CHAPITRE 11

SUITES NUMÉRIQUES

1. Un exemple : la suite logistique

On s'intéresse à l'évolution d'une population qui ne peut croître à l'infini : on note N_∞ le nombre maximal d'individus. On note u_n le nombre d'individus à la génération n divisé par N_∞ de sorte que $u_n \in [0,1]$. On propose le modèle suivant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \lambda u_n(1-u_n).$$

La suite (u_n) est appelée *suite logistique*. Le comportement de cette suite dépend *a priori* de u_0 et de λ. Une question naturelle est alors de savoir si la population va disparaître, *i.e.* si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Pour répondre à cette question, on va être amené à utiliser des propriétés sur les suites (théorème de la limite monotone, unicité de la limite) car on ne sait pas exprimer u_n en fonction de n. L'objectif de ce chapitre est de présenter (et démontrer) ces propriétés.

2. Définitions et représentations d'une suite

Dans ce paragraphe, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.1

Une *suite numérique* est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n à la place de $u(n)$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit que u est une suite *réelle*, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ on dit que la suite est *complexe*. La suite u peut aussi être notée (u_n).

Remarque 2.2

Une suite u peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang n_0 : on note alors $(u_n)_{n\geq n_0}$.

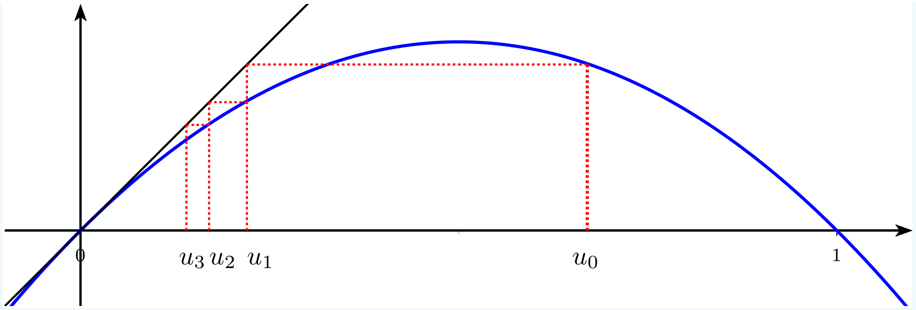
Remarque 2.3

Une suite u peut être définie de plusieurs façons :
- par une formule *explicite* qui exprime u_n en fonction de n (par exemple $u_n = n^2\ln(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) ;
- par une relation de *récurrence* : u_{n+1} est exprimé en fonction de $u_0, u_1, \ldots, u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par exemple la suite logistique) ;
- *implicitement* par une propriété qui caractérise u_n pour tout n (par exemple u_n est l'unique solution réelle de l'équation $x^3 - nx^2 + x - n = 0$).

Remarque 2.4

Il peut être utile de représenter une suite (u_n) par son graphe (au sens des applications) lorsque u est définie explicitement.

Lorsque u est définie par récurrence sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, il est plus utile de dessiner la courbe représentative de f ainsi que la droite D d'équation $y = x$ pour obtenir graphiquement les nombres u_n, comme indiqué ci-dessous pour la suite logistique ($f : x \mapsto x(1-x)$.)



On place u_0 sur l'axe des abscisses. Comme $u_1 = f(u_0)$, on obtient u_1 en prenant l'ordonnée du point sur la courbe de f d'abscisse u_0. Pour calculer u_2, il faut placer u_1 sur l'axe des abscisses. Pour cela, il suffit d'effectuer la symétrie orthogonale d'axe D.

Graphiquement, la suite logistique semble converger vers 0...

Dans tout ce qui suit, sauf mention explicite du contraire, les suites considérées seront toutes réelles.

3. Limite d'une suite

3.1. Définitions.

Définition 3.1

On dit qu'une suite (u_n) *converge vers un réel* ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On dit qu'une suite est *convergente* si elle converge vers un certain réel.

Exemple 3.2

Montrons, en utilisant la définition ci-dessus que $(1/n)$ converge vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. On a alors pour tout $n \geq N$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon$.

Proposition 3.3: unicité de la limite

Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ tels que la suite (u_n) converge à la fois vers ℓ et ℓ'. Alors $\ell = \ell'$.

Définition 3.4

Si (u_n) converge vers ℓ, on dit que ℓ est la *limite* de (u_n) et on note $\ell = \lim u_n$. On dit aussi que u_n tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$ et l'on note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Proposition 3.5

Toute suite convergente est bornée.

Définition 3.6

- On dit qu'une suite *diverge* si elle ne converge pas.
- On dit que (u_n) *diverge vers* $+\infty$ si

$$\forall M > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \geq M.$$

— On dit que (u_n) *diverge vers* $-\infty$ si
$$\forall m < 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n \leq m.$$

3.2. Opérations sur les limites.

Proposition 3.7

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. On note $\ell = \lim u_n$ et $\ell' = \lim v_n$.

(1) La somme $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.
(2) Le produit $(u_n v_n)$ converge vers $\ell\ell'$.

Proposition 3.8

Soit (u_n) une suite convergente vers $\ell \neq 0$. Alors $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $\dfrac{1}{\ell}$.

Proposition 3.9

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\lim u_n = +\infty$.

(1) Si (v_n) est minorée, alors $(u_n + v_n)$ diverge vers $+\infty$.
(2) Si (v_n) est minorée par un réel strictement positif, alors $(u_n v_n)$ diverge vers $+\infty$.
(3) Si (v_n) est majorée par un réel strictement négatif, alors $(u_n v_n)$ diverge vers $-\infty$.

Proposition 3.10

Soit (u_n) une suite qui diverge vers $+\infty$. Alors $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers 0.

3.3. Limites et inégalités.

Proposition 3.11

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq n_0$. Alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Proposition 3.12: Théorème des gendarmes

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que
$$\forall n \geq n_0,\ u_n \leq v_n \leq w_n.$$
Si (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors (v_n) converge vers ℓ.

Proposition 3.13

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq n_0$.

(1) Si (u_n) diverge vers $+\infty$, alors (v_n) diverge vers $+\infty$.
(2) Si (v_n) diverge vers $-\infty$, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

Théorème 3.14: limite monotone

Soit (u_n) une suite.

(1) Si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) converge vers $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

(2) Si (u_n) est croissante et non majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

(3) Si (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) converge vers $\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

(4) Si (u_n) est décroissante et non minorée, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

Définition 3.15

On dit que deux suites u et v sont *adjacentes* si

(1) u est croissante ;

(2) v est décroissante ;

(3) $\lim u_n - v_n = 0$.

Proposition 3.16

Soient u et v deux suites adjacentes. Alors u et v convergent vers la même limite.

3.4. Suites extraites.

Définition 3.17

Soit (u_n) une suite et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. On dit que la suite $(u_{\varphi(n)})$ est *extraite*, ou que c'est une *sous-suite* de (u_n).

Proposition 3.18

Soit u une suite convergente de limite ℓ. Alors toutes les suites extraites de u convergent vers ℓ.

Corollaire 3.19

Soit u une suite. Si u possède deux sous-suites qui ne convergent pas vers la même limite, alors u diverge.

Proposition 3.20

Soit u une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ, alors u converge vers ℓ.

Théorème 3.21: Bolzano-Weierstrass

De toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

4. Suites récurrentes

4.1. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2. Dans ce paragraphe, les suites sont à valeurs dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 4.1

On dit qu'une suite u est *récurrente linéaire d'ordre 2* s'il existe $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Dans ce cas, l'équation $z^2 = az + b$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ est appelée *équation caractéristique.*

Proposition 4.2

Soit u une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et (C) l'équation caractéristique associée.

(1) Si (C) possède deux racines distinctes $r_1 \neq r_2$, alors il existe $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$.

(2) Si (C) possède une racine double r, alors il existe $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (An + B)r^n$.

Proposition 4.3

Soit u une suite récurrente linéaire d'ordre 2 réelle et (C) l'équation caractéristique associée.

(1) Si (C) possède deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$, alors il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$.

(2) Si (C) possède une racine double réelle r, alors il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (An + B)r^n$.

(3) Si (C) possède deux racines non réelles conjuguées $re^{\pm i\theta}$ avec $r \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = r^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$.

4.2. Suites récurrentes d'ordre 1. Dans ce paragraphe, u est une suite réelle vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

où f est une fonction réelle.
Pour étudier une telle suite, on procède de la façon suivante :

(1) on étudie rapidement la fonction f et on trace sa courbe représentative ;

(2) on montre que la suite u est bien définie en montrant par récurrence que pour tout n, u_n existe et se trouve dans le domaine de définition de f ;

(3) à partir de la courbe de f, on devine la monotonie de f :
   - si on pense que u est monotone, on le prouve en étudiant le signe de $f(x) - x$: si ce signe est constant sur un intervalle I et si I est stable par f (c'est-à-dire $f(x) \in I$ pour tout $x \in I$) et si un terme de la suite est dans I, alors u est monotone.
   - si u ne semble pas monotone, on peut s'intéresser aux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) qui sont peut-être monotones ! On peut aussi prouver la convergence ou la divergence de u avec le théorème des accroissements finis.

(4) On peut prouver l'existence d'une limite avec le théorème de la limite monotone ou en utilisant l'inégalité des accroissements finis ;

(5) si u a une limite finie ℓ et si f est continue, alors $f(\ell) = \ell$: on dit que ℓ est un point fixe de f. Ce résultat permet de trouver ℓ si on sait que la suite converge, ou de prouver que u n'a pas de limite car f n'a pas de point fixe.

Exemple 4.4

On reprend l'exemple de la suite logistique définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$$

et $u_0 \in]0, 1[$.

On pose $f : x \mapsto x(1-x)$. La fonction f est continue et une rapide étude prouve que pour tout $x \in [0,1], f(x) \in [0,1]$. On en déduit par récurrence que la suite u est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.

De plus, pour tout $x \in [0,1], f(x) - x = -x^2 \leq 0$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leq 0$, donc la suite u est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge. On note ℓ sa limite. On sait alors que $f(\ell) = \ell$, donc $\ell \in \{0,1\}$. Comme la suite converge en décroissante, $\ell \leq u_0 < 1$ donc $\ell = 0$.

En conclusion, la suite u converge en décroissant vers 0.

5. Suites complexes

Dans ce paragraphe, toutes les suites sont à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 5.1

Soit z une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que z *converge* vers ℓ ou que ℓ est une *limite* de z si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |z_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Remarque 5.2

Dans la définition ci-dessus, $|.|$ désigne le module (et non la valeur absolue.)

Proposition 5.3

Soit (z_n) une suite complexe, $\ell \in \mathbb{C}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N},\ x_n = \mathrm{Re}(z_n),\ y_n = \mathrm{Im}(z_n),\ x = \mathrm{Re}(\ell),\ y = \mathrm{Im}(\ell)$. Alors

$$z_n \longrightarrow \ell \iff \begin{cases} x_n \longrightarrow x \\ y_n \longrightarrow y \end{cases}$$

Corollaire 5.4: Unicité de la limite

Si (z_n) converge vers ℓ_1 et ℓ_2 alors $\ell_1 = \ell_2$.

Corollaire 5.5: Opération sur les limites

Soient u et v deux suites complexes convergeant respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2. Alors

- $u_n + v_n \longrightarrow \ell_1 + \ell_2$;
- $u_n v_n \longrightarrow \ell_1 \ell_2$;
- si $\ell_2 \neq 0$, $\dfrac{u_n}{v_n} \longrightarrow \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$.

Définition 5.6

Soit (u_n) une suite et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. On dit que la suite $(u_{\varphi(n)})$ est *extraite*, ou que c'est une *sous-suite* de (u_n).

Proposition 5.7

Soit u une suite convergente de limite ℓ. Alors toutes les suites extraites de u convergent vers ℓ.

Corollaire 5.8

Soit u une suite. Si u possède deux sous-suites qui ne convergent pas vers la même limite, alors u diverge.

Proposition 5.9

Soit u une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ, alors u converge vers ℓ.

Théorème 5.10: Bolzano-Weierstrass

De toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

6. Domination, négligeabilité, équivalence

Définition 6.1

Soient u et v deux suites complexes. On dit que v *domine* u si

$$\exists M \in \mathbb{R}^+,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n| \leq M|v_n|.$$

Dans ce cas, on note $u = O(v)$ et on lit "u est un grand o de v".

Proposition 6.2

Soient u et v deux suites complexes telles que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors $u = O(v)$ si et seulement si la suite u/v est bornée.

Définition 6.3

Soient u et v deux suites complexes. On dit que u est *négligeable* devant v si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n| \leq \varepsilon |v_n|.$$

On note alors $u = o(v)$ et on lit "u est un petit o de v".

Proposition 6.4

Soient u et v deux suites complexes telles que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors $u = o(v)$ si et seulement si la suite u/v converge vers 0.

Exemple 6.5

Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. Alors $x^n = o_{n\to+\infty}(n!)$.

Proposition 6.6: Transitivité

Soient u, v, w trois suites telles que $u = o(v)$ et $v = o(w)$. Alors $u = o(w)$.

Proposition 6.7: Règles de calcul

Soient u et v deux suites et $\lambda \in \mathbb{C}$.

(1) $o(u) + o(u) = o(u)$;

(2) $o(\lambda u) = o(u)$;

(3) $o(u)o(v) = o(uv)$;

Définition 6.8

Soient u et v deux suites complexes. On dit que u et v sont *équivalentes* si $u = v + o(v)$. On écrit alors $u \sim v$.

Exemple 6.9

Soit u une suite convergente de limite non nulle ℓ. Alors $u \sim \ell$.

Proposition 6.10

Soient u, v, w trois suites.

(1) $u \sim u$ (réflexivité)

(2) $u \sim v \implies v \sim u$ (symétrie)

(3) $(u \sim v \text{ et } v \sim w) \implies u \sim w$ (transitivité).

Proposition 6.11

Soient u et v deux suites complexes telles que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors $u \sim v$ si et seulement si la suite u/v converge vers 1.

Proposition 6.12

Soient u et v deux suites équivalentes. Si v a une limite, alors u aussi et les deux limites sont égales.

Proposition 6.13: compatibilité avec les produits et quotients

Soient u, v, x, y quatre suites telles que $u \sim v$ et $x \sim y$.

(1) Alors $ux \sim vy$.

(2) Si x ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $\frac{u}{x} \sim \frac{v}{y}$.

Proposition 6.14

Soient u et v deux suites réelles équivalentes telles que v soit de signe constant à partir d'un certain rang. Alors à partir d'un certain rang u et v sont de même signe.