Chapitre 13

TD

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 26 janvier 2022

Table des matières

Première partie

Exercice 1

On a $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

1. On a $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$, $A^4 = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$.
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n)$: "$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$"
   - Pour $n = 0$, $\begin{pmatrix} a^0 & 0 \\ 0 & a^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = A^0$
     Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie. On a donc $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$.
     Montrons $\mathscr{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A^n \times A &= \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^n \\ 0 & a^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

Deuxième partie

Exercice 17

1. $$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \end{pmatrix}$$

3. ⚠

4.

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. ⚠

Troisième partie

Exercice 12

1.

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

2.

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 1$$

3.

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 2$$

4.

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$