

## CHAPITRE 17

# Dimension finie

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 8 mai 2022

---

**Définition:** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On dit que  $E$  est de dimension finie si  $E$  a au moins une famille génératrice finie. On dit que  $E$  est de dimension infinie sinon.

**Théorème** (Théorème de la base extraite): Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul de dimension finie. Soit  $\mathcal{G}$  une famille génératrice finie de  $E$ . Alors, il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ . ■

**Corollaire:** Tout espace de dimension finie a une base. □

**Théorème** (Théorème de la base incomplète): Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $\mathcal{G}$  une famille génératrice finie de  $E$ .  $\mathcal{L}$  une famille libre de  $E$ . Alors, il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{B} \setminus \mathcal{L} \subset \mathcal{G}$$

■

**Théorème:** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de  $E$  ont le même cardinal. ■

**Lemme:** Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$  telles que  $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ . Alors,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ . ■

**Lemme** (Lemme d'échange): Soient  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  deux bases de  $E$  et  $u \in \mathcal{B}_1 \setminus \mathcal{B}_2$ . Alors, il existe  $v \in \mathcal{B}_2$  tel que  $(\mathcal{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$  soit une base de  $E$ . ■

■

**Définition:** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Le cardinal commun à toutes les bases de  $E$  est appelé dimension de  $E$  est notée  $\dim(E)$  ou  $\dim_{\mathbb{K}}(E)$ . C'est donc aussi le nombre de coordonnées de n'importe quel vecteur dans n'importe quelle base.

**Corollaire:** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $\mathcal{L}$  une famille libre de  $E$ ,  $\mathcal{G}$  une famille génératrice de  $E$ . On note  $n = \dim(E)$

1.  $\#\mathcal{G} \geq n$  et  $(\#\mathcal{G} = n \implies \mathcal{G} \text{ est une base de } E)$
2.  $\#\mathcal{L} \leq n$  et  $(\#\mathcal{L} = n \implies \mathcal{L} \text{ est une base de } E)$

---

**Corollaire:**  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est de dimension infinie.  $\forall i \in \mathbb{N}, e_i : x \mapsto x^i$   
 $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est libre dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

**Proposition:** Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Alors  $E \times F$  est de dimension finie et  $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$

REMARQUE (Convention):

$$\dim(\{0_E\}) = 0$$

**Théorème:** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors,  $F$  est de dimension finie et  $\dim(F) \leq \dim(E)$   
Si  $\dim(F) = \dim(E)$ , alors  $F = E$

**Proposition** (Formule de Grassmann): Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $F$  et  $G$  deux sous-espace vectoriels de  $E$ . Alors,

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

**Corollaire:** Avec les hypothèse précédentes,

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases}$$

**Proposition:** Soit  $F$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $F$ . L'application

$$f : \mathbb{K}^n \longrightarrow F$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

est bijective.

Si  $\mathbb{K}$  est infini,  $\mathbb{K}^n$  aussi et donc  $F$  aussi.

Si  $\#\mathbb{K} = p \in \mathbb{N}_*$ ,

$$\#\mathbb{K}^n = p^n$$

$\parallel$

$$\#F$$