Chapitre 6

Équations différentielle linéaire

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 28 mars 2022

Table des matières

Première partie

Définition: Une équation différentielle est une égalité faisant intervenir une fonction inconnue y ainsi que ses dérivées successives $y', y'', y^{(3)}, \ldots, y^{(n)}$.

Définition: Une équation différentielle linéaire d'ordre n est de la forme

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b(t)$$

où $b, a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des fonctions connues et continues sur un intervalle I. On dit que b est le second membre de l'équation.

Proposition (Principe de superposition)**:** Soient b_1 et b_2 continues sur I. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ également continues sur I.

$$(E_1) : \quad \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = b_1$$

$$(E_2) : \quad \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = b_2$$

Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$.

$$(E) : \quad \sum_{k=1}^{n} a_k y^{(k)} = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

$$\left.\begin{matrix} y_1 \text{ solution de } (E_1) \\ y_2 \text{ solution de } (E_2) \end{matrix}\right\} \implies \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \text{ solution de } (E)$$

■

Proposition: Soit (E) l'équation différentielle $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = b$ où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des fonctions homogènes. L'équation homogène associée à (E) est

$$(H) : \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0$$

Les solutions de (E) sont toutes de la forme $h + y_0$ où h est solution de (H) et y_0 solution de (E).

■

Théorème (Théorème de Cauchy)**:** Soit (E) une équation linéaire différentielle.

$$(E): \quad y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = b$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont <u>continues</u> sur un <u>intervalle</u> I.
Soit $t_0 \in I$ et $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$.
Il existe **une et une seule** fonction y telle que

$$\begin{cases} y \text{ solution de } (E) \\ \forall i \in [\![0, n-1]\!], y^{(i)}(t_0) = \alpha_i \end{cases}$$

Deuxième partie

Soit (E) l'équation $y' + ay = b$ où a et b sont continues sur un intervalle I.

Proposition: Soit A une primitive de a sur un intervalle I.

$$(H): \quad y' + ay = 0$$

Les solutions de (H) sont $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$

■

Remarque (pseudo preuve):

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0 &\iff \frac{dy}{y} = -a(t)dt \\
&\iff \int \frac{dy}{y} = \int -a(t)dt \\
&\iff \ln(y) = -A(t) + K \\
&\iff y = e^{-A(t)+K} \\
&\iff y = \lambda e^{-A(t)} \text{ avec } \lambda = e^K
\end{aligned}$$

Troisième partie

Annexe

$y : I \to E$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$$\begin{aligned}(*) : \qquad & y' + a(x)y = 0 \text{ et } y(x_0) = 0 \\ \iff & \forall x \in I, y(x) = -\int_{x_0}^{x} a(u)y(u)\ du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T : E^I &\longrightarrow E^I \\ y &\longmapsto \left(x \mapsto -\int_{x_0}^{x} a(u)y(u)\ du\right)\end{aligned}$$

donc $(*) \iff T(y) = y$