Chapitre 22

Dénombrement

1. Préliminaires

Proposition 1.1

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $X \subset [\![1, n]\!]$. On suppose $X \neq \emptyset$ et $X \neq [\![1, n]\!]$. Alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 < p < n$ et une bijection f de X dans $[\![1, p]\!]$.

Démonstration. On procède par récurrence sur n.
- Soit $n = 2$, et $X \subset \{1, 2\}$ tels que $X \neq \emptyset$ et $X \neq \{1, 2\}$. Alors $X = \{1\}$ et donc X est en bijection avec $[\![1, p]\!]$ avec $p = 1$, et on a bien $0 < p < n$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2 qui vérifie la proposition à démontrer. Soit X une partie non vide de $[\![1, n+1]\!]$ différente de $[\![1, n+1]\!]$. On distingue deux cas :
  - on suppose que $n + 1 \notin X$; alors $X \subset [\![1, n]\!]$. Si $X = [\![1, n]\!]$, alors on a naturellement une bijection de X dans $[\![1, p]\!]$ avec $p = n$, et on a bien $0 < p < n + 1$. Sinon, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 < p < n$ et une bijection de X dans $[\![1, p]\!]$, et on a alors bien $0 < p < n + 1$.
  - On suppose que $n + 1 \in X$; dans ce cas on pose $Y = X \setminus \{n + 1\} \subset [\![1, n]\!]$. Si $Y\emptyset$, alors $X = \{n + 1\}$ qui est en bijection avec $[\![1, p]\!]$ avec $0 < 1 = p < n + 1$. Sinon, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $0 < q < n$ et une bijection $g : Y \to [\![1, q]\!]$. En posant $g(n + 1) = q + 1$, on prolonge g en une bijection de X sur $[\![1, q + 1]\!]$, et on a le résultat.

$\square$

Corollaire 1.2

Soient n, p deux entiers naturels strictement positifs et $f : [\![1, p]\!] \to [\![1, n]\!]$ une surjection. Alors $p \geq n$.

Démonstration. De nouveau par récurrence sur n.
- L'initialisation est ici triviale.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et toute application $f : [\![1, p]\!] \to [\![1, n$, si f est surjective, alors $p \geq n$. Soit maintenant $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : [\![1, p]\!] \to [\![1, n + 1]\!]$ une surjection. On note $X = f^{-1}([\![1, n]\!] \subset [\![1, p]\!]$. Comme f est surjective, $X \neq \emptyset$ et $X \neq [\![1, p]\!]$. Par suite, il existe $q \in \mathbb{N}$ et g une bijection de X sur $[\![1, q]\!]$ avec $0 < q < p$. L'application $f \circ g^{-1}$ établit alors une surjection de $[\![1, q]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$ donc $q \geq n$. On en déduit que $p > n$ et donc $p \geq n + 1$.

$\square$

Corollaire 1.3

Soient n, p deux entiers strictement positifs et $f : [\![1, p]\!] \to [\![1, n]\!]$ une injection. Alors $p \leq n$.

Démonstration. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Si j a un antécédent i par f, celui-ci est unique puisque f est injective. On pose alors $g(j) = i$. Si j n'a pas d'antécédent, on pose $g(j) = 1$. On vient de définir une application $g : [\![1, n]\!] \to [\![1, p]\!]$ surjective : chaque $i \in [\![1, p]\!]$ a pour antécédent $f(i)$. Donc $n \geq p$. $\square$

Corollaire 1.4

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $f : [\![1, p]\!] \to [\![1, n]\!]$. Si f est bijective alors $n = p$.

2. Ensembles finis

Définition 2.1

On dit qu'un ensemble E est *fini* s'il existe un entier n tel que E est en bijection avec $\{1, \ldots, n\}$. L'entier n est indépendant de la bijection choisie et appelé *cardinal* de E. On le note $\mathrm{Card}(E)$ ou $|E|$ ou $\sharp E$.

Proposition 2.2

Soit E un ensemble fini. Alors tout sous-ensemble F de E est fini et vérifie $\mathrm{Card}\, F \leq \mathrm{Card}\, E$. De plus, si $\mathrm{Card}\, F = \mathrm{Card}\, E$, alors $F = E$.

Proposition 2.3

Soient E et F deux ensembles finis, et $f : E \to F$ une application.

(1) Si f est bijective, alors $\mathrm{Card}\, E = \mathrm{Card}\, F$.

(2) Si f est injective, alors $\mathrm{Card}\, E \leq \mathrm{Card}\, F$.

(3) Si f est surjective, alors $\mathrm{Card}\, E \geq \mathrm{Card}\, F$.

Proposition 2.4

Soient E et F deux ensembles de même cardinal et $f : E \to F$ une application. Alors

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective.}$$

Proposition 2.5

Soient E un ensemble fini, A et B deux sous-ensembles de E. Alors

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}\, A + \mathrm{Card}\, B - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Corollaire 2.6

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une partition d'un ensemble fini E. Alors $\mathrm{Card}\, E = \displaystyle\sum_{i \in I} \mathrm{Card}\, A_i$.

Proposition 2.7: Principe des bergers

Soit $f : E \to F$ une application où F est un ensemble fini. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que tout élément y de F a exactement p antécédents par f. Alors $\mathrm{Card}\, E = p\, \mathrm{Card}\, F$.

Proposition 2.8

Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et $\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}\, E \times \mathrm{Card}\, F$.

Proposition 2.9

Soit E un ensemble fini. Alors $\mathscr{P}(E)$ est fini et $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}\, E}$.

3. Dénombrement

Nous nous intéressons dans ce paragraphe au cardinal d'ensembles particuliers (listes, arrangements, combinaisons) pour lesquels on dispose de formules.

Dans ce paragraphe, E désigne un ensemble fini de cardinal n.

Définition 3.1

Soit $p \in \mathbb{N}$. Une *p-liste* de E est un élément de E^p.

Proposition 3.2

Soit $p \in \mathbb{N}$. Il y a n^p p-listes de E.

Définition 3.3

Soit $p \in \mathbb{N}$. Un *p-arrangement* de E est une p-liste $(x_1, \dots, x_p)$ qui vérifie $x_i \neq x_j$ pour tout $i \neq j$.

Proposition 3.4

Soit $p \in \mathbb{N}$. Il y a $n(n-1)\dots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ arrangements de p éléments de E.

Définition 3.5

Une *permutation* de E est un n-arrangement de E.

Définition 3.6

Une p-combinaison de E est un sous-ensemble de E de cardinal p.

Proposition 3.7

Il y a $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ combinaisons de p éléments de E.

On donne à présent quelques applications de cette formule.

Proposition 3.8: Formule de Pascal

$\forall\ 0 \leq p \leq n,\ \dbinom{n+1}{p+1} = \dbinom{n}{p+1} + \dbinom{n}{p}$.

Proposition 3.9: Formule du binôme

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.