

## CHAPITRE 0

# Logique (rudiment

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 25 avril 2022

# Table des matières

I	Algèbre de Boole	3
II	Déduction naturelle	7
III	Raisonnement par l'absurde	9
IV	Prédicat	11

---

**Définition:** Un proposition est un énoncé qui est soit vrai, soit faux.

EXEMPLE:

$$\left. \begin{array}{l} A : "B \text{ est vraie}" \\ B : "A \text{ est fausse}" \end{array} \right\} \text{ Le système } \{A, B\} \text{ est une } \underline{\text{auto-contradiction}}$$

**Définition:** Démontrer une proposition revient à prouver qu'elle est vraie

Première partie

Algèbre de Boole

**Définition:** Soient  $A$  et  $B$  deux propositions. La proposition  $A$  et  $B$  est définie par la table de vérité suivante :

$A$	$B$	$A$ et $B$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$F$

**Définition:** Soient  $A$  et  $B$  deux propositions. La proposition  $A$  ou  $B$  est définie par la table de vérité suivante :

$A$	$B$	$A$ ou $B$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$

**Définition:** Soit  $A$  une proposition. La négation de  $A$ , notée  $\text{non}(A)$  est définie par :

$A$	$\text{non}(A)$
$V$	$F$
$F$	$V$

**Définition:** Deux propositions  $A$  et  $B$  sont équivalentes si elles ont la même table de vérité. Dans ce cas, on note  $A \iff B$

**Proposition:** Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois propositions.

1.  $(A \text{ et } B) \text{ et } C \iff A \text{ et } (B \text{ et } C)$
2.  $A \text{ et } A \iff A$
3.  $A \text{ et } B \iff B \text{ et } A$
4.  $(A \text{ ou } B) \text{ ou } C \iff A \text{ ou } (B \text{ ou } C)$
5.  $A \text{ ou } A \iff A$
6.  $A \text{ ou } B \iff B \text{ ou } A$
7.  $\text{non}(\text{non}(A)) \iff A$
8.  $A \text{ et } (B \text{ ou } C) \iff A \text{ et } B \text{ ou } A \text{ et } C$
9.  $A \text{ ou } (B \text{ et } C) \iff (A \text{ ou } B) \text{ et } (A \text{ et } C)$
10.  $\text{non}(A \text{ et } B) \iff \text{non}(A) \text{ ou } \text{non}(B)$
11.  $\text{non}(A \text{ ou } B) \iff \text{non}(A) \text{ et } \text{non}(B)$

*Preuve:*  
8.

$A$	$B$	$C$	$B$ ou $C$	$A$ et $(B$ ou $C)$	$A$ et $B$	$A$ et $C$	$(A$ et $B)$ ou $(A$ et $C)$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$V$	$F$	$V$	$V$	$F$	$F$	$V$
$V$	$F$	$V$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$
$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$

10.

$A$	$B$	$A$ et $B$	non $(A$ et $B)$	non $(A)$	non $(B)$	non $(A)$ ou non $(B)$
$V$	$V$	$V$	$F$	$F$	$F$	$F$
$V$	$F$	$F$	$V$	$F$	$V$	$V$
$F$	$V$	$F$	$V$	$V$	$F$	$V$
$F$	$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$

□

**Définition:** Soient  $A$  et  $B$  deux propositions. La proposition  $A \implies B$  ( $A$  implique  $B$ ) est définie par :

$A$	$B$	$A \implies B$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$

**Définition:** Soient  $A$  et  $B$  deux propositions telles que  $A \implies B$  est vraie. On dit que  $A$  est une condition suffisante pour que  $B$  soit vraie. On dit que  $B$  est une condition nécessaire pour que  $A$  soit vraie.

**Proposition** (Contraposée): Soient  $A$  et  $B$  deux propositions.

$$(A \implies B) \iff (\text{non } B \implies \text{non } A)$$

$A$	$B$	non $A$	non $B$	non $B \implies$ non $A$	$A \implies B$
$V$	$V$	$F$	$F$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$	$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$

□

**Proposition:** Soient  $A$  et  $B$  deux propositions.

$$(A \implies B) \iff ((A \implies B) \text{ et } (B \implies A))$$

*Preuve:*

$A$	$B$	$A \iff B$	$A \implies B$	$B \implies A$	$(A \implies B) \text{ et } (B \implies A)$
$V$	$V$	$V$	$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$	$F$	$V$	$F$
$F$	$V$	$F$	$V$	$F$	$F$
$F$	$F$	$V$	$V$	$V$	$V$

□

**Proposition:** Soient  $A$  et  $B$  deux propositions.

$$(A \implies B) \iff (B \text{ ou } \text{non}(A))$$

*Preuve:*

On obtient par contraposée

$$\text{non}(A \implies B) \iff (A \text{ et } \text{non}(B))$$

donc

$$\begin{aligned}
 (A \implies B) &\iff \text{non}(A \text{ et } \text{non}(B)) \\
 &\iff \text{non}(A) \text{ ou } \text{non}(\text{non}(B)) \\
 &\iff \text{non}(A) \text{ ou } B \\
 &\iff B \text{ ou } \text{non}(A)
 \end{aligned}$$

□

Deuxième partie

Déduction naturelle



Dans ce paragraphe,  $A$  et  $B$  sont deux propositions.

$A$  et  $B$

Comment démontrer  $A$  et  $B$  ?

- On démontre  $A$
- On démontre  $B$

Comment utiliser l'hypothèse  $A$  et  $B$  ?

On utilise  $A$  ou on utilise  $B$ .

$A$  ou  $B$

Comment démontrer  $A$  ou  $B$  ?

On essaie de démontrer  $A$ . Si on y arrive, alors on a prouvé  $A$  ou  $B$  sinon on démontre  $B$ .

Variante

On suppose  $A$  faux. On démontre  $B$ .

Comment utiliser l'hypothèse  $A$  ou  $B$  ?

On fait une disjonction des cas :

- Cas 1 : On suppose  $A$
- Cas 2 : On suppose  $B$

$A \implies B$

Comment démontrer  $A \implies B$  ?

On suppose  $A$ . On démontre  $B$ .

Comment utiliser l'hypothèse  $A \implies B$  ?

On démontre  $A$ . On utilise  $B$ .

Troisième partie

Raisonnement par l'absurde

Situation :

Soient  $A$  et  $B$  deux propositions.

On veut montrer  $A \implies B$ .

On suppose  $A$ . On suppose aussi  $B$  faux.

On cherche à faire apparaître une contradiction ( $\bot$ )

Quatrième partie

Prédictat

**Définition:** Un prédicat  $\mathcal{P}(x)$  est un énoncé dont la valeur de vérité dépend de l'objet  $x$ , élément d'un ensemble  $E$ .

Le domaine de validité de  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des valeurs  $x$  de  $E$  pour lesquelles  $\mathcal{P}(x)$  est vraie :

$$\{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$$

REMARQUE (Notation):

On écrit

$$\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$$

pour dire que  $\mathcal{P}(x)$  est vraie pour tous les  $x$  de  $E$ .

On écrit

$$\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$$

pour dire qu'il existe (au moins) un élément  $x \in E$  pour lesquels  $\mathcal{P}(x)$  est vraie.

On écrit

$$\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$$

pour dire qu'il existe un unique élément  $x \in E$  tel que  $\mathcal{P}(x)$  est vraie.

$$\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$$

Comment démontrer  $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$  ?

Soit  $x \in E$  (fixé quelconque). Montrons  $\mathcal{P}(x)$ .

Comment utiliser  $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$  ?

On choisit (spécialise) une ou plusieurs (voir toutes) valeurs de  $x$  et on exploite  $\mathcal{P}(x)$ .

EXEMPLE:

Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a + b \times 2^n + c \times 3^n$$

Montrons que  $a = b = c = 0$ .

$$\text{On sait que } (S) : \begin{cases} a + b + c = 0 & (n = 0) \\ a + 2b + 3c = 0 & (n = 1) \\ a + 4b + 9c = 0 & (n = 2) \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ 3b + 8c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$