Chapitre 14

TD

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 8 mai 2022

Table des matières

Première partie

Exercice 1

Pour $t \in [0,1]$, on note $d(t)$ la distance en km parcourue en t heure.

$$d : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

On suppose $\begin{cases} d(0) = 0 \\ d(1) = 4 \\ d \text{ continue et croissante} \end{cases}$
On veut prouver qu'il existe t te lque

$$d\left(t + \frac{1}{2}\right) - d(t) = 2$$

On pose $\delta : t \mapsto d\left(t + \frac{1}{2}\right) - d(t)$ continue.

$$\begin{cases} \delta(0) = d\left(\frac{1}{2}\right) \\ \delta\left(\frac{1}{2}\right) = 4 - d\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant d(1) \end{cases}$$

— Si $d\left(\frac{1}{2}\right) > 2$, alors $\delta\left(\frac{1}{2}\right) < 2 < \delta(0)$ donc il existe t tel que $\delta(t) = 2$

— Si $d\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant 2$, alors $\delta\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant 2 \geqslant \delta(0)$ donc il existe t tel que $\delta(t) = 2$

Donc il exite t tel que $\delta(t) = 2$ i.e. $d\left(t + \frac{1}{2}\right) = 2 + d(t)$

Deuxième partie

Exercice 2

On pose $\begin{cases} M : x \mapsto \max(f(x), g(x)) \\ m : x \mapsto \min(f(x), g(x)) \end{cases}$
On remarque que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} M(x) + m(x) = f(x) + g(x) \\ M(x) - m(x) = |f(x) - g(x)| \end{cases}$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, M(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\right)$$

et

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}, m(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\right)\right)$$

On a bien M continue

Troisième partie

Exercice 3

$\forall n \in \mathbb{Z}, x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est constante sur $[n, n+1[$ donc $\begin{cases} \text{continue sur }]n, n+1[\\ \text{et continue à droite en } n \end{cases}$

Soit $f : x \mapsto (x - \lfloor x \rfloor)^2 + \lfloor x \rfloor$
Soit $n \in \mathbb{Z}$. f est continue sur $]n, n+1[$
Donc f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

$$f(n) = 0^2 + n = n$$

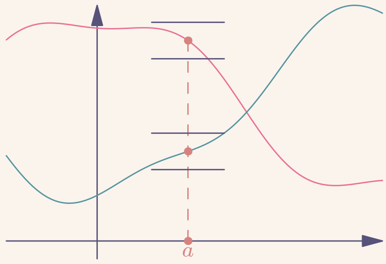
$$\lim_{\substack{x \to n \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to n \\ >}} (x - n)^2 + n = n$$

$$\lim_{\substack{x \to n \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to n \\ <}} (x - (n-1))^2 + (n-1) = 1 + n - 1 = n$$

Donc f est continue en n donc f est continue sur $\mathbb{R}$

Quatrième partie

Exercice 4



On suppose, sans perte de généralité, $f(a) < g(a)$.
On pose $\varepsilon = \dfrac{g(a) - f(a)}{3} > 0$.
$g(x) \xrightarrow[x \to a]{} g(a)$ donc il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$\forall x \in]a - \eta_1, a + \eta_1[\cap I, |g(x) - g(a)| \leqslant \varepsilon$$

De même, il existe $\eta_2 > 0$ tel que

$$\forall x \in]a - \eta_2, a + \eta_2[\cap I, |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

On suppose $a \in \mathring{A}$ (sinon $J = \{a\}$ conviendrait...)
donc il existe $\eta_3 > 0$ tel que $]a - \eta_3, a + \eta_3[\subset I$.
On pose $J =]a - \eta_1, a + \eta_1[\cap]a - \eta_2, a + \eta_2[\cap]a - \eta_3, a + \eta_3[$.
J est un intervalle ouvert non vide (car $a \in J$) inclus dans I.

$$\begin{aligned}\forall x \in J, f(x) \leqslant f(a) + \varepsilon = & \frac{2f(a) + g(a)}{3} \\ & < \frac{f(a) + 2g(a)}{3} \\ & \leqslant g(a) - \varepsilon \\ & \leqslant g(x)\end{aligned}$$

Donc,

$$\forall x \in J, f(x) \neq g(x)$$

Cinquième partie

Exercice 5

On pose

$$\begin{aligned} g : [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) - x \end{aligned}$$

g est continue

$$\begin{cases} g(0) = f(0) \geqslant 0 \\ g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0 \end{cases}$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\exists a \in [0, 1], g(a) = 0 \text{ i.e. } f(a) = a$$

Sixième partie

Exercice 6

— $$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant x^2 |x-2| \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x\to 2}]{} 0$$

Par encadrement,

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ \neq}]{} 0 & = f(0) \\ f(x) \xrightarrow[\substack{x\to 2\\ \neq}]{} 0 & = f(2) \end{cases}$$

Donc f est continue en 0 et en 2

— Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,2\}$.
$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ dnc il existe $(x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc il existe $(y_n) \in (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ telle que $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} f(x_n) = {x_n}^2(x_n-2)\times 0 = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ f(y_n) = {y_n}^2(y_n-2)\times 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} a^2(a-2) \end{cases} \end{cases}$$

Comme $a \notin \{0,2\}, a^2(a-2) \neq 0$ donc f n'est pas continue en a

Septième partie

Exercice 7

<u>Cas 1</u> $\forall x \geqslant a, f(x) = 0$
Alors,

$$0 = f(a) = \max_{[a,+\infty[} f$$

<u>Cas 2</u> $\exists x_0 \geqslant a, f(x_0) > 0$.
On pose $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$
Il existe $\eta \geqslant x_0$ tel que

$$\forall x \geqslant \eta, f(x) \leqslant \varepsilon$$

f est continue sur $[a,\eta]$ donc elle a un maximum

$$\max_{[a,\eta]} f = f(b) \text{ avec } b \in [a,\eta]$$

D'où,

$$\forall x \geqslant a, f(x) \leqslant \begin{cases} \varepsilon < f(x_0) \underbrace{\leqslant}_{\text{car } x_0\in[a,\eta]} f(b) & \text{si } x \geqslant \eta \\ f(b) & \text{si } x \leqslant \eta \end{cases}$$

Huitième partie

Exercice 8

Preuve du “ $\Longleftarrow$ ” de la proposition 2.10 du cours

Soit $y \in]a, b[$. f est croissante sur $]a, y[$ et majorée par $f(y)$ donc

$$\lim_{\substack{x \to y \\ <}} f(x) = \sup_{]a,y[} f \leqslant f(y)$$

f est croissante sur $]y, b[$ minorée par $f(b)$ donc

$$\lim_{\substack{x \to y \\ >}} f(x) = \inf_{]y,b[} f \geqslant f(y)$$

Supposons $\sup\limits_{]a,y[} f < f(y)$.
Soit $t \in]a, y[$, $f(t) \leqslant \sup\limits_{]a,y[} f < f(y)$
donc $\sup\limits_{]a,y[} f \in [f(t), f(y)] \subset [f(a), f(b)] = f([a, b])$
donc

$$\exists u \in]a, b[, \sup_{]a,y[} f = f(u)$$

Donc $f(u) < f(y)$
Soit $w \in]f(u), f(y)[\subset [f(a), f(b)] = f([a, b])$ donc $w = f(r)$ avec $r \in [a, b]$.

$$f(r) > f(u) \text{ donc } r > u$$
$$f(r) < f(y) \text{ donc } r < y$$

donc $r \in]a, y[$ donc $f(u) < w = f(r) \leqslant f(u)$ $\lightning$

Neuvième partie

Exercice 9

1. Récurrence :
   — $f\left(a^{\frac{1}{a^0}}\right) = f(a)$
   — $f\left(a^{\frac{1}{2^{n+1}}}\right) = f\left(\left(a^{\frac{1}{2^n}}\right)^2\right) = f\left(a^{\frac{1}{2n}}\right) = f(a)$
2. $\forall a > 0, a^{\frac{1}{2^n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$
   f est continue donc

$$\begin{array}{ccc} f\left(a^{\frac{1}{2^n}}\right) & \xrightarrow[n \to +\infty]{} & f(1) \\ \| & & \\ f(a) & \xrightarrow[n \to +\infty]{} & f(a) \end{array}$$

   Donc $f(a) = f(1)$
   $f(0) = \lim\limits_{\substack{a \to 0 \\ >}} f(a) = f(1)$ car f est continue en 0
   donc $\forall a \in \mathbb{R}^+, f(a) = f(1)$, f est constant

Dixième partie

Exercice 10

— Soit $x \in E_f$. $f(x) = x$ donc $x \in \mathrm{Im}(f)$
— Soit $x \in \mathrm{Im}(f), x = f(u)$.
Alors, $f(x) = f(f(u)) = f(u) = x$ donc $x \in E_f$
D'ou $\boxed{E_f = \mathrm{Im}(f) = f([0, 1])}$

Comme f est continue, $f([0,1])$ est un segment non vide car $f(1) \in \mathrm{Im}(f) = E_f$
Soient $a \leqslant b$ dans $[0,1]$
$g : [0,a] \to [a,b]$ continue telle que $g(a) = a$
$h : [b,1] \to [a,b]$ continue telle que $h(b) = b$
On pose

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto \begin{cases} g(x) & \text{si } x \leqslant a \\ x & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \\ h(x) & \text{si } x \geqslant b \end{cases} \end{aligned}$$

Montrer que f est continue est $f \circ f = f$

Onzième partie

Exercice 11

On suppose $A \neq \varnothing$ et on pose

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \inf \{|x-a| \mid a \in A\} \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(\forall a \in A, |x-a| \geqslant 0 \text{ donc } f(x) \text{ existe}\right)$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall a \in A, f(x) = \inf_{a \in A}(|x-a|) \leqslant |x-a| &= |x-y+y-a| \\ &\leqslant |x-y| + |y-a| \end{aligned}$$

donc

$$\forall a \in A, |y-a| \geqslant f(x) - |x-y|$$

donc

$$f(y) \geqslant f(x) - |x-y|$$

donc

$$f(x) - f(y) \leqslant |x-y|$$

On peut prouver de même que

$$f(y) - f(x) \leqslant |y-x| = |x-y|$$

D'où,

$$-|x-y| \leqslant f(x) - f(y) \leqslant |x-y|$$

donc

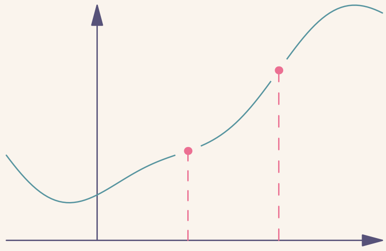
$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|$$

donc f est 1-lipschitzienne donc continue

Douzième partie

Exercice 12

$$\forall y \in [0,1], \varphi(y) = \lim_{\substack{x \to y \\ \neq}} f(x)$$



1. Soit $y \in [0,1]$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$\forall x \in [0,1] \cap]y-\eta_1, y+\eta_1[\setminus \{y\}, -\frac{\varepsilon}{2} \leqslant -f(x) + \varphi(y) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

2. Soit $z \in [0,1] \cap \left]y - \frac{\eta_1}{2}, y + \frac{\eta_1}{2}\right[$. Il exite $\eta_2 > 0$ tel que

$$\forall x \in [0,1] \cap]z-\eta_2, z+\eta_2[\setminus \{z\} - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant f(x) - \varphi(z) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

3. Soit $x \in [0,1] \cap]z-\eta, z+\eta[\setminus \{y,z\}$ où $\eta = \frac{1}{2}\min(\eta_1, \eta_2)$.

$$|x-y| \leqslant |x-z| + |z-y| \leqslant \eta + \frac{\eta_1}{2} \leqslant \frac{\eta_1}{2} + \frac{\eta_1}{2} = \eta_1$$

$$\varphi(y) - \varphi(z) = \underbrace{\varphi(y) - f(x)}_{\in[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]} \underbrace{f(x) - \varphi(z)}_{\in[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]} \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

Treizième partie

Exercice 13

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \sup_{t \in [a,b]} (f(t) + xg(t))$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. $t \mapsto f(t) + xg(t)$ est continue sur $[a,b]$ donc $\varphi(x)$ existe. φ est définie sur $\mathbb{R}$. On pose

$$\begin{cases} m = \min\limits_{t \in [a,b]} (g(t)) \\ M = \max\limits_{t \in [a,b]} (g(t)) \end{cases}$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \forall t \in [a,b], \varphi(x) &\geqslant f(t) + xg(t) \\ &\geqslant f(t) + yg(t) + (x-y)g(t) \end{aligned}$$

Si $x \geqslant y$, $g(t) \geqslant m$ donc $(x-y)g(t) \geqslant m(x-y)$
Si $x \leqslant y$, $g(t) \leqslant M$ donc $(x-y)g(t) \leqslant M(x-y)$

Dans les deux cas, il exite $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in [a,b], \varphi(x) - \mu(x-y) \geqslant f(t) + yg(t)$$

donc

$$\varphi(x) - \mu(x-y) \geqslant \varphi(y)$$

donc

$$\varphi(x) - \varphi(y) \geqslant \mu(x-y)$$

En échangant les rôles de x et y, il existe $\nu \in \mathbb{R}$ tel que

$$\varphi(y) - \varphi(x) \geqslant \nu(y - x)$$

Donc

$$\mu(x - y) < \varphi(x) - \varphi(y) \leqslant \nu(x - y)$$

Par encadrement, $\varphi(x) - \varphi(y) \xrightarrow[\substack{x \to y \\ \neq}]{} 0$

donc $\varphi(x) \xrightarrow[\substack{x \to y \\ \neq}]{} \varphi(y)$

donc φ est continue en y