Chapitre 3

Étude de fonctions

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 8 mai 2022

TABLE DES MATIÈRES

Étudier une fonction c'est déterminer tous les éléments (tangentes, asymptotes) qui permettent d'obtenir l'allure de la courbe représentative de la fonction.

Première partie

Calculs de limites

Rappel:
Soient f et g deux fonctions et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

On ne connaît pas, à l'avance, les limites de

— $f(x) - g(x)$ si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \end{cases}$ ("$\infty - \infty$")

— $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \end{cases}$ ("$\frac{0}{0}$")

— $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty \end{cases}$ ("$\frac{\infty}{\infty}$")

— $f(x) \times g(x)$ si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty \end{cases}$ ("$0 \times \infty$")

Proposition:
Si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1 \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty \end{cases}$ alors, on ne sait pas à l'avance calculer $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\big)^{g(x)}$. □

Définition: Soient f et g deux fonctions et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ où $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

On dit que f et g sont <u>équivalentes au voisinage de a</u> (ou éqivalentes en a) s'il existe une fonction u telle que

$$\begin{cases} f = g \times u \\ u(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1 \end{cases}$$

On note alors $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Proposition: Un polynôme est équivalent en $\pm\infty$ à son terme de plus haut degré. ■

Proposition: Un polynôme est équivalent en 0 à sont terme de plus bas degré. ■

Remarque:
Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a tel que

$$\forall x \in I, g(x) \neq 0$$

où I est un intervalle

— qui contient a si $a \in \mathbb{R}$,
— dont une borne est a si $a = \pm\infty$.

Alors,

$$f \underset{a}{\sim} g \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[\substack{x\to a \\ \neq}]{} 1.$$

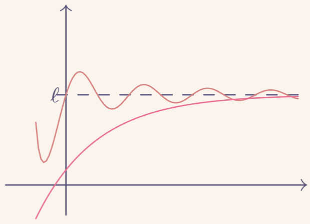
Deuxième partie

Asymptotes, branches paraboliques et prolongement par continuité

Limite en $+\infty$:

Cas 1

$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.



On dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale.

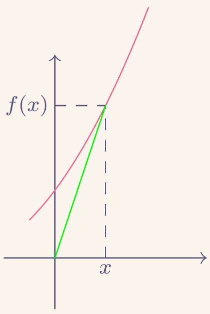
Cas 2

$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$ dans ce cas, on cherche $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Sous cas 1 $\dfrac{f(x)}{x}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

?

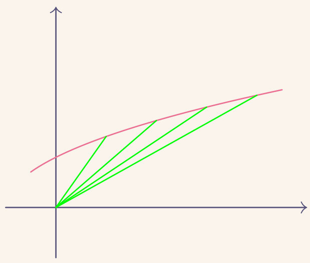
Sous cas 2 $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.



On dit que la courbe de f présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axee des ordonées.

$\dfrac{f(x)}{x}$ est la pente de la droite verte.

Sous cas 3 $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

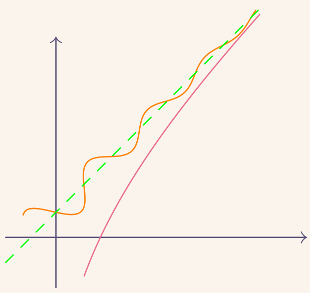


On dit que la courbe de f présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axee des ordonées.

$\dfrac{f(x)}{x}$ est la pente de la droite verte.

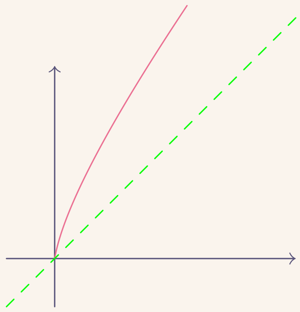
Sous cas 4 $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}^+$. On cherche $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - \ell x\big)$.

Sous-sous cas 1 $f(x) - \ell x \xrightarrow[x\to+\infty]{} a \in \mathbb{R}$



Asymptote oblique d'équation $y = \ell x + a$.

Sous-sous cas 2 $f(x) - \ell x \xrightarrow[x \to +\infty]{} \pm\infty$



Branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = \ell x$.

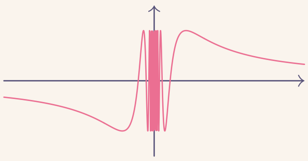
Sous-sous cas 2 $f(x) - \ell x$ n'a pas de limite ?

Limite en $a \in \mathbb{R}$:

On cherche $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

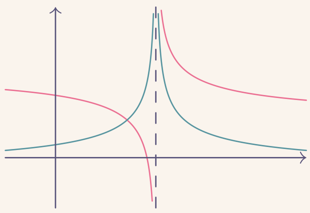
Cas 1

Pas de limite



$\boxed{\text{ex}}$ $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0 :

Cas 2 $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \pm\infty$

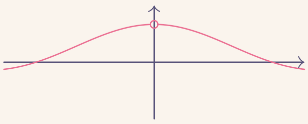


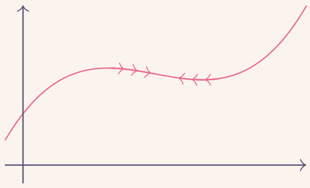
Asymptote verticale d'équation $x = a$.

Cas 3 $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{ex}}$ $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 1$, dans ce cas, on pose

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$





On pose $f(a) = \ell$. On dit que l'on a prolongé par continuité la fonction f.