Chapitre 02

Nombre

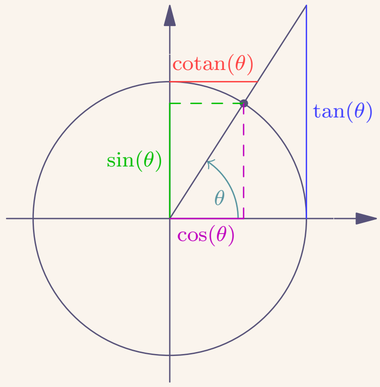
Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 8 mai 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Trigonométrie



Définition: On définit, pour

$$\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$$
$$\iff \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

la tangente de θ par

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Définition: Pour $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-k\pi, (k+1)\pi[$, on définit la contangente de θ par

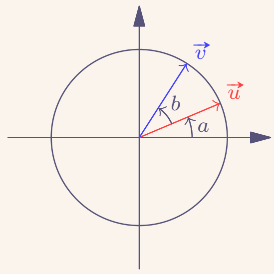
$$\operatorname{cotan}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Proposition: Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1. $\cos(-a) = \cos(a)$
2. $\cos(a+2\pi) = \cos(a)$
3. $\cos(a+\pi) = -\cos(a)$
4. $\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
5. $\sin(-a) = -\sin(a)$
6. $\sin(a+2\pi) = \sin(a)$
7. $\sin(a+\pi) = -\sin(a)$
8. $\sin(\pi - a) = \sin(a)$
9. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
10. $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$
11. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a)$

12. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)$

Preuve: 8. Soient $\vec{u} = (\cos(a), \sin(a))$ et $\vec{v} = (\cos(b), \sin(b))$



D'une part, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
D'autre part, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \cos(a - b)$
On a montré que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\text{d'où } \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

11. $\forall a \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{=0}\cos(a) + \overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{=1}\sin(a) = \sin(a)$
12. $\forall a \in \mathbb{R}, \cos(a) = \cos\left(-a + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$
10.

$$\begin{aligned}\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \sin(a + b) &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(b) \\ &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\end{aligned}$$

$\square$

Proposition: Soient a et b deux réels tels que $a \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $b \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

1. $\tan(a + \pi) = \tan(a)$
2. $\tan(-a) = -\tan(a)$
3. Si $a + b \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, alors, $\tan(a + b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$

Preuve: 3. On suppose $a + b \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}\\ &= \frac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}\\ &= \frac{\frac{\sin(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)}+\frac{\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}}\\ &= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}\end{aligned}$$

□

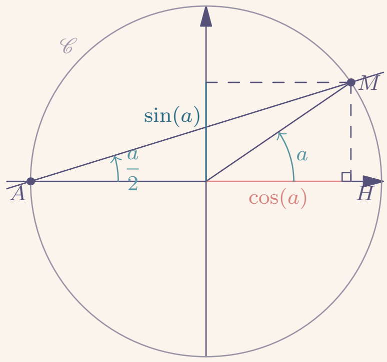
Proposition: Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Si $a \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, alors, $1+\tan^2(a) = \frac{1}{\cos^2(a)}$
2. Si $a \not\equiv \pi\ [2\pi]$
   — $\cos(a) = \dfrac{1-\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{a}{2}\right)}$
   — $\sin(a) = \dfrac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$
   — Si $a \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, $\tan(a) = \dfrac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$

Preuve: 1. On suppose que $a \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

$$1+\tan^2(a) = 1+\frac{\sin^2(a)}{\cos^2(a)} = \frac{\cos^2(a)+\sin^2(a)}{\cos^2(a)} = \frac{1}{\cos^2(a)}$$

2. On peut le prouver par le calcul avec les formules de la tangeante mais on peut également le prouver géométriquement.



Soit $M(x_0, y_0) \neq A$ sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$. On note t la pente de la demi-droite $[AM)$.

On en déduit que l'équation de la droite (AM) est

$$y = tx + t = t(x+1)$$

On sait que $M \in (AM)$ donc

$$y_0 = t(x_0 + 1)$$

On sait aussi que ${x_0}^2 + {y_0}^2 = 1$
Donc,

$$x_0 + t^2(x_0+1)^2 = 1$$

et donc

$${x_0}^2 \underbrace{(1+t^2)}_{\neq 0} + 2t^2 x_0 + t^2 - 1 = 0$$

On résout cette équation du second degré et on trouve deux racines : $x_0 = -1$ et $x_0 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.
Comme $M \neq A$, $x_0 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y_0 = t\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 1\right) = \dfrac{2t}{1+t^2}$
Enfin,

$$t = \frac{|HM|}{|AH|} = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$$

car AHM est rectangle en H (d'après le théorème de Thalès)
Donc,

$$\begin{cases} \cos(a) = \dfrac{1-\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)} \\ \sin(a) = \dfrac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)} \end{cases}$$

$\square$

Deuxième partie

Nombres complexes de module 1

Proposition: Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$(\cos(a) + i\sin(a)) \times (\cos(b) + i\sin(b)) = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$$

Preuve:

$$\begin{aligned}(\cos(a) + i\sin(a)) \times (\cos(b) + i\sin(b)) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ &\quad + i(\cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)) \\ &= \cos(a+b) + i\sin(a+b)\end{aligned}$$

□

Définition: Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $e^{ia} = \cos(a) + i\sin(a)$
Ainsi, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, e^{ia} \times e^{ib} = e^{i(a+b)}$

Proposition: Soient a, b, c trois nombres complexes avec $a \neq 0$ et z_1, z_2 les racines de $P : z \mapsto az^2 + bz + c$
Alors, $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$ et $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$

Exemple:
$(E) : z^2 - 3z + 2 = 0$
On remarque que $2 \times 1 = 2$ et $2 + 1 = 3$ donc 2 et 1 sont deux solutions de (E).

Preuve: Méthode 1 Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ et δ une racine carrée de Δ

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

Donc,

$$z_1 \times z_2 = \frac{b^2 - \delta^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} z_1 + z_2 = \frac{-b-b-\delta+\delta}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Méthode 2

$$\forall z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) = a(z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1z_2)$$

En particulier,

$$\begin{cases} \text{avec } z = 0, & c = az_1z_2 \\ \text{avec } z = 0, & \cancel{a} + b + \cancel{c} = a(\cancel{1} - (z_1 + z_2) + \cancel{z_1z_2}) \end{cases}$$

donc

$$b = -a(z_1 + z_2)$$

et donc

$$\begin{cases} z_1z_2 = \frac{c}{a} \\ z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

$\square$

Proposition: Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et z_1, z_2, z_3 les solutions de

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

Alors,

$$\begin{cases} z_1 z_2 z_3 = -c \\ z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 = b \\ z_1 + z_2 + z_3 = -a \end{cases}$$

$\square$

Proposition: Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres complexes et $z_1, z_2, \dots, z_n$ les solutions de

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0 = 1$$

Alors,

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_k \leqslant n} z_{i_1} \times z_{i_2} \times \cdots \times z_{i_k} = (-1)^k a_{n-k}$$

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = -a_{n-1}$$

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = (-1)^k a_0$$

Preuve (incomplète pour $n = 3$)*:*

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}, z^3 + az^2 + bz + c = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 &+ z^2(-z_1 - z_2 - z_3) \\ &+ z(z_2 z_3 + z_1 z_2 + z_1 z_3) \\ &- z_1 z_2 z_3 \end{aligned}$$

On identifie $\begin{cases} a = -z_1 - z_2 - z_3 \\ b = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 \\ c = -z_1 z_2 z_3 \end{cases}$ $\square$

Exemple:
On pose

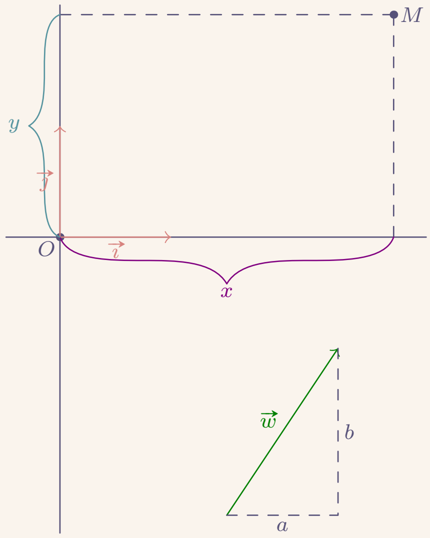
$$\begin{cases} s = z_1 + z_2 + z_3 \\ q = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 \\ p = z_1 z_2 z_3 \end{cases}$$

et $P = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3$

Troisième partie

Géométrie des nombres complexes

Dans ce paragraphe, $\mathscr{P}$ dérisgne un plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$



Définition: Soit $M \in \mathscr{P}$. On note (x, y) les coordonnées du point M par rapport au repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
L'affixe de M est le nombre

$$z_M = x + iy \in \mathbb{C}$$

Soit $\vec{w} \in \vec{\mathscr{P}}$ (le plan des vecteurs) et (a, b) les coordonées de $\vec{w}$.
L'affixe de $\vec{w}$ est

$$z_{\vec{w}} = a + ib \in \mathbb{C}$$

Proposition: Soit $(A, B) \in \mathscr{P}^2$ et $(\vec{w_1}, \vec{w_2}) \in \vec{\mathscr{P}}^2$

1. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
2. $z_{\vec{w_1}+\vec{w_2}} = z_{\vec{w_1}} + z_{\vec{w_2}}$

□

Proposition: Soit $(\vec{w_1}, \vec{w_2}) \in \vec{\mathscr{P}}^2$ avec $\vec{w_1} \neq \vec{0}$ et $\vec{w_2} \neq \vec{0}$
Alors, $\left|\dfrac{z_{\vec{w_1}}}{z_{\vec{w_2}}}\right| = \dfrac{\|\vec{w_1}\|}{\|\vec{w_2}\|}$ et $\arg\left(\dfrac{z_{\vec{w_1}}}{z_{\vec{w_2}}}\right) = \underbrace{\widehat{(\vec{w_1}, \vec{w_2})}}_{\text{l'angle entre } \vec{w_1} \text{ et } \vec{w_2}}$

Preuve:

Soient $(r_1, r_2) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$ et $(\theta_1, \theta_2) \in ([0, 2\pi[)^2$ tels que

$$z_{\overrightarrow{w_1}} = r_1 e^{i\theta_1} \text{ et } z_{\overrightarrow{w_2}} = r_2 e^{i\theta_2}$$

Alors,

$$\frac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

donc

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}}\right| = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{\|\overrightarrow{w_1}\|}{\|\overrightarrow{w_2}\|} \\ \arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}}\right) \equiv \theta_1 - \theta_2 \;\; [2\pi] \end{cases}$$

car $\theta_1 - \theta_2$ est l'angle entre $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ □

Corollaire: Avec les hypothèses et notations précédentes,

1. $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ sont collinéaires $\iff \dfrac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}} \in \mathbb{R}$
2. $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ sont orthogonaux $\iff \dfrac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}} \in i\mathbb{R}$

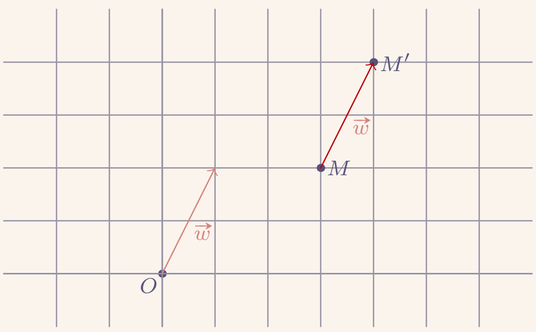
Preuve: 1.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{w_1} \text{ et } \overrightarrow{w_2} \text{ sont colinéaires} &\iff (\widehat{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}}) \equiv 0 \;\; [\pi] \\ &\iff \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}}\right) \equiv 0 \;\; [\pi] \\ &\iff \frac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{w_1} \text{ et } \overrightarrow{w_2} \text{ sont orthogonaux} &\iff (\widehat{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}}) \equiv \frac{\pi}{2} \;\; [\pi] \\ &\iff \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \;\; [\pi] \\ &\iff \frac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}} \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

□



Définition: Soit $\vec{w} \in \vec{\mathscr{P}}$. La translation de vecteur $\vec{w}$ est l'application

$$\begin{aligned} t_{\vec{w}} : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

où M' vérifie $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$

Proposition: Soit $\vec{w} \in \vec{\mathscr{P}}$ et $(M, M') \in \mathscr{P}^2$

$$M' = t_{\vec{w}}(M) \iff z_{M'} = z_M + z_{\vec{w}}$$

Preuve:

$$\begin{aligned} M' = t_{\vec{w}}(M) &\iff \overrightarrow{MM'} = \vec{w} \\ &\iff z_M - z_{M'} = z_{\vec{w}} \\ &\iff z_{M'} = z_M + z_{\vec{w}} \end{aligned}$$

□

Exemple (Décrire l'ensemble $E = \left\{M \in \mathscr{P} \mid \exists t \in \mathbb{R}, z_M = 1 + e^{it}\right\}$):
L'ensemble $\mathscr{C} = \left\{M \in \mathscr{P} \mid \exists t \in \mathbb{R}, z_M = e^{it}\right\}$ est le cercle trigonométrique. La translation $t_{\vec{u}}$ a pour expression complexe $z \mapsto z + 1$ Donc, $E = t_{\vec{u}}(\mathscr{C})$ est le cercle de rayon 1 et de centre le point d'affixe 1.

Proposition: Soient $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2} \in \vec{\mathscr{P}}$.

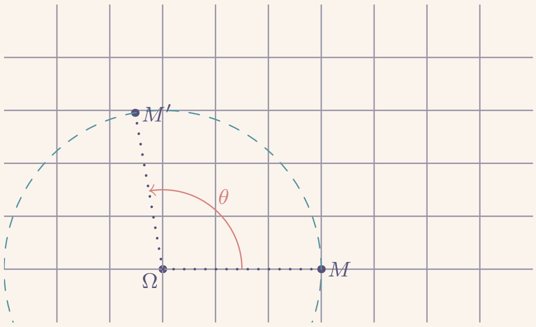
$$t_{\overrightarrow{w_2}} \circ t_{\overrightarrow{w_1}} = t_{\overrightarrow{w_1}+\overrightarrow{w_2}}$$

Preuve:
Soit $M \in \mathscr{P}$ d'affixe z. On pose $M_1 = t_{\overrightarrow{w_1}}(M)$ et $M' = t_{\overrightarrow{w_1}}(M_1)$ et on note également $M'' = t_{\overrightarrow{w_1}+\overrightarrow{w_2}}(M)$

$$\begin{aligned} z_{M'} &= z_{M_1} + z_{\overrightarrow{w_2}} \\ &= (z + z_{\overrightarrow{w_1}}) + z_{\overrightarrow{w_2}} \\ &= z + z_{\overrightarrow{w_1}+\overrightarrow{w_2}} \end{aligned}$$

Donc, $M' = M''$

□



Définition: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
La rotation de centre Ω et d'angle θ est l'application

$$\begin{aligned} \rho_{\Omega,\theta} : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

où M' vérifie

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{\Omega M}\| = \|\overrightarrow{\Omega M'}\| \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta \end{cases}$$

Proposition: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ d'affixe ω, $\theta \in \mathbb{R}$ et $(M, M') \in \mathscr{P}^2$

$$(*) : \qquad M' = \rho_{\Omega,\theta}(M) \iff z_{M'} = \omega + e^{i\theta}(z_M - \omega)$$

Preuve: Cas 1 On suppose $M \neq \Omega$.

$$\begin{aligned} M' = \rho_{\Omega,\theta}(M) &\iff \begin{cases} \|\overrightarrow{\Omega M}\| = \|\overrightarrow{\Omega M'}\| \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \left|z_{\overrightarrow{\Omega M}}\right| = \left|z_{\overrightarrow{\Omega M'}}\right| \\ \arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{\Omega M}}}{z_{\overrightarrow{\Omega M'}}}\right) = \theta \end{cases} \\ &\iff e^{i\theta} = \frac{z_{\overrightarrow{\Omega M}}}{z_{\overrightarrow{\Omega M'}}} \\ &\iff z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = e^{i\theta} z_{\overrightarrow{\Omega M}} \\ &\iff z_{M'} - \omega = e^{i\theta}(z_M - \omega) \\ &\iff z_{M'} = \omega + e^{i\theta}(z_M - \omega) \end{aligned}$$

Cas 2 On suppose $M = \Omega$.
Alors,

$$\begin{aligned} M' = \rho_{\Omega,\theta}(M) &\iff M' = M \\ &\iff z_{M'} = z_M \\ &\iff z_{M'} = z_M + e^{i\theta}(z_M - z_M) \\ &\iff z_{M'} = \omega + e^{i\theta}(z_M - \omega) \end{aligned}$$

□

Remarque (Cas particulier):
Si $\Omega = O$ alors
$$(*) \iff z_{M'} = e^{i\theta} z_M$$

Corollaire: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ d'affixe ω et $\theta \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}\rho_{\Omega,\theta} &= t_{\overrightarrow{O\Omega}} \circ \rho_{O,\theta} \circ t_{\overrightarrow{\Omega O}} \\ &= t_{\overrightarrow{O\Omega}} \circ \rho_{O,\theta} \circ (t_{\overrightarrow{O\Omega}})^{-1}\end{aligned}$$

Proposition: Soient $(\Omega_1, \Omega_2) \in \mathscr{P}^2$ et $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$
$$\rho_{\Omega_1,\theta_1} \circ \rho_{\Omega_1,\theta_2} = \rho_{\Omega_1,\theta_1+\theta_2} = \rho_{\Omega_1,\theta_2} \circ \rho_{\Omega_1,\theta_1}$$

Si $\begin{cases}\Omega_1 \neq \Omega_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0 \ [2\pi]\end{cases}$ alors $\rho_{\Omega_1,\theta_1} \circ \rho_{\Omega_2,\theta_2}$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$

Si $\begin{cases}\Omega_1 \neq \Omega_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \equiv 0 \ [2\pi]\end{cases}$ alors $\rho_{\Omega_1,\theta_1} \circ \rho_{\Omega_2,\theta_2}$ est une translation

Preuve:
On note ω_1 l'affixe de Ω_1 et ω_2 l'affixe de Ω_2. On pose $\rho_1 = \rho_{\Omega_1,\theta_1}$ et $\rho_2 = \rho_{\Omega_2,\theta_2}$
Soit $M \in \mathscr{P}$ d'affixe z. On pose
$$\begin{aligned}M_2 &= \rho_2(M) \\ M' &= \rho_1 \circ \rho_2(M) = \rho_1(M_2)\end{aligned}$$
et on note z_2 et z' les affixes de M_2 et M'
On a
$$\begin{aligned}z' &= \omega_1 + e^{i\theta_1}(z_2 - \omega_1) \\ &= \omega_1 + e^{i\theta_1}(\omega_2 + e^{i\theta_2}(z - \omega_2) - \omega_1) \\ &= \omega_1 + \omega_2 e^{i\theta_1} - \omega_1 e^{i\theta_1} + e^{i(\theta_1+\theta_2)}(z - \omega_2)\end{aligned}$$

1. On suppose $\Omega_1 = \Omega_2$ donc $\omega_1 = \omega_2$. On a donc
$$z' = \omega_1 + e^{i(\theta_1+\theta_2)}(z - \omega_1)$$
On reconnaît l'expression d'une rotation de centre Ω_1 et d'angle $\theta_1 + \theta_2$
2. On suppose $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0 \ [2\pi]$. On a donc
$$\begin{aligned}z' &= \underbrace{\omega_1 + \omega_2 e^{i\theta_1} - \omega_1 e^{i\theta_1} - \omega_2} + z \\ &= z + \omega\end{aligned}$$
On reconnaît l'expression d'une translation de vecteur ω.
3. On suppose $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et $\theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0 \ [2\pi]$

On cherche $\omega \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{aligned} & \forall z \in \mathbb{C}, \omega + e^{i(\theta_1+\theta_2)}(z-\omega) = \omega_1 + \omega_2 e^{i\theta_1} - \omega_1 e^{i\theta_1} + e^{i(\theta_1+\theta_2)}(z-\omega_2) \\ \iff & \omega - e^{i(\theta_1+\theta_2)}\omega = \omega_1 + \omega_2 e^{i\theta_1} - \omega_1 e^{i\theta_1} - \omega_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ \iff & \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2 e^{i\theta_1} - \omega_1 e^{i\theta_1} - \omega_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}}{1 - e^{i(\theta_1+\theta_2)}} \end{aligned}$$

On reconnait l'expression complexe d'une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$ de centre Ω d'affixe ω

□

Proposition: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ d'affixe ω, $\vec{w} \in \vec{\mathscr{P}}$ d'affixe u. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \not\equiv 0 \ [2\pi]$.
- $t_{\vec{w}} \circ \rho_{\Omega,\theta}$ est une rotation d'angle θ
- $\rho_{\Omega,\theta} \circ t_{\vec{w}}$ est aussi une rotation d'angle θ

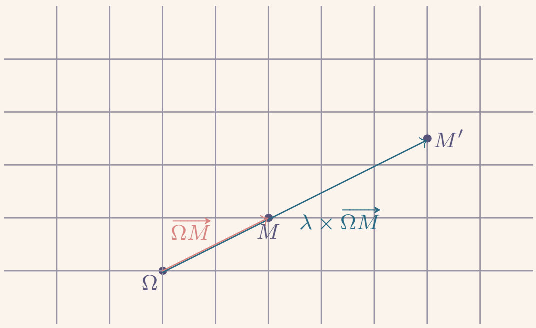
Preuve:
Soit $M \in \mathscr{P}$ d'affixe z et $M' = t_{\vec{w}} \circ \rho_{\Omega,\theta}(M)$ d'affixe z'
On a alors :

$$z' = (\omega + e^{i\theta}(z-\omega)) + u$$

On cherche $\omega' \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{aligned} & \forall z \in \mathbb{C}, \omega + u + e^{i\theta}(z-\omega) = \omega' + e^{i\theta}(z-\omega') \\ \iff & \omega + u - e^{i\theta}\omega = \omega' - e^{i\theta}\omega' \\ \iff & \omega' = \frac{\omega + u - e^{i\theta}\omega}{1 - e^{i\theta}} \end{aligned}$$

On reconnaît l'expression complexe d'une rotation d'angle θ □



Définition: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
L'<u>homothétie</u> de centre Ω et de rapport λ est l'application

$$\begin{aligned} h_{\Omega,\lambda} : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

où M' vérifie $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$

Proposition: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ d'affixe ω, $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient $M \in \mathscr{P}$ d'affixe z et $M' \in \mathscr{P}$ d'affixe z'.

$$M' = h_{\Omega,\lambda}(M) \iff z' = \omega + \lambda(z - \omega)$$

Preuve:

$$\begin{aligned} M' = h_{\Omega,\lambda}(M) &\iff \overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M} \\ &\iff z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = z_{\lambda \overrightarrow{\Omega M}} \\ &\iff z' - \omega = \lambda(z - \omega) \\ &\iff z' = \omega + \lambda(z - \omega) \end{aligned}$$

□

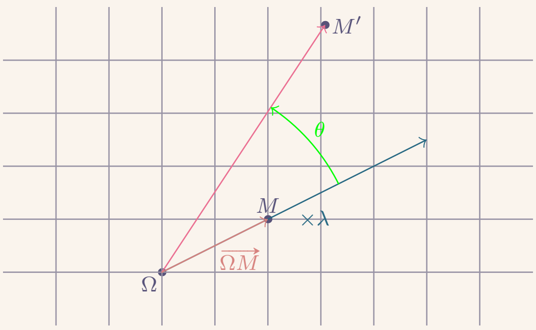
Proposition: Soient $(\Omega_1, \Omega_2) \in \mathscr{P}^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathscr{P}^2$

1. Si $\Omega_1 = \Omega_2$ alors, $h_{\Omega_1,\lambda_1} \circ h_{\Omega_2,\lambda_2} = h_{\Omega_1,\lambda_1\lambda_2}$
2. Si $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$, alors, $h_{\Omega_1,\lambda_1} \circ h_{\Omega_2,\lambda_2}$ est une homotéthie de rapport $\lambda_1\lambda_2$
3. Si $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et $\lambda_1\lambda_2 = 1$, alors, $h_{\Omega_1,\lambda_1} \circ h_{\Omega_2,\lambda_2}$ est une translation.

□

Proposition: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\vec{w} \in \vec{\mathscr{P}}$.
Alors, $t_{\vec{w}} \circ h_{\Omega,\lambda}$ et $h_{\Omega,\lambda} \circ t_{\vec{w}}$ sont homothéties de rapport λ. □

Remarque (Cas particulier):
Soit $M \in \mathscr{P}$ d'affixe z, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M' = h_{O,\lambda}(M)$ d'affixe z'
On a $z' = \lambda z$



Définition: Soient $\Omega \in \mathscr{P}$, $(\theta, \lambda) \in \mathbb{R}^2$. La <u>similitude (directe)</u> de centre Ω, d'angle θ et de rapport λ est

$$S_{\Omega,\theta,\lambda} = h_{\Omega,\lambda} \circ \rho_{\Omega,\theta}$$

Proposition: Avec les notations précédentes,

$$S_{\Omega,\theta,\lambda} = \rho_{\Omega,\theta} \circ h_{\Omega,\lambda}$$

Preuve:
On note ω l'affixe de Ω. L'expression complexe de $S_{\Omega,\theta,\lambda}$ est

$$\begin{aligned} z' &= \omega + \lambda(\omega + e^{i\theta}(z-\omega) - \omega) \\ &= \omega + \lambda e^{i\theta}(z-\omega) \end{aligned}$$

L'expression complexe de $\rho_{\Omega,\theta} \circ h_{\Omega,\lambda}$ est

$$\begin{aligned} z' &= \omega + e^{i\theta}(\omega + \lambda(z-\omega) - \omega) \\ &= \omega + \lambda e^{i\theta}(z-\omega) \end{aligned}$$

Les deux expressions sont identiques. □

Proposition: L'expression complexe de $S_{\Omega,\theta,\lambda}$ est

$$z' = \omega + \lambda e^{i\theta}(z-\omega)$$

Quatrième partie

Exponentielle complexe

Définition: Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$\exp(z) = e^{\mathfrak{Re}(z)} \times (\cos(\mathfrak{Im}(z)) + i\sin(\mathfrak{Im}(z))$$

Ainsi, si $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\exp(z) = \exp(a + ib) = e^a \times (\cos(b) + i(\sin(b)) = e^a e^{ib}$$

Proposition: Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \times \exp(z_2)$$

Preuve:
On pose $\begin{cases} z_1 = a + ib \\ z_2 = c + id \end{cases}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$

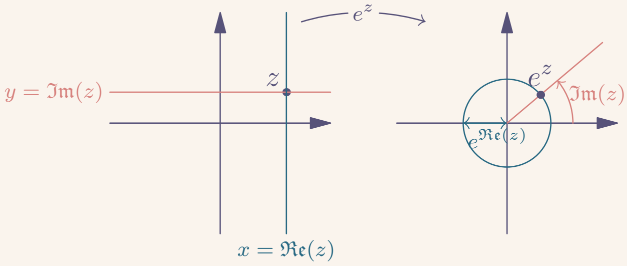
$$\begin{aligned} \exp(z_1) \times \exp(z_2) &= e^a \times e^{ib} \times e^c \times e^{id} \\ &= e^{a+c} e^{i(b+d)} \\ &= \exp(z_1 + z_2) \end{aligned}$$

□

Remarque (Notation):
On écrit e^z à la place de $\exp(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$.

Proposition:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} |e^z| = e^{\mathfrak{Re}(z)} \\ \arg(e^z) \equiv \mathfrak{Im}(z) \ \ [2\pi] \end{cases}$$



Remarque:
$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ n'est pas bijective :

— $\begin{cases} \exp(0) = \exp(2i\pi) = 1 \\ 0 \neq 2i\pi \end{cases}$

— 0 n'a pas d'antécédant

Il n'y a donc pas de logarithme complexe.

Cinquième partie

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

Définition: Soit f définie sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ ($\forall x \in D, f(x) \in \mathbb{C}$)
On pose :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Re}(f) : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathfrak{Re}(f(x)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathfrak{Im}(f) : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathfrak{Im}(f(x)) \end{aligned}$$

Exemple:

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto e^{(1+i)x} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Re}(f) : [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x \cos(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathfrak{Im}(f) : [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x \sin(s) \end{aligned}$$

Définition: Soit $f : D \to \mathbb{C}$. On dit que
- f est <u>continue</u> si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont continues
- f est <u>dérivable</u> si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont dérivables.
  Dans ce cas, la dérivée de f est

$$\begin{aligned} f' : D &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \mathfrak{Re}(f)'(x) + i\mathfrak{Im}(f)'(x) \end{aligned}$$

Exemple:

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto e^{(1+i)x} \end{aligned}$$

$x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont dérivables sur $[0, 2\pi[$ donc $\mathfrak{Re}(f)$ est dérivable.
$x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont dérivables sur $[0, 2\pi[$ donc $\mathfrak{Im}(f)$ est dérivable.
Donc f est dérivable.

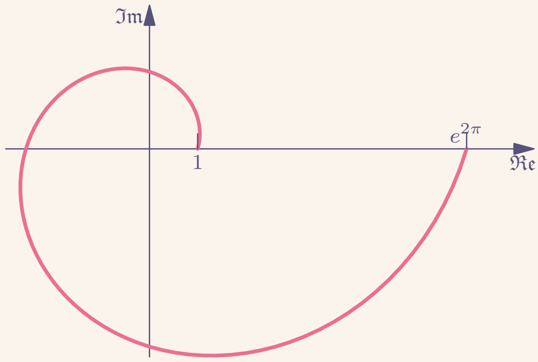
$$\forall x \in [0, 2\pi[, \begin{cases} \mathfrak{Re}(f)'(x) = e^x \cos(x) - e^x \sin(x) \\ \mathfrak{Im}(f)'(x) = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) \end{cases}$$

Donc,

$$\forall x \in [0, 2\pi[, f'(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x)) + ie^x(\sin(x) + \cos(x))$$

Remarque:
On peut représenter f de la façon suivante.

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{(1+i)t} \end{aligned}$$



Proposition: Soient u et v deux fonctions dérivables sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$

1. $u + v$ dérivable et $(u+v)' = u' + v'$
2. uv dérivable et $(uv)' = u'v + v'u$
3. Si $v \neq 0$, $\frac{u}{v}$ dérivable et $\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Preuve:

On pose $\begin{cases} a = \mathfrak{Re}(u) \\ b = \mathfrak{Im}(u) \end{cases}$ et $\begin{cases} c = \mathfrak{Re}(v) \\ d = \mathfrak{Im}(v) \end{cases}$

1. $\begin{cases} \mathfrak{Re}(u+v) = a + c \\ \mathfrak{Im}(u+v) = b + d \end{cases}$ donc $\begin{cases} \mathfrak{Re}(u+v)' = a' + c' \\ \mathfrak{Im}(u+v)' = b' + d' \end{cases}$ Donc,

$$\begin{aligned} (u+v)' &= a' + c' + i(b' + d') \\ &= (a' + ib') + (c' + id') \\ &= u' + v' \end{aligned}$$

2. $\begin{cases} \mathfrak{Re}(uv) = ac - bd \\ \mathfrak{Im}(uv) = ad + bc \end{cases}$ donc $\mathfrak{Re}(uv)$ et $\mathfrak{Im}(uv)$ sont dérivables et

$$\begin{cases} \mathfrak{Re}(uv)' = a'c + c'a - b'd - d'b \\ \mathfrak{Im}(uv)' = a'd + d'a + b'c + c'b \end{cases}$$

Donc,

$$(uv)' = a'c + c'a - b'd - d'b + i(a'd + d'a + b'c + c'b)$$

Or,

$$\begin{cases} u'v = (a' + ib')(c + id) = a'c - b'd + i(b'c + a'd) \\ v'u = (a + ib)(c' + id') = ac' - bd' + i(bc' + ad') \end{cases}$$

Donc,

$$(uv)' = u'v + v'u$$

3. On suppose que

$$\forall x \in D, v(x) \neq 0$$

On a donc

$$\forall x \in D, \frac{u}{v} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

C'est plus simple de voir $\frac{u}{v}$ comme le produit de u et de $\frac{1}{v}$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{c+id} = \frac{c-id}{c^2+d^2}$$

$\underbrace{\frac{c}{c^2+d^2}}_{=\mathfrak{Re}\left(\frac{1}{v}\right)}$ et $\underbrace{-\frac{d}{c^2+d^2}}_{=\mathfrak{Im}\left(\frac{1}{v}\right)}$ sont dérivables donc $\frac{1}{v}$ aussi

$$\begin{cases} \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{v}\right)' = \left(\frac{c}{c^2+d^2}\right)' = \frac{c'(c^2+d^2)-c(2cc'+2dd')}{(c^2+d^2)^2} \\ \mathfrak{Im}\left(\frac{1}{v}\right)' = \left(-\frac{d}{c^2+d^2}\right)' = \frac{-d'(c^2+d^2)+d(2cc'+2dd')}{(c^2+d^2)^2} \end{cases}$$

Donc, d'une part,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{v}\right)' &= \frac{c'(c^2+d^2)-c(2cc'-2dd')-id'(c^2+d^2)+d(2cc'+2dd')}{(c^2+d^2)^2} \\ &= \frac{(c^2+d^2)(c'-id')+(2cc'+2dd')(-c+id)}{(c^2+d^2)^2} \\ &= \frac{-c'c^2+c'd^2-2cdd'+i(2cc'd-d'c^2+d^2d')}{(c^2+d^2)^2} \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{-v'}{v^2} &= \frac{-c'-d'i}{(c+di)^2} \\ &= \frac{-(c'+id')(c-id)^2}{(c^2+d^2)^2} \\ &= -\frac{(c'+id')(c^2-2icd-d^2)}{(c^2+d^2)^2} \\ &= \frac{-c'c^2+c'd^2-2cdd'+i(2cc'd-d'c^2+d'd^2)}{(c^2+d^2)^2} \\ &= \left(\frac{1}{v}\right)' \end{aligned}$$

Donc, $\frac{u}{v}$ dérivable et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = u'\left(\frac{1}{v}\right) + u\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

□

Proposition: Soit $v : D \to \mathbb{R}$ et $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables (avec $D \subset \mathbb{R}$). Alors, $u \circ v$ est dérivable et

$$(u \circ v)' = (u' \circ v) \times v'$$

Preuve:

On pose $u = a + ib$ avec $\begin{cases} a = \mathfrak{Re}(u) \\ b = \mathfrak{Im}(u) \end{cases}$ donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = a(x) + ib(x)$$

Donc,

$$\forall x \in D, (u \circ v)(x) = a(v(x)) + ib(v(x))$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathfrak{Re}(u \circ v) &= a \circ v \\ \mathfrak{Im}(u \circ v) &= b \circ v \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathfrak{Re}(u \circ v)' &= (a \circ v)' = (a' \circ v) \times v' \\ \mathfrak{Im}(u \circ v)' &= (b \circ v)' = (b' \circ v) \times v' \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} (u \circ v)' &= (a' \circ v) \times v' + i(b' \circ v) \times v' \\ &= (a' \circ v + ib' \circ v) \times v' \\ &= ((a' + ib') \circ v) \times v' \\ &= (u' \circ v) \times v' \end{aligned}$$

□

Proposition: Soit $u : D \to \mathbb{C}$ et $f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{u(x)} \end{array}$

Alors, f est dérivable sur D et

$$\forall x \in D, f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

Preuve:

On pose $\begin{cases} a = \mathfrak{Re}(u) \\ b = \mathfrak{Im}(u) \end{cases}$ donc

$$\begin{aligned} \forall x \in D, f(x) &= e^{u(x)} \\ &= e^{a(x)+ib(x)} \\ &= e^{a(x)}(\cos(b(x)) + i\sin(b(x))) \end{aligned}$$

Donc, $\begin{cases} \mathfrak{Re}(f) : x \mapsto e^{a(x)}\cos(b(x)) \\ \mathfrak{Im}(f) : x \mapsto e^{a(x)}\sin(b(x)) \end{cases}$

a, b, cos, sin, exp sont dérivables donc $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ aussi donc f est dérivable.

□