbb{R} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1_\mathbb{R} \otimes a = a &\iff 1_\mathbb{R} + a - 1_\mathbb{R} a = a \\ &\iff 1_\mathbb{R}(1 - a) = 0 \\ &\iff a = 1 \text{ ou } 1_\mathbb{R} = 0 \end{aligned}$$

Or, $1_\mathbb{R} \otimes a = a$ est vrai pour toutes valeures de a donc $1_\mathbb{R} = 0$

$\boxed{1_\mathbb{R} \neq 0_\mathbb{R}}$

Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Montrons que $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

$$\begin{array}{rrcl} & (x \oplus y) \oplus z & = & x \oplus (y \oplus z) \\ \iff & (x + y - 1) \oplus z & = & x \oplus (y + z - 1) \\ \iff & (x + y - 1) + z - 1 & = & x + (y + z - 1) - 1 \\ \iff & x + y + z - 2 & = & x + y + z - 2 \end{array}$$

Donc, $\oplus$ est associative.
Montrons que $x \oplus y = y \oplus x$ i.e. $x + y - 1 = y + x - 1$ Donc $\oplus$ est commutative.
On sait que $0_\mathbb{R} = 1 \in \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Trouvons $y \in \mathbb{R}$ tel que $x \oplus y = 0_{\mathbb{R}} = 1$

$$\begin{aligned} x \oplus y = 1 &\iff x + y - 1 = 1 \\ &\iff y = 2 - x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc } (\mathbb{R}, \oplus) \text{ est un groupe abélien}}$