Chapitre 10

TD

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 30 janvier 2022

Table des matières

Première partie

Exercice 6

Pour $n \in \mathbb{N}$. On pose $P(n)$: "$2^n \in A$"

- D'après l'énoncé, $2^0 = 1 \in A$
  Donc $P(0)$ est vraie
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $P(n)$ vraie.
  $2^n \in A$ donc $2 \times 2^n \in A$ donc $2^{n+1} \in A$
  Donc $P(n+1)$ est vraie

On fixe $p \in A$.
Pour $k \in [\![0, p-1]\!]$, on pose $Q_p(k)$: "$p - k \in A$"

- $p \in A$ par hypothèse donc $Q_p(0)$ est vraie
- Soit $k \in [\![0, p-2]\!]$. On suppose $Q_p(k)$ vraie.
  $p - k \in A$ donc $p - k - 1 \in A$ donc $p - (k+1) \in A$ donc $P(n+1)$ vraie.

- Soit $k \in \mathbb{N}_*$. On pose $n = \lfloor \log_2(k) \rfloor + 1$ de sorte que $2^n > k$. On pose $p = 2^n \in A$. Or, $Q_p(k)$ est vraie donc $k \in A$.

Ainsi, $\mathbb{N}_* \subset A \subset \mathbb{N}_*$ donc $A = \mathbb{N}_*$.
Soit P un prédicat sur $\mathbb{N}_*$ tel que
- $P(1)$ vraie
- $\forall n \in \mathbb{N}_*, P(n) \implies P(2n)$
- $\forall n \geqslant 2, P(n) \implies P(n-1)$

On pose $A = \{n \in \mathbb{N}_* \mid P(n) \text{ vrai}\}$.
Alors, $A = \mathbb{N}_*$, et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, P(n) \text{ est vraie}$$

$$P(n) : \text{"}\forall (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^n, \quad \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i}_{\text{Moyenne arithmétique}} \quad \geqslant \quad \underbrace{\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}}_{\text{moyenne géométrique}}$$

- $P(1)$ est vraie
- Soit $n \in \mathbb{N}_*$. On suppose $P(n)$ vraie. Montrons $P(2n)$.
  Soient $(a_1, a_2, \dots, a_{2n}) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{2n}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} a_i &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{2n} a_i\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{i=n+1}^{2n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}\right) \end{aligned}$$

Or, $P(2)$ est vraie : en effet, si $(a, b) \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(a+b) \geqslant \sqrt{ab} &\iff a + b + 2\sqrt{ab} \geqslant 0 \\ &\iff \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} a_i &\geqslant \sqrt{\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} \times \left(\prod_{i=n+1}^{2n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}} \\ &\geqslant \left(\left(\prod_{i=1}^{2n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{2n} a_i\right)^{\frac{1}{2n}} \end{aligned}$$

Donc $P(2n)$ est vraie

— Soit $n \in \mathbb{N}_*$. On suppose $P(n+1)$ vraie. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^n$

On pose $a_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ On a alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} a_i &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\\ &= \frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} a_i\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\end{aligned}$$

Comme $P(n+1)$ est vraie

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} a_i \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

Il suffit de prouver

$$(*) : \left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right)^{\frac{1}{n+1}} \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\begin{aligned}(*) &\iff \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} \ln(a_i) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\\ &\iff \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} \ln(a_i) \geqslant \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\sum_{i=1}^{n} \ln(a_i) \geqslant \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} \ln(a_i)\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Jensen,

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(a_i)$$

Donc

$$\frac{1}{n+1}\ln(a_{n+1}) \geqslant \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} \ln(a_i)$$

Donc $P(n)$ est vraie

$\square$

Deuxième partie

Exercice 22

$$4444 \equiv -2 \ [9]$$

$$\begin{aligned} 4444^{4444} &\equiv (-2)^{4444} \ [9] \\ &\equiv 2^{4444} \ [9] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^0 &\equiv 1 \ [9] \\ 2^1 &\equiv 2 \ [9] \\ 2^2 &\equiv 3 \ [9] \\ 2^3 &\equiv -1 \ [9] \\ 2^4 &\equiv -2 \ [9] \\ 2^5 &\equiv 5 \ [9] \\ 2^6 &\equiv 1 \ [9] \end{aligned}$$

$$4444 \equiv 4 \ [6]$$

$$\begin{aligned} 2^{4444} &\equiv 2^4 \ [9] \\ &\equiv -2[9] \\ &\equiv 7[9] \end{aligned}$$

Donc, $4444^{4444} \equiv 7 \ [9]$ donc $c \equiv 7 \ [9]$

$$a \leqslant 9N$$

où N est le nombre de chiffre de 4444^{4444}

$$\begin{aligned} & 10^{N-1} \leqslant 4444^{4444} < 10^N \\ \iff & N - 1 \leqslant 4444 \log_{10}(4444) < N \\ \iff & 4444 \log_{10}(4444) < N \leqslant 4444 \log_{10}(4444) + 1 \\ \iff & N = 14211 \end{aligned}$$

Donc, $a \leqslant 145899$ donc a a au plus 7 chiffres.
Donc

$$b \leqslant 1 + 5 \times 9 = 46$$

Donc

$$c \leqslant 4 + 9 = 13$$

Donc $\boxed{c = 17}$

Troisième partie

Exercice 23

$$15! = 2^{11} \times 3^6 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13$$

Un diviseur positif d de 15! est de la forme

$$2^{a_1} 3^{a_2} 5^{a_3} 7^{a_4} 11^{a_5} 13^{a_6}$$

avec

$$\begin{cases} 0 \leqslant a_1 \leqslant 11 \\ 0 \leqslant a_2 \leqslant 6 \\ 0 \leqslant a_3 \leqslant 3 \\ 0 \leqslant a_4 \leqslant 2 \\ 0 \leqslant a_5 \leqslant 1 \\ 0 \leqslant a_6 \leqslant 1 \end{cases}$$

Il y a donc $12 \times 7 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 4032$ diviseurs positifs

Quatrième partie

Exercice 25

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$$

$$\frac{1}{p}\binom{p}{k} = \frac{(p-1)!}{k!(p-k)!} \in \mathbb{N}\ ?$$

$$k\binom{p}{k} = \frac{p!}{(k-1)!(p-k)!} = p\underbrace{\binom{p-1}{k-1}}_{\in\mathbb{N}}$$

Donc, $p \mid k\binom{p}{k}$

Or, $p \wedge k$

D'après le théorème de Gauss, $p \mid \binom{p}{k}$

Cinquième partie

Exercice 27

$n < p$

$$(p-1)(p-2)\dots(p-n) = \frac{(p-1)!}{(p-n-1)!}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\frac{(p-1)(p-2)\dots(p-n)}{n!} &= \frac{(p-1)!}{n!(n-p-1)!} \\ &= \binom{p-1}{n}\end{aligned}$$

$$(p-1)(p-2)\dots(p-n) \equiv (-1)^n n!\ [p]$$

$n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ est premier avec p car $\forall k \in [\![1, n]\!], k \wedge p = 1$.
Donc, $n!$ est inversible modulo p. Donc,

$$\binom{p-1}{n} \equiv (-1)^n\ [p]$$

Sixième partie

Exercice 28

$$(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, (n+1)! + 4 \dots (n+1)! + n + 1$$

sont consécutifs non premiers

Septième partie

Exercice 18

$$147 = 3 \times 49 = 3 \times 7^2$$

On pose $N = \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{\alpha_p}$.

$$\begin{aligned}\alpha_3 &\geqslant 1 \\ \alpha_7 &\leqslant 2\end{aligned}$$

N est un carré parfait donc,

$$\forall p \in \mathscr{P}, a_p \in 2N$$

Donc, $\alpha_3 \geqslant 2$

$$3 \times 147 = 441$$

donc $441 \mid N$ donc $N = 441 \times k$

$$N \equiv 9\ [10]$$

donc $k \equiv 9$ [10]
De plus, $9 \leqslant k$.
Or,

$$9 \times 441 = 3969 = 3^4 \times 7^2 = \left(3^2 \times 7\right)^2$$

Donc,

$$N = 3969$$

Huitième partie

Exercice 24

$$\begin{cases} x = \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{\alpha_p} \\ y = \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{\beta_p} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x^2 = \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{2\alpha_p} \\ y^2 = \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{2\beta_p} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 \mid y^2 &\iff \forall p \in \mathscr{P}, 2\alpha_p \leqslant 2\beta_p \\ &\iff \forall p \in \mathscr{P}, \alpha_p \leqslant \beta_p \\ &\iff x \mid y \end{aligned}$$

Neuvième partie

Exercice 16

On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On pose

$$\begin{cases} a = \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{\alpha_p} \\ b = \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{\beta_p} \end{cases}$$

où (α_p) et (β_p) sont presque nulles.

$$
\begin{aligned}
a^2 \wedge ab \wedge b^2 &= \prod_{p\in\mathscr{P}} p^{\max(2\alpha_p,\alpha_p+\beta_p,2\beta_p)}\\
(*) &= \prod_{p\in\mathscr{P}} p^{2\max(\alpha_p,\beta_b)}\\
&= \left(\prod_{p\in\mathscr{P}} p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}\right)^2\\
&= (a\wedge b)^2
\end{aligned}
$$

(*) : Soit $p \in \mathscr{P}$.

— Si $\alpha_p \leqslant \beta_p$ alors $\begin{cases} 2\alpha_p \leqslant 2\beta_p \\ \alpha_p + \beta_p \leqslant 2\beta_p \end{cases}$ donc $\max(2\alpha_p, \alpha_p+\beta_p, 2\beta_p) = 2\beta_p = 2\max(\alpha_p, \beta_p)$

— Si $\beta_p < \alpha_p$, $\max(2\alpha_p, \alpha_p + \beta_p, 2\beta_p) = 2\alpha_p = 2\max(\alpha_p, \beta_p)$

Dixième partie

Exercice 29

1. Soit $n \in \mathbb{N}_*$.
   Si $n = 1$, $f(1)$ est connu car $1 = 2^0$.
   Si $n \geqslant 2$, $n = p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}$ avec

   $$\begin{cases} \forall i \neq j, p_i \neq p_j \\ \alpha_i \in \mathbb{N} \\ p_i \in \mathscr{P} \end{cases}$$

   $$\forall i \neq j, p_i^{\alpha_i} \wedge p_j^{\alpha_j}$$

   Donc, $f(n) = f\left(p_1^{\alpha_1}\right)\dots f\left(p_k^{\alpha_k}\right)$.
2. On pose

   $$\begin{cases} a = \prod_{p\in\mathscr{P}} p^{\alpha(p)} \\ b = \prod_{p\in\mathscr{P}} p^{\beta(p)} \end{cases}$$

   $$
   \begin{aligned}
   f(a)f(b) &= \prod_{p\in\mathscr{P}} f(p^{\alpha(p)}) \prod_{p\in\mathscr{P}}\\
   &= \prod_{p\in\mathscr{P}} f(p^{\alpha(p)}) f(p^{\beta(b)})
   \end{aligned}
   $$

$$\begin{aligned} f(a\wedge b)f(a\vee b) &= \prod_{p\in\mathscr{P}} f\left(p^{\min(\alpha(p),\beta(p))}\right) \times \prod_{p\in\mathscr{P}} f\left(p^{\max(\alpha(p),\beta(p))}\right) \\ &= \prod_{p\in\mathscr{P}} f\left(p^{\min(\alpha(p),\beta(p))}\right) f\left(p^{\max(\alpha(p),\beta(p))}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall p\in\mathscr{P},\, f\left(p^{\min(\alpha(p),\beta(p))}\right) f\left(p^{\max(\alpha(p),\beta(b))}\right) &= \begin{cases} f\left(p^{\alpha(p)}\right) f\left(p^{\beta(p)}\right) & \text{si } \alpha(p)\leqslant\beta(p) \\ f\left(p^{\beta(p)}\right) f\left(p^{\alpha(p)}\right) & \text{sinon} \end{cases} \\ &= f\left(p^{\alpha(p)}\right) f\left(p^{\beta(b)}\right) \end{aligned}$$

Donc, $f(a)f(b) = f(a\wedge b)f(a\vee b)$.

3. (a)

$$\sigma(o) = \sum_{\substack{d\,|\,p \\ d>0}} d = 1+p$$

(b) $\alpha = 0$, $\sigma(1) = 1$.
$\alpha > 0$ les diviseurs positifs de p^α sont $1, p, p^2, \dots, p^\alpha$ donc

$$\begin{aligned} \sigma(p^\alpha) = \sum_{k=0}^{\alpha} p^k &= \frac{1-p^{\alpha+1}}{1-p} \\ &= \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} \end{aligned}$$

(c) On pose $a = \prod_{q\in\mathscr{P}} q^{\alpha(q)}$
$p \nmid a$ donc $\alpha(p) = 0$
Les diviseurs positifs de a sont $\prod_{p\in\mathscr{P}} q^{\beta(q)}$ avec $0 \leqslant \beta(q) \leqslant \alpha(q)$ pour tout $q \in \mathscr{P}$
Les diviseurs positifs de ap^α sont $\{dp^\beta$ avec $\beta \leqslant \alpha$ et $d \mid a\}$.

$$\sigma(ap^\alpha) = \sum_{\beta=0}^{\alpha} dp^\beta$$

$$\sum_{\beta=0}^{\alpha} p^\beta \sum_{\substack{d\,|\,a \\ d>0}} d = \sigma(p^\alpha)\sigma(a)$$

(d) $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ avec $a \wedge b = 1$
$b = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ avec

$$\begin{cases} p_i \neq p_j \text{ si } i \neq j \\ p_i \text{ premier} \end{cases}$$

$ab = ap_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$.
On prouve le résultat par récurrence sur n.

$$\vdots$$

Onzième partie

Exercice 26

1.

$$\begin{aligned} I_{p,q} &= \int_0^1 x^p (1-x)^p dx \\ &= \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} (1-x)^q \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1} q (1-x)^{q-1} dx \\ &= 0 + \frac{q}{q+1} I_{p+1,q-1} \end{aligned}$$

$$I_{p,0} = \frac{1}{p+1}$$

$$\begin{aligned} I_{p,q} &= \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1} \\ &= \frac{q}{p+1} \times \frac{q-1}{p+2} I_{p+2,q-2} \\ &= \frac{q}{p+1} \times \frac{q-1}{p+2} \times \dots \times \frac{1}{p+q} \times I_{p+q,0} \\ &= \frac{q!\ p!}{(p+q)!} \times \frac{1}{p+q+1} \\ &= \frac{p!\ q!}{(p+q+1)!} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
I_{n,n} &= \int_0^1 x^n(1-x)^n dx \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^n(-x)^{n-k} dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \int_0^1 x^{2n-k} dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left[\frac{2^{2n-k+1}}{2n-k+1}\right]_0^1 \\
(*) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{1}{2n-k+1}
\end{aligned}$$

Or, $I_{n,n} = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.
Avec $(*)$, $I_{n,n}$ est une somme de rationnels (donc $I_{n,n} \in \mathbb{Q}$) dont les dénominateurs sont $n+1, n+2, \ldots, 2n+1$
Comme $D_n = (n+1) \vee (n+2) \vee \ldots \vee (2n+1)$, il existe $a \in \mathbb{Z}$ te lque $I_{n,n} = \dfrac{a}{D_n}$.
Or, $I_{n,n} > 0$ donc $a \in \mathbb{N}_*$ donc $a \geqslant 1$

$$\begin{aligned}
&\text{donc } I_{n,n} \geqslant \frac{1}{D_n} \\
&\text{donc } D_n \geqslant \frac{1}{I_{n,n}} = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}
\end{aligned}$$

3. $D_n = \displaystyle\prod_{pin\mathscr{P}} p^{\max(\alpha_1(p),\ldots,\alpha_n(p))}$ où

$$\forall k \in [\![1, n+1]\!]\,, \frac{n}{k-1} = \prod_{p\in\mathscr{P}} p^{\alpha_k(p)}$$

Ce produit fait intervenir des nombres premiers qui divisent $n+1$ ou $n+2$ ou $\ldots$ ou $2n+1$, il y en a au plus $\pi(2n+1)$.
Pour chacun de ces nombres premiers, $q = p^{\max(\alpha_k(p)|k\in[\![1,n+1]\!])}$ apparaît dans la décomposition de l'un des nombres $n+1, n+2, \ldots, 2n+1$ donc $q \leqslant 2n+1$. Donc,

$$D_n \leqslant (2n+1)^{\pi(2n+1)}$$

D'où,

$$\frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \leqslant (2n+1)^{\pi(2n+1)}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{(2n+1)!}{(n!)^2} &= (2n+1)\frac{(2n)!}{n!\,n!}\\ &= (2n+1)\binom{2n}{n} \in \mathbb{N}\\ &\geqslant (2n+1)\frac{2^{2n}}{2n+1}\end{aligned}$$