

CHAPITRE 19



Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

I	Premières propriétés	2
II	Noyau et image	7
III	Théorème du rang	10
IV	Formes linéaires	15
V	Projections et symétries	22

Première partie

Premières propriétés

Définition: Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$. On dit que f est linéaire si

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

EXEMPLE: 1. $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

φ est linéaire

2. $E = \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$ et $F = \mathbb{C}^I$

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

φ est linéaire

3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax \end{array}$ est linéaire.

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha ax + \beta ay = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

4. $E = \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ et $F = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$. $a \in F$

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ y & \longmapsto & y' + ay \end{array} \text{ est linéaire}$$

$$y' + a(x)y = b(x) \iff \varphi(y) = b$$

5. $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}} = F$

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ (u_n) & \longmapsto & (u_{n+2} - u_{n+1} - u_n) \end{array}$$

$$\forall n, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \iff \varphi(u) = 0$$

6. $E = \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $F = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

$$AX = B \iff \varphi(X) = B$$

Définition: On dit qu'un problème est linéaire s'il se présente sous la forme :

$$\text{Résoudre } \varphi(x) = y$$

où l'inconnue est $x \in E$, y est un paramètre de F avec $\varphi : E \rightarrow F$ linéaire.

EXEMPLE:

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) - f(x-1) = \lambda$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est fixé.

On pose $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$,

$$\varphi : E \longrightarrow E$$

$$f \longmapsto \varphi(f) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x+1) - f(x-1) \end{array}$$

et

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \lambda \end{aligned}$$

Le problème est équivalent à

$$\begin{cases} \varphi(f) = y \\ f \in E \end{cases}$$

Soient $f, g \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda f + \mu g)(x) &= (\lambda f + \mu g)(x+1) - (\lambda f + \mu g)(x-1) \\ &= \lambda f(x+1) - \mu g(x+1) - \lambda f(x-1) - \mu g(x-1) \\ &= \lambda(f(x+1) - f(x-1)) + \mu(g(x+1) - g(x-1)) \\ &= \lambda\varphi(f)(x) + \mu\varphi(g)(x) \end{aligned}$$

Donc, $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$

REMARQUE (Notation):

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est $\mathcal{L}(E, F)$.

Si $F = E$, alors on note plus simplement $\mathcal{L}(E)$ à la place de $\mathcal{L}(E, E)$.

Les éléments de $\mathcal{L}(E)$ sont appelés endomorphismes (linéaires) de E .

Proposition: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Preuve:

Soient $u, v \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\alpha u + \beta v) &= g(f(\alpha u + \beta v)) \\ &= g(\alpha f(u) + \beta f(v)) \\ &= \alpha g(f(u)) + \beta g(f(v)) \\ &= \alpha(g \circ f)(u) + \beta(g \circ f)(v) \end{aligned}$$

□

Proposition: $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E .

Preuve:

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda f + \mu g \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soient $u, v \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)(\alpha u + \beta v) &= \lambda f(\alpha u + \beta v) + \mu g(\alpha u + \beta v) \\ &= \lambda(\alpha f(u) + \beta f(v)) + \mu(\alpha g(u) + \beta g(v)) \\ &= \alpha(\lambda f(u) + \mu g(u)) + \beta(\lambda f(v) + \mu g(v)) \\ &= \alpha((\lambda f + \mu g)(u)) + \beta((\lambda f + \mu g)(v)) \end{aligned}$$

De plus, $\tilde{0} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}$ est linéaire donc $\mathcal{L}(E, F) \neq \emptyset$. \square

Proposition: $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une \mathbb{K} -algèbre (non commutative en général).

Preuve: — $(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel d'après la proposition précédente.

— $(\mathcal{L}(E), +)$ est un groupe abélien.

“ \circ ” est associative et interne sur $\mathcal{L}(E)$.

$\text{id}_E \in \mathcal{L}(E)$.

Soient $f, g, h \in \mathcal{L}(E)$.

$$\begin{aligned} \forall x \in E, f \circ (g + h)(x) &= f((g + h)(x)) \\ &= f(g(x) + h(x)) \\ &= f(g(x)) + f(h(x)) \text{ car } f \text{ est linéaire} \\ &= (f \circ g + f \circ h)(x) \end{aligned}$$

Donc,

$$f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$$

$$\begin{aligned} \forall x \in E, (g + h) \circ f(x) &= (g + h)(f(x)) \\ &= g(f(x)) + h(f(x)) \\ &= (g \circ f + h \circ f)(x) \end{aligned}$$

Donc,

$$(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$$

Donc, $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \lambda \cdot (f \circ g)(x) &= \lambda f(g(x)) \\ (\lambda \cdot f) \circ g(x) &= \lambda f(g(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \circ (\lambda \cdot g)(x) &= f(\lambda g(x)) \\ &= \lambda f(g(x)) \text{ car } f \in \mathcal{L}(E) \end{aligned}$$

\square

Corollaire: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On peut former $P(u) \in \mathcal{L}(E)$: on dit que $P(u)$ est un polynôme d'endomorphisme.

Proposition: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ bijective. Alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Preuve:

Soit $u, v \in F$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha u + \beta v) &= \alpha f^{-1}(u) + \beta f^{-1}(v) \\ \iff \alpha u + \beta v &= f(\alpha f^{-1}(u) + \beta f^{-1}(v)) \\ \iff \alpha u + \beta v &= \alpha f(f^{-1}(u)) + \beta f(f^{-1}(v)) \\ \iff \alpha u + \beta v &= \alpha u + \beta v \end{aligned}$$

Donc, $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$

□

REMARQUE (Notation):

On note $\text{GL}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E bijectifs, $\text{GL}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F bijectives.

Les éléments de $\text{GL}(E)$ sont appelés automorphismes (linéaires) de E .

Corollaire: $\text{GL}(E)$ est un sous-groupe de $(S(E), \circ)$

Définition: $\text{GL}(E)$ est dit “ le groupe linéaire de E ”.

Deuxième partie

Noyau et image

Proposition: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, U un sous-espace vectoriel de E et V un sous-espace vectoriel de F .

1. $f(U)$ est un sous-espace vectoriel de F .
2. $f^{-1}(V)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Preuve: 1. $0_F = f(0_E)$ et $0_E \in U$ donc $0_F \in f(U)$ donc $f(U) \neq \emptyset$

Soient $(x, y) \in f(U)^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Soient $a, b \in U$ tels que $\begin{cases} x = f(a) \\ y = f(b) \end{cases}$.

$$\lambda x + \mu y = \lambda f(a) + \mu f(b) = f(\lambda a + \mu b) \text{ car } f \in \mathcal{L}(E, F)$$

U est un sous-espace vectoriel de E .

Donc $\lambda a + \mu b \in U$

donc $f(\lambda a + \mu b) \in f(U)$

donc $\lambda x + \mu y \in f(U)$.

2. $f(0_E) = 0_F \in V$ donc $0_E \in f^{-1}(V)$. Donc $f^{-1}(V) \neq \emptyset$.
Soient $x, y \in f^{-1}(V)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda \underbrace{f(x)}_{\in V} + \mu \underbrace{f(y)}_{\in V} \in V$$

donc $\lambda x + \mu y \in f^{-1}(V)$.

□

Corollaire: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. $\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de E .
2. $\text{Im}(f) = f(E) = \{f(u) \mid u \in E\}$ est un sous-espace vectoriel de F .

□

REMARQUE (Rappel):
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$

$$\begin{aligned} f \text{ injective} &\iff \text{Ker}(f) = \{0_E\} \\ f \text{ surjective} &\iff \text{Im}(f) = F \end{aligned}$$

EXEMPLE: 1. Soit I un intervalle, $E = \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}^I$

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\varphi) &= \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ constante} \} \\ \text{Im}(\varphi) &\supset \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$2. \quad \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ E = \mathbb{R}_2[X], F = \mathbb{R}, \varphi : & P & \longmapsto \int_0^1 P(t) dt \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\varphi) &= \left\{ P = a + bX + cX^2 \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \int_0^1 P(t) dt = 0 \right\} \\ &= \left\{ a + bX + cX^2 \mid a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 0 \right\} \\ &= \left\{ a + bX + cX^2 \mid a = -\frac{b}{2} - \frac{c}{3} \right\} \\ &= \left\{ -\frac{b}{2} - \frac{c}{3} + bX + cX^2 \mid b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b \left(-\frac{1}{2} + X \right) + c \left(-\frac{1}{3} + X^2 \right) \mid b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left(-\frac{1}{2} + X, -\frac{1}{3} + X^2 \right) \end{aligned}$$

$$\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}.$$

Troisième partie

Théorème du rang

Dans ce paragraphe, E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

Proposition: Soit $f : E \rightarrow F$ un isomorphisme (i.e. une application linéaire bijective). Alors, $\dim(E) = \dim(F)$

Preuve:

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On pose

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_i = f(e_i) \in F$$

— Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. On suppose que $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0_F$. D'où,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i) \text{ donc } f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = 0_F$$

$$\text{donc } \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in \text{Ker}(f) = \{0_E\}$$

$$\text{donc } \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E$$

$$\text{donc } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0$$

Donc (u_1, \dots, u_n) est libre.

Soit $y \in F$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Comme \mathcal{B} engendre E , il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$. Comme f est linéaire,

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$$

Donc, $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$

Donc (u_1, \dots, u_n) est une base de F donc

$$\dim(E) = n = \dim(F)$$

□

La première partie de la preuve précédente justifie le résultat suivant.

Proposition: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ injective. $\mathcal{L} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E . Alors $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est une famille libre de F . En particulier, $\dim(F) \geq \dim(E)$. □

La deuxième partie de la preuve prouve :

Proposition: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ surjective et $\mathcal{G} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille génératrice de E . Alors $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est une famille génératrice de F . En particulier,

$$\dim(F) \leq \dim(E)$$

□

Théorème (Théorème du rang): Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))$$

Preuve (À connaître):
On pose

$$\begin{aligned} u : U &\longrightarrow \operatorname{Im}(f) \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

où U est un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(f)$ dans E .

(U existe : voir remarque qui suit)

— $u \in \mathcal{L}(U, \operatorname{Im}(f))$, en effet, soient $x, y \in U, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} u(\lambda x + \mu y) &= f(\lambda x + \mu y) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) \\ &= \lambda u(x) + \mu u(y) \end{aligned}$$

— Soit $y \in \operatorname{Im}(f)$. Soit $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $E = U \oplus \operatorname{Ker}(f)$. On peut écrire

$$\begin{cases} x = a + b \\ a \in U, b \in \operatorname{Ker}(f) \end{cases}$$

D'où,

$$y = f(x) = f(a + b) = f(a) + f(b) = u(a) + 0_E = u(a)$$

Donc u est surjective.

Soit $x \in U$.

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker}(u) &\iff u(x) = 0_F \\ &\iff f(x) = 0_F \\ &\iff x \in \operatorname{Ker}(f) \\ &\iff x = 0_E \text{ car } U \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\} \end{aligned}$$

Donc u est injective.

Ainsi, $\dim(U) = \dim(\operatorname{Im}(f))$

Or,

$$\begin{aligned} \dim(E) &= \dim(U \oplus \operatorname{Ker}(f)) \\ &= \dim(U) + \dim(\operatorname{Ker}(f)) \end{aligned}$$

donc

$$\dim(U) = \dim(E) - \dim(\operatorname{Ker}(f))$$

Donc,

$$\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))$$

□

REMARQUE:

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E .

CAS 1 $F = \{0_E\}$, alors E est un supplémentaire de F .

CAS 2 $F \neq \{0_E\}$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F . Alors \mathcal{B} est une famille libre de E . On complète \mathcal{B} en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E . On pose $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$. On démontre que

$$F \oplus G = E$$

Corollaire: Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de même dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\begin{aligned} f \text{ injective} &\iff f \text{ surjective} \\ &\iff f \text{ bijective} \end{aligned}$$

Preuve:

D'après le théorème du rang,

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$

Si f est injective, alors $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$
et donc $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$
et donc $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(F)$
et donc $\text{Im}(f) = F$
et donc f est surjective.

Si f est surjective, alors $\text{Im}(f) = F$
et donc $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(F) = \dim(E)$
et donc $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$
et donc $\text{Ker}(f) = \{0\}$
et donc f est injective

□

EXEMPLE:

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\forall i \neq j, x_i \neq x_j$$

Soit $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ P & \longmapsto & (P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{array}$

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(P) = 0 \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(x_i) = 0 \\ &\iff P = 0 \text{ car } \deg(P) \leq n-1 \end{aligned}$$

Donc φ est injective et donc φ est bijective.

Donc,

$$\exists! P \in \mathbb{K}_{n-1}[X], \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(x_i) = y_i$$

De plus, $\varphi^{-1} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}_{n-1}[X]$ est un isomorphisme.

Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{K}^n . $(\varphi^{-1}(e_1), \dots, \varphi^{-1}(e_n))$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi^{-1}(e_i) = L_i$ est le i -ème polynôme interpolateur de Lagrange.

$$\begin{aligned}
P &= \varphi^{-1}(y_1, \dots, y_n) \\
&= \varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n y_i e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^n y_i \varphi^{-1}(e_i) \\
&= \sum_{i=1}^n y_i L_i
\end{aligned}$$

EXERCICE (Interpolation de Hermite):

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ avec

$$\forall i \neq j, x_i \neq x_j$$

Soit $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{K}^n$.

Trouver un polynôme de plus bas degré tel que

$$(*) \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} P(x_i) = y_i \\ P'(x_i) = z_i \end{cases}$$

$$\text{Soit } \varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{2n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{2n} \\ P & \longmapsto & (P(x_1), \dots, P(x_n), P'(x_1), \dots, P'(x_n)) \end{array}$$

$$(*) \iff \varphi(P) = (y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n)$$

$$\begin{aligned}
P \in \text{Ker}(\varphi) &\iff \forall i, \begin{cases} P(x_i) = 0 \\ P'(x_i) = 0 \end{cases} \\
&\iff P = 0 \text{ car } \deg(P) \leq 2n-1
\end{aligned}$$

Donc φ est un isomorphisme.

Corollaire: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. Alors,

$$f \in \text{GL}(E) \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$

□

REMARQUE:

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

$$\dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

Définition: Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Le rang de f est

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$$

Quatrième partie

Formes linéaires

Définition: Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans \mathbb{K} .
L'ensemble des formes linéaires est noté $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. E^* est appelé espace dual de E .

Proposition: Toute forme linéaire est soit nulle, soit surjective.

Preuve:

Soit $f \in E^*$.

$\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K} donc $\text{rg}(f) \leq \dim(\mathbb{K}) = 1$.

Si $\text{rg}(f) = 0$, alors $\text{Im}(f) = \{0\}$ et donc

$$\forall x \in E, f(x) = 0$$

Si $\text{rg}(f) = 1$, alors $\text{Im}(f) = \mathbb{K}$ et donc f est surjective. □

Proposition: Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et $f \in E^* \setminus \{0\}$. Alors $\text{Ker}(f)$ est de dimension $n - 1$.

Preuve:

Comme $f \neq 0$, donc $\text{rg}(f) = 1$

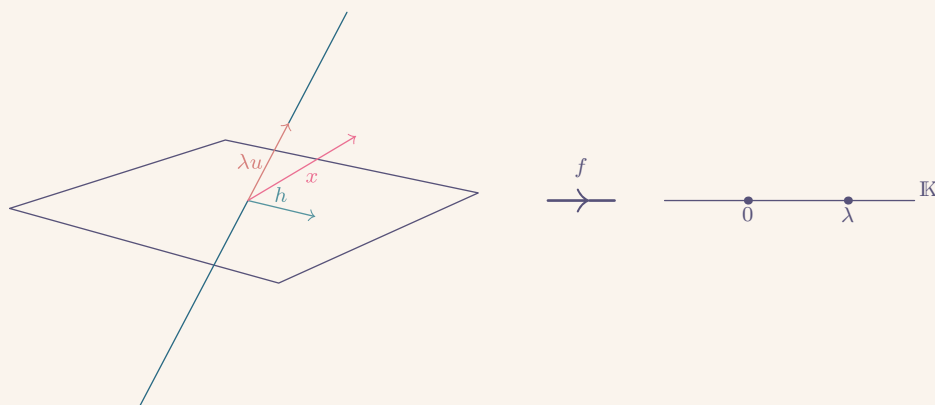
D'après le théorème du rang,

$$\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E) - \text{rg}(f) = n - 1$$

□

Proposition: Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et H un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$. Alors,

$$\exists f \in E^*, \text{Ker}(f) = H$$



Preuve:

Soit D un supplémentaire de H dans E :

$$E = H \oplus D$$

Nécessairement,

$$\dim(D) = \dim(E) - \dim(H) = 1$$

Soit $u \in D \setminus \{0\}$. $D = \text{Vect}(u)$

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \text{On pose } f : \begin{array}{c} x = h + \lambda u \\ (h \in H, \lambda \in \mathbb{K}) \end{array} & \longmapsto & \lambda \end{array}$$

Montrons que $f \in E^*$.

Soient $(x, y) \in E^2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.

On pose

$$\begin{cases} x = h + \lambda u, & h \in H, \lambda \in \mathbb{K} \\ y = h' + \lambda' u, & h' \in H, \lambda' \in \mathbb{K} \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= \alpha(h + \lambda u) + \beta(h' + \lambda' u) \\ &= \underbrace{(\alpha h + \beta h')}_{\in H} + \underbrace{(\alpha \lambda + \beta \lambda')}_{\in \mathbb{K}} u \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \alpha \lambda + \beta \lambda' \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \end{aligned}$$

Soit $x \in E$. On pose $x = h + \lambda u$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(f) &\iff f(x) = 0 \\ &\iff \lambda = 0 \\ &\iff x = h \\ &\iff x \in H \end{aligned}$$

Donc, $H = \text{Ker}(f)$.

□

EXEMPLE:

$E = \mathbb{R}^4$, $H = \text{Vect}((1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0))$

Soit $u = (1, 2, 1, 1) \notin H$.

Soit $(x, y, z, t) \in E$. On cherche $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$(*) \quad (x, y, z, t) = \alpha(1, 0, 0, 1) + \beta(1, 1, 0, 0) + \gamma(0, 1, 1, 0) + \lambda(1, 2, 1, 1)$$

Plus précisément, on cherche à exprimer λ en fonction de x, y, z, t .

$$\begin{aligned}
 (*) &\iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = x \\ \beta + \gamma + 2\lambda = y \\ \gamma + \lambda = z \\ \alpha + \lambda = t \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \boxed{\alpha} + \beta + \lambda = x \\ \beta + \gamma + 2\lambda = y \\ \boxed{\gamma} + \lambda = z \\ -\beta = t - x \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \boxed{\alpha} + \beta + \lambda = x \\ \beta + \lambda = y - z \\ \boxed{\gamma} + \lambda = z \\ \beta = x - t \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \lambda = y - z - x + t \\ \vdots \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc,

$$(x, y, z, t) \in H \iff y - z - x + t = 0$$

$$\text{Soit } f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & x - y + z - t \end{array} \quad \text{et } H = \text{Ker}(f)$$

Proposition: Avec les notations précédentes, $\{f \in E^* \mid \text{Ker}(f) = H\}$ est une droite de E^* privée de l'application nulle. En d'autres termes, les équations de H sont 2 à 2 proportionnelles.

Preuve:

Soient $f, g \in E^*$ telles que

$$\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$$

On pose $H = \text{Ker}(f)$. Soit $u \notin H$ de sorte que

$$H \oplus \text{Vect}(u) = E$$

$u \notin H$ donc $f(u) \neq 0$.

On pose $\alpha = \frac{g(u)}{f(u)}$. Montrons que $g = \alpha f$.

Soit $x \in E$. On pose $x = h + \lambda u$ avec $\begin{cases} h \in H \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{cases}$

$$g(x) = g(h) + \lambda g(u) = 0 + \lambda \alpha f(u)$$

||

$$\alpha f(x) = \alpha(f(h) + \lambda f(u)) = \lambda \alpha f(u)$$

□

Définition: Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E . On dit

que H est un hyperplan de E s'il existe une droite D de E telle que

$$H \oplus D = E$$

En reprenant les démonstrations précédentes, on a encore les résultats suivants :

Proposition: Soit H un hyperplan de E . Alors, $\{f \in E^* \mid \text{Ker}(f) = H\}$ est une droite de E^* privée de l'application nulle. \square

Proposition: Soit $f \in E^*$ non nulle. Alors $\text{Ker}(f)$ est un hyperplan de E .

Preuve:

f non nulle. Soit $x \in E$ tel que

$$f(x) \neq 0$$

On pose $H = \text{Ker}(f)$ et $D = \text{Vect}(x)$. Montrons que $H \oplus D = E$.

ANALYSE Soit $y \in E$. On suppose $y = h + \lambda x$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors,

$$f(y) = f(h) + \lambda f(x) = \lambda f(x) \text{ donc } \begin{cases} \lambda = f(y)f(x)^{-1} \\ h = y - f(y)f(x)^{-1}x \end{cases}$$

SYNTHÈSE Soit $y \in E$. On pose $\begin{cases} \lambda = f(y)f(x)^{-1} \\ h = y - \lambda x \end{cases}$.

$$\text{Évidemment, } \begin{cases} h + \lambda x = y \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(h) &= f(y - \lambda x) \\ &= f(y) - \lambda f(x) \\ &= f(y) - f(y)f(x)^{-1}f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

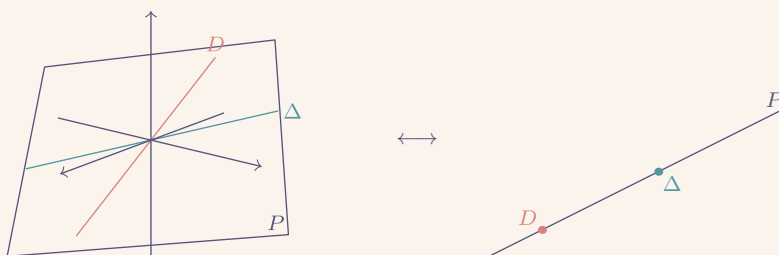
\square

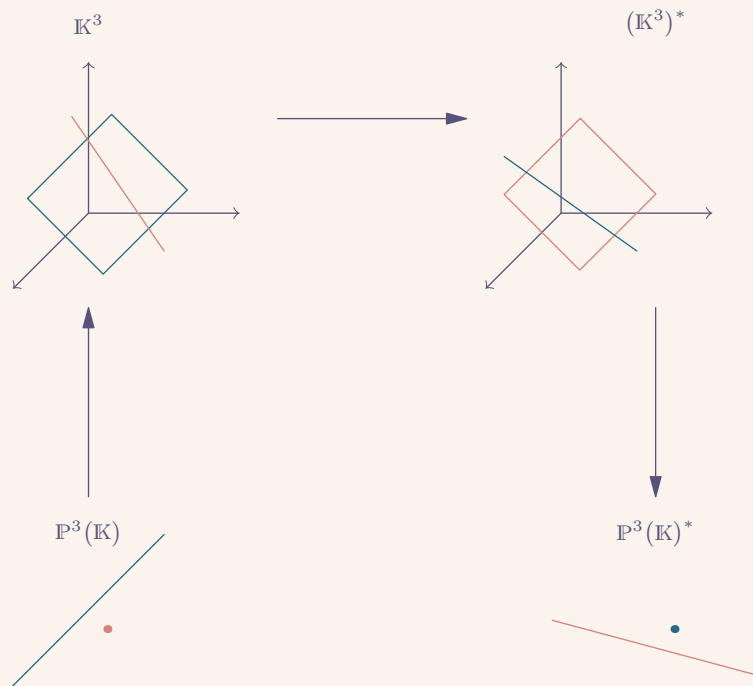
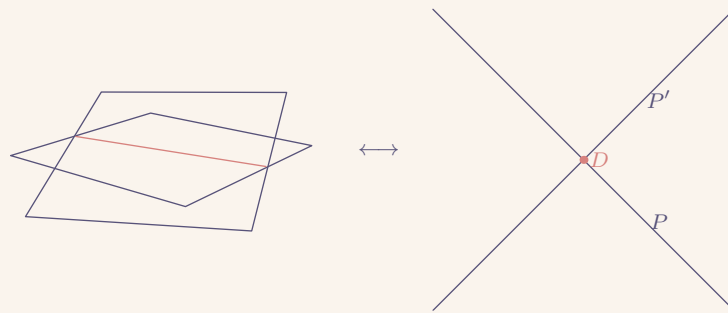
HORS-PROGRAMME

$$\mathbb{P}^3(\mathbb{K}) = \{D \setminus \{0\} \mid D \text{ droite vectorielle de } \mathbb{K}^3\}$$

Une droite projective de $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ est un plan vectoriel de \mathbb{K}^3 privé de 0.

À faire : schéma A





À faire : schémas B et C

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & h(D) \\
 \hline
 & & h(N) & \bullet & & h(M) & \bullet & h(O) \longrightarrow \\
 & & & & & & & \\
 \hline
 & & & & & & & h(\Delta) \\
 & & & & & & &
 \end{array}$$

Cinquième partie

Projections et symétries

Définition: Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces de E supplémentaires :

$$E = F \oplus G$$

Soit $x \in E$.

$$\exists!(a, b) \in F \times G, x = a + b$$

Le vecteur a est appelé projeté de x sur F parallèlement à G .

Le vecteur b est appelé projeté de x sur G parallèlement à F .

La projection sur F parallèlement à G est l'application qui à $x \in E$ associe son projeté sur F parallèlement à G .

EXEMPLE:

$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F = \{f \in E \mid f \text{ paire}\}$ et $G = \{f \in E \mid f \text{ impaire}\}$

On a $E = F \oplus G$.

Soient p la projection sur F parallèlement à G et q la projection sur G parallèlement à F .

$$\forall x \in E, \begin{cases} p(f) : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ q(f) : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{cases}$$

Proposition: Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires et p la projection sur F parallèlement à G .

1. $p \in \mathcal{L}(E)$
2. $p|_F = \text{id}_F$ et $p|_G = 0$
3. $p \circ p = p$
4. $\text{id}_E - p$ est la projection sur G parallèlement à F .

Preuve: 1. $\forall x \in E, p(x) \in F \subset E$

Soit $(x, y) \in E^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

On pose $x = a + b$ avec $\begin{cases} a \in F \\ b \in G \end{cases}$ et $y = c + d$ avec $\begin{cases} c \in F \\ d \in G \end{cases}$

donc,

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &= \lambda(a + b) + \mu(c + d) \\ &= \underbrace{(\lambda a + \mu c)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda b + \mu d)}_{\in G} \end{aligned}$$

Donc,

$$p(\lambda x + \mu y) = \lambda a + \mu b = \lambda p(x) + \mu p(y)$$

2. $\forall x \in F, x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0}_{\in G}$ donc $p(x) = x$

$\forall x \in G, x = \underbrace{0}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G}$ donc $p(x) = 0$

3. $\forall x \in E, p(x) \in F$ donc $p(p(x)) = p(x)$

4. Soit $x \in E$. On pose $x = a + b$ avec $\begin{cases} a \in F \\ b \in G \end{cases}$. Donc $p(x) = a$. D'où, $x - p(x) = b$ est le projeté de x sur G parallèlement à F .

□

Définition: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est un projecteur si $f \circ f = f$

Proposition: Soit f un projecteur de E . Alors f est la projection sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\text{Ker}(f)$. En particulier,

$$\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = E$$

Preuve: ANALYSE Soit $x \in E$. On suppose que $x = a + b$ avec $\begin{cases} a \in \text{Ker}(f) \\ b \in \text{Im}(f) \end{cases}$. D'où,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f(b) \\ &= 0 + f(b) \\ &= f(b) \end{aligned}$$

Soit $y \in E$ tel que $b = f(y)$. Donc,

$$f(b) = f(f(y)) = f(y) = b$$

Donc, $f(x) = b$ et donc $a = x - b = x - f(x)$

SYNTHÈSE Soit $x \in E$. On pose $\begin{cases} a = x - f(x) \\ b = f(x) \end{cases}$. Évidemment, $\begin{cases} a + b = x \\ b \in \text{Im}(f) \end{cases}$

$$\begin{aligned} f(a) &= f(x - f(x)) \\ &= f(x) - f(f(x)) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $a \in \text{Ker}(f)$. On a montré

$$\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = E$$

On considère la projection p sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\text{Ker}(f)$. Soit $x \in E$. On a montré que

$$x = \underbrace{f(x)}_{\in \text{Im}(f)} + \underbrace{x - f(x)}_{\in \text{Ker}(f)}$$

donc $p(x) = f(x)$ et donc $p = f$

□

Définition: Soient F et G supplémentaires dans E : $E = F \oplus G$

Projections et symétries

Soit $x \in E$. On décompose x :

$$x = a + b \text{ avec } \begin{cases} a \in F \\ b \in G \end{cases}$$

et on forme

$$y = a - b$$

On dit que y est le symétrique de x par rapport à F parallèlement à G
 La symétrie par rapport à F parallèlement à G est l'application qui à tout $x \in E$ associe son symétrique parallèlement à G par rapport à F .

Proposition: Soient F et G supplémentaires dans E , Δ la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

1. $\Delta \in \mathcal{L}(E)$
2. $\Delta|_E = \text{id}_F$ et $\Delta|_G = -\text{id}_G$
3. $\Delta \circ \Delta = \text{id}_E$

Preuve:

Soient p la projection sur F parallèlement à G et q la projection sur G parallèlement à F .

On remarque que $\Delta = p - q$.

1. p et q sont des endomorphismes donc Δ aussi
2. $\forall x \in E, \Delta(x) = p(x) - q(x) = x - 0 = x$
 $\forall x \in G, \Delta(x) = p(x) - q(x) = 0 - x = -x$
- 3.

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \Delta(\Delta(x)) &= \Delta(p(x) - q(x)) \\ &= \Delta(\underbrace{p(x)}_{\in F}) - \Delta(\underbrace{q(x)}_{\in G}) \\ &= p(x) - (-q(x)) \\ &= x \end{aligned}$$

□

Définition: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est involutive si $f \circ f = \text{id}_E$.

Proposition: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ involutif. Alors f est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(f - \text{id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(f + \text{id}_E)$. En particulier,

$$\text{Ker}(f - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f + \text{id}_E) = E$$

Preuve: ANALYSE Soit $x \in E$. On suppose que $x = a + b$ avec $\begin{cases} a \in \text{Ker}(f - \text{id}_E) \\ b \in \text{Ker}(f + \text{id}_E) \end{cases}$

$$\begin{aligned} a \in \text{Ker}(f - \text{id}_E) &\iff (f - \text{id}_E)(a) = 0 \\ &\iff f(a) - a = 0 \\ &\iff a = f(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b \in \text{Ker}(f + \text{id}_E) &\iff f + \text{id}_E(b) = 0 \\ &\iff f(b) + b = 0 \\ &\iff f(b) = -b \end{aligned}$$

On sait que $x = a + b$ et $f(x) = f(a) + f(b) = a - b$
D'où,

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(x + f(x)) \\ b &= \frac{1}{2}(x - f(x)) \end{aligned}$$

SYNTHÈSE Soit $x \in E$. On pose

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(x + f(x)) \\ b &= \frac{1}{2}(x - f(x)) \end{aligned}$$

Alors $a + b = x$

$$\begin{aligned} f(a) &= f\left(\frac{1}{2}(x + f(x))\right) \\ &= \frac{1}{2}(f(x) + f(f(x))) \\ &= \frac{1}{2}(f(x) + x) \\ &= a \end{aligned}$$

Donc $a \in \text{Ker}(f - \text{id}_E)$

$$\begin{aligned} f(b) &= f\left(\frac{1}{2}(x - f(x))\right) \\ &= \frac{1}{2}(f(x) - f(f(x))) \\ &= \frac{1}{2}(f(x) - x) \\ &= -b \end{aligned}$$

donc $b \in \text{Ker}(f + \text{id}_E)$

Ainsi,

$$\text{Ker}(f - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f + \text{id}_E) = E$$

Soit Δ la symétrie par rapport à $\text{Ker}(f - \text{id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(f + \text{id}_E)$.
Soit $x \in E$. On a vu que

$$x = \underbrace{\frac{1}{2}(x + f(x))}_{\in \text{Ker}(f - \text{id}_E)} + \underbrace{\frac{1}{2}(x - f(x))}_{\in \text{Ker}(f + \text{id}_E)}$$

Donc,

$$\Delta(x) = \frac{1}{2}(x + f(x)) - \frac{1}{2}(x - f(x)) = f(x)$$

Donc $\Delta = f$

□

EXEMPLE:
 $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et

$$\Delta : E \longrightarrow E$$

$$f \longmapsto \Delta(f) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(-x) \end{array}$$

$\Delta(f) = f \circ (-\text{id}_{\mathbb{R}})$
 $\Delta \in \mathcal{L}(E)$, en effet :

$$\begin{aligned} \forall f, g \in \mathcal{L}(E), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \\ \Delta(\alpha f + \beta g) &= (\alpha f + \beta g) \circ (-\text{id}_{\mathbb{R}}) \\ &= \alpha(f \circ (-\text{id}_{\mathbb{R}})) + \beta(g \circ (-\text{id}_{\mathbb{R}})) \\ &= \alpha \Delta(f) + \beta \Delta(g) \end{aligned}$$

De plus, $\Delta \circ \Delta = \text{id}_E$. Donc Δ est une symétrie.

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\Delta - \text{id}_E) &= \{f \in E \mid f \text{ paire}\} = \mathcal{P} \\ \text{Ker}(\Delta + \text{id}_E) &= \{f \in E \mid f \text{ impaire}\} = \mathcal{I} \end{aligned}$$

D'où,

$$\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = E$$

EXEMPLE:
 $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
Pour $A \in E$, on note tA la transposée de A la matrice obtenue en écrivant en ligne les colonnes de A .
Soit

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A &\longmapsto {}^tA \end{aligned}$$

Δ est linéaire, $\Delta \circ \Delta = \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\Delta - \text{id}_E) &= S_n(\mathbb{K}) \\ \text{Ker}(\Delta + \text{id}_E) &= A_n(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

