Chapitre 21
Matrices d'une application linéaire

Dans ce chapitre, tous les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie.

1. Matrice d'un vecteur, matrice d'une application linéaire

Définition 1.1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, x un vecteur de E. On note $(x_1, ..., x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$, donc $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. La *matrice de x dans la base $\mathscr{B}$* est la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Définition 1.2

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire, $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E,$\mathscr{C} = (u_1, ..., u_n)$ une base de F. On pose

$$\forall j \in \{1, ..., p\},\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} u_i.$$

La matrice $(a_{i,j})$ est appelée *matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$* et notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.

Théorème 1.3

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})_{n,p}(\mathbb{K})$. Il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = A$, où $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ désignent les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

On dit que f est *l'application linéaire canoniquement associée à A.*

2. Opérations matricielles

Théorème 2.1

Soient x et y deux vecteurs de E, $\mathscr{B}$ une base de E, λ et μ deux scalaires.

Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\lambda x + \mu y) = \lambda \,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) + \mu \,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y).$$

Théorème 2.2

Soient f et g deux applications linéaires de E dans F, $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F, λ et μ deux scalaires.

Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda f + \mu g) = \lambda \,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) + \mu \,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g).$$

Théorème 2.3

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires, $\mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}$ des bases respectives de E, F et G.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g)\, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g).$$

Corollaire 2.4

$(M_{n,p}(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel isomorphe à $L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

Théorème 2.5

Soit $f : E \to F$ une application linéaire, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F, et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$. Alors f est un isomorphisme si et seulement si A est inversible.

Proposition 2.6

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})_n(\mathbb{K})$ inversible à droite : il existe $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$. Alors A est inversible et $B = A^{-1}$. De même si A est inversible à gauche.

3. Rang d'une matrice

Définition 3.1

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit le *rang de A* comme le nombre maximal de colonnes linéairement indépendantes de A. On note ce nombre $\mathrm{rg}(A)$.

Définition 3.2

Soit $(u_1, ..., u_k)$ une famille de vecteurs de E, et $\mathscr{B}$ une base de E. La *matrice* de cette famille dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice dont les colonnes sont $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_j)$ pour tout $j \in [\![1, k]\!]$.

Proposition 3.3

Soit $(u_1, ..., u_k)$ une famille de vecteurs de E, et $\mathscr{B}$ une base de E. Soit A la matrice de cette famille dans la base $\mathscr{B}$. Alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(u_1, ..., u_k)$.

Corollaire 3.4

Soit $(u_1, ..., u_n)$ une famille de vecteurs de E, $\mathscr{B}$ une base de E, P la matrice de $(u_1, ..., u_n)$ dans la base $\mathscr{B}$. On suppose $\dim E = n$ de sorte que $P \in M_n(\mathbb{K})$. Alors $(u_1, ..., u_n)$ est une base de E si et seulement si P est inversible.

Proposition 3.5

Soit $f : E \to F$ une application linéaire, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$. Alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$.

Proposition 3.6

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et A' la matrice obtenue à partir de A en effectuant une opèration élémetaire sur les lignes ou les colonnes de A. Alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A')$.

Corollaire 3.7

Soit (S) un système linéaire de matrice A. Alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(S)$.

Proposition 3.8

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r. Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K}), Q \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $A = PJ_rQ$ où $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,p-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{array}\right)$.

4. Formules de changement de bases

Définition 4.1

Soient $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathscr{C} = (u_1, ..., u_n)$ deux bases de E. La *matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{C}$* est la matrice de la famille $\mathscr{C}$ dans la base $\mathscr{B}$. On la note $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}$.

Proposition 4.2

Avec les notations précédentes, $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)$.

Corollaire 4.3

Avec les notations précédentes, $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}^{-1} = P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}}$.

Théorème 4.4: Formule de changement de bases pour les vecteurs

Soient $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathscr{C} = (u_1, ..., u_n)$ deux bases de E. Soit $x \in E$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(x).$$

Théorème 4.5: Formule de changement de bases pour les applications linéaires

Soit f une application linéaire de E dans F, $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E, $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ deux bases de F.

On pose P la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$ et Q la matrice de passage de $\mathscr{C}_1$ à $\mathscr{C}_2$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{C}_2}(f) = Q^{-1} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1}(f)P.$$

5. Application aux calculs de puissances de matrices

Notation 5.1

On note $\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Proposition 5.2

Soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ une matrice diagonale. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $D^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, ..., \lambda_n^k)$.

Exemple 5.3

Soit $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A$.

On cherche une base $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)$ soit diagonale.

(1) Analyse. Soit $\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et a, b, c tels que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

On a alors $u_1 \neq 0$ et $f(u_1) = au_1$, $u_2 \neq 0$ et $f(u_2) = bu_2$, $u_3 \neq 0$ et $f(u_3) = cu_3$. On cherche donc à résoudre des équations de la forme $f(u) = \lambda u$ avec $u \neq 0$.

On pose $u = (x, y, z)$. Ainsi

$$f(u) = \lambda u \iff \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y - z = 2\lambda x \\ -x + 3y + z = 2\lambda y \\ -x + y + z = \lambda z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (1-2\lambda)x + y - z = 0 \\ -x + (3-2\lambda)y + z = 0 \\ x - y - (1-\lambda)z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(1-\lambda)y + (-1 + (1-\lambda)(1-2\lambda))z = 0 \\ 2(1-\lambda)y + \lambda z = 0 \\ x - y + (\lambda - 1)z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2\lambda(2-\lambda)z = 0 \\ 2(1-\lambda)y + \lambda z = 0 \\ x - y + (\lambda - 1)z = 0 \end{cases}$$

On voit que ce système a des solutions non nulles si et seulement si $1 - \lambda = 0$ ou $\lambda(2-\lambda) = 0$, si et seulement si $\lambda \in \{0, 1, 2\}$.

Avec $\lambda = 0$, on trouve $y = 0$ et $x = z$. Donc en posant $u_1 = (1, 0, 1)$, on aura $f(u_1) = 0.u_1$.

Avec $\lambda = 1$, on trouve $z = 0$ et $x = y$. Donc en posant $u_2 = (1, 1, 0)$, on aura $f(u_2) = 1.u_2$.

Avec $\lambda = 2$, on trouve $x = 0$ et $z = y$. Donc en posant $u_3 = (0, 1, 1)$, on aura $f(u_3) = 2.u_3$.

(2) Synthèse. On pose $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = (0, 1, 1)$. Montrons que $\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, on va montrer que la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ est inversible, et déterminer son inverse (on en aura besoin pour la suite).

On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$PX = Y \iff \begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ x + z = c \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(a - b + c) \\ y = \frac{1}{2}(a + b - c) \\ z = \frac{1}{2}(-a + b + c) \end{cases}$$

Donc P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $\mathscr{C}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

D'après la formule de changement de base, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)P^{-1} = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On en déduit que pour tout k, $A^k = (PDP^{-1})^k = (PDP^{-1})(PDP^{-1})...(PDP^{-1}) = PD^kP^{-1}$, donc

$$A^k = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1-2^k & 1+2^k & 2^k-1 \\ -2^k & 2^k & 2^k \end{pmatrix}.$$

6. Transposition

Définition 6.1

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. La *transposée* de A est la matrice ${}^tA = (a_{j,i}) \in M_{p,n}(\mathbb{K})$.

Proposition 6.2

La transposition est linéaire.

Proposition 6.3

Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(A)$. On a ${}^t(AB) = ({}^tB)({}^tA)$.

Corollaire 6.4

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors ${}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$ et $({}^tA)^{-1} =^t (A^{-1})$.

Définition 6.5

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que

(1) A est *symétrique* si $A =^t A$;

(2) A est *antisymétrique* si $A = -{}^tA$.

Proposition 6.6

Pour toute matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$.

7. Trace

Définition 7.1

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. La *trace* de A est la somme des coefficients diagonaux de A. On la note $\mathrm{tr}(A)$.

Proposition 7.2

La trace est linéaire.

Proposition 7.3

$\forall A \in M_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{tr}({}^tA) = \mathrm{tr}(A)$.

Proposition 7.4

$\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{K}), \forall B \in M_{p,n}(\mathbb{K}), \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Proposition 7.5

Soient A et B deux matrices semblables. Alors $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

Définition 7.6

Soit $f \in L(E)$. On appelle *trace de* f la trace de la matrice de f relativement à n'importe quelle base de E. On la note $\operatorname{tr}(f)$.

Proposition 7.7

Soit p un projecteur. Alors $\operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg}(p)$.

8. Matrices par blocs

Définition 8.1

On appelle *matrice par blocs* une matrice construite à partir d'autres matrices $A_{i,j}$ suivant le schéma ci-dessous

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,p} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,p} \\ \hline \vdots & & \ddots & \vdots \\ \hline A_{n,1} & A_{n,2} & & A_{n,p} \end{array}\right)$$

les blocs diagonaux $A_{i,i}$ étant des matrices carrées.

Proposition 8.2: Produit par blocs

Soit $A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,p} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,p} \\ \hline \vdots & & \ddots & \vdots \\ \hline A_{n,1} & A_{n,2} & & A_{n,p} \end{array}\right)$ et $B = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B_{1,1} & B_{1,2} & \dots & B_{1,q} \\ \hline B_{2,1} & B_{2,2} & \dots & B_{2,q} \\ \hline \vdots & & \ddots & \vdots \\ \hline B_{p,1} & B_{p,2} & & B_{p,q} \end{array}\right)$ deux matrices par blocs. Si pour tout i, j, k, le nombre de colonnes du bloc $A_{i,j}$ est égal au nombre de lignes du bloc $B_{j,k}$, alors le produit AB peut être calculé par blocs : en posant $C = AB$, on a

$$C = \left(\begin{array}{c|c|c|c} C_{1,1} & C_{1,2} & \dots & C_{1,q} \\ \hline C_{2,1} & C_{2,2} & \dots & C_{2,q} \\ \hline \vdots & & \ddots & \vdots \\ \hline C_{n,1} & C_{n,2} & & C_{n,q} \end{array}\right)$$

avec pour tout i, j, $C_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} A_{i,k} B_{k,j}$.