Chapitre 0

Logique (rudiment

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 23 février 2022

Table des matières

Definition

Un proposition est un énoncé qui est soit vrai, soit faux.

Exemple

$$\left.\begin{array}{l} A : \text{“}B \text{ est vraie ”} \\ B : \text{“}A \text{ est fausse ”} \end{array}\right\} \text{ Le système } \{A, B\} \text{ est une auto-contradiction}$$

Definition

Démontrer une proposition revient à prouver qu'elle est vraie

Première partie

Algèbre de Boole

Definition

Soient A et B deux propositions. La proposition $\underline{A \text{ et } B}$ est définie par la table de vérité suivante :

A	B	A et B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Definition

Soient A et B deux propositions. La proposition $\underline{A \text{ ou } B}$ est définie par la table de vérité suivante :

A	B	A ou B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Definition

Soit A une proposition. La négation de A, notée non(A) est définie par :

A	non(A)
V	F
F	V

Definition

Deux propositions A et B sont équivalentes si elles ont la même table de vérité. Dans ce cas, on note $A \iff B$

Proposition

Soient A, B et C trois propositions.

1. $(A \text{ et } B) \text{ et } C \iff A \text{ et } (B \text{ et } C)$
2. $A \text{ et } A \iff A$
3. $A \text{ et } B \iff B \text{ et } A$
4. $(A \text{ ou } B) \text{ ou } C \iff A \text{ ou } (B \text{ ou } C)$
5. $A \text{ ou } A \iff A$
6. $A \text{ ou } B \iff B \text{ ou } A$
7. $\text{non } (\text{ non } (A)) \iff A$
8. $A \text{ et } (B \text{ ou } C) \iff A \text{ et } B \text{ ou } A \text{ et } C$

9. A ou $(B$ et $C) \iff (A$ ou $B)$ et $(A$ et $C)$
10. non $(A$ et $B) \iff$ non (A) ou non (B)
11. non $(A$ ou $B) \iff$ non (A) et non (B)

Preuve

8.

A	B	C	B ou C	A et $(B$ ou $C)$	A et B	A et C	$(A$ et $B)$ ou $(A$ et $C)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

10.

A	B	A et B	non $(A$ et $B)$	non (A)	non (B)	non (A) ou non (B)
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

□

Definition

Soient A et B deux propositions. La proposition $\underline{A \implies B}$ (A implique B) est définie par :

A	B	$A \implies B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Definition

Soient A et B deux propositions telles que $A \implies B$ est vraie. On dit que A est une condition suffisante pour que B soit vraie. On dit que B est une condition nécessaire pour que A soit vraie.

Proposition **Contraposée**

Soient A et B deux propositions.

$$(A \implies B) \iff (\text{ non } B \implies \text{ non } A)$$

Preuve

A	B	non A	non B	non $B \implies$ non A	$A \implies B$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

□

Proposition

Soient A et B deux propositions.

$$(A \implies B) \iff \big((A \implies B) \text{ et } (B \implies A)\big)$$

Preuve

A	B	$A \iff B$	$A \implies B$	$B \implies A$	$(A \implies B)$ et $(B \implies A)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

□

Proposition

Soient A et B deux propositions.

$$(A \implies B) \iff (B \text{ ou } \text{ non } (A))$$

Preuve

On obtient par contraposée

$$\text{non } (A \implies B) \iff (A \text{ et } \text{ non } (B))$$

donc

$$\begin{aligned}(A \implies B) &\iff \text{ non } (A \text{ et } \text{ non } (B)) \\ &\iff \text{ non } (A) \text{ ou } \text{ non } (\text{ non } (B)) \\ &\iff \text{ non } (A) \text{ ou } B \\ &\iff B \text{ ou } \text{ non } (A)\end{aligned}$$

□

Deuxième partie

Déduction naturelle

Dans ce paragraphe, A et B sont deux propositions.

$\boxed{A \text{ et } B}$

<u>Comment démontrer A et B ?</u>

- On démontre A
- On démontre B

<u>Comment utiliser l'hypothèse A et B ?</u>
On utilise A ou on utilise B.

$\boxed{A \text{ ou } B}$

<u>Comment démontrer A ou B ?</u>
On essaie de démontrer A. Si on y arrive, alors on a prouvé A ou B sinon on démontre B.

<u>Variante</u>
On suppose A faux. On démontre B.

<u>Comment utiliser l'hypothèse A ou B ?</u>
On fait une disjonction des cas :

- Cas 1 : On suppose A
- Cas 2 : On suppose B

$\boxed{A \implies B}$

<u>Comment démontrer $A \implies B$?</u>
On suppose A. On démontre B.

<u>Comment utiliser l'hypothèse $A \implies B$?</u>
On démontre A. On utilise B.

Troisième partie

Raisonement par l'absurde

$\boxed{\text{Situation :}}$
Soient A et B deux propositions.
On veut montrer $A \implies B$.
On suppose $\underline{A}$. On suppose aussi $\underline{B \text{ faux}}$.
On cherche à faire apparaître une contradiction ($\lightning$)

Quatrième partie

Prédicat

Definition

Un <u>prédicat</u> $\mathscr{P}(x)$ est un énoncé dont la valeur de vérité dépend de l'objet x, élément d'un ensemble E.
Le <u>domaine de validité</u> de $\mathscr{P}$ est l'ensemble des valeurs x de E pour lequelles $\mathscr{P}(x)$ est vraie :

$$\{x \in E \mid \mathscr{P}(x)\}$$

Remarque *Notation*
On écrit

$$\forall x \in E, \mathscr{P}(x)$$

pour dire que $\mathscr{P}(x)$ est vraie pour tous les x de E.

On écrit

$$\exists x \in E, \mathscr{P}(x)$$

pour dire qu'il existe (au moints) un élément $x \in E$ pour lequels $\mathscr{P}(x)$ est vraie.

On écrit

$$\exists! x \in E, \mathscr{P}(x)$$

pour dire qu'il existe un <u>unique</u> élément $x \in E$ tel que $\mathscr{P}(x)$ est vraie.

$\boxed{\forall x \in E, \mathscr{P}(x)}$ <u>Comment démontrer $\forall x \in E, \mathscr{P}(x)$?</u>
Soit $x \in E$ (fixé quelconque). Montrons $\mathscr{P}(x)$.

<u>Comment utiliser $\forall x \in E, \mathscr{P}(x)$?</u>
On choisit (spécialise) une ou plusieurs (voir toutes) valeurs de x et on exploite $\mathscr{P}(x)$.

Exemple

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a + b \times 2^n + c \times 3^n$$

Montrons que $a = b = c = 0$.
On sait que $(S) : \begin{cases} a + b + c = 0 & (n = 0) \\ a + 2b + 3c = 0 & (n = 1) \\ a + 4b + 9c = 0 & (n = 2) \end{cases}$

$$(S) \iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ 3b + 8c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

Cinquième partie

Logique douteuse

Definition

On définit $\varpi = \dfrac{e^{\pi-\sqrt{2}} - \ln 4 + \Upsilon}{\gamma}$ où $\Upsilon = \pi! = \Gamma(\pi+1) \approx 7.18$
On a $\varpi \approx 19.7979$

Definition

Soit $P(x)$ un prédicat sur E. On dit que $P(x)$ est <u>quasi-vraie</u> (pour un certain $\varepsilon > 0$) si

$$\mathfrak{Y}_E(P) = \frac{\text{Card}(F)}{\text{Card}(V)} < \varepsilon$$

où $V = \{x \in E \mid P(x) \text{ vrai}\}$ et $F = \{x \in E \mid P(x) \text{ faux}\}$
Par convention, on choisit généralement $\varepsilon = \varpi$.

Exemple

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $P(x)$: "$\sqrt{x^2} = x$".
On sait que $P(x)$ est vraie pour tout x positif (ou nul).
Or, $\forall x \in \mathbb{R}^-, P(x)$ est faux ($\sqrt{x^2} = -x$)
Alors, $P(x)$ est quasi-vraie
On note $\infty = \text{Card}(\mathbb{R}^+) = \text{Card}(\mathbb{R}^-)$. On a donc $\mathfrak{Y}_E(P) = \dfrac{\infty}{\infty} = 1$

Théorème **Théorème du pipeau qui marche**

" C'est du pipeau ... mais ça marche ! "

Toute proposition quasi-vraie est vraie. □

Remarque

Ce théorème est très utile. On l'appèle aussi le théorème du marchand de tapis ou le théorème du random-bullshit.
La preuve de ce théorème est très complexe et utilise principalement des notions qui ne sont pas au programme. Malgrès cela, on peut tout de même comprendre la preuve.

Preuve *principe de la preuve*
On a une proposition $P(x)$ sur un ensemble E. On note $n = \text{Card}(E)$. On pose V et F comme dans la définition d'une proposition quasi-vraie.
On montre que $F \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varnothing$ et donc que $V \xrightarrow[n\to+\infty]{} E$ en démontrant que $\text{Card}\, V \xrightarrow[n\to+\infty]{} \text{Card}\, E$.

Exemple

On pose $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$: "$\dfrac{1}{x}$ existe". On sait que $\dfrac{1}{0}$ n'existe pas. Cependant, P est quand même quasi-vraie. Donc d'après le théorème du pipeau qui marche,

P est vraie.

Proposition

Les équivalents autour d'un points sont des égalités à $\pm\varepsilon$. $\square$

Exemple

Avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, $\sin\theta \approx \theta$, $\cos\theta \approx 1$

Corollaire

Toute notation en "petit o" est optionnelle avec l'utilisation de "$\approx$". Avec la valeur de ε correspodante,

$$\forall x \in \mathbb{R}, o(x) \approx 0$$

$\square$

Remarque *Notation*

Au lieu d'utiliser "$\approx$", on écrit "$=$" à la place.

On a donc $\sin(\theta) = \theta$ et $\cos(\theta) = 1$.