

CHAPITRE 8

Ensemble relations et lois de compo

Table des matières

I	Théorie naïve des ensembles	2
II	Applications	6
III	Relations binaires	10

Première partie

Théorie naïve des ensembles

Définition: Un ensemble est une collection finie ou infinie d'objets de même nature ou non. L'ordre de ces objets n'a pas d'importance.

REMARQUE (Notation):

Soit E un ensemble et x un objet de E .

On écrit $x \in E$ ou bien $x \ni E$.

REMARQUE (Δ Paradoxe):

On note Ω l'ensemble de tous les ensembles. Alors, $\Omega \in \Omega$.

Ce n'est pas le cas de tous les ensembles :

$$\mathbb{N} \notin \mathbb{N} \text{ car } \mathbb{N} \text{ n'est pas un entier}$$

On distingue donc 2 types d'ensembles :

- ceux qui vérifient $E \notin E$, on dit qu'ils sont ordinaires
- ceux qui vérifient $E \in E$, on dit qu'ils sont extra-ordinaires

On note O l'ensemble de tous les ensembles ordinaires.

- Supposons O ordinaire. Alors, $O \notin O$
Or, O est ordinaire et donc $O \in O$ \nmid
- Supposons O extra-ordinaire.
Alors $O \in O$ et donc O ordinaire \nmid

C'est un paradoxe

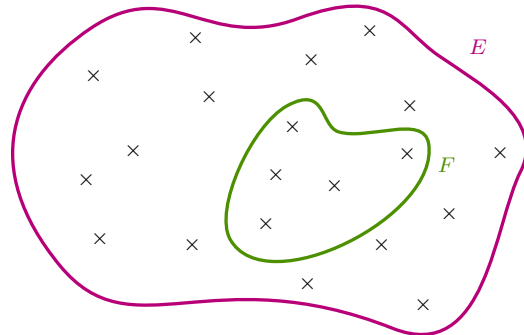
Pour éviter ce type de paradoxe, on a donné une définition axiomatique qui explique quelles sont les opérations permettant de combiner des ensembles pour en faire un autre.

Définition: Soit E un ensemble et F un autre ensemble. On dit que E et F sont égaux (noté $E = F$) si E et F contiennent les mêmes objets.

Définition: L'ensemble vide, noté \emptyset est le seul ensemble à n'avoir aucun élément.

Définition: Soient E et F deux ensembles. On dit que F est inclus dans E , noté $F \subset E$ ou $E \supset F$ si tous les éléments de F sont aussi des éléments de E .

$$\forall x \in F, x \in E$$



Proposition: Pour tout ensemble E , $\emptyset \subset E$

■

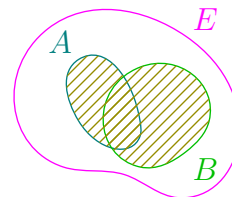
Définition: Soit E un ensemble. On peut former l'ensemble de toutes les parties de E (une partie de E est un ensemble F avec $F \subset E$). On le note $\mathcal{P}(E)$

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$$

Définition: Soit E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$

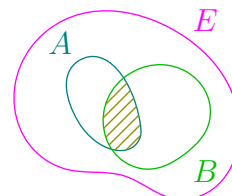
1. La réunion de A et B est

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



2. L'intersection de A et B est

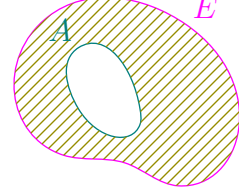
$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$



- 3.

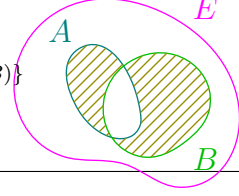
Le complémentaire de A dans E est

$$E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\} = C_E A$$



4. La différence symétrique de A et B est

$$\begin{aligned} A \Delta B &= \{x \in E \mid (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \notin A \text{ et } x \in B)\} \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$



Proposition: Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$

- | | |
|--|---|
| 1. $A \cap A = A$ | 10. $A \cup E = E$ |
| 2. $B \cap A = A \cap B$ | 11. $(E \setminus A) \setminus A = E \setminus A$ |
| 3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ | 12. $E \setminus (E \setminus A) = A$ |
| 4. $A \cap \emptyset = \emptyset$ | 13. $E \setminus \emptyset = E$ |
| 5. $A \cap E = A$ | 14. $E \setminus E = \emptyset$ |
| 6. $A \cup A = A$ | 15. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
| 7. $B \cup A = A \cup B$ | 16. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| 8. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ | 17. $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$ |
| 9. $A \cup \emptyset = A$ | 18. $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$ |

■

Deuxième partie

Applications

Définition: Une application f est la donnée de

- un ensemble E appelé ensemble de départ
- un ensemble F appelé ensemble d'arrivée
- une fonction qui associe à tout élément x de E un unique élément de F noté $f(x)$

L'application est notée

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Définition: Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On dit que f est

- injective si tout élément de F a au plus un antécédant par f
- bijjective si tout élément de F a un unique antécédant par f
- surjective si tout élément de F a au moins un antécédant par f

Définition: Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. L'application notée $g \circ f$ est définie par

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

On dit que c'est la composée de f et g .

Proposition: Soient $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G, h : G \rightarrow G$. Alors, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

REMARQUE (\triangle Attention):

En général, $g \circ f \neq f \circ g$

Par exemple, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$

Alors, $f \circ g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ et $g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$

donc $f \circ g \neq g \circ f$

Proposition: Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$

1. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective
2. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective
3. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective
4. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective

REMARQUE:

$$f : E \longrightarrow F$$

$$f \text{ injective} \iff \left(\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \implies x = y \right)$$

Définition: Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection. L'application $\begin{cases} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \text{l'unique antécédant de } y \text{ par } f \end{cases}$ est la réci-proque de f notée f^{-1}

Définition: L'identité de E est $\text{id}_E : \begin{matrix} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{matrix}$

Proposition: Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$

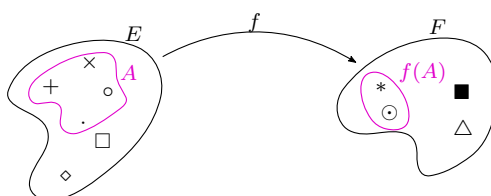
$$\begin{cases} f \circ g = \text{id}_F \\ g \circ f = \text{id}_E \end{cases} \iff \begin{cases} f \text{ bijective} \\ f^{-1} = g \end{cases}$$

■

Définition: Soit $f : E \rightarrow F$

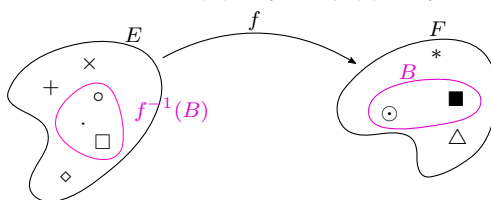
1. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. L'image directe de A par f est

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$



2. Soit $B \in \mathcal{P}(F)$. L'image réciproque de B par f est

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$



REMARQUE:

- $y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x),$
- $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B.$

Proposition: Soient $f : E \rightarrow F$, $A \in \mathcal{P}(E)$ et $F \in \mathcal{P}(F)$.

1. $f^{-1}(f(A)) \supset A$,
2. Si f est injective alors $f^{-1}(f(A)) = A$,
3. $f(f^{-1}(B)) \subset B$,
4. Si f est surjective, alors $f(f^{-1}(B)) = B$.

■

Proposition: Soit $f : E \rightarrow F$ et $(A, B) \in \mathcal{P}(F)^2$. Alors

$$\begin{cases} f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), & (1) \\ f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). & (2) \end{cases}$$

■

Proposition: Soient $f : E \rightarrow F$ et $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$.

1. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
2. Si f est injective, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
3. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

■

REMARQUE (Contre-exemple pour 2.):
Cas d'une application qui n'est pas injective

On pose $A = \mathbb{R}_*^+$, $B = \mathbb{R}_*^-$ et

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

On a $A \cap B = \emptyset$ donc $f(A \cap B) = \emptyset$.

Or, $\left. \begin{aligned} f(A) &= \mathbb{R}_*^+ \\ f(B) &= \mathbb{R}_*^+ \end{aligned} \right\}$ donc $f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}_*^+$.

On a

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

Définition: Soit $f : E \rightarrow F$ et $A \in \mathcal{P}(E)$.

La restriction de f à A est

$$\begin{aligned} f|_A : A &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

On dit aussi que f est un prolongement de $f|_A$.

REMARQUE (Notation):
L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E .

Troisième partie

Relations binaires

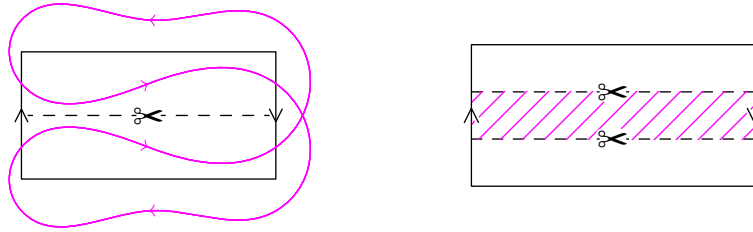
Définition: Soit E un ensemble. Un relation (binaire) sur E est un prédicat défini sur E^2 .

Définition: Soit E un ensemble, \diamond une relation sur E . On dit que \diamond est un relation d'équivalence si

1. $\forall x \in E, x \diamond x,$ (réflexivité)
2. $\forall x, y \in E, x \diamond y \implies y \diamond x,$ (symétrie)
3. $\forall x, y, z \in E, \left. \begin{array}{l} x \diamond y \\ y \diamond z \end{array} \right\} \implies x \diamond z$ (transitivité)

REMARQUE:

Le but d'une relation d'équivalence est d'identifier des objets différents.



Définition: Soit E un ensemble et \diamond une relation d'équivalence sur E . Soit $x \in E$. La classe de x (modulo \diamond) est

$$\mathcal{C}_\diamond(x) = \mathcal{C}(x) = \bar{x} = \{y \in E \mid y \diamond x\}.$$

Proposition: Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence \diamond . Alors

$$\forall x, y \in E, x \diamond y \iff \bar{x} = \bar{y}.$$

■

HORS-PROGRAMME

Définition: Soit E un ensemble et \diamond une relation d'équivalence.

L'ensemble

$$\{\bar{x} \mid x \in E\} = E/\diamond$$

est appelé quotient de E modulo \diamond .

Définition: Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E .

On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E si

$$\begin{cases} E = \bigcup_{i \in I} A_i \\ \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset \end{cases}$$

On a donc

$$\forall x \in E, \exists ! i \in I, x \in A_i.$$

Proposition: Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence \diamond . Les classes d'équivalences de E modulo \diamond forment une partition de E . ■

Proposition: Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une partition de E telle que

$$\forall i \in I, A_i \neq \emptyset.$$

Alors il existe une relation d'équivalence \diamond telle que pour tout $i \in I$, A_i est une classe d'équivalence modulo \diamond . ■

Définition: Soit E un ensemble et \diamond . On dit que \diamond est une relation d'ordre sur E si

1. \diamond est réflexive ($\forall x \in E, x \diamond x$),
2. \diamond est anti-symétrique :

$$\forall x, y \in E, \begin{cases} x \diamond y \\ y \diamond x \end{cases} \implies x = y,$$

3. \diamond est transitive ($\forall x, y, z \in E, (x \diamond y \text{ et } y \diamond z) \implies x \diamond z$).

En général, la relation \diamond est notée \leq ou \preceq . On dit aussi que (E, \diamond) est un ensemble ordonné.

Définition: Soit (E, \leq) un ensemble ordonné. Soient $x, y \in E$. On dit que x et y sont comparables si

$$x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

On dit que \leq est un ordre total si tous les éléments de E sont comparables 2 à 2.

Définition: Soit (E, \leq) un ensemble ordonné, $A \in \mathcal{P}(E)$ et $M \in E$. On dit que A est

majorée par M , que M majore A ou que M est un majorant de A si

$$\forall a \in A, a \leq M.$$

Soit $m \in E$. On dit que A est minorée par m , que m minore A ou que m est un minorant de A si

$$\forall a \in A, m \leq a.$$

Il manque une partie du cours ici

Proposition: Soit (E, \leq) un ensemble ordonné et $A \in \mathcal{P}(E)$. Si A a une borne supérieure, alors celle-ci est unique. On la note $\sup A$.