Chapitre 17

$\mathscr{CD}$

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 5 mars 2022

Table des matières

I Exercice 1 **1**

II Exercice 2 **2**

III Exercice 4 **3**

IV Exercice 8 **3**

Première partie

Exercice 1

1. On sait que $\dim(\mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R})) = 3$. Or, on n'a que 2 vecteurs. Ils ne peuvent donc pas former une base.
2. La famille (u, v) est une base de F car $F = \mathrm{Vect}(u, v)$
   u et v colinéaires ?
   Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (0) = au + bv &\iff \begin{cases} 0 = a + 3b \\ 0 = 2a + 2b \\ 0 = 3a + b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = -3b \\ a = -\frac{1}{3}b \\ a = b \end{cases} \\ &\iff a = b = 0 \end{aligned}$$

   Donc $\dim(F) = 2$
3. On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $x = au + bv$

$$au+bv=x \iff \begin{cases} a+3b=1 \\ 2a+2b=4 \\ 3a+b=7 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a+b=2 \\ 2b=-1 \\ 2a=5 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a=\frac{5}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \\ a+b=2 \end{cases}$$

Donc, $x \in F$ et $x = \frac{5}{3}u - \frac{1}{2}v$

4. On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $y = au + bv$

$$au+bv=y \iff \begin{cases} -1=a+3b \\ 3=a+b \\ 9=3a+b \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -4=2b \\ 6=2a \\ 3=a+b \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \\ a+b=1=3 \lightning \end{cases}$$

Deuxième partie

Exercice 2

On a

$$\begin{cases} u=3e_1+e_2+6e_3=\begin{pmatrix}3 & 1 & 6\end{pmatrix} \\ v=e_1+e_2+4e_3=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\end{pmatrix} \\ w=e_1+0e_2+me_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & m\end{pmatrix} \end{cases}$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$w = au + bv \iff \begin{cases} 1 = 3a + b \\ a = -b \\ m = 6a + 4b \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} b = -\dfrac{1}{2} \\ a = \dfrac{1}{2} \\ m = 2a = 1 \end{cases}$$

Donc u, v et w sont linéairement indépendants si et seulement si $m \neq 1$.

Troisième partie

Exercice 4

On a
$$\begin{cases} a = (0, 1, -1, 2) \\ b = (1, 3, 0, 2) \\ c = (2, 1, -3, 4) \\ d = (0, 0, 2, 1) \\ e = (-1, 1, 0, 3) \end{cases}$$
On cherche $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $c = ax + by$

$$c = ax + by \iff \begin{cases} y = 2 \\ x = 3y - 1 = 5 \\ -3 = -x = -5 : \\ 4 = x + y = 2 + 5 = 7 : \lightning \end{cases}$$

Donc, a, b et c sont linéairements indépendants et donc $\dim(F) = 3$

On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $d = \lambda e$.

$$d = \lambda e \iff \begin{cases} 0 = \lambda \\ 2 = 0 \times \lambda = 0 : \lightning 1 = 3\lambda = 0 : \lightning \end{cases}$$

Donc e et f sont linéairements indépendants et donc $\dim(G) = 2$

Quatrième partie

Exercice 8

“ $\Longleftarrow$ ” Soient F, G, U tels que
$$F \oplus U = E = G \oplus U$$

Donc,

$$\dim(F) + \dim(U) = \dim(E)$$
$$\dim(G) + \dim(U) = \dim(E)$$

Donc, $\dim(F) = \dim(G)$

" $\implies$ " On raisonne par récurrence sur la $\mathrm{codim}(F) = \dim(E) - \dim(F)$

— Soient F et G deux hyperplans de E
  $F \cup G \neq E$ d'après l'exercice classique suivant :

  $$F \cup G \text{ sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F$$

  Solution de l'exercice :
  " $\impliedby$ "

  $$F \subset G \implies F \cup G = G$$
  $$G \subset F \implies F \cup G = F$$

  " $\implies$ " On suppose $G \not\subset F$. Soit $u \in F$. Soit $v \in G \setminus F$.
  $u + v \in F \cup G$ car $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.
  Si $u + v \in F$, alors $v = \underbrace{u + v}_{\in F} - \underbrace{u}_{\in F} \in F$ ↯
  Si $u + v \in G$, alors $u = \underbrace{u + v}_{\in G} - \underbrace{v}_{\in G} \in G$ ↯
  Donc $F \subset G$

  Soit $u \in E \setminus (F \cup G)$. $u \neq 0$ donc $\langle u \rangle$ est de dimension 1. $\langle u \rangle \cap F = \{0\}$ donc $F \oplus \langle u \rangle = E$
  $\langle u \rangle \cap G = \{0\}$ donc $G \oplus \langle u \rangle = E$

— Soit $n \in \mathbb{N}_*$ tels que pour tous F et G sous-espaces vectoriels de E de codimension n, F et G ont un supplémentaire commun.
  Soient F et G de codimension $n + 1$. De nouveau, $F \cup G \neq E$. Soit $u \in E \setminus (F \cup G)$. $\langle u \rangle \cap F = \{0\}$. On pose $F' = F \oplus \langle u \rangle$.
  $\dim(F') = \dim(F) + 1$ donc $\mathrm{codim}(F') = n$
  De même, $\langle u \rangle \cap G = \{0\}$. On pose $G' = G \oplus \langle u \rangle$ donc $\mathrm{codim}(G') = n$
  Soit U un supplémentaire commun à F' et G'. On pose $U' = \langle u \rangle \oplus U$

  $$\begin{aligned} E &= F' \oplus U \\ &= F \oplus \langle u \rangle \oplus U \qquad\qquad = F \oplus U' \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} E &= G' \oplus U \\ &= G \oplus \langle u \rangle \oplus U \qquad\qquad = G \oplus U' \end{aligned}$$