

CHAPITRE 16

Dérivation

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

I	Définition et premières propriétés	2
II	Théorème de Rolle et accroissements finis	4
III	Dérivées n -ièmes	7
IV	Fonctions à valeurs complexes	10

Première partie

Définition et premières propriétés

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction définie sur un intervalle ouvert non vide I à valeurs réelles.

Définition: Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ a une limite qui est finie quand $x \rightarrow a$.
 Dans ce cas, cette limite est notée $f'(a)$ et est appelée nombre dérivée de f en a .
 On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout $a \in I$.
 L'application $\begin{matrix} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & f'(a) \end{matrix}$ est la dérivée de f et est notée f' .

Proposition:

f est dérivable en $a \iff f$ a un développement limité d'ordre 1 au voisinage de a

Proposition: Si f est dérivable en a alors f est continue en a .

Proposition: Soient f et g dérivables en a

1. $f + g$ est dérivable en a et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2. $f \times g$ est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
3. Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

Proposition: Soit f dérivable en a et g dérivable en $f(a)$. Alors, $f \circ g$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

Proposition: On suppose que f est bijective dérivable en a et $f'(a) \neq 0$. Si f^{-1} est continue, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et

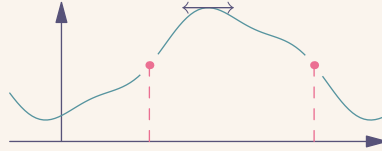
$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

Deuxième partie

Théorème de Rolle et accroissements finis

Théorème (Théorème de Rolle): Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors,

$$\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$$



Définition: On dit que f présente un maximum local en a s'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]a - \eta, a + \eta[, f(x) \leq f(a)$$

et un minimum local en a s'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]a - \eta, a + \eta[, f(x) \geq f(a)$$

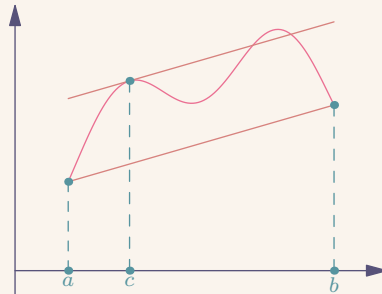
Un extremum local est un minimum local ou un maximum local.

Proposition: Soit $a \in I$ tel que $f(a)$ est un extremum local de f où f est dérivable en a . Alors, $f'(a) = 0$ □

Définition: Soit f dérivable et $a \in I$. On dit que a est un point critique de f si $f'(a) = 0$. On dit que $f(a)$ est une valeur critique.

Théorème (Théorème des accroissements finis): Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



Proposition: Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable avec I un intervalle non vide.

1. f est croissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \geq 0$
2. f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \leq 0$
3. $\forall x \in I, f'(x) > 0 \implies f$ strictement croissante
4. $\forall x \in I, f'(x) < 0 \implies f$ strictement décroissante
5. f constante $\iff \forall x \in I, f'(x) = 0$

■

Théorème (Théorème de la limite de la dérivée): Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue (sur I), $a \in I$. On suppose f dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et que $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x)$ existe.

Alors,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \neq a]{x \rightarrow a} \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(a)$$

■

Proposition: Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, |f'(x)| \leq M$$

Alors f est M -lipschitzienne sur I .

■

Troisième partie

Dérivées n -ièmes

Définition: On dit que f est une fois dérivable si f est dérivable. Dans ce cas, on note $f^{(1)}$ la fonction f' .
 Pour $n \in \mathbb{N}_*$, on dit que f est dérivable n fois si f est dérivable $n - 1$ fois et $f^{(n-1)}$ est dérivable une fois. Dans ce cas, $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

REMARQUE (Convention):

$$f^{(0)} = f$$

Définition: f est de classe \mathcal{C}^n si f est dérivable n fois et $f^{(n)}$ est continue.

Proposition: Soit f dérivable n fois et $k \leq n$.
 Alors f est dérivable k fois et $f^{(n)} = \left(f^{(k)}\right)^{(n-k)}$

□

Proposition: Soit f et g deux fonctions dérivables n fois en a .
 Alors, $f + g$ est dérivable n fois en a et

$$(f + g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)$$

Si f et g sont de classe \mathcal{C}^n , alors, $f + g$ est de classe \mathcal{C}^n

■

Proposition (Leibniz): Soient f et g dérivables n fois en a . Alors, $f \times g$ est dérivable n fois en a . et

$$(*) : \quad (f \times g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$$

Si f et g sont de classe \mathcal{C}^n alors $f \times g$ est de classe \mathcal{C}^n .

■

Proposition: Soient f et g dérivables n fois (resp. de classe \mathcal{C}^n). On suppose $g(a) \neq 0$.
 Alors, $\frac{f}{g}$ est dérivable n fois (resp. \mathcal{C}^n) en a .

■

Proposition: Soit f dérivable n fois en a et g dérivable n fois en $f(a)$ (resp. f et g de classe \mathcal{C}^n).
 Alors, $g \circ f$ est dérivable n fois en a (resp. de classe \mathcal{C}^n).

■

Définition: On dit que f est de classe \mathcal{C}^∞ si f est de classe \mathcal{C}^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, i.e.

f est dérivable une infinité de fois.

Proposition (formule de Taylor avec reste intégral): Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^{n+1} et $a \in I$. Alors

$$(*) \quad \forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

■

Proposition (Inégalité de Taylor-Lagrange): Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^{n+1} et $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, \left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq M$$

Alors, pour tout $a \in I$,

$$\forall x \in I, \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

■

Quatrième partie

Fonctions à valeurs complexes

Définition: Soient $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, (I intervalle de \mathbb{R}) et $a \in I$.

f est dérivable en a si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{C}$

Proposition:

f est dérivable en $a \iff \Re(f)$ et $\Im(f)$ sont dérivables en a

Dans ce cas, $f'(a) = \Re(f)'(a) + i\Im(f)'(a)$

□

Proposition: La somme, le produit, de fonctions dérivables sont dérivables; le quotient également si le dénominateur ne s'annule pas.

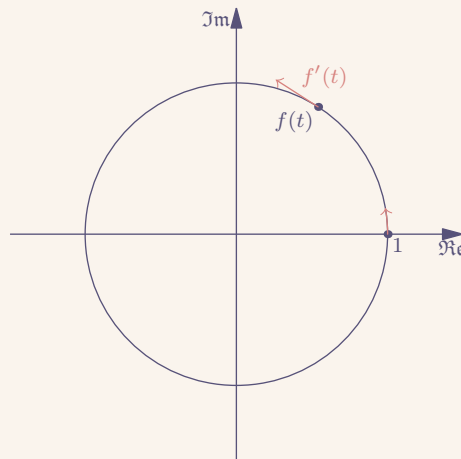
□

Proposition: idem avec les dérivées n -ièmes

□

REMARQUE (Attention \trianglelefteq):

Le théorème de Rolle n'est plus vraie.



$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$t \longmapsto e^{it}$$

$$f(0) = f(2\pi) = 1$$

f est continue sur $[0, 2\pi]$ et dérivable sur $]0, 2\pi[$

$$\forall t, f'(t) = ie^{it} \neq 0$$

Proposition: La formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange sont aussi vrais dans \mathbb{C} .

□