

## CHAPITRE 02

# Nombre

Hugo SALOU MP2I

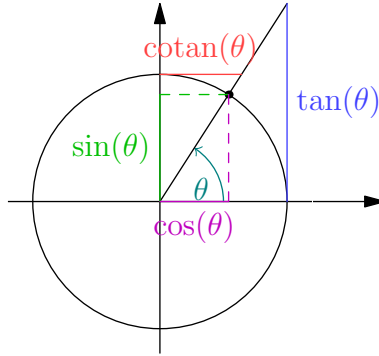
Dernière mise à jour le 28 mars 2022

# Table des matières

I	Trigonométrie	2
II	Nombres complexes de module 1	5
III	Géométrie des nombres complexes	8
IV	Exponentielle complexe	14
V	Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$	16

Première partie

Trigonométrie



**Définition:** On définit, pour

$$\theta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$$

$$\iff \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

la tangente de  $\theta$  par

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

**Définition:** Pour  $\theta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ] -k\pi, (k+1)\pi[$ , on définit la contangente de  $\theta$  par

$$\cotan \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

**Proposition:** Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

1.  $\cos(-a) = \cos(a)$
2.  $\cos(a + 2\pi) = \cos(a)$
3.  $\cos(a + \pi) = -\cos(a)$
4.  $\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
5.  $\sin(-a) = -\sin(a)$
6.  $\sin(a + 2\pi) = \sin(a)$
7.  $\sin(a + \pi) = -\sin(a)$
8.  $\sin(\pi - a) = \sin(a)$

$$9. \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$10. \sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$$

$$11. \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a)$$

$$12. \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)$$

■

**Proposition:** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$  et  $b \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ .

$$1. \tan(a+\pi) = \tan(a)$$

$$2. \tan(-a) = -\tan(a)$$

$$3. \text{ Si } a+b \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}, \text{ alors, } \tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

■

**Proposition:** Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

$$1. \text{ Si } a \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}, \text{ alors, } 1 + \tan^2(a) = \frac{1}{\cos^2(a)}$$

$$2. \text{ Si } a \not\equiv \pi \pmod{2\pi}$$

$$\text{— } \cos(a) = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$$

$$\text{— } \sin(a) = \frac{2 \tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$$

$$\text{— Si } a \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}, \tan(a) = \frac{2 \tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$$

■

Deuxième partie

# Nombres complexes de module 1

**Proposition:** Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

$$(\cos(a) + i \sin(a)) \times (\cos(b) + i \sin(b)) = \cos(a + b) + i \sin(a + b)$$

■

**Définition:** Pour  $a \in \mathbb{R}$ , on pose  $e^{ia} = \cos(a) + i \sin(a)$   
Ainsi,  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, e^{ia} \times e^{ib} = e^{i(a+b)}$

**Proposition:** Soient  $a, b, c$  trois nombres complexes avec  $a \neq 0$  et  $z_1, z_2$  les racines de  $P : z \mapsto az^2 + bz + c$   
Alors,  $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$  et  $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$

■

**Proposition:** Soient  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$  et  $z_1, z_2, z_3$  les solutions de

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

Alors,

$$\begin{cases} z_1 z_2 z_3 = -c \\ z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 = b \\ z_1 + z_2 + z_3 = -a \end{cases}$$

□

**Proposition:** Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$  des nombres complexes et  $z_1, z_2, \dots, z_n$  les solutions de

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = 1$$

Alors,

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} z_{i_1} \times z_{i_2} \times \dots \times z_{i_k} = (-1)^k a_{n-k}$$

$$\sum_{k=1}^n z_k = -a_{n-1}$$

$$\prod_{k=1}^n z_k = (-1)^k a_0$$

■

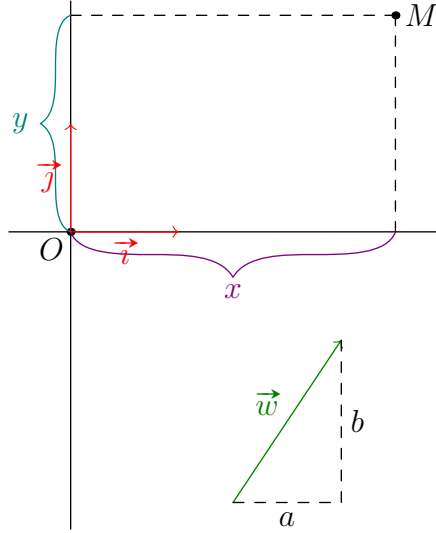




Troisième partie

Géométrie des nombres  
complexes

Dans ce paragraphe,  $\mathcal{P}$  désigne un plan euclidien muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$



**Définition:** Soit  $M \in \mathcal{P}$ . On note  $(x, y)$  les coordonnées du point  $M$  par rapport au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$   
L'affixe de  $M$  est le nombre

$$z_M = x + iy \in \mathbb{C}$$

Soit  $\vec{w} \in \vec{\mathcal{P}}$  (le plan des vecteurs) et  $(a, b)$  les coordonnées de  $\vec{w}$ .  
L'affixe de  $\vec{w}$  est

$$z_{\vec{w}} = a + ib \in \mathbb{C}$$

**Proposition:** Soit  $(A, B) \in \mathcal{P}^2$  et  $(\vec{w}_1, \vec{w}_2) \in \vec{\mathcal{P}}^2$

1.  $z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$
2.  $z_{\vec{w}_1 + \vec{w}_2} = z_{\vec{w}_1} + z_{\vec{w}_2}$

□

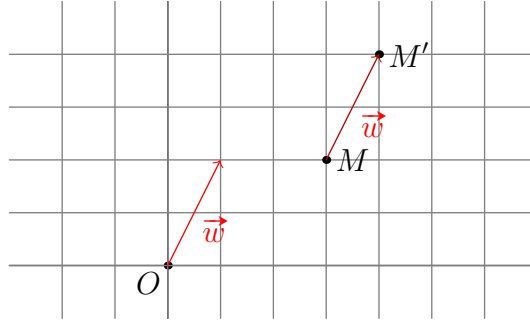
**Proposition:** Soit  $(\vec{w}_1, \vec{w}_2) \in \vec{\mathcal{P}}^2$  avec  $\vec{w}_1 \neq \vec{0}$  et  $\vec{w}_2 \neq \vec{0}$   
Alors,  $\left| \frac{z_{\vec{w}_1}}{z_{\vec{w}_2}} \right| = \frac{\|\vec{w}_1\|}{\|\vec{w}_2\|}$  et  $\arg \left( \frac{z_{\vec{w}_1}}{z_{\vec{w}_2}} \right) = \underbrace{(\vec{w}_1, \vec{w}_2)}_{\text{l'angle entre } \vec{w}_1 \text{ et } \vec{w}_2}$

■

**Corollaire:** Avec les hypothèses et notations précédentes,

1.  $\vec{w}_1$  et  $\vec{w}_2$  sont collinéaires  $\iff \frac{z_{\vec{w}_1}}{z_{\vec{w}_2}} \in \mathbb{R}$
2.  $\vec{w}_1$  et  $\vec{w}_2$  sont orthogonaux  $\iff \frac{z_{\vec{w}_1}}{z_{\vec{w}_2}} \in i\mathbb{R}$

■



**Définition:** Soit  $\vec{w} \in \vec{\mathcal{P}}$ . La translation de vecteur  $\vec{w}$  est l'application

$$\begin{aligned} t_{\vec{w}} : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

où  $M'$  vérifie  $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$

**Proposition:** Soit  $\vec{w} \in \vec{\mathcal{P}}$  et  $(M, M') \in \mathcal{P}^2$

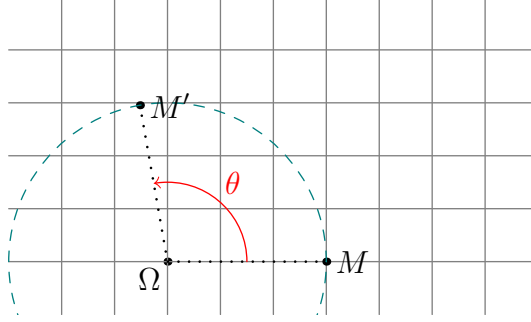
$$M' = t_{\vec{w}}(M) \iff z_{M'} = z_M + z_{\vec{w}}$$

■

**Proposition:** Soient  $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \mathcal{P}$ .

$$t_{\vec{w}_2} \circ t_{\vec{w}_1} = t_{\vec{w}_1 + \vec{w}_2}$$

■



**Définition:** Soit  $\Omega \in \mathcal{P}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ .

La rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\theta$  est l'application

$$\begin{aligned} \rho_{\Omega, \theta} : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

où  $M'$  vérifie

$$\begin{cases} \|\vec{\Omega M}\| = \|\vec{\Omega M'}\| \\ (\widehat{\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}}) = \theta \end{cases}$$

**Proposition:** Soit  $\Omega \in \mathcal{P}$  d'affixe  $\omega$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $(M, M') \in \mathcal{P}^2$

$$(*) : \quad M' = \rho_{\Omega, \theta}(M) \iff z_{M'} = \omega + e^{i\theta}(z_M - \omega)$$

■

REMARQUE (Cas particulier):

Si  $\Omega = O$  alors

$$(*) \iff z_{M'} = e^{i\theta} z_M$$

**Corollaire:** Soit  $\Omega \in \mathcal{P}$  d'affixe  $\omega$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \rho_{\Omega, \theta} &= t_{\vec{O\Omega}} \circ \rho_{O, \theta} \circ t_{\vec{\Omega O}} \\ &= t_{\vec{O\Omega}} \circ \rho_{O, \theta} \circ (t_{\vec{O\Omega}})^{-1} \end{aligned}$$

**Proposition:** Soient  $(\Omega_1, \Omega_2) \in \mathcal{P}^2$  et  $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\rho_{\Omega_1, \theta_1} \circ \rho_{\Omega_1, \theta_2} = \rho_{\Omega_1, \theta_1 + \theta_2} = \rho_{\Omega_1, \theta_2} \circ \rho_{\Omega_1, \theta_1}$$

Si  $\begin{cases} \Omega_1 \neq \Omega_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases}$  alors  $\rho_{\Omega_1, \theta_1} \circ \rho_{\Omega_2, \theta_2}$  est une rotation d'angle  $\theta_1 + \theta_2$

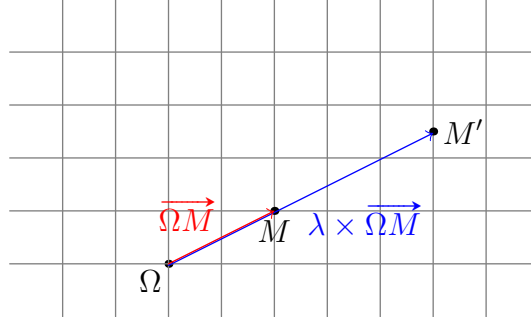
Si  $\begin{cases} \Omega_1 \neq \Omega_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \equiv 0 \pmod{2\pi} \end{cases}$  alors  $\rho_{\Omega_1, \theta_1} \circ \rho_{\Omega_2, \theta_2}$  est une translation

■

**Proposition:** Soit  $\Omega \in \mathcal{P}$  d'affixe  $\omega$ ,  $\vec{w} \in \vec{\mathcal{P}}$  d'affixe  $u$ . Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  avec  $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ .

- $t_{\vec{w}} \circ \rho_{\Omega, \theta}$  est une rotation d'angle  $\theta$
- $\rho_{\Omega, \theta} \circ t_{\vec{w}}$  est aussi une rotation d'angle  $\theta$

■



**Définition:** Soit  $\Omega \in \mathcal{P}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

L'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $\lambda$  est l'application

$$h_{\Omega, \lambda} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$

$$M \longmapsto M'$$

où  $M'$  vérifie  $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$

**Proposition:** Soit  $\Omega \in \mathcal{P}$  d'affixe  $\omega$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Soient  $M \in \mathcal{P}$  d'affixe  $z$  et  $M' \in \mathcal{P}$  d'affixe  $z'$ .

$$M' = h_{\Omega, \lambda}(M) \iff z' = \omega + \lambda(z - \omega)$$

■

**Proposition:** Soient  $(\Omega_1, \Omega_2) \in \mathcal{P}^2$  et  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{P}^2$

1. Si  $\Omega_1 = \Omega_2$  alors,  $h_{\Omega_1, \lambda_1} \circ h_{\Omega_2, \lambda_2} = h_{\Omega_1, \lambda_1 \lambda_2}$
2. Si  $\Omega_1 \neq \Omega_2$  et  $\lambda_1 \lambda_2 \neq 1$ , alors,  $h_{\Omega_1, \lambda_1} \circ h_{\Omega_2, \lambda_2}$  est une homothétie de rapport  $\lambda_1 \lambda_2$
3. Si  $\Omega_1 \neq \Omega_2$  et  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ , alors,  $h_{\Omega_1, \lambda_1} \circ h_{\Omega_2, \lambda_2}$  est une translation.

□

**Proposition:** Soit  $\Omega \in \mathcal{P}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,  $\vec{w} \in \vec{\mathcal{P}}$ .

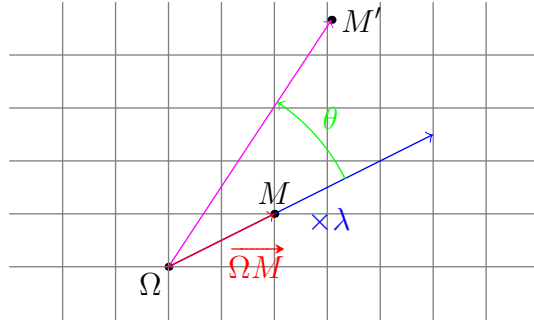
Alors,  $t_{\vec{w}} \circ h_{\Omega, \lambda}$  et  $h_{\Omega, \lambda} \circ t_{\vec{w}}$  sont homothéties de rapport  $\lambda$ .

□

REMARQUE (Cas particulier):

Soit  $M \in \mathcal{P}$  d'affixe  $z$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $M' = h_{O, \lambda}(M)$  d'affixe  $z'$

On a  $z' = \lambda z$



**Définition:** Soient  $\Omega \in \mathcal{P}$ ,  $(\theta, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ . La similitude (directe) de centre  $\Omega$ , d'angle  $\theta$  et de rapport  $\lambda$  est

$$S_{\Omega, \theta, \lambda} = h_{\Omega, \lambda} \circ \rho_{\Omega, \theta}$$

Avec les notations précédentes,

**Proposition:**

$$S_{\Omega, \theta, \lambda} = \rho_{\Omega, \theta} \circ h_{\Omega, \lambda}$$

■

**Proposition:** L'expression complexe de  $S_{\Omega, \theta, \lambda}$  est

$$z' = \omega + \lambda e^{i\theta}(z - \omega)$$

Quatrième partie

Exponentielle complexe

**Définition:** Pour  $z \in \mathbb{C}$ , on pose

$$\exp(z) = e^{\Re(z)} \times (\cos(\Im(z)) + i \sin(\Im(z)))$$

Ainsi, si  $z = a + ib$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\exp(z) = \exp(a + ib) = e^a \times (\cos(b) + i(\sin(b))) = e^a e^{ib}$$

**Proposition:** Soient  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \times \exp(z_2)$$

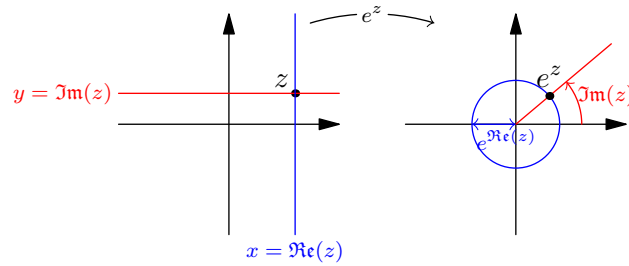
■

REMARQUE (Notation):

On écrit  $e^z$  à la place de  $\exp(z)$  pour  $z \in \mathbb{C}$ .

**Proposition:**

$$\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} |e^z| = e^{\Re(z)} \\ \arg(e^z) \equiv \Im(z) \pmod{2\pi} \end{cases}$$



REMARQUE:

$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  n'est pas bijective :

$$\begin{cases} \exp(0) = \exp(2i\pi) = 1 \\ 0 \neq 2i\pi \end{cases}$$

— 0 n'a pas d'antécédant

Il n'y a donc pas de logarithme complexe.



Cinquième partie

Fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$

**Définition:** Soit  $f$  définie sur  $D \subset \mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  ( $\forall x \in D, f(x) \in \mathbb{C}$ )  
On pose :

$$\begin{aligned}\Re(f) : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \Re(f(x))\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Im(f) : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \Im(f(x))\end{aligned}$$

**Définition:** Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ . On dit que

- $f$  est continue si  $\Re(f)$  et  $\Im(f)$  sont continues
- $f$  est dérivable si  $\Re(f)$  et  $\Im(f)$  sont dérivables.

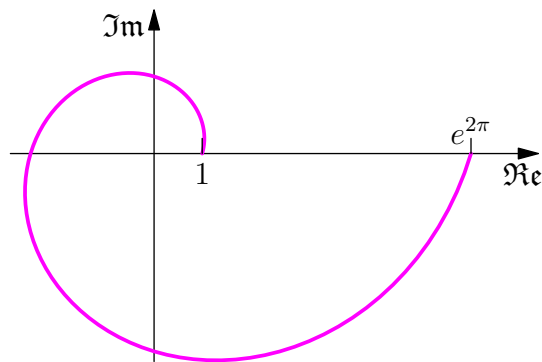
Dans ce cas, la dérivée de  $f$  est

$$\begin{aligned}f' : D &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \Re(f)'(x) + i\Im(f)'(x)\end{aligned}$$

REMARQUE:

On peut représenter  $f$  de la façon suivante.

$$\begin{aligned}f : [0, 2\pi[ &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{(1+i)t}\end{aligned}$$



**Proposition:** Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur  $D \subset \mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$

1.  $u + v$  dérivable et  $(u + v)' = u' + v'$

2.  $uv$  dérivable et  $(uv)' = u'v + v'u$

3. Si  $v \neq 0$ ,  $\frac{u}{v}$  dérivable et  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

■

**Proposition:** Soit  $v : D \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  deux fonctions dérivables (avec  $D \subset \mathbb{R}$ ).

Alors,  $u \circ v$  est dérivable et

$$(u \circ v)' = (u' \circ v) \times v'$$

■

**Proposition:** Soit  $u : D \rightarrow \mathbb{C}$  et  $f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{u(x)} \end{array}$

Alors,  $f$  est dérivable sur  $D$  et

$$\forall x \in D, f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

■