

## CHAPITRE 11

*Suite*

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 28 mars 2022

# Table des matières

I	Modes de définition	2
II	Limites	4
III	Limites et inégalités	8
IV	Suites extraites	11
V	Suites récurrentes	13
VI	Comparaison de suites	16
VII	Suites complexes	19
VIII	Annexe	23

Première partie

Modes de définition

**Définition:** Une suite peut être définie

- Explicitement On dispose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  de l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

ex  $\forall n \in \mathbb{N}_*, u_n = \frac{\ln(n)}{n} e^{-n}$

- Par récurrence On connaît  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_0, u_1, \dots, u_n$

ex  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$

- Implicitement  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$  est le seul nombre vérifiant une certaine propriété

ex  $u_n$  est le seul réel vérifiant  $x^5 + nx - 1 = 0$

## Deuxième partie

### Limites

**Définition:** Soit  $u$  une suite réelle et  $\ell \in \mathbb{R}$ . On dit que

- $u$  converge vers  $\ell$
- $u_n$  tends vers  $\ell$  quand  $n$  tends vers  $+\infty$
- $\ell$  est une limite de  $u$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon \\ (\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon)$$

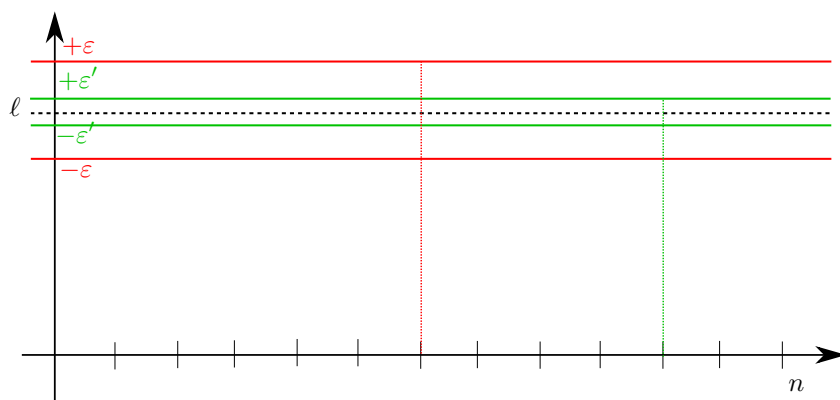


FIGURE 1 – Définition de la limite

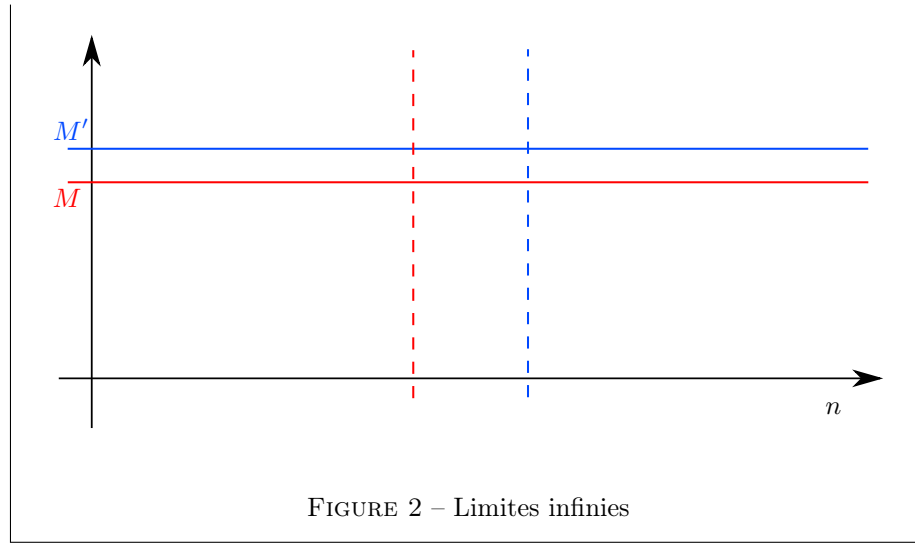
**Définition:** Soit  $u$  une suite réelle.

On dit que  $u$  tends vers  $+\infty$  si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq M$$

On dit que  $u$  tends vers  $-\infty$  si

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq m$$



**Définition:** Une suite qui ne converge pas est dite divergente (on dit qu'elle diverge). C'est le cas si cette suite n'a pas de limite quand elle tends vers  $\pm\infty$ .

**Théorème** (Unicité de la limite (réelle)): Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (\ell_1, \ell_2) \in \overline{\mathbb{R}}^2$

Si  $\begin{cases} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_1 \\ u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_2 \end{cases}$  alors  $\ell_1 = \ell_2$

■

REMARQUE:

Si  $u_n$  tends vers  $\ell$  quand  $n$  tends vers  $+\infty$ , on écrit  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$  ou  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$  ou  $\lim u_n = \ell$

**Proposition:** Toute suite convergente est bornée

■

**Proposition:** Soient  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et  $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . On pose  $\ell_1 = \lim u_n$  et  $\ell_2 = \lim v_n$

1. si  $\ell_1 \in \mathbb{R}$  et  $\ell_2 \in \mathbb{R}$  alors  $u_n + v_n \rightarrow \ell_1 + \ell_2$
2. si  $\ell_1 \in \mathbb{R}$  et  $\ell_2 = +\infty$  alors  $u_n + v_n \rightarrow +\infty$
3. si  $\ell_1 \in \mathbb{R}$  et  $\ell_2 = -\infty$  alors  $u_n + v_n \rightarrow -\infty$
4. si  $\ell_1 = \ell_2 = +\infty$ , alors  $u_n + v_n \rightarrow +\infty$

5. si  $\ell_1 = \ell_2 = -\infty$ , alors  $u_n + v_n \rightarrow -\infty$  ■

**Proposition:** Soient  $u$  et  $v$  deux suites réelles. On pose  $\ell_1 = \lim u_n$  et  $\ell_2 = \lim v_n$

1. si  $\ell_1 \in \mathbb{R}$  et  $\ell_2 \in \mathbb{R}$ , alors  $u_n v_n \rightarrow \ell_1 \ell_2$
2. si  $\begin{cases} \ell_1 \in \mathbb{R}_*^+, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \rightarrow +\infty \\ \ell_1 \in \mathbb{R}_*^-, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \rightarrow -\infty \end{cases}$
3. si  $\begin{cases} \ell_1 \in \mathbb{R}_*^+, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \rightarrow -\infty \\ \ell_1 \in \mathbb{R}_*^-, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \rightarrow +\infty \end{cases}$
4. si  $\begin{cases} \ell_1 = -\infty, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \rightarrow -\infty \\ \ell_1 = -\infty, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \rightarrow +\infty \\ \ell_1 = +\infty, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \rightarrow +\infty \end{cases}$  ■

**Proposition:** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathbb{R}_*$ . Donc,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$   
On pose  $\ell = \lim u_n$  (si elle existe).

1. si  $\ell = +\infty$  alors,  $\frac{1}{u_n} \rightarrow 0$

2. si  $\ell = 0$  alors,  $\left| \frac{1}{u_n} \right| \rightarrow +\infty$

⚠ Si le signe de  $u_n$  ne se stabilise pas  $\frac{1}{u_n}$  n'a pas de limite

ex  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

3. si  $\ell \in \mathbb{R}^*$ , alors  $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ell}$  ■



Troisième partie

Limites et inégalités

**Proposition:** Soient  $u$  et  $v$  deux suites réelles convergentes de limites respectives  $\ell_1$  et  $\ell_2$ . On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$$

Alors,  $\ell_1 \leq \ell_2$

■

REMARQUE:

Si  $\begin{cases} u_n \rightarrow \ell_1 \in \mathbb{R} \\ v_n \rightarrow \ell_2 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n \end{cases}$

on n'a pas forcément  $\ell_1 < \ell_2$

ex  $\forall n \in \mathbb{N}_*, \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$  mais les deux convergent vers 0

**Proposition:** Soient  $u$  et  $v$  deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$$

1. si  $u_n \rightarrow +\infty, v_n \rightarrow +\infty$
2. si  $v_n \rightarrow -\infty, u_n \rightarrow -\infty$

■

**Théorème** (Théorème des "gendarmes"): Soient  $u, v$  et  $w$  trois suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$$

On suppose que  $u$  et  $w$  convergent vers la même limite  $\ell \in \mathbb{R}$ . Alors,  $v$  converge vers  $\ell$

■

**Théorème** (Limite monotone): 1. Soit  $u$  une suite croissante majorée par  $M$ .

Alors,  $u$  converge et  $\lim u_n \leq M$

2. Soit  $u$  une suite croissante non majorée.

Alors,  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

3. Soit  $u$  une suite décroissante minorée par  $m$ .

Alors,  $u$  converge et  $\lim u_n \geq m$

4. Soit  $u$  une suite décroissante non minorée.

Alors,  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$

■

**Définition:** Soient  $u$  et  $v$  deux suites réelles. On dit que  $u$  et  $v$  sont adjacentes si

- $u$  est croissante
- $v$  est décroissante
- $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

**Théorème:** Soient  $u$  et  $v$  deux suites adjacentes. Alors,  $u$  et  $v$  convergent vers la même limite. ■

**Théorème** (Théorème des segments emboîtés): Soit  $(I_n)$  une suite de segments (non vide) décroissante

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$$

On note  $\ell(I)$  la longueur d'un intervalle  $I$ .

Si  $\ell(I_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  alors  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$  est un singleton. ■

Quatrième partie

Suites extraites

**Définition:** Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante.  
On dit que  $(u_{\varphi(n)})$  est une **suite extraite** de  $u$  ou une **sous suite** de  $u$ .  
On dit alors que  $\varphi$  est une extractrice

**Lemme:** Soit  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$$

■

**Proposition:** Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  de limite  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$  et  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante  
alors  $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ .

■

**Proposition:** Si  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  ont la même limite  $\ell$  alors  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$

■

**Théorème** (Théorème de Bolzano-Weierstrass): Soit  $(u_n)$  une suite réelle bornée. Alors, il existe  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $(u_{\varphi(n)})$  converge.

■

Cinquième partie

Suites récurrentes

**Définition:** On dit que  $u$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants s'il existe  $(a, b) \in \mathbb{C}$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

L'équation caractéristique associée est

$$(C) : z^2 = az + b \text{ avec } z \in \mathbb{C}$$

**Proposition:** Avec les notations précédentes,

1. Si  $(C)$  a 2 racines simples  $r_1 \neq r_2$  alors

$$\exists(A, B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

2. Si  $(C)$  a une racine double  $r \in \mathbb{C}$  alors

$$\exists(A, B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)r^n$$

■

**Proposition:** avec les notations précédentes et avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

1. Si  $(C)$  a deux racines simples  $r_1 \neq r_2$  alors

$$\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

2. Si  $(C)$  a une racine simple  $r \in \mathbb{R}$  alors

$$\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)r^n$$

3. Si  $(C)$  a deux racines complexes conjuguées  $re^{i\theta}$  avec  $r \in \mathbb{R}_*^+$  et  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  alors

$$\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n(A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))$$

□

REMARQUE:

Étude de  $u_{n+1} = f(u_n)$

1. On choisit rapidement la fonction  $f$  (au moins le tableau de variation)
- 1'. (OPTIONNEL) on représente graphiquement la fonction  $f$  et la droite d'équation  $y = x$  pour conjecturer sa limite
2. On utilise le tableau de variation pour vérifier que  $(u_n)$  est bien définie par récurrence

$$P(n) : "u_n \text{ existe et } u_n \in \mathcal{D}_f"$$

3. On étudie le signe de  $f(x) - x$
4. On cherche les intervalles stables par  $f$  :

$$f(I) \subset I$$

les plus petits possible (ça permet de montrer que la suite est majorée (minorée) en particulier ceux sur lesquels  $f(x) - x$  ne change pas de signe

- 4'. Donc on utilise le théorème de la limite monotone
- 4''. Sinon, on essaie l'inégalité (voir théorème) des accroissements finis :  
Soit  $\ell$  un point fixe de  $f$  :  $f(\ell) = \ell$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| = M |u_n - \ell|$$

où  $M$  est un majorant de  $|f'|$   
Si  $0 \leq M \leq 1$  alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq M^n |u_0 - \ell| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

donc  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$

5. si  $(u_n)$  a une limite et si  $f$  continue alors  $\lim(u_n)$  est une point fixe de  $f$



Sixième partie

Comparaison de suites

**Définition:** Soient  $u$  et  $v$  deux suites réelles. On dit que  $u$  est dominée par  $v$  si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \leq M |v_n|$$

Dans ce cas, on note  $u = O(v)$  ou  $u_n = O(v_n)$  et on dit que " $u$  est un grand o de  $v$ "

**Proposition:**  $O$  est une relation réflexive et transitive. ■

**Définition:** Soient  $u$  et  $v$  deux suites. On dit que  $u$  est négligeable devant  $v$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

Dans ce cas, on note  $u = o(v)$  ou  $u_n = o(v_n)$  ou on le lit " $u$  est un petit o de  $v$ "

**Proposition:**  $o$  est une relation transitive, non-réflexive ■

**Proposition:** Soient  $u$  et  $v$  deux suites.

- $o(u) + o(u) = o(u)$
- $v \times o(u) = o(uv)$
- $o(u) \times o(v) = o(uv)$
- $o(o(u)) = o(u)$

□

**Définition:** Soient  $u$  et  $v$  deux suites. On dit que  $u$  et  $v$  sont équivalentes si

$$u = v + o(v)$$

i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - v_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

Dans ce cas, on le note  $u \sim v$

**Proposition:**  $\sim$  est une relation d'équivalence □

**Proposition:** Soient  $(u, v) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . On suppose que  $v$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang

1.  $u = o(v) \iff \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$  bornée
2.  $u = o(v) \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
3.  $u \sim v \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

□

**Proposition** (Suites de références): 1.  $\ln^\alpha(n) = o(n^\beta)$  avec  $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$

2.  $n^\beta = o(a^n)$  avec  $\beta > 0$  et  $a > 1$
3.  $a^n = o(n!)$  avec  $a > 1$
4.  $n! = o(n^n)$

**Lemme** (Exercice 10 du TD): Soit  $u \in (\mathbb{R}_*^+)^{\mathbb{N}}$

Si  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell < 1$  avec  $\ell \in \mathbb{R}$ ,  
alors  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

■

Septième partie

Suites complexes

**Définition:** Soit  $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  et  $\ell \in \mathbb{C}$ . On dit que  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

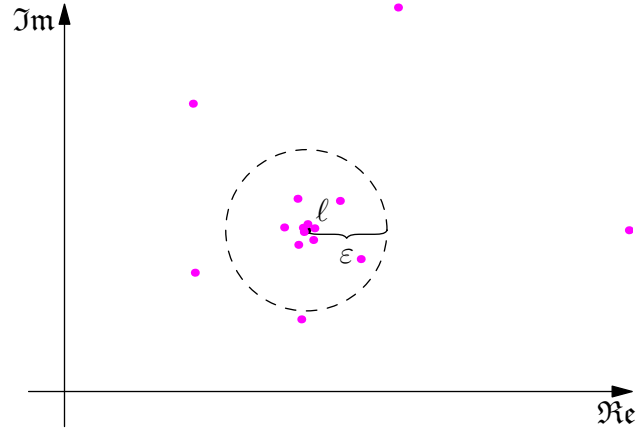


FIGURE 3 – Suite complexe convergente

**Proposition:** Si  $\ell_1$  et  $\ell_2$  sont deux limites de  $u$  alors  $\ell_1 = \ell_2$

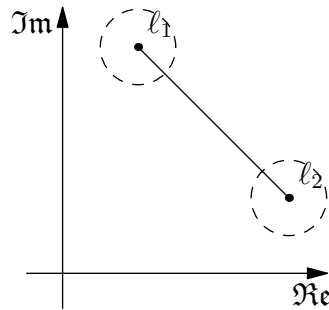


FIGURE 4 – Unicité de la limite de suites complexes

□

**Proposition:** Les limites de somme, produit, quotient de suites complexes respectent les mêmes lois que pour les suites réelles. □

**Théorème:** Soit  $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  et  $\ell \in \mathbb{C}$ .

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \iff \begin{cases} \Re(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \Re(\ell) \\ \Im(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \Im(\ell) \end{cases}$$

■

**Proposition:** Soit  $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  et  $\ell \in \mathbb{C}$ .

Si  $u_n \rightarrow \ell$  alors  $|u_n| \rightarrow |\ell|$

■

**Proposition:** Tous les résultats (sauf ceux avec des limites infinies!) concernant les suites extraites sont encore valables dans  $\mathbb{C}$  y compris le théorème de Bolzano-Weierstrass (mais avec une autre preuve).

**Définition:** Soit  $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . On dit que  $u$  est bornée s'il existe  $M \in \mathbb{R}^+$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$$

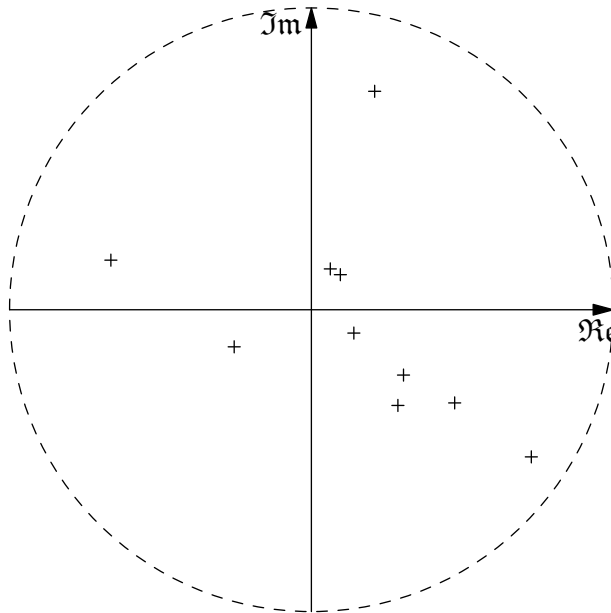


FIGURE 5 – Suite complexe bornée

|| **Théorème** (Bolzano Weierstrass): Soit  $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  bornée. Il existe  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $(u_{\varphi(n)})$  converge.

■

## Huitième partie

### Annexe



**Proposition:** Soit  $f : I \rightarrow I$  continue et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

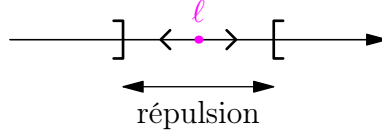
Si  $(u_n)$  converge vers  $\ell \in \mathbb{R}$   
alors  $f(\ell) = \ell$  i.e. ( $\ell$  est un point fixe de  $f$ )

■

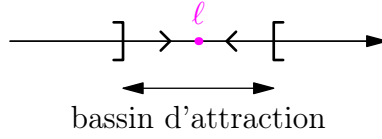
REMARQUE:

Soit  $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable telle que  $u_{n+1} = f(u_n)$ .  
Soit  $\ell \in \mathbb{R}$  un point fixe de  $f$ . Donc,  $f(\ell) = \ell$ .

$|f'(\ell)| > 1$  :



$|f'(\ell)| < 1$  :



Par contre, si  $|f'(\ell)| = 1$ , on ne sait pas.

REMARQUE (Suite arithético-géométrique):

$$(*) : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b = f(u_n)$$

MÉTHODE 1

— On cherche  $v$  une suite constante solution de  $(*)$  :

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, v_n = C$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, C = aC + b = f(C)$$

$$\text{Si } a \neq 1 : C = \frac{b}{1-a}$$

— Soit  $u$  qui vérifie  $(*)$ . On pose  $w = u - v$ .

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} &= u_{n+1} - v_{n+1} \\ &= au_n + b - av_n - b \\ &= a(u_n - v_n) \\ &= aw_n \end{aligned}$$

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = aw_n + 0$  : équation homogène associée à (\*)  
 $(w_n)$  est géométrique donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 a^n$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = w_0 a^n + \frac{b}{1-a}$$

MÉTHODE 2

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) &\longmapsto (u_{n+1} - au_n) \end{aligned}$$

$\varphi$  morphisme de groupes additifs

$$\varphi(u) = (b) \iff u = v + w \text{ avec } w \in \text{Ker}(\varphi)$$

$$\begin{aligned} w \in \text{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(w) = 0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - aw_n = 0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = aw_n \end{aligned}$$