2021-2022

Mathématiques
MP2I

Hugo Salou

Table des matières

Chapitre 0

Logique (rudiments)

Définition: Un proposition est un énoncé qui est soit vrai, soit faux.

EXEMPLE:

$$\left.\begin{array}{l} A : \text{“}B \text{ est vraie ”} \\ B : \text{“}A \text{ est fausse ”} \end{array}\right\} \text{ Le système } \{A, B\} \text{ est une auto-contradiction}$$

Définition: Démontrer une proposition revient à prouver qu'elle est vraie

0.1 Algèbre de Boole

Définition: Soient A et B deux propositions. La proposition A et B est définie par la table de vérité suivante :

A	B	A et B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Définition: Soient A et B deux propositions. La proposition A ou B est définie par la table de vérité suivante :

A	B	A ou B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Définition: Soit A une proposition. La négation de A, notée non(A) est définie par :

A	non(A)
V	F
F	V

Définition: Deux propositions A et B sont équivalentes si elles ont la même table de vérité. Dans ce cas, on note $A \iff B$

Proposition: Soient A, B et C trois propositions.

1. $(A \text{ et } B) \text{ et } C \iff A \text{ et } (B \text{ et } C)$
2. $A \text{ et } A \iff A$
3. $A \text{ et } B \iff B \text{ et } A$
4. $(A \text{ ou } B) \text{ ou } C \iff A \text{ ou } (B \text{ ou } C)$
5. $A \text{ ou } A \iff A$
6. $A \text{ ou } B \iff B \text{ ou } A$
7. $\text{non } (\text{ non } (A)) \iff A$
8. $A \text{ et } (B \text{ ou } C) \iff A \text{ et } B \text{ ou } A \text{ et } C$
9. $A \text{ ou } (B \text{ et } C) \iff (A \text{ ou } B) \text{ et } (A \text{ et } C)$
10. $\text{non } (A \text{ et } B) \iff \text{non } (A) \text{ ou } \text{non } (B)$
11. $\text{non } (A \text{ ou } B) \iff \text{non } (A) \text{ et } \text{non } (B)$

Preuve:
8.

A	B	C	B ou C	A et (B ou C)	A et B	A et C	(A et B) ou (A et C)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

10.

A	B	A et B	non (A et B)	non (A)	non (B)	non (A) ou non (B)
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

□

Définition: Soient A et B deux propositions. La proposition $\underline{A \implies B}$ (A implique B) est définie par :

A	B	$A \implies B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Définition: Soient A et B deux propositions telles que $A \implies B$ est vraie. On dit que A est une condition suffisante pour que B soit vraie. On dit que B est une condition nécessaire pour que A soit vraie.

Proposition (Contraposée)**:** Soient A et B deux propositions.

$$(A \implies B) \iff (\text{ non } B \implies \text{ non } A)$$

Preuve:

A	B	non A	non B	non $B \implies$ non A	$A \implies B$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

□

Proposition: Soient A et B deux propositions.

$$(A \implies B) \iff \big((A \implies B) \text{ et } (B \implies A)\big)$$

Preuve:

A	B	$A \iff B$	$A \implies B$	$B \implies A$	$(A \implies B)$ et $(B \implies A)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

$\square$

Proposition: Soient A et B deux propositions.

$$(A \implies B) \iff (B \text{ ou } \text{ non } (A))$$

Preuve:
On obtient par contraposée

$$\text{non } (A \implies B) \iff (A \text{ et } \text{ non } (B))$$

donc

$$\begin{aligned}(A \implies B) &\iff \text{ non } (A \text{ et } \text{ non } (B)) \\ &\iff \text{ non } (A) \text{ ou } \text{ non } (\text{ non } (B)) \\ &\iff \text{ non } (A) \text{ ou } B \\ &\iff B \text{ ou } \text{ non } (A)\end{aligned}$$

$\square$

0.2 Déduction naturelle

Dans ce paragraphe, A et B sont deux propositions.

$\boxed{A \text{ et } B}$

<u>Comment démontrer A et B ?</u>

— On démontre A
— On démontre B

<u>Comment utiliser l'hypothèse A et B ?</u>
On utilise A ou on utilise B.

$\boxed{A \text{ ou } B}$

Comment démontrer A ou B ?
On essaie de démontrer A. Si on y arrive, alors on a prouvé A ou B sinon on démontre B.

Variante
On suppose A faux. On démontre B.

Comment utiliser l'hypothèse A ou B ?
On fait une disjonction des cas :

— Cas 1 : On suppose A

— Cas 2 : On suppose B

$\boxed{A \implies B}$

Comment démontrer $A \implies B$?
On suppose A. On démontre B.

Comment utiliser l'hypothèse $A \implies B$?
On démontre A. On utilise B.

0.3 Raisonement par l'absurde

Situation :
Soient A et B deux propositions.
On veut montrer $A \implies B$.
On suppose $\underline{A}$. On suppose aussi $\underline{B \text{ faux}}$.
On cherche à faire apparaître une contradiction ($\lightning$)

0.4 Prédicat

Définition: Un prédicat $\mathscr{P}(x)$ est un énoncé dont la valeur de vérité dépend de l'objet x, élément d'un ensemble E.
Le domaine de validité de $\mathscr{P}$ est l'ensemble des valeurs x de E pour lesquelles $\mathscr{P}(x)$ est vraie :

$$\{x \in E \mid \mathscr{P}(x)\}$$

Remarque (Notation):
On écrit

$$\forall x \in E, \mathscr{P}(x)$$

pour dire que $\mathscr{P}(x)$ est vraie pour tous les x de E.

On écrit

$$\exists x \in E, \mathscr{P}(x)$$

pour dire qu'il existe (au moints) un élément $x \in E$ pour lequels $\mathscr{P}(x)$ est vraie.

On écrit

$$\exists! x \in E, \mathscr{P}(x)$$

pour dire qu'il existe un <u>unique</u> élément $x \in E$ tel que $\mathscr{P}(x)$ est vraie.

$\boxed{\forall x \in E, \mathscr{P}(x)}$ <u>Comment démontrer $\forall x \in E, \mathscr{P}(x)$?</u>
Soit $x \in E$ (fixé quelconque). Montrons $\mathscr{P}(x)$.

<u>Comment utiliser $\forall x \in E, \mathscr{P}(x)$?</u>
On choisit (spécialise) une ou plusieurs (voir toutes) valeurs de x et on exploite $\mathscr{P}(x)$.

EXEMPLE:
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a + b \times 2^n + c \times 3^n$$

Montrons que $a = b = c = 0$.

On sait que $(S) : \begin{cases} a + b + c = 0 & (n = 0) \\ a + 2b + 3c = 0 & (n = 1) \\ a + 4b + 9c = 0 & (n = 2) \end{cases}$

$$(S) \iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ 3b + 8c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + 2c = 0 \\ 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$$

Chapitre 1

Calculs algébriques

1.1 Sommes

Remarque (Notation):
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Pour $p \leqslant q \in \mathbb{N}$, on note

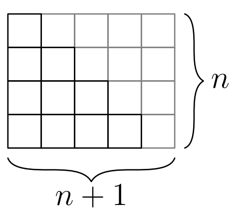
$$\sum_{k=p}^{q} u_k$$

le nombre $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q$.
Par convention,

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = 0 \qquad \text{si } q < p.$$

Exemple:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$



Proposition: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}$$

Preuve:
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_{n-k} &= u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_0 \\ &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_k\end{aligned}$$

□

Proposition: Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, $(p, q, r, s) \in \mathbb{N}^4$ et $\varphi : [\![p, q]\!] \to [\![r, s]\!]$ une bijection (i.e. $\forall y \in [\![r, s]\!], \exists! x \in [\![p, q]\!], \varphi(x) = y$).
Alors,

$$\sum_{k=r}^{s} u_k = \sum_{k=p}^{q} u_{\varphi(k)}.$$

Preuve:

$$\sum_{k=p}^{q} u_{\varphi(k)} = u_{\varphi(p)} + u_{\varphi(p+1)} + \cdots + u_{\varphi(q)}$$

$$\sum_{k=r}^{s} u_k = u_r + u_{r+1} + \cdots + u_s$$

Comme φ est bijective, chaque terme u_k avec $k \in [\![r, s]\!]$ apparaît une fois et une seule fois dans la somme

$$u_{\varphi(p)} + u_{\varphi(p+1)} + \cdots + u_{\varphi(q)}.$$

Ainsi, les deux sommes sont identiques. □

Exemple:
On pose

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_k = \frac{1}{k-4}.$$

On pose également $\varphi : [\![1, 5]\!] \to [\![-1, 3]\!]$: une bijection.
Alors,

$$\sum_{k=-1}^{3} \frac{1}{k-4} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5} u_{\varphi(k)} &= \frac{1}{\varphi(1)-4} + \frac{1}{\varphi(2)-4} + \frac{1}{\varphi(3)-4} + \frac{1}{\varphi(4)-4} + \frac{1}{\varphi(5)-4} \\ &= -\frac{1}{5} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1.\end{aligned}$$

Exemple:
Soit φ la bijection définie par

$$\begin{aligned}\varphi : [\![1,5]\!] &\longrightarrow [\![1,5]\!] \\ k &\longmapsto \begin{cases} 2 & \text{si } k=1 \\ 3 & \text{si } k=2 \\ 1 & \text{si } k=3 \\ 4 & \text{si } k=4 \\ 5 & \text{si } k=5 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{5} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$$

$$\sum_{k=1}^{5} u_{\varphi(k)} = u_2 + u_3 + u_1 + u_4 + u_5$$

Proposition (téléscopage)**:** Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

$$\forall p \leqslant q \in \mathbb{N}, \sum_{k=p}^{q} (u_{k+1} - u_k) = u_{q+1} - u_p.$$

Preuve: <u>Méthode 1</u> Soient $p \leqslant q$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q} (u_{k+1} - u_k) &= \cancel{u_{p+1}} - u_p + \cancel{u_{p+2}} - \cancel{u_{p+1}} \cdots + u_{q+1} - \cancel{u_q} \\ &= u_{q+1} - u_p\end{aligned}$$

<u>Méthode 2</u> Soient $p \leqslant q$.

$$\sum_{k=p}^{q} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=p}^{q} u_{k+1} - \sum_{k=p}^{q} u_k$$

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} [\![p, q]\!] & \longrightarrow & [\![p+1, q+1]\!] \\ k & \longmapsto & k+1 \end{array}$. φ est bijective donc

$$\sum_{k=p}^{q} u_{k+1} = \sum_{k=p}^{q} u_{\varphi(k)} = \sum_{k=p+1}^{q+1} u_k.$$

D'où,

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q}(u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=p+1}^{q+1} u_k - \sum_{k=p}^{q} u_k \\ &= \left(u_{q+1} + \sum_{k=p+1}^{q} u_k\right) - \left(u_p + \sum_{k=p+1}^{q} u_k\right) \\ &= u_{q+1} - u_p\end{aligned}$$

□

Remarque (Analogie avec le calcul intégral):

$$\int_a^b f'(x)\ \mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

Exemple:
Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![1, n]\!],\ \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{(1+k)-k}{k(k+1)} \\ &= \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} \\ &= \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\end{aligned}$$

et, par téléscopage, on obtient donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Par contre, on n'a pas de formule simple pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ (mais on sait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{}$

$\frac{\pi^2}{6}$).

Exemple (à connaître):

Calculer $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On cherche $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, u_{k+1} - u_k = k^2.$$

On cherche donc (u_k) sous la forme

$$\forall k \in N^*, u_k = ak^3 + bk^2 + ck + d$$

avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
u_{k+1} - u_k &= a(k+1)^3 + b(k+1)^2 + c(k+1) + \cancel{d} - ak^3 - bk^2 + ck + \cancel{d} \\
&= a(\cancel{k^3} + 3k^2 + 3k + 1) + b(\cancel{k^2} + 2k + 1) + c(\cancel{k} + 1) - \cancel{ak^3} - \cancel{bk^2} - \cancel{ck} \\
&= k^2 \times a + k(3a + 2b) + (a + b + c)
\end{aligned}$$

On résout le système

$$(S) : \quad \begin{cases} 3a = 1, \\ 3a + 2b = 0, \\ a + b + c. \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{3}, \\ b = -\frac{1}{2}, \\ c = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

On vient de montrer que,

$$\forall k \in N^*, k^2 = u_{k+1} - u_k \qquad \text{avec } u_k = \frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k.$$

Donc, par téléscopage,

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k^2 &= u_{n+1} - u_1 \\
&= \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1) - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{6}} \\
&= \frac{n+1}{6}\big(2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1\big) \\
&= \frac{n+1}{6}(2n^2 + 4n + 2 - 3n - 3 + 1) \\
&= \frac{n(n-1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Proposition: Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=0}^{q} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve:
Soit $n \in \mathbb{N}$.

1.

$$\begin{aligned}(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k &= \sum_{k=0}^{n} q^k - q\sum_{k=0}^{n} q^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n}(q^k - q^{k+1}) \\ &= 1 - q^{n+1}\end{aligned}$$

Si $q \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Si $q = 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1.$$

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$.

On a, d'une part :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} q^k = S_n + q^{n+1}$$

et d'autre part

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 + qS_n.$$

Et donc,

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, 1 + qS_n = S_n + q^{n+1} &\iff 1 + (q-1)S_n = q^{n+1}\\ &\iff S_n(q-1) = q^{n+1} - 1\\ &\iff S_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \text{ pour } q \neq 1.\end{aligned}$$

□

1.2 Formules à connaître

Définition: Soient $k, n \in \mathbb{N}$. On définit "k parmi n" par

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\ (n-k)!} & \text{si } k \leqslant n,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Proposition: Avec les notations précédentes,

1. $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\displaystyle\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$

Preuve: 1. $\displaystyle\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\big(n-(n-k)\big)!} = \frac{n!}{(n-k)!\ k!} = \binom{n}{k}$

2.

$$\begin{aligned}\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{n!(k+1)}{k!(n-k)!(k+1)}\\ &= \frac{n!(n-\cancel{k}+\cancel{k}+1)}{(k+1)!(n-k)!}\\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\\ &= \binom{n+1}{k+1}\end{aligned}$$

□

Proposition (binôme de Newton)**:** Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

sauf si $\begin{cases} a+b=0, \\ n=0. \end{cases}$

Remarque (triangle de Pascal):

$n=0$							1						
$n=1$						1		1					
$n=2$					1		2		1				
$n=3$				1		3		3		1			
$n=4$			1		4		6		4		1		
$n=5$		1		5		10		10		5		1	
$n=6$	1		6		15		20		15		6		1

Exemple:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Preuve:
Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P(n) : \text{“}(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\text{”}$$

avec la convention $\forall z \in \mathbb{C}, z^0 = 1$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $P(n)$ vraie. Montrons $P(n+1)$.

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} [\![0,n]\!] & \longrightarrow & [\![1,n+1]\!] \\ k & \longmapsto & k+1 \end{array}$ bijective.

Donc,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}u_{\varphi(k)}\\ &= \sum_{k=1}^{n+1}u_k \text{ où } \forall n\in[\![1,n+1]\!]\,, u_k=\binom{n}{k-1}a^kb^{n-k+1}.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k+b^{n+1-k}+\sum_{k=0}^{n}a^kb^{n+1-k}\\ &= \binom{n}{n}a^{n+1}b+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^kb^{n+1-k}\\ &+\binom{n}{0}a^0b^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)a^kb^{n+1-k}+a^{n+1}+b^{n+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k}.\end{aligned}$$

— Montrons $P(0)$ $(a+b)^0=1$.

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a^kb^{0-k}=\binom{0}{0}a^0b^0=1\times 1\times 1$$

Donc,

$$(a+b)^0=\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a^kb^{0-k}$$

□

Exemple:
Calculer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$. On applique la formule du binôme de Newton avec $a=-1$ et $b=1$:

$$\forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=(-1+1)^n=\begin{cases}0 \text{ si } n>0,\\ 1 \text{ si } n=0.\end{cases}$$

Proposition: Soients $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Preuve:

$$\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \big(\underbrace{a^{k+1} b^{n-(k+1)}}_{u_{k+1}} - \underbrace{a^k b^{n-k}}_{u_k} \big) \\
&= u_n - u_0 \\
&= a^n - b^n
\end{aligned}$$

□

1.3 Sommes doubles

Exemple:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{i,j}$$

$$\begin{aligned}
S = &\sum_{j=1}^{1} a_{1,j} + \sum_{j=1}^{2} a_{2,j} + \sum_{j=3}^{3} a_{3,j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} \\
&= a_{11} \\
&+ a_{21} + a_{22} \\
&+ a_{31} + a_{32} + a_{33} \\
&\ \vdots \\
&+ a_{n,1} + \cdots + a_{n,n}
\end{aligned}$$

Exemple:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} &= \sum_{i=1}^{n}(2^i - 1)\\ &= \sum_{i=1}^{n} 2^i - n\\ &= 2 \times \frac{1-2^n}{1-2} - n\\ &= 2(2^n - 1) - n\end{aligned}$$

Exemple:
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S = \sum_{j=1}^{i}\sum_{i=1}^{n}\binom{i}{j}\Bigg]\text{Aucun sens !}$$

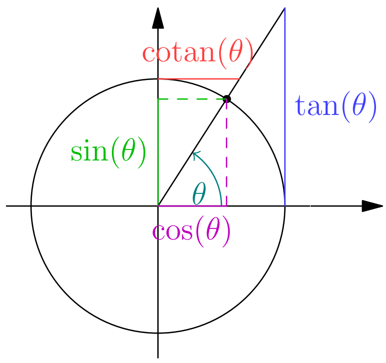
Exemple:
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{i}{j}$$

Chapitre 2

Nombres complexes

2.1 Trigonométrie



Définition: On définit, pour

$$\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$$

$$\Longleftrightarrow \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

la <u>tangente</u> de θ par

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

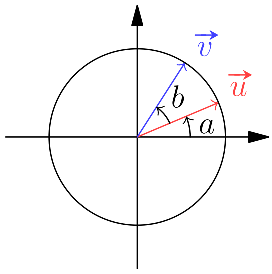
Définition: Pour $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-k\pi,(k+1)\pi[$, on définit la contangente de θ par

$$\operatorname{cotan}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Proposition: Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1. $\cos(-a) = \cos(a)$
2. $\cos(a+2\pi) = \cos(a)$
3. $\cos(a+\pi) = -\cos(a)$
4. $\cos(\pi - a) = -\cos(a)$
5. $\sin(-a) = -\sin(a)$
6. $\sin(a+2\pi) = \sin(a)$
7. $\sin(a+\pi) = -\sin(a)$
8. $\sin(\pi - a) = \sin(a)$
9. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
10. $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$
11. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a)$
12. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)$

Preuve: 8. Soient $\vec{u} = (\cos(a), \sin(a))$ et $\vec{v} = (\cos(b), \sin(b))$



D'une part, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
D'autre part, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \cos(a-b)$
On a montré que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\text{d'où } \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

11. $\forall a \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{=0}\cos(a) + \overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{=1}\sin(a) = \sin(a)$
12. $\forall a \in \mathbb{R}, \cos(a) = \cos\left(-a + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$
10.

$$\begin{aligned}\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \sin(a+b) &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(b)\\ &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\end{aligned}$$

□

Proposition: Soient a et b deux réels tels que $a \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $b \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

1. $\tan(a+\pi) = \tan(a)$
2. $\tan(-a) = -\tan(a)$
3. Si $a + b \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, alors, $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$

Preuve: 3. On suppose $a + b \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

$$\begin{aligned}
\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} \\
&= \frac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)} \\
&= \frac{\frac{\sin(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)}+\frac{\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}} \\
&= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}
\end{aligned}$$

□

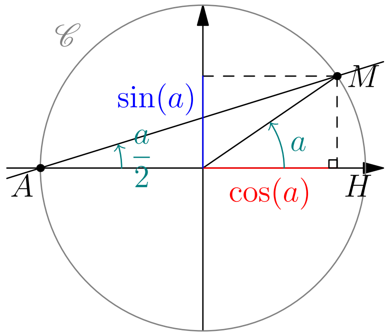
Proposition: Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Si $a \not\equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]$, alors, $1+\tan^2(a) = \dfrac{1}{\cos^2(a)}$
2. Si $a \not\equiv \pi \ [2\pi]$
   - $\cos(a) = \dfrac{1-\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{a}{2}\right)}$
   - $\sin(a) = \dfrac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$
   - Si $a \not\equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]$, $\tan(a) = \dfrac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$

Preuve: 1. On suppose que $a \not\equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]$

$$1+\tan^2(a) = 1+\frac{\sin^2(a)}{\cos^2(a)} = \frac{\cos^2(a)+\sin^2(a)}{\cos^2(a)} = \frac{1}{\cos^2(a)}$$

2. On peut le prouver par le calcul avec les formules de la tangeante mais on peut également le prouver géométriquement.



Soit $M(x_0, y_0) \neq A$ sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$. On note t la pente de la demi-droite $[AM)$.
On en déduit que l'équation de la droite (AM) est

$$y = tx + t = t(x+1)$$

On sait que $M \in (AM)$ donc

$$y_0 = t(x_0 + 1)$$

On sait aussi que ${x_0}^2 + {y_0}^2 = 1$
Donc,

$$x_0 + t^2(x_0+1)^2 = 1$$

et donc

$$ {x_0}^2 \underbrace{(1+t^2)}_{\neq 0} + 2t^2 x_0 + t^2 - 1 = 0$$

On résout cette équation du second degré et on trouve deux racines : $x_0 = -1$ et $x_0 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.
Comme $M \neq A$, $x_0 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y_0 = t\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 1\right) = \dfrac{2t}{1+t^2}$
Enfin,

$$t = \frac{|HM|}{|AH|} = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$$

car AHM est rectangle en H (d'après le théorème de Thalès)
Donc,

$$\begin{cases} \cos(a) = \dfrac{1 - \tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{a}{2}\right)} \\ \sin(a) = \dfrac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{a}{2}\right)} \end{cases}$$

□

2.2 Nombres complexes de module 1

Proposition: Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$(\cos(a) + i\sin(a)) \times (\cos(b) + i\sin(b)) = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$$

Preuve:

$$\begin{aligned}(\cos(a) + i\sin(a)) \times (\cos(b) + i\sin(b)) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ &\quad + i(\cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)) \\ &= \cos(a+b) + i\sin(a+b)\end{aligned}$$

□

Définition: Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $e^{ia} = \cos(a) + i\sin(a)$
Ainsi, $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2, e^{ia} \times e^{ib} = e^{i(a+b)}$

Proposition: Soient a, b, c trois nombres complexes avec $a \neq 0$ et z_1, z_2 les racines de $P : z \mapsto az^2 + bz + c$
Alors, $z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a}$ et $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$

Exemple:
$(E) : z^2 - 3z + 2 = 0$
On remarque que $2 \times 1 = 2$ et $2 + 1 = 3$ donc 2 et 1 sont deux solutions de (E).

Preuve: Méthode 1 Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ et δ une racine carrée de Δ

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

Donc,

$$z_1 \times z_2 = \frac{b^2 - \delta^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} z_1 + z_2 = \frac{-b-b-\delta+\delta}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Méthode 2

$$\forall z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) = a(z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2)$$

En particulier,

$$\begin{cases} \text{avec } z = 0, & c = az_1z_2 \\ \text{avec } z = 0, & \cancel{a} + b + \cancel{c} = a(\cancel{1} - (z_1 + z_2) + \cancel{z_1z_2}) \end{cases}$$

donc

$$b = -a(z_1 + z_2)$$

et donc

$$\begin{cases} z_1z_2 = \dfrac{c}{a} \\ z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

$\square$

Proposition: Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et z_1, z_2, z_3 les solutions de

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

Alors,

$$\begin{cases} z_1z_2z_3 = -c \\ z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 = b \\ z_1 + z_2 + z_3 = -a \end{cases}$$

$\square$

Proposition: Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres complexes et $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les solutions de

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 1$$

Alors,

$$\forall k \in [\![1, n]\!]\,, \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_k \leqslant n} z_{i_1} \times z_{i_2} \times \cdots \times z_{i_k} = (-1)^k a_{n-k}$$

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = -a_{n-1}$$

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = (-1)^k a_0$$

Preuve (incomplète pour $n = 3$)*:*

$$\forall z \in \mathbb{C}, z^3 + az^2 + bz + c = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 + z^2(-z_1 - z_2 - z_3) + z(z_2z_3 + z_1z_2 + z_1z_3) - z_1z_2z_3$$

On identifie $\begin{cases} a = -z_1 - z_2 - z_3 \\ b = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 \\ c = -z_1z_2z_3 \end{cases}$ □

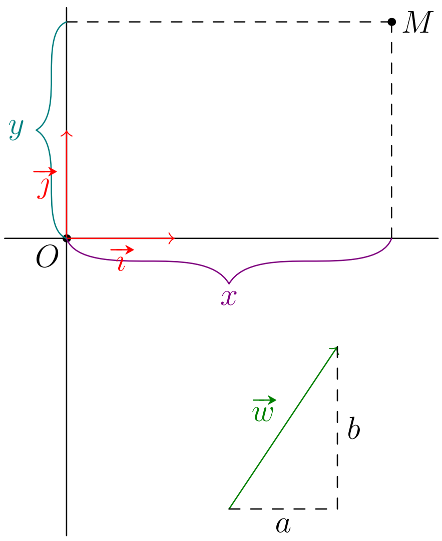
Exemple:
On pose

$$\begin{cases} s = z_1 + z_2 + z_3 \\ q = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 \\ p = z_1z_2z_3 \end{cases}$$

et $P = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3$

2.3 Géométrie des nombres complexes

Dans ce paragraphe, $\mathscr{P}$ dérisgne un plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$



Définition: Soit $M \in \mathscr{P}$. On note (x, y) les coordonnées du point M par rapport au repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

L'affixe de M est le nombre

$$z_M = x + iy \in \mathbb{C}$$

Soit $\vec{w} \in \vec{\mathscr{P}}$ (le plan des vecteurs) et (a, b) les coordonées de $\vec{w}$.
L'affixe de $\vec{w}$ est

$$z_{\vec{w}} = a + ib \in \mathbb{C}$$

Proposition: Soit $(A, B) \in \mathscr{P}^2$ et $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \in \vec{\mathscr{P}}^2$

1. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
2. $z_{\overrightarrow{w_1}+\overrightarrow{w_2}} = z_{\overrightarrow{w_1}} + z_{\overrightarrow{w_2}}$

□

Proposition: Soit $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \in \vec{\mathscr{P}}^2$ avec $\overrightarrow{w_1} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{w_2} \neq \vec{0}$
Alors, $\left|\dfrac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}}\right| = \dfrac{\|\overrightarrow{w_1}\|}{\|\overrightarrow{w_2}\|}$ et $\arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}}\right) = \underbrace{(\widehat{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}})}_{\text{l'angle entre } \overrightarrow{w_1} \text{ et } \overrightarrow{w_2}}$

Preuve:
Soient $(r_1, r_2) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$ et $(\theta_1, \theta_2) \in \left([0, 2\pi[\right)^2$ tels que

$$z_{\overrightarrow{w_1}} = r_1 e^{i\theta_1} \text{ et } z_{\overrightarrow{w_2}} = r_2 e^{i\theta_2}$$

Alors,

$$\frac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

donc

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}}\right| = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{\|\overrightarrow{w_1}\|}{\|\overrightarrow{w_2}\|} \\ \arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}}\right) \equiv \theta_1 - \theta_2 \; [2\pi] \end{cases}$$

car $\theta_1 - \theta_2$ est l'angle entre $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ □

Corollaire: Avec les hypothèses et notations précédentes,

1. $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ sont collinéaires $\iff \dfrac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}} \in \mathbb{R}$
2. $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ sont orthogonaux $\iff \dfrac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}} \in i\mathbb{R}$

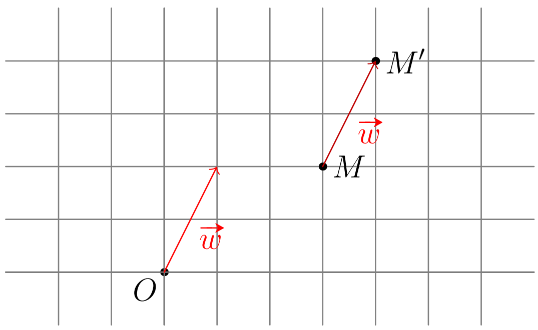
Preuve: 1.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w_1} \text{ et } \overrightarrow{w_2} \text{ sont colinéaires} &\iff (\widehat{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}}) \equiv 0 \ [\pi] \\ &\iff \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}}\right) \equiv 0 \ [\pi] \\ &\iff \frac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}} \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w_1} \text{ et } \overrightarrow{w_2} \text{ sont orthogonaux} &\iff (\widehat{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}}) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi] \\ &\iff \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi] \\ &\iff \frac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}} \in i\mathbb{R}\end{aligned}$$

□



Définition: Soit $\vec{w} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$. La <u>translation</u> de vecteur $\vec{w}$ est l'application

$$\begin{aligned} t_{\vec{w}} : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

où M' vérifie $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$

Proposition: Soit $\vec{w} \in \vec{\mathscr{P}}$ et $(M, M') \in \mathscr{P}^2$

$$M' = t_{\vec{w}}(M) \iff z_{M'} = z_M + z_{\vec{w}}$$

Preuve:

$$\begin{aligned} M' = t_{\vec{w}}(M) &\iff \overrightarrow{MM'} = \vec{w} \\ &\iff z_M - z_{M'} = z_{\vec{w}} \\ &\iff z_{M'} = z_M + z_{\vec{w}} \end{aligned}$$

□

Exemple (Décrire l'ensemble $E = \left\{ M \in \mathscr{P} \mid \exists t \in \mathbb{R}, z_M = 1 + e^{it} \right\}$):
L'ensemble $\mathscr{C} = \left\{ M \in \mathscr{P} \mid \exists t \in \mathbb{R}, z_M = e^{it} \right\}$ est le cercle trigonométrique. La translation $t_{\vec{u}}$ a pour expression complexe $z \mapsto z + 1$ Donc, $E = t_{\vec{u}}(\mathscr{C})$ est le cercle de rayon 1 et de centre le point d'affixe 1.

Proposition: Soient $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2} \in \vec{\mathscr{P}}$.

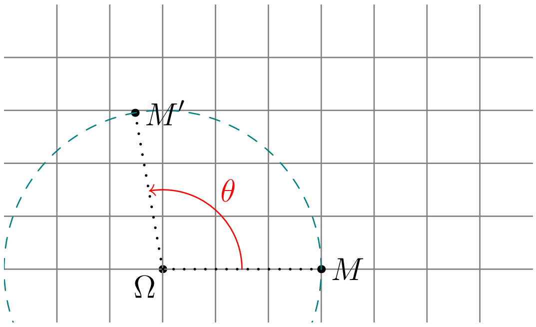
$$t_{\overrightarrow{w_2}} \circ t_{\overrightarrow{w_1}} = t_{\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}}$$

Preuve:
Soit $M \in \mathscr{P}$ d'affixe z. On pose $M_1 = t_{\overrightarrow{w_1}}(M)$ et $M' = t_{\overrightarrow{w_1}}(M_1)$ et on note également $M'' = t_{\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}}(M)$

$$\begin{aligned} z_{M'} &= z_{M_1} + z_{\overrightarrow{w_2}} \\ &= (z + z_{\overrightarrow{w_1}}) + z_{\overrightarrow{w_2}} \\ &= z + z_{\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}} \end{aligned}$$

Donc, $M' = M''$

□



Définition: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
La <u>rotation</u> de centre Ω et d'angle θ est l'application

$$\begin{aligned} \rho_{\Omega,\theta} : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

où M' vérifie

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{\Omega M}\| = \|\overrightarrow{\Omega M'}\| \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta \end{cases}$$

Proposition: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ d'affixe ω, $\theta \in \mathbb{R}$ et $(M, M') \in \mathscr{P}^2$

$$(*) : \qquad M' = \rho_{\Omega,\theta}(M) \iff z_{M'} = \omega + e^{i\theta}(z_M - \omega)$$

Preuve: Cas 1 On suppose $M \neq \Omega$.

$$\begin{aligned} M' = \rho_{\Omega,\theta}(M) &\iff \begin{cases} \|\overrightarrow{\Omega M}\| = \|\overrightarrow{\Omega M'}\| \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} |z_{\overrightarrow{\Omega M}}| = |z_{\overrightarrow{\Omega M'}}| \\ \arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{\Omega M}}}{z_{\overrightarrow{\Omega M'}}}\right) = \theta \end{cases} \\ &\iff e^{i\theta} = \frac{z_{\overrightarrow{\Omega M}}}{z_{\overrightarrow{\Omega M'}}} \\ &\iff z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = e^{i\theta} z_{\overrightarrow{\Omega M}} \\ &\iff z_{M'} - \omega = e^{i\theta}(z_M - \omega) \\ &\iff z_{M'} = \omega + e^{i\theta}(z_M - \omega) \end{aligned}$$

Cas 2 On suppose $M = \Omega$.

Alors,

$$\begin{aligned} M' = \rho_{\Omega,\theta}(M) &\iff M' = M \\ &\iff z_{M'} = z_M \\ &\iff z_{M'} = z_M + e^{i\theta}(z_M - z_M) \\ &\iff z_{M'} = \omega + e^{i\theta}(z_M - \omega) \end{aligned}$$

□

Remarque (Cas particulier):
Si $\Omega = O$ alors

$$(*) \iff z_{M'} = e^{i\theta} z_M$$

Corollaire: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ d'affixe ω et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \rho_{\Omega,\theta} &= t_{\overrightarrow{O\Omega}} \circ \rho_{O,\theta} \circ t_{\overrightarrow{\Omega O}} \\ &= t_{\overrightarrow{O\Omega}} \circ \rho_{O,\theta} \circ (t_{\overrightarrow{O\Omega}})^{-1} \end{aligned}$$

Proposition: Soient $(\Omega_1, \Omega_2) \in \mathscr{P}^2$ et $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\rho_{\Omega_1,\theta_1} \circ \rho_{\Omega_1,\theta_2} = \rho_{\Omega_1,\theta_1+\theta_2} = \rho_{\Omega_1,\theta_2} \circ \rho_{\Omega_1,\theta_1}$$

Si $\begin{cases} \Omega_1 \neq \Omega_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0 \ [2\pi] \end{cases}$ alors $\rho_{\Omega_1,\theta_1} \circ \rho_{\Omega_2,\theta_2}$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$

Si $\begin{cases} \Omega_1 \neq \Omega_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \equiv 0 \ [2\pi] \end{cases}$ alors $\rho_{\Omega_1,\theta_1} \circ \rho_{\Omega_2,\theta_2}$ est une translation

Preuve:
On note ω_1 l'affixe de Ω_1 et ω_2 l'affixe de Ω_2. On pose $\rho_1 = \rho_{\Omega_1,\theta_1}$ et $\rho_2 = \rho_{\Omega_2,\theta_2}$
Soit $M \in \mathscr{P}$ d'affixe z. On pose

$$\begin{aligned} &M_2 = \rho_2(M) \\ &M' = \rho_1 \circ \rho_2(M) = \rho_1(M_2) \end{aligned}$$

et on note z_2 et z' les affixes de M_2 et M'

On a

$$\begin{aligned} z' &= \omega_1 + e^{i\theta_1}(z_2 - \omega_1) \\ &= \omega_1 + e^{i\theta_1}(\omega_2 + e^{i\theta_2}(z - \omega_2) - \omega_1) \\ &= \omega_1 + \omega_2 e^{i\theta_1} - \omega_1 e^{i\theta_1} + e^{i(\theta_1+\theta_2)}(z - \omega_2) \end{aligned}$$

1. On suppose $\Omega_1 = \Omega_2$ donc $\omega_1 = \omega_2$. On a donc

$$z' = \omega_1 + e^{i(\theta_1+\theta_2)}(z - \omega_1)$$

   On reconnaît l'expression d'une rotation de centre Ω_1 et d'angle $\theta_1 + \theta_2$
2. On suppose $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0 \;\; [2\pi]$. On a donc

$$\begin{aligned} z' &= \underbrace{\omega_1 + \omega_2 e^{i\theta_1} - \omega_1 e^{i\theta_1} - \omega_2} + z \\ &= z + \omega \end{aligned}$$

   On reconnaît l'expression d'une translation de vecteur ω.
3. On suppose $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et $\theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0 \;\; [2\pi]$
   On cherche $\omega \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{aligned} &\forall z \in \mathbb{C}, \omega + e^{i(\theta_1+\theta_2)}(z - \omega) = \omega_1 + \omega_2 e^{i\theta_1} - \omega_1 e^{i\theta_1} + e^{i(\theta_1+\theta_2)}(z - \omega_2) \\ \iff &\omega - e^{i(\theta_1+\theta_2)}\omega = \omega_1 + \omega_2 e^{i\theta_1} - \omega_1 e^{i\theta_1} - \omega_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ \iff &\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2 e^{i\theta_1} - \omega_1 e^{i\theta_1} - \omega_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}}{1 - e^{i(\theta_1+\theta_2)}} \end{aligned}$$

   On reconnait l'expression complexe d'une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$ de centre Ω d'affixe ω

□

Proposition: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ d'affixe ω, $\vec{w} \in \vec{\mathscr{P}}$ d'affixe u. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \not\equiv 0 \;\; [2\pi]$.
- — $t_{\vec{w}} \circ \rho_{\Omega,\theta}$ est une rotation d'angle θ
- — $\rho_{\Omega,\theta} \circ t_{\vec{w}}$ est aussi une rotation d'angle θ

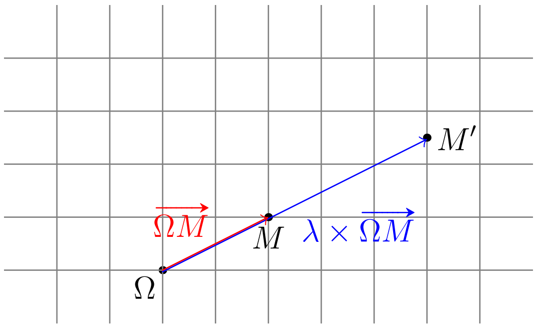
Preuve:
Soit $M \in \mathscr{P}$ d'affixe z et $M' = t_{\vec{w}} \circ \rho_{\Omega,\theta}(M)$ d'affixe z'
On a alors :

$$z' = (\omega + e^{i\theta}(z - \omega)) + u$$

On cherche $\omega' \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{aligned} &\forall z \in \mathbb{C}, \omega + u + e^{i\theta}(z-\omega) = \omega' + e^{i\theta}(z-\omega') \\ \iff &\omega + u - e^{i\theta}\omega = \omega' - e^{i\theta}\omega' \\ \iff &\omega' = \frac{\omega + u - e^{i\theta}\omega}{1-e^{i\theta}} \end{aligned}$$

On reconnaît l'expression complexe d'une rotation d'angle θ □



Définition: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
L'homothétie de centre Ω et de rapport λ est l'application

$$\begin{aligned} h_{\Omega,\lambda} : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

où M' vérifie $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$

Proposition: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ d'affixe ω, $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient $M \in \mathscr{P}$ d'affixe z et $M' \in \mathscr{P}$ d'affixe z'.

$$M' = h_{\Omega,\lambda}(M) \iff z' = \omega + \lambda(z-\omega)$$

Preuve:

$$\begin{aligned} M' = h_{\Omega,\lambda}(M) &\iff \overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M} \\ &\iff z_{\overrightarrow{\Omega M'}} = z_{\lambda \overrightarrow{\Omega M}} \\ &\iff z' - \omega = \lambda(z-\omega) \\ &\iff z' = \omega + \lambda(z-\omega) \end{aligned}$$

□

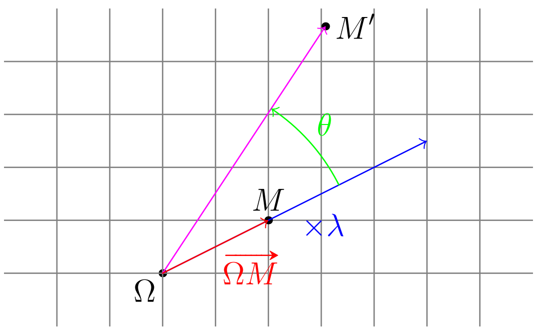
Proposition: Soient $(\Omega_1, \Omega_2) \in \mathscr{P}^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathscr{P}^2$

1. Si $\Omega_1 = \Omega_2$ alors, $h_{\Omega_1,\lambda_1} \circ h_{\Omega_2,\lambda_2} = h_{\Omega_1,\lambda_1\lambda_2}$
2. Si $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$, alors, $h_{\Omega_1,\lambda_1} \circ h_{\Omega_2,\lambda_2}$ est une homotéthie de rapport $\lambda_1\lambda_2$
3. Si $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et $\lambda_1\lambda_2 = 1$, alors, $h_{\Omega_1,\lambda_1} \circ h_{\Omega_2,\lambda_2}$ est une translation.

□

Proposition: Soit $\Omega \in \mathscr{P}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\vec{w} \in \vec{\mathscr{P}}$.
Alors, $t_{\vec{w}} \circ h_{\Omega,\lambda}$ et $h_{\Omega,\lambda} \circ t_{\vec{w}}$ sont homothéties de rapport λ. □

Remarque (Cas particulier):
Soit $M \in \mathscr{P}$ d'affixe z, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M' = h_{O,\lambda}(M)$ d'affixe z'
On a $z' = \lambda z$



Définition: Soient $\Omega \in \mathscr{P}$, $(\theta, \lambda) \in \mathbb{R}^2$. La similitude (directe) de centre Ω, d'angle θ et de rapport λ est

$$S_{\Omega,\theta,\lambda} = h_{\Omega,\lambda} \circ \rho_{\Omega,\theta}$$

Proposition: Avec les notations précédentes,

$$S_{\Omega,\theta,\lambda} = \rho_{\Omega,\theta} \circ h_{\Omega,\lambda}$$

Preuve:

On note ω l'affixe de Ω. L'expression complexe de $S_{\Omega,\theta,\lambda}$ est

$$\begin{aligned} z' &= \omega + \lambda(\omega + e^{i\theta}(z-\omega) - \omega) \\ &= \omega + \lambda e^{i\theta}(z-\omega) \end{aligned}$$

L'expression complexe de $\rho_{\Omega,\theta} \circ h_{\Omega,\lambda}$ est

$$\begin{aligned} z' &= \omega + e^{i\theta}(\omega + \lambda(z-\omega) - \omega) \\ &= \omega + \lambda e^{i\theta}(z-\omega) \end{aligned}$$

Les deux expressions sont identiques. □

Proposition: L'expression complexe de $S_{\Omega,\theta,\lambda}$ est

$$z' = \omega + \lambda e^{i\theta}(z-\omega)$$

2.4 Exponentielle complexe

Définition: Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$\exp(z) = e^{\mathfrak{Re}(z)} \times (\cos(\mathfrak{Im}(z)) + i\sin(\mathfrak{Im}(z)))$$

Ainsi, si $z = a + ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\exp(z) = \exp(a+ib) = e^a \times (\cos(b) + i(\sin(b)) = e^a e^{ib}$$

Proposition: Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \times \exp(z_2)$$

Preuve:
On pose $\begin{cases} z_1 = a + ib \\ z_2 = c + id \end{cases}$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$

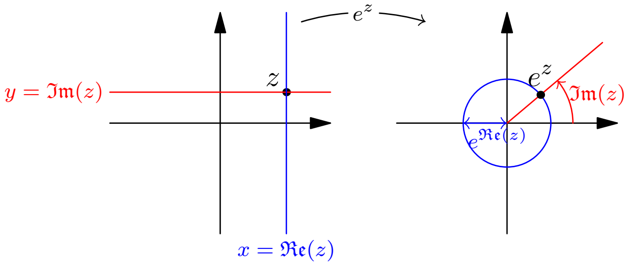
$$\begin{aligned} \exp(z_1) \times \exp(z_2) &= e^a \times e^{ib} \times e^c \times e^{id} \\ &= e^{a+c} e^{i(b+d)} \\ &= \exp(z_1 + z_2) \end{aligned}$$

□

Remarque (Notation):
On écrit e^z à la place de $\exp(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$.

Proposition:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} |e^z| = e^{\mathfrak{Re}(z)} \\ \arg(e^z) \equiv \mathfrak{Im}(z) \quad [2\pi] \end{cases}$$



Remarque:
$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ n'est pas bijective :

— $\begin{cases} \exp(0) = \exp(2i\pi) = 1 \\ 0 \neq 2i\pi \end{cases}$

— 0 n'a pas d'antécédant

Il n'y a donc pas de logarithme complexe.

2.5 Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

Définition: Soit f définie sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ ($\forall x \in D, f(x) \in \mathbb{C}$)
On pose :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Re}(f) : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathfrak{Re}(f(x)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathfrak{Im}(f) : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathfrak{Im}(f(x)) \end{aligned}$$

Exemple:

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto e^{(1+i)x} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Re}(f) : [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x \cos(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathfrak{Im}(f) : [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x \sin(s) \end{aligned}$$

Définition: Soit $f : D \to \mathbb{C}$. On dit que
- f est continue si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont continues
- f est dérivable si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont dérivables.
  Dans ce cas, la dérivée de f est

$$\begin{aligned} f' : D &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \mathfrak{Re}(f)'(x) + i\mathfrak{Im}(f)'(x) \end{aligned}$$

Exemple:

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto e^{(1+i)x} \end{aligned}$$

$x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont dérivables sur $[0, 2\pi[$ donc $\mathfrak{Re}(f)$ est dérivable.
$x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \sin(x)$ sont dérivables sur $[0, 2\pi[$ donc $\mathfrak{Im}(f)$ est dérivable.
Donc f est dérivable.

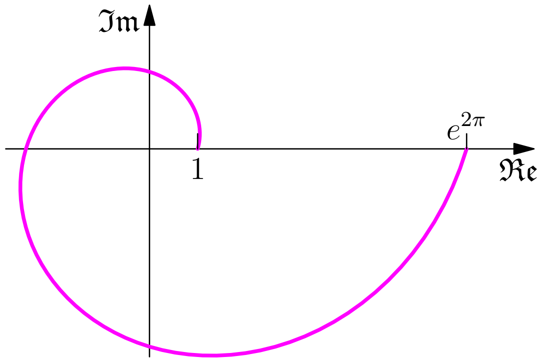
$$\forall x \in [0, 2\pi[, \begin{cases} \mathfrak{Re}(f)'(x) = e^x \cos(x) - e^x \sin(x) \\ \mathfrak{Im}(f)'(x) = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) \end{cases}$$

Donc,

$$\forall x \in [0, 2\pi[, f'(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x)) + ie^x(\sin(x) + \cos(x))$$

Remarque:
On peut représenter f de la façon suivante.

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{(1+i)t} \end{aligned}$$



Proposition: Soient u et v deux fonctions dérivables sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$

1. $u + v$ dérivable et $(u+v)' = u' + v'$
2. uv dérivable et $(uv)' = u'v + v'u$
3. Si $v \neq 0$, $\dfrac{u}{v}$ dérivable et $\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

Preuve:

On pose $\begin{cases} a = \mathfrak{Re}(u) \\ b = \mathfrak{Im}(u) \end{cases}$ et $\begin{cases} c = \mathfrak{Re}(v) \\ d = \mathfrak{Im}(v) \end{cases}$

1. $\begin{cases} \mathfrak{Re}(u+v) = a + c \\ \mathfrak{Im}(u+v) = b + d \end{cases}$ donc $\begin{cases} \mathfrak{Re}(u+v)' = a' + c' \\ \mathfrak{Im}(u+v)' = b' + d' \end{cases}$ Donc,

$$\begin{aligned}(u+v)' &= a' + c' + i(b' + d') \\ &= (a' + ib') + (c' + id') \\ &= u' + v'\end{aligned}$$

2. $\begin{cases} \mathfrak{Re}(uv) = ac - bd \\ \mathfrak{Im}(uv) = ad + bc \end{cases}$ donc $\mathfrak{Re}(uv)$ et $\mathfrak{Im}(uv)$ sont dérivables et

$$\begin{cases} \mathfrak{Re}(uv)' = a'c + c'a - b'd - d'b \\ \mathfrak{Im}(uv)' = a'd + d'a + b'c + c'b \end{cases}$$

Donc,

$$(uv)' = a'c + c'a - b'd - d'b + i(a'd + d'a + b'c + c'b)$$

Or,

$$\begin{cases} u'v = (a' + ib')(c + id) = a'c - b'd + i(b'c + a'd) \\ v'u = (a + ib)(c' + id') = ac' - bd' + i(bc' + ad') \end{cases}$$

Donc,

$$(uv)' = u'v + v'u$$

3. On suppose que

$$\forall x \in D, v(x) \neq 0$$

On a donc

$$\forall x \in D, \frac{u}{v} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

C'est plus simple de voir $\frac{u}{v}$ comme le produit de u et de $\frac{1}{v}$

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{c + id} = \frac{c - id}{c^2 + d^2}$$

$\underbrace{\frac{c}{c^2 + d^2}}_{=\mathfrak{Re}\left(\frac{1}{v}\right)}$ et $\underbrace{-\frac{d}{c^2 + d^2}}_{=\mathfrak{Im}\left(\frac{1}{v}\right)}$ sont dérivables donc $\frac{1}{v}$ aussi

$$\begin{cases} \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{v}\right)' = \left(\frac{c}{c^2 + d^2}\right)' = \frac{c'(c^2 + d^2) - c(2cc' + 2dd')}{\left(c^2 + d^2\right)^2} \\ \mathfrak{Im}\left(\frac{1}{v}\right)' = \left(-\frac{d}{c^2 + d^2}\right)' = \frac{-d'(c^2 + d^2) + d(2cc' + 2dd')}{\left(c^2 + d^2\right)^2} \end{cases}$$

Donc, d'une part,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{v}\right)' &= \frac{c'(c^2 + d^2) - c(2cc' - 2dd') - id'(c^2 + d^2) + d(2cc' + 2dd')}{\left(c^2 + d^2\right)^2} \\ &= \frac{(c^2 + d^2)(c' - id') + (2cc' + 2dd')(-c + id)}{\left(c^2 + d^2\right)^2} \\ &= \frac{-c'c^2 + c'd^2 - 2cdd' + i(2cc'd - d'c^2 + d^2d')}{\left(c^2 + d^2\right)^2} \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{-v'}{v^2} &= \frac{-c'-d'i}{(c+di)^2}\\ &= \frac{-(c'+id')(c-id)^2}{\left(c^2+d^2\right)^2}\\ &= -\frac{(c'+id')(c^2-2icd-d^2)}{\left(c^2+d^2\right)^2}\\ &= \frac{-c'c^2+c'd^2-2cdd'+i(2cc'd-d'c^2+d'd^2)}{\left(c^2+d^2\right)^2}\\ &= \left(\frac{1}{v}\right)'\end{aligned}$$

Donc, $\frac{u}{v}$ dérivable et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = u'\left(\frac{1}{v}\right) + u\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2} = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

□

Proposition: Soit $v : D \to \mathbb{R}$ et $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables (avec $D \subset \mathbb{R}$).
Alors, $u \circ v$ est dérivable et

$$(u \circ v)' = (u' \circ v) \times v'$$

Preuve:
On pose $u = a + ib$ avec $\begin{cases} a = \mathfrak{Re}(u) \\ b = \mathfrak{Im}(u) \end{cases}$ donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = a(x) + ib(x)$$

Donc,

$$\forall x \in D, (u \circ v)(x) = a(v(x)) + ib(v(x))$$

Donc,

$$\begin{aligned}\mathfrak{Re}(u \circ v) &= a \circ v\\ \mathfrak{Im}(u \circ v) &= b \circ v\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\mathfrak{Re}(u \circ v)' = (a \circ v)' = (a' \circ v) \times v' \\ \mathfrak{Im}(u \circ v)' = (b \circ v)' = (b' \circ v) \times v'\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}(u \circ v)' &= (a' \circ v) \times v' + i(b' \circ v) \times v' \\ &= (a' \circ v + ib' \circ v) \times v' \\ &= ((a' + ib') \circ v) \times v' \\ &= (u' \circ v) \times v'\end{aligned}$$

$\square$

Proposition: Soit $u : D \to \mathbb{C}$ et $f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{u(x)} \end{array}$
Alors, f est dérivable sur D et

$$\forall x \in D, f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

Preuve:
On pose $\begin{cases} a = \mathfrak{Re}(u) \\ b = \mathfrak{Im}(u) \end{cases}$ donc

$$\begin{aligned}\forall x \in D, f(x) &= e^{u(x)} \\ &= e^{a(x)+ib(x)} \\ &= e^{a(x)}(\cos(b(x)) + i\sin(b(x)))\end{aligned}$$

Donc, $\begin{cases} \mathfrak{Re}(f) : x \mapsto e^{a(x)}\cos(b(x)) \\ \mathfrak{Im}(f) : x \mapsto e^{a(x)}\sin(b(x)) \end{cases}$
a, b, cos, sin, exp sont dérivables donc $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ aussi donc f est dérivable.

$\square$

Chapitre 3

Étude de fonctions

Étudier une fonction c'est déterminer tous les éléments (tangentes, asymptotes) qui permettent d'obtenir l'allure de la courbe représentative de la fonction.

EXEMPLE:

$$f : x \mapsto \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}$$

1. On détemine le domaine de définition de la fonction f.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \iff x \in \{-3, 1\} \quad \text{car} \begin{cases} -3 + 1 = -2 = -\dfrac{b}{a} \\ -3 \times 1 = -3 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

   Donc f est définie sur $\mathscr{D}$ avec $\mathscr{D} =]-\infty, -3[\cup]-3, -1[\cup]-1, +\infty[$

2. Asymptotes et limites
   Soit $x \in \mathscr{D}$

$$f(x) = \frac{\cancel{x^2}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1$$

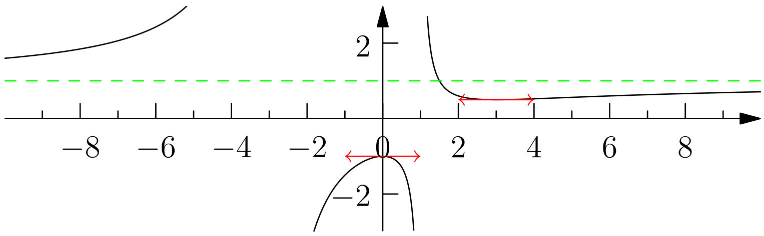
$$\left.\begin{aligned} x^2 - 2x + 3 &\xrightarrow[x \to -3]{} 9 + 6 + 3 = 18 \\ x^2 + 2x - 3 &\xrightarrow[x \to -3]{} 0 \end{aligned}\right\} \text{donc} \begin{cases} f(x) \xrightarrow[\substack{x \to -3 \\ <}]{} +\infty \\ f(x) \xrightarrow[\substack{x \to -3 \\ >}]{} -\infty \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2 - 2x + 3 &\xrightarrow[x \to 1]{} 2 \\ x^2 + 2x - 3 &\xrightarrow[x \to 1]{} 0 \end{aligned}\right\} \text{donc} \begin{cases} f(x) \xrightarrow[\substack{x \to 1 \\ <}]{} -\infty \\ f(x) \xrightarrow[\substack{x \to 1 \\ >}]{} +\infty \end{cases}$$

3. f est dérivable sur $\mathscr{D}$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathscr{D}, f'(x) &= \frac{2(x-1)(x^2 + 2x - 3) - 2(x^2 - 2x + 3)(x+1)}{(x^2 + 2x - 3)^2} \\ &= \frac{2(2x^2 - 6x)}{(x^2 - 2x + 3)^2} \\ &= \frac{4x(x-4)}{(x^2 - 2x + 3)^2} \end{aligned}$$

x	$+\infty$		-3		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1


2
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
−2

Chapitre 6

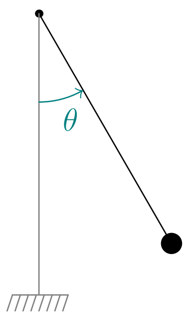
Équations différentielles linéaires

6.1

Définition: Une <u>équation différentielle</u> est une égalité faisant intervenir une fonction inconnue y ainsi que ses dérivées successives $y', y'', y^{(3)}, \ldots, y^{(n)}$.

Exemple: 1. $y^{(3)} + \ln(y') = e^y$

2.



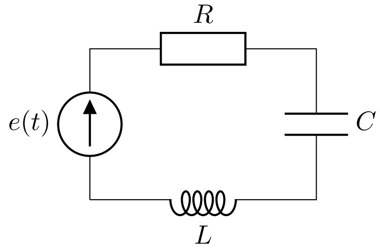
On a $\ddot{\theta} + \sin(\theta) = 0$ i.e. $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \sin(\theta) = 0$
Pour les "petits angles", $\sin(\theta) \simeq 0$. On résout donc

$$\ddot{\theta} = -\theta$$

3.

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = e(t)$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = e(t)$$



4. Modèle de population : $\dfrac{dN}{dt} = \lambda N(1-N)$

Définition: Une <u>équation différentielle linéaire d'ordre n</u> est de la forme

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b(t)$$

où $b, a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des fonctions connues et continues sur un intervalle I. On dit que b est le second membre de l'équation.

Exemple ($\cos(t)y'' + \sin(t)y' = \tan(t)$):

Proposition (Principe de superposition)**:** Soient b_1 et b_2 continues sur I. Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ également continues sur I.

$$(E_1): \quad \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = b_1$$
$$(E_2): \quad \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = b_2$$

Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$.

$$(E): \quad \sum_{k=1}^{n} a_k y^{(k)} = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 \text{ solution de } (E_1) \\ y_2 \text{ solution de } (E_2) \end{array}\right\} \implies \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \text{ solution de } (E)$$

Preuve:
On pose $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ dérivable n fois car c'est le cas de y_1 et y_2 Donc,

$$\forall k \in [\![0, n]\!], y^{(k)} = \lambda_1 y_1^{(k)} + \lambda_2 y_2^{(k)}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\lambda_1 y_1^{(k)} + \lambda_2 y_2^{(k)}\right) \\ &= \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} a_k y_1^{(k)} + \lambda_2 \sum_{k=1}^{n} a_k y_2^{(k)} \\ &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \end{aligned}$$

$\square$

Proposition: Soit (E) l'équation différentielle $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = b$ où $a_0, a_1, \dots, a_n$

sont des fonctions homogènes. L'<u>équation homogène</u> associée à (E) est

$$(H) : \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0$$

Les solutions de (E) sont toutes de la forme $h + y_0$ où h est solution de (H) et y_0 solution de (E).

Preuve:
Soit y une solution de (E) et y_0 une solution particulière de (E). On pose $h = y - y_0$.
D'après le principe de superposition, h est une solution de (H).
Réciproquement, si h est une solution de (H) et y_0 une solution de (E) alors $h + y_0$ est aussi solution de (E). □

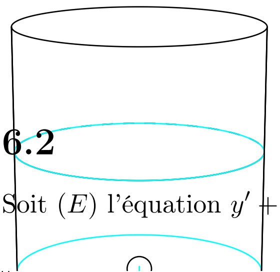
Théorème (Théorème de Cauchy)**:** Soit (E) une équation linéaire différentielle.

$$(E) : \quad y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = b$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont <u>continues</u> sur un <u>intervalle</u> I.
Soit $t_0 \in I$ et $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$.
Il existe **une et une seule** fonction y telle que

$$\begin{cases} y \text{ solution de } (E) \\ \forall i \in [\![0, n-1]\!], y^{(i)}(t_0) = \alpha_i \end{cases}$$

Exemple:



On ne peut pas déduire le passé d'un sceau percé, son équation est non-linéaire.

$$h' = -c\sqrt{h} \text{ avec } c \in \mathbb{R}_*^+$$

6.2

Soit (E) l'équation $y' + ay = b$ où a et b sont continues sur un intervalle I.

Proposition: Soit A une primitive de a sur un intervalle I.

$$(H) : \quad y' + ay = 0$$

Les solutions de (H) sont $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$

Preuve:
Soit y une fonction dérivable sur I. On pose

$$z : t \mapsto y(t)e^{A(t)}$$

dérivable sur I et

$$\begin{aligned}\forall t \in I, z'(t) &= y'(t)e^{A(t)} + y(t)A'(t)e^{A(t)} \\ &= \left(y'(t) + a(t)y(t)\right)e^{A(t)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (H) &\iff \forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = 0 \\ &\iff \forall t \in I, z'(t) = 0 \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall t \in I, z(t) = \lambda \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall t \in I, y(t) = \lambda e^{-A(t)}\end{aligned}$$

$\square$

Remarque (pseudo preuve):

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0 &\iff \frac{dy}{y} = -a(t)dt \\ &\iff \int \frac{dy}{y} = \int -a(t)dt \\ &\iff \ln(y) = -A(t) + K \\ &\iff y = e^{-A(t)+K} \\ &\iff y = \lambda e^{-A(t)} \text{ avec } \lambda = e^K\end{aligned}$$

6.3 Annexe

$y : I \to E$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$$\begin{aligned}(*) : \quad & y' + a(x)y = 0 \text{ et } y(x_0) = 0 \\ &\iff \forall x \in I, y(x) = -\int_{x_0}^{x} a(u)y(u)\ du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T : E^I &\longrightarrow E^I \\ y &\longmapsto \left(x \mapsto -\int_{x_0}^{x} a(u)y(u)\ du\right)\end{aligned}$$

donc $(*) \iff T(y) = y$

Chapitre 8

Ensembles, applications, relations et lois de composition

8.1 Théorie naïve des ensembles

Définition: Un ensemble est une collection finie ou infinie d'objets de même nature ou non. L'ordre de ces objets n'a pas d'importance.

EXEMPLE: 1. $\{1, x \mapsto x^2, \{1\}\}$ est un ensemble : ses éléments dont l'entier 1, la fonction $x \mapsto x^2$ et un ensemble contenant uniquement 1 (un singleton).
2. $\mathbb{N}$ est un ensemble infini

REMARQUE (Notation):
Soit E un ensemble et x un objet de E.
On écrit $x \in E$ ou bien $x \ni E$.

REMARQUE (⚠ Paradoxe):
On note Ω l'ensemble de tous les ensembles. Alors, $\Omega \in \Omega$.
Ce n'est pas le cas de tous les ensembles :

$$\mathbb{N} \notin \mathbb{N} \text{ car } \mathbb{N} \text{ n'est pas un entier}$$

On distingue donc 2 types d'ensembles :
- ceux qui vérifient $E \notin E$, on dit qu'ils sont ordinaires
- ceux qui vérifient $E \in E$, on dit qu'ils sont extra-ordinaires

On note O l'ensemble de tous les ensembles ordinaires.
- Supposons O ordinaire. Alors, $O \notin O$
  Or, O est ordinaire et donc $O \in O$ $\lightning$
- Supposons O extra-ordinaire.
  Alors $O \in O$ et donc O ordinaire $\lightning$

$\boxed{\text{C'est un paradoxe}}$

Pour éviter ce type de paradoxe, on a donné une définition axiomatique qui explique quelles sont les opérations permettant de combiner des ensembles pour en faire un autre.

Définition: Soit E un ensemble et F un autre ensemble. On dit que E et F sont égaux (noté $E = F$) si E et F contiennent les mêmes objets.

Exemple: 1. $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{3, 2, 1, 2\}$
On a bien $E = F$.

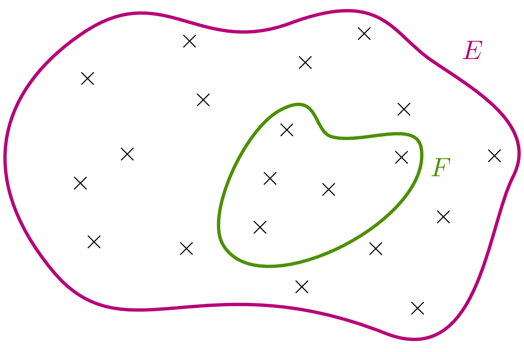
2. $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$ car $\begin{cases} -1 \in \mathbb{Z} \\ -1 \notin \mathbb{N} \end{cases}$

3. $E = \{0, \{0\}\} \neq \{0\} = F$
car $\begin{cases} \{0\} \in E \\ \{0\} \notin F \end{cases}$
mais, $F \in E$

Définition: L'ensemble vide, noté $\varnothing$ est le seul ensemble à n'avoir aucun élément.

Définition: Soient E et F deux ensembles. On dit que F est inclus dans E, noté $F \subset E$ ou $E \supset F$ si tous les éléments de F sont aussi des éléments de E.

$$\forall x \in F, x \in E$$



Proposition: Pour tout ensemble E, $\varnothing \subset E$

Preuve (par l'absurde)*:*
Si $\varnothing \not\subset E$ alors $\exists x \in \varnothing, x \notin E$: une contradiction $\lightning$

□

EXEMPLE: 1. $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{1, 3\}$
On a $F \subset E$ mais pas $E \subset F$ car $\begin{cases} 2 \in E \\ 2 \notin F \end{cases}$

2. $F = \{0\}$ et $E = \{0, \{0\}\}$

— $F \in E$ car $\{0\} \in E$
— $F \subset E$ car $0 \in E$

3. $E = \{\{0\}\}\,; F = \{0\}$
— $F \not\subset E$ car $0 \notin E$
— $F \in E$

4. $E = \{\{\{0\}\}\}; F = \{0\}$
— $F \notin E$
— $F \not\subset E$
— $\varnothing \subset F$
— $\varnothing \subset E$

Définition: Soit E un ensemble. On peut former l'ensemble de toutes les parties de E (une partie de E est un ensemble F avec $F \subset E$). On le note $\mathscr{P}(E)$

$$A \in \mathscr{P}(E) \iff A \subset E$$

EXEMPLE: 1. $E = \{42\}$
Les sous-ensembles de E sont $\varnothing$ et $\{42\} = E$ donc

$$\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{42\}\}$$

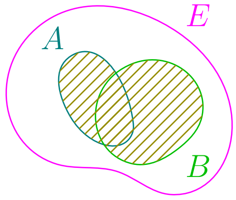
2. $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$
3. $E = \{0, 1\}$ donc $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$
4. $E = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ donc $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$
5. $E = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(\mathscr{P}(E)) &= \mathscr{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, E) \\ &= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}, \{E\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}, \{\varnothing, E\}, \{\{\varnothing\}, \\ &\quad \{\{\varnothing\}\}\}, \{\{\varnothing\}, E\}, \{\{\{\varnothing\}\}, E\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, E\}, \\ &\quad \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}, E\}, \{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, E\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, E\}\}\end{aligned}$$

Définition: Soit E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$
1.

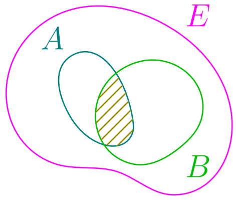
La réunion de A et B est

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \ \text{ ou } \ x \in B\}$$



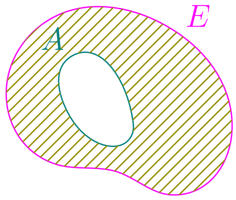
2. L'intersection de A et B est

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \ \text{ et } \ x \in B\}$$



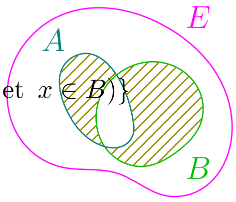
3. Le complémentaire de A dans E est

$$E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\} = C_E A$$



4. La différence symétrique de A et B est

$$\begin{aligned} A \Delta B &= \{x \in E \mid (x \in A \ \text{ et } \ x \notin B) \ \text{ ou } (x \notin A \ \text{ et } \ x \in B)\} \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$



Proposition: Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$

1. $A \cap A = A$
2. $B \cap A = A \cap B$
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4. $A \cap \varnothing = \varnothing$
5. $A \cap E = A$
6. $A \cup A = A$
7. $B \cup A = A \cup B$
8. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
9. $A \cup \varnothing = A$
10. $A \cup E = E$
11. $(E \setminus A) \setminus A = E \setminus A$
12. $E \setminus (E \setminus A) = A$
13. $E \setminus \varnothing = E$
14. $E \setminus E = \varnothing$
15. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
16. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
17. $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$
18. $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$

Preuve: 16. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

— Soit $x \in A \cap (B \cup C)$ donc $x \in A$ et $x \in B \cup C$

Cas 1 $x \in B$, alors $x \in A \cap B$ et donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Cas 2 $x \in C$, alors $x \in A \cap C$ et donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
On a prouvé

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

— Soit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Cas 1 $x \in A \cap B$ donc $x \in A$ et $x \in B$ donc $x \in B \cup C$ et donc $x \in A \cap (B \cup C)$
Cas 2 $x \in A \cap C$ donc $x \in A$ et $x \in C$ donc $x \in B \cup C$ et donc $x \in A \cap (B \cup C)$
On a prouvé

$$A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

17. $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$
— Montrons que $x \in E \setminus (A \cup B) \implies x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$
Soit $x \in E \setminus (A \cup B)$ donc $x \notin A \cup B$
— Si $x \in A$, alors $x \in A \cup B$ ↯
donc $x \notin A$ i.e. $x \in E \setminus A$
— Si $x \in B$ alors, $x \in A \cup B$ ↯
Donc $x \notin B$ i.e. $x \in E \setminus B$
On en déduit que $x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$
— $x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$. Montrons que $x \in E \setminus (A \cup B)$
On suppose que $x \notin E \setminus (A \cup B)$ donc $x \in A \cup B$
— Si $x \in A$, on a une contradiction car $x \in E \setminus A$
— Si $x \in B$, on a une contradiction car $x \in E \setminus B$
donc $x \in E \setminus (A \cup B)$

□

8.2 Applications

Définition: Une application f est la donnée de
— un ensemble E appelé ensemble de départ
— un ensemble F appelé ensemble d'arrivée
— une fonction qui associe à tout élément x de E un unique élément de F noté $f(x)$

L'application est notée

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Exemple: 1. Soit $\mathscr{P}$ le plan (affine) et $A \in \mathscr{P}$. Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des droites.

$$\begin{aligned} f : \mathscr{P} \setminus \{A\} &\longrightarrow \mathscr{D} \\ B &\longmapsto (AB) \end{aligned}$$

2. $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$
$F = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

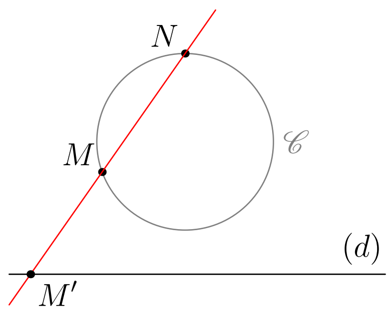
3. $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ f &\longmapsto f'\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

4. $E = [0,1]$ et $F = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$

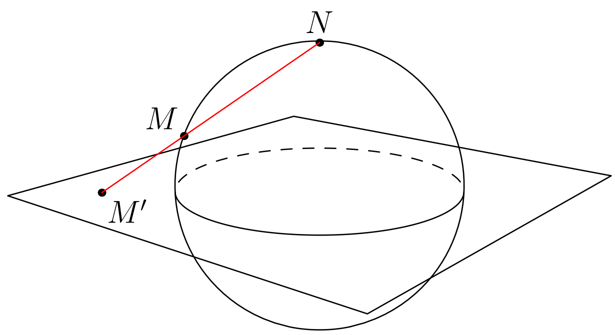
$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto \int_a^x t^2 \ln(t)\, dt \end{aligned}$$

5.



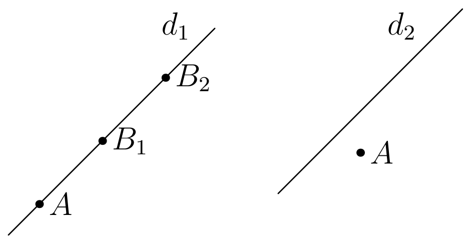
$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{C} \setminus \{N\} &\longrightarrow (d) \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

6.



Définition: Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est
- injective si tout élément de F a au plus un antécédant par f
- bijective si tout élément de F a un unique antécédant par f
- surjective si tout élément de F a au moins un antécédant par f

Exemple (suite des exemples précédents): 1. L'application n'est ni injective ni surjective



B_1 et B_2 sont deux antécédants de d_1
d_2 n'a pas d'antécédant par f

2. L'application n'est pas injective :
   - $f : x \mapsto x$ est continue
   - $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ et $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + 42$ sont deux antécédants de f.

   Mais, l'application est surjective d'après le théorème fondamental de l'analyse
3. L'application n'est pas injective ($x \mapsto 0$ et $x \mapsto 42$ sont deux antécédants de 0) mais elle est surjective ($\forall x \in \mathbb{R}, x \mapsto ax$ est un antécédant de a).
4. L'application est injective mais pas surjective (les images sont des primitives de $x \mapsto x^2 \ln(x)$)
5. et 6. sont bijectives

Définition: Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. L'application notée $g \circ f$ est définie par

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

On dit que c'est la composée de f et g.

Proposition: Soient $f : E \to F, g : F \to G, h : G \to G$. Alors, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Preuve:
Par définition, $g \circ f : E \to F$ donc $h \circ (g \circ f) : E \to H$

et $h \circ g : F \to H$ donc $(h \circ g) \circ f : E \to H$ Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f)(x) &= h(g \circ f(x)) \\ &= h(g(f(x))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (h \circ g) \circ f(x) &= h \circ g(f(x)) \\ &= h(g(f(x))) \end{aligned}$$

Donc, $h \circ (g \circ f)(x) = (h \circ g) \circ f(x)$ □

Remarque (⚠ Attention):
En général, $g \circ f \neq f \circ g$

Par exemple, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$

Alors, $f \circ g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ et $g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$

donc $f \circ g \neq g \circ f$

Proposition: Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$

1. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective
2. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective
3. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective
4. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective

Preuve:

1. On suppose $g \circ f$ injective. On veut montrer que f est injective. Soient $(x, y) \in E^2$. On suppose $f(x) = f(y)$. Montrons que $x = y$.
   Comme $f(x) = f(y)$, $g(f(x)) = g(f(y))$ i.e. $g \circ f(x) = g \circ f(y)$
   Or, $g \circ f$ injective donc $x = y$
2. On suppose $g \circ f$ surjective. On veut montrer que g est surjective. Soit $y \in G$. On cherche $x \in F$ tel que $g(x) = y$.
   Comme $g \circ f : E \to G$ surjective, y a un antécédant $z \in E$ par $g \circ f$. On pose $x = f(z) \in F$ et on a bien $g(x) = y$
3. On suppose f et g injectives. Montrons que $g \circ f$ injective. Soient $x, y \in E$. On suppose $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Montrons $x = y$
   On sait que $g(f(x)) = g(f(y))$. Comme g est injective, $f(x) = f(y)$ et comme f est injective, $x = y$

4. On suppose f et g surjectives. Soit $y \in G$. On cherche $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = y$
   Comme g est surjective, y a un antécédant $z \in F$ par g
   Comme f est surjectives, z a un antécédant $x \in E$ par f
   On en déduit $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(z) = y$

□

Remarque:
$f : E \longrightarrow F$

$$f \text{ injective} \iff \left(\forall (x,y) \in E^2, f(x) = f(y) \implies x = y\right)$$

Définition: Soit $f : E \to F$ une <u>bijection</u>. L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \text{l'unique antécédant de } y \text{ par } f \end{array} \right.$ est la <u>réciproque</u> de f notée f^{-1}

Définition: L'<u>identité de E</u> est $\mathrm{id}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$

Proposition: Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$

$$\left.\begin{array}{l} f \circ g = \mathrm{id}_F \\ g \circ f = \mathrm{id}_E \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} f \text{ bijective} \\ f^{-1} = g \end{array}\right.$$

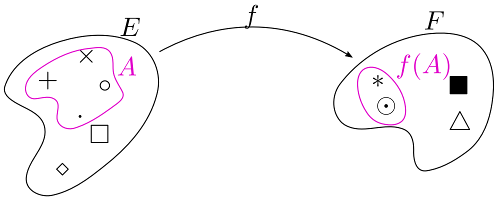
Preuve (déjà faite)*:*

□

Définition: Soit $f : E \to F$

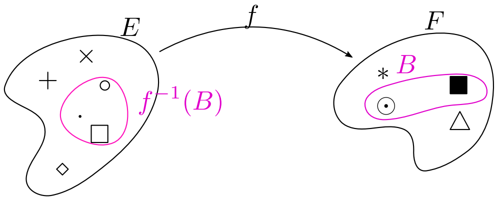
1. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. L'<u>image directe</u> de A par f est

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$



2. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. L'image réciproque de B par f est

$$f^{-1}(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}$$



Chapitre 11

Suites numériques

11.1 Modes de définition

Définition: Une suite peut être définie

— <u>Explicitement</u> On dispose pour tout $n \in \mathbb{N}$ de l'expression de u_n en fonction de n.
$\boxed{\text{ex}}$ $\forall n \in \mathbb{N}_*, u_n = \dfrac{\ln(n)}{n} e^{-n}$

— <u>Par récurrence</u> On connait u_{n+1} en fonction de $u_0, u_1, \ldots, u_n$
$\boxed{\text{ex}}$ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$

— <u>Implicitement</u> $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est le seul nombre verifiant une certaine propriété
$\boxed{\text{ex}}$ u_n est le seul réel vérifiant $x^5 + nx - 1 = 0$

11.2 Limites

Définition: Soit u une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que

— u converge vers ℓ

— u_n tends vers ℓ quand n tends vers $+\infty$

— ℓ est une limite de u

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \qquad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$
$$(\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon)$$

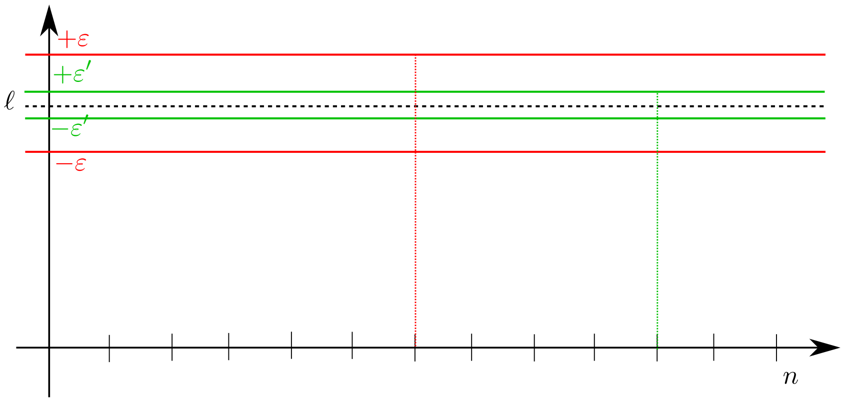


Figure 11.1 – Définition de la limite

Exemple:
Montrer que $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, -\varepsilon \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$$

Analyse Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant N, -\varepsilon \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$.
En particulier, $\frac{1}{N} \leqslant \varepsilon$ donc $N \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$.

Synthèse On pose $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$ et $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Soit $n \geqslant N$.

$$\frac{1}{n} > 0 > -\varepsilon \text{ donc } \frac{1}{n} \geqslant -\varepsilon$$

$$n \geqslant N > \frac{1}{\varepsilon} \text{ donc } n \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$$

Définition: Soit u une suite réelle.
On dit que u tends vers $+\infty$ si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant M$$

On dit que u tends vers $-\infty$ si

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \leqslant m$$

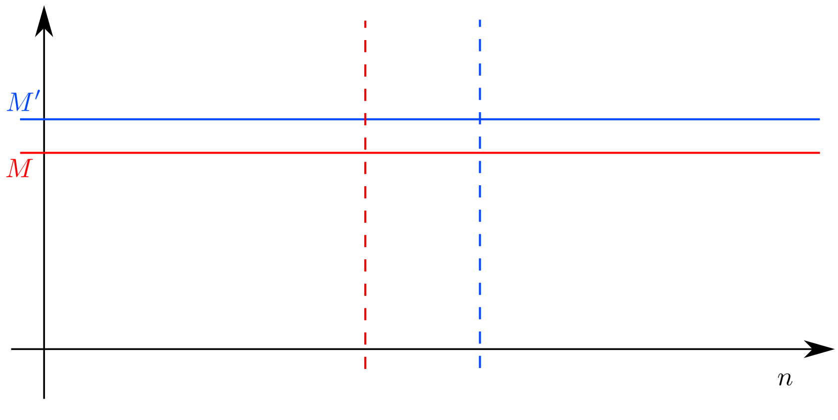


FIGURE 11.2 – Limites infinies

EXEMPLE:
Montrons que $n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Soit $M \in \mathbb{R}$, on cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, n^2 \geqslant M$.

Analyse Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, n^2 \geqslant M$.
En particulier, $N^2 \geqslant M$ et dont $N \geqslant \sqrt{M}$ si $M \geqslant 0$

Synthèse On pose $N = \begin{cases} 0 & \text{si } M \leqslant 0 \\ \left\lfloor \sqrt{M} \right\rfloor + 1 & \text{sinon} \end{cases}$
Ainsi $N \in \mathbb{N}$ et $N^2 \geqslant M$. Soit $n \geqslant N$. On a $n^2 \geqslant N^2 \geqslant M$.

Définition: Une suite qui ne converge pas est dite divergente (on dit qu'elle diverge). C'est le cas si cette suite n'a pas de limite quand elle tends vers $\pm\infty$.

Théorème (Unicité de la limite (réelle))**:** Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (\ell_1, \ell_2) \in \overline{\mathbb{R}}^2$
Si $\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1 \\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2 \end{cases}$ alors $\ell_1 = \ell_2$

Preuve: **Cas 1** $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$.
On suppose $\begin{cases} \ell_1 \neq \ell_2 \\ u_n \to l_1 \\ u_n \to l_2 \end{cases}$
Sans perte de généralité, on peut supposer $\ell_1 < \ell_2$

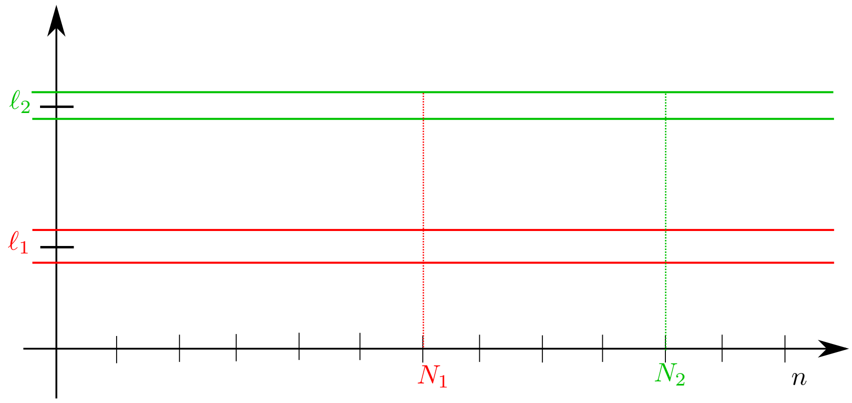


FIGURE 11.3 – Preuve unicité de la limite (cas 1)

On pose $\varepsilon = \dfrac{\ell_2 - \ell_1}{3} > 0$. On sait qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, \ell_1 - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + \varepsilon$$

et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, \ell_2 - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell_2 + \varepsilon$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. On a alors

$$u_n \leqslant \ell_1 + \varepsilon < \ell_2 + \varepsilon \leqslant u_n$$

une contradiction ($u_n < u_n$). En effet,

$$\begin{aligned} \ell_1 + \varepsilon < \ell_2 + \varepsilon &\iff 2\varepsilon < \ell_2 - \ell_1 \\ &\iff \frac{2}{3}(\ell_2 - \ell_1) < \ell_2 - \ell_1 \\ &\iff \frac{2}{3} < 1 \end{aligned}$$

Ainsi $\ell_1 = \ell_2$

Cas 2 $\ell_1 \in \mathbb{R}, \ell_2 = +\infty$

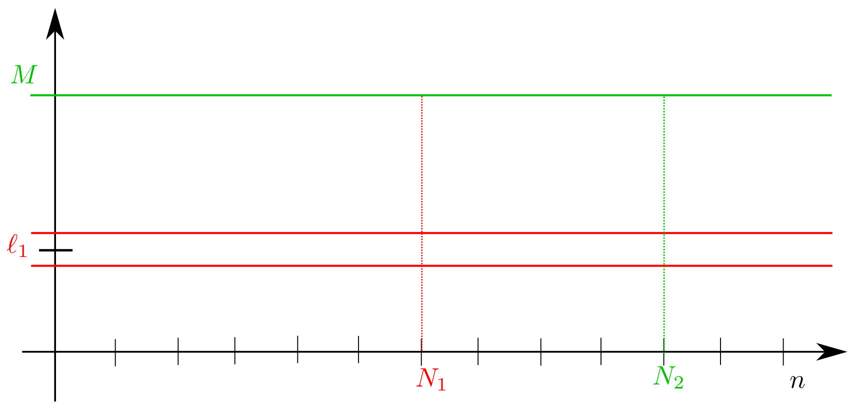


FIGURE 11.4 – Preuve unicité de la limite (cas 2)

$u_n \to \ell_1$ donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, \ell_1 - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + 1$$

$u_n \to +\infty$ donc il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, u_n \geqslant \ell_1 + 2$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Ainsi

$$u_n \geqslant \ell_1 + 2 > \ell_1 + 1 \geqslant u_n$$

une contradiction

De la même manière, on peut prouver pour $(\mathbb{R}, -\infty)$ et $(+\infty, -\infty)$

$\square$

REMARQUE:
Si u_n tends vers ℓ quand n tends vers $+\infty$, on écrit $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $\lim u_n = \ell$

Proposition: Toute suite convergente est bornée

Preuve:
On pose $\ell = \lim u_n \in \mathbb{R}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \ell - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell + 1$$

L'ensemble $\{u_n \mid n \leqslant N\}$ est fini, il a donc un plus grand élément et un plus petit élément. On pose

$$\begin{cases} M_1 = \max\{u_n \mid n \leqslant N\} \\ m_1 = \min\{u_n \mid n \leqslant N\} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} M = \max(\ell_1 + 1, M_1) \\ m = \min(\ell_1 - 1, m_1) \end{cases}$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} m \leqslant m_1 \leqslant u_n \leqslant M_1 \leqslant M & \text{si } n \leqslant N \\ m \leqslant \ell_1 - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + 1 \leqslant M & \text{si } n > N \end{cases}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant u_n \leqslant M$$

□

Proposition: Soient $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On pose $\ell_1 = \lim u_n$ et $\ell_2 = \lim v_n$

1. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$ alors $u_n + v_n \to \ell_1 + \ell_2$
2. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = +\infty$ alors $u_n + v_n \to +\infty$
3. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = -\infty$ alors $u_n + v_n \to -\infty$
4. si $\ell_1 = \ell_2 = +\infty$, alors $u_n + v_n \to +\infty$
5. si $\ell_1 = \ell_2 = -\infty$, alors $u_n + v_n \to -\infty$

Preuve: 1. On suppose $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\ell = \ell_1 + \ell_2$.
Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \ell - \varepsilon \leqslant u_n + v_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

$\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, \ell_1 - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, \ell_2 - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant v_n \leqslant \ell_2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geqslant N$ quelconque.

$$n \geqslant N \geqslant N_1 \text{ donc } \ell_1 - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$n \geqslant N \geqslant N_2 \text{ donc } \ell_2 - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant v_n \leqslant \ell_2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

D'où, en additionnant les inégalités

$$\ell - \varepsilon = \ell_1 + \ell_2 - \varepsilon \leqslant u_n + v_n \leqslant \ell_1 + \ell_2 + \varepsilon = \ell + \varepsilon$$

2. On suppose $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = +\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$ quelconque.
Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, \ell_1 - 1 \leqslant u_n \leqslant \ell_1 + 1$$

et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, v_n \geqslant M - \ell_1 + 1$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geqslant N$ quelconque

$$\begin{cases} n \geqslant N_1 \text{ donc } u_n \geqslant \ell_1 - 1 \\ n \geqslant N_2 \text{ donc } v_n \geqslant M - \ell_1 + 1 \end{cases}$$

D'où, $u_n + v_n \geqslant M$

□

Proposition: Soient u et v deux suites réelles. On pose $\ell_1 = \lim u_n$ et $\ell_2 = \lim v_n$

1. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$, alors $u_n v_n \to \ell_1 \ell_2$
2. si $\begin{cases} \ell_1 \in \mathbb{R}_*^+, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \to +\infty \\ \ell_1 \in \mathbb{R}_*^-, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \to -\infty \end{cases}$
3. si $\begin{cases} \ell_1 \in \mathbb{R}_*^+, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \to -\infty \\ \ell_1 \in \mathbb{R}_*^-, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \to +\infty \end{cases}$
4. si $\begin{cases} \ell_1 = -\infty, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \to -\infty \\ \ell_1 = -\infty, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \to +\infty \\ \ell_1 = +\infty, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \to +\infty \end{cases}$

Preuve: 1. $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$
Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| \leqslant \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| &= |(u_n - \ell_1) v_n + \ell_1 (v_n - \ell_2)| \\ &\leqslant |v_n| \, |u_n - \ell_1| + |\ell_1| \, |v_n - \ell_2| \end{aligned}$$

Comme v_n converge, elle est bornée,

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leqslant M$$

donc

$$|u_n v_n - \ell_1 \ell_2| \leqslant M \times |u_n - \ell_1| + |\ell_1| \, |v_n - \ell_2|$$

Cas 1 On suppose $M \neq 0$ et $\ell_1 \neq 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, |u_n - \ell_1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M}$$

Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, |v_n - \ell_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\,|\ell_1|}$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$.

$$\forall n \geqslant N, |u_n v_n - \ell_1 \ell_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M} \times M + |\ell_1| \times \frac{\varepsilon}{2\,|\ell_1|} = \varepsilon$$

Cas 2 $M = 0$, $(\ell_1 \neq 0)$
Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 0$
Donc

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n v_n = 0 \\ \ell_2 = 0 \\ \ell_1 \ell_2 = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n \end{cases}$$

Cas 3 $M \neq 0$ et $\ell_1 = 0$
Alors, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n v_n - 0| \leqslant M\,|u_n|$
$\dfrac{\varepsilon}{M} > 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$$

Donc,

$$\forall n \geqslant N, |u_n v_n| \leqslant M \times \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

Donc, $u_n v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 = \ell_1 \ell_2$

2. $l_1 > 0$ et $l_2 = +\infty$
Soit $M \in \mathbb{R}_*^+$ On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, u_n v_n \geqslant M$$

On pose $\varepsilon = \dfrac{\ell_1}{2} > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, u_n \geqslant \ell_1 - \varepsilon = \frac{\ell_1}{2} > 0$$

et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, v_n \geqslant \frac{2M}{\ell_1} > 0$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Alors,

$$\forall n \geqslant N, u_n v_n \geqslant \frac{2M}{\ell_1} \times \frac{\ell_1}{2} = M$$

Donc $u_n v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

$\square$

Proposition: Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_*$.Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$
On pose $\ell = \lim u_n$ (si elle existe).

1. si $\ell = +\infty$ alors, $\dfrac{1}{u_n} \to 0$
2. si $\ell = 0$ alors, $\left|\dfrac{1}{u_n}\right| \to +\infty$

   ⚠ Si le signe de u_n ne se stabilise pas $\dfrac{1}{u_n}$ n'a pas de limite

   $\boxed{\text{ex}}$ $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$
3. si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{1}{\ell}$

Preuve: 3.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|\ell - u_n|}{|u_n|\,|\ell|}$$

On pose $\varepsilon = \dfrac{|\ell|}{2} > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

Si $\ell > 0$ alors

$$\forall n \geqslant N, u_n \geqslant \ell - \varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$$

et donc

$$\forall n \geqslant N, |u_n| \geqslant \frac{|\ell|}{2}$$

Si $\ell < 0$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \ell + \varepsilon = \frac{\ell}{2} < 0$$

et donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \geqslant \frac{|\ell|}{2}$$

Donc,
$$\forall n \geqslant N, \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| \leqslant \frac{|u_n| - \ell}{|\ell| \times \frac{|\ell|}{2}} = \frac{2\,|u_n - \ell|}{|\ell|^2}$$

Soit $\varepsilon' > 0$ quelconque. $\frac{\varepsilon' \,|\ell|^2}{2}$ donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N', |u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon'}{2}\,|\ell|^2$$

On pose N'', $\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| \leqslant \frac{\varepsilon'}{2}\,|\ell|^2 \times \frac{2}{|\ell|^2} = \varepsilon'$

□

11.3 Limites et inégalités

Proposition: Soient u et v deux suites réelles convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. On suppose que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$$
Alors, $\ell_1 \leqslant \ell_2$

Preuve:
On suppose $\ell_1 < \ell_2$. On pose $\varepsilon = \frac{\ell_1 - \ell_2}{3} > 0$.
Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N_1, u_n \geqslant \ell_1 - \varepsilon$$
Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N_2, v_n \leqslant \ell_2 + \varepsilon$$

Ainsi,
$$\forall n \geqslant \max(N_1, N_2), \ell_1 - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant \ell_2 + \varepsilon$$
et donc
$$\ell_1 - \varepsilon \leqslant \ell_2 + \varepsilon$$
donc, $\ell_1 - \ell_2 \leqslant 2\varepsilon$
donc, $1 \leqslant \frac{2}{3}$ une contradiction

□

Remarque:

Si $\begin{cases} u_n \to \ell_1 \in \mathbb{R} \\ v_n \to \ell_2 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n \end{cases}$

on n'a pas forcément $\ell_1 < \ell_2$

$\boxed{\text{ex}}$ $\forall n \in \mathbb{N}_*, \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ mais les deux convergent vers 0

Proposition: Soient u et v deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$$

1. si $u_n \to +\infty$,$v_n \to +\infty$
2. si $v_n \to -\infty$,$u_n \to -\infty$

Preuve: 1. On suppose $u_n \to +\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, u_n \geqslant M$$

Donc

$$\forall n \geqslant N, v_n \geqslant u_n \geqslant M$$

Donc $v_n \to +\infty$

□

Théorème (Théorème des "gendarmes")**:** Soient u, v et w trois suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

On suppose que u et w convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, v converge vers ℓ

Preuve:
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, w_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, u_n \leqslant \ell - \varepsilon$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. D'où,

$$\forall n \geqslant N, \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

Donc, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ □

Théorème (Limite monotone)**:**

1. Soit u une suite croissante majorée par M.
   Alors, u converge et $\lim u_n \leqslant M$
2. Soit u une suite croissante non majorée.
   Alors, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
3. Soit u une suite décroissante minorée par m.
   Alors, u converge et $\lim u_n \geqslant m$
4. Soit u une suite décroissante non minorée.
   Alors, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

Preuve:

1. $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing$ (u_0 y est) majorée (par hypothèse) par M.
   On pose $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(u_n)$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque
   $\ell - \varepsilon < \ell$ donc, $\exists N \in \mathbb{N}, u_N > \ell - \varepsilon$
   u est croissante donc
   $$\forall n \geqslant N, u_n \geqslant u_N > \ell - \varepsilon$$
   donc,
   $$\forall n \geqslant N, \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell \leqslant \ell + \varepsilon$$
   Donc, $u_n \to \ell$
2. Soit $M \in \mathbb{R}$. M n'est pas un majorant de l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ donc
   $$\exists N \in \mathbb{N}, u_N > M$$
   Comme u est croissante
   $$\forall n \geqslant N, u_n \geqslant u_N \geqslant M$$
   donc
   $$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

□

EXEMPLE:

$$\begin{cases} u_0 = a \in \left]0, 1\right[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(1 - u_n) \end{cases}$$

(suite logistique)

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f : x \mapsto x(1-x)$$

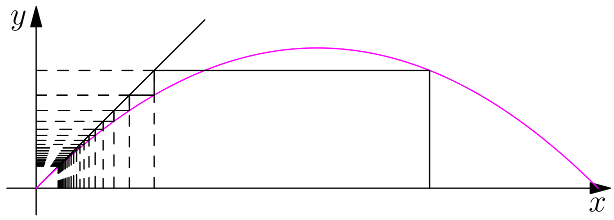


Figure 11.5 – Courbe logistique

— Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n(1-u_n) - u_n \\ &= -{u_n}^2 \leqslant 0 \end{aligned}$$

Donc, u est décroissante.

— Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$$

— $u_0 = a \in]0,1[$ donc $u_0 \in [0,1]$

— Soit $n \in N$. On suppose $u_n \in [0,1]$

$$\begin{cases} 0 \leqslant u_n \leqslant 1 \\ 0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1 \end{cases}$$

donc

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$

donc u minoré par 0

— D'après le théorème de la limite monotone, u converge. On pose ℓ sa limite :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$$

Alors, $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

$$u_n(1-u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell(1-\ell)$$

Par unicité de la limite,

$$\begin{aligned} &\ell = \ell(1-\ell) \\ \iff &1 = 1 - \ell \\ \iff &0 = -\ell \iff \ell = 0 \end{aligned}$$

Exemple:

$$\begin{cases} u_0 = a \in]0,1[\\ u_{n+1} = 2u_n(1-u_n) \end{cases}$$

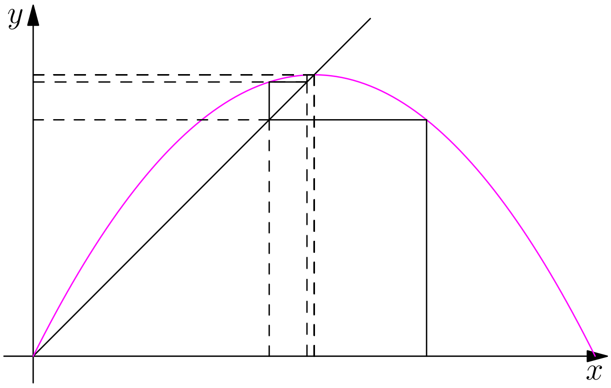


FIGURE 11.6 – Courbe logistique (2)

EXEMPLE:

$$\begin{cases} u_0 = a \in]0,1[\\ u_{n+1} = 3u_n(1-u_n) \end{cases}$$

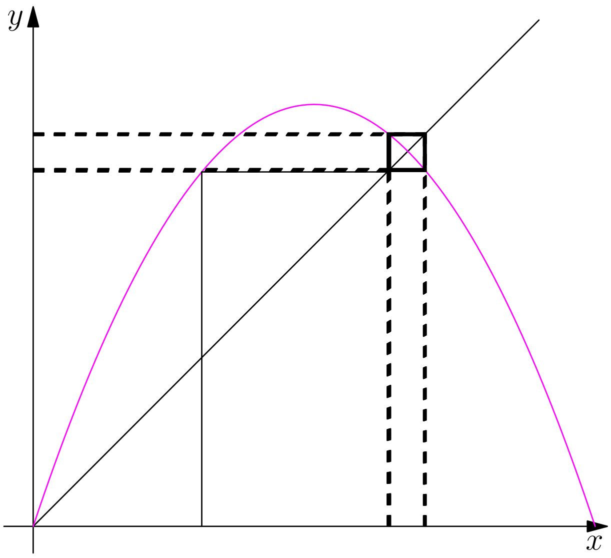


FIGURE 11.7 – Courbe logistique (3)

EXEMPLE:

$$\begin{cases} u_0 = a \in]0,1[\\ u_{n+1} = 4u_n(1-u_n) \end{cases}$$

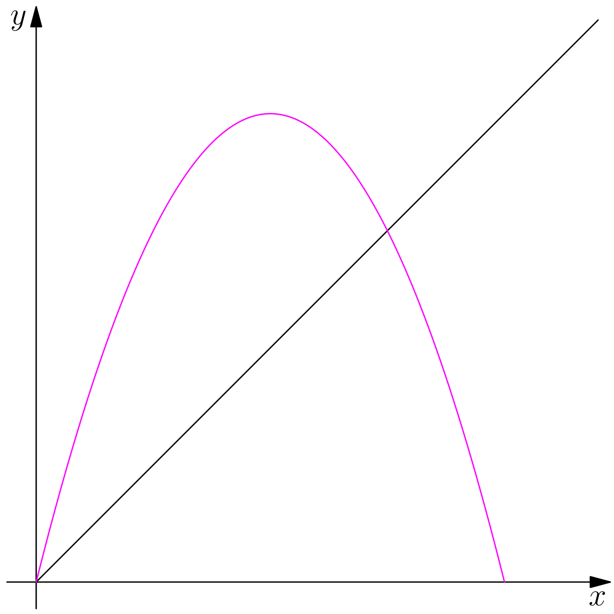


FIGURE 11.8 – Courbe logistique (4)

Définition: Soient u et v deux suites réelles. On dit que u et v sont adjacentes si
- u est croissante
- v est décroissante
- $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Théorème: Soient u et v deux suites adjacentes. Alors, u et v convergent vers la même limite.

Preuve:
$u - v$ est croissante donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - v_n \leqslant 0$$

v décroissante donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leqslant v_0$$

donc u majorée par v_0 donc u converge.
u est croissante donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant u_0$$

donc v est minorée par u_0 donc v converge.

Donc, $u_n - v_n \to \lim(u_n) - \lim(v_n)$ Par unicité de la limite,

$$\begin{aligned} & \lim(u_n) - \lim(v_n) = 0 \\ \iff & \lim(u_n) = \lim(v_n) \end{aligned}$$

$\square$

Théorème (Théorème des segments emboîtés)**:** Soit (I_n) une suite de segments (non vide) décroissante

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$$

On note $\ell(I)$ la longueur d'un intervalle I.
Si $\ell(I_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

Preuve:
On pose $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = [a_n, b_n]$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant b_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$I_{n+1} \subset I_n$ donc $a_{n+1} \in I_{n+1} \subset I_n$
donc $a_{n+1} \geqslant a_n$. De même, $b_{n+1} \in I_{n+1}$ donc $b_{n+1} \in I_n$ donc $b_{n+1} \leqslant b_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \ell(I_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc (a_n) et (b_n) sont adjacentes, elles convergent donc vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.
(a_n) croissante de limite ℓ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant \ell$$

(b_n) est décroissante de limite ℓ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n \geqslant \ell$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \ell \in I_n$ donc $\ell \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.
Soit $\ell' \neq \ell$.

— Si $\ell' < \ell = \sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n)$ donc ℓ' ne majore pas (a_n)

$$\exists N \in \mathbb{N}, a_N > \ell'$$

donc $\ell' \notin I_N$ donc $\ell' \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$

— Si $\ell' > \ell = \inf_{n\in\mathbb{N}}(b_n)$ donc ℓ' ne minore pas (b_n)

$$\exists N' \in \mathbb{N}, b_{N'} < \ell'$$

et donc $\ell' \notin I_{N'}$ donc $\ell' \notin \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$

$\square$

11.4 Suites extraites

Définition: Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.
On dit que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ est une **suite extraite** de u ou une **sous suite** de u.
On dit alors que φ est une extractrice

EXEMPLE:
$u_0 \ \boxed{u_1} \ u_2 \ u_3 \ \boxed{u_4} \ \boxed{u_5} \ u_6 \ u_7 \ \dots$

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1 \\ \varphi(1) = 4 \\ \varphi(2) = 5 \end{cases}$$

Lemme: Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geqslant n$$

Preuve (par récurrence)*:* — $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ donc $\varphi(0) \geqslant 0$
— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $(\varphi(n) \geqslant n$.
$n+1 > n$ donc $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$ donc $\varphi(n+1) > n$
Comme $\varphi(n+1) \in \mathbb{N}$, $\varphi(n+1) \geqslant n+1$

$\square$

Proposition: Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante
alors $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Preuve: CAS 1 $\ell \in \mathbb{R}$
Soit $\varepsilon > 0$ on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Soit $n \geqslant N$ alors $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N$ donc

$$\left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$

Donc, $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

CAS 2 $\ell = +\infty$

Soit $M \in \mathbb{R}$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, u_n \geqslant M$$

Soit $n \geqslant N$, on a $\varphi(n) \geqslant n \geqslant N$ donc

$$u_{\varphi(n)} \geqslant M$$

Donc $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

CAS 3 $\ell = -\infty$ similaire au CAS 2

□

EXEMPLE:
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$

$$\begin{array}{rl} u_{2n} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} & 1 \\ & \nparallel \\ u_{2n+1} = -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} & -1 \end{array}$$

donc u_n n'a pas de limite.

Proposition: Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont la même limite ℓ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Preuve: CAS 1 $\ell \in \mathbb{R}$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, |u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, |u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On pose $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$. Soit $n \geqslant N$.
Si n pair alors $n = 2k$ avec $k \geqslant N_1$ et donc, $|u_{2k} - \ell| \leqslant \varepsilon$, i.e. $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
Si n impair alors $n = 2k + 1$ avec $k \geqslant N_2$ et donc, $|u_{2k+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$, i.e. $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$
Donc,

$$\forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

□

Théorème (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**:** Soit (u_n) une suite réelle bornée. Alors, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ converge.

Preuve: MÉTHODE 1 par dichotomie
Soitent $m, M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant u_n \leqslant M$$

On pose

$$A_1 = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid m \leqslant u_n \leqslant \frac{m+M}{2} \right\}$$
$$A_2 = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{m+M}{2} \leqslant u_n \leqslant M \right\}$$

Comme $A_1 \cup A_2 = \mathbb{N}$, A_1 et A_2 ne peuvent pas être finis tous les deux.
On pose

$$B_0 = \begin{cases} A_1 & \text{si } A_1 \text{ est infini} \\ A_2 & \text{sinon} \end{cases}$$

B_0 est infini donc non vide. On pose $\varphi(0) = \min(B_0)$
On pose aussi

$$m_0 = \begin{cases} m & \text{si } B_0 = A_1 \\ \dfrac{m+M}{2} & \text{si } B_0 = A_2 \end{cases}$$

et

$$M_0 = \begin{cases} \dfrac{m+M}{2} & \text{si } B_0 = A_1 \\ M & \text{si } B_0 = A_2 \end{cases}$$

Ainsi, $B_0 = \{n \in \mathbb{N} \mid m_0 \leqslant u_n \leqslant M_0\}$. On pose

$$B_1' = \left\{ n \in B_0 \mid n > \varphi(0) \text{ et } m_0 \leqslant u_n \leqslant \frac{M_0 + m_0}{2} \right\}$$
$$B_2' = \left\{ n \in B_0 \mid n > \varphi(0) \text{ et } \frac{m_0 + M_0}{2} \leqslant u_n \leqslant M_0 \right\}$$

$$B_1' \cup B_2' = \{n \in B \mid n > \varphi(0)\} = B_0 \setminus \{\varphi(0)\}$$

$B_0 \setminus \{\varphi(0)\}$ est infini donc B_1' ou B_2' est infini. On pose

$$B_1 = \begin{cases} B_1' & \text{si } B_1' \text{ est infini} \\ B_2' & \text{sinon} \end{cases}$$

B_1 est infini donc non vide et admet un plus petit élément :

$$\varphi(1) = \min(B_1)$$

$\varphi(1) \in B_1$ donc $\varphi(1) > \varphi(0)$
On pose

$$m_1 = \begin{cases} m_0 & \text{si } B_1 = B_1' \\ \dfrac{m_0 + M_0}{2} & \text{si } B_1 = B_2' \end{cases}$$
$$M_1 = \begin{cases} \dfrac{m_0 + M_0}{2} & \text{si } B_1 = B_1' \\ M_0 & \text{si } B_1 = B_2' \end{cases}$$

On construit une suite décroissante (B_n), deux suites de réels (m_n) et (M_n) et une suite d'entiers $(\varphi(n))$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} B_{n+1} = \{k \in B_n \mid k > \varphi(n) \text{ et } m_{n+1} \leqslant u_k \leqslant M_{n+1}\} \\ \varphi(n+1) = \min(B_{n+1}) > \varphi(n) \\ M_{n+1} - m_{n+1} = \dfrac{1}{2}(M_n - m_n) \end{cases}$$

La suite (m_n) est croissante, (M_n) est décroissante et

$$\lim_{n \to +\infty} M_n - m_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (M_0 - m_0) = 0$$

Donc, (m_n) et (M_n) sont adjacentes donc convergentes avec la même limite $\ell \in \mathbb{R}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, m_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant M_n$$

Par encadrement, $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ □

Méthode 2 On pose $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall k > n, u_n > u_k\}$

Cas 1 On suppose A infini.

On pose $\varphi(0) = \min(A)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n)$ soient déjà construits. On pose

$$\varphi(n+1) = \min(A \setminus \{\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n)\})$$

Soit $n \in \mathbb{N}_*$

$$\varphi(n+1) \in A \setminus \{\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n)\}$$

donc

$$\varphi(n+1) \in A \setminus \{\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n-1)\}$$

donc

$$\varphi(n+1) \geqslant \varphi(n)$$

Or, par définition, $\varphi(n+1) \neq \varphi(n)$ donc $\varphi(n+1) > \varphi(n)$
On a aussi $\varphi(1) \in A$ donc $\varphi(1) \geqslant \varphi(0)$ Or, on sait que $\varphi(1) \neq \varphi(0)$. Donc, $\varphi(1) > \varphi(0)$ Soit $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \in A$ donc

$$\forall k > \varphi(n), u_k < u_{\varphi(n)}$$

or $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ donc $u_{\varphi(n+1)} < u_{\varphi(n)}$.
La sous suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ est décroissante et minorée (car u est minorée) donc elle converge

Cas 2 On suppose A fini. Soit $N = \max(A)$,

$$\forall n > N, n \notin A$$

Donc $\forall n > N, \exists k > n, u_n \leqslant u_k$.
Par exemple, en posant $\varphi(0) = N+1$, on a

$$A_1 = \{k > N+1 \mid u_{N+1} \leqslant u_k\} \neq \varnothing$$

On pose $\varphi(1) = \min(A_1)$ donc $\begin{cases} \varphi(1) > N+1 = \varphi(0) \\ u_{\varphi(0)} < u_{\varphi(1)} \end{cases}$
Avec $n = \varphi(1)$

$$\exists k > n, u_{\varphi(1)} \leqslant u_k$$

Donc, $A_2 = \{k \in \mathbb{N} \mid k > \varphi(1) \text{ et } u_{\varphi 1)} \leqslant u_k\} \neq \varnothing$
On pose $\varphi(2) = \min(A_2)$. On a alors $\varphi(2) > \varphi(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\varphi(n)$ déjà construit avec $\varphi(n) > N$. On sait alors que

$$A_{n+1} = \{k \in \mathbb{N} \mid k > \varphi(n) \text{ et } u_{\varphi(n)} \leqslant u_k\} \neq \varnothing$$

On pose $\varphi(n+1) = \min(A_{n+1})$. Donc,

$$\begin{cases} \varphi(n+1) > \varphi(n) > N \\ u_{\varphi(n)} \leqslant u_{\varphi(n+1)} \end{cases}$$

On vient de construire une sous suite croissante majorée (car u est majorée) donc convergente.

□

11.5 Suites récurrentes

Définition: On dit que u est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants s'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

L'équation caractéristique associée est

$$(C) : z^2 = az + b \text{ avec } z \in \mathbb{C}$$

Proposition: Avec les notations précédentes,

1. Si (C) a 2 racines simples $r_1 \neq r_2$ alors

$$\exists (A, B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A{r_1}^n + B{r_2}^n$$

2. Si (C) a une racine double $r \in \mathbb{C}$ alors

$$\exists (A, B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)r^n$$

Preuve (Récurrence double)*:*

□

Proposition: avec les notations précédentes et avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

1. Si (C) a deux racines simples $r_1 \neq r_2$ alors

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A{r_1}^n + B{r_2}^n$$

2. Si (C) a une racine simple $r \in \mathbb{R}$ alors

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)r^n$$

3. Si (C) a deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_*^+$ et $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$$

□

Remarque:
Étude de $u_{n+1} = f(u_n)$

1. On choisit rapidement la fonction f (au moins le tableau de variation)

1'. (optionnel) on représente graphiquement la fonction f et la droite d'équation $y = x$ pour conjecturer sa limite

2. On utilise le tableau de variation pour vérifier que (u_n) est bien définie par récurrence

$$P(n) : \text{"}u_n \text{ existe et } u_n \in \mathscr{D}_f\text{"}$$

3. On étudie le signe de $f(x) - x$

4. On cherche les intervalles stables par f :

$$f(I) \subset I$$

les plus petits possible (ça permet de montrer que la suite est majorée (minorée) en particulier ceux sur lesquels $f(x) - x$ ne change pas de signe

4'. Donc on utilise le théorème de la limite monotone

4''. Sinon, on essaie l'inégalité (voir théorème) des accroissements finis :
Soit ℓ un point fixe de f : $f(\ell) = \ell$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| = M\,|u_n - \ell|$$

où M est un majorant de $|f|$
Si $0 \leqslant M \leqslant 1$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leqslant M^n\,|u_n - \ell| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

5. si (u_n) a une limite et si f continue alors $\lim(u_n)$ est une point fixe de f

Exemple: 1.

$$\begin{cases} u_{n+1} = \cos(u_n) \\ u_0 \in \left]0, 1\right[\end{cases}$$

x	0	1	$\frac{\pi}{2}$
f	1	$\searrow$	0

On pose $g : x \mapsto \cos(x) - x$ dérivable et
$\forall x \in [0, 1]\,, g'(x) = -\sin(x) - 1 \leqslant 0$

x	0	α	1
g	1	$\searrow$ 0 $\searrow$	$g(1) < 0$

x	0		α		1
f	1	$\searrow$	0	$\searrow$	
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1]\,, |f'(x)| &= |-\sin(x)| \\ &= \sin(x) \leqslant \sin(1) < 1\end{aligned}$$

$$\forall n, |u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \sin(1)\,|u_n - \alpha|$$

donc

$$\forall n, |u_n - \alpha| \leqslant \underbrace{\sin^n(1)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} |u_0 - \alpha|$$

Donc, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$

11.6 Comparaison de suites

Définition: Soient u et v deux suites réelles. On dit que u est <u>dominée</u> par v si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant M\,|v_n|$$

Dans ce cas, on note $u = O(v)$ ou $u_n = O(v_n)$ et on dit que "u est un grand o de v"

EXEMPLE:
En informatique, on dit qu'un alogirithme a une <u>complexité linéaire</u> si son temps d'éxécution est un $O(n)$ Par exemple, on calcule a^n

— Approche naïve Complexité linéaire $O(n)$

```
p ← 1
for i ∈ ⟦0, n − 1⟧ do
    p ← p × a
end for
return p
```

— Exponentiation rapide
On écrit n en binaire :

$$\begin{aligned} n &= \overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}^{(2)} \\ &= \sum_{i=0}^{k} a_i 2^i \end{aligned}$$

avec $(a_i) \in \{0,1\}^{k+1}$

$$\begin{aligned} a^n &= a^{\sum_{i=0}^{k} a_i 2^i} \\ &= \prod_{i=0}^{k} a^{a_i 2^i} \end{aligned}$$

Compléxité logarithmique $O(\log_2(n))$

```
s ← 0
p ← a
for i ∈ ⟦0, log_2(n)⟧ do
    p ← p × p
    if a[i] = 1 then
        s ← s + p
    end if
end for
return s
```

Proposition: O est une relation réfléctive et transitive.

Preuve: — Soit u une suite. On pose $M = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M\,|u_n|$$

Donc $u = O(u)$.

— Soient u, v, w trois suites telles que

$$\begin{cases} u = O(v) \\ v = O(w) \end{cases}$$

Soient $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ et $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{cases} \forall n \geqslant N_1, |u_n| \leqslant M_1\,|v_n| \\ \forall n \geqslant N_2, |v_n| \leqslant M_2\,|w_n| \end{cases}$$

Nécéssairement, $M_1 \geqslant 0$ et $M_2 \geqslant 0$.
Soit $N = \max(N_1, N_2)$.

$$\forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant M_1\,|v_n| \leqslant M_1 M_2\,|w_n|$$

Donc $u = O(w)$

□

Définition: Soient u et v deux suites. On dit que u est <u>négligeable</u> devant v si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \varepsilon\,|v_n|$$

Dans ce cas, on note $u = o(v)$ ou $u_n = o(v_n)$ ou on le lit "u est un petit o de v"

Proposition: o est une relation transitive, non-réfléctive

Preuve: — Soient u, v et w trois suites telles que

$$\begin{cases} u = o(v) \\ v = o(w) \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_1, |u_n| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\,|v_n|$$

Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N_2, |v_n| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\,|w_n|$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$, alors

$$\forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\,|v_n| \leqslant \underbrace{\sqrt{\varepsilon} \times \sqrt{\varepsilon}}_{\varepsilon}\,|w_n|$$

donc $u = o(w)$

— Soit u une suite tel qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, u_n > 0$$

On suppose que $u = o(u)$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \varepsilon\,|u_n|$$

On pose $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ alors

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n|$$

une contradiction

□

Proposition: Soient u et v deux suites.

— $o(u) + o(u) = o(u)$

— $v \times o(u) = o(uv)$

— $o(u) \times o(v) = o(uv)$

— $o(o(u)) = o(u)$

□

Définition: Soient u et v deux suites. On dit que u et v sont <u>équivalentes</u> si

$$u = v + o(v)$$

i.e.
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - v_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$$
Dans ce cas, on le note $u \sim v$

Proposition: $\sim$ est une relation d'équivalence □

Proposition: Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que v ne s'annule pas à partir d'un certain rang

1. $u = o(v) \iff \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ bornée
2. $u = o(v) \iff \dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
3. $u \sim v \iff \dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

□

Proposition (Suites de références)**:**

1. $\ln^\alpha(n) = o(n^\beta)$ avec $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$
2. $n^\beta = o(a^n)$ avec $\beta > 0$ et $a > 1$
3. $a^n = o(n!)$ avec $a > 1$
4. $n! = o(n^n)$

Lemme (Exercice 10 du TD)**:** Soit $u \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^{\mathbb{N}}$
Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell < 1$ avec $\ell \in \mathbb{R}$,
alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Preuve (de la proposition)*:*

1. par croissance comparée

2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{n^\beta}{a^n}$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^\beta \times \frac{1}{a} \\ &= \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{a} < 1\end{aligned}$$

Donc, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

3. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{a^n}{n!}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$$

donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

4. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} &= (n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= e^{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} \\ &= e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} \\ &= e^{n(-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})} \\ &= e^{-1+o(1)} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1} < 1\end{aligned}$$

donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

□

11.7 Suites complexes

Définition: Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que (u_n) converge vers ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

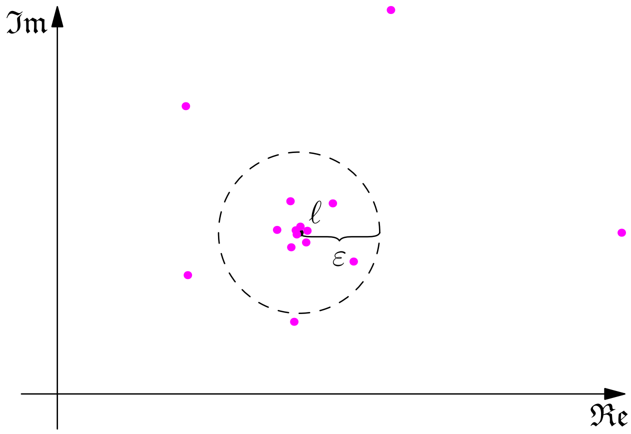


FIGURE 11.9 – Suite complexe convergente

Proposition: Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux limites de u alors $\ell_1 = \ell_2$

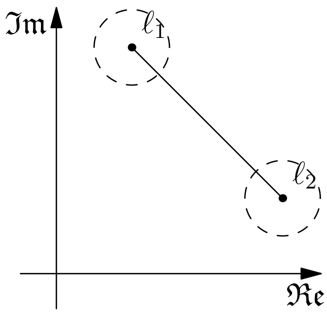


FIGURE 11.10 – Unicité de la limite de suites complexes

□

Proposition: Les limites de somme, produit, quotient de suites complexes respectent les mêmes lois que pour les suites réelles. □

Théorème: Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathfrak{Re}(\ell) \\ \mathfrak{Im}(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathfrak{Im}(\ell) \end{cases}$$

Preuve: $\Longrightarrow$ On suppose $u_n \to \ell$.
Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Or,

$$\forall n \geqslant N, \begin{cases} \mathfrak{Re}(u_n) - \mathfrak{Re}(\ell) = \mathfrak{Re}(u_n - \ell) \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \\ \mathfrak{Im}(u_n) - \mathfrak{Im}(\ell) = \mathfrak{Im}(u_n - \ell) \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \mathfrak{Re}(u_n) \to \mathfrak{Re}(\ell) \\ \mathfrak{Im}(u_n) \to \mathfrak{Im}(\ell) \end{cases}$$

$\Longleftarrow$ On suppose $\begin{cases} \mathfrak{Re}(u_n) \to \mathfrak{Re}(\ell) \\ \mathfrak{Im}(u_n) \to \mathfrak{Im}(\ell) \end{cases}$
Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \mathfrak{Re}(u_n) + i\mathfrak{Im}(u_n) \to \mathfrak{Re}(\ell) + i\mathfrak{Im}(\ell) = \ell$$

□

Proposition: Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.
Si $u_n \to \ell$ alors $|u_n| \to |\ell|$

Preuve:
On suppose $u_n \to \ell$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = \sqrt{\mathfrak{Re}^2(u_n) + \mathfrak{Im}^2(u_n)} \to \sqrt{\mathfrak{Re}^2(\ell) + \mathfrak{Im}^2(\ell)} = |\ell|$$

□

Proposition: Tous les résultats (sauf ceux avec des limites infinies !) concernant les suites extraites sont encore valables dans $\mathbb{C}$ y compris le théorème de Bolzano-Weierstrass (mais avec une autre preuve).

Définition: Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que u est <u>bornée</u> s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$$

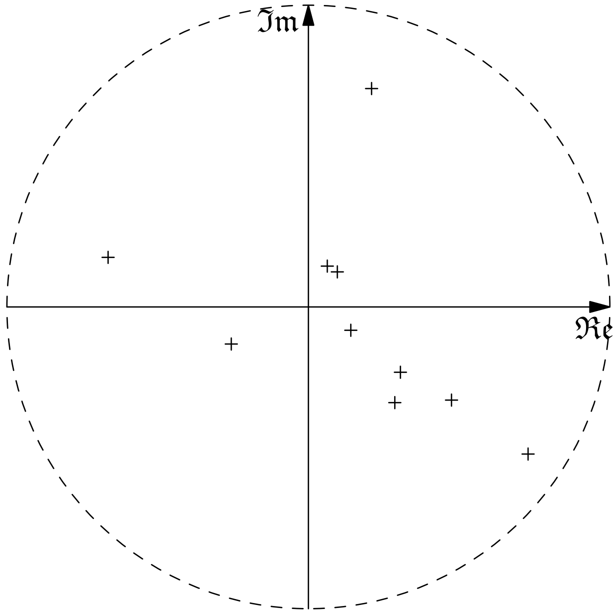


FIGURE 11.11 – Suite complexe bornée

Théorème (Bolzano Weierstrass)**:** Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ bornée. Il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ converge.

Preuve:
Soit $M \in \mathbb{R}^+$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$$
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, |\mathfrak{Re}(u_n)| \leqslant |u_n| \leqslant M$ Donc $(\mathfrak{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Donc, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(\mathfrak{Re}\left(u_{\varphi(n)}\right)\right)$ converge.
$$\forall n \in \mathbb{N}, \left|\mathfrak{Im}\left(u_{\varphi(n)}\right)\right| \leqslant \left|u_{\varphi(n)}\right| \leqslant M$$
donc $\left(\mathfrak{Im}(u_{\varphi(n)}\right)$ est bornée. Soit $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(\mathfrak{Im}\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)\right)$ converge. Or, $\left(\mathfrak{Re}\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)\right)$ est une sous suite de la suite convergente $\left(\mathfrak{Re}\left(u_{\varphi(n)}\right)\right)$ donc $\left(\mathfrak{Re}\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)\right)$ converge.
Donc, $\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)$ converge.
Comme $\varphi \circ \psi$ est strictement croissante, $\left(u_{\varphi(\psi(n))}\right)$ est une sous suite de (u_n) $\square$

11.8 Annexe

Proposition: Soit $f : I \to I$ continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$
alors $f(\ell) = \ell$ i.e. (ℓ est un point fixe de f)

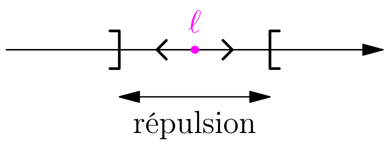
Preuve:
On suppose que (u_n) converge vers ℓ.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ car (u_{n+1}) est une sous suite de (u_n).

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

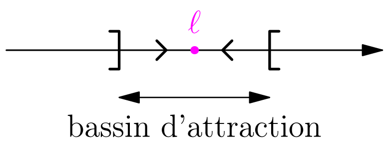
Comme f est continue alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$. Par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$ □

Remarque:
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
Soit $\ell \in \mathbb{R}$ un point fixe de f. Donc, $f(\ell) = \ell$.

$|f'(\ell)| > 1$:



$|f'(\ell)| < 1$:



Par contre, si $|f'(\ell)| = 1$, on ne sait pas.
Remarque (Suite arithético-géométrique):

$$(*) : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b = f(u_n)$$

Méthode 1

— On cherche v une suite constante solution de $(*)$:

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, v_n = C$$

donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, C = aC + b = f(C)$$

Si $a \neq 1 : C = \dfrac{b}{1-a}$

— Soit u qui vérifie $(*)$. On pose $w = u - v$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} &= u_{n+1} - v_{n+1} \\ &= au_n + b - av_n - b \\ &= a(u_n - v_n) \\ &= aw_n\end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = aw_n + 0$: équation homogène associée à $(*)$ (w_n) est géométrique donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 a^n$$

et donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = w_0 a^n + \frac{b}{1-a}$$

Méthode 2

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) &\longmapsto (u_{n+1} - au_n)\end{aligned}$$

φ morphisme de groupes additifs

$$\varphi(u) = (b) \iff u = v + w \text{ avec } w \in \mathrm{Ker}(\varphi)$$

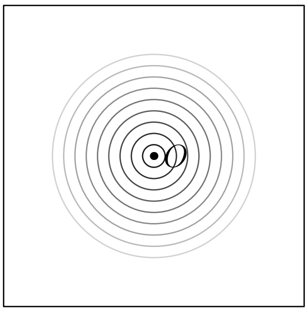
$$\begin{aligned}w \in \mathrm{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(w) = 0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - aw_n = 0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = aw_n\end{aligned}$$

Chapitre 12

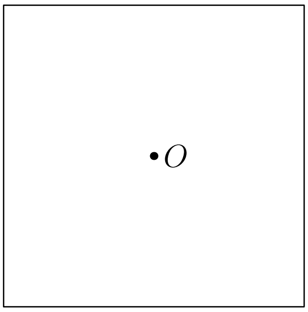
Structures algébriques usuelles

12.1 Groupes

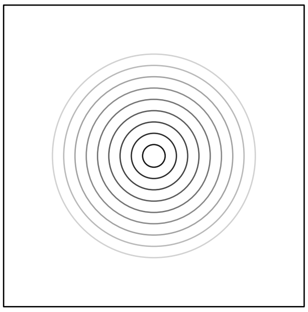
Principe de symétrie (Pierre Curie)
La symétrie des causes se retrouvent dans les effets.
On fait tomber un caillou dans un plan d'eau ce qui crée une onde qui se propage.

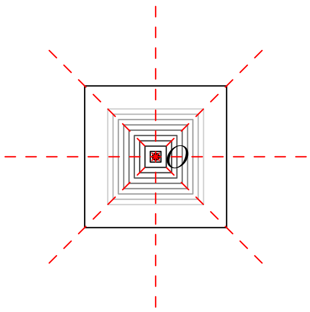


- Symétries des "causes"
  (conserver O en place)
  - translation de vecteur $\vec{0}$
  - rotations de centre O d'angle quelconque
  - symétries d'axe passant par O

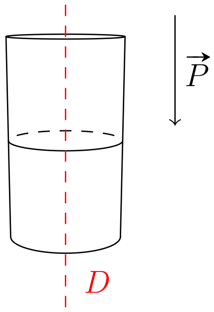


- Symétries des "effets"
  (conserver les ondes en place)
  - translation de vecteur $\overrightarrow{0}$
  - rotations de centre O d'angle quelconque
  - symétries d'axe passant par O

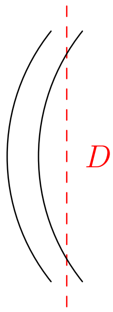




  - translation de vecteur $\overrightarrow{0}$
  - 4 rotations de centre O d'angle $0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}$
  - 4 symétries axiales
- Causes
  - translations de vecteur $\vec{u} \in \vec{D}$
  - rotations d'axe D



— <u>Effet</u>



Définition: Soit G un ensemble, muni d'une loi de composition <u>interne</u> $\diamond$.
On dit que $(G, \diamond)$ est un <u>groupe</u> si :
- $\diamond$ est associative
- $\diamond$ a un neutre $e \in G$
- $\forall x \in G, \exists y \in G, x \diamond y = y \diamond x = e$

Exemple ((À connaître)):
1. E un ensemble. $S(E)$ l'ensemble des bijections de E dans E.
   $(S(E), \circ)$ est un groupe appelé <u>groupe symétrique</u> de E.
   Si, $E = [\![1, n]\!]$, alors noté $S(E)$ est noté S_n (ou parfois $\mathfrak{S}_n$)
2. $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe mais $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe.
3. $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ sont des groupes
4. $(\mathbb{R}, \times)$ n'est pas un groupe car 0 n'a pas d'inverse.
   $(\mathbb{Q}_*, \times)$, $(\mathbb{R}_*, \times)$, $(\mathbb{C}_*, \times)$ sont des groupes.
   $(\mathbb{Z}_*, \times)$ n'est pas un groupe.
5. $(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), +)$ est un groupe
   $(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \times)$ n'est pas un groupe

Définition: On dit que $(G, \diamond)$ est un groupe <u>commutatif</u> ou <u>abélien</u> si c'est un groupe et $\diamond$ est une loi commutative.

Définition: Soit $(G, \cdot)$ un groupe (d'élément neutre e) et $H \subset G$. On dit que H est un sous groupe de G si

1. $\forall (x,y) \in H^2, x \cdot y \in H$
2. $e \in H$
3. $\forall x \in H, x^{-1} \in H$

Proposition: Soit H un sous groupe de $(G, \cdot)$. Alors, $(H, \cdot)$ est un groupe. □

Proposition: Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $H \subset G$.

$$H \text{ est un sous groupe de } G \iff \begin{cases} \forall (x,y) \in H, x \cdot y^{-1} \in H \\ H \neq \varnothing \end{cases}$$

Preuve: " $\implies$ " $e \in H$ donc $H \neq \varnothing$.
Soit $(x,y) \in H^2$.
$y \in H$ donc $y^{-1} \in H$.
$x \in H$ donc $x \cdot y^{-1} \in H$.

" $\impliedby$ " $H \neq \varnothing$.
Soit $a \in H$, $(a,a) \in H^2$ donc $a \cdot a^{-1} \in H$ donc $e \in H$.
Soit $x \in H$, $(e,x) \in H^2$ donc $e \cdot e^{-1} \in H$ donc $x^{-1} \in H$.
Soit $(x,y) \in H^2$. Comme $y \in H$, $y \in y^{-1} \in H$ donc $(x, y^{-1}) \in H^2$.
Donc, $x \cdot \left(y^{-1}\right)^{-1} \in H$.
Donc, $x \cdot y \in H$.

□

Exemple:
$2\mathbb{Z}$ est un sous groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
En effet,

— $2 \in 2\mathbb{Z}$ donc $2\mathbb{Z} \neq \varnothing$

— Soit $(x,y) \in (2\mathbb{Z})^2$, $\begin{cases} x \equiv 0 \ [2] \\ y \equiv 0 \ [2] \end{cases}$

donc $x - y \equiv 0 \ [2]$ donc $x - y \in 2\mathbb{Z}$

Proposition: Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $(H_i)_{i \in I}$ une famille non vide de sous groupes de G. Alors, $\displaystyle\bigcap_{i \in I} H_i$ est un sous groupe de G.

Preuve:
On sait que $\forall i \in I, e \in H_i$ et $I \neq \varnothing$
Donc, $e \in \bigcap\limits_{i \in I} H_i$ donc $\bigcap\limits_{i \in I} H_i \neq \varnothing$
Soit $(x, y) \in \left(\bigcap\limits_{i \in I} H_i\right)^2$.

$$\forall i \in I, \begin{cases} x \in H_i \\ y \in H_i \end{cases}$$

donc,

$$\forall i \in I, x \cdot y^{-1} \in H_i$$

donc

$$x \cdot y^{-1} \in \bigcap_{i \in I} H_i$$

□

Proposition: Soit $(G, \cdot)$ un groupe.
$\{e\}$ et G sont des sous groupes de G

Remarque:
Une réunion de sous groupes n'est pas nécessairement un sous groupe.

$$(G, \cdot) = (\mathbb{Z}, +)$$

$2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} = A$
$2 \in A$ et $3 \in A$ mais $2 + 3 = 5 \notin A$.
Donc, A n'est pas un sous groupe de $\mathbb{Z}$

Proposition
Définition: Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $A \subset G$. Alors,

$$\bigcap_{\substack{H \text{ sous groupe de } G \\ A \subset H}} H$$

est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous groupe de G qui contient A.
On dit que c'est le <u>sous groupe engendré</u> par A et on le note $\langle A \rangle$

Preuve:
On pose $\mathscr{G} = \{H \in \mathscr{P}(G) \mid H \text{ sous groupe contenant } A\}$.

$G \in \mathscr{G}$ donc $\mathscr{G} \neq \varnothing$ donc $\bigcap\limits_{H \in \mathscr{G}} H$ est un sous groupe de G.
Soit $a \in A$. Alors

$$\forall H \in \mathscr{G}, a \in A \subset H$$

et donc $a \in \bigcap\limits_{H \in \mathscr{G}} H$.
Donc, $A \subset \bigcap\limits_{H \in \mathscr{G}} H$.
Soit H un sous groupe de G qui contient A.
Alors, $H \in \mathscr{G}$ alors $H \supset \bigcap\limits_{H \in \mathscr{G}} H$ □

Exemple:
$(G, \cdot) = (\mathbb{Z}, +)$
$A = 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$
$\langle A \rangle = \mathbb{Z}$ (d'après le théorème de Bézout).
On généralise $\langle a\mathbb{Z} \cup b\mathbb{Z} \rangle = (a \wedge b)\mathbb{Z}$

Définition: Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $A \subset G$.
On dit que A est une partie génératrice de G ou que A engendre G si $G = \langle A \rangle$

Exemple (Rubik's cube):

Exemple:
Soit $(G, \cdot)$ un groupe.

— $\langle \varnothing \rangle = \{e\}$
  $\langle G \rangle = G$
— Soit $a \in G \setminus \{e\}$.
  $\langle a \rangle = \langle \{a\} \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
— Soit $a \neq b$ deux éléments de $G \setminus \{e\}$

$$\begin{aligned}\langle \{a, b\} \rangle = \{x \in G \mid \exists n \in \mathbb{N}, \exists \left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right) \in \{a, b\}^n, \\ \exists \left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\right) \in \{-1, 1\}^n, x = a_1^{\varepsilon_1} \times a_2^{\varepsilon_2} \times \ldots \times a_n^{\varepsilon_n}\}\end{aligned}$$

Remarque (Notation):
Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $a \in G$.
Pour $n \in \mathbb{N}_*$, on pose $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fois}}$.
On pose $a^0 = e$ et pour $n \in Z_*^-$,

$$a^n = \left(a^{-1}\right)^{-n}$$

Remarque:
Si le groupe est noté additivement. On note na $(n \in \mathbb{Z}, a \in G)$ à la place de a^n

Définition: On dit qu'un groupe $(G, \cdot)$ est monogène s'il existe $a \in G$ tel que

$$G = \langle a \rangle$$

On dit alors que a est un générateur de G

Exemple:
$(\mathbb{Z}, +)$ est engendré par 1.
$(2\mathbb{Z}, +)$ est engendré par 2

Définition: Un groupe monogène fini est cyclique

Proposition: Soit $(G, \cdot)$ un groupe monogène fini. Soit a un générateur de G. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$G = \{e, a, a^2, \dots a^{k-1}\}$$

Preuve:
G est fini donc il existe $p < q$ tels que $a^p = a^q$. On a alors $e = a^{q-p}$.
On pose alors, $k = \min \{n \in \mathbb{N}_* \mid a^n = e\}$.
Soit $x \in G = \langle a \rangle$. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = a^n$. On fait la division de n par k

$$\begin{cases} n = kq + r \\ q \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant r < k \end{cases}$$

$$x = a^n = a^{kq+r} = \left(a^k\right)^q \times a^r = a^r$$

On a prouvé

$$G \subset \left\{e, a, \dots, e^{k-1}\right\}$$

On sait déjà que $\left\{e, a, \dots, a^{k-1}\right\} \subset G$. □

Exemple:
$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe cyclique :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}\}$$

Définition: Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $a \in G$.
Si $\langle a \rangle$ est fini, le cardinal de $\langle a \rangle$ est appelé ordre de a : c'est le plus petit entier strictement positif n tel que $a^n = e$

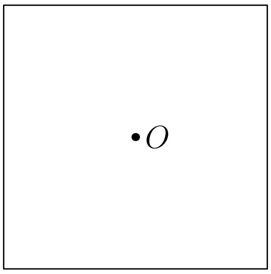
Exemple:
$(S(\mathbb{C}_*), \circ)$ est un groupe

$z \mapsto \overline{z}$ est d'ordre de 2
$z \mapsto -z$ est d'ordre de 2
$z \mapsto \dfrac{1}{z}$ est d'ordre de 2

EXEMPLE: — $G_1 = (\mathbb{U}_4, \times)$ où

$$\begin{aligned}\mathbb{U}_4 &= \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\} \\ &= \{1, i, -1, -i\}\end{aligned}$$

$y \backslash x$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1



— G_2 l'ensemble des rotations planes qui laissent globalement invariant un carré.

$$G_2 = \left\{id, \rho_{\frac{\pi}{2}}, \rho_\pi, \rho_{\frac{3\pi}{2}}\right\}$$

$y \backslash x$	id	$\rho_{\frac{\pi}{2}}$	ρ_π	$\rho_{\frac{3\pi}{2}}$
id	id	$\rho_{\frac{\pi}{2}}$	ρ_π	$\rho_{\frac{3\pi}{2}}$
$\rho_{\frac{\pi}{2}}$	$\rho_{\frac{\pi}{2}}$	ρ_π	$\rho_{\frac{3\pi}{2}}$	id
ρ_π	ρ_π	$\rho_{\frac{3\pi}{2}}$	id	$\rho_{\frac{\pi}{2}}$
$\rho_{\frac{3\pi}{2}}$	$\rho_{\frac{3\pi}{2}}$	id	$\rho_{\frac{\pi}{2}}$	ρ_π

—

$$G_3 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

	$(\overline{0}, \overline{0})$	$(\overline{0}, \overline{1})$	$(\overline{1}, \overline{0})$	$(\overline{1}, \overline{1})$
$(\overline{0}, \overline{0})$	$(\overline{0}, \overline{0})$	$(\overline{0}, \overline{1})$	$(\overline{1}, \overline{0})$	$(\overline{1}, \overline{1})$
$(\overline{0}, \overline{1})$	$(\overline{0}, \overline{1})$	$(\overline{0}, \overline{0})$	$(\overline{1}, \overline{1})$	$(\overline{1}, \overline{0})$
$(\overline{1}, \overline{0})$	$(\overline{1}, \overline{0})$	$(\overline{1}, \overline{1})$	$(\overline{0}, \overline{0})$	$(\overline{0}, \overline{1})$
$(\overline{1}, \overline{1})$	$(\overline{1}, \overline{1})$	$(\overline{1}, \overline{0})$	$(\overline{0}, \overline{1})$	$(\overline{0}, \overline{0})$

Définition: Soient $(G_1, \cdot)$ et $(G_2, *)$ deux groupes et $f : G_1 \to G_2$. On dit que f est un (homo)morphisme de groupes si

$$\forall (x,y) \in G_1, f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$$

Exemple:
$\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_*^+, \times)$ est un morphisme de groupes

Proposition: Avec les notations précédentes,
- l'image directe d'un sous groupe de G_1 est un sous groupe de G_2
- l'image réciproque d'un sous groupe de G_2 est un sous groupe de G_1

Preuve:
- Soit H_1 un sous groupe de G_1.
  $e_1 \in H_1$ donc $f(e_1) \in f(H_1)$ donc $H_1 \neq \varnothing$ Soient $x \in f(H_1)$ et $y \in f(H_2)$.
  On pose $\begin{cases} x = f(u) \text{ avec } u \in H_1 \\ y = f(v) \text{ avec } v \in H_1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} x * y^{-1} &= f(u) * f(v)^{-1} \\ &= f(u) * f\left(v^{-1}\right) \\ &= f\left(u \cdot v^{-1}\right) \end{aligned}$$

  $\begin{cases} u \in H_1 \\ v \in H_1 \end{cases}$ donc $u \cdot v^{-1} \in H_1$ donc $x*^{-1} \in f(H_1)$
- Soit H_2 un sous groupe de G_2.

$$(x,y) \in f^{-1}\left(H_2\right)^2$$

$$\begin{aligned} x \cdot y^{-1} \in f^{-1}(H_2) &\iff f\left(x \cdot y^{-1}\right) \in H_2 \\ &\iff f(x) * f\left(y^{-1}\right) \in H_2 \\ &\iff f(x) * f(y)^{-1} \in H_2 \end{aligned}$$

  Or, $\begin{cases} f(x) \in H_2 \\ f(y) \in H_2 \end{cases}$
  Comme H_2 est un sous groupe de G_2,

$$f(x) * f(y)^{-1} \in H_2$$

et donc,
$$x \cdot y^{-1} \in f^{-1}(H_2)$$
□

Lemme:
$$\begin{cases} f(e_1) = e_2 \\ \forall u \in G_1, f\left(u^{-1}\right) = (f(u))^{-1} \end{cases}$$

Preuve:
$$f(e_1) = f(e_1 \cdot e_1) = f(e_1) * f(e_1)$$
On multiplie par $f(e_1)^{-1}$ (possible car G_2 est un groupe) et on trouve $f(e_1) = e_2$.
Soit $u \in G_1$.
$$f(u) * f(u^{-1}) = f(u \cdot u^{-1}) = f(e_1) = e_2 f(u^{-1}) * f(u) = f(u^{-1} \cdot u) = f(e_1) = e_2$$
Donc, $f\left(u^{-1}\right) = (f(u))^{-1}$ □

Corollaire: Soit $f : (G_1, \cdot) \to (G_2, *)$ un morphisme de groupes. Alors, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous groupe de G_2.
$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in G_1 \mid f(x) = e_2\} = f^{-1}(\{e_2\})$$
est un sous groupe de G_1. □

Théorème: Avec les notations précédentes,
$$f \text{ injective } \iff \mathrm{Ker}(f) = \{e_1\}$$

Preuve: " $\Longrightarrow$ " On suppose f injective.
$$\begin{aligned} f(e_1) = e_2 &\text{ donc } e_1 \in \mathrm{Ker}(f) \\ &\text{donc } \{e_1\} \subset \mathrm{Ker}(f) \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. On a alors $f(x) = e_2 = f(e_1)$
Comme f injective, $x = e_1$.
" $\Longleftarrow$ " On suppose $\mathrm{Ker}(f) = \{e_1\}$

Soient $\begin{cases} x \in G_1 \\ y \in G_1 \end{cases}$. On suppose $f(x) = f(y)$

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\implies f(x) * f(y)^{-1} = e_2 \\ &\implies f(x) * f\left(y^{-1}\right) = e_2 \\ &\implies f\left(x \cdot y^{-1}\right) \qquad\qquad \implies x \cdot y^{-1} \in \mathrm{Ker}(f) = \{e_1\} \\ &\implies x \cdot y^{-1} = e_1 \\ &\implies x = y \end{aligned}$$

Donc, f est injective

□

Exemple ((équation diophantienne)):

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

On trouve une solution particulière (Bézout) : $(-1, 1) = (x_0, y_0)$

$$\begin{aligned} 2x + 5y = 1 &\iff 2x + 5y = 2x_0 + 5y_0 \\ &\iff 2(x - x_0) + 5(y - y_0) = 0 \\ &\iff 2(x - x_0) = 5(y_0 - y) \\ &\vdots \quad \text{(Gauss)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}^2 &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (x, y) &\longmapsto 2x + 5y \end{aligned}$$

$(\mathbb{Z}^2, +)$ est un groupe avec $+$ qui est l'addition composante par composante.
f est un morphisme de groupes.

$$\begin{aligned} f(x, y) = 1 = f(x_0, y_0) &\iff f(x, y) - f(x_0, y_0) = 0 \\ &\iff f(x - x_0, y - y_0) = 0 \\ &\iff (x - x_0, y - y_0) \in \mathrm{Ker}(f) \end{aligned}$$

Théorème: Soit $f : (G_1, \cdot) \to (G_2, *)$ un morphisme de groupes, $y \in G_2$ et $(\mathscr{E})$ l'équation

$$f(x) = y$$

d'inconnue $x \in G_1$.
Si $y \notin \mathrm{Im}(f)$, alors $(\mathscr{E})$ n'a pas de solution.
Sinon, soit $x_0 \in G_1$ tel que $f(x_0) = y$ (x_0 est une solution particulière de

$(\mathscr{E})$)

$$f(x) = y \iff \exists h \in \mathrm{Ker}(f), x = x_0 \cdot h$$

Preuve:

$$\begin{aligned}
f(x) = y &\iff f(x) = f(x_0) \\
&\iff f(x_0)^{-1} * f(x) = e_2 \\
&\iff f\left(x_0^{-1}\right) * f(x) = e_2 \\
&\iff f\left(x_0^{-1} \cdot x\right) = e_2 \\
&\iff x_0^{-1} \cdot x \in \mathrm{Ker}(f) \\
&\iff \exists h \in \mathrm{Ker}(f), x_0^{-1} \cdot x = h \\
&\iff \exists h \in \mathrm{Ker}(f), x = x_0 \cdot h
\end{aligned}$$

□

Proposition: Soient $f : G_1 \to G_2$ et $g : G_2 \to G_3$ deux morphisme de groupes. Alors, $g \circ f$ est un morphisme de groupes.

Preuve:
Soient $x \in G_1$ et $y \in G_2$.

$$\begin{aligned}
g \circ f(x \cdot y) &= g(f(x) * f(y)) = g(f(x)) \times g(f(y)) \\
&= g \circ f(x) \times g \circ f(y)
\end{aligned}$$

□

Définition: Soit G un groupe.

— Un <u>endomorphisme</u> de G est un morphisme de groupes de G dans G.

— Un <u>isomorphisme</u> de G dans H un morphisme de groupes $f : G \to H$ bijectif.

— Un <u>automorphisme</u> de G est un endomorphisme de G bijectif.

Proposition: Soit $f : G \to H$ un isomorphisme de groupes.
Alors, $f^{-1} : H \to G$ est aussi un isomorphisme.

Preuve:
Soit $(x, y) \in H^2$. On pose $\begin{cases} f(u) = x, u \in G \\ f(v) = y, v \in G \end{cases}$

$$\begin{aligned} f\left(f^{-1}\left(x \cdot y^{-1}\right)\right) &= x \cdot y^{-1} \\ &= f(u) \cdot f(v)^{-1} \\ &= f\left(u \cdot v^{-1}\right) \end{aligned}$$

Comme f injective,

$$f^{-1}\left(x \cdot y^{-1}\right) = u \cdot v^{-1} = f^{-1}(x)\left(f^{-1}(y)\right)^{-1}$$

□

Corollaire: On note $\text{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G.
$\text{Aut}(G)$ est un sous groupe de $(S(G), \circ)$.

Définition: Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $g \in G$. L'application

$$\begin{aligned} c_g : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

est appelée conjugaison par g. On dit aussi que c'est un automorphisme intérieur.

Proposition: Avec les notations précédentes,

$$c_g \in \text{Aut}(G)$$

Preuve:
Soient $x \in G$ et $y \in G$.

$$c_g(xy) = g \cdot xy \cdot g^{-1}$$
$$c_g(x) \cdot c_g(y) = gxg^{-1}gyg^{-1} = gxyg^{-1} = c_g(xy)$$

Donc, c_g est un morphisme de groupes.

De plus,
$$\forall x \in G, c_{g^{-1}} \circ c_g(x) = g^{-1}\left(gxg^{-1}g\right) = x$$

Donc, $c_{g^{-1}} \circ c_g = id_G$.

De même, $c_g \circ c_{g^{-1}} = id_G$
Donc, c_g bijective et $(c_g)^{-1} = c_{g^{-1}}$ □

Corollaire:

$$\forall x \in G, \forall n \in \mathbb{Z}, c_g(x^n) = (c_g(x))^n$$

□

Proposition: L'application

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathrm{Aut}(G) \\ g &\longmapsto c_g \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes.

Preuve:
Soient $(g,h) \in G^2$.

$$\begin{aligned} \forall x \in G, c_g \circ c_h(x) &= g\left(hxh^{-1}\right)g^{-1} \\ &= (gh)x(gh)^{-1} \\ &= c_{gh}(x) \end{aligned}$$

Donc, $c_g \circ c_h = c_{gh}$ □

Proposition (Rappel)**:**

$$\forall g, h \in G, (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$$

Preuve:

$$\begin{aligned} (gh)\left(h^{-1}g^{-1}\right) &= e \\ \left(h^{-1}g^{-1}\right)(gh) &= e \end{aligned}$$

□

Proposition
Définition: Soient $(G_1, *)$ et $(G_2, *)$ deux groupes. On définit une loi sur $G_1 \times G_2$ en posant

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$$

Alors, $G_1 \times G_2$ est un groupe pour cette loi appelée groupe produit

Preuve: — Soient $(x_1, y_1) \in {G_1}^2$ et $(x_2, y_2) \in {G_2}^2$.
On sait que $x_1 * y_1 \in G_1$ et que $x_2 * y_2 \in G_2$.
Donc, $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2) \in G_1 \times G_2$

□

12.2 Anneaux

Définition: Un anneau $(A, +, \times)$ est un ensemble A muni de deux lois de compositions internes notées $+$ et $\times$ vérifiant

1. $(A, +)$ est un groupe commutatif (son neutre est noté 0_A)
2. $(A, \times)$ est un monoïde
   (a) $\times$ est associative
   (b) $\times$ a un neutre $1_A \in A$
3. distributivité à gauche et à droite :

$$\forall (a, b, c) \in A^3, \begin{cases} a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c) \\ (b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a) \end{cases}$$

Remarque (Convention):
Soit $(A, +, \times)$ un anneau.
On convient que la multiplication est prioritaire sur l'addition.

$$(a \times b) + (a \times c) = a \times b + a \times c$$

et l'exponentiation est prioritaire sur la multiplication ($n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} a \times b^n &= a \times (\underbrace{b \times b \times \cdots \times b}_{n \text{ fois}}) \\ &\neq (a \times b)^n \end{aligned}$$

Proposition: Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Alors, 0_A est absorbant

$$\forall a \in A, a \times 0_A = 0_A \times a = 0_A$$

Preuve:
Soit $a \in A$. On pose $b = a \times 0_A \in A$.

$$\begin{aligned} b = a \times 0_A &= a \times (0_A + 0_A) = a \times 0_A + a \times 0_A \\ &= b + b \ (= 2b) \end{aligned}$$

Donc,

$$-b + b = -b + b + b$$

donc $0_A = b$
De même, $0_A \times a = 0_A$. □

REMARQUE:
On peut imaginer $\begin{cases} a \times b = 0_A \\ a \neq 0_A \\ b \neq 0_A \end{cases}$

EXEMPLE: — $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau

$$\begin{cases} \overline{2} \times \overline{2} = \overline{0} & \text{car } 4 \equiv 0 \ [4] \\ \overline{2} \neq \overline{0} & \text{car } 2 \not\equiv 0 \ [4] \end{cases}$$

— $(\mathscr{M}_2(\mathbb{C}), +, \times)$ est un anneau (non commutatif)

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_A \\ A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Définition: On dit qu'un anneau $(A, +, \times)$ est <u>intègre</u> si

$$\forall (a, b) \in A^2, (a \times b = 0_A \implies a = 0_A \text{ ou } b = 0_A)$$

EXEMPLE: — $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est intègre

— $\forall p$ premier, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ est intègre (car tout élément non nul de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est inversible donc simplifiable)

EXEMPLE:

Soit $(A, +, \times)$ un anneau et $(a, b) \in A^2$.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\times(a+b)\\ &= (a+b)\times a + (a+b)\times b\\ &= a^2 + b\times a + a\times b + b^2\end{aligned}$$

Si a et b commutent, alors, $a \times b = b \times a$ et donc $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)\times(a+b)\times(a+b)\\ &= a^3 + a^2\times b + a\times b\times a + b\times a^2\\ &+ b^2\times a + b\times a\times b + a\times b^2 + b^3\end{aligned}$$

Si a et b commutent,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Proposition: Soient $(A, +, \times)$ un anneau, $(a, b) \in A^2$, $n \in \mathbb{Z}$. Alors,

$$n(a\times b) = (na)\times b = a\times(nb)$$

Preuve: — Évident si $n = 0$

— On suppose $n > 0$.

$$\begin{aligned}(n(a\times b) &= \underbrace{a\times b + \cdots + a\times b}_{n \text{ fois}}\\ &= \sum_{k=1}^{n}(a\times b)\\ &= a\times\sum_{k=1}^{n} = a\times(nb)\\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} a\right)\times b = (na)\times b\end{aligned}$$

— On suppose $n < 0$. On pose $n = -p$ avec $p = \mathbb{N}_*$.

$$\begin{aligned}n(a\times b) &= (-p)(a\times b) = -\left(p(a\times b)\right)\\ &= -\left((pa)\times b\right) = (-p)a\times b = (na)\times b\\ &= -\left(a\times(pb)\right) = a\times(-pb) = a\times(nb)\end{aligned}$$

En effet,

$$\forall (a', b') \in A^2 (-a') \times b' + a' \times b' = (-a' + a') \times b' = 0_A \times b' = 0_A$$

donc $-(a' \times b') = (-a') \times b'$

$\square$

Théorème (Formule du binôme de Newton)**:** Soient $(A, +, \times)$ un anneau, $(a, b) \in A^2$, $n \in \mathbb{N}$.
Si a et b commutent alors

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Preuve (par récurrence sur n)*:*

$\square$

Proposition: Soient $(A, +, \times)$ un anneau, $(a, b) \in A^2$ et $n \in \mathbb{N}_*$.
Si a et b commutent, alors

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

$\square$

Proposition: On note $A^\times$ l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau $(A, +, \times)$.
$(A^\times, \times)$ est un groupe. $\square$

Exemple:
— $\mathbb{Z}^\times = \{-1, 1\}$
— $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})^\times = GL_n(\mathbb{C})$
— $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times = \{\overline{1}, \overline{3}\}$

Définition: Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif.

1. Soient $(a, b) \in A^2$. On dit que a divise b s'il existe $k \in A$ tel que $b = a \times k$. On dit aussi que a est un diviseur de b et que b est un multiple de a.
2. On dit que a et b sont associés s'il existe $k \in A^\times$ tel que $ak = b$ (dans ce cas, $a \mid b$ et $b \mid a$)

REMARQUE:
Le théorème des deux carrés peut se démontrer en exploitant les propriétés arithmétiques de l'anneau $(Z[i], +, \times)$ où $Z[i] = \{a + ib \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$.
$\mathbb{Z}[i]^{\times} = \{1, -1, i, -i\}$

Théorème des deux carrés :

1. Soit p un nombre premier.
$$\exists (a,b) \in \mathbb{N}^2, p = a^2 + b^2 \iff p \equiv 1 \ [4]$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}_*$, $n = \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{\alpha(p)}$
$$\exists (a,b) \in \mathbb{N}^2, n = a^2 + b^2 \iff \forall p \in \mathscr{P} \text{ tel que } \alpha(p) \neq 0, p \equiv 1 \ [4]$$

Définition: Soit $(A, +, \times)$ un anneau et $B \subset A$. On dit que B est un sous anneau de A si

1. B est un sous groupe de $(A, +)$
2. $\forall (a,b) \in B^2, a \times b \in B$
3. $1_A \in B$

EXEMPLE:
$Z[i]$ est un sous anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$

Proposition: Soit $(A, +, \times)$ un anneau et B un sous anneau de A. Alors, $(B, +, \times)$ est un anneau. □

EXERCICE (Exercice à connaître):
Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Le centre de A est
$$Z(A) = \{x \in A \mid \forall a \in A, a \times x = x \times a\}$$
$Z(A)$ est un sous anneau de A.

Proposition: Soit $(A, +, \times)$ un anneau.
Si $0_A = 1_A$ alors $A = \{0_A\}$. On dit alors que A est l'anneau nul.

Preuve:
Soit $a \in A$.
$$a = a \times 1_A = a \times 0_A = 0_A$$
□

Définition: Soient $(A, +, \times)$ et $(B, +, \times)$ deux anneaux (les lois notés de la même façon mais ne sont pas forcément les mêmes !).
Soit $f : A \to B$. On dit que f est un <u>(homo)morphisme d'anneaux</u> si

1. $\forall (a,b) \in A^2, f(a+b) = f(a) + f(b)$
2. $\forall (a,b) \in A^2, f(a \times b) = f(a) \times f(b)$
3. $f(1_A) = 1_B$

Proposition: Avec les notations précédentes, **si** $a \in A^\times$ alors $f(a) \in B^\times$ et dans ce cas,

$$f(a)^{-1} = f\left(a^{-1}\right)$$

Preuve:
On suppose $a \in A^\times$.

$$\begin{cases} f\left(a^{-1}\right) \times f(a) = f\left(a^{-1} \times a\right) = f(1_A) = 1_B \\ f(a) \times f\left(a^{-1}\right) = f\left(a \times a^{-1}\right) = f(1_A) = 1_B \end{cases}$$

Donc, $f(a) \in B^\times$ et $f(a)^{-1} = f\left(a^{-1}\right)$ □

Définition: Soient $(A, +, \times)$ et $(B, +, \times)$ deux anneaux et $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux.
On dit que f est un

- <u>isomorphisme d'anneaux</u> si f est bijective
- <u>endomorphisme d'anneaux</u> si $\begin{cases} A = B \\ + = + \\ \times = \times \end{cases}$
- <u>automorphisme d'anneaux</u> si f est à la fois un isomorphisme et un endomorphisme d'anneaux

Exemple:

1. Soit $a \in \mathbb{Z}$ et
$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto ax \end{aligned}$$
f endomorphisme d'anneaux $\iff a = 1$
2. $$\begin{aligned} f : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ A &\longmapsto A^2 \end{aligned}$$
f n'est pas un morphisme d'anneaux car
$$(A+B)^2 \neq A^2 + B^2$$

3.
$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \overline{z} \end{aligned}$$
est un automorphisme d'anneaux

4.
$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$
f est un morphisme d'anneaux mais ce n'est pas un endomorphisme.

5.
$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ k &\longmapsto \overline{k} \end{aligned}$$
f est un morphisme d'anneaux surjectif.

Proposition: La composée de deux morphismes d'anneaux est un morphisme d'anneaux. □

Proposition: La réciproque d'un isomorphisme d'anneaux est un isomorphisme d'anneaux. □

Proposition: L'ensemble des automorphismes d'anneaux de A est un sous groupe de $(S(A), \circ)$. □

Proposition: L'image directe ou réciproque d'un sous anneau par un morphisme d'anneaux est un sous anneaux.

Définition: Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Le <u>noyau</u> de f est
$$\operatorname{Ker}(f) = \{a \in A \mid f(a) = 0_B\}$$

Proposition: Avec les notations précédents,
$$f \text{ injective} \iff \operatorname{Ker}(f) = \{0_A\}$$
□

Remarque:
$\mathrm{Ker}(f)$ n'est pas un sous anneau en général (car $1_A \notin \mathrm{Ker}(f)$ sauf si $A = \{0_A\}$)

Définition: Soit $(A, +, \times)$ un anneau et $a \in A \setminus \{0_A\}$.
On dit que a est un diviseur de zéro s'il existe $b \in A \setminus \{0_A\}$ tel que $a \times b = b \times a = 0_A$

Proposition: Les diviseurs de zéro ne sont pas inversibles. □

Exemple:
$A = \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$
$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un diviseur de zéro
car $M \times M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

12.3 Corps

Exemple (Problème): — avec $A = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, résoudre $\overline{x}^2 = \overline{0}$

$\overline{x}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{x}^2$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	7	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

On a trouvé 3 solutions : $\overline{0}$, $\overline{3}$, $\overline{6}$.

— $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$

$\overline{x}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{x}^2$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$

$\overline{x}^2 = 7$ a 4 solutions : $\overline{1}, \overline{7}, \overline{3}$, et $\overline{5}$

— $A = \mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\}$
$i^2 = j^2 = k^2 = -1$

$$\begin{array}{ccc} ij = k & jk = i & ji = j \\ ji = -k & kj = -i & ik = -j \end{array}$$

Dans cet anneau, -1 a 6 racines !

Définition: Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un ensemble muni de deux lois de composition internes. On dit que c'est un corps si

1. $(\mathbb{K}, \times)$ est un groupe abélien
2. $(\mathbb{K}, \times)$ est un monoïde commutatif
3. $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0_\mathbb{K}\}, \exists y \in \mathbb{K}, xy = 1_\mathbb{K}$
4. $0_\mathbb{K} \neq 1_\mathbb{K}$

Exemple: — $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps
— $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps
— $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps

— $(\mathbb{Z}, +, \times)$ n'est pas un corps

Proposition: $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps si et seulement si n est premier.

Preuve:

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \left\{\overline{k} \mid k \wedge n = 1\right\}$$

□

Proposition: Tout corps est un anneau intègre.

Preuve:
Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps. Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $a \times b = 0_\mathbb{K}$.
On suppose $a \neq 0_\mathbb{K}$. Alors, a est inversible et donc

$$b = a^{-1} \times a \times b = a^{-1} \times 0_\mathbb{K} = 0_\mathbb{K}$$

□

Exemple:
Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps.
Résoudre

$$\begin{cases} x^2 = 1_\mathbb{K} \\ x \in \mathbb{K} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 = 1_\mathbb{K} &\iff x^2 - 1_\mathbb{K} = 0_\mathbb{K} \\ &\iff (x - 1_\mathbb{K})(x + 1_\mathbb{K}) = 0_\mathbb{K} \\ &\iff x - 1_\mathbb{K} = 0_\mathbb{K} \text{ ou } x + 1_\mathbb{K} = 0_\mathbb{K} \\ &\iff x = 1_\mathbb{K} \text{ ou } x = -1_\mathbb{K} \end{aligned}$$

Il y a au plus 2 solutions.

Proposition: Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps et P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré n. Alors, l'équation $P(x) = 0_\mathbb{K}$ a au plus n solutions dans $\mathbb{K}$ □

Corollaire ((Théorème de Wilson))**:** voir exercice 16 du TD 12

Définition: Soit $(\mathbb{K},+,\times)$ un corps et $L \subset \mathbb{K}$.
On dit que L est un sous corps de $\mathbb{K}$ si

1. L est un anneau de $(\mathbb{K},+,\times)$ non nul
2. $\forall x \in L \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}, x^{-1} \in L$

en d'autres termes si

1. $\forall (x,y) \in L^2, x - y \in L$
2. $\forall (x,y) \in L^2, x \times y^{-1} \in L$

On dit aussi que $\mathbb{K}$ est une extension de L.

Proposition: Tout sous corps est un corps. □

Définition: Soient $(\mathbb{K}_1,+,\times)$ et $(\mathbb{K}_2,+,\times)$ deux corps et $f : \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$.
On dit que f est un morphisme de corps si f est un morphisme d'anneaux.
i.e. si

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in {\mathbb{K}_1}^2, & f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall (x,y) \in {\mathbb{K}_1}^2, & f(x \times y) = f(x) \times f(y) \end{cases}$$

Proposition: Tout morphisme de corps est injectif.

Preuve:
Soit $f : \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$ un morphisme de corps.

— $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous groupe de $(\mathbb{K}_1,+)$
— Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y \in \mathbb{K}_1$

$$f(x \times y) = f(x) \times f(y) = 0_{\mathbb{K}_2} \times f(y) = 0_{\mathbb{K}_2}$$

— Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \setminus \{0_{\mathbb{K}_1}\}$.
Alors, x est inversible.

$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathrm{Ker}(f) \\ x^{-1} \in \mathbb{K}_1 \end{array}\right\} \text{ donc } x \times x^{-1} \in \mathrm{Ker}(f)$$

$$\text{donc } 1_{\mathbb{K}_1} \in \mathrm{Ker}(f)$$
$$\text{donc } f(1_{\mathbb{K}_1}) = 0_{\mathbb{K}_2}$$

Or, $f(1_{\mathbb{K}_1}) = 1_{\mathbb{K}_2} \neq 0_{\mathbb{K}_2}$

Donc, $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{K}_1}\}$ donc f est injective. $\square$

EXEMPLE:
$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}$ est un morphisme de corps

12.4 Actions de groupes

Définition: Soit $(G, \cdot)$ un groupe et X un ensemble non vide. Une <u>action</u> de G sur X est une application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \longmapsto & \underbrace{g \cdot x}_{\text{ce n'est pas la loi de } G} \end{array}$$

qui vérifie

1. $\forall x \in X, \varphi(e, x) = e \cdot x = x$
2. $\forall x \in X, \forall g, h \in G, g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$

Dans ce cas, $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & S(X) \\ g & \longmapsto & \varphi(g, \cdot) \end{array} : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$ est un morphisme de groupes.

Preuve:
$\forall g \in G \, (x \mapsto g \cdot x)^{-1} =$ $\square$

Chapitre 13

Systèmes linéaires et calculs matriciels

Exemple:

$$
(S_1) : \left\{
\begin{array}{ccccc}
\overbrace{\boxed{x}}^{\text{pivot}} & +y & +z & -t & = 1 \\
x & +2y & +3z & +t & = 0 \\
x & & +z & = 2 &
\end{array}
\right.
$$

$$
\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff}
\left\{
\begin{array}{cccccc}
\boxed{x} & +y & +z & & -t & = 1 \\
 & y & +2z & +2t = -1 & &
\end{array}
\right.
$$

$$
\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2}}{\iff}
\left\{
\begin{array}{ccccc}
\boxed{x} & & -z & -3t & = 2 \\
 & \boxed{y} & +2z & +2t & = -1 \\
 & & 2z & +3t & = 0
\end{array}
\right.
$$

$$
\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{2}{3} L_3}}{\iff}
\begin{cases}
\boxed{x} + z = 2 \\
\boxed{y} + \frac{2}{3} z = -1 \\
\boxed{3t} + 2z = 0
\end{cases}
\iff
\begin{cases}
x = 2 - z \\
y - -1 - \frac{2}{3} z \\
t = -\frac{2}{3} z
\end{cases}
$$

L'ensemble des solutions est

$$
\left\{ \left(2 - z, -1 - \frac{2}{3} z, z, -\frac{2}{3} z \right) \mid z \in \mathbb{K} \right\}
$$

$$\begin{cases} x+y+z-t=1 \\ x+2y+3z+t=0 \\ x+\boxed{z}=2 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3}}{\iff} \begin{cases} \boxed{y}-t=-1 \\ -2x+2y+t=-6 \\ x+\boxed{z}=2 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow \frac{L_2-2L_1}{-2}}{\iff} \begin{cases} \boxed{y}-t=-1 \\ \boxed{x}-\frac{3}{2}t=2 \\ x+\boxed{z}=2 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} \boxed{y}-t=-1 \\ \boxed{x}-\frac{3}{2}t=2 \\ \boxed{z}+\frac{3}{2}t=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=-1+t \\ x=2+\frac{3}{2}t \\ z=-\frac{3}{2}t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{S} &= \left\{(2+\frac{3}{2}t, -1+t, -\frac{3}{2}t, t \mid t \in \mathbb{K}\right\} \\ &= \{\underbrace{(2,-1,0,0)}_{A} + t\underbrace{\left(\frac{3}{2}, 1, -\frac{3}{2}, 1\right)}_{u} \mid t \in \mathbb{K}\} \end{aligned}$$

Exemple:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ x-y-z=3 \\ y+3z=1 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{L_2-L_1}{-2} \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4-L_1}}{\iff} \begin{cases} \boxed{x}+y+z=0 \\ \boxed{y}=\frac{1}{2} \\ -3y-z=2 \\ -2y-2z=3 \\ y+3z=1 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1-L_2 \\ L_3 \leftarrow -(L_3-3L_2) \\ L_4 \leftarrow L_4+3L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5-L_2}}{\iff} \begin{cases} \boxed{x}+z=\frac{1}{2} \\ \boxed{y}=-\frac{1}{2} \\ \boxed{z}=-\frac{1}{2} \\ -2z=2 \\ 3z=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1-L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4+2L_3 \\ L_5 \leftarrow L_5-3L_3}}{\iff} \begin{cases} \boxed{x}=1 \\ \boxed{y}=-\frac{1}{2} \\ \boxed{z}=-\frac{1}{2} \\ \boxed{\begin{matrix} 0=1 \\ 0=3 \end{matrix}} \text{ incompatibilité} \end{cases}$$

Il n'y a pas de solution !

Exemple:

$$(S_2) : \begin{cases} \boxed{x}+y-z=1 \\ y+z=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3-L_1}{\iff} (S_2') : \begin{cases} \boxed{x}+y-z=1 \\ \boxed{y}+z=0 \\ y+z=-1 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1-L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_2}}{\iff} \begin{cases} \boxed{x}-2z=1 \\ \boxed{y}+z=0 \\ \boxed{0=-1} \end{cases}$$

Exemple:

$$
\begin{aligned}
(S_1) &\iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} \\
&\iff AX = B
\end{aligned}
$$

$$
(S_2) \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
(S_2') \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A'} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A'}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \ \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\in \ \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K}) \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})
$$

Exemple:

$$
A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$A \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_1}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\ C_3 \leftarrow \frac{C_3 - C_2}{2}}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{C_2 \leftrightarrow C_3}{\sim} I_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{K}) \text{ et } A^{-1} = I_3 \times B$$

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_1}{\sim} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\substack{C_1 \leftarrow C_1 - C_2 \\ C_3 \leftarrow \frac{C_3 + C_2}{2}}}{\sim} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
\underset{\substack{C_1 \leftarrow C_1 + C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 - C_3}}{\sim} &\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
\underset{C_2 \leftrightarrow C_3}{\sim} &\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{A^{-1}}
\end{aligned}$$

Remarque (Résumé): — Méthode du pivot : opérations sur les lignes :

1. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ($\lambda \in \mathbb{K}$)
2. $L_i \leftarrow \mu L_i$ ($\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$)
3. $L_i \leftrightarrow L_j$

En appliquant la méthode du pivot on obtient

$$(S) \iff \begin{cases} x_{i_1} & = \ell_1(x_{j_1}, \dots, x_{j_n - r}) \\ x_{i_2} & = \ell_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_n - r}) \\ \vdots & \vdots \\ x_{i_r} & = \ell_r(x_{j_1}, \dots, x_{j_n - r}) \\ 0 & = * \end{cases}$$

Les inconnues $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$ sont les <u>inconnues principales</u>, les autres sont appelées <u>paramètre</u>.
On peut supprimer les équations $0 = 0$. S'il y a une équation $0 = \lambda$ avec $\lambda \neq 0$, il n'y a pas de solution : le système est <u>incompatible</u>.
Les inconnues principales dépendent des choix de pivots !

— Représentation matricielle

$$(S) \iff AX = B$$

où A est la <u>matrice du système</u>, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et B est le <u>second membre</u>

(S) a n équations et p inconnues donc A a n lignes et p colonnes.
La matrice $(A \mid B)$ est la <u>matrice augmentée du système</u>.

— Faire un opération L sur les lignes d'une matrice M revient à multiplier M à gauche par une matrice R où R est obtenue en appliquant L sur I_n.

— La méthode du pivot matriciel par lignes :

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & \boxed{1} & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 5 & \boxed{1} & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -3 & -4 \\ -3 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3} L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 5 & \boxed{1} & 3 & 4 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ -3 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & -2 & -\frac{8}{3} \\ \boxed{1} & 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 1 & -2 & -8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{matrice échelonnée réduite par lignes}}$$

> **Définition** (Rang d'une matrice)**:** Soit M une matrice et R la matrice échelonnée réduite par lignes associée à M. Le nombre de lignes non nulles de R (le nombre de pivots) est appelée <u>rang</u> de M.
> Soit S un système de matrice augmentée $(A \mid B)$. Le <u>rang</u> de S est le rang de la matrice A.
> Le rang est noté rg.

Proposition (Interprétation)**:**

— Soit S un système de n équations, p inconnues de rang r.
r est le nombre d'inconnues principales, il y a $p - r$ paramètres.

— Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r.
r est le nombre de lignes indépendantes : il y a $n - r$ lignes combinaisons linéaires des r lignes indépendantes.

Corollaire: Soit S un système de <u>n équations</u>, p inconnues de <u>rang n</u>.
Alors S a au moins une solution.
Si $n = p$ alors S a exactement une solution.
Si $p > n$, il y a une infinité de solutions.

□

Définition: Soit S un système à n équations, n inconnues et de rang n. On dit que S est un <u>système de Cramer</u> (il a une unique solution)

Proposition: Soit S un système de n équations, p inconnues de rang r.
- Si $r < n$ alors le système peut-être incompatible : il y a $n - r$ équations de la forme $0 = *$ après la méthode du pivot.
- Si $r < p$ alors il y a $p - r$ paramètres : si le système n'est pas incompatible, il y aura une infinité de solutions.

□

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & \boxed{1} & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2}}{\sim} \begin{pmatrix} -9 & 0 & -1 \\ 5 & \boxed{1} & 2 \\ 4 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \\
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{-5} & 0 & 0 \\ 5 & \boxed{1} & 2 \\ 4 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \\
& \underset{L_1 \leftarrow -L_1/5}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 5 & \boxed{1} & 2 \\ 4 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exemple:

$$(S) : \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z + 2t = 0 \\ 2y - t = 1 \\ 2x + 2z + 3t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{x} + y + z + t = 1 \\ x - y + z + 2t = 0 \\ 2y - t = 1 \\ 2x + 2z + 3t = 1 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}}{\iff} \begin{cases} \boxed{x} + y + z + t = 1 \\ -2y + \boxed{t} = -1 \\ 2y - t = 1 \\ -2y + t = -1 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2}}{\iff} \boxed{\begin{cases} \boxed{x} + y + z + t = 1 \\ -2y + \boxed{t} = -1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}} \ \underline{\text{Système triangulaire}}$$

$$\iff \begin{cases} t = -1 + 2y \\ x = 2 - 3y - z \end{cases}$$

La matrice du système triangulaire est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elle n'est pas échelonnée réduite par lignes !

> **Proposition:** Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et C une opération élémentaire sur les colonnes de A. On pose A' la matrice obtenue en appliquant C sur les colonnes de A.
>
> $$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A')$$
>
> □

EXEMPLE:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ \boxed{1} & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 2 \\ 5 & -4 & -3 \\ \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{1} & 0 \\ 5 & -4 & \boxed{5} \\ \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{rg}(A) = 3$

EXEMPLE:

$$\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$$

Proposition: Le rang d'une matrice est aussi le nombre de colonnes indépendantes. □

Définition: Une matrice triangulaire supérieure est une matrice carrée avec des coefficients nuls sous sa diagonale :

$$T = \begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

diagonale

et triangulaire inférieure si les coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls :

$$T = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Un système triangulaire est de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1p}x_p & = & b_1 & +\dots \\ & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2p}x_p & = & b_2 & +\dots \\ & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & a_{pp}x_p & = & b_p & +\dots \\ & & & 0 & = & \dots & \end{cases}$$

Remarque:

$$(S) \iff \begin{cases} AX = B \\ X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}), B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \end{cases}$$

On pose

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

On cherche $\varphi^{-1}(\{B\})$

On sait que
- $(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe
- $(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), +)$ aussi

Soient $X, Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$

$$\varphi(X+Y) = A(X+Y) = AX + AY = \varphi(X) + \varphi(Y)$$

Donc φ est un morphisme de groupes.
On peut résoudre (S) de la façon suivante :

— On cherche $X_0 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $\varphi(X_0) = B$
— On résout $\varphi(X) = 0$ ($X \in \mathrm{Ker}(\varphi)$)

C'est le système homogène associé :

$$\varphi(X) = B \iff \exists H \in \mathrm{Ker}(\varphi), X = X_0 + H$$

Proposition:

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$
$$B = (b_{k,\ell})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant p \\ 1 \leqslant \ell \leqslant q}} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

$$AB = (c_{i,\ell})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant \ell \leqslant q}} \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$
$$c_{i,\ell} = \sum_{j=1}^{n} = a_{i,j} b_{j,\ell}$$

Chapitre 14

Continuité

14.1

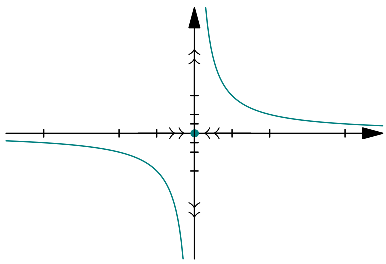
Exemple:

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas.

$$\ell = \bigcap_{V \in \mathscr{V}_\ell} V$$

Si ℓ existe, alors $\ell = f(0)$.
Or, $0 \neq \lim\limits_{x \to 0} f(x)$



Preuve (de la proposition 1.10)*:*
$\ell = \lim\limits_{x \to a}$ et $a \in \mathscr{D}$
On sait que

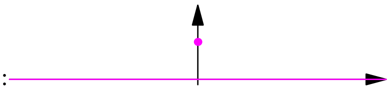
$$\forall V \in \mathscr{V}_\ell, \exists W \in \mathscr{V}_a, \forall x \in W \cap \mathscr{D}, f(x) \in V$$

Soit $V \in \mathscr{V}_\ell$. Alors, $f(a) \in V$.

$$f(a) \in \bigcap_{V \in \mathscr{V}_\ell} V = \begin{cases} \{\ell\} & \text{si } \ell \in \mathbb{R} \\ \varnothing & \text{si } \ell = \pm\infty \end{cases}$$

Donc $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell = f(a)$ □

Remarque:
De même si $a \in \mathscr{D}$ et si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ \leqslant}} f(x)$ existe (resp. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ \leqslant}} f(x)$) alors $f(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ \leqslant}} f(x)$ (resp $f(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ \geqslant}} f(x)$)

Exemple: 

$\lim\limits_{x\to 0} \sigma(x)$ n'existe pas
$\lim\limits_{x\to 0^+} \sigma(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}$ n'existent pas non plus.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \neq}} \sigma(x)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \sigma(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \sigma(x) = 0$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{\substack{x\to a\\ \neq}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Définition: Soit f définie sur $\mathscr{D}$ et $a \in \mathscr{D}$. On dit que f est <u>continue en a</u> si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe ou si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ \neq}} f(x) = f(a)$.

Exemple:
Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ \neq}} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0)$
Donc f est continue en 0.

Proposition: f est continue en a si et seulement si

$$\lim_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ >}} = f(a)$$

Preuve (unicité de la limite)*:*
On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to u]{} a$, $f(x) \xrightarrow[x\to u]{} b$ avec $a \neq b$.
Soient V et W conne dans le lemme (suivant),

$$\begin{cases} \exists W_1 \in \mathscr{V}_u, \forall x \in W_1 \cap \mathscr{D}, f(x) \in V \\ \exists W_2 \in \mathscr{V}_u, \forall x \in W_2 \cap \mathscr{D}, f(x) \in W \end{cases}$$

Donc

$$\forall x \in \underbrace{W_1 \cap W_2 \cap \mathscr{D}}_{\neq \varnothing \text{ car } W_1 \cap W_2 \in \mathscr{V}_u} f(x) \in V \cap W = \varnothing$$

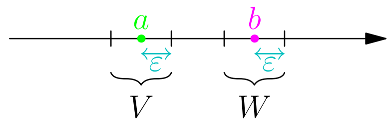
□

Lemme: Soient $a \neq b$ deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$
Alors $\exists V \in \mathscr{V}_a, \exists W \in \mathscr{V}_b, V \cap W = \varnothing$

Preuve: Cas 1 $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $a < b$.
On pose $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$,

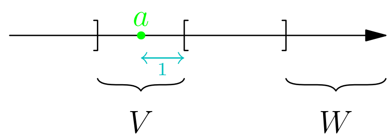
$$\begin{cases} V =]a-\varepsilon; a+\varepsilon[\\ W =]b-\varepsilon; b+\varepsilon[\end{cases}$$

On vérifie que $V \cap W = \varnothing$



Cas 2 $a \in \mathbb{R}$ et $b = +\infty$

$$\begin{cases} V =]a-1; a+1[\\ W =]a+2; +\infty[\end{cases}$$



Cas 3 $a = -\infty$, $b = +\infty$

$$\begin{cases} V =]-\infty; 0[\\ W =]0; +\infty[\end{cases}$$

□

Théorème: Soit f définie sur $\mathscr{D}$ et $a \in \overline{\mathscr{D}}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \forall (x_n) \in \mathscr{D}^{\mathbb{N}} \left(x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a \implies f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \right)$$

Preuve: " $\implies$ " On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

Soit $(x_n) \in \mathscr{D}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Soit $V \in \mathscr{V}_\ell$. Soit $W \in \mathscr{V}_a$ tel que

$$\forall x \in W \cap \mathscr{D}, f(x) \in V$$

$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, x_n \in W \cap \mathscr{D}$$

Donc

$$\forall n \geqslant N, f(x_n) \in V$$

D'où, $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

" $\impliedby$ " On suppose que $f(x) \not\xrightarrow[x\to a]{} \ell$

$$\exists V \in \mathscr{V}_\ell, \forall W \in \mathscr{V}_a, \exists x \in W \cap \mathscr{D}, f(x) \notin V$$

Soit V comme ci dessus. Soit $W_1 \in \mathscr{V}_a$.

Cas 1 $a \in \mathscr{D}$ et $\forall x \in W \cap \mathscr{D} \setminus \{a\}, f(x) \in V$.

On le prouve par la contraposée. On suppose $f(x) \not\xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}$

Donc,

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in]a-\eta, a+\eta[, |f(x) - \ell| > \varepsilon$$

On considère un tel ε donc

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, \exists x_n \in \left]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right[, |f(x_n) - \ell| > \varepsilon$$

Par encadrement, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et $f(x_n) \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Cas 2 Soit $x_1 \in W_1 \cap \mathscr{D}$ tel que $f(x_1) \notin V$

$\begin{cases} x_1 \in \mathscr{D} \\ a \notin \mathscr{D} \end{cases}$ donc $x_1 \neq a$

Cas 3 $\exists x \in W_1 \cap \mathscr{D} \setminus \{a\}, f(x) \notin V$

Soit x_1 un tel élément :

$$x_1 \in W_1 \cap \mathscr{D}$$
$$x_1 \neq a$$
$$f(x_1) \notin V$$

Dans les cas 2 et 3, on pose $W_2 \in \mathscr{V}_a$ tel que

$$W_2 \subset W_1 \setminus \{x_1\}$$

En itérant ce procédé, on construit une suite (x_n) qui tend vers a et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \notin V$$

et donc $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} \ell$

□

Proposition: Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_2$
alors

1. $f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_1 + \ell_2$
2. $f(x) \times g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_1 \times \ell_2$
3. Si $\ell_2 \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$

Preuve: 1. Soit (x_n) une suite qui tends vers a alors $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$
et $g(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$
Donc, $f(x_n) + g(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 + \ell_2$
Donc $f(x) + g(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 + \ell_2$

□

Proposition: Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_1$ et $g(x) \underset{x\to \ell_1}{\longrightarrow} \ell_2$ alors $g(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_2$

Preuve:
Soit (x_n) une suite qui tend vers a. Alors, $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ donc $g(f(x_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$ ℓ_2 donc $g(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_2$ □

Corollaire: Une somme, un produit, une composée de fonctions continues sont continues. □

REMARQUE:
Pour démontrer que $f(x)$ n'a pas de limite quands x tend vers a. On cherche deux suites (x_n) et (y_n) de limite a avec

$$\begin{cases} f(x_n) \longrightarrow \ell_1 \\ f(y_n) \longrightarrow \ell_2 \\ \ell_1 \neq \ell_2 \end{cases}$$

Exemple:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sin(2\pi n) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Or,

$$2\pi n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$
$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Donc, sin n'a pas de limite en $+\infty$

Théorème (Limite monotone)**:** Soit f une fonction croissante sur $]a, b[$ avec $a \neq b \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si f est majorée,
$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in]a, b[, f(x) \leqslant M$$
alors $\lim\limits_{\substack{x\to b\\<}} f(x) = \sup\limits_{x\in]a,b[} f(x) \in \mathbb{R}$
2. Si f n'est pas majorée,
$$\lim_{\substack{x\to b\\<}} f(x) = +\infty$$
3. Si f est minorée,
$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in]a, b[, f(x) \leqslant m$$
alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x) = \inf\limits_{]a,b[} f \in \mathbb{R}$
4. Si f n'est pas minorée, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x) = -\infty$

Preuve: 1. $\sup\limits_{]a,b[} f$ existe
$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in]a, b[, f(x) > \sup_{]a,b[}(f) - \varepsilon$$
donc
$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in]a, b[, \forall y \in [x, b[, \sup_{]a,b[}(f) - \varepsilon < f(y) \leqslant \sup_{]a,b[}(f) < \sup_{]a,b[}(f) + \varepsilon$$

donc $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to b \\ <}]{} \sup_{]a,b[}(f)$

2. f n'est pas majorée

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in]a,b[, f(x) > M$$

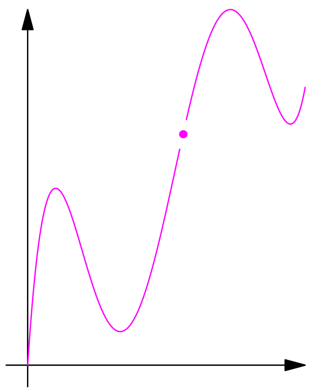
donc
$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in]a,b[, \forall y \in [x,b[, f(y) \in [M,+\infty[$$

□

Remarque:
Avec les hypothèses ci-dessus, pour tout $x \in]a,b[$,
f est croissante sur $]a,x[$, et majorée par $f(x)$ donc $\lim\limits_{\substack{t \to x \\ <}} f(t) \in \mathbb{R}$

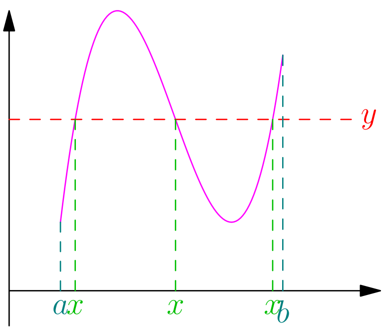
f est croissante sur $]x,b[$ et minorée par $f(x)$ donc $\lim\limits_{\substack{t \to x \\ >}} f(t) \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{\substack{t \to x \\ <}} f(t) \leqslant f(x) \leqslant \lim\limits_{\substack{t \to x \\ >}} f(t)$



Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)**:** Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $a < b$ deux éléments de I.

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \cup [f(b), f(a)]\,,\ \exists x \in [a,b],\ y = f(x)$$



Lemme: Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $a < b$ deux éléments de I tels que $f(a) \leqslant 0 \leqslant f(b)$. Alors,

$$\exists x \in [a,b], f(x) = 0$$

Preuve (du lemme)*:*
On pose $A = \{x \in [a,b] \mid f(x) \leqslant 0\}$
$A \neq \varnothing$ car $a \in A$ et A est majorée par b.
On pose $u = \sup(A)$. Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers u.
$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a \leqslant x_n \leqslant b \\ f(x_n) \leqslant 0 \end{cases}$
On sait que $x_n \longrightarrow u$ et $f(x_n) \longrightarrow f(u)$ par continuité de f.
Donc, $\begin{cases} a \leqslant u \leqslant b \\ f(u) \leqslant 0 \end{cases}$ (donc $u = \max(A)$)
De plus,

$$\forall x \in]u,b], f(x) > 0$$

donc

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to u \\ >}} f(x) = f(u) \\ \\ \lim\limits_{\substack{x \to u \\ >}} f(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

Donc, $f(u) \geqslant 0$ donc $f(u) = 0$

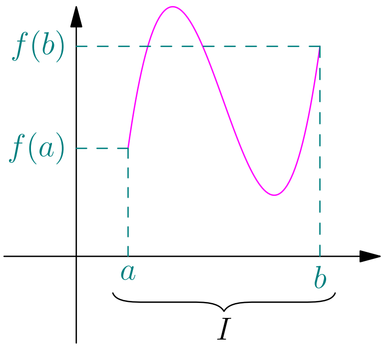
$\square$

Preuve (du théorème)*:*
On pose $g : x \mapsto f(x) - y$. g est continue sur I.

Si $f(a) < f(b)$ alors $\begin{cases} g(a) \leqslant 0 \\ g(b) \geqslant 0 \end{cases}$
D'après le lemme, il existe $x \in [a,b]$ tel que $g(x) = 0$ et donc $f(x) = y$

Si $f(a) < f(b)$ alors $\begin{cases} h(a) \leqslant 0 \\ h(b) \geqslant 0 \end{cases}$ où $h : x \mapsto -g(x) = y - f(x)$ est continue
D'après le lemme, il existe $x \in [a,b]$ tel que $h(x) = 0$ et donc $f(x) = y$ $\square$

Corollaire: Soit f continue sur un intervalle I. Alors, $f(I)$ est un intervalle.



Preuve:
Montrons que $f(I)$ est convexe
Soit $\alpha \in f(I), \beta \in f(I)$ avec $\alpha < \beta$. Montrons que

$$\forall \gamma \in [\alpha, \beta], f(\gamma) \in f(I)$$

Or, $\begin{cases} \alpha \in f(I) & \exists a \in I, \alpha = f(a) \\ \beta \in f(I) & \exists b \in I, \beta = f(b) \end{cases}$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [a, b]$ tel que $\gamma = f(x)$ donc, $f(\gamma) \in f(I)$ □

Corollaire: On peut généraliser le théorème des valeurs intermédiaires au cas où $\begin{cases} a \in \overline{R} \\ b \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases}$ en remplaçant $f(a)$ par $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$ et $f(b)$ par $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x)$ □

Théorème (Théorème de la bijection)**:** Soit f continue, strictement monotone sur un intervalle I. Alors, $J = f(I)$ est un intervalle de même nature (ouvert, semi-ouvert ou fermé) et f établit une bijection de I sur J.

Preuve:
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, J est un intervalle. f est strictement monotone donc f injective. Donc f établit une bijection de I sur J.

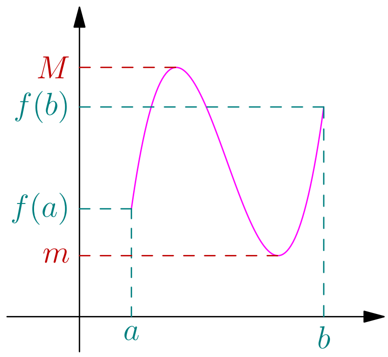
Cas 1 $I = [a, b]$ et f croissante
$\forall x \in I, a \leqslant x \leqslant b$
donc $\forall x \in I, f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$
donc $J \subset [f(a), f(b)]$

Or, $[f(a), f(b)] \subset J$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires
Donc $J = [f(a), f(b)]$
Les autres cas se démontrent de la même façon. □

Théorème: Soit f continue sur un segment $[a, b]$. Alors, f est bornée et atteint ses bornes, i.e.

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, f([a, b]) = [m, M]$$

⚠ On peut avoir $m \neq f(a)$ et $M \neq f(b)$



Preuve:
On suppose que f n'est pas majorée :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in [a, b], f(x) \geqslant M$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b], f(x_n) \geqslant n$$

Donc, $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$
La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée apr a et majorée par b donc bornée.
D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})_{\in \mathbb{N}}$ converge. On pose $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} x_{\varphi(n)}$. On a bien $\ell \in [a, b]$ et $f(\ell) = \lim\limits_{n \to +\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right)$ par continuité de f.
Or, $\left(f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(f(x_n))$ donc $f\left(x_{\varphi(n)}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$: une contradiction
Donc f est majorée et on pose

$$M = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$$

On prouve de même que f est minorée. On pose donc

$$m = \inf_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$$

Soit $(y_n) \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ telle que $f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$.
(y_n) est bornée donc il existe une sous-suite $\left(y_{\psi(n)}\right)$ de (y_n) convergente.
On pose $y = \lim\limits_{n\to+\infty} y_{\psi(n)} \in [a,b]$
Comme f continue sur y,

$$f(y) = \lim_{n\to+\infty} f\left(y_{\psi(n)}\right)$$

Or, $\left(f\left(y_{\psi(n)}\right)\right)$ est une sous-suite de $(f(y_n))$ donc

$$M = \lim_{n\to+\infty} f\left(y_{\psi(n)}\right)$$

Par unicité de la limite, $M = f(y)$
Donc, $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$. De même, $m \in f([a,b])$
Enfin, en posant $\begin{cases} M = f(y) & \text{avec } y \in [a,b] \\ m = f(z) & \text{avec } z \in [a,b] \end{cases}$, on obtient

$$[m,M] = [f(z), f(y)] \underbrace{\subset}_{\text{théorème des valeurs intermédiaires}} f([a,b]) \underbrace{\subset}_{\substack{m \text{ minimum} \\ M \text{ maximum}}} [m,M]$$

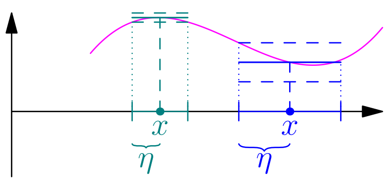
donc $f([a,b]) = [m,M]$ □

14.2 Continuité uniforme

REMARQUE:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue,

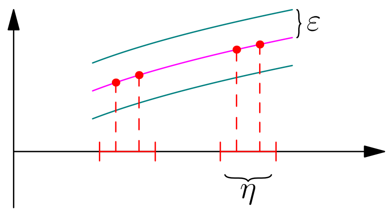
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in]x-\eta, x+\eta[, |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Ici, η dépend de ε et de x



Dans certaines situations, il serait préférable d'avoir

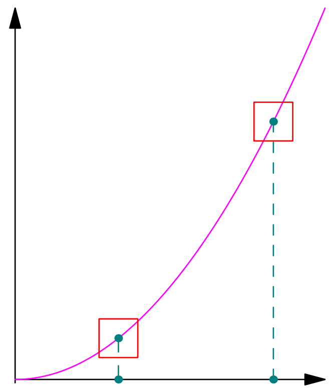
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x-y| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$



> **Lemme:** Soit f uniformément continue sur un intervalle I. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments dans I telles que $x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
> Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(f\left(x_n\right) - f\left(y_n\right)\right) = 0$ □

EXEMPLE:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$



On pose $\forall n \in \mathbb{N}_*, \begin{cases} x_n = n \\ y_n = n + \dfrac{1}{n} \end{cases}$. On a bien $\forall n \in \mathbb{N}_*, x_n - y_n = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, {x_n}^2 - {y_n}^2 = n^2 - n^2 - \frac{1}{n^2} - 2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -2 \neq O$$

Donc, f n'est pas uniformément continue.

> **Théorème** (Théorème de Heine)**:** Soit f une function continue sur $[a, b]$.
> Alors, f est uniformément continue sur $[a, b]$.

> *Preuve:*
> On suppose f continue sur $[a, b]$ mais pas uniformément continue.
>
> $$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x, y) \in [a, b]^2 \text{ avec } |x - y| \leqslant \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$ comme ci-dessus. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists (x_n, y_n) \in [a,b]^2 \text{ avec } \left| x_n - y_n \leqslant \frac{1}{n+1} \right| \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$$

(x_n) est bornée donc il existe une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ de (x_n) convergente. On note $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} x_{\varphi(n)} \in [a,b]$ $\left(y_{\varphi(n)}\right)$ est bornée, $\left(y_{\varphi(n)}\right)$ a une sous-suite $\left(y_{\varphi(\psi(n))}\right)$ convergente. On pose $\ell' = \lim\limits_{n \to +\infty} y_{\varphi(\psi(n))}$. $\left(x_{\varphi(\psi(n))}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une autre sous-suite de $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ donc $x_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.
De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| x_{\varphi(\psi(n))} - y_{\varphi(\psi(n))} \right| \leqslant \frac{1}{\varphi(\psi(n)) + 1}$$

On a vu que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(\psi(n)) \geqslant n$$

car $\varphi \circ \psi$ est strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Donc, $x_{\varphi(\psi(n))} - y_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
On en déduit que $\ell - \ell' = 0$. De plus

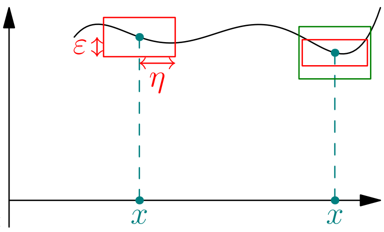
$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| f\left(x_{\varphi(\psi(n))}\right) - f\left(x_{\varphi(\psi(n))}\right) \right| > \varepsilon$$

En passant à la limite,

$$0 = |f(\ell) - f(\ell)| > \varepsilon > 0$$

car f continue en ℓ
On a obtenu une contradiction. $\lightning$ $\square$

Remarque:



$$\begin{cases} \eta > 0 \\ \varepsilon > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x - y| \leqslant \eta \\ |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

Définition: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle et $k \in \mathbb{R}$. On dit que f est <u>k-lipschitzienne</u> si

$$\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|$$

On dit que f est lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que f soit k-lipschitzienne.

Proposition: Soit f une fonction lipschitzienne sur I. Alors, f est uniformément continue sur I donc continue sur I.

Preuve:
Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x-y|$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Si $k = 0$ alors f est constante donc uniformément continue.
On suppose $k \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\underbrace{\eta = \frac{\varepsilon}{k}}_{\text{ne dépend pas de } x} > 0$ car $k > 0$.
Soit $(x,y) \in I^2$. On suppose $|x - y \leqslant \eta|$. Alors,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x-y| \leqslant k\eta = \varepsilon$$

□

EXEMPLE:
$x \mapsto |x|$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, ||x| - |y|| \leqslant |x-y|$$

(inégalité triangulaire)

Théorème: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in I, |f'(x)| \leqslant M$$

Alors

$$\forall (a,b) \in I^2, |f(a) - f(b)| \leqslant M\,|a-b|$$

donc f est M-lipschitzienne.

Corollaire: Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors f est lipschitzienne.

Preuve:
f' est continue sur un segment donc bornée. □

EXEMPLE:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\forall x > 0, |f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$$

Par contre,

$$\forall x \geqslant 1, |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$

Donc f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[1, +\infty[$ donc uniformément continue sur $[1, +\infty[$.
f est continue sur $[0, 1]$ donc uniformément continue sur $[0, 1]$ (théorème de Heine).
Soit $\varepsilon > 0$. Soient $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}_*^+$ tels que

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in [0, 1]^2, |x - y| \leqslant \eta_1 \implies \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall (x, y) \in [1, +\infty[^2, |x - y| \leqslant \eta_2 \implies \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

On pose $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Soient $(x, y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$. On suppose $|x - y| \leqslant \eta$

Cas 1 $\begin{cases} x \leqslant 1 \\ y \leqslant 1 \end{cases}$

Alors, $|x - y| \leqslant \eta \leqslant \eta_1$ donc $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant \varepsilon_2\right| \leqslant \varepsilon$

Cas 2 $\begin{cases} x \geqslant 1 \\ y \geqslant 1 \end{cases}$

Alors, $|x - y| \leqslant \eta \leqslant \eta_2$ donc $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon\right|$

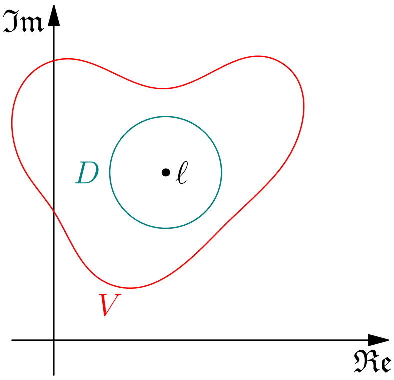
Cas 3 $x \leqslant 1 \leqslant y$

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| &= \left|\sqrt{x} - \sqrt{1} + \sqrt{1} - \sqrt{y}\right| \\ &\leqslant \left|\sqrt{x} - \sqrt{1}\right| + \left|\sqrt{y} - \sqrt{1}\right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x - 1| \leqslant |x - y| \leqslant \eta \leqslant \eta_1 &\text{ donc } \left|\sqrt{x} - \sqrt{1}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \\ |y - 1| \leqslant |x - y| \leqslant \eta \leqslant \eta_2 &\text{ donc } \left|\sqrt{y} - \sqrt{1}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Donc $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

14.3 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$



Définition:
V est un voisinage de ℓ s'il existe $r > 0$ tel que $V \supset D(\ell, r)$
où $D(l, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \ell| < r\}$

Proposition: Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$, $\ell \in \mathbb{C}$.

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathfrak{Re}(\ell) \\ \mathfrak{Im}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathfrak{Im}(\ell) \end{cases}$$

□

Remarque (Rappel):
On dit que : $I \to \mathbb{C}$ est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, |f(x)| \leqslant M$$

14.4 Annexe

Théorème: *Théorème 2.11*
$f : I \to J$ bijective monotone avec I et J deux intervalles.
Alors, f^{-1} est continue (et f aussi)

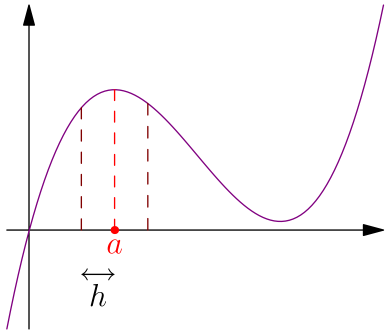
Preuve:
f monotone donc $f(I) = J$
donc f continue (d'après 2.10).
f^{-1} monotone, $f^{-1}(J) = I$
donc f^{-1} est continue □

Définition: Un homéomorphisme est une application bijective, continue dont la réciproque est continue.

Remarque:
Preuve du programme de colle

Preuve:

$$\exists \eta > 0, \forall h \in]-\eta, +\eta[, f(a) \geqslant f(a+h)$$



$$\begin{aligned} f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leqslant 0 \\ &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Donc, $f(a) = 0$ □

Chapitre 15

Espaces vectoriels

15.1 Définition et premières propriétés

Définition: Soit E un ensemble muni d'une loi interne $+$ et d'une loi $\cdot$ définie sur $\mathbb{K} \times E$ à valeurs dans E où $\mathbb{K}$ est un corps.
On dit que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$) si

1. $(E, +)$ est un groupe abélien
2. (a)
$$\forall u \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,$$
$$\mu \cdot (\lambda \cdot u) = (\mu \underbrace{\times}_{\times \text{ de } \mathbb{K}} \lambda) \cdot u$$
   (b) $\forall u \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot u = u$
3. (a)
$$\forall u \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$$
$$(\lambda \cdot u) \underbrace{+}_{+ \text{ de } E} (\mu \cdot u) = (\lambda \underbrace{+}_{+ \text{ de } \mathbb{K}} \mu) \cdot u$$
   (b)
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u, v) \in E^2,$$
$$\lambda \cdot (u + v) = (\lambda \cdot u) + (\lambda \cdot v)$$

Les éléments de E sont alors appelés vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ sont dits scalaires.
Par convention, $\cdot$ est prioritaire sur $+$.

Exemple:
Soit $\mathbb{K}$ corps, $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Exemple:

Soit $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan. $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple:
$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
En généralisant, tout corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{L}$-espace vectoriel pour $\mathbb{L}$ un sous-corps de $\mathbb{K}$

Exemple:
$(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ avec

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda \cdot (y_1, \dots, y_n) &= (\lambda \cdot y_1, \dots, \lambda \cdot y_n)\end{aligned}$$

est un espace vectoriel.

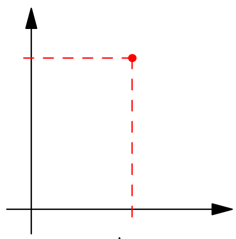
Exemple:
Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{D}$ un ensemble non vide.
$(E^{\mathscr{D}}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où pour $f, g \in E^{\mathscr{D}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

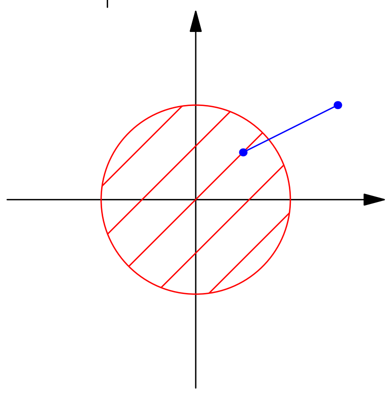
$$\begin{aligned} f + g : \mathscr{D} &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto f(x) + g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda f : \mathscr{D} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \lambda \cdot f(x) \end{aligned}$$

Par exemple, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
$\mathscr{C}^0(\mathscr{D}, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Exemple:
- $\mathbb{R}^+$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
- $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles





Proposition: Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. $\forall u \in E, 0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot 0_E = 0_E$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \lambda \cdot u = 0_E \implies \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $u = 0_E$

Preuve: 1. Soit $u \in E$.

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{K}} \cdot u &= (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \cdot u \end{aligned}$$

$(E,+)$ est un groupe donc $0_E = 0_{\mathbb{K}} \cdot u$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$$

$\lambda \cdot 0_E$ est régulier pour $+$:

$$0_E = \lambda \cdot 0_E$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in E$ tel que $\lambda \cdot u = 0_E$

Cas 1 $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$
Cas 2 $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ Alors, $\lambda^{-1} \in \mathbb{K}$ et donc

$$\begin{aligned} \lambda \cdot u = 0_E &\implies \lambda^{-1}(\lambda \cdot u) = \lambda^{-1} \\ &\implies (\lambda^{-1} \times \lambda) \cdot u = 0_E \text{ d'après 2.} \\ &\implies 1_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E \\ &\implies u = 0_E \end{aligned}$$

□

Proposition: Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in E$. Alors, $-u = (-1_{\mathbb{K}}) \cdot u$

Preuve:

$$\begin{aligned} u + (-1_{\mathbb{K}}) \cdot u &= (1_{\mathbb{K}} \cdot u) + (-1_{\mathbb{K}}) \cdot u \\ &= (1_{\mathbb{K}} + (-1_{\mathbb{K}})) \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} u \\ &= 0_E \end{aligned}$$

Donc $-u = (-1_{\mathbb{K}}) \cdot u$ □

15.2 Sous-espaces vectoriels

Définition: Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $F \subset E$.
On dit que F est un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de E si

1. $F \neq \varnothing$
2. $\forall (u, v) \in F^2, u + v \in F$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in F, \lambda u \in F$

Proposition: Avec les notations précédentes, $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Preuve:
- D'après 2., $+$ est interne dans F
- $(E, +)$ est un groupe abélien donc $+$ est associative et commutative dans E donc dans F
- $F \neq \varnothing$. Soit $u \in F$. D'après 3.,
$$0_{\mathbb{K}} \cdot u \in F$$
Comme $u \in E$ et $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,
$$0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$$
Donc, $0_E \in F$
- Soit $u \in F$. Comme $u \in E$,
$$-u = -(1_{\mathbb{K}}) \cdot u \in F \text{ d'après 3.}$$
- Les autres axiomes sont aisément vérifiés.

□

Proposition: Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$.
F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$ si et seulement si

1. $F \neq \varnothing$
2. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (u, v) \in F^2, \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$

Preuve: " $\implies$ " On sait déjà que F est non vide.

$$\forall u, v \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \left.\begin{matrix} \lambda u \in F \\ \mu v \in F \end{matrix}\right\} \text{ donc } \lambda u + \mu v \in F$$

" $\impliedby$ " — On sait déjà que F est non-vide
— Soient $u, v \in F$

$$u + v = 1_{\mathbb{K}} \cdot u + 1_{\mathbb{K}} \cdot v \in F$$

— Soit $u \in F, \lambda \in \mathbb{K}$.

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \cdot u \in F$$

□

Définition: Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$. Une combinaison linéaire de $(u_1, \ldots, u_n)$ est un vecteur de E de la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$

REMARQUE:
On peut aussi démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

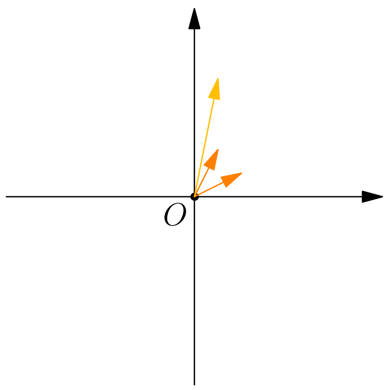
$$F \neq \varnothing \text{ et } \forall u, v \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u + v \in F$$

EXEMPLE:
1. $F = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z) = 1\} \subset \mathbb{C}$
   F est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$?
   Non car $0 \notin F$
2. $F = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z) = 0\}$ est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ mais pas un sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel.
   En effet, $1 - i \in F$ $i(1 - i) = i + 1 \notin F$
3. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   $F = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n\right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
   $G = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2\right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E puique $0_E \notin G$.
4. $E = \mathbb{R}^D$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel
   $F = \mathscr{C}^0(D, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de E (fonctions continues)
   $G = \mathscr{D}(D, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de E (fonctions dérivables)
   Si $D =]-a, a[$ avec $a \in \mathbb{R}$, $H = \{f \in E \mid f \text{ impaire }\}$ est un sous-espace vectoriel de E
   Si $D = \mathbb{R}$, $L = \{f \in E \mid f \text{ 1-périodique }\}$ est un sous-espace vectoriel de

E
$M = \{f \in E \mid f \text{ périodique }\}$ n'est pas un sous-ensemble vectoriel de E

5. L'ensemble des solutions sur un intervalle I d'une équation différentielle linéaire est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$

Exercice (Exercice):
Trouver tous les sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$



— $\{(0,0)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$
— Les droites passant par O sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$
— $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

et rien d'autre !

Proposition: Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F}$ une famille non vide de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap_{F \in \mathscr{F}} F$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve:
On pose $G = \bigcap_{F \in \mathscr{F}} F$.

— $\forall F \in \mathscr{F}, 0_E \in F$ car F est un sous espace vectoriel de E donc $0_E \in G$.
— Soient $u, v \in G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On pose $w = \lambda u + \mu v$.

$$\forall F \in \mathscr{F}, \quad \left.\begin{matrix} u \in F \\ v \in F \end{matrix}\right\} \text{ donc } w \in F$$

donc $w \in G$

$\square$

Remarque (Attention ⚠):
Une réunion de sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel en général.

Exercice:
$F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E \iff F \subset G$ ou $G \subset F$

Définition: Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On définit leur somme $F+G$ par

$$F+G = \{x+y \mid x \in F, y \in G\}$$

Proposition: Avec les notations précédentes, $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$.

Preuve: — — $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \in F+G$

— Soient $u \in F+G, v \in F+G, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
On pose

$$\begin{cases} u = x+y \text{ avec } \begin{cases} x \in F \\ y \in G \end{cases} \\ \\ v = a+b \text{ avec } \begin{cases} a \in F \\ b \in G \end{cases} \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \lambda u + \mu v &= \lambda(x+y) + \mu(a+b) \\ &= \lambda x + \lambda y + \mu a + \mu b \\ &= \underbrace{(\lambda x + \mu a)}_{\in F} + \underbrace{\lambda y + \mu b}_{\in G} \in F+G \end{aligned}$$

Ainsi $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

— Soit $x \in F \cup G$.
Si $x \in F$ alors $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{O_E}_{\in G} \in F+G$
Si $x \in G$ alors $x = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G} \in F+G$
Donc, $F \cup G \subset F+G$

— Soit H un sous-espace vectoriel de E tel que $F \cup G \subset H$
Soit $u \in F+G$. On pose $u = x+y$ avec $\begin{cases} x \in F \\ y \in G \end{cases}$

$$\begin{cases} x \in F \subset F \cup G \subset H \\ y \in G \subset F \cup G \subset H \end{cases}$$

H est un sous-espace vectoriel de E donc $x + y \in H$.
On a montré que $F + G \subset H$

□

Définition: Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque non vide de sous-espaces vectoriels de E. On définit $\sum\limits_{i\in I} F_i$ par

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} F_i &= \left\{ \sum_{i\in I} x_i \mid (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} F_i ; (x_i) \text{ presque nulle } \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i\in I} x_i \mid (x_i) \in \prod_{i\in I} F_i ; \{i \in I \mid x_i \neq 0_E\} \text{ est fini } \right\}\end{aligned}$$

$\sum\limits_{i\in I} F_i$ est l'ensemble de sommes finies obtenues à partir d'éléments de $\prod\limits_{i\in I} F_i$

Exemple:
$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
$\forall i \in \mathbb{N}, F_i = \{x \mapsto ax^i \mid a \in \mathbb{R}\}$
$\sum\limits_{i\in \mathbb{N}} F_i$ est l'ensemble des fonctions polynomiales

Proposition: Une somme quelconque de sous-espaces vectoriels est le plus petit sous-espace vectoriel contenant leur réunion. □

Définition: Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit qu'ils sont en somme directe si

$$\forall u \in F + G, \exists!(x, y) \in F \times G, u = x + y$$

Dans ce cas, l'espace $F + G$ est noté $F \oplus G$

Exemple:
$E = \mathbb{R}^3$
$F = \{(x, 0, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$$G = \left\{ (x, y, z) \mid (S) : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \right\}$$

$F \oplus G$?

— $(0, 0, 0) \in F$ car $0 \in \mathbb{R}$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} u = (x, 0, x) \\ v = (y, 0, y) \end{cases}$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda u + \mu v &= \lambda(x, 0, 0) + \mu(y, 0, y) \\ &= (\lambda x, 0, \lambda x) + (\mu y, 0, \mu y) \\ &= (\lambda x + \mu y, 0, \lambda x + \mu y) \in F \end{aligned}$$

Donc F est un sous-espace vectoriel de E

— $(0, 0, 0) \in G$ car (S) est homogène

$\begin{cases} u = (x, y, z) \in G \\ v = (a, b, c) \in G \end{cases}$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda u + \mu v \in G &\iff \lambda(x, y, z) + \mu(a, b, c) \in G \\ &\iff (\lambda x + \mu a, \lambda y + \mu b, \lambda z + \mu c) \in G \\ &\iff \begin{cases} (\lambda x + \mu a) + (\lambda y + \mu b) + (\lambda z + \mu c) = 0 \\ (\lambda y + \mu b) - (\lambda z + \mu c) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda \overbrace{(x + y + z)}^{=0} + \mu \overbrace{(a + b + c)}^{=0} \\ \lambda \underbrace{(y - z)}_{=0} + \mu \underbrace{(b - c)}_{=0} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

— Soit $w \in E$. On pose $w = (x, y, z)$

$$\begin{aligned} w \in F + G &\iff \exists (u, v) \in F \times G, w = u + v \\ &\iff \exists x' \in \mathbb{R}, \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} w = (x', 0, x') + (a, b, c) \\ a + b + c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \\ &\iff \exists\, (x', a, b, c) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} (x, y, z) = (a + x', b, c + x') \\ a + b + c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \\ &\iff \exists\, (x', a, b, c) \in \mathbb{R}^4, (S') : \begin{cases} a + x' = x \\ b = y \\ c + x' = z \\ a + b + c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(S') est un système linéaire à 4 inconnues (x', a, b, c), 5 équations, 3 paramètres (x, y, z)

$$(S') \iff \begin{cases} b = y \\ c = y \\ x' = z - y \\ a = x - z + y \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

Si $x + 3y - z \neq 0$ alors (S') n'a pas de solutions et donc $w \notin F + G$
Si $x + 3y - z = 0$ alors (S') a une unique solution alors

$$\exists!(u, v) \in F \times G, w = u + v$$

On a montré que

$$F \oplus G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y - z = 0\right\}$$

Proposition: Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E
F et G sont en somme directe si et seuelement si $F \cap G = \{0_E\}$

Preuve: " $\implies$ " On suppose la somme directe.
Soit $x \in F \cap G$.
D'une part, $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$
D'autre part, $0_E = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{(-x)}_{\in G}$
Par unicité, $x = 0_E$
" $\impliedby$ " On suppose $F \cap G = \{0_E\}$
Soit $x \in F + G$ et on supoise que x a deux décompositions :

$$\begin{cases} x = u + v, & u \in F, v \in G \\ x = u' + v', & u' \in F, v' \in G \end{cases}$$

D'où, $u - u' = v' - v$
Or, $\begin{cases} u - u' \in F \\ v - v' \in G \end{cases}$
Donc, $u - u' \in F \cap G = \{0_E\}$
donc $u - u' = 0_E$ donc $u = u'$ donc $v' = v$

$\square$

Remarque:
Ce résultat est inutile pour l'instant (en l'absence d'arguments dimensionnels) pour prouver un resultat de la forme $E = F \oplus G$

EXEMPLE:
$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
$F = \{f \in E \mid f \text{ paire}\}$ et $F = \{f \in E \mid f \text{ impaire}\}$
Prouvons que $E = F \oplus G$
Soit $f \in F \cap G$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x) = -f(x)$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(x)$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$$

donc $f = 0_E$
Ainsi, la somme de F est G est directe

$$F + G = F \oplus G$$

Montrons que $E = F + G$. Soit $f \in E$.

<u>ANALYSE</u> Soient $g \in G$ et $g \in F$ telles que

$$f = g + h$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = -g(x) + h(x) \end{cases}$$

et donc

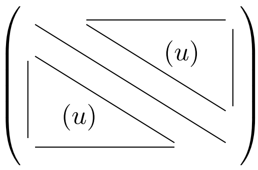
$$\begin{cases} h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ \\ g(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{cases}$$

Donc $F + G = F \oplus G$.
<u>SYNTHÈSE</u> On pose

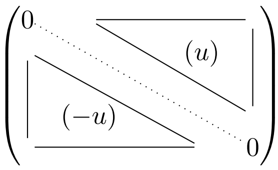
$$\begin{cases} g : x \longmapsto & \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \\ h : x \longmapsto & \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \end{cases}$$

On vérifie que $\begin{cases} g \in F \\ h \in F \\ g + h = f \end{cases}$
On a prouvé que $E = F + G$

EXEMPLE:
$E = \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$
$F = S_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$



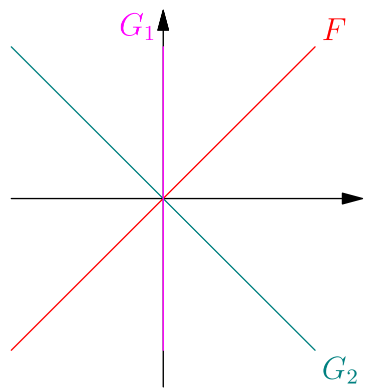
$G = A_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}$



$E = F \oplus G$

> **Définition:** Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que F et G sont <u>supplémentaires</u> dans E si
> $$E = F \oplus G$$
> en d'autres termes,
> $$\forall x \in E, \exists!(y, z) \in F \times G, x = y + z$$

Exemple:
$E = \mathbb{R}^2$
$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x\}$



$G_1 \oplus F = E$ et $G_2 \oplus F = E$
Soit $(x, y) \in E$

$$\begin{aligned}(x,y) &= \underbrace{(x,x)}_{\in F} + \underbrace{(0,y-x)}_{\in G_1} \\ &= \underbrace{\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)}_{\in F} + \underbrace{\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)}_{\in G_2}\end{aligned}$$

Définition: Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille non vide de sous-espaces vectoriels de $(E,+,\cdot)$. On dit qu'ils sont en somme directe si

$$\forall x \in \sum_{i\in I} F_i, \exists!(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} F_i \text{ presque nulle telle que } x = \sum_{i\in I} x_i$$

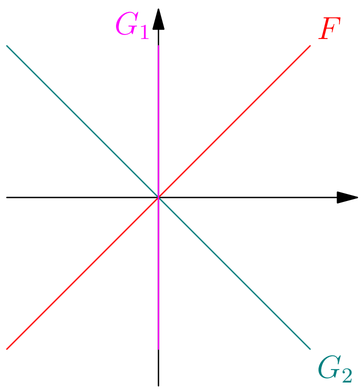
Dans ce cas, on écrit $\bigoplus_{i\in I} F_i$ à la place de $\sum_{i\in I} F_i$

Exemple:
E : l'espace des fonctions polynomiales

$$\forall i \in \mathbb{N}, F_i = \{x \mapsto ax^i \mid a \in \mathbb{K}\}$$

$E = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} F_i$

Exemple:
$E = \mathbb{R}^2$



$$\begin{cases} F = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ G = \{(0,x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ F = \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\} \end{cases}$$

On a $F \cap G \cap H = \{0_E\}$ mais leur somme n'est pas directe

$$\begin{aligned}(0,0) &= \overbrace{(1,1)}^{\in F} + \overbrace{(0,-2)}^{\in G} + \overbrace{(-1,1)}^{\in H} \\ &= \underbrace{(2,2)}_{\in F} + \underbrace{(0,-4)}_{\in G} + \underbrace{(-2,2)}_{\in H}\end{aligned}$$

15.3 Familles de vecteurs

Définition: Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A \in \mathscr{P}(E)$. Le sous-espace vectoriel engendré par A est le plus petit sous espace vectoriel V de E tel que $A \subset V$.
On le note $\mathrm{Vect}(A)$

Exemple:
E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- $\mathrm{Vect}(\{0_E\}) = \{0_E\}$
- $\mathrm{Vect}(\varnothing) = \{0_E\}$
- $\mathrm{Vect}(E) = E$
- Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$
  $\mathrm{Vect}(\{u\}) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u$
- Soient $u, v \in \exists \setminus \{0_E\}$
  $\mathrm{Vect}(\{u,v\}) = \left\{\lambda u + \mu v \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2\right\} = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$

Définition: Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in E \setminus \{0_E\}$. La droite (vectorielle) engendrée par u est $\mathbb{K}u = \mathrm{Vect}(u) = \mathrm{Vect}(\{u\})$. Soit $v \in E$. On dit que u et v sont colinéaires si $v \in \mathbb{K}u$. Si v n'est pas colinéaire à u alors, $\mathrm{Vect}(u,v) = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$ est appelé plan (vectoriel) engendré par u et v.

Exemple:
L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 est une droite vectorielle.

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficiants constants est un plan vectoriel.

$$\left\{y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}) \mid y'' + y = 0\right\} = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$$

Proposition: Soit $(e_i)_{i \in I}$ un famille non vide de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}\left((e_i)_{i\in I}\right) &= \left\{\sum_{i\in I} \lambda_i e_i \mid (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I \text{ et } (\lambda_i) \text{ presque nulle }\right\} \\ &= \sum_{i\in I} \mathbb{K} e_i\end{aligned}$$

Preuve:
On pose $F = \sum_{i\in I} \mathbb{K} e_i$
F est un sous espace vectoriel de E.

$$\forall i \in I, e_i = \underbrace{\sum_{j\in I} \lambda_j e_j}_{\in F} \text{ où } \lambda_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$
$$= \delta_{i,j} \text{ (symbole de Kronecker)}$$

Soit G un sous espace vectoriel de E tel que

$$\forall i \in I, e_i \in G$$

Soit $u \in F$. Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille presque nulle de scalaires telle que $u = \sum_{ii\in I} \lambda_i e_i$
Soit $\{i_1, \dots, i_k\} = \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0_{\mathbb{K}}\}$
Donc,

$$u = \sum_{j=1}^{k} \underbrace{\lambda_{ij} e_{ij}}_{\in G} \in G$$

Donc $F \subset G$ □

Définition: On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E si

$$E = \mathrm{Vect}\left((e_i)_{i\in I}\right)$$

EXEMPLE:

$$E = \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} e_1 & = (1,0,1) \\ e_2 & = (0,1,1) \\ e_3 & = (1,1,1) \\ e_4 & = (1,0,0) \\ e_5 & = (0,1,2) \end{cases}$$

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On cherche $(\lambda_1, \dots, \lambda_5) \in \mathbb{R}^5$ tels que

$$(E): \quad (x,y,z) = \sum_{i=1}^{5} \lambda_i e_i$$

$$\begin{aligned} (E) & \iff (x,y,z) = (\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4, \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_5) \\ & \iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 + \boxed{\lambda_4} = x \\ \lambda_2 + \boxed{\lambda_3} + \lambda_5 = y \\ \boxed{\lambda_1} + \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_5 = z \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} \lambda_4 = x - \lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_3 = y - \lambda_2 - \lambda_5 \\ \lambda_1 = z - \lambda_2 - \lambda_3 - 2\lambda_5 \end{cases} \end{aligned}$$

Par exemple, $(\lambda_1 = z - y, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = y, \lambda_4 = x - z, \lambda_5 = 0)$ est solution
Donc

$$\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) = E$$

Exemple:
$E = \mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} e_1 = (1,0,1,0) \\ e_2 = (0,1,0,1) \\ e_3 = (1,1,1,1) \\ e_4 = (1,-1,1,-1) \\ e_5 = (1,1,0,0) \end{cases}$$

Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \in \mathbb{R}^5$

$$(E) \quad (x,y,z,t)=\sum_{i=1}^{5}\lambda_i e_i \iff \begin{cases} x=\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5 \\ y=\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4+\lambda_5 \\ z=\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4 \\ t=\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_4 \\ L_1\leftarrow L_1-L_3}}{\iff} \begin{cases} \lambda_5=x-z \\ \lambda_5=y-t \\ \lambda_1+\lambda_3+\lambda_4=z \\ \lambda_2+\lambda_3-\lambda_4=t \end{cases}$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\iff} \begin{cases} \lambda_5=x-z \\ \boxed{0=y-t-x+z} \\ \lambda_1+\lambda_3+\lambda_4=z \\ \lambda_1+\lambda_3-\lambda_4=t \end{cases}$$

Par exemple ; $(1,0,0,0)\notin \mathrm{Vect}\,(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5)$

Proposition: Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E et $(u_j)_{j\in J}$ une surfamille de $(e_i)_{i\in I}$ constituée de vecteurs de E :

$$\forall i\in I, \exists j\in J, e_i=u_j$$

Alors, $(u_j)_{j\in J}$ engendre E. □

Proposition: Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E et $i_0\in I$

$$\begin{aligned}(e_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}} \text{ engendre } E &\iff e_{i_0}\in \mathrm{Vect}\left((e_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}\right) \\ &\iff e_{i_0} \text{ est une combinaison linéaire des } e_i \ (i\in I, i\neq i_0)\end{aligned}$$

Preuve: " $\implies$ " $E=\mathrm{Vect}\,((e_i)_{i\neq i_0})$ et $e_{i_0}\in E$

" $\impliedby$ " Soit $u\in E$. Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille presque nulle de scalaires telle que

$$u=\sum_{i\in I}\lambda_i e_i$$

Soit $(\mu_i)_{i\neq i_0}$ une famille de scalaires telle que

$$e_{i_0}=\sum_{i\in I\setminus\{i_0\}}\mu_i e_i$$

D'où,

$$\begin{aligned}u &= \lambda_{i_0} e_{i_0} + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i e_i \\ &= \lambda_{i_0} \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \mu_i e_i + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i e_i \\ &= \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \left(\lambda_{i_0} \mu_i + \lambda_i\right) e_i \\ &\in \text{Vect}\left((e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}\right)\end{aligned}$$

□

Proposition: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E, $i_0 \in I$.

1. On pose $u_i = \begin{cases} e_i & \text{si } i \neq i_0 \\ \lambda e_{i_0} & \text{sinon} \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0_\mathbb{K}\}$
   Alors, $(u_i)_{i \in I}$ engendre E
2. Soit $v \in \text{Vect}\left((e_i)_{i \in I \setminus \ \{i_0\}}\right)$.
   On pose $u_i = \begin{cases} e_i & \text{si } i \neq i_0 \\ e_{i_0} + v & \text{sinon} \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0_\mathbb{K}\}$
   Alors, $(u_i)_{i \in I}$ engendre E

Preuve: 1. Soit $u \in E$. On pose

$$u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$$

où $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^I$ presque nulle

$$\begin{aligned}u &= \lambda_{i_0} e_{i_0} + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i e_i \\ &= \lambda_{i_0} \lambda^{-1} u_{i_0} + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i u_i \\ &\in \text{Vect}\left((u_i)_{i \in I}\right)\end{aligned}$$

2. Soit $u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i \in E$

$$\begin{aligned} u &= \lambda_{i_0} e_{i_0} + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\} \lambda_i e_i} \\ &= \lambda_{i_0} \left(u_{i_0} - v\right) + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i u_i \end{aligned}$$

Or, $v = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \mu_i e_i = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \mu_i u_i$ où $(\mu_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ presque nulle

Donc, $u = \lambda_{i_0} + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \left(\lambda_i - \lambda_{i_0} \mu_i\right) u_i \in \operatorname{Vect}\left((u_i)_{i \in I}\right)$

□

Définition: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs. On dit que $(e_i)_{i \in I}$ est libre si aucun vecteur de cette famille n'est une combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille :

$$\forall i \in I, e_i \notin \operatorname{Vect}\left((e_j)_{j \in I \setminus \{i\}}\right)$$

On dit aussi que les e_i sont linéairement indépendants

Proposition:

$$(e_i)_{i \in I} \text{ est libre} \iff \forall (\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle },\left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0_E \implies \forall i \in I, \lambda_i = O_{\mathbb{K}}\right)$$

Preuve: " $\implies$ " Soit $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^I$ presque nulle. On suppose que

$$\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0_E$$

On suppose aussi qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0_{\mathbb{K}}$
On a alors

$$\lambda_{i_0} e_{i_0} = - \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i e_i$$

$\lambda_{i_0} \neq 0_{\mathbb{K}}$ donc il a un inverse $\lambda_{i_0}^{-1}$ donc

$$e_{i_0} = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \left(-\lambda_i \lambda_{i_0}^{-1}\right) e_i \in \operatorname{Vect}\left((e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}\right)$$

une contradiction ↯

" $\Longleftarrow$ " On suppose que $(e_i)_{i\in I}$ n'est pas libre. On considère $i_0 \in I$ tel que e_{i_0} soit une combinaison linéaire des $e_i, i \in I \setminus \{i_0\}$

$$e_{i_0} = \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \mu_i e_i$$

avec $(\mu_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ famille presque nulle de scalaires.
Alors, $1_{\mathbb{K}} e_{i_0} - \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \mu_i e_i = 0_E$ Par hypothèse

$$\begin{cases} 1_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} \\ \forall i \neq i_0, -\mu_i = 0_{\mathbb{K}} \end{cases}$$

une contradiction $\lightning$

$\square$

Exemple:
$E = \mathbb{R}^3$ On pose $\begin{cases} e_1 = (1,1,0) \\ e_2 = (1,0,1) \end{cases}$
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_E &\iff (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2) = (0,0,0) \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

Donc, (e_1, e_2) est libre.
Exemple:
$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, e_1 = \cos, e_2 = \sin$
Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_E &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) = 0 \\ &\implies \begin{cases} \lambda_1 = 0 & (x = 0) \\ \lambda_2 = 0 & (x = 0 \text{ dans la dérivée}) \end{cases} \end{aligned}$$

Donc (e_1, e_2) est libre.

Proposition: Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille libre de E. Alors

$$\sum_{i\in I} \mathbb{K} e_i = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{K} e_i$$

i.e.

$$\forall u \in \sum_{i\in I} \mathbb{K} e_i, \exists!(\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle telle que } u = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$$

En d'autres termes, tout vecteur de E a au plus une décomposition en combinaisons linéaires des $e_i, i \in I$

Preuve:
Soit $u \in \sum_{i\in I} \mathbb{K}e_i$
On suppose que u a au plus 2 décompositions

$$u = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i = \sum_{i\in I} \mu_i e_i$$

avec (λ_i) et (μ_i) presque nulles.
Alors,

$$0_E = u - u = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i - \sum_{i\in I} \mu_i e_i = \sum_{i\in I} (\lambda_i - \mu_i) e_i$$

Or, $(e_i)_{i\in I}$ est libre donc

$$\forall i \in I, \lambda_i \mu_i = 0_{\mathbb{K}}$$

□

Proposition: Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille libre de E.

1. Toute sous famille de (e_i) est encore libre
2. Soit $u \in E$, $\mathscr{F} = (e_i \mid i \in I) \cup \{u\}$.

$$\mathscr{F} \text{ est libre } \iff u \notin \mathrm{Vect}(e_i \mid i \in I)$$

3. (a) Quand on remplace un vecteur e_i par λe_i avec $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, la famille obtenue est libre.
   (b) Quand on remplace un vecteur e_i par $v + e_i$ avec $v \in \mathrm{Vect}(e_j \mid j \neq i)$, la famille obtenue est libre.

Définition: Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que (e_i) est une base de E si c'est à la fois une famille libre et génératrice de E ; i.e. si

$$E = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{K}e_i$$

i.e. si

$$\forall u \in E, \exists! (\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle telle que } u = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$$

Dans ce cas, on dit que les λ_i sont les coordonnées de u dans la base $(e_i)_{i\in I}$

Exemple: 1. $(1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel

2. (1) est une base de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel
3. $$\begin{cases} u = 1 + i \\ v = 1 - i \end{cases}$$
   (u, v) est une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}$
   En effet, soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   $$\begin{aligned} z = \lambda u + \mu v &\iff a + ib = \lambda + \mu + i(\lambda - \mu) \\ &\iff \begin{cases} a = \lambda + \mu \\ b = \lambda - \mu \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{a+b}{2} \\ \mu = \dfrac{a-b}{2} \end{cases} \end{aligned}$$
   <u>Autre méthode</u>
   $$\begin{aligned} &(1, i) \text{ base} \\ \text{donc } &(1, 1+i) \text{ base} \\ \text{donc } &(1 - (1+i), 1+i) \text{ base} \\ \text{donc } &(-2i, 1+i) \text{ base} \\ \text{donc } &(1 + i - 2i, 1+i) \text{ base} \\ \text{donc } &(1 - i, 1+i) \text{ base} \end{aligned}$$

Exemple (Bases canoniques): 1. La <u>base canonique</u> de $\mathbb{K}^n$ est $(e_1, \dots, e_n)$ où $\forall i, e_i = (0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}, \underbrace{1_{\mathbb{K}}}_{\text{en } i\text{ème}position}, 0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}})$ car

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathbb{K}^n, \exists!(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, u = (x_1, \dots, x_n) &= x_1(1_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}) \\ &+ x_2(0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}) \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ &+ x_n(0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \dots, 1_{\mathbb{K}}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \end{aligned}$$

2. E l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ à coefficiants dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ est <u>infini</u>.
   La <u>base canonique</u> de E est $(x \mapsto x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ car
   $$\forall P \in E, \exists! n \in \mathbb{N}, \exists!(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}, \forall x \in \mathbb{K}, P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

3. $E = \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
   La <u>base canonique</u> de E est $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ où

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,p]\!], E_{i,j} = \left(\sigma_{i,j}^{k,\ell}\right)_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant \ell\leqslant p}}$$

i.e.

$$E_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} & j & \\ & \downarrow & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{K}} & \dots\dots\dots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & 1_{\mathbb{K}} & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & \dots\dots\dots & 0_{\mathbb{K}} \end{pmatrix} & \leftarrow i \end{array}$$

$$\forall A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}, A = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j} E_{i,j}$$

Chapitre 16

Dérivation

16.1 Définition et premières propriétés

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction définie sur un intervalle ouver non vide I à valeurs réelles.

Définition: Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite qui est finie quand $x \to a$.
Dans ce cas, cette limite est notée $f'(a)$ et est appelée nombre dérivée de f en a
On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout $a \in I$.
L'application $\begin{array}{c} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ a \longmapsto f'(a) \end{array}$ est la dérivée de f et est notée f'

Proposition:

f est dérivable en a $\iff$ f a un développement limité d'ordre 1 au voisinage de a

Preuve: " $\Longrightarrow$ " $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + \underset{x\to a}{o}(1)$

donc $f(x)-f(a) = (x-a)f'(a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)$

donc $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)$

" $\Longleftarrow$ " $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)$

Alors, avec $x=a$, $a_0 = f(a)$ et donc

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{a_1(x-a)+o(x-a)}{x-a} = a_1 + o(1) \underset{x\to a}{\longrightarrow} a_1 \in \mathbb{R}$$

□

Proposition: Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Preuve:

$$\forall x, f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x \to a}{o}(x-a)$$

donc

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x) = f(a) + f'(a) \times 0 + 0 = f(a)$$

□

Proposition: Soient f et g dérivables en a

1. $f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2. $f \times g$ est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
3. Si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

Preuve:

$$\begin{cases} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) \\ g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + o(x-a) \end{cases}$$

$$f(x) + g(x) = f(a) + g(a) + (x-a)\underbrace{(f'(a) + g'(a))}_{(f+g)'(a)} + o(x-a)$$

2.

$$f(x) \times g(x) = f(a)g(a) + (x-a)\underbrace{(f(a)g'(a) + g(a)f'(a))}_{(fg)'(a)} + o(x-a)$$

3. On suppose $g(a) \neq 0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{g(x)} &= \frac{1}{g(a)+(x-a)g'(a)+\underset{}{o}(x-a)}\\ &= \frac{1}{g(a)} \times \frac{1}{1+(x-a)\frac{g'(a)}{g(a)}+o(x-a)}\\ &= \frac{1}{g(a)} \times \left(1-(x-a)\frac{g'(a)}{g(a)}+o(x-a)\right)\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{1}{g(a)}\left(f(a)+(x-a)\left(-\frac{f(a)g'(a)}{g(a)}+f'(a)\right)\right)o(x-a)\\ &= \frac{f(a)}{g(a)}+(x-a)\frac{-f(a)g'(a)+f'(a)g(a)}{(g(a))^2}+o(x-a)\end{aligned}$$

□

Proposition: Soit f dérivable en a et g dérivable en $f(a)$. Alors, $f \circ g$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

Preuve:

$$\begin{cases}\forall x, f(x) = f(a)+(x-a)f'(a)+\underset{x\to a}{o}(x-a)\\ \forall y, g(y) = g(f(a))+(y-f(a))g'(f(a))+\underset{y\to f(a)}{o}(y\to f(a))\end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned}g(f(x)) &= g(f(a))+(f(x)-f(a))g'(f(a))+\underset{x\to a}{o}(f(x)-f(a)) \text{ car } f \text{ est continue en } a\\ &= g(f(a))+(x-a)f'(a)g'(f(a))+\underset{x\to a}{o}\left((x-a)f'(a)+\underset{x\to a}{o}(x-a)\right)\\ &= g(f(a))+(x-a)f'(a)g'(f(a))+\underset{x\to a}{o}(x-a)\end{aligned}$$

□

Proposition: On suppose que f est bijective dérivable en a et $f'(a) \neq 0$.

Si f^{-1} est continue, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

Preuve:
$\forall y \neq f(a)$ on pose $x = f^{-1}(y)$.
$y \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$ et $x \xrightarrow[y\to f(a)]{} a$

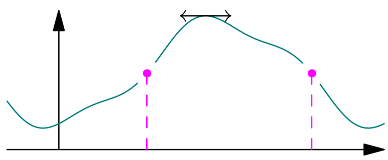
$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \frac{x-a}{f(x)-f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{1}{f'(a)}$$

□

16.2 Théorème de Rolle et accroissements finis

Théorème (Théorème de Rolle)**:** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$.
Alors,

$$\exists c \in]a,b[, f'(c) = 0$$



Preuve:
f est continue sur le segment $[a,b]$. On pose

$$\begin{cases} M = \max\limits_{[a,b]}(f) \\ m = \min\limits_{[a,b]}(f) \end{cases}$$

Cas 1

$$\exists c \in]a,b[, M = f(c)$$

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{\substack{x\to c \\ <}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0 \text{ car } \forall x < c, \begin{cases} f(x)-f(c) \leqslant 0 \\ x-c<0 \end{cases} \\ &= \lim_{\substack{x\to c \\ >}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0 \text{ car } \forall x > c, \begin{cases} f(x)-f(c) \leqslant 0 \\ x-c>0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, $f'(c) = 0$

Cas 2

$$\exists c \in]a, b[, m = f(c)$$

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{\substack{x \to c \\ <}} \leqslant 0 \text{ car } \forall x < c \begin{cases} f(x) - f(c) \geqslant 0 \\ x - c < 0 \end{cases} \\ &= \lim_{\substack{x \to c \\ >}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Donc $f'(c) = 0$

Cas 3

$$\forall c \in]a, b[, f(c) \notin \{m, M\}$$

Alors

$$\begin{cases} M \in \{f(a), f(b)\} \\ m \in \{f(a), f(b)\} \end{cases}$$

Or, $f(a) = f(b)$ donc $M = m$ donc f est constante donc

$$\forall x \in [a, b], f'(x) = 0$$

□

Définition: On dit que f présente un <u>maximum local</u> en a s'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]a - \eta, a + \eta[, f(x) \leqslant f(a)$$

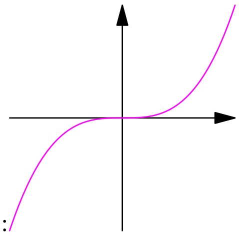
et un <u>minimum local</u> en a s'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]a - \eta, a + \eta[, f(x) \geqslant f(a)$$

Un <u>extremum local</u> est un minimum local ou un maximum local.

Proposition: Soit $a \in I$ tel que $f(a)$ est un extremum local de f où f est dérivable en a. Alors, $f'(a) = 0$ □

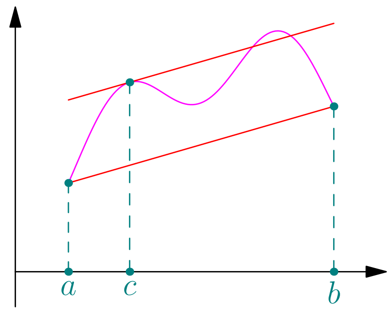
Définition: Soit f dérivable et $a \in I$. On dit que a est un <u>point critique</u> de f si $f'(a) = 0$. On dit que $f(a)$ est une <u>valeur critique</u>



Exemple:
$x \mapsto x^3$
$f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum local

Théorème (Théorème des accroissements finis)**:** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



Preuve:
On pose $\tau = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$
$g : x \mapsto f(x) - \tau x$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
$g(a) - g(b) = f(a) - f(b) - \tau(a - b) = 0$
D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

$$\forall x, g'(x) = f'(x) - \tau$$

Donc, $f'(c) = \tau$ □

Proposition: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable avec I un intervalle non vide.

1. f est croissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$
2. f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \leqslant 0$
3. $\forall x \in I, f'(x) > 0 \implies f$ strictement croissante
4. $\forall x \in I, f'(x) < 0 \implies f$ strictement décroissante
5. f constante $\iff \forall x \in I, f'(x) = 0$

Preuve: 1. “ $\Longrightarrow$ ” On suppose f croissante.
Soit $x \in I$.

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Or, $\forall y, f(y) - f(x)$ et $y - x$ sont de même signe donc $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0$.
Et donc $f'(x) \geqslant 0$.
“ $\Longleftarrow$ ” On suppose que

$$\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$$

Soit $(a, b) \in I^2$. On suppose que $a \leqslant b$.
f est continue sur $[a, b]$
f est dérivable sur $]a, b[$
donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(a) - f(b) = \underbrace{f'(c)}_{\geqslant 0} \underbrace{(a - b)}_{\leqslant 0} \leqslant 0$$

donc $f(a) \leqslant f(b)$
Donc f est croissante.
On procède de la même manière pour les autres propositions □

Théorème (Théorème de la limite de la dérivée)**:** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue (sur I), $a \in I$. On suppose f dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} f'(x)$ existe.
Alors,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[\substack{x \to a \\ \neq}]{} \lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f'(a)$$

Preuve:
On pose $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} f'(x) \in \overline{\mathbb{R}}$.
Soit $x \in I \setminus \{a\}$.
f est continue sur I donc sur $[a, x]$ si $x \geqslant a$ et sur $[x, a]$ si $x < a$
f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ donc sur $]a, x[$ si $x > a$ et sur $]x, a[$ si $x < a$
D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]a, x[\cup]x, a[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$$

— $\forall x < a$, on a $x < c_x < a$
Par encadrement, $c_x \xrightarrow[\substack{x \to a \\ <}]{} a$

— $\forall x > a$, on a $x > c_x > a$
Par encadrement, $c_x \xrightarrow[\substack{x \to a \\ >}]{} a$

Donc,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} c_x = a$$

donc

$$f'(c_x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ \neq}]{} \ell$$

(compositions des limites)

□

Proposition: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, |f'(x)| \leqslant M$$

Alors f est M-lipschitzienne sur I.

Preuve:
Soient $(a, b) \in I^2$.
D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in I$ tel que

$$f(a) - f(b) = f'(c)(a - b)$$

donc

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &= |f'(c)| \, |a - b| \\ &\leqslant M \, |a - b| \end{aligned}$$

□

16.3 Dérivées n-ièmes

Définition: On dit que f est une fois dérivable si f est dérivable. Dans ce cas, on note $f^{(1)}$ la fonction f'.
Pour $n \in \mathbb{N}_*$, on dit que f est dérivable n fois si f est dérivable $n - 1$ fois et $f^{(n-1)}$ est dérivable une fois. Dans ce cas, $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Remarque (Convention):

$$f^{(0)} = f$$

Définition: f est de classe $\mathscr{C}^n$ si f est dérivables n fois et $f^{(n)}$ est continue.

Proposition: Soit f dérivable n fois et $k \leqslant n$.
Alors f est dérivables k fois et $f^{(n)} = \left(f^{(k)}\right)^{(n-k)}$ □

Proposition: Soit f et g deux fonctions dérivables n fois en a.
Alors, $f+g$ est dérivable n fois en a et

$$(f+g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)$$

Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$, alors, $f+g$ est de classe $\mathscr{C}^n$

Preuve (Récurrence immédiate sur n):
□

Proposition (Leibniz)**:** Soient f et g dérivables n fois en a. Alors, $f \times g$ est dérivables n fois en a. et

$$(*) : \qquad (f \times g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n)}(a) g^{(n-k)}(a)$$

Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ alors $f \times g$ est de classe $\mathscr{C}^n$.

Preuve (par récurrence sur n):
— Soient f et g deux fonctions

$$(f \times g)^{(0)}(a) = (f \times g)(a) = f(a)g(a)$$

et

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a) = f^{(0)}(a) g^{(0)}(a) = f(a)g(a)$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $(*)$ vraie quelles que soient les fonctions f et g dérivables n fois en a.
Soient f et g dérivables $n-1$ fois en a. En particulier, elles sont dérivables n fois en a. Donc

$$(f \times g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$$

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \begin{cases} f^{(k)} \text{ est dérivables en } a \\ g^{(n-k)} \text{ est dérivables en } a \end{cases}$$

Donc, $(f \times g)^{(n)}$ est dérivable en a donc $f \times g$ est dérivables $n+1$ fois en a.

$$\begin{aligned}
(f \times g)^{(n+1)}(a) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)}(a) g^{(n-k)}(a) + f^{(k)}(a) g^{(n-k+1)}(a) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(a) \times g^{(n-k+1)}(a) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k+1)}(a) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(a) g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)}(a) g(a) + f(a) g^{(n+1)}(a) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(a) g^{(n+1-k)}(a)
\end{aligned}$$

□

Proposition: Soient f et g dérivables n fois (resp. de classe $\mathscr{C}^n$). On suppose $g(a) \neq 0$.
Alors, $\dfrac{f}{g}$ est dérivables n fois (resp. $\mathscr{C}^n$) en a.

Preuve (par récurrence sur n)*:*
Le résultat est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour toutes fonctions f et g dérivables n fois en a avec $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est aussi dérivables n fois en a.

Soient f et g dérivables $n+1$ fois en a telles que $g(a) \neq 0$. Alors, $\dfrac{f}{g}$ dérivable en a. et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

- f' est dérivables n fois en a
- g est dérivables n fois en a
- f est dérivables n fois en a
- g' est dérivables n fois en a

Donc, $f' \times g - f \times g'$ et g^2 sont dérivables n fois en a et $g(a)^2 \neq 0$
D'après l'hypothèse de récurrence, $\dfrac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$ est dérivable n fois en a
donc $\dfrac{f}{g}$ dérivable $n+1$ fois en a □

Proposition: Soit f dérivable n fois en a et g dérivable n fois en $f(a)$ (resp. f et g de classe $\mathscr{C}^n$).
Alors, $g \circ f$ est dérivable n fois en a (resp. de classe $\mathscr{C}^n$).

Preuve (similaire à la précédente)*:*

□

Définition: On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si f est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, i.e. f est dérivable une infinité de fois.

Proposition (formule de Taylor avec reste intégral)**:** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et $a \in I$. Alors

$$(*) \qquad \forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\ dt$$

Preuve (par récurrence sur n)*:*

— Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $a \in I$. Soit $x \in I$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x f^{(1)}(t)\frac{(x-t)^0}{0!}\ dt &= f(a) + \int_a^x f'(t)\ dt \\ &= f(a) + f(x) - f(a) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(*)$ est vraie pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $I \ni a$. Soit f de classe $\mathscr{C}^{n+2}$. Alors, f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ donc

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\ dt$$

Soit $x \in I$. On pose $\begin{cases} u : t \mapsto -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \\ v = f^{(n+1)} \end{cases}$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ donc

$$\int_a^x u'(t)v(t)\ dt = [u(t)v(t)]_a^x - \int_a^x u(t)v'(t)\ dt$$

donc

$$\int_a^x f^{(n+1)}(t)\,dt = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t)\right]_a^x + \int_a^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,dt$$

D'où,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a) + \int_a^x f^{(x+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,dt$$

□

Proposition (Inégalité de Taylor-Lagrange)**:** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M$$

Alors, pour tout $a \in I$,

$$\forall x \in I, \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right| \leqslant M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Preuve:
D'après la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\begin{aligned}\forall x \in I, \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}\right| &= \left|\int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt\right| \\ &\leqslant \left|\int_a^x \left|f^{(n+1)}\right|(t)\frac{|x-t|^n}{n!}\,dt\right| \\ &\leqslant \left|\int_a^x M\frac{|x-t|^n}{n!}\,dt\right|\end{aligned}$$

On suppose $x \geqslant a$.

$$\begin{aligned}\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| &\leqslant M\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt = M\left[-\frac{x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^x \\ &\leqslant M\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

On suppose $x \leqslant a$.

$$\begin{aligned}\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| &\leqslant M\int_x^a \frac{(t-x)^n}{n!}\,dt\\ &\leqslant M\left[\frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_x^a\\ &\leqslant M\frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}=M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

□

Exemple:

$$\forall x\in\mathbb{R}, e^x=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

On pose

$$\begin{aligned}f:\mathbb{R}&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longmapsto e^x\end{aligned}$$

. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $a=0$.
f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}^+$ et $I=[0,x]$

$$\forall t\in I, \left|f^{(n+1)}(t)\right|=\left|e^t\right|=e^t\leqslant e^x$$

$$\forall t\in I, \left|e^t-\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\right|\leqslant e^x\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

donc

$$\forall t\in I, \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}=e^t$$

donc

$$e^x=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^k}{k!}$$

Exercice:
Montrer que $\ln 2=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$

16.4 Fonctions à valeurs complexes

Définition: Soient $f:I\to\mathbb{C}$, (I intervalle de $\mathbb{R}$) et $a\in I$.
f est dérivable en a si $\lim_{\substack{x\to a\\ \neq}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\in\mathbb{C}$

Proposition:

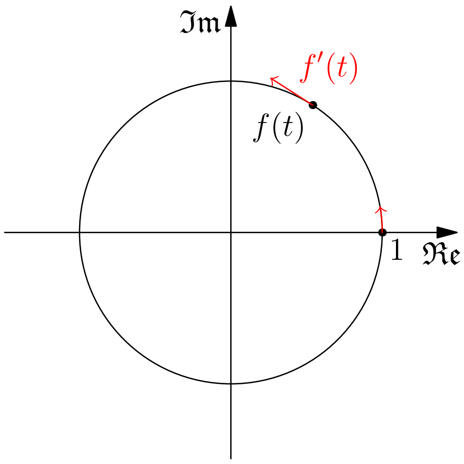
$$f \text{ est dérivable en } a \iff \mathfrak{Re}(f) \text{ et } \mathfrak{Im}(f) \text{ sont dérivables en } a$$

Dans ce cas, $f'(a) = \mathfrak{Re}(f)'(a) + i\mathfrak{Im}(f)'(a)$ □

Proposition: La somme, le produit, de fonctions dérivables sont dérivables ; le quotient également si le dénominateur ne s'annule pas. □

Proposition: idem avec les dérivées n-ièmes □

Remarque (Attention ⚠):
Le théorème de Rolle n'est plus vraie.



$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{it} \end{aligned}$$

$f(0) = f(2\pi) = 1$
f est continue sur $[0, 2\pi]$ et dérivable sur $]0, 2\pi[$
$\forall t, f'(t) = ie^{it} \neq 0$

Proposition: La formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange sont aussi vrais dans $\mathbb{C}$. □

Chapitre 17

Dimension finie

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie si E a au moins une famille génératrice finie. On dit que E est de dimension infinie sinon.

Théorème (Théorème de la base extraite)**:** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie. Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E. Alors, il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{E}$ telle que $\mathscr{B} \subset \mathscr{G}$.

Preuve (par récurrence sur $\#G = \mathrm{Card}(G)$)*:*

— Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul engendré par $\mathscr{G} = (u)$.
Si $u = 0_E$, alors $E = \{0_E\}$: une contradiction ↯
Donc $u \neq 0_E$ donc (u) est libre. En effet,

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u = 0_E \implies \lambda = 0_{\mathbb{K}}$$

Donc $\mathscr{G}$ est une base de E.

— Soit $n \in \mathbb{N}_*$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose que si E a une famille génératrice constituée de n vecteurs, alors on peut extraire de cette famille une base de E.
Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E avec $n+1$ vecteurs.
Si $\mathscr{G}$ est libre, alors $\mathscr{G}$ est une base de E.
Si $\mathscr{G}$ n'est pas libre, alors il existe $u \in \mathscr{G}$ tel que $u \in \mathrm{Vect}(\mathscr{G} \setminus \{u\})$
Donc $\mathscr{G} \setminus \{u\}$ engendre E. Or, $\mathscr{G} \setminus \{u\}$ possède n vecteurs. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que

$$\mathscr{B} \subset \mathscr{G} \setminus \{u\} \subset \mathscr{G}$$

□

Corollaire: Tout espace de dimension finie a une base. $\square$

Théorème (Théorème de la base incomplète)**:** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E. $\mathscr{L}$ une famille libre de E. Alors, il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que

$$\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \text{ et } \mathscr{B} \setminus \mathscr{L} \subset \mathscr{G}$$

Preuve (par récurrence sur $\#(\mathscr{G} \setminus \mathscr{L})$)*:*

— Avec les notations précédentes, on suppose que $\mathscr{G} \setminus \mathscr{L} \neq \varnothing$

$$\forall u \in \mathscr{G}, u \in \mathscr{L}$$

Donc $\mathscr{G} \subset \mathscr{L}$ donc $\mathscr{L}$ est génératrice donc $\mathscr{L}$ est une base de E. On pose $\mathscr{B} = \mathscr{L}$ et alors

$$\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \text{ et } \mathscr{B} \setminus \mathscr{L} = \varnothing \subset \mathscr{G}$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que si $\mathscr{G}$ est génératrice et $\mathscr{L}$ libre avec $\#(\mathscr{G} \setminus \mathscr{L}) = n$ alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que

$$\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \text{ et } \mathscr{B} \setminus \mathscr{L} \subset \mathscr{G}$$

Soient à présent $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E et $\mathscr{L}$ une famille libre de E telles que $\#(\mathscr{G} \setminus \mathscr{L}) = n + 1 > 0$
Si $\mathscr{L}$ engendre E, alors $\mathscr{L}$ est une base de E. On pose $\mathscr{B} = \mathscr{L}$ et on a bien

$$\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \text{ et } \mathscr{B} \setminus \mathscr{L} = \varnothing \subset \mathscr{G}$$

On suppose que $\mathscr{L}$ n'engendre pas E. Il existe $u \in \mathscr{G}$ tel que $u \notin \overrightarrow{(\mathscr{L})}$ (car sinon, $\mathscr{G} \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{L})$ et donc $\underbrace{\mathrm{Vect}(\mathscr{G})}_{=E} \subset \underbrace{\mathrm{Vect}(\mathscr{L})}_{\subset E}$
Donc $\mathscr{L} \cup \{u\}$ est libre. On pose $\mathscr{L}' = \mathscr{L} \cup \{u\}$

$$\mathscr{G} \setminus \mathscr{L}' = \mathscr{G} \setminus (\mathscr{L} \cup \{u\}) = (\mathscr{G} \setminus \mathscr{L}) \setminus \{u\}$$

donc $\#(\mathscr{G} \setminus \mathscr{L}') = n + 1 - 1 = n$
D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $\mathscr{B}$ une base de E telle que

$$\mathscr{L} \subset \mathscr{L}' \subset \mathscr{B} \text{ et } \mathscr{B} \setminus \mathscr{L}' \subset \mathscr{G}$$

$$\mathscr{B} \setminus \mathscr{L} = \underbrace{\mathscr{B} \setminus \mathscr{L}'}_{\subset \mathscr{G}} \cup \underbrace{\{u\}}_{\subset \mathscr{G} \text{ car } u \in \mathscr{G}}$$

On a $\mathscr{B} \setminus \mathscr{L} \subset \mathscr{G}$

$\square$

Théorème: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E ont le même cardinal.

Preuve:
Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E et $\mathscr{B} \subset \mathscr{G}$ une base de E. On note $n = \#\mathscr{B}$
Soit $\mathscr{B}'$ une base de E. On pose $p = n - \#(\mathscr{B} \cap \mathscr{B}')$. Montrons par récurrence sur p que $\#\mathscr{B} = \#\mathscr{B}'$

— On suppose que $p = 0$. Alors, $\#(\mathscr{B} \cap \mathscr{B}') = n$
  Or, $\mathscr{B}' \cap \mathscr{B} \subset \mathscr{B}$ donc $\mathscr{B} \cap \mathscr{B}' = \mathscr{B}$ donc $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}'$ et donc $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$
— Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que si $\mathscr{B}'$ est une base de E telle que $n - \#(\mathscr{B} \cap \mathscr{B}') = p$, alors $\#\mathscr{B}' = n$
  Aoit $\mathscr{B}'$ une base de E telle que $n - \#(\mathscr{B} \cap \mathscr{B}') = p + 1 > 0$
  Donc $\mathscr{B} \cap \mathscr{B}' \neq \mathscr{B}$. Soit $u \in \mathscr{B}' \setminus \mathscr{B}$. D'après le lemme d'échange, il existe $v \in \mathscr{B} \setminus \mathscr{B}'$ tel que $\mathscr{B}' \setminus \{u\} \cup \{v\}$ est une base de E. On pose $\mathscr{B}'' = \mathscr{B}' \setminus \{u\} \cup \{v\}$

$$\begin{aligned}\mathscr{B}'' \cap \mathscr{B} &= ((\mathscr{B}' \setminus \{u\}) \cap \mathscr{B}) \cup \{v\} \\ &= (\mathscr{B}' \cap \mathscr{B}) \cup \{v\}\end{aligned}$$

  donc,

$$\begin{aligned}n - \#(\mathscr{B}'' \cap \mathscr{B}) &= n - (\#(\mathscr{B}' \cap \mathscr{B}) + 1) \\ &= p + 1 - 1 \\ &= p\end{aligned}$$

  D'après l'hypothèse de récurrence,

$$\#\mathscr{B}'' = n$$

  Or, $\#\mathscr{B}'' = \#\mathscr{B}'$

□

Lemme: Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E telles que $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}'$. Alors, $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$.

Preuve:
On suppose $\mathscr{B}' \neq \mathscr{B}$. Soit $u \in \mathscr{B}' \setminus \mathscr{B}$ $u \in E = \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$ donc $\mathscr{B} \cup \{u\}$ n'est pas libre. Donc $\mathscr{B} \cup \{u\} \subset \mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}'$ est libre donc $\mathscr{B} \cup \{u\}$ est libre : une contradiction $\lightning$ □

Lemme (Lemme d'échange)**:** Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E et $u \in \mathscr{B}_1 \setminus \mathscr{B}_2$. Alors, il existe $v \in \mathscr{B}_2$ tel que $(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ soit une base de E.

Preuve (1$^{\text{nde}}$ méthode)*:*
On suppose que pout tout $v \in \mathscr{B}_2$, $(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ n'est pas une base de E Soit $v \in \mathscr{B}_2$.

- Supposons $(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ non libre. $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}$ est libre. Donc $v \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$
- Supposons $(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ non génératrice. Comme $\mathscr{B}_1$ engendre E, $u \notin \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{v\})$. On suppose que $\mathscr{B}_1 \neq \mathscr{B}_2$. $\forall v \in \mathscr{B}_2 \setminus \mathscr{B}_1, \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{v\}) = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1) = E \ni u$ donc, $(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ engendre E et donc
$$v \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$$
On a aussi
$$\forall v \in \mathscr{B}_1 \setminus \{u\}, v \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$$
Comme $u \notin \mathscr{B}_2$, on a
$$\forall v \in \mathscr{B}_2, v \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$$
docn
$$E = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_2) \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$$
donc $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}$ engendre E donc $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}$ est une base de E. Or, $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} \subset \mathscr{B}_1$, donc $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} = \mathscr{B}_1$

□

Preuve (2$^{\text{nde}}$ méthode)*:*
On suppose que pout tout $v \in \mathscr{B}_2$, $(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ n'est pas une base de E

- Comme $u \in \mathscr{B}_1 \setminus \mathscr{B}_2$, nécéssairement $\mathscr{B}_1 \neq \mathscr{B}_2$ donc $\mathscr{B}_2 \not\subset \mathscr{B}_1$, donc $\mathscr{B}_2 \setminus \mathscr{B}_1 \neq \varnothing$
- Soit $v \in \mathscr{B}_2 \setminus \mathscr{B}_1$. Il existe $(\lambda_w)_{w \in \mathscr{B}_1}$ une famille de scalaires presque nulle telle que
$$v = \sum_{w \in \mathscr{B}_1} \lambda_w w - \lambda_u u + + \sum_{w \in \mathscr{B}_1 \setminus \{u\}} \lambda_w w$$

Si $\lambda_u \neq 0_E$, alors

$$\begin{aligned} u &= \lambda_u^{-1}\left(v - \sum_{w \in \mathscr{B}_1 \setminus \{u\}} \lambda_w w\right) \\ &\in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} \cup v) \end{aligned}$$

donc $\mathscr{B}_1 \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} \cup \{v\})$
et donc $E \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} \cup \{v\})$
et donc $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} \cup \{v\}$ engendre E
donc $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} \cup \{v\}$ n'est pas libre
donc $v \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$ (car $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}$ est libre
donc $\lambda_u = 0_{\mathbb{K}}$ ↯
'
Donc, $\lambda_u = 0_{\mathbb{K}}$, docn $v \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$
On vient de prouver que

$$\begin{aligned} \mathscr{B}_2 \setminus \mathscr{B}_1 &\subset \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}) \\ \mathscr{B}_1 \setminus \{u\} &\subset \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}) \end{aligned}$$

Comme $u \notin \mathscr{B}_2$,

$$\mathscr{B}_2 \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$$

donc

$$E = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_2) \subset \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\})$$

donc $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}$ engendre E. Donc, $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}$ est une base de E.
Or, $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} \subset \mathscr{B}_1$, donc $\mathscr{B}_1 \setminus \{u\} = \mathscr{B}_1$

□

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Le cardinal commun à toutes les bases de E est appelé <u>dimension</u> de E est notée $\dim(E)$ ou $\dim_{\mathbb{K}}(E)$
C'est donc aussi le nombre de coordonnées de n'importe quel vecteur dans n'importe quelle base.

Exemple:

1. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ et $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$
2. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$
3. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$

Corollaire: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{L}$ une famille libre de E, $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E. On note $n = \dim(E)$

1. $\#\mathscr{G} \geqslant n$ et $(\#\mathscr{G} = n \implies \mathscr{G}$ est une base de $E)$
2. $\#\mathscr{L} \leqslant n$ et $(\#\mathscr{L} = n \implies \mathscr{L}$ est une base de $E)$

Corollaire: $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est de dimension infinie. $\forall i \in \mathbb{N}, e_i : x \mapsto x^i$
$(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Proposition: Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $E \times F$ est de dimension finie et $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$

Preuve:
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F. On pose

$$\begin{cases} u_1 &= (e_1, 0_F) \\ u_2 &= (e_2, 0_F) \\ &\vdots \\ u_n &= (e_n, 0_F) \\ u_{n+1} &= (0_E, f_1) \\ u_{n+2} &= (0_E, f_2) \\ &\vdots \\ u_{n+p} &= (0_E, f_p) \end{cases}$$

Soit $(x, y) \in E \times F$.

$$\begin{cases} \exists (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \exists (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{j=1}^{p} y_j f_j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (x, y) &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{p} y_j f_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i (e_i + 0_F) + \sum_{j=1}^{p} y_j (0_E, f_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i u_i + \sum_{j=1}^{p} y_j u_{n+j} \end{aligned}$$

Donc, $E \times F = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_{n+p})$ donc $E \times F$ est de dimension finie.
Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+p}) \in \mathbb{K}^{n+p}$ tel que

$$(*) : \quad \sum_{k=1}^{n+p} \lambda_k u_k = 0_{E \times F} = (0_E, 0_F)$$

$$(*) \iff \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(e_k, 0_F) + \sum_{k=n+1}^{p} \lambda_k(0_E, f_{k-n}) = (0_E, 0_F)$$

$$\iff \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0_E \\ \displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} \lambda_k f_{k-n} = 0_F \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall k \in [\![1, n]\!], \lambda_k = 0_{\mathbb{K}} & \text{(car } (e_1, \ldots, e_n) \text{ est libre)} \\ \forall k \in [\![n+1, n+p]\!], \lambda_k = 0_{\mathbb{K}} & \text{(car } (f_1, \ldots, f_n) \text{ est libre)} \end{cases}$$

Donc $(u_1, \ldots, u_{n+p})$ est une base de $E \times F$. Donc, $\dim(E \times F) = n + p = \dim(E) + \dim(F)$ □

Remarque (Convention):

$$\dim\big(\{0_E\}\big) = 0$$

Théorème: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E. Alors, F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$
Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$

Preuve:
On considère

$$A = \{k \in \mathbb{N} \mid \text{il existe une famille libre de } F \text{ à } k \text{ éléments}\}$$

On suppose $F \neq \{0_E\}$.
- Soit $u \in F \setminus \{0_E\}$. (u) est libre donc $1 \in A$ et donc $A \neq \varnothing$
- Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de F. Alors, $\mathscr{L}$ est une famille libre de E donc $\#\mathscr{L} \leqslant \dim(E)$
  Donc A est majorée par $\dim(E)$
  On en déduit que A a un plus grand élément p.
- Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de F avec p éléments.
  Si $\mathscr{L}$ n'engendre pas F, alors il existe $u \in F$ tel que $u \notin \mathrm{Vect}(\mathscr{L})$ et donc $\mathscr{L} \cup \{u\}$ est une famille libre de F, donc $p + 1 \in A$ en contradiction avec la maximalité de p.
  Donc $\mathscr{L}$ est une base de F donc F est de dimension finie et $\dim(F) = p \leqslant \dim(E)$

Soit $\mathscr{B}$ une base de F. Alors, $\mathscr{B}$ est aussi une famille de libre de de E. Donc $\#\mathscr{B} \leqslant \dim(E)$ donc $\dim(F) = \dim(E)$
Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $\mathscr{B}$ est une base de E, et donc $F = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}) = E$ □

Proposition (Formule de Grassmann)**:** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espace vectoriels de E. Alors,

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Preuve:
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $F \cap G$. $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille libre de F.
On complète $(e_1, \dots, e_p)$ en une base $(e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_q)$ de F.
De même, on complète $(e_1, \dots, e_p)$ en une base $(e_1, \dots, e_p, v_1, \dots, v_r)$ de G.
On pose $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_q, v_1, \dots, v_r)$. Montrons que $\mathscr{B}$ est une base de $F + G$

— Soit $u \in F + G$
  On pose $u = v + w$ avec $\begin{cases} v \in F \\ w \in G \end{cases}$.
  On pose $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{q} \mu_i u_i$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \lambda_q) \in \mathbb{K}^{p+q}$
  On pose aussi $w = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i' e_i + \sum_{j=1}^{r} \nu_j v_j$ avec $(\lambda_1', \dots, \lambda_p', \nu_1, \dots, \nu_r) \in \mathbb{K}^{p+r}$
  D'où,
$$u = \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + \lambda_i') e_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j u_j + \sum_{k=1}^{r} \nu_k v_k \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$$

— Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q, \nu_1, \dots, \nu_r) \in \mathbb{K}^{p+q+r}$.
  On suppose
$$(*) \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j u_j + \sum_{k=1}^{r} \nu_k v_k = 0_E$$
  D'où,
$$\underbrace{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j u_j}_{\in F} = \underbrace{-\sum_{k=1}^{r} \nu_j v_k}_{\in G}$$
  Donc,
$$f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j u_j \in F \cap G$$
  Comme $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de $F \cap G$, $\exists!(\lambda_1', \dots, \lambda_p') \in \mathbb{K}^p$ tel que
$$f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i' e_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i' e_i + \sum_{j=1}^{q} 0_{\mathbb{K}} u_j$$

Comme $(e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_q)$ est une base de F,

$$\forall k \in [\![1, q]\!], \mu_j = 0_{\mathbb{K}}$$

De même,

$$\forall k \in [\![1, r]\!], \nu_k = 0_{\mathbb{K}}$$

On remplace dans $(*)$ pour trouver

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0_E$$

Comme $(e_1, \dots, e_p)$ est libre,

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$$

Donc $\mathscr{B}$ est libre.
Donc,

$$\begin{aligned}\dim(F+G) &= p+q+r \\ &= (p+q)+(p+r)-p \\ &= \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)\end{aligned}$$

□

Corollaire: Avec les hypothèse précédentes,

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases}$$

Preuve: "$\implies$" On suppose $E = F \oplus G$
Comme la somme est directe, $F \cap G = \{0_E\}$

$$\begin{aligned}\dim(E) &= \dim(F) \\ &= \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G) \\ &= \dim(F)+\dim(G)\end{aligned}$$

"$\impliedby$" On suppose $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.
On sait déjà que $F + G = F \oplus G$

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = \dim(E)$$

Donc $F + G = E$

□

Proposition: Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F. L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^n &\longrightarrow F \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \end{aligned}$$

est bijective.
Si $\mathbb{K}$ est infini, $\mathbb{K}^n$ aussi et donc F aussi.
Si $\#\mathbb{K} = p \in \mathbb{N}_*$,

$$\begin{array}{l} \#\mathbb{K}^n = p^n \\ \quad \parallel \\ \#F \end{array}$$

Chapitre 18

Polynômes formels

18.1 Définition

Définition: — Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une suite presque nulle de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

— Le polynôme nul, noté 0 est la suite nulle.

— Soit $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un polynôme non nul.
$\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0_{\mathbb{K}}\}$ est non-vide et majoré. Le degré de P est $\max\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0_{\mathbb{K}}\}$, et on le note $\deg(P)$ et $a_{\deg(P)}$ est le coefficiant dominant de P, il est noté $\mathrm{dom}(P)$.

— Le degré du polynôme nul est $-\infty$

Proposition
Définition: Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes à coefficiants dans $\mathbb{K}$. Alors, $P + Q = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un polynôme appelé somme de P et Q

Preuve:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1, a_n = 0$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_2, b_n = 0$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$ donc

$$\forall n \geqslant N, a_n + b_n = 0 + 0 = 0$$

donc $P+Q$ est une suite presque nulle. □

Proposition
Définition: Soient $P=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes à coefficiants dans $\mathbb{K}$. On pose

$$\forall n\in\mathbb{N}, c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$$

La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque nulle. Ce polynôme est appelé produit de P et Q et noté PQ.

Preuve:

$$\exists N_1\in\mathbb{N}, \forall n\geqslant N_1, a_n=0$$
$$\exists N_2\in\mathbb{N}, \forall n\geqslant N_2, b_n=0$$

On pose $N=N_1+N_2$

$$\forall n\geqslant N, c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=\sum_{k=0}^{N_1}a_kb_{n-k}+\sum_{k=N_1+1}^{n}a_kb_{n-k}$$

$\forall k\geqslant N_1+1$, $a_k=0$ donc $\displaystyle\sum_{k=N_1+1}^{n}a_kb_{n-k}=0$
$\forall k\leqslant N_1$, $b-k\geqslant n-N_1\geqslant N_1+N_2-N_1\geqslant N_2$ donc $\forall k\leqslant N_1, b_{n-k}=0$
et donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{N_1}a_kb_{n-k}=0$
Donc
$$\forall n\geqslant N, c_n=0$$
□

Remarque (Notation):
Soit $P=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, un polynôme à coefficiants dans $\mathbb{K}$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. Le polynôme $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est noté λP

Remarque (Notation):
On pose $X=(0_\mathbb{K},1_\mathbb{K},0_\mathbb{K},\dots)=(\delta_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$

Exemple:

$$\begin{aligned}
X^2 &= XX \\
&= (0 \times 0, 0 \times 1 + 1 \times 0, 0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0, 0, \ldots) \\
&= (0, 0, 1, 0, \ldots)
\end{aligned}$$

Théorème: Soit $P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un polynôme non nul à coefficiants dans $\mathbb{K}$. Alors

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad \text{où } n = \deg(P) \text{ et } X^0 = (1, 0, \ldots)$$

Preuve:

Pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: "$X^k = (\delta_{k,n})_{\in \mathbb{N}}$" où $\delta_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$

- $\delta_{0,n} = (1, 0, \ldots) = X^0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vrai
- Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}(k)$ vraie.

  $$X^{k+1} = X^k\, X = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

  où

  $$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{j=0}^{n} \delta_{k,j} \delta_{1,n-j}$$

  Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in [\![0, n]\!]$

  $$\begin{aligned}
  \delta_{k,j}\delta_{1,n-j} \neq 0 &\iff \begin{cases} k = j \\ 1 = n - j \end{cases} \\
  &\iff \begin{cases} k = j \\ n = k + 1 \end{cases}
  \end{aligned}$$

  Donc, si $n \neq k + 1$, alors

  $$\forall j \in [\![0, n]\!], \delta_{k,j}\delta_{1,n-j} = 0$$

  et donc $c_n = 0$

  $$c_{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} \delta_{k,j}\delta_{1,j+1-j} = \delta_{k,k}\delta_{1,1} = 1$$

  Donc

  $$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \delta_{k+1,n}$$

  donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie

Ainsi, $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $P = (a_0, \ldots, a_n, 0, \ldots)$ un polynôme de degré n.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k X^k &= a_0(1,0,0,0,\ldots)\\ &+ a_1(0,1,0,0,\ldots)\\ &+ a_2(0,0,1,0,\ldots)\\ &\vdots\\ &+ a_n(0,\ldots,0,1,0,\ldots)\\ &= (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)\\ &= P\end{aligned}$$

$\square$

Remarque (Notation):
On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficiants dans $\mathbb{K}$ dont l'indéterminée $(0,1,0,\ldots)$ est notée X.

Proposition: $\big(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot\big)$ est une <u>$\mathbb{K}$-algèbre commutative</u> i.e.

1. $\big(\mathbb{K}[X], +, \times\big)$ est un anneau commutatif
2. $\big(\mathbb{K}[X], +, \cdot\big)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (P,Q) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2, \lambda \cdot (P \times Q) = (\lambda \cdot P) \times Q = P \times (\lambda \cdot Q)$

Preuve: 1. $(\mathbb{K}[X], +)$ est un groupe abélien car $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

— $X^0 = (1, 0, \ldots)$ est le neutre de $\times$
En effet, $\forall P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$, en posant $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = PX^0$ on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \delta_{k,n-k} = a,$$

donc $PX^0 = P$

— $\times$ est commutative : $\forall P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X], \forall Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in$

$\mathbb{K}[X]$, on pose $R = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} = PQ$, $S = (d_n)_{n\in\mathbb{N}} = QP$ alors

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, c_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j \qquad (j = n-k) \\ &= \sum_{j=0}^{n} b_j a_{n-j} \\ &= d_n\end{aligned}$$

donc $PQ = QP$

— Soient

$$\begin{cases} P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X] \\ Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X] \\ R = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X] \end{cases}$$

On pose

$$\begin{cases} S = (d_n)_{n\in\mathbb{N}} = PQ \\ T = (e_n)_{n\in\mathbb{N}} = SR = (PQ)R \\ U = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} = QR \\ V = (g_n)_{n\in\mathbb{N}} = PU = P(QR) \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, e_n &= \sum_{k=0}^{n} d_k c_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) c_{n-k} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} a_j b_{k-j} c_{n-k} \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=j}^{n} b_{k-j} c_{n-k} \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{\ell=0}^{n-j} b_\ell c_{n-j-\ell} \qquad (\ell = k-j) \\ &= \sum_{j=0}^{n} a_j f_{n-j} \\ &= g_n\end{aligned}$$

Donc $T = V$

— Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, R = (C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois polynômes et $P(Q+R) = (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $PQ + PR = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, d_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k(b_{n-k} + c_{n-k}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k} \\ &= e_n\end{aligned}$$

Donc, $\big(\mathbb{K}[X], +, \times\big)$ est un anneau commutatif

2. $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
   $\big(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot\big)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. D'après la propriété précédente,

   $$\mathbb{K}[X] = \operatorname{Vect}\big((X^n \mid n \in \mathbb{N})\big)$$

   donc $\mathbb{K}[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}, P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes. On pose $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = PQ, R = (d_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda(PQ), S = (e_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda P)Q, T = (f_n)_{n\in\mathbb{N}} = P(\lambda Q)$.

   $$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, d_n = \lambda c_n &= \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) b_{n-k} = e_n \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (\lambda b_{n-k}) = f_n\end{aligned}$$

□

Remarque:
$(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative (si $n > 1$)

Proposition: $i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ \lambda & \longmapsto & \lambda X^0 \end{array}$ est un morphisme d'algèbre injectif, i.e.

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \begin{cases} i(\lambda + \mu) = i(\lambda) + i(\mu) \\ i(\lambda \cdot \mu) = i(\lambda) \times i(\mu) \end{cases}$$

et i est injective.

Remarque (Notation):
On identifie $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $\lambda X^0 \in \mathbb{K}[X]$. Ainsi, on peut écrire $X^0 = 1$, on peut

écrire $2 + X + 3X^2$ au lieu de $2X^0 + X + 3X^2$

Proposition: Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$

- $\deg(P+Q) \leqslant \max\big(\deg(P), deg(Q)\big)$
- Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors
  - $\deg(P+Q) = \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$
  - $\operatorname{dom}(P+Q) = \begin{cases} \operatorname{dom}(P) & \text{si } \deg(P) > \deg(Q) \\ \operatorname{dom}(Q) & \text{si } \deg(P) < \deg(Q) \end{cases}$
- Si $\deg(P) = \deg(Q)$ et $\operatorname{dom}(P) + \operatorname{dom}(Q) \neq 0$,
  alors $\begin{cases} \deg(P+Q) = \deg(P) = \deg(Q) \\ \operatorname{dom}(P+Q) = \operatorname{dom}(P) + \operatorname{dom}(Q) \end{cases}$
- Si $\deg(P) = \deg(Q)$ et $\deg(P) + \deg(Q) = 0$, alors $\deg(P+Q) < \deg(P)$

Preuve:
- Si $P = 0$, alors $\deg(P+Q) = \deg(Q)$ et donc $\max\big(\deg(P), \deg(Q)\big) = \max\big(-\infty, \deg(Q)\big)$
  On a bien $\deg(P+Q) \leqslant \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$
- De même avec $Q = 0$
- On suppose $P \neq 0$ et $Q \neq 0$
  On pose $\begin{cases} P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k & p = \deg(P) \\ Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} b_k X^k & q = \deg(Q) \end{cases}$
  On peut supposer $p \geqslant q$. On pose $b_{q+1} = \ldots = b_p = 0$ si $p > q$
  Ainsi, $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} b_k X^k$
  $P+Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (a_k+b_k) X^k$ donc $\deg(P+Q) \leqslant p$ et $p = \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$
  De plus, $a_p + b_p = \begin{cases} \underset{\neq 0}{\operatorname{dom}(P)} & \text{si } p > q \\ \operatorname{dom}(P) + \operatorname{dom}(Q) & \text{si } p = q \end{cases}$

□

Proposition: Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$$

Preuve:

Si P ou Q est nul, alors la formule est vraie car

$$\begin{cases} \deg(PQ) = -\infty \\ \deg(P) + \deg(Q) = \begin{cases} \text{cste} - \infty = -\infty \\ -\infty + \text{cste} = -\infty \\ -\infty - \infty = -\infty \end{cases} \end{cases}$$

On suppose $P \neq 0$ et $Q \neq 0$. On pose $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ avec $a_p \neq 0$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ avec $b_q \neq 0$

$$\begin{aligned} PQ &= \left(\sum_{k=0}^{p} a_k X^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{q} b_\ell X^\ell \right) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \sum_{\ell=0}^{q} a_k b_\ell X^{k+\ell} \end{aligned}$$

donc $\deg(PQ) \leqslant p + q$ et le coefficiant devant X^{p+q} est $a_p b_q \neq 0$ (car $\mathbb{K}$ est intègre)
donc $\deg(PQ) = p + q$ □

18.2 Évaluation

Définition: Soit A une $\mathbb{K}$-algèble et $P \in \mathbb{K}[X]$. On pose $P = \sum_{k=0}^{n} e_k X^k$.
Soit $a \in A$.
On pose

$$\begin{aligned} P(a) &= \sum_{k=0}^{n} e_k a^k \\ &= e_0 1_A + e_1 a + e_2 a^2 + \cdots + e_n a^n \in A \end{aligned}$$

On dit qu'on a évalué P en a, ou spécialisé X avec la valeur de a, ou remplacé X par a, substitué a à X.

Définition: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.
On dit que a est une racine de P si $P(a) = 0_{\mathbb{K}}$

Définition: Soit $P \in \mathbb{K}[X] \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que c'est un polynôme de matrices.

Exemple:
$P = 1 + 2X - 3X^2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} P(A) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Définition: Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
Alors $P(Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k Q^k \quad \in \mathbb{K}[X]$
C'est la composée de P et Q.

Remarque (⚠ Attention):
Ne pas confondre $\underbrace{P(X+1)}_{\text{composée}}$ et $\underbrace{P(X+1)}_{\text{produit}}$.
On a $\underbrace{P(X+1)}_{\text{produit}} = (X+1)\,P = P(X)\,(X+1) = P \times (X+1)$

Proposition: Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $\begin{cases} Q \neq 0 \\ P \neq 0 \end{cases}$. On a

$$\deg\big(P(Q)\big) = \deg(P) \times \deg(Q)$$

□

Exemple:
$\mathbb{K} = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$

$P = X^2 + X + 1 \in \mathbb{K}[X]$ et $Q = 1 \in \mathbb{K}[X]$
$P \neq Q$

$$\begin{aligned} f_P : \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} &\longrightarrow \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \\ x &\longmapsto P(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Q : {}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}} &\longrightarrow {}^{\mathbb{Z}}/_{2\mathbb{Z}} \\ x &\longmapsto Q(x) \end{aligned}$$

$f_P\left(\overline{0}\right) = \overline{1} = f_Q\left(\overline{0}\right)$
$f_P\left(\overline{1}\right) = \overline{1} + \overline{1} + \overline{1} = \overline{1} = f_Q\left(\overline{1}\right)$
donc $f_P = f_Q$ alors que $P \neq Q$

Théorème: Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre. L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow A^A \\ P &\longmapsto f_P : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ a & \longmapsto & P(a) \end{array} \end{aligned}$$

vérifie

1. $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \varphi(P+Q) = \varphi(P) + \varphi(Q)$
2. $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \varphi(PQ) = \varphi(P) \times \varphi(Q)$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall P \in \mathbb{K}[X], \varphi(\lambda P) = \lambda\varphi(P)$

□

Exemple:
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$
$X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$

— $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre donc

$$\forall z \in \mathbb{C}, z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$$

— $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre

$$\forall A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}), A^2 - I_2 = (A - I_2)(A + I_2)$$

Définition: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

Le <u>polynôme dérivé</u> de P est

$$P' = \sum_{k=0}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

où

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, k a_k = \underbrace{a_k + \cdots + a_k}_{k \text{ fois}}$$

$$0_{\mathbb{N}} a_k = 0_{\mathbb{K}}$$

REMARQUE:

Si $P \in \mathbb{R}[X]$, $f_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & P(x) \end{array}$

$f_{P'} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & P'(x) \end{array}$ alors $f_{P'} = f'_P$

Proposition:

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) > 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition: Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $(P+Q)' = P' + Q'$
2. $(PQ)' = P'Q + PQ'$
3. $(\lambda P)' = \lambda P'$

Preuve:
On pose

$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \qquad Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$$

1. On peut supposer $p \geqslant q$
   Si $p > q$, on pose $b_{q+1} = \cdots = b_p = 0$

   $$P + Q = \sum_{k=0}^{p} (a_k + b_k) X^k$$

   donc

   $$\begin{aligned} (P+Q)' &= \sum_{k=0}^{p} k(a_k + b_k) X^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{p} k a_k X^{k-1} + \sum_{k=0}^{p} k b_k X^{k-1} \\ &= P' + Q' \end{aligned}$$

2.

$$PQ = \sum_{k=0}^{p} \sum_{\ell=0}^{q} a_k b_\ell X^{k+\ell}$$

D'après 1.,

$$\begin{aligned}
(PQ)' &= \sum_{k=0}^{p} \sum_{\ell=0}^{q} \left(a_k b_\ell X^{k+\ell}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{p} \sum_{\ell=0}^{q} a_k b_\ell (k+\ell) X^{k+\ell-1} \\
&= \sum_{k=0}^{p} \sum_{\ell=0}^{q} k a_k b_\ell X^{k-1+\ell} + \sum_{k=0}^{p} \sum_{\ell=0}^{q} \ell a_k b_\ell X^{k+\ell-1} \\
&= \sum_{k=0}^{p} k_k X^{l-1} \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell X^\ell + \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \sum_{\ell=0}^{q} \ell b_\ell X^{\ell-1} \\
&= P'Q + PQ'
\end{aligned}$$

3.

$$\lambda P = \sum_{k=0}^{p} \lambda a_k X^k$$

donc

$$(\lambda P)' = \sum_{k=0}^{p} \lambda a_k k X^{k-1} = \lambda \sum_{k=0}^{p} k a_k X^{k-1} = \lambda P'$$

□

Définition: Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit la dérivée k-ième d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ par

— si $k = 0$, $P^{(k)} = P$
— si $k = 1$, $P^{(1)} = P'$
— si $k > 1$, $P^{(k)} = \left(P^{(k-1)}\right)'$

Proposition:

$$\forall k, j \in \mathbb{N}^2, \left(X^k\right)^{(j)} = \begin{cases} 0 & \text{si } j > k \\ k(k-1)\cdots(k-j+1)X^{k-j} = \dfrac{k!}{(k-j)!}X^k & \text{si } j \leqslant k \end{cases}$$

Preuve (par récurrence sur j à k fixé)*:*

□

Proposition: Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$

1. $\forall k \in \mathbb{N}, (P+Q)^{(k)} = P^{(k)} + Q^{(k)}$
2. $\forall k \in \mathbb{N}, (PQ)^{(k)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} P^{(i)} Q^{(k-i)}$
3. $\forall k \in \mathbb{N}, (\lambda P)^{(k)} = \lambda P^{(k)}$

Preuve (par récurrence sur k)*:*

$\square$

18.3 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Définition: Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que A divise B (dans $\mathbb{K}[X]$) s'il existe $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$AC = B$$

On dit dans ce cas que A est un diviseur de B ou que B est un multiple de A. On le note alors $A \mid B$
On dit que A et B sont associés s'il existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $A = \lambda B$. Il s'agit d'une relation d'équivalence.

Proposition: Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

$$\left.\begin{matrix} A \mid B \\ B \mid A \end{matrix}\right\} \iff A \text{ et } B \text{ sont associés}$$

Preuve: " $\Longrightarrow$ " Soit $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que $AC = B$ et $D \in \mathbb{K}[X]$ tel que $BD = A$. D'où,

$$A = BD = ACD$$

Or, $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre.
D'où

$$A(1 - CD) = 0$$

donc $A = 0$ ou $CD = 1$
Si $A = 0$, alors $B = 0 \times C = 0 = 1 \times A$ donc A et B sont associés
Si $CD = 1$, on sait que $\mathbb{K}[X]^\times = \mathbb{K} \setminus \{0\}$
Alors, A et B sont associés.

" $\Longleftarrow$ " évident

$\square$

Lemme: $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre.

Preuve:
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $PQ = 0$. On suppose que $P \neq 0$ et $Q \neq 0$
Alors $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q) \geqslant 0$
Or, $PQ = 0$ et $\deg(0) = -\infty$: $\lightning$ une contradiction □

Lemme:

$$\mathbb{K}[X]^\times = \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

Preuve:
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $PQ = 1$.
Alors, $0 = \deg(1) = \deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$
Comme $P \neq 0$, $\deg(P) \geqslant 0$. De même, $\deg(Q) \geqslant 0$
Donc $\deg(P) = \deg(Q) = 0$ Donc, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda\mu = 1$
Donc $\lambda \in \mathbb{K}^\times = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ □

Proposition: $\mid$ est une relation réflexive et transitive. □

Proposition: Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A \mid B$ et $A \mid C$. Alors

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, A \mid BQ + CP$$

□

Proposition
Définition: Soit $A \in \mathbb{K}[X], B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

$$\exists! (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \begin{cases} A = PQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

On dit que Q est le <u>quotient</u> et R le <u>reste</u> de la division (euclidienne) de A par B.

Preuve: — On prouve l'existence par récurrence sur le degré de A. On fixe $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n) : \text{“} \forall A \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } \deg(A) = n,$$
$$\exists (Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2, \begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases} \text{”}$$

— Soit $A \in \mathbb{K}[X]$. On suppose $\deg(A) = 0$
  Si $\deg(B) > 0$ alors on pose $Q = 0$ et $R = A$. Ainsi $\begin{cases} BQ + R = A \\ \deg(R) = 0 < \deg(B) \end{cases}$
  Si $\deg(B) = 0$, alors $A = \lambda$ et $B = \mu$ avec $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{K} \setminus \{0\})^2$.
  On pose $\begin{cases} Q = \mu^{-1}\lambda \\ R = 0 \end{cases}$. Alors, $\begin{cases} BQ + R = \mu\mu^{-1}\lambda = \lambda = A \\ \deg(R) = -\infty < 0 = \deg(B) \end{cases}$

  Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}(k)$ pour tout $k \leqslant n$. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(A) = n + 1$. On pose $p = \deg(B)$
  Si $p > n + 1$, on pose $\begin{cases} Q = 0 \\ R = A \end{cases}$ et on a

$$\begin{cases} BQ + R = A \\ \deg(R) = n + 1 < p = \deg(B) \end{cases}$$

  Si $p \leqslant n+1$. On pose $\begin{cases} Q = a_{n+1} b_b^{-1} X^{n+1-p} \\ R = A - BQ \end{cases}$ où $\begin{cases} a_{n+1} = \operatorname{dom}(A) \\ a_p = \operatorname{dom}(b) \end{cases}$
  On a $A = BQ + R$
  Or, $\begin{cases} \deg(BQ) = p + n + 1 - p = n + 1 = \deg(A) \\ \operatorname{dom}(BQ) = b_p b_p^{-1} a_{n+1} = a_{n+1} = \operatorname{dom}(A) \end{cases}$
  donc $\deg(R) < \deg(A)$ donc $\deg(R) \leqslant n$
  D'après $\mathscr{P}(n)$,

$$\exists (Q_1, R_1) \in \mathbb{K}[X]^2, \begin{cases} R = BQ_1 + R_1 \\ \deg(R_1) < \deg(B) \end{cases}$$

  D'où,

$$\begin{aligned} A &= BQ + R \\ &= BQ + BQ_1 + R_1 \\ &= B(Q + Q_1) + R_1 \end{aligned}$$

  et $\deg(R_1) < \deg(B)$ donc $\mathscr{P}(n + 1)$ est vraie.

Donc, $\mathscr{P}(n)$ est vraire pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence forte. Si $A = 0$, on pose $Q = R = 0$ et on a bien $BQ + R = 0 = A$ et $\deg(R) = -\infty < \deg(B)$

— Unicité
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. On suppse que $A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2$ avec $Q_1, Q_2, R_1, R_2 \in \mathbb{K}[X]$ et $\begin{cases} \deg(R_1) < \deg(B) \\ \deg(R_2) < \deg(B) \end{cases}$
D'où,

$$B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$$

Or,

$$\deg(R_2 - R_1) \leqslant \max\big(\deg(R_2), \deg(R_1)\big) < \deg(B)$$

Or,

$$\begin{aligned} \deg\big(B(Q_1 - Q_2)\big) &= \deg(B) + \deg(Q_1 - Q_2) \\ &\geqslant \deg(B) \text{ si } Q_1 - Q_2 \neq 0 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{cases} Q_1 - Q_2 = 0 \\ R_2 - R_1 = B(Q_2 - Q_1) = 0 \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} Q_1 = Q_2 \\ R_2 = R_1 \end{cases}$$

□

Exemple:
Division euclidienne de $A = X^5 + X^3 - X^2 + 1$ par $B = X^2 + \frac{1}{2}X - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

$$
\begin{array}{r|l}
X^5 + X^3 - X^2 + 1 & X^2 + \frac{1}{2}X - 1 \\ \cline{2-2}
- \quad X^5 + \frac{1}{2}X^4 - X^3 & \boxed{X^3 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{9}{4}X - \frac{21}{8}} \\ \cline{1-1}
-\frac{1}{2}X^4 + 2X^3 - X^2 + 1 & \qquad \boxed{\text{quotient}} \\
- \quad -\frac{1}{2}X^4 - \frac{1}{4}X^3 + \frac{1}{2}X^2 & \\ \cline{1-1}
\frac{9}{4}X^3 - \frac{3}{2}X^2 + 1 & \\
- \quad \frac{9}{4}X^3 + \frac{9}{8}X^2 - \frac{9}{4}X & \\ \cline{1-1}
-\frac{21}{8}X^2 + \frac{9}{4}X + 1 & \\
- \quad -\frac{21}{8}X^2 - \frac{21}{16}X + \frac{21}{8} & \boxed{\text{reste}} \\ \cline{1-1}
\boxed{\frac{57}{16}X - \frac{13}{8}} &
\end{array}
$$

Théorème: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.

$$P(a) = 0 \iff X - a \mid P$$

Preuve: “ $\Longleftarrow$ ” On suppose $P = (X - A) \times Q$ avec $Q \in \mathbb{K}[/]$. On substitue a à X

$$P(a) = (a - a) \times Q(a) = 0_{\mathbb{K}} \times Q(a) = 0_{\mathbb{K}}$$

“ $\Longrightarrow$ ” On suppose que $P(a) = 0$. On réalise la division euclidienne de P par $X - a$:

$$\begin{cases} P = (X - a) \times Q + R \\ \deg(R) < \deg(X - a) = 1 \end{cases}$$

donc $R = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$
D'où,

$$0 = P(a) = (a - a) \times Q(a) + R(a) = \lambda$$

donc

$$P = (X - a) \times Q$$

et donc

$$X - a \mid P$$

□

Corollaire: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul de degré n. Alors, P a au plus n racines distinctes dans $\mathbb{K}$

Preuve (par récurrence sur n)*:* — C'est évident pour $n = 0$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la proposition vraie pour les polynômes de degré n.
  Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n+1$
  Si P n'a pas de racine alors le résultat est trivialement vrai pour P
  Si P a une racine a, alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P = (X-a) \times Q$
  $n+1 = \deg(P) = 1 + \deg(Q)$ donc $\deg(Q) = n$
  D'après l'hypothèse de récurrence, Q a au plus n racines distinctes
  Soit b une racine de P différente de a. Alors,

$$0 = P(b) = \underbrace{(b-a)}_{\neq 0} \times Q(b)$$

  donc $Q(b) = 0$

Donc P a bien au plus $n+1$ racines. □

Définition: Soient A et B deux polynômes dont l'un au moins est non nul, $D \in \mathbb{K}[X]$. On dit que D est un PGCD de A et B si D est un diviseur commun de A et B et de degré maximal.

Proposition: Avec les hypothèse précédents, deux PGCD quelconques de A et B sont nécessairement associés

Preuve:
On forme

$$E = \left\{AU + BV \mid (U,V) \in \mathbb{K}[X]^2\right\}$$

- E est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$
- $\forall P \in E, \forall Q \in \mathbb{K}[X], PQ \in E$

On dit que E est un idéal de $\mathbb{K}[X]$

Soit $D \in E$ un polynôme non nul de degré minimal. Soit $P \in E$ On divise

P par D :

$$\begin{cases} P = DQ + R \\ \deg(R) < \deg(D) \end{cases}$$

D'où

$$R = \underbrace{P}_{\in E} - \underbrace{DQ}_{\in E} \in E$$

$\deg(R) < \deg(D)$ donc $R = 0$
Donc,

$$\forall P \in E, D \mid P$$

$A \in E$ donc $D \mid A$
$B \in E$ donc $D \mid B$

Soit Δ un diviseur commun quelconque de A et B. On pose $D = AU + BV$
$\left.\begin{array}{l} \Delta \mid A \\ \Delta \mid B \end{array}\right\}$ donc $\Delta \mid AU + BV$ donc $\Delta \mid D$
donc $\deg(\Delta) \leqslant \deg(D)$

Ainsi, D est un PGCD de A et B. De plus, Δ est un PGCD de A et B alors

$$\begin{cases} \Delta \mid D \\ \deg(\Delta) = \deg(D) \end{cases}$$

Donc $D = \Delta Q$ avec $\begin{cases} Q \in \mathbb{K}[X] \\ \deg(Q) = 0 \end{cases}$
donc D et Δ sont associés. □

Remarque:
Dans la preuve précédente, on a aussi montré les deux propositions suivantes.

Théorème (Théorème de Bézout)**:** Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A \neq 0$ ou $B \neq 0$
Soit D un PGCD de A et B. Alors

$$\exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2, AU + BV = D$$

■

Proposition: Avec les hypothèses précédents,

$$\forall \Delta \in \mathbb{K}[X],$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta \mid A \\ \Delta \mid B \end{array}\right\} \iff \Delta \mid D$$

■

Définition: On dit qu'un polynôme est <u>unitaire</u> si sont coefficiant dominant vaut 1.

Proposition
Définition: Soient A et B deux polynômes dont l'un au moins est non nul. Parmi tous les PGCD de A et B, un seul est unitaire. On le note $A \wedge B$

Preuve:
Soit D un PGCD de A et B. Alors $\mathrm{dom}(D)^{-1}D$ est associé à D, donc c'est un PGCD de A et B et il est unitaire. Soient D et Δ deux PGCD unitaires de A et B. Ils sont associés

$$\Delta = \lambda D \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

D'où,

$$1 = \mathrm{dom}(\Delta) = \lambda \,\mathrm{dom}(D) = \lambda$$

Donc $\Delta = D$ $\square$

Proposition: Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Soit R le reste de la division de A par B. Alors,

$$A \wedge B = B \wedge R$$

Preuve (idem que dans $\mathbb{Z}$)*:* $\square$

Exemple:
$D = (5X^2 + 3X - 1) \wedge (X + 3)$

$$\begin{array}{rr|l}
 & X^2+3X-1 & X+3 \\ \cline{3-3}
- & 5X^2+15X & 5X-12 \\ \cline{1-2}
 & -12X-1 & \\
- & -12X-36 & \\ \cline{1-2}
 & 35 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr|r}
 & X+3 & 35 \\ \cline{3-3}
- & X & \frac{1}{35}X+\frac{3}{35} \\ \cline{1-2}
 & 3 & \\
- & 3 & \\ \cline{1-2}
 & 0 &
\end{array}$$

$$D = (X+3) \wedge 35 = 1$$

Théorème (Théorème de Gauss)**:** Soient A, B, C trois polynômes non nuls tels que $\begin{cases} A \mid BC \\ A \wedge B = 1 \end{cases}$
Alors, $A \mid C$

Preuve (idem que dans $\mathbb{Z}$)*:*

$\square$

Corollaire: Avec les notations précédentses,

$$\left.\begin{array}{l} A \mid B \\ B \mid C \\ A \wedge B = 1 \end{array}\right\} \implies AB \mid C$$

Proposition: Soient A et B deux polynômes non nuls et D un PGCD de A et B. Soit $x \in \mathbb{K}$.

$$A(x) = B(x) = 0 \iff D(X) = 0$$

Preuve: " $\implies$ " On suppose $A(x) = B(x) = 0$
D'après le théorème de Bézout,

$$D = AU + BV \text{ avec } (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$$

Donc,

$$D(x) = A(x)U(x) + B(x)V(x) = 0 + 0 = 0$$

" $\impliedby$ " On suppose $D(x) = 0$. On pose $\begin{cases} A = DA_1 \\ B = DB_1 \end{cases}$ avec $(A_1, B_1) \in \mathbb{K}[X]^2$
D'où,

$$\begin{cases} A(x) = D(x)A_1(x) = 0 \\ B(x) = D(x)B_1(x) = 0 \end{cases}$$

$\square$

Définition: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

On dit que P n'est pas irréductible si il existe $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ non constants tels que $P = QR$ **ou** si P est constant.

Sinon, on dit que P est <u>irréductible</u>.

EXEMPLE: 1. X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$

On suppose que

$$X^2+1 = QR \text{ avec } (Q,R) \in \mathbb{R}[X]^2$$

$$\begin{cases} \deg(Q) > 0 \\ \deg(R) > 0 \end{cases}$$

Donc, P et Q sont de degré 1, donc ont chacun une racine réelle donc X^2+1 a au moins une racine réelle : $\lightning$ une contradiction.

2. X^2+1 n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^2+1 = (X-i)(X+i)$$

3. X^4+1 n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ et pourtant il n'a aucune racine réelle.

$$\begin{aligned} X^2+1 &= X^4+2X^2+1-2X^2 \\ &= \left(X^2+1\right)^2 - 2X^2 \\ &= \underbrace{\left(X^2+1-\sqrt{2}X\right)}_{\in\mathbb{R}[X]}\underbrace{\left(X^2+1+\sqrt{2}X\right)}_{\in\mathbb{R}[X]} \end{aligned}$$

Théorème (Théorème de D'alembert - Gauss)**:**

$$\forall P \in \mathbb{C}[X] \text{ non constant}, \exists a \in \mathbb{C}, P(a) = 0$$

□

Corollaire: Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactemenent les polynômes de degré 1.

Preuve:
Les polynômes de degré 1 sont évidemment irréductibles.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) \geqslant 2$. Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P.
Donc $X - a \mid P$.

$$\begin{cases} P = (X-a) \times Q \\ Q \in \mathbb{C}[X] \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l}\deg(Q) \geqslant 1 \\ \deg(X-a) = 1\end{array}\right\}$ donc P n'est pas irréductible. $\square$

EXEMPLE:
Factoriser $X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}$
Les racines complexes de X^4+1 sont $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$
Donc,

$$\begin{aligned} X^4 - 1 = &\left(X - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &\times \left(X + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(X - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{aligned}$$

Définition: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, $\mu \in \mathbb{N}$.
On dit que a est <u>une racine de P de multiplicité μ</u> si

$$\begin{cases} (X-a)^\mu \mid P \\ (X-a)^{\mu+1} \nmid P \end{cases}$$

Si $\mu = 1$, on dit que a est une racine <u>simple</u>.
Si $\mu = 2$, on dit que a est une racine <u>double</u>.

REMARQUE:
a est une racine de multiplicité 0 si et seulement si $P(a) \neq 0$

Lemme: Soient $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ non nuls. On suppose que A divise B dans $\mathbb{C}[X]$
Alors, A divise B dans $\mathbb{R}[X]$

Preuve:
On suppose que

$$(*) \qquad B = AQ \text{ avec } Q \in \mathbb{C}[X]$$

On divise B par A dans $\mathbb{R}[X]$:

$$(**) \qquad B = AQ_1 + R_1 \text{ avec } \begin{cases} (Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}[X]^2 \\ \deg(R_1) < \deg(A) \end{cases}$$

Comme $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$, $(**)$ est aussi le résultat de la division euclidienne de B par A dans $\mathbb{C}[X]$.

$(*)$ correspond aussi à une division euclidienne dans $\mathbb{C}[X]$

Par unicité, $\begin{cases} Q = Q_1 \in \mathbb{R}[X] \\ R_1 = 0 \end{cases}$

Donc A divise B dans $\mathbb{R}[X]$ □

Proposition: Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{N}$.
Si a est une racine de P de multiplicité μ alors $\overline{a}$ est une racine de P de multiplicité μ.

Preuve (par récurrence sur μ)*:*
On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n) : \text{“}\forall P \in \mathbb{R}[X] \text{ et } a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ racine de } P \text{ de multiplicité } \mu, \\ \text{alors } \overline{a} \text{ est aussi une racine de } P \text{ de multiplicité } \mu\text{”}$$

— Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que $P(a) \neq 0$.

On pose $P = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i X^i$ avec $\alpha_0, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P(\overline{a}) &= \sum_{i=0}^{p} \alpha_i \overline{a}^i \\ &= \sum_{i=0}^{p} \overline{\alpha_i}\overline{a^i} \\ &= \sum_{i=0}^{p} \overline{\alpha_i a^i} \\ &= \overline{\left(\sum_{i=0}^{p} \alpha_i a^i\right)} \\ &= \overline{P(a)} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie

— Soit $\mu \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{P}(\mu)$ vraie.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ une racine de P de multiplicité $\mu + 1$.

On pose

$$\begin{cases} P = (X - a)^{\mu+1} Q \\ Q \in \mathbb{C}[X] \\ Q(a) \neq 0 \end{cases}$$

On pose aussi $P = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i a^i$ avec $\alpha_0, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$

$\mu + 1 \geqslant 1$ donc $P(a) = 0$. D'où, $P(\overline{a}) = \overline{P(a)} = \overline{0} = 0$
donc $\underbrace{(\overline{a} - a)^{\mu+1}}_{\neq 0} Q(\overline{a}) = 0$
Donc, $Q = (X - \overline{a})Q_1$ avec $Q_1 \in \mathbb{C}[X]$
D'où

$$\begin{aligned} P &= (X-a)^{\mu+1}(X-\overline{a})Q_1 \\ &= (X-a)(X-\overline{a})(X-a)^{\mu}Q_1 \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} (X-a)(X-\overline{a}) &= X^2 - (a+\overline{a})X + a\overline{a} \\ &= X^2 - 2\mathfrak{Re}(a)X = |a|^2 \in \mathbb{R}[X] \end{aligned}$$

D'après le lemme précédent, $(X-a)^{\mu}Q_1 \in \mathbb{R}[X]$
De plus,

$$0 \neq Q(a) = (\overline{a} - a)Q_1(a)$$

docn $Q_1(a) \neq 0$
Donc a est une racine de $(X-a)^{\mu}Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ de multiplicité μ.
D'après $\mathscr{P}(\mu)$, $\overline{a}$ est aussi une racine de $(X-a)^{\mu}Q_1$ de multiplicité μ.
Donc, on peut écrire

$$(X-a)^{\mu}Q_1 = (X-\overline{a})^{\mu}Q_2 \text{ avec } \begin{cases} Q_2 \in \mathbb{C}[X] \\ Q_2(\overline{a}) \neq 0 \end{cases}$$

Donc,

$$P = (X-a)(X-\overline{a})^{\mu+1}Q_2$$

Donc $\overline{a}$ est une racine de P de multiplicité $\mu + 1$

□

Corollaire: Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatifs.

Preuve:
— Les polynômes de de degré 1 sont évidemment irréductibles
— Les polynômes constants ne sont pas irréductibles par définition
— Les polynômes de degré 2 ayant au moins une racine réelle peuvent s'écrire comme produit de deux polynômes réels de degré 1 à coefficiants réels
— Réciproquement, si un polynôme de degré 2 n'est pas irreductible, c'est forcémet un produit de 2 polynômes de degré 1 à coefficiants

réels et donc ce polynôme a au moins une racine réelle

— Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) \geqslant 3$
On note $a_1, \dots, a_r$ les racines réelles distictes de P,

$$a_{r+1}, \overline{a_{r+1}}, a_{r+2}, \overline{a_{r+2}}, \dots, a_s, \overline{a_s}$$

les récines non réelles distictes de P. On note aussi

$$\forall k \in [\![1, s]\!], \mu_k \text{ la multiplicité de } a_k$$

Donc

$$P = \operatorname{dom}(P)(X - a_1)^{\mu_1} \cdots (X - a_r)^{\mu_r}(X - a_{r+1})^{\mu_{r+1}}(X - \overline{a_{r+1}})^{\mu_{r+1}} \times \cdots \times (X - a_s)^{\mu_s}(X - \overline{a_s})^{\mu_s}$$

Or,

$$\begin{aligned}\forall k \geqslant r+1, (X - a_k)^{\mu_k}(X - \overline{a_k})^{\mu_k} &= ((x-a)(x-\overline{a}))^{\mu_k} \\ &= (X^2 - 2\mathfrak{Re}(a)X + |a|^2 \\ &\in \mathbb{R}[X]\end{aligned}$$

D'où,

$$P = \underbrace{\operatorname{dom}(P)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\prod_{k=1}^{r}(X - a_k)^{\mu_k}}_{\in \mathbb{R}[X]} \prod_{k=r+1}^{s} \underbrace{\left(X^2 - 2\mathfrak{Re}(a_k)X + |a_k|^2\right)^{\mu_k}}_{\in \mathbb{R}[X]}$$

$$P \text{ irréductible } \iff \left(\begin{array}{l} \text{il y a une unique racine réelle simple} \\ \text{et aucune racine non réelle} \\ \text{OU} \\ \text{il n'y a aucune racine réelle et 2 racines} \\ \text{non réelles conjuguées simples} \end{array} \right.$$

□

Théorème: Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Tout polynôme de $\mathbb{K}$ se découpe en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ et cette décomposition est unique à multiplication par une constante non nulle près. □

Proposition: Soient $A, B \in \mathbb{C}[X]$ non nuls.

$$A \mid B \iff \begin{array}{l} \forall a \in \mathbb{C}, \text{ si } a \text{ est une racine de } A \text{ de multiplicité } \mu \in \mathbb{N}, \\ \text{alors } a \text{ est racine de } B \text{ avec une multiplicité } \geqslant \mu \end{array}$$

Preuve: " $\Longrightarrow$ " On suppose $A \mid B$

Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de A de multiplicité μ

Alors, $(X-a)^\mu \mid A$ donc $(X-a)^\mu \mid B$

Donc a est une racine de B de multiplicité $\geqslant \mu$

" $\Longleftarrow$ " On décompose A et B en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$:

$$B = \mathrm{dom}(B) \prod_{a \in \mathscr{R}} (X-a)^{\nu_a}$$

où $\mathscr{R}$ est l'ensemble des racines de B ; et

$$A = \mathrm{dom}(A) \prod_{a \in \mathscr{S}} (X-a)^{\mu_a}$$

où $\mathscr{S}$ est l'ensemble des racines de A

On suppose que $\begin{cases} \mathscr{S} \subset \mathscr{R} \\ \forall a \in \mathscr{S}, \mu_a \leqslant \nu_a \end{cases}$

D'où,

$$B = \frac{\mathrm{dom}(B)}{\mathrm{dom}(A)} \underbrace{\mathrm{dom}(A) \prod_{a \in \mathscr{S}} (X-a)^{\mu_a}}_{A} \times \underbrace{\prod_{a \in \mathscr{S}} (X-a)^{\nu_a - \mu_a} \times \prod_{a \in \mathscr{R} \setminus \mathscr{S}} (X-a)^{\nu_a}}_{\in \mathbb{C}[X]}$$

Donc, $A \mid B$

□

Exercice:

Montrer que $1 + X + X^2 \mid X^{3n} - 1$

Les racines de $1 + X + X^2$ sont j et j^2

$$j^{3n} - 1 = \left(j^3\right)^n - 1 = 1 - 1 = 0$$
$$\left(j^2\right)^{3n} = \left(j^3\right)^{2n} - 1 = 1 - 1 = 0$$

Proposition: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n > 0$
Alors P a exactement n racines comptées avec multiplicité.

Preuve:

$$P = \mathrm{dom}(P) \times \prod_{a \in \mathscr{R}} (X-a)^{\mu_a}$$

où $\mathscr{R}$ est l'ensemble des racines distinctes de P

$n = \deg(P) = \sum_{a \in \mathscr{R}} \deg\left((X-a)^{\mu_a}\right) = \sum_{a \in \mathscr{R}} \mu_a$ □

18.4 L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$

REMARQUE (Rappel):
$(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par $(1, X, X^2, \dots)$

Proposition: La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

Preuve:
Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille presque nulle de scalairees telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n X^n = 0$
$(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$: on le note P.
Or,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n X^n = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots) = P$$

Donc $P = 0$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = 0$$

□

Corollaire:

$$\dim\big(\mathbb{K}[X]\big) = +\infty$$

□

Définition: Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathbb{K}_n[X] = \big\{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) \leqslant n\big\}$$

Théorème: $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ de dimension $n+1$

Preuve:
$\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}\big(1, X, \dots, X^n\big)$ □

Proposition: Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de polynômes non nuls telle que

$$\forall i \neq j, \deg(P_i) \neq \deg(P_j)$$

Alors $(P_i)_{i\in I}$ est libre.

Preuve:
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $i_1, \dots, i_n$ des éléments distincts de I
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. On suppose

$$\lambda_1 P_{i_1} + \cdots + \lambda_n P_{i_n} = 0$$

Quitte à renuméroter les polynômes, on peut supposer que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \deg(P_{i_n}) > \deg(P_{i_k})$$

Si $\lambda_n \neq 0$,

$$\deg(\lambda_1 P_{i_1} + \cdots + \lambda_n P_{i_n}) = \deg(P_{i_n}) \neq -\infty$$

Donc $\lambda_n = 0$
Donc $\lambda_1 P_{i_1} + \cdots + \lambda_{n-1} P_{i_{n-1}} = 0$

On conclut par récurrence sur n. □

Théorème (Formule de Taylor)**:** Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

Preuve:
$\left(1, X-a, \dots, (X-a)^n\right)$ est libre.
Comme $\dim\left(\mathbb{K}_n[X]\right) = n+1$, c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
Donc, il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X-a)^k$$

On remarque que

$$P(a) = \lambda_0$$

$$\begin{aligned}\forall i \in [\![1, n]\!], P^{(i)}(a) &= \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \underbrace{\left((X-a)^k\right)^{(i)}(a)}_{=\begin{cases} 0 & \text{si } k < i \\ i! & \text{si } k = i \\ \frac{k!}{(k-i)!}(X-a)^{k+1} & \text{si } k > i \end{cases}} \\ &= \lambda_i i!\end{aligned}$$

Donc $\lambda_i = \dfrac{P^{(i)}(a)}{i!}$ □

Proposition: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.

$$\left.\begin{array}{r} a \text{ est une racine de } P \\ \text{de multiplicité } \mu \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} \forall k \leqslant \mu - 1, P^{(k)}(a) = 0 \\ P^{(\mu)}(a) \neq 0 \end{array}\right.$$

Preuve:
On pose $n = \deg(P)$

" $\Longleftarrow$ "

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k \\ &= \sum_{k=\mu}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k \\ &= (X-a)^\mu \underbrace{\sum_{k=\mu}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^{k-\mu}}_{Q \in \mathbb{K}[X]} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} (X-a)^\mu \mid P \\ Q(a) = \dfrac{P^{(\mu)}(a)}{\mu!} \neq 0 \end{cases}$$

" $\Longrightarrow$ "

$$\begin{cases} P = (X-a)^\mu Q \\ Q(a) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \forall k \leqslant \mu - 1, P^{(k)}(a) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left((X-a)^\mu\right)^{(j)}(a) Q^{(k-j)}(a) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\mu!}{(\mu-j)!} \underbrace{(a-a)^{\mu-j}}_{=0} Q^{(k-j)}(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^{(\mu)}(a) &= \binom{\mu}{\mu} \times \mu! \times 1 \times Q^{(0)}(a) \\ &= Q(a) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

□

Corollaire: Avec les notations précédentes, si a est une racine de P de multiplicité μ, alors a est une racine de P' de multiplicité $\mu - 1$

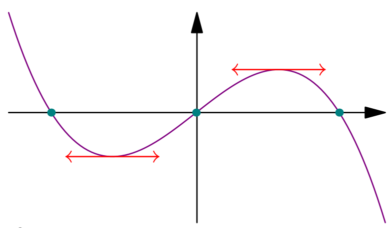
□

Définition: On dit qu'un polynôme P est scindé sur $\mathbb{K}$ si P est un produit de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré 1, i.e. toutes les racines de P sont dans $\mathbb{K}$

EXERCICE:
1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples avec $\deg(P) \geqslant 2$. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simple.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé avec $\deg(P) \geqslant 2$. Montrer que P' est scindé.

Solution

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg(P) = n$ scindé sur $\mathbb{R}$.
   On note $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ les n racines de P
   Soit $f_P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale. Aussi, f_P est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   D'après le théorème de Rolle,



   $$\forall i \in [\![1, n-1]\!], \exists y_i \in]x_i, x_{i+1}[, f_P'(y_i) = 0$$

   Donc $y_1, \ldots, y_{n-1}$ sont racines de P'.
   De plus,
   $$y_1 < x_2 < y_2 < x_3 < y_3 < \cdots < y_{n-1}$$
   On a donc trouvé $n-1$ racines distinctes de P'. Or, $\deg(P') = n-1$. Donc, on a trouvé TOUTES les racines complexes de P'. Donc P' est sciendé à racines simples.

2. On note $x_1 < \cdots < x_p$ les racines de P et $n = \deg(P)$. On note pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, μ_i la multiplicité de x_i. Donc,
   $$\sum_{i=1}^{p} \mu_i = n$$
   D'après le théorème de Rolle,
   $$\forall i \in [\![1, p-1]\!], \exists y_i \in]x_i, x_{i+1}[, P'(y_i) = 0$$

On a trouvé $p-1$ racines réelles de P'. $\forall i \in [\![1, p]\!], x_i$ est une racine de P' de multiplicité $\mu - 1$.
Ce qui fait, $\sum_{i=1}^{p}(\mu_i - 1) = n - p$ racines réelles de P' comptées avec multiplicité.
En tout, on a trouvé $n-1$ racines réelles de P' comptées avec multiplicité.
Comme $\deg(P') = n-1$, P' n'a pas d'autres racines donc P' est scindé.

EXERCICE (Problème):
Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$\forall i \neq j, x_i \neq x_j$$

Soient $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. On cherche $P \in \mathbb{K}[X]$ de <u>degré minimal</u> tel que

$$(*) \quad \forall i \in [\![1, n]\!], P(x_i) = y_i$$

Soit $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ P & \longmapsto & \big(P(x_1), \dots, P(x_n)\big) \end{array}$

$$(*) \iff \varphi(P) = (y_1, \dots, y_n)$$

On cherche, parmi tous les antécédants de $(y_1, \dots, y_n)$ celui de plus bas degré.
φ est linéaire :

$$\begin{aligned}
&\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \\
&\qquad \varphi(\alpha P + \beta Q) = \big(\alpha P(x_1) + \beta Q(x_1), \dots, \alpha P(x_n) + \beta Q(x_n)\big) \\
&\qquad\qquad = \big(\alpha P(x_1), \dots, \alpha P(x_n)\big) + \big(\beta Q(x_1), \dots, \beta Q(x_n)\big) \\
&\qquad\qquad = \alpha\varphi(P) + \beta\varphi(Q)
\end{aligned}$$

- Donc φ est un morphisme de groues additifs.
- $(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=0}^{n} y_i e_i$ où $(e_1, \dots, e_n)$ est la bade canonique de $\mathbb{K}^n$

Si on trouve $L_1, \dots, L_n \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\varphi(L_1) = e_1, \ \dots \ \varphi(L_n) = e_n$, alors

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} y_i L_i\right) &= \sum_{i=0}^{n} y_i \varphi(L_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \\
&= (y_1, \dots, y_n)
\end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned}
P \in \operatorname{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(P) = (0, \dots, 0) \\
&\iff \forall i \in [\![1, n]\!], P(x_i) = 0 \\
&\iff \exists Q \in \mathbb{K}[X], P = (X - x_1) \cdots (X - x_n) Q
\end{aligned}$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $L_i \in \mathbb{K}[X]$.

$$\begin{aligned}
\varphi(L_i) = e_i &\iff \big(L_i(x_1), L_i(x_2), \dots, L_i(x_n)\big) = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \dots, 0) \\
&\iff \begin{cases} L_i(x_i) = 1 \\ \forall j \neq i, L_i(x_j) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \exists Q \in \mathbb{K}[X], L_i = \displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (X - x_j) Q \\ 1 = \displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (x_i - x_j) Q(x_i) \end{cases} \\
&\Longleftarrow L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}
\end{aligned}$$

D'où,

$$\varphi(P) = (y_1, \dots, y_n) \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X], P = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i L_i}_{\substack{\text{solution particulière} \\ \deg(\cdot) \leqslant n-1}} + \underbrace{\prod_{k=1}^{n} (X - x_k) Q}_{\substack{\text{solutions de l'équation} \\ \text{homogène associée} \\ \deg(\cdot) \geqslant n}}$$

<u>Le</u> polynôme de plus bas degré solution du problème d'interpolation est

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

Définition: Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ avec

$$\forall i \neq j, x_i \neq x_j$$

On pose

$$\forall i \in [\![1, n]\!], L_i = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

L_i est le <u>i-ème polynôme interpolateur de Lagrange</u> associé à $(x_1, \dots, x_n)$:

$$\forall j \in [\![1, n]\!], L_i(x_j) = \delta_{i,j}$$

Proposition: Avec les notations précédentes, $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Preuve: — $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \deg(L_i) = n - 1$

— Soit $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. On pose

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, y_i = P(x_i)$$

On pose $Q = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} y_i L_i$. Q est le seul polynôme de degré $\leqslant n - 1$ tel que $Q(x_i) = y_i$ pour tout i.

Donc, $P = Q \in \mathrm{Vect}(l_1, \ldots, L_n)$. Donc $(L_1, \ldots, L_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. Or, $\dim\big(\mathbb{K}_{n-1}[X]\big) = n$. Donc $(L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$

$\square$

Exemple:

$\mathbb{K} = {}^{\mathbb{Z}}/_{5\mathbb{Z}}$ et $n = 3$

$x_1 = \overline{2}$ $\quad y_1 = \overline{1}$

$x_2 = \overline{0}$ $\quad y_2 = \overline{1}$

$x_3 = \overline{-1}$ $\quad y_3 = \overline{2}$

Le seul polynôme de degré $\leqslant 2$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$ est $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} y_i \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant 3 \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$

$$\begin{aligned} L_1 &= (x_1 - x_2)^{-1}(x_1 - x_3)^{-1}(X - x_2)(X - x_3) \\ &= \overline{3} \times \overline{2} \times X\left(X + \overline{1}\right) = X\left(X + \overline{1}\right) = X^2 + X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 &= (x_2 - x_1)^{-1}(x_2 - x_3)^{-1}(X - x_1)(X - x_3) \\ &= \overline{2} \times \overline{1}\left(X - \overline{2}\right) \times \left(X - \overline{1}\right) \\ &= \overline{2}X^2 + \overline{3}X + \overline{1} \end{aligned}$$

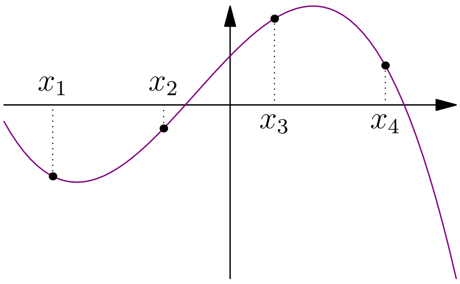
$$\begin{aligned} L_3 &= (x_3 - x_1)^{-1}(x_3 - x_2)^{-1}(X - x_1)(X - x_2) \\ &= \overline{3} \times \overline{4} \times \left(X - \overline{2}\right) \times X \\ &= \overline{2}X\left(X - \overline{2}\right) \\ &= \overline{2}X^2 + X \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} P &= X^2 + X + \overline{2}X + \overline{3}X + \overline{1} + \overline{4}X^2 + \overline{2} \\ &= \overline{2}X^2 + X + \overline{1} \end{aligned}$$

Vérification :

$$
\begin{aligned}
P\left(\overline{2}\right) &= \overline{3}+\overline{2}+\overline{1}=\overline{1}=y_1\\
P\left(\overline{0}\right) &= \overline{1}=y_2\\
P\left(\overline{-1}\right) &= \overline{2}-\overline{1}+\overline{1}=\overline{2}=y_3
\end{aligned}
$$



Chapitre 19

Applications linéaires

19.1 Premières propriétés

Définition: Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$. On dit que f est <u>linéaire</u> si

$$\forall (x,y) \in E^2, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2, f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Exemple:

1. $E = \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \int_a^b f(t)\ dt \end{aligned}$$

φ est linéaire

2. $E = \mathscr{D}(I,\mathbb{C})$ et $F = \mathbb{C}^I$

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

φ est linéaire

3. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax \end{array}$ est linéaire.

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha a x + \beta a y = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

4. $E = \mathscr{C}^1(I,\mathbb{C})$ et $F = \mathscr{C}^0(I,\mathbb{C})$. $a \in F$

$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ y & \longmapsto & y' + ay \end{array}$ est linéaire

$$y' + a(x)y = b(x) \iff \varphi(y) = b$$

5. $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}} = F$

$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ (u_n) & \longmapsto & (u_{n+2} - u_{n+1} - u_n) \end{array}$

$$\forall n, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \iff \varphi(u) = 0$$

6. $E = \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $F = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

$AX = B \iff \varphi(X) = B$

> **Définition:** On dit qu'un problème est <u>linéaire</u> s'il se présente sous la forme :
>
> $$\text{Résoudre } \varphi(x) = y$$
>
> où l'inconnue est $x \in E$, y est un paramètre de F avec $\varphi : E \to F$ linéaire.

Exemple:
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) - f(x-1) = \lambda$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est fixé.
On pose $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto \varphi(f) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x+1) - f(x-1) \end{array} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \lambda \end{aligned}$$

Le problème est équivalent à

$$\begin{cases} \varphi(f) = y \\ f \in E \end{cases}$$

Soient $f, g \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(\lambda f + \mu g)(x) &= (\lambda f + \mu g)(x+1) - (\lambda f + \mu g)(x-1) \\ &= \lambda f(x+1) - \mu g(x+1) - \lambda f(x-1) - \mu g(x-1) \\ &= \lambda\big(f(x+1) - f(x-1)\big) + \mu\big(g(x+1) - g(x-1)\big) \\ &= \lambda\varphi(f)(x) + \mu\varphi(g)(x) \end{aligned}$$

Donc, $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$
Remarque (Notation):
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
L'ensemble des applications linéaires de E dans F est $\mathscr{L}(E, F)$.
Si $F = E$, alors on note plus simplement $\mathscr{L}(E)$ à la place de $\mathscr{L}(E, E)$.
Les éléments de $\mathscr{L}(E)$ sont appelés <u>endomorphismes (linéaires)</u> de E.

Proposition: Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.

Preuve:
Soient $u, v \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\alpha u + \beta v) &= g\big(f(\alpha u + \beta v)\big) \\ &= g\big(\alpha f(u) + \beta f(v)\big) \\ &= \alpha g\big(f(u)\big) + \beta g\big(f(v)\big) \\ &= \alpha (g \circ f)(u) + \beta (g \circ f)(v)\end{aligned}$$

□

Proposition: $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E.

Preuve:
Soient $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda f + \mu g \in \mathscr{L}(E,F)$.
Soient $u, v \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)(\alpha u + \mu v) &= \lambda f(\alpha u + \beta v) + \mu g(\alpha u + \beta v) \\ &= \lambda\big(\alpha f(u) + \beta f(v)\big) + \mu\big(\alpha g(u) + \beta g(v)\big) \\ &= \alpha\big(\lambda f(u) + \mu g(u)\big) + \beta\big(\lambda f(v) + \mu g(v)\big) \\ &= \alpha\big((\lambda f + \mu g)(u)\big) + \beta\big((\lambda f + \mu g)(v)\big)\end{aligned}$$

De plus, $\tilde{0} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array}$ est linéaire donc $\mathscr{L}(E,F) \neq \varnothing$. □

Proposition: $\big(\mathscr{L}(E), +, \circ, \cdot\big)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre (non commutative en général).

Preuve: — $\big(\mathscr{L}(E), +, \cdot\big)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel d'après la proposition précédente.
— $\big(\mathscr{L}(E), +\big)$ est un groupe abélien.
“ $\circ$ ” est associative et interne sur $\mathscr{L}(E)$.
$\mathrm{id}_E \in \mathscr{L}(E)$.

Soient $f, g, h \in \mathscr{L}(E)$.

$$\begin{aligned}\forall x \in E, f \circ (g+h)(x) &= f\big((g+h)(x)\big) \\ &= f\big(g(x)+h(x)\big) \\ &= f\big(g(x)\big) + f\big(h(x)\big) \text{ car } f \text{ est linéaire} \\ &= (f \circ g + f \circ h)(x)\end{aligned}$$

Donc,

$$f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$$

$$\begin{aligned}\forall x \in E, (g+h) \circ f(x) &= (g+h)\big(f(x)\big) \\ &= g\big(f(x)\big) + h\big(f(x)\big) \\ &= (g \circ f + h \circ f)(x)\end{aligned}$$

Donc,

$$(g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f$$

Donc, $\big(\mathscr{L}(E), +, \circ\big)$ est un anneau

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $f, g \in \mathscr{L}(E)$.

$$\begin{aligned}\forall x \in E, \lambda \cdot (f \circ g)(x) &= \lambda f\big(g(x)\big) \\ (\lambda \cdot f) \circ g(x) &= \lambda f\big(g(x)\big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f \circ (\lambda \cdot g)(x) &= f\big(\lambda g(x)\big) \\ &= \lambda f\big(g(x)\big) \text{ car } f \in \mathscr{L}(E)\end{aligned}$$

□

Corollaire: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. On peut former $P(u) \in \mathscr{L}(X)$: on dit que $P(u)$ est un polynôme d'endomorphisme.

Proposition: Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ bijective. Alors $f^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$.

Preuve:

Soit $u, v \in F$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} & f^{-1}(\alpha u + \beta v) = \alpha f^{-1}(u) + \beta f^{-1}(v) \\ \iff & \alpha u + \beta v = f\big(\alpha f^{-1}(u) + \beta f^{-1}(v)\big) \\ \iff & \alpha u + \beta v = \alpha f\left(f^{-1}(u)\right) + \beta f\left(f^{-1}(v)\right) \\ \iff & \alpha u + \beta v = \alpha u + \beta v \end{aligned}$$

Donc, $f^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$ □

Remarque (Notation):
On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E bijectifs, $\mathrm{GL}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F bijectives.
Les éléments de $\mathrm{GL}(E)$ sont appelés automorphismes (linéaires) de E.

Corollaire: $\mathrm{GL}(E)$ est un sous-groupe de $\big(S(E), \circ\big)$

Définition: $\mathrm{GL}(E)$ est dit “ le groupe linéaire de E ”

19.2 Noyau et image

Proposition: Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, U un sous-espace vectoriel de E et V un sous-espace vectoriel de F.

1. $f(U)$ est un sous-espace vectoriel de F.
2. $f^{-1}(V)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve:

1. $0_F = f(0_E)$ et $0_E \in U$ donc $0_F \in f(U)$ donc $f(U) \neq \varnothing$
   Soient $(x, y) \in f(U)^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Soient $a, b \in U$ tels que $\begin{cases} x = f(a) \\ y = f(b) \end{cases}$.
   $$\lambda x + \mu y = \lambda f(a) + \mu f(b) = f(\lambda a + \mu b) \text{ car } f \in \mathscr{L}(E, F)$$
   U est un sous-espace vectoriel de E.
   Donc $\lambda a + \mu v \in U$
   donc $f(\lambda u + \mu v) \in f(U)$
   donc $\lambda x + \mu y \in f(U)$.
2. $f(0_E) = 0_F \in V$ donc $0_E \in f^{-1}(V)$. Donc $f^{-1}(V) \neq \varnothing$.
   Soient $x, y \in f^{-1}(V)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
   $$f(\lambda x + \mu y) = \lambda \underbrace{f(x)}_{\in V} + \mu \underbrace{f(y)}_{\in V} \in V$$

donc $\lambda x + \mu y \in f^{-1}(V)$.

$\square$

Corollaire: Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}\big(\{0_F\}\big) = \{x \in E \mid f(x) = 0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{f(u) \mid u \in E\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

$\square$

Remarque (Rappel):
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$

$$\begin{aligned} f \text{ injective } &\iff \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \\ f \text{ surjective } &\iff \mathrm{Im}(f) = F \end{aligned}$$

Exemple:

1. Soit I un intervalle, $E = \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}^I$

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\varphi) = \big\{f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ constante } \big\} \\ \mathrm{Im}(\varphi) \supset \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R}) \end{aligned}$$

2. $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \mathbb{R}$, $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ P & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 P(t)\ dt \end{array}$

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\varphi) &= \left\{P = a + bX + cX^2 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } \int_0^1 P(t)\ dt = 0\right\} \\ &= \left\{a + bX + cX^2 \mid a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 0\right\} \\ &= \left\{a + bX + cX^2 \mid a = -\frac{b}{2} - \frac{c}{3}\right\} \\ &= \left\{-\frac{b}{2} - \frac{c}{3} + bX + cX^2 \mid b,c \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{b\left(-\frac{1}{2} + X\right) + c\left(-\frac{1}{3} + X^2\right) \mid b,c \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(-\frac{1}{2} + X, -\frac{1}{3} + X^2\right) \end{aligned}$$

$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$.

19.3 Théorème du rang

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Proposition: Soit $f : E \to F$ un isomorphisme (i.e. une application linéaire bijective). Alors, $\dim(E) = \dim(F)$

Preuve:
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On pose

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_i = f(e_i) \in F$$

— Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. On suppose que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i u_i = 0_F$. D'où,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) &\text{ donc } f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0_F \\ &\text{donc } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\} \\ &\text{donc } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E \\ &\text{donc } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0 \end{aligned}$$

Donc $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.
Soit $y \in F$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
Comme $\mathscr{B}$ engendre E, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.
Comme f est linéaire,

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Donc, $F = \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$
Donc $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de F donc

$$\dim(E) = n = \dim(F)$$

□

La première partie de la preuve précédente justifie le résultat suivant.

Proposition: Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ injective. $\mathscr{L} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de E. Alors $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ est une famille libre de F. En particulier, $\dim(F) \geqslant \dim(E)$. □

La deuxième partie de la preuve prouve :

Proposition: Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ surjective et $\mathscr{G} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille génératrice de E. Alors $\big(f(e_1), \dots, f(e_p)\big)$ est une famille génératrice de F. En particulier,
$$\dim(F) \leqslant \dim(E)$$
□

Théorème (Théorème du rang)**:** Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
$$\dim(E) = \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) + \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big)$$

Preuve (À connaître)*:*
On pose
$$\begin{aligned} u : U &\longrightarrow \operatorname{Im}(f) \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$
où U est un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(f)$ dans E.
(U existe : voir remarque qui suit)

— $u \in \mathscr{L}\big(U, \operatorname{Im}(f)\big)$, en effet, soient $x, y \in U, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
$$\begin{aligned} u(\lambda x + \mu v) &= f(\lambda x + \mu v) \\ &= \lambda f(x) + \mu f(y) \\ &= \lambda u(x) + \mu u(y) \end{aligned}$$

— Soit $y \in \operatorname{Im}(f)$. Soit $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $E = U \oplus \operatorname{Ker}(f)$. On peut écrire
$$\begin{cases} x = a + b \\ a \in U, b \in \operatorname{Ker}(f) \end{cases}$$
D'où,
$$y = f(x) = f(a+b) = f(a) + f(b) = u(a) + 0_E = u(a)$$
Donc u est surjective.
Soit $x \in U$.
$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker}(u) &\iff u(x) = 0_F \\ &\iff f(x) = 0_F \\ &\iff x \in \operatorname{Ker}(f) \\ &\iff x = 0_E \text{ car } U \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\} \end{aligned}$$

Donc u est injective.
Ainsi, $\dim(U) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$
Or,

$$\begin{aligned}\dim(E) &= \dim\big(U \oplus \mathrm{Ker}(f)\big)\\ &= \dim(U) + \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)\end{aligned}$$

donc

$$\dim(U) = \dim(E) - \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)$$

Donc,

$$\dim(E) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$$

□

Remarque:
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E.

<u>Cas 1</u> $F = \{0_E\}$, alors E est un supplémentaire de F.

<u>Cas 2</u> $F \neq \{0_E\}$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F. Alors $\mathscr{B}$ est une famille libre de E. On complète $\mathscr{B}$ en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E. On pose $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$. On démontre que

$$F \oplus G = E$$

Corollaire: Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de <u>même dimension finie</u> et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\begin{aligned}f \text{ injective} &\iff f \text{ surjective}\\ &\iff f \text{ bijective}\end{aligned}$$

Preuve:
D'après le théorème du rang,

$$\dim(E) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$$

<u>Si f est injective</u>, alors $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$
et donc $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 0$
et donc $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim(F)$
et donc $\mathrm{Im}(f) = F$
et donc f est surjective.

<u>Si f est surjective</u>, alors $\mathrm{Im}(f) = F$
et donc $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim(F) = \dim(E)$
et donc $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = 0$

> et donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$
> et donc f est injective □

Exemple:
Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\forall i \neq j, x_i \neq x_j$$

Soit $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. On pose $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ P & \longmapsto & \big(P(x_1), \ldots, P(x_n)\big) \end{array}$

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(P) = 0 \\ &\iff \forall i \in [\![1, n]\!], P(x_i) = 0 \\ &\iff P = 0 \text{ car } \deg(P) \leqslant n-1 \end{aligned}$$

Donc φ est injective et donc φ est bijective.
Donc,

$$\exists! P \in \mathbb{K}_{n-1}[X], \forall i \in [\![1, n]\!], P(x_i) = y_i$$

De plus, $\varphi^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}_{n-1}[X]$ est un isomorphisme.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique d $\mathbb{K}^n$. $\big(\varphi^{-1}(e_1) \ldots, \varphi^{-1}(e_n)\big)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
$\forall i \in [\![1, n]\!], \varphi^{-1}(e_i) = L_i$ es tle i-ème polynôme interpolateur de Lagrange.

$$\begin{aligned} P &= \varphi^{-1}(y_1, \ldots, y_n) \\ &= \varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n y_i e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n y_i \varphi^{-1}(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n y_i L_i \end{aligned}$$

Exercice (Interpolation de Hermite):
Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ avec

$$\forall i \neq j, x_i \neq x_j$$

Soit $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{K}^n$.
Trouver un polynôme de plus bas degré tel que

$$(*) \qquad \forall i \in [\![1, n]\!], \begin{cases} P(x_i) = y_i \\ P'(x_i) = z_i \end{cases}$$

Soit $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_{2n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{2n} \\ P & \longmapsto & \big(P(x_1), \ldots, P(x_n), P'(x_1), \ldots, P'(x_n)\big) \end{array}$

$$(*) \iff \varphi(P) = (y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n)$$

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker}(\varphi) &\iff \forall i, \begin{cases} P(x_i) = 0 \\ P'(x_i) = 0 \end{cases} \\ &\iff P = 0 \text{ car } \deg(P) \leqslant 2n-1 \end{aligned}$$

Donc φ est un isomorphisme.

Corollaire: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ avec E de dimension finie. Alors,

$$f \in \mathrm{GL}(E) \iff f \text{ injective } \iff f \text{ surjective}$$

□

Remarque:
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors

$$\boxed{\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)}$$

$\dim\big(\operatorname{Im}(f)\big) = \operatorname{rg}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$

Définition: Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Le rang de f est

$$\operatorname{rg}(f) = \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big)$$

19.4 Formes linéaires

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble des formes linéaires est noté $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. E^* est appelé espace dual de E.

Proposition: Toute forme linéaire est soit nulle, soit surjective.

Preuve:
Soit $f \in E^*$.
$\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$ donc $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim(\mathbb{K}) = 1$.
Si $\operatorname{rg}(f) = 0$, alors $\operatorname{Im}(f) = \{0\}$ et donc

$$\forall x \in E, f(x) = 0$$

Si $\operatorname{rg}(f) = 1$, alors $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{K}$ et donc f est surjective. □

Proposition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in E^* \setminus \{0\}$. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension $n-1$.

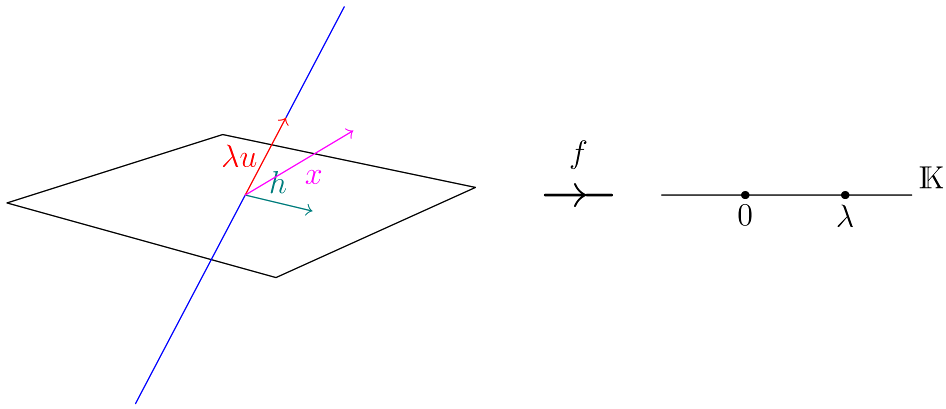
Preuve:
Comme $f \neq 0$, donc $\mathrm{rg}(f) = 1$
D'après le théorème du rang,

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f) = n - 1$$

□

Proposition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et H un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$. Alors,

$$\exists f \in E^*, \mathrm{Ker}(f) = H$$



Preuve:
Soit D un supplémentaire de H dans E :

$$E = H \oplus D$$

Nécessairement,

$$\dim(D) = \dim(E) - \dim(H) = 1$$

Soit $u \in D \setminus \{0\}$. $D = \mathrm{Vect}(u)$

On pose $f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = h + \lambda u & & \\ (h \in H, \lambda \in \mathbb{K}) & \longmapsto & \lambda \end{array}$

Montrons que $f \in E^*$.
Soient $(x, y) \in E^2, (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.

On pose

$$\begin{cases} x = h + \lambda u, & h \in H, \lambda \in \mathbb{K} \\ y = h' + \lambda' u, & h' \in H, \lambda' \in \mathbb{K} \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= \alpha(h + \lambda u) + \beta(h' + \lambda' u) \\ &= \underbrace{(\alpha h + \beta h')}_{\in H} + \underbrace{(\alpha\lambda + \beta\lambda')}_{\in \mathbb{K}} u \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \alpha\lambda + \beta\lambda' \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \end{aligned}$$

Soit $x \in E$. On pose $x = h + \lambda u$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker}(f) &\iff f(x) = 0 \\ &\iff \lambda = 0 \\ &\iff x = y \\ &\iff x \in H \end{aligned}$$

Donc, $H = \operatorname{Ker}(f)$.

□

Exemple:
$E = \mathbb{R}^4$, $H = \operatorname{Vect}\big((1,0,0,1),(1,1,0,0),(0,1,1,0)\big)$
Soit $u = (1,2,1,1) \notin H$.
Soit $(x,y,z,t) \in E$. On cherche $(\alpha,\beta,\gamma,\lambda) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$(*) \qquad (x,y,z,t) = \alpha(1,0,0,1) + \beta(1,1,0,0) + \gamma(0,1,1,0) + \lambda(1,2,1,1)$$

Plus précisément, on cherche à exprimer λ en fonction de x, y, z, t.

$$(*) \iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = x \\ \beta + \gamma + 2\lambda = y \\ \gamma + \lambda = z \\ \alpha + \lambda = t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{\alpha} + \beta + \lambda = x \\ \beta + \gamma + 2\lambda = y \\ \boxed{\gamma} + \lambda = z \\ -\beta = t - x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{\alpha} + \beta + \lambda = x \\ \beta + \lambda = y - z \\ \boxed{\gamma} + \lambda = z \\ \beta = x - t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = y - z - x + t \\ \quad \vdots \end{cases}$$

Donc,

$$(x, y, z, t) \in H \iff y - z - x + t = 0$$

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & x - y + z - t \end{array}$ et $H = \mathrm{Ker}(f)$

Proposition: Avec les notations précédentes,
$\{f \in E^* \mid \mathrm{Ker}(f) = H\}$ est une droite de E^* privée de l'application nulle.
En d'autres termes, les équations de H sont 2 à 2 proportionelles.

Preuve:
Soient $f, g \in E^*$ telles que

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$$

On pose $H = \mathrm{Ker}(f)$. Soit $u \notin H$ de sorte que

$$H \oplus \mathrm{Vect}(u) = E$$

$u \notin H$ donc $f(u) \neq 0$.
On pose $\alpha = \dfrac{g(u)}{f(u)}$. Montrons que $g = \alpha f$.
Soit $x \in E$. On pose $x = h + \lambda u$ avec $\begin{cases} h \in H \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{cases}$

$$\begin{array}{rcl} g(x) = g(h) + \lambda g(u) = 0 + & \lambda\alpha f(u) \\ & \parallel \\ \alpha f(x) = \alpha\big(f(h) + \lambda f(u)\big) = & \lambda\alpha f(u) \end{array}$$

□

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E. On dit que H est un hyperplan de E s'il existe une droite D de E telle que

$$H \oplus D = E$$

En reprenant les démonstrations précédentes, on a encore les résultats suivants :

Proposition: Soit H un hyperplan de E. Alors, $\{f \in E^* \mid \mathrm{Ker}(f) = H\}$ est une droite de E^* privée de l'application nulle. □

Proposition: Soit $f \in E^*$ non nulle. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un hyperplan de E.

Preuve:
f non nulle. Soit $x \in E$ tel que

$$f(x) \neq 0$$

On pose $H = \mathrm{Ker}(f)$ et $D = \mathrm{Vect}(x)$. Montrons que $H \oplus D = E$.

ANALYSE Soit $y \in E$. On suppose $y = h + \lambda x$ avec $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, $f(y) = f(h) + \lambda f(x) = \lambda f(x)$ donc $\begin{cases} \lambda = f(y)f(x)^{-1} \\ h = y - f(y)f(x)^{-1}x \end{cases}$

SYNTHÈSE Soit $y \in E$. On pose $\begin{cases} \lambda = f(y)f(x)^{-1} \\ h = y - \lambda x \end{cases}$.

Évidemment, $\begin{cases} h + \lambda x = y \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{cases}$

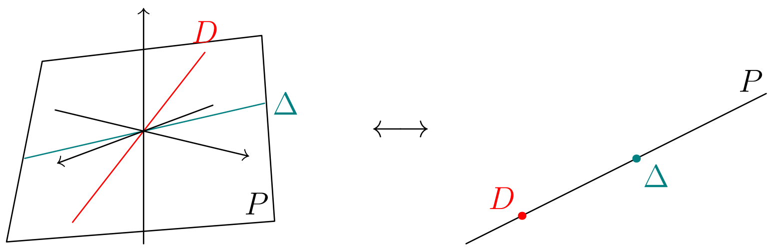
$$\begin{aligned} f(h) &= f(y - \lambda x) \\ &= f(y) - \lambda f(x) \\ &= f(y) - f(y) f(x)^{-1} f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

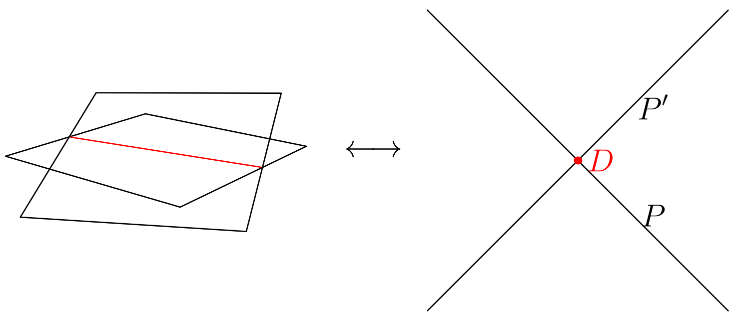
$\square$

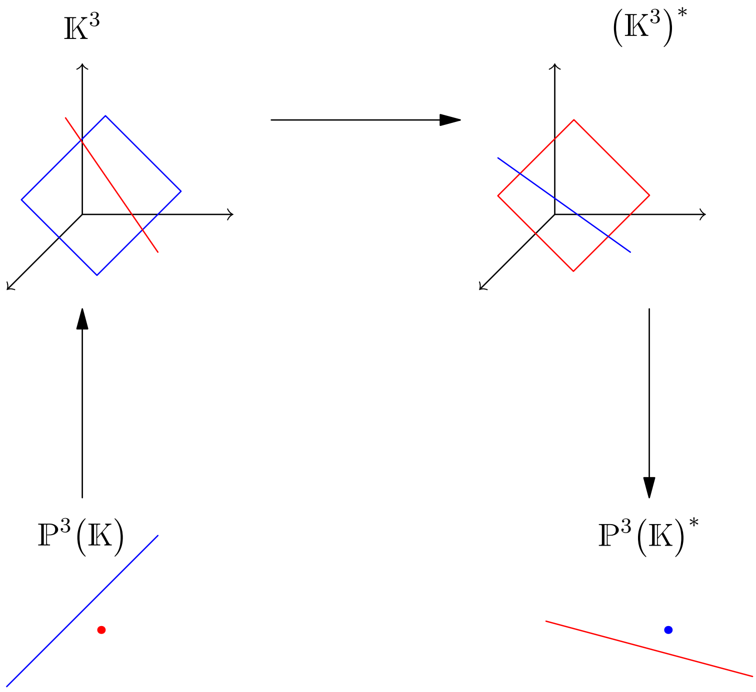
<u>Hors-Programme</u>

$$\mathbb{P}^3(\mathbb{K}) = \{D \setminus \{0\} \mid D \text{ droite vectorielle de } \mathbb{K}^3\}$$

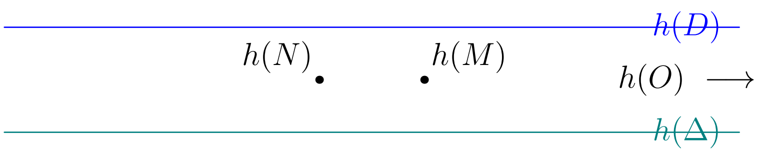
Une <u>droite</u> projective de $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ est un plan vectoriel de $\mathbb{K}^3$ privé de 0.
À faire : schéma A







À faire : schémas B et C



19.5 Projections et symétries

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces de

E supplémentaires :

$$E = F \oplus G$$

Soit $x \in E$.

$$\exists!(a,b) \in F \times G, x = a + b$$

Le vecteur a est appelé projeté de x sur F parallèlement à G.
Le vecteur b est appelé projeté de x sur G parallèlement à F.
La projection sur F parallèlement à G est l'application qui à $x \in E$ associe son projeté sur F parallèlement à G.

Exemple:
$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F = \{f \in E \mid f \text{ paire}\}$ et $G = \{f \in E \mid f \text{ impaire}\}$
On a $E = F \oplus G$.
Soient p la projection sur F parallèlement à G et q la projection sur G parallèlement à F.

$$\forall x \in E, \begin{cases} p(f) : x \mapsto \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) \\ q(f) : x \mapsto \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big) \end{cases}$$

Proposition: Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires et p la projection sur F parallèlement à G.

1. $p \in \mathscr{L}(E)$
2. $p_{|F} = \mathrm{id}_F$ et $p_{|G} = 0$
3. $p \circ p = p$
4. $\mathrm{id}_E - p$ est la projection sur G parallèlement à F.

Preuve: 1. $\forall x \in E, p(x) \in F \subset E$
Soit $(x,y) \in E^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$.
On pose $x = a + b$ avec $\begin{cases} a \in F \\ b \in G \end{cases}$ et $y = c + d$ avec $\begin{cases} c \in F \\ d \in G \end{cases}$
donc,

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &= \lambda(a+b) + \mu(c+d) \\ &= \underbrace{(\lambda a + \mu c)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda b + \mu d)}_{\in G} \end{aligned}$$

Donc,

$$p(\lambda x + \mu y) = \lambda a + \mu b = \lambda p(x) + \mu p(y)$$

2. $\forall x \in F, x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0}_{\in G}$ donc $p(x) = x$

$\forall x \in G, x = \underbrace{0}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G}$ donc $p(x) = 0$

3. $\forall x \in E, p(x) \in F$ donc $p(p(x)) = p(x)$
4. Soit $x \in E$. On pose $x = a+b$ avec $\begin{cases} a \in F \\ b \in G \end{cases}$. Donc $p(x) = a$. D'où, $x - p(x) = b$ est le projeté de x sur G parallèlement à F.

□

Définition: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On dit que f est un projecteur si $f \circ f = f$

Proposition: Soit f un projecteur de E. Alors f est la projection sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\text{Ker}(f)$. En particulier,

$$\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = E$$

Preuve: ANALYSE Soit $x \in E$. On suppose que $x = a+b$ avec $\begin{cases} a \in \text{Ker}(f) \\ b \in \text{Im}(f) \end{cases}$.

D'où,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f(b) \\ &= 0 + f(b) \\ &= f(b) \end{aligned}$$

Soit $y \in E$ tel que $b = f(y)$. Donc,

$$f(b) = f\big(f(y)\big) = f(y) = b$$

Donc, $\underline{f(x) = b}$ et donc $\underline{a = x - b = x - f(x)}$

SYNTHÈSE Soit $x \in E$. On pose $\begin{cases} a = x - f(x) \\ b = f(x) \end{cases}$. Évidemment, $\begin{cases} a + b = x \\ b \in \text{Im}(f) \end{cases}$

$$\begin{aligned} f(a) &= f\big(x - f(x)\big) \\ &= f(x) - f\big(f(x)\big) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $a \in \mathrm{Ker}(f)$. On a montré

$$\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$$

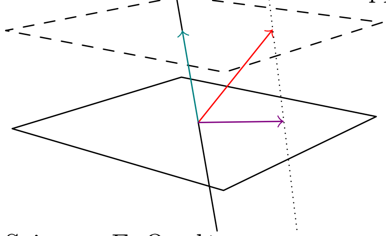
On considère la projection p sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.
Soit $x \in E$. On a montré que

$$x = \underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Im}(f)} + \underbrace{x - f(x)}_{\in \mathrm{Ker}(f)}$$

donc $p(x) = f(x)$ et donc $p = f$

$\square$

Définition: Soient F et G supplémentaires dans E : $E = F \oplus G$



Soit $x \in E$. On décompose x :

$$x = a + b \text{ avec } \begin{cases} a \in F \\ b \in G \end{cases}$$

et on forme

$$y = a - b$$

On dit que y est le symétrique de x par rapport à F parallèlement à G
La symétrie par rapport à F parallèlement à G est l'application qui à tout $x \in E$ associe son symétrique parallèlement à G par rapport à F.

Proposition: Soient F et G supplémentaires dans E, s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

1. $s \in \mathscr{L}(E)$
2. $s_{|E} = \mathrm{id}_F$ et $s_{|G} = -\mathrm{id}_G$
3. $s \circ s = \mathrm{id}_E$

Preuve:
Soient p la projection sur F parallèlement à G et q la projection sur G parallèlement à F.
On remarque que $s = p - q$.

1. p et q sont des endomorphismes donc $\mathscr{s}$ aussi
2. $\forall x \in E, \mathscr{s}(x) = p(x) - q(x) = x - 0 = x$
   $\forall x \in G, \mathscr{s}(x) = p(x) - q(x) = 0 - x = -x$
3.

$$\begin{aligned}\forall x \in E, \mathscr{s}\big(\mathscr{s}(x)\big) &= \mathscr{s}\big(p(x) - q(x)\big)\\ &= \mathscr{s}\big(\underbrace{p(x)}_{\in F}\big) - \mathscr{s}\big(\underbrace{q(x)}_{\in G}\big)\\ &= p(x) - \big(-q(x)\big)\\ &= x\end{aligned}$$

□

Définition: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On dit que f est <u>involutive</u> si $f \circ f = \mathrm{id}_E$

Proposition: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ involutif. Alors f est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$. En particulier,

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E) = E$$

Preuve: <u>ANALYSE</u> Soit $x \in E$. On suppose que $x = a+b$ avec $\begin{cases} a \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \\ b \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E) \end{cases}$

$$\begin{aligned} a \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) &\iff (f - \mathrm{id}_E)(a) = 0\\ &\iff f(a) - a = 0\\ &\iff a = f(a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E) &\iff f + \mathrm{id}_E)(b) = 0\\ &\iff f(b) + b = 0\\ &\iff f(b) = -b\end{aligned}$$

On sait que $x = a + b$ et $f(x) = f(a) + f(b) = a - b$
D'où,

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}\big(x + f(x)\big)\\ b &= \frac{1}{2}\big(x - f(x)\big)\end{aligned}$$

<u>SYNTHÈSE</u> Soit $x \in E$. On pose

$$a = \frac{1}{2}\big(x + f(x)\big)$$
$$b = \frac{1}{2}\big(x - f(x)\big)$$

Alors $a + b = x$

$$\begin{aligned} f(a) &= f\left(\frac{1}{2}\big(x + f(x)\big)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x) + f\big(f(x)\big)\right) \\ &= \frac{1}{2}\big(f(x) + x\big) \\ &= a \end{aligned}$$

Donc $a \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$

$$\begin{aligned} f(b) &= f\left(\frac{1}{2}\big(x - f(x)\big)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x) - f\big(f(x)\big)\right) \\ &= \frac{1}{2}\big(f(x) - x\big) \\ &= -b \end{aligned}$$

donc $b \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$
Ainsi,

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E) = E$$

Soit $\mathscr{s}$ la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$.
Soit $x \in E$. On a vu que

$$x = \underbrace{\frac{1}{2}\big(x + f(x)\big)}_{\in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)} + \underbrace{\frac{1}{2}\big(x - f(x)\big)}_{\in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)}$$

Donc,

$$\mathscr{s}(x) = \frac{1}{2}\big(x + f(x)\big) - \frac{1}{2}\big(x - f(x)\big) = f(x)$$

Donc $\mathscr{s} = f$ $\square$

EXEMPLE:

$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et

$$\begin{aligned} \mathscr{s} : E &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto \mathscr{s}(f) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(-x) \end{array} \end{aligned}$$

$\mathscr{s}(f) = f \circ (-\operatorname{id}_{\mathbb{R}})$
$\mathscr{s} \in \mathscr{L}(E)$, en effet :

$$\begin{aligned} \forall f, g \in \mathscr{L}(E), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \\ \mathscr{s}(\alpha f + \beta g) &= (\alpha f + \beta g) \circ (-\operatorname{id}_{\mathbb{R}}) \\ &= \alpha\big(f \circ (-\operatorname{id}_{\mathbb{R}}\big) + \beta\big(g \circ (-\operatorname{id}_{\mathbb{R}})\big) \\ &= \alpha \mathscr{s}(f) + \beta \mathscr{s}(g) \end{aligned}$$

De plus, $\mathscr{s} \circ \mathscr{s} = \operatorname{id}_E$. Donc $\mathscr{s}$ est une symétrie.

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(\mathscr{s} - \operatorname{id}_E) &= \{f \in E \mid f \text{ paire}\} = \mathscr{P} \\ \operatorname{Ker}(\mathscr{s} + \operatorname{id}_E) &= \{f \in E \mid f \text{ impaire}\} = \mathscr{I} \end{aligned}$$

D'où,

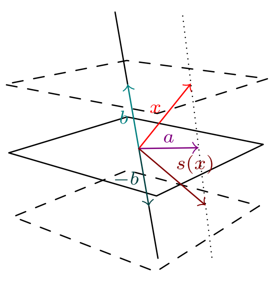
$$\mathscr{P} \oplus \mathscr{I} = E$$

Exemple:
$E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
Pour $A \in E$, on note ${}^tA$ la transposée de A la matrice obtenue en écrivant en ligne les colonnes de A.
Soit

$$\begin{aligned} \mathscr{s} : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ A &\longmapsto {}^tA \end{aligned}$$

$\mathscr{s}$ est linéaire, $\mathscr{s} \circ \mathscr{s} = \operatorname{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(\mathscr{s} - \operatorname{id}_E) &= S_n(\mathbb{K}) \\ \operatorname{Ker}(\mathscr{s} + \operatorname{id}_E) &= A_n(\mathbb{K}) \end{aligned}$$



Chapitre 20

Fractions rationnelles

20.1 Construction de $\mathbb{K}(X)$

Proposition
Définition: On définit la relation $\sim$ sur $\mathbb{K}[X] \times \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)$ par

$$(P,Q) \sim (A,B) \iff PB = QA$$

Cette relation est une relation d'équivalence. On note $\big(\mathbb{K}[X] \times \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)\big)/_{\sim}$. Les éléments de $\mathbb{K}(X)$ sont appelés fractions rationnelles.
On note $\dfrac{P}{Q}$ la classe d'équivalence du couple (P,Q).

Preuve:
On note $E = \mathbb{K}[X]\big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)$.

- Soit $(P,Q) \in E$. $PQ = QP$ car $\times$ est commutative dans $\mathbb{K}[X]$. Donc $(P,Q) \sim (P,Q)$
- Soient $(P,Q) \in E, (A,B) \in E$. On suppose que $(P,Q) \sim (A,B)$. Donc $PB = QA$
  Donc, $(A,B) \sim (P,Q)$
- Soit $\big((P,Q),(A,B),(C,D)\big) \in E^3$. On suppose

$$\begin{cases} (P,Q) \sim (A,B) \\ (A,B) \sim (C,D) \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{cases} PB = QA \\ AD = BC \end{cases}$$

Donc

$$PBD = QAD = QBC$$

donc $B(PD - QC) = 0$

Comme $B \neq 0$ et comme $\mathbb{K}[X]$ est intègre,

$$PD - QC = 0$$

et donc $(P, Q) \sim (C, D)$

□

Proposition: Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)$ et $R \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Alors

$$\frac{PR}{QR} = \frac{P}{Q}$$

Preuve:

$$\begin{aligned} \frac{PR}{QR} = \frac{P}{Q} &\iff (PQ, QR) \sim (P, Q) \\ &\iff PRQ = QRP \end{aligned}$$

□

Définition: Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \setminus \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)$. On dit que la fraction $\dfrac{P}{Q}$ est sous forme irréductible si $P \wedge Q = 1$.

Proposition
Définition: Soient $(P, Q) \sim (A, B)$. Alors

$$\deg(P) - \deg(Q) = \deg(A) - \deg(B)$$

Le degré de $\dfrac{P}{Q}$ est $\deg(P) - \deg(Q)$. On note ce “nombre” $\deg\left(\dfrac{P}{Q}\right)$.

Preuve:
On sait que $PB = QA$ donc

$$\deg(P) + \deg(Q) = \deg(Q) + \deg(A)$$

et donc

$$\deg(P) - \deg(Q) = \deg(A) - \deg(B)$$

□

Proposition
Définition: Soient $(P, Q) \sim (A, B)$ et $(R, S) \sim (C, D)$. Alors, $(PR, QS) \sim (AC, BD)$.
Le <u>produit</u> de $\frac{P}{Q}$ avec $\frac{R}{S}$ est $\frac{PR}{QS}$

Preuve:
On sait que $\begin{cases} PB = QA \\ RD = SC \end{cases}$. D'où,

$$PBRD = QASC$$

et donc

$$(PR)(BD) = (QS)(AC)$$

donc

$$(PR, QS) \sim (AC, BD)$$

□

Proposition
Définition: Avec les notations précédentes,

$$(PS + RQ, QS) \sim (AD + BC, BD)$$

On définit la somme de $\frac{P}{Q}$ et $\frac{R}{S}$ par

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{PS + RQ}{QS}$$

Preuve:
On sait que $\begin{cases} PB = QA \\ RD = SC \end{cases}$. Donc,

$$\begin{aligned} (PS + RQ)BD &= PSBD + RQBD \\ &= QASD + SCQB \\ &= QS(AD + BC) \end{aligned}$$

□

Théorème: $\big(\mathbb{K}(X), +, \times\big)$ est un corps.

Preuve (partielle): 1. "+" est associative : soient $\left(\frac{P}{Q}, \frac{R}{S}, \frac{A}{B}\right) \in \mathbb{K}(X)^3$.

$$\begin{array}{ccccc} \frac{P}{Q} + \left(\frac{R}{S} + \frac{A}{B}\right) & = & \frac{P}{Q} + \frac{RB+AS}{SB} & = & \frac{PSB+QRB+QAS}{QSB} \\ & & & & \| \\ \left(\frac{P}{Q} + \frac{R}{S}\right) + \frac{A}{B} & = & \frac{PS+RQ}{QS} + \frac{A}{B} & = & \frac{PSB+RQB+AQS}{QSB} \end{array}$$

2. " + " est commutative
3. $\frac{0}{1}$ est neutre pour " + "

$$\frac{P}{Q} + \frac{0}{1} = \frac{P \times 1 + 0 \times Q}{Q \times 1} = \frac{P}{Q}$$

4. Soit $\frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$.

$$\frac{P}{Q} + \frac{-P}{Q} = \frac{PQ - QP}{Q^2} = \frac{0}{Q^2} = \frac{0}{1}$$

5. " × " est associative
6. " × " est commutative
7. $\frac{1}{1}$ est le neutre pour " × "
8. Soient $\left(\frac{P}{Q}, \frac{R}{S}, \frac{A}{B}\right) \in \mathbb{K}(X)^3$

$$\frac{P}{Q}\left(\frac{R}{S} + \frac{A}{B}\right) = \frac{P}{Q} \times \frac{RB+AS}{SB} = \frac{PRB+PAS}{QSB}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} \times \frac{R}{S} + \frac{P}{Q} \times \frac{A}{B} &= \frac{PR}{QS} + \frac{PA}{QB} \\ &= \frac{PRQB+QSPA}{Q^2SB} \\ &= \frac{PRB+SPA}{QSB} \end{aligned}$$

9. Soit $\frac{P}{Q} \neq \frac{0}{1}$ donc $P \times 1 \neq Q \times 0$ donc $P \neq 0$.

$$\frac{P}{Q} \times \frac{Q}{P} = \frac{PQ}{PQ} = \frac{1}{1}$$

10. $\frac{1}{1} \neq \frac{0}{1}$ car $1 \times 1 \neq 0 \times 1$

$\square$

Proposition:

$$\forall P, A \in \mathbb{K}[X], \forall Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}, \qquad \frac{P}{Q} + \frac{A}{Q} = \frac{P+A}{Q}$$

Proposition: $i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ P & \longmapsto & \dfrac{P}{1} \end{array}$ est un morphisme d'anneaux injectif.

Preuve:
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

$$\begin{aligned} i(P+Q) &= \frac{P+Q}{1} = \frac{P}{1} + \frac{Q}{1} = i(P) + i(Q) \\ i(PQ) &= \frac{PQ}{1} = \frac{PQ}{1 \times 1} = \frac{P}{1} \times \frac{Q}{1} = i(P) \times i(Q) \\ i(1) &= \frac{1}{1} \end{aligned}$$

Donc i est un morphisme d'anneaux.

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(i) &\iff i(P) = \frac{0}{1} \\ &\iff \frac{P}{1} = \frac{0}{1} \\ &\iff P \times 1 = 0 \times 1 \\ &\iff P = 0 \end{aligned}$$

donc i est injective. $\square$

Définition: Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On pose

$$\lambda F = \frac{\lambda P}{Q} = \frac{\lambda}{1} \times \frac{P}{Q}$$

Proposition: $\big(\mathbb{K}(X),+,\cdot\big)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ P & \longmapsto & \dfrac{P}{1} \end{array}$ est linéaire. □

REMARQUE:
On peut identifier $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $\dfrac{P}{1} \in \mathbb{K}(X)$ i.e. écrire $P = \dfrac{P}{1}$ et alors
$$\begin{cases} \mathbb{K}[X] \text{ est un sous-anneau de } \mathbb{K}(X) \\ \mathbb{K}[X] \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{K}(X) \end{cases}$$
De plus, les deux définitions de degré coïncident.

Proposition: Soit $F, G \in \mathbb{K}(X)$.

1. $\deg(F+G) \leqslant \max(\deg F, \deg G)$
   Si $\deg(F) \neq \deg(G)$ alors $\deg(F+G) = \max(\deg F, \deg G)$;
2. $\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G)$;
3. Si $F \neq 0$, $\deg\left(\dfrac{1}{F}\right) = -\deg(F)$.

Preuve:
On pose $F = \dfrac{A}{B}$ et $G = \dfrac{P}{Q}$.

1. $F + G = \dfrac{AQ + PB}{BQ}$. On suppose que $\deg(F) \geqslant \deg(G)$ i.e. $\deg A - \deg B \geqslant \deg P - \deg Q$.
$$\deg(F+G) = \deg(QA + PB) - \deg(BQ)$$
   On a
$$\deg(AQ) = \deg(A) + \deg(Q) \geqslant \deg(P) + \deg(B) = \deg(PB).$$
   D'où
$$\deg(F+G) \leqslant \deg(AQ) - \deg(BQ) = \deg\left(\frac{AQ}{BQ}\right) = \deg(F).$$
   Si $\deg(F) > \deg(G)$, alors $\deg(AQ) > \deg(PB)$ et donc
$$\deg(F+G) = \deg(AQ) - \deg(BQ) = \deg(F).$$

2.

$$\begin{aligned}\deg(FG) &= \deg\left(\frac{AP}{BQ}\right) \\ &= \deg(AP) - \deg(BQ) \\ &= \deg(A) + \deg(P) - \deg(B) - \deg(Q) \\ &= \deg F + \deg G.\end{aligned}$$

3. $\deg\left(\frac{1}{F}\right) = \deg(1) - \deg(F) = -\deg(F)$

□

20.2 Décomposition en éléments simples

Définition

Lemme:

$$\forall F \in \mathbb{K}(X), \exists!(E,G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X), \begin{cases} F = E + G \\ \deg(G) < 0 \end{cases}$$

On dit que E est la partie entière de F.

Preuve:
On pose $F = \frac{P}{Q}$ avec $P \in \mathbb{K}[X], Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

Analyse Soit $E \in \mathbb{K}[X]$ et $G \in \mathbb{K}(X)$ tels que

$$F = E + G \deg(G) < 0.$$

On pose $G = \frac{A}{Q}$ avec $A \in \mathbb{K}[X]$.

$$\begin{aligned}F = E + G &\iff \frac{P}{Q} = E + \frac{A}{Q} \\ &\iff P = EQ + A.\end{aligned}$$

$\deg G < 0, \deg A < \deg Q$.
Don E est le quotient de la division euclidienne de P par Q et A sont reste.

Synthèse Soient E le quotient et A le reste de la division euclidienne de P par Q. On a alors

$$\begin{cases} P = EQ + A \\ \deg(A) < \deg(Q) \end{cases}$$

et donc
$$F = E + \frac{A}{Q} \deg\left(\frac{A}{Q}\right) < 0.$$
□

EXEMPLE:
$F = \dfrac{X^3 + X - 1}{X^2 + 2}$, $\deg F = 1$.

$$\begin{array}{r|l} X^3 + X - 1 & X^2 + 2 \\ \cline{2-2} - \quad X^3 + 2X & \quad X \\ \cline{1-1} -X - 1 & \end{array}$$

Donc,
$$F = \frac{X(X^2+2) - (X+1)}{X^2+2} = X - \frac{X+1}{X^2+2}.$$

Lemme: Soit $F = \dfrac{P}{AB}$ avec
$$\begin{cases} (P, A, B) \in \mathbb{K}[X]^3; \\ A \neq 0; B \neq 0; \\ A \wedge B = 1; \deg F < 0. \end{cases}$$
Alors,
$$\exists!(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2, \begin{cases} F = \dfrac{U}{A} + \dfrac{V}{B} \\ \deg\left(\dfrac{U}{A}\right) < 0 \text{ et } \deg\left(\dfrac{V}{R}\right). \end{cases}$$

Preuve: <u>ANALYSE</u> On suppose que
$$\begin{cases} F = \dfrac{U}{A} + \dfrac{V}{B} \\ U \in \mathbb{K}[X], \deg U < \deg A \\ V \in \mathbb{K}[X], \deg V < \deg B. \end{cases}$$
D'où
$$\frac{P}{AB} = \frac{UB + VA}{AB}$$
et donc $P = UB + VA$. D'après le théorème de Bézout, il existe $(R, S) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que
$$RB + SA = P.$$
On a alors
$$0 = B(R - U) + A(S - V)$$

donc
$$A(S-V)=B(U-R)$$
donc
$$A \mid B(U-R) \qquad \text{dans } \mathbb{K}[X].$$
D'après le théorème de Gauss,
$$A \mid U-R$$
Donc $U-R=AT$ avec $T\in\mathbb{K}[X]$ donc
$$A(S-V)=BAT$$
donc
$$S-V=BT$$
donc
$$\begin{cases} R=-AT+U \\ S=BT+V \end{cases}.$$
On a
$$\begin{cases} S=BT+V \\ \deg V<\deg B \end{cases}$$
donc V est le reste de la division euclidienne de S par B et U est le reste de la division euclidienne de R par A.

<u>SYNTHÈSE</u> Soit $(R,S)\in\mathbb{K}[X]^2$ tel que
$$P=RB+SA.$$
Soit V le reste de la division euclidienne de S par B.
$$\begin{cases} S=BT+V, T\in\mathbb{K}[X] \\ \deg V<\deg B \end{cases}$$
D'où,
$$\frac{P}{AB}=\frac{R}{A}+T+\frac{V}{B}=\frac{R+AT}{A}+\frac{V}{B}$$
et
$$\deg\left(\frac{V}{B}\right)=\deg(V)-\deg(B)<0.$$
Si $\deg\left(\frac{R+AT}{A}\right)\geqslant 0$, alors
$$\deg\left(\frac{R+AT}{A}\right)>\deg\left(\frac{V}{B}\right)$$
et alors
$$\deg\left(\frac{P}{AB}\right)=\deg\left(\frac{R+AT}{A}\right)\geqslant 0.$$

Or,
$$\deg\left(\frac{P}{AB}\right) < 0.$$
Donc
$$\deg\left(\frac{R+AT}{A}\right) < 0.$$
On pose $U = R + AT$. On a bien
$$\frac{P}{AB} = \frac{U}{A} + \frac{V}{B} \text{ avec } \deg\left(\frac{U}{V}\right) < 0 \text{ et } \deg\left(\frac{V}{R}\right) < 0.$$
□

Lemme: Soit $H \in \mathbb{K}[X]$ irréductible, $n \in \mathbb{N}_*$, $P \in \mathbb{K}[X]$, $F = \dfrac{P}{H^n}$ et $\deg F < 0$. Alors,
$$\begin{cases} \exists!(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2, F = \dfrac{U}{H^n} + \dfrac{V}{H^{n-1}}; \\ \deg U < \deg H; \\ \deg\left(\dfrac{V}{H^{n+1}}\right) < 0. \end{cases}$$

Preuve: Analyse $F = \dfrac{U}{H^n} + \dfrac{V}{H^{n-1}}$ avec
$$\begin{cases} \deg U < \deg H, \\ U \in \mathbb{K}[X], V \in \mathbb{K}[X], \\ \deg\left(\dfrac{V}{H^{n-1}}\right) < 0. \end{cases}$$
D'où
$$P = U + VH, \deg U < \deg H.$$
Donc V est le quotient et U le reste de la division euclidienne de P par H.

Synthèse Soient V et U le quotient et le reste de la division euclidienne de P par H :
$$\begin{cases} P = U + VH \\ \deg U < \deg H. \end{cases}$$
D'où
$$F = \frac{U}{H^n} + \frac{V}{H^{n-1}}$$
$$\deg U < \deg H$$

Si $\deg\left(\dfrac{V}{H^{n-1}}\right) \geqslant 0$, alors $\deg F = \deg\left(\dfrac{V}{H^{n-1}}\right) \geqslant 0$: une contradiction. Donc $\deg\left(\dfrac{V}{H^{n-1}}\right) < 0$.

$\square$

Théorème (Théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}(\mathbf{X})$)**:** Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $F = \dfrac{P}{Q}$ la forme irréductible de F. On note $(z_1, \ldots, z_p)$ les racines complexes de Q et $(\mu_1, \ldots, \mu_p)$ leur multiplicité.
Alors,

$$\exists!(E, a_{1,1}, \ldots, a_{1,\mu_1}, a_{2,1}, \ldots, a_{2,\mu_2}, \ldots, a_{p,1}, \ldots, a_{p,\mu_p}) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}^{\deg Q},$$
$$F = E + \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{a_{i,j}}{(X - z_i)^j}\right).$$

Exemple:
$F = \dfrac{X^7 - 1}{X^5 + 2X^3 + X} \in \mathbb{C}(X)$

$$\begin{array}{rr|l}
 & X^7 - 1 & X^5 + 2X^3 + X \\
\cline{3-3}
- & X^7 + 2X^5 + X^3 & \qquad X^2 - 2 \\
\cline{1-2}
 & -2X^5 - X^3 - 1 & \\
- & -2X^5 - 4X^3 - 2X & \\
\cline{1-2}
 & 3X^3 + 2X - 1 &
\end{array}$$

$$F = (X^2 - 2) + \frac{3X^3 + 2X - 1}{X^5 + 2X^3 + X}$$

$$\begin{aligned}
X^5 + 2X^3 + X &= X(X^4 + 2X^2 + 1) \\
&= X(X^2 + 1)^2 \\
&= X(X - i)^2(X + i)^2
\end{aligned}$$

D'après le $2^{\text{ème}}$ lemme,

$$\frac{3X^3 + 2X - 1}{X^5 + 2X^3 + X} = \frac{a}{X} + \frac{bX + c}{(X - i)^2}$$

D'après le $3^{\text{ème}}$ lemme,

$$\begin{aligned}
\frac{bX + c}{(X - i)^2} &= \frac{f}{(X - i)^2} + \frac{g}{X - i} \\
\frac{dX + e}{(X + i)^2} &= \frac{h}{(X + i)^2} + \frac{h}{X + i}
\end{aligned}$$

$$F = (X^2 - 2) + \frac{a}{X} + \frac{f}{(X-i)^2} + \frac{g}{X-i} + \frac{h}{(X-i)^2} + \frac{k}{X+i}.$$

On multiplie par X :

$$\frac{X^7 - 1}{X^4 + 2X^2 + 1} = a + X\left(X^2 - 2 + \frac{f}{(X-i)^2} + \frac{g}{X-i} + \frac{h}{(X-i)^2} + \frac{k}{X+1}\right).$$

En remplaçant X par 0, on obtient

$$a = \frac{-1}{1} = -1.$$

On multiplie par $(X-i)^2$ et on remplace X par i :

$$\frac{3i^2 + 2i - 1}{i(2i)^2} = f.$$

Donc,

$$f = \frac{-i-1}{-4i} = \frac{1}{4} - \frac{i}{4}$$

De même,

$$h = \frac{3(-i)^3 + 2(-i) - 1}{-i(-2i)^2} = \overline{f} = \frac{1}{4} + \frac{i}{4}$$

$$\frac{3X^2+2X-1}{X^5+2X^3}+\frac{1}{X}-\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{4}\right)\frac{1}{(X-i)^2}-\left(\frac{1}{4}+\frac{i}{4}\right)\frac{1}{(X+i)^2}=\frac{g}{X-i}+\frac{h}{X+i}$$

$$\begin{aligned}\frac{g}{X-i}+\frac{h}{X+i}&=\frac{3X^3+2X-1+X^4+2X^2+1+X(X+i)^2\left(-\frac{1}{4}+\frac{i}{4}\right)-X(X-i)^2\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{4}\right)}{X^5+2X^3+X}\\&=\frac{12X^3+8X-4+4X^4+8X^2+4+X^3(-1+i)+(1-i)X-X^3(1+i)-2X^2(1-i)+X(1+i)}{4(X^5+2X^3+X)}\\&=\frac{4X^4+10X^3+8X^2+10X}{4\left(X^5+2X^3+X\right)}\\&=\frac{2X^3+5X^2+2X+5}{2(X^4+2X^2+1)}\\&=\frac{(X-i)(X+i)(2X+5)}{2(X-i)^2(X+i)^2}\\&=\frac{2X+5}{2(X-i)(X+i)}\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{cases}g=\dfrac{2i+5}{2\times 2i}=\dfrac{(2i+5)i}{-4}=\dfrac{2-5i}{4}\\[2ex] h=\dfrac{2(-i)+5}{2(-2i)}=\dfrac{2+5i}{4}\end{cases}$$

Preuve:
On suppose $\frac{P}{Q} \notin \mathbb{C}[X]$. On peut supposer Q unitaire.

EXISTENCE D'après le lemme 1, il existe $E \in \mathbb{C}[X]$, $G \in \mathbb{C}(X)$ tels que

$$\begin{cases} \frac{P}{Q} = E + G \\ \deg(G) < 0 \end{cases}$$

Soit $\frac{A}{B}$ la forme irréductible de G avec B unitaire ($A \wedge B = 1$ et $A \neq 0$).

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{A}{B}$$

donc

$$PB = EBQ + AQ \qquad (*)$$

donc

$$AQ = PB - EBQ$$

donc

$$A \mid B(P - EQ)$$

D'après le théorème de Gauss,

$$A \mid P - EQ$$

Soit $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$AR = P - EQ$$

D'où

$$\frac{AR}{Q} = \frac{P}{Q} - E = \frac{A}{B}$$

D'où

$$\frac{R}{Q} = \frac{1}{B}$$

donc $B \mid Q$.
De $(*)$, on a aussi

$$P \mid Q(EB + A)$$

Or, $P \wedge Q = 1$. Donc

$$P \mid EB + A$$

Soit $S \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$PS = EB + A$$

Donc

$$\frac{PS}{B} = E + \frac{A}{B} = \frac{P}{Q}$$

Donc
$$\frac{S}{B} = \frac{1}{Q}$$
et donc $Q \mid B$
Donc $Q = B$ (car ils sont unitaires).
Donc $G = \dfrac{A}{Q}$.
Or,
$$Q = \prod_{j=1}^{p} (X - z_j)^{\mu_j}$$
$$\forall j \neq k, (X - z_j)^{\mu_j} \wedge (X - z_k)^{\mu_k} = 1$$
D'après le lemme 2, il existe $(A_1, \dots, A_p) \in \mathbb{C}[X]^p$ tel que
$$\begin{cases} \dfrac{A}{Q} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{A_j}{(X - z_j)^{\mu_j}} \\ \forall j \in [\![1, p]\!], \deg(A_j) < \mu_j \end{cases}$$
Soit $j \in [\![1, p]\!]$. D'après le lemme 3,
$$\frac{A_j}{(X - z_j)^{\mu_j}} = \frac{a_{j,\mu_j}}{(X - z_j)^{\mu_j}} + \frac{A_{j,1}}{(X - z_j)^{\mu_j - 1}}$$
avec
$$\begin{cases} a_{j,\mu_j} \in \mathbb{C} \\ A_{j,1} \in \mathbb{C}_{\mu_j - 2}[X] \end{cases}$$
En itérant ce procédé, on trouve $(a_{j,\mu_j}, \dots, a_{j,1}) \in \mathbb{C}^{\mu_j}$ tel que
$$\frac{A_j}{(X - z_j)^{\mu_j}} = \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{j,k}}{(X - z_j)^k}$$
D'où
$$\frac{P}{Q} = E + \underbrace{\sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{j,k}}{(X - z_j)^k}}_{\deg(\quad) < 0}$$

<u>Unicité</u> Soit $E_1 \in \mathbb{C}[X]$ et $(b_{j,k})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ 1 \leqslant k \leqslant \mu_j}} \in \mathbb{C}^{\sum_{j=1}^{p} \mu_j}$ tels que
$$\frac{P}{Q} = E_1 + \underbrace{\sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{b_{j,k}}{(X - z_j)^k}}_{\deg(\quad) < 0}$$

D'après le lemme 1,

$$E = E_1 \text{ et } \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{j,k}}{(X-z_j)^k} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{b_{j,k}}{(X-z_j)^k}$$

$\forall j \in [\![1,p]\!]$,

$$\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{k=0}^{\mu_j} \frac{b_{j,k}}{(X-z_j)^k} = \frac{\sum_{k=1}^{\mu_j} b_{j,k}(X-z_j)^{\mu_j-k}}{(X-z_j)^{\mu_j}} \\ \| \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{j,k}}{(X-z_j)^k} = \frac{\sum_{k=1}^{\mu_j} a_{j,k}(X-z_j)^{\mu_j-k}}{(X-z_j)^{\mu_j}} \end{array}$$

Donc,

$$\sum_{k=1}^{\mu_j} a_{j,k}(X-z_j)^k = \sum_{k=1}^{\mu_j} b_{j,k}(X-z_j)^k$$

Comme $\left(X-z_j, (X-z_j)^2, \dots, (X-z_j)^{\mu_j}\right)$ est libre dans $\mathbb{C}[X]$,

$$\forall k \in [\![1,\mu_j]\!], b_{j,k} = a_{j,k}$$

□

Théorème (Théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$)**:** Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $P \wedge Q = 1$, Q unitaire, $Q \notin \{0,1\}$. On pose

$$Q = \prod_{i=1}^{p}(X-a_i)^{\mu_i} \prod_{k=1}^{q}(X^2+\alpha_k X+\beta_k)^{\nu_k}$$

avec

$$\begin{cases} p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, \\ (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_q) \in \mathbb{R}^{2q} \\ (\mu_1, \dots, \mu_p, \nu_1, \dots, \nu_p) \in \mathbb{N}^{p+q} \\ \forall j \in [\![1,q]\!], \alpha_k^2 - 4\beta_k < 0 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \exists!(E,&\gamma_{1,1}, \dots, \gamma_{1,\mu_1}, \gamma_{2,1}, \dots, \gamma_{2,\mu_2}, \dots, \gamma_{p,1}, \dots, \gamma_{p,\mu_p}, \\ &\delta_{1,1}, \dots, \delta_{1,\nu_1}, \delta_{2,1}, \dots, \delta_{2,\nu_2}, \dots, \delta_{q,1}, \dots, \delta_{q,\nu_q}, \\ &\varepsilon_{1,1}, \dots, \varepsilon_{1,\nu_1}, \varepsilon_{2,1}, \dots, \varepsilon_{2,\nu_2}, \dots, \varepsilon_{q,1}, \dots, \varepsilon_{q,\nu_q}) \\ &\in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}^{\mu_1+\dots+\mu_p} \times \mathbb{R}^{2(\nu_1+\dots+\nu_q)} \end{aligned}$$

$$\frac{P}{Q} = E + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{\gamma_{i,j}}{(X-a_i)^j} + \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=1}^{\nu_k} \frac{\delta_{k,j} X + \varepsilon_{k,j}}{(X^2 + \alpha_k X + \beta_k)^j}$$

$\square$

Définition: Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. Soient $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ tels que $\begin{cases} P \wedge Q = 1 \\ F = \dfrac{P}{Q} \end{cases}$.

Les racines de P sont appelées zéros de F
Les racines de Q sont appelées pôles de F

Proposition: Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ et $z \in \mathbb{C}$ un pôle simple de F. Le coefficiant devant $\dfrac{1}{X-z}$ dans la décomposition en éléments simples de F est $\dfrac{P(z)}{Q'(z)}$.

Preuve:
Soit $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ tels que

$$\begin{cases} F = \dfrac{P}{Q} \\ P \wedge Q = 1 \\ Q \text{ unitaire} \end{cases}$$

On pose

$$Q = (X - z) \prod_{i=1}^{q} (X - z_i)^{\mu_i}$$

où $z_1, \ldots, z_q$ sont les racines distinctes de z du polynôme Q. Donc,

$$\frac{P}{Q} = F = \frac{a}{X-z} + \sum_{i=1}^{q} \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{b_{i,k}}{(X-z_i)^k}$$

avec $a, (b_{i,k})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant q \\ 1 \leqslant k \leqslant \mu_i}}$ des nombres complexes.
On muliplie par $X - z$.

$$\frac{P}{\prod_{i=1}^{q} (X - z_i)^{\mu_i}} = a + (X - z) \sum_{i=1}^{q} \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{b_{i,k}}{(X - z_i)^k}$$

On remplace X par z.

$$\frac{P(z)}{\prod_{i=1}^{q}(z-z_i)^{\mu_i}} = a$$

Or,

$$Q = (X-z)\prod_{i=1}^{q}(X-z_i)^{\mu_i}$$

D'où

$$Q' = \prod_{i=1}^{q}(X-z_i)^{\mu_i} + (X-z)\left(\prod_{i=1}^{q}(X-z_i)^{\mu_i}\right)'$$

Don

$$Q'(z) = \prod_{i=1}^{q}(z-z_i)^{\mu_i}$$

Donc

$$a = \frac{P(z)}{Q'(z)}$$

□

Proposition: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $\deg(P) \geqslant 1$, $(z_1, \dots, z_p)$ les racines de P, $\mu_1, \dots, \mu_p$ leur multiplicité. Alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{X-z_i}$$

Preuve:
On pose

$$P = \alpha \prod_{i=1}^{p}(X-z_i)^{\mu_i}$$

Donc

$$P' = \alpha \sum_{i=1}^{p}\left(\prod_{j\neq i}(X-z_j)^{\mu_j}\right)\mu_i(X-z_i)^{\mu_i-1}$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{P'}{P} &= \frac{\alpha \sum_{i=1}^{p} \mu_i (X-z_i)^{\mu_i - 1} \prod_{j\neq i} (X-z_j)^{\mu_j}}{\alpha \prod_{i=1}^{p} (X-z_i)^{\mu_i}} \\ &= \sum_{i=1}^{p} \mu_i \frac{(X-z_i)^{\mu_i-1} \prod j \neq i)(X-z_j)^{\mu_j}}{\prod_{j=1}^{p}(X-z_j)^{\mu_j}} \\ &= \sum_{i=1}^{p} \mu_i \frac{1}{X-z_i}\end{aligned}$$

$\square$

Remarque:
Il existe un "truc" pour retenir cette formule :

$$\frac{P'}{P} = \underbrace{\ln(P)'}_{\text{n'existe pas !}} = \left(\ln\left(\alpha \prod_{i=1}^{p} (X-z_i)^{\mu_i}\right)\right)' = \left(\sum_{i=1}^{p} \mu_i \ln(X-z_i)\right)' = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \frac{1}{X-z_i}$$

Chapitre 21

Matrices et applications linéaires

21.1 Matrices d'un vecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Définition: Soit $x \in E$. On sait qu'il existe un unique n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

La matrice de x dans la base $\mathscr{B}$ est la colonne

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Remarque:
En général, si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont 2 bases différentes, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \neq \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$.

Exemple:
$E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ et

$$\mathscr{C} = \Bigg(\frac{X(X-1)(X-2)}{6}, -\frac{X(X-1)(X-3)}{2}, \frac{X(X-2)(X-3)}{2}, -\frac{(X-1)(X-2)(X-3)}{6} \Bigg)$$

$$P = X^2 - X + 1$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P = P(3)\frac{X(X-1)(X-2)}{6} + P(2)\frac{-X(X-1)(X-3)}{2} \\ + P(1)\frac{X(X-2)(X-3)}{2} + P(0)\frac{-(X-1)(X-2)(X-3)}{6} \end{aligned}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(P) = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

21.2 Matrice d'une famille de vecteurs

Soient E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.

Définition: La <u>matrice de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$</u> est la matrice M telle que, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, la j-ème colonne de M est $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_j)$.

Exemple:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition: Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E.

$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})\right)$$

Preuve:
Dans ce chapitre, on définit le rang d'une matrices comme le nombre maximale de colonnes linéairement idépendantes. $\square$

Corollaire: Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p) \in E^p$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$.

1. $\mathscr{F}$ est libre $\iff$ $\mathrm{rg}(M) = p$

2. $E = \mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \iff \mathrm{rg}(M) = n$
3. $\mathscr{F}$ base de $E \iff n = p = \mathrm{rg}(M) \iff M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
   Dans ce cas,
$$\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(\mathscr{B})$$

EXEMPLE:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M$$

On sait que $\mathscr{B}$ est une base donc $M \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$. Donc,

$$M^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{3}{2} & 3 & -\frac{11}{6} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{5}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Preuve: 1.

$$\begin{aligned} \mathscr{F} \text{ est libre} &\iff (u_1, \dots, u_p) \text{ base de } \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p) \\ &\iff \dim\big(\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)\big) = p \\ &\iff \mathrm{rg}\,\big((u_1, \dots, u_p)\big) = p \\ &\iff \mathrm{rg}(M) = p \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \mathscr{F} \text{ engendre } E &\iff E = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p) \\ &\iff \dim(E) = \dim\big(\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)\big) \\ &\iff n = \mathrm{rg}(M) \end{aligned}$$

3.

$$\mathscr{F} \text{ base de } E \iff \begin{cases} \mathrm{rg}(M) = p \\ \mathrm{rg}(M) = n \end{cases}$$

On suppose que $\mathscr{F}$ est une base de E.

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1,n} \\ m_{21} & \dots & m_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,n} \end{pmatrix}$$

Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$. Montrons que $AM = I_n$.
La première colonne de AM est

$$A \begin{pmatrix} m_{11} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix} = m_{11} \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + m_{21} \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix} + \dots + m_{n,1} \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Or, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(e_i)$.
Donc, la première colonne de AM est la colonne des coordonées du vecteur $m_{11}e_1 + m_{21}e_2 + \dots + m_{n,1}e_n$ dans la base $\mathscr{F}$.
Or,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix}$$

donc $u_1 = m_{11}e_1 + m_{21}e_2 + \dots + m_{n,1}e_n$.
Comme $u_1 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_n$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

La j-ème colonne de AM est

$$A \begin{pmatrix} m_{1,j} \\ \vdots \\ m_{n,j} \end{pmatrix} = m_{1,j} \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + m_{2,j} \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix} + \dots + m_{n,j} \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Or, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(e_i)$.
Donc, la j-ème colonne de AM est la colonne des coordonées du vecteur $m_{1,j}e_1 + m_{2,j}e_2 + \dots + m_{n,j}e_n$ dans la base $\mathscr{F}$.

Or,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} m_{1,j} \\ m_{2,j} \\ \vdots \\ m_{n,j} \end{pmatrix}$$

donc $u_j = m_{1,j}e_1 + m_{2,j}e_2 + \cdots + m_{n,j}e_n$.
Comme $u_j = 0 \cdot u_1 + \cdots + 1 \cdot u_j + \cdots + 0 \cdot u_n$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(u_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \leftarrow j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

En inversant les rôles de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{B}$, on prouve que $MA = I_n$.

On suppose maintenant que $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrons que $\mathscr{F}$ est une base de E. On pose

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

On sait que

$$M\,M^{-1} = I_n$$

Donc

$$\forall j \in [\![1, n]\!]\,, a_{1,j} \begin{pmatrix} m_{11} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix} + \cdots + a_{n,j} \begin{pmatrix} m_{1,n} \\ \vdots \\ m_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \leftarrow j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\forall j \in [\![1, n]\!]\,, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}u_i\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_j)$$

donc

$$\forall j \in [\![1, n]\!], e_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} u_i \in \text{Vect}(\mathscr{F})$$

Donc $\mathscr{F}$ engendre E.

$$\text{Card}(\mathscr{F}) = n = \dim(E)$$

donc $\mathscr{F}$ est une base de E.

□

21.3 Matrices d'une application linéaire

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de F.

Proposition

Définition: Soit $x \in E$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$. Soit $y \in F$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathscr{C}}(y)$. On pose $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{p,j} \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathscr{C}}\left(f(e_j)\right)$$

Alors

$$y = f(x) \iff Y = AX$$

On dit que A est la <u>matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$</u>. On la note $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.

Preuve:

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \qquad y = \sum_{i=1}^{p} y_i f_i$$

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff \sum_{i=1}^{p} y_i f_i = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) \\ &\iff \sum_{i=1}^{p} y_i f_i = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) \end{aligned}$$

Or,

$$\forall j \in [\![1, n]\!], f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} f_i$$

D'où,

$$\begin{aligned} y = f(x) \iff \sum_{i=1}^{p} y_i f_i &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} f_i \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right) f_i \\ \iff \forall i \in [\![1, p]\!], \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i = y_i \\ \iff AX = Y \end{aligned}$$

□

Exemple:
$E = \mathbb{R}^3$ et f la projection sur $R = \{(x, y, z) \mid x + y = 0\}$ parallèlement à $G = \text{Vect}\left((1, 1, 1)\right)$.

— $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base canonique.

$$\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$e_1 = (1, 0, 0) = \underbrace{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}_{\in F} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}_{\in G}$$

$$f(e_1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3$$

$$e_2 = (0, 1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$e_3 = (0, 0, 1) = (0, 0, 1) + (0, 0, 0)$$

Donc

$$\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

— $\mathscr{C} = (e_3, e_1 - e_2, e_1 + e_2 + e_3) = (u_1, u_2, u_3)$

$$\text{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

car

$$f(u_1) = u_1 f(u_2) = u_2 f(u_3) = 0$$

—
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

—
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f\big((x,y,z)\big)\right) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big((x,y,z)\big) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x-y}{2} \\ \frac{y-x}{2} \\ \frac{-x-y}{2} + z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc
$$f\big((x,y,z)\big) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}, z - \frac{x+y}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\left(f(x,y,z)\right) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big((x,y,z)\big) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-x-y}{2} + z \\ \frac{x-y}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc
$$f\big((x,y,z)\big) = \left(z - \frac{x+y}{2}\right) u_1 + \left(\frac{x-y}{2}\right) u_2$$

Exemple:
Soient $E = \mathbb{C}$, $\mathscr{B} = (1, i)$, $\theta \in \mathbb{R}$ et f la rotation de centre O et d'angle θ.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto e^{i\theta} z \end{aligned}$$

f est linéaire :

$$\begin{aligned}\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\forall(z,w)\in\mathbb{C}^2 f(\lambda z+\mu w)&=e^{i\theta}(\lambda z+\mu w)\\&=\lambda e^{i\theta}z+\mu e^{i\theta}w\\&=\lambda f(z)+\mu f(w)\end{aligned}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

car

$$\begin{cases}f(1)=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta\\ f(i)=ie^{i\theta}=-\sin\theta+i\cos\theta\end{cases}$$

$$z=x+iy \text{ avec } x,y\in\mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\cos\theta & -y\sin\theta\\ x\sin\theta & y\cos\theta\end{pmatrix}$$

Théorème: Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $\mathscr{C}=(f_1,\dots,f_p)$ une base de F.

$$\begin{aligned}\Phi:\mathscr{L}(E,F)&\longrightarrow\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})\\ f&\longmapsto\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\end{aligned}$$

Φ est un $\mathbb{K}$-isomorphisme linéaire.

Preuve: — Soient $(f,g)\in\mathscr{L}(E,F)^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$. On pose $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)=\Phi(f)=(a_{i,j})$ et $B=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)=\Phi(g)=(b_{i,j})$. On pose également $C=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda f+\mu g)=\Phi(\lambda f+\mu g)=(c_{i,j})$.

$$\begin{aligned}\forall j\in[\![1,n]\!],\begin{pmatrix}c_{1,j}\\ \vdots\\ c_{p,j}\end{pmatrix}&=\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\big((\lambda f+\mu g)(e_j)\big)\\&=\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\big(\lambda f(e_j)+\mu g(e_j)\big)\end{aligned}$$

Or,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\big(f(e_j)\big)=\begin{pmatrix}a_{1,j}\\ \vdots\\ a_{p,j}\end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\big(g(e_j)\big)=\begin{pmatrix}b_{1,j}\\ \vdots\\ b_{p,j}\end{pmatrix}$$

Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\left(\lambda f(e_j)+\mu g(e_j)\right)=\lambda\begin{pmatrix}a_{1,j}\\ \vdots\\ a_{p,j}\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}b_{1,j}\\ \vdots\\ b_{p,j}\end{pmatrix}$$

Donc $C=\lambda A+\mu B$ et donc Φ est linéaire.

— Soit $f\in\operatorname{Ker}\Phi$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)=\begin{pmatrix}0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

Donc

$$\forall j\in[\![1,n]\!]\,,f(e_j)=\sum_{i=1}^{p}0\cdot f_i=0_F$$

Soit $x\in E$. On pose $x=\sum_{j=1}^{n}x_je_j$.

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}x_jf(e_j)=0_F$$

Donc $f=0$. Donc Φ est injective.

Soit $A\in\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On pose $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.

On définit $F:E\to F$ de la façon suivante : pour tout $x\in E$, on décompose $x=\sum_{j=1}^{n}x_je_j$. On pose alors

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{j=1}^{n}x_j\sum_{i=1}^{p}a_{i,j}f_i\\ &=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_jf_i\end{aligned}$$

Montrons que $f\in\mathscr{L}(E,F)$ et $\Phi(f)=A$

— Soit $(x,y)\in E^2$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$. On pose

$$\begin{cases}x=\sum_{j=1}^{n}x_je_j & \text{avec } (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n\\ y=\sum_{j=1}^{n}y_je_j & \text{avec } (y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{K}^n\end{cases}$$

Donc

$$\alpha x + \beta y = \sum_{j=1}^{n} (\alpha x_j + \beta y_j)(e_j$$

D'où

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(\alpha x_j + \beta x_j) f_i \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j f_i + \beta \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} y_j f_i \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \end{aligned}$$

Soit $j \in [\![1, p]\!]$.

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} f_i$$

et

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\left(f(e_j)\right) = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{p,j} \end{pmatrix}$$

donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = A$$

□

Corollaire: Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, alors

$$\dim\left(\mathscr{L}(E, F)\right) = \dim(E) \times \dim(F)$$

□

Exemple (*Trouver tous les endomorphismes de* $\mathbb{R}^2$*)*:
Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (ax + cy, bx + dy) \end{aligned}$$

avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.
Une base de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ est (f_1, f_2, f_3, f_4) où

$$\begin{cases} f_1 : (x, y) \mapsto (x, 0) \\ f_2 : (x, y) \mapsto (0, x) \\ f_3 : (x, y) \mapsto (y, 0) \\ f_4 : (x, y) \mapsto (0, y) \end{cases}$$

Théorème: Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$, $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{C}$ une base de F et $\mathscr{D}$ une base de G. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$$

Preuve:
On pose

$$\begin{aligned} \mathscr{B} &= (e_1, \dots, e_n) \\ \mathscr{C} &= (f_1, \dots, f_p) \\ \mathscr{D} &= (g_1, \dots, g_q). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \\ B = (b_{k,i})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant q \\ 1 \leqslant i \leqslant p}} &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \\ C = (c_{k,j})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant q \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) \end{aligned}$$

Soit $j \in [\![1, n]\!]$. La j-ième colonne de C est

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{D}}\left(g \circ f(e_j)\right) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{D}}\left(g\big(f(e_j)\big)\right) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\big(f(e_j)\big) \\ &= BA_j \end{aligned}$$

où A_j est la j-ème colonne de A.
Or, la j-ème colonne de BA est aussi BA_j.
Donc, $C = BA$. □

21.4 Formules de changement de bases

Proposition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E et $x \in E$. Soit $P = P_{\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_2)$.
Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(x) = P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(x)$$

Preuve:

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1}(\mathrm{id}_E) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

si $\begin{cases} \mathscr{B}_1 = (e_1, \ldots, e_n) \\ \mathscr{B}_2 = (u_1, \ldots, u_n) \end{cases}$

$$\begin{aligned} P\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(x) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1}(\mathrm{id}_E) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(x) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}\big(\mathrm{id}_E(x)\big) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(x) \end{aligned}$$

$$E_{\mathscr{B}_2} \qquad \begin{matrix} x \\ X \end{matrix} \xrightarrow[P]{\mathrm{id}_E} \begin{matrix} \mathrm{id}_E(x) \\ PX \end{matrix} \qquad E_{\mathscr{B}_1}$$

□

Proposition: Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de E, et $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ deux bases de F et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Soient $\begin{cases} P = P_{\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_2) \\ Q = P_{\mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_1}(\mathscr{C}_2) \\ A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1}(f) \end{cases}$ Alors,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{C}_2}(f) = Q^{-1}AP$$

Preuve:
$f = \mathrm{id}_F \circ f \circ \mathrm{id}_E$ donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{C}_2} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_1,\mathscr{C}_2}(\mathrm{id}_F)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{C}_2}(\mathrm{id}_E)$$

□

EXEMPLE:
$E = \mathbb{R}^3$, $F = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0\big\}$, $G = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$ et f la projection sur F parallèlement à G.

Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base canonique de E et $\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3)$ avec $\begin{cases} u_1 = (0,0,1) \\ u_2 = (1,-1,0) \\ u_3 = (1,1,1) \end{cases}$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Proposition
Définition: Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})^2$.
On dit que A et B sont équivalentes si

$$\exists (P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}), B = Q^{-1}AP$$

Cette relation est une relation d'équivalence. □

Théorème: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ deux bases de E, $P = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)$.
Alors

$$B = P^{-1}AP.$$

□

Définition: Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. On dit que A et B sont semblables s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

L'ensemble $\left\{P^{-1}AP \mid P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\right\}$ est la classe de similitude de A.

Exemple:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \\ u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \text{ et } X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n + u_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= AX_n \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$$

On aimerait trouver D diagonale et $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & (z_2, z_1 + z_2) \end{array}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A$ où $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ est la base canonique de $\mathbb{C}^2$.

On cherche $\mathscr{C} = (u_1, u_2)$ une base de $\mathbb{C}^2$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = D$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$.

<u>Analyse</u> On suppose que $\mathscr{C}$ existe. Dans ce cas,

$$\begin{cases} f(u_1) = \lambda_1 u_1, \\ f(u_2) = \lambda_2 u_2, \\ (\lambda_1, \lambda_2) \text{ libre.} \end{cases}$$

Soit $u = (x, y) \in \mathbb{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} f(u) = \lambda u &\iff \begin{cases} y = \lambda x \\ x + y = \lambda y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \lambda x \\ x + \lambda x - \lambda^2 x = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = \lambda x \\ x(1 + \lambda - \lambda^2) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} A + \lambda - \lambda^2 = 0 \\ y = \lambda x \end{cases} \\ &\iff u = (0,0) \text{ ou } \begin{cases} \lambda = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} x \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \lambda = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ y = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} x \end{cases} \end{aligned}$$

<u>Synthèse</u> On pose $\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \\ u_1 = (1, \varphi) \end{cases}$ et $\begin{cases} \lambda_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} = -\dfrac{1}{\varphi} \\ u_2 = \left(1, -\dfrac{1}{\varphi}\right) \end{cases}$.

Ainsi, $\begin{cases} f(u_1) = \lambda_1 u1 \\ f(u_2) = \lambda_2 u_2. \end{cases}$
u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre donc une base.

On pose $\mathscr{C} = (u_1, u_2)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\varphi} \end{pmatrix} = D$.

$$\begin{tikzcd} E_{\mathscr{B}_1} \arrow[r, "f", "A"'] & F_{\mathscr{C}_1} \arrow[d, "\mathrm{id}_F"', "Q^{-1}"] \\ E_{\mathscr{B}_2} \arrow[u, "\mathrm{id}_E", "P"'] \arrow[r, "f", "A'"'] & F_{\mathscr{C}_2} \end{tikzcd}$$

$$A = PDP^{-1}$$

et

$$\begin{cases} P^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}) = P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}} \\ P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}) = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} \end{cases}$$

On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & -\dfrac{1}{\varphi} \end{pmatrix}$ donc

$$P^{-1} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\varphi} & -1 \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\varphi} & 1 \\ \varphi & -1 \end{pmatrix}$$

Donc $A = PDP^{-1}$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \underset{\begin{pmatrix} * & u_n \\ * & * \end{pmatrix}}{\underset{\parallel}{A^n}} = PD^nP^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varphi & -\dfrac{1}{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & \left(-\dfrac{1}{\varphi}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\varphi} & 1 \\ \varphi & -1 \end{pmatrix}$$

Exemple:

$$y'' + \omega^2 y = 0 \qquad \omega \in \mathbb{R}_*^+$$

$$\forall t, Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\forall t, Y'(t) &= \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y'(t) \\ -\omega^2 y(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \\
&= AY(t)
\end{aligned}$$

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (a,b) & \longmapsto & (b, -\omega^2 a) \end{array}$.
$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ où $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ base canonique de $\mathbb{C}^2$. On cherche $\mathscr{C} = (u_1, u_2)$ une base de $\mathbb{C}^2$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = D$.

<u>Analyse</u> Si $\mathscr{C}$ existe,

$$\begin{cases} f(u_1) = \lambda_1 u_1 \\ f(u_2) = \lambda_2 u_2 \end{cases}$$

Soit $u = (a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $\lambda \in C$.

$$\begin{aligned}
f(u) = \lambda u &\iff \begin{cases} b = \lambda a \\ -\omega^2 a = \lambda b \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} b = \lambda a \\ -\omega^2 a = \lambda^2 a \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda^2 = -\omega^2 \\ b = \lambda a \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^2_{\mathscr{B}} \arrow[r, "f", "A"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}"', "P^{-1}"] & \mathbb{C}^2_{\mathscr{B}} \\
\mathbb{C}^2_{\mathscr{C}} \arrow[r, "f", "D"'] & \mathbb{C}^2_{\mathscr{C}} \arrow[u, "\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}", "P"']
\end{tikzcd}$$

<u>Synthèse</u> On pose $\begin{cases} \lambda_1 = i\omega \\ u_1 = (1, i\omega) \end{cases}$ et $\begin{cases} \lambda_2 = -i\omega \\ u_2 = (1, -i\omega) \end{cases}$. (u_1, u_2) est bien une base de $\mathbb{C}^2$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix} = D$

$$AP = PD \iff P^{-1}A = DP^{-1}$$

On a

$$P = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix}$$

On pose

$$\forall t, X(t) = P^{-1} \times Y(t)$$

Donc

$$\begin{aligned} \forall t, X'(t) = P^{-1}Y'(t) &= P^{-1}AY(t) \\ &= DP^{-1}Y(t) \\ &= DX(t) \end{aligned}$$

On pose

$$\forall t, X(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X'(t) = DX(t) &\iff \begin{cases} a'(t) = i\omega a(t) \\ b'(t) = -i\omega b(t) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a(t) = \lambda e^{i\omega t} \\ b(t) = \mu e^{-i\omega t} \end{cases} \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall t, Y(t) &= P \times X(t) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda e^{i\omega t} \\ \mu e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda e^{i\omega t} + \mu e^{-i\omega t} \\ * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall t, y(t) = \lambda e^{i\omega t} + \mu e^{-i\omega t}$$

Définition: Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
La trace de A est

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Proposition:
1. $\mathrm{tr} \in \mathscr{L}\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\big) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^*$
2. $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

Preuve: 1. Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. On pose $A = (a_{i,j})$

et $B = (b_{i,j})$.

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\alpha A + \beta B) &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha a_{i,i} \beta b_{i,i}) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \beta \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} \\ &= \alpha \operatorname{tr}(A) + \beta \operatorname{tr}(B)\end{aligned}$$

2. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. On pose $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$, $AB = (c_{i,j})$ et $BA = (d_{i,j})$.

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{j,i} a_{i,j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} d_{j,j} \\ &= \operatorname{tr}(BA)\end{aligned}$$

□

Proposition: Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$.

$$A \text{ et } B \text{ semblables } \implies \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$$

Preuve:
On suppose A et B semblables. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$. Donc

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\left(P^{-1}(BP)\right) = \operatorname{tr}\left((BP)P^{-1}\right) = \operatorname{tr}(B)$$

□

Remarque (⚠ Attention):
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\operatorname{tr}(A) = 2 = \operatorname{tr}(B)$

Or, A et B ne sont pas semblables, sinon

$$A = P^{-1}BP \text{ avec } P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}) \qquad = P^{-1}I_2P$$
$$= P^{-1}P$$
$$= I_2 \neq A$$

Définition

Corollaire: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base de E. $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. La <u>trace</u> de f est $\mathrm{tr}(A)$.
Ce nombre ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie. On note ce nombre $\mathrm{tr}(f)$. □

Proposition: Soit p un projecteur de E de dimension finie. Alors

$$\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$$

Preuve:
On sait que
$$E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$$
Soit $\mathscr{B}_1 = (e_1, \ldots, e_k)$ une base $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathscr{B}_2 = (e_{k+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\mathrm{Im}(p)$.
On pose $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$. $\mathscr{B}$ est une base de E et

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$$

$$\mathrm{tr}(p) = \mathrm{tr}(A) = n - k = \#\mathscr{B}_2 = \dim(\mathrm{Im}\, p) = \mathrm{rg}(p)$$

□

EXEMPLE:
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$
$G = \mathrm{Vect}\big((1, 1, 1)\big)$
f la projection sur F parallèlement à G.
$\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = A$$
$$\mathrm{tr}(A) = 2 = \dim(F)$$

21.5 Conséquences

Proposition: La multiplication matricielle est associative.

Preuve:

$$\begin{cases} A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ C \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K}) \end{cases}$$

Soient $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, $g \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^q, \mathbb{K}^p)$ et $h \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^r, \mathbb{K}^q)$ telles que

$$\begin{cases} A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \\ B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{B}}(g) \\ C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{D},\mathscr{E}}(h) \end{cases}$$

où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^p$, $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{D}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^r$, $\mathscr{E}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^q$.

$$\begin{aligned} A(BC) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{D}\mathscr{C}}\big(f \circ (g \circ h)\big) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{D},\mathscr{C}}\big((f \circ g) \circ h\big) \\ &= (AB)C \end{aligned}$$

□

Proposition: Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. On suppose que $AB = I_n$. Alors $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2$ et $A^{-1} = B$.

Preuve:
Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A$, $g \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = B$.

$$\begin{aligned} AB = I_n \text{ donc } & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) \qquad \text{donc } f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} \\ \text{donc } & f \circ g \text{ est injective} \\ \text{donc } & g \text{ est injective} \\ \text{donc } & g \text{ est un isomorphisme} \end{aligned}$$

Or, $f \circ g = \mathrm{id}$ donc $f = f \circ g \circ g^{-1} = g^{-1}$

$$\begin{aligned} BA &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g \circ f) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g \circ g^{-1}) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) \\ &= I_n \end{aligned}$$

Donc $A = B^{-1}$. □

Remarque:
Au passage, on a montré que

$$f \in \mathrm{GL}(E) \iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

et, dans ce cas,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)^{-1}$$

Proposition: Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
Le nombre maximal de lignes linéairement indépendantes de A est égal au rang de A.

Preuve:
On appelle rang par lignes le nombre exact de lignes linéairement indépendantes.
Ce rang par ligne est invariant quand on effectue une opération élémentaire sur les lignes.
En appliquant la méthode du pivot de Gauss, on obtient une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & * & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \boxed{1} & * & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

qui a le même rang par lignes que A.
On obsèrve que ce rang r est égal au nombre de pivots.
Soit S le système homogène

$$AX = 0$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. D'après l'algorithme du pivot, la résolution de ce système fournit r inconnues principales et $n-r$ paramètres.
Sans perte de généralité, on peut supposer que $x_1, \dots, x_{n-r}$ sont les paramètres et $x_{n-r+1}, \dots, x_n$ les inconnues principales.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_p)$ la base

canonique de $\mathbb{K}^p$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ telle que

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f).$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$.

$$\begin{aligned} AX = 0 &\iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(0) \\ &\iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\big(f(x)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(0) \\ &\iff f(x) = 0 \\ &\iff x \in \operatorname{Ker} f \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble E des solutions de (S) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel isomorphe à $\operatorname{Ker}(f)$.
De plus,

$$\begin{aligned} g : E &\longrightarrow \mathbb{K}^{n-r} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\longmapsto (x_1, \dots, x_{n-r}) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Donc, $\dim(\operatorname{Ker} f) = \dim(E) = n - r$.
D'après le théorème du rang,

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{K}^n) - \dim(\operatorname{Ker} f) = n - (n-r) = r.$$

□

Définition: Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
La <u>transposée</u> de A, notée ${}^tA = (b_{j,i})_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ 1\leqslant i\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est définie par

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \forall j \in [\![1,n]\!], b_{j,i} = a_{i,j}.$$

Les lignes de ${}^tA$ sont les colonnes de A. Les colonnes de ${}^tA$ sont les lignes de A.

Exemple:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ donc ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Corollaire:
$$\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$$

□

Proposition: $\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array}$ est la symétrie par rapport à $S_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $A_n(\mathbb{K})$ où

$$S_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = A\} = \begin{pmatrix} & & (u) \\ & \ddots & \\ (u) & & \end{pmatrix}$$

et

$$A_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = -A\} = \begin{pmatrix} 0 & & (u) \\ & \ddots & \\ (-u) & & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

Preuve:
Soient $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.

$$\begin{aligned} {}^t(\alpha A + \beta B) &= (\alpha a_{j,i} + \beta b_{j,i})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \alpha(a_{j,i}) + \beta(b_{j,i}) \\ &= \alpha {}^tA + \beta {}^tB \end{aligned}$$

Clairement,

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), {}^t\left({}^tA\right) = A$$

donc $f : A \mapsto {}^tA$ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})})$.
Or,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}) &= \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid f(A) - A = 0\} \\ &= \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = A\} \\ &= S_n(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}) &= \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid f(A) + A = 0\} \\ &= \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = A\} \\ &= A_n(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

□

Proposition: Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

$$^t(AB) = {}^tB^tA$$

Preuve:
On pose

$$\begin{cases} A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}, \\ B = (b_{j,k})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ 1 \leqslant k \leqslant q}}, \\ {}^tB^tA = (c_{k,i})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant q \\ 1 \leqslant i \leqslant n}}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![1, q]\!], \forall i \in [\![1, n]\!], c_{k,i} &= \sum_{j=1}^{p} ({}^tB)_{k,j} ({}^tA)_{j,i} \\ &= \sum_{j=1}^{p} b_{j,k} a_{i,j} \\ &= \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k} \\ &= (AB)_{i,k} \\ &= \left({}^t(AB)_{k,i}\right) \end{aligned}$$

Donc, $^t(AB) = {}^tB^tA$. □

Corollaire: Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $^tA \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et

$$\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$$

Preuve:
On suppose $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
$AA^{-1} = I_n$ donc $^t(AA^{-1}) = {}^tI_n$
donc $^t(A^{-1})^tA = I_n$
donc

$$^tA \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$$

□

21.6 Matrices par blocs

EXEMPLE:
Soit p un projecteur de E :

$$E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$$

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ une base de E avec $\begin{cases} \operatorname{Im}(p) = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_k) \\ \operatorname{Ker}(p) = \operatorname{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n) \end{cases}$

Alors,

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

De même, si $\mathscr{s}$ est une symétrie de E,

$$E = \operatorname{Ker}(\mathscr{s} - \operatorname{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(\mathscr{s} + \operatorname{id}_E).$$

Soit $\mathscr{C} = (e'_1, \dots, e'_\ell, e'_{\ell+1}, \dots, e'_n)$ avec $\begin{cases} \operatorname{Vect}(e'_1, \dots, e'_\ell) = \operatorname{Ker}(\mathscr{s} - \operatorname{id}_E), \\ \operatorname{Vect}(e'_{\ell+1}, \dots, e'_n) = \operatorname{Ker}(\mathscr{s} + \operatorname{id}_E). \end{cases}$

Alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{s}) = \left(\begin{array}{c|c} I_\ell & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-\ell} \end{array}\right)$$

Proposition: Soient F et G supplémentaires dans E :

$$E = F \oplus G.$$

Soit $f \in \mathscr{L}(F)$ et $g \in \mathscr{L}(G)$. Alors

$$\exists! h \in \mathscr{L}(E) h_{|F} = f,\ h_{|G} = g \text{ et } h = f \circ p + g \circ q$$

où $\begin{cases} p \text{ est la projection sur } F \text{ parallèlement à } G \\ q \text{ est la projection sur } G \text{ parallèlement à } F \end{cases}$.

On a aussi $q = \operatorname{id}_E - p$.

Preuve: <u>ANALYSE</u> Soit $h \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\begin{cases} h_{|F} = f \\ h_{|G} = g \end{cases}$.

Soit $x \in E$. Alors

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in F} + \underbrace{q(x)}_{\in G}$$

Donc,

$$\begin{aligned} h(x) &= h\big(p(x)\big) + h\big(q(x)\big) \\ &= f\big(p(x)\big) + g\big(q(x)\big) \\ &= (f \circ p + g \circ q)(x) \end{aligned}$$

Si h existe, alors

$$h = f \circ p + g \circ q$$

<u>Synthèse</u> On pose $h = f \circ p + g \circ q$.
p, q, f et g sont linéaires donc h aussi.
Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} h(x) &= f\big(p(x)\big) + g\big(q(x)\big) \\ &= f(x) + g(0_E) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

donc $h_{|F} = f$ et de même $h_{|G} = g$.

□

Proposition: On reprend les notations et hypothèses précédentes. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F, et $(f_1, \dots, f_q)$ une base de G. Alors, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$ est une base de E et

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(h) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

où $\begin{cases} A = \mathrm{Mat}_{(e_1, \dots e_p)}(f) \\ B = \mathrm{Mat}_{(f_1, \dots, f_q)}(g) \end{cases}$ □

Proposition: Soient $(A, A') \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $(B, B') \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})^2$.

1. $$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AA' & 0 \\ \hline 0 & BB' \end{array}\right)$$

2. $$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \in \mathrm{GL}_{n+p}(\mathbb{K}) \iff \begin{cases} A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ B \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \end{cases}$$

   et dans ce cas,

   $$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & B^{-1} \end{array}\right)$$

3.
$$\operatorname{tr}\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$$

Preuve: 1. Soit $\left\{ f \in \mathscr{L}(F) \text{ tel que } \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A, f' \in \mathscr{L}(F) \text{ tel que } \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f') = A', g \in \mathscr{L}(G) \text{ tel qu} \right.$

où $\begin{cases} F \oplus G = \mathbb{K}^{n+p}, \\ \dim(F) = n, \dim(G) = p, \\ \mathscr{B} \text{ base de } F, \\ \mathscr{C} \text{ base de } G. \end{cases}$ Soit $\begin{cases} h \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^{n+p}) \text{ tel que } \begin{cases} h_{|F} = f \\ h_{|G} = g \end{cases} \\ h' \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^{n+p}) \text{ tel que } \begin{cases} h'_{|F} = f' \\ h'_{|G} = g' \end{cases} \end{cases}$

Soit $\mathscr{D} = \mathscr{B} \cup \mathscr{C}$ une base de $\mathbb{K}^{n+p}$.
$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array}\right) &= \operatorname{Mat}_{\mathscr{D}}(h)\operatorname{Mat}_{\mathscr{D}}(h') \\ &= \operatorname{Mat}_{\mathscr{D}}(h \circ h') \end{aligned}$$

Or, $(h \circ h')_{|F} = f \circ f'$ et $(h \circ h')_{|G} = g \circ g'$.
Donc,
$$\begin{aligned} \operatorname{Mat}_{\mathscr{D}}(h \circ h') &= \left(\begin{array}{c|c} \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ f') & 0 \\ \hline 0 & \operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(g \circ g') \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} AA' & 0 \\ \hline 0 & BB' \end{array}\right). \end{aligned}$$

□

Proposition: Soient $A, A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), B, B' \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), C, C' \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $D, D' \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.
$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AA' + BC' & AB' + BD' \\ \hline CA' + DC' & CB' + DD' \end{array}\right)$$
Cette formule se généralise à un nombre quelconque de blocs :
$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,n} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2,n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{p,1} & A_{p,2} & \cdots & A_{p,n} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c|c|c} A'_{11} & A'_{12} & \cdots & A'_{1,n} \\ \hline A'_{21} & A'_{22} & \cdots & A'_{2,n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A'_{p,1} & A'_{p,2} & \cdots & A'_{p,n} \end{array}\right)$$
Cette matrice se calcyle comme on s'y attend si les dimensions des blocs autorisent les produits.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^2_{\mathscr{B}} \arrow[r, "f", "A"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}"', "P"] & \mathbb{C}^2_{\mathscr{B}} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2}"', "P"] \\
\mathbb{C}^2_{\mathscr{C}} \arrow[r, "f", "D"'] \arrow[ur, dashed] & \mathbb{C}^2_{\mathscr{C}}
\end{tikzcd}$$

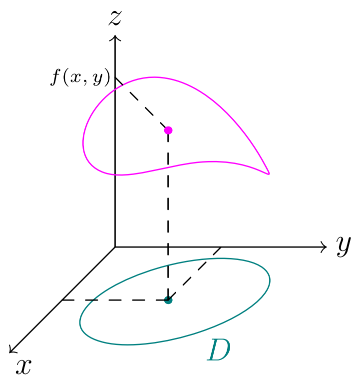
Chapitre 22

Fonctions de deux variables

22.1 Quelques généralités

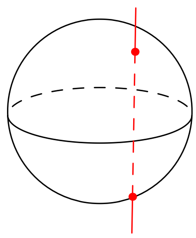
On s'interesse dans ce chapitre à des fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Par exemple,

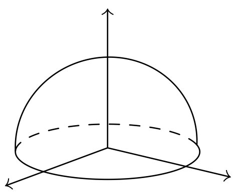
$$f : (x, y) \mapsto 5xy + \sqrt{x^2 + y^2}$$



Une sphère n'est pas la surface représentative d'une fonction. Mais, une demi-sphère oui :

$$f : (x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$





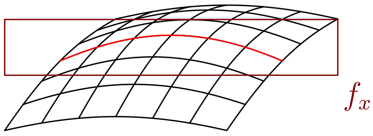
La surface de la demisphère est

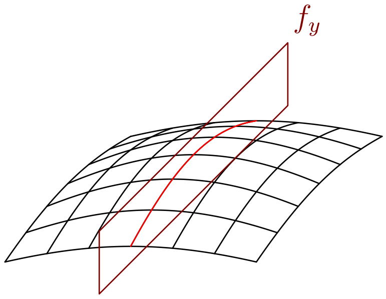
$$S = \big\{ \big(x, y, f(x, y)\big) \mid (x, y) \in D_O(1) \big\}.$$

où $D_O(1)$ est le disque unitaire à l'origine.

<u>Point de vue naïf</u>

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. On fixe y et on étudie $f_y : x \mapsto f(x, y)$. Ou, on fixe x et on étudie $f_x : y \mapsto f(x, y)$.





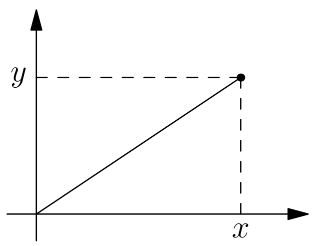
<u>LE BON POINT DE VUE</u>

On reprend les notions d'une fonction d'une seule variable (limite, continuité, développement limité, ...) que l'on adapte aux fonctions à deux variables.

22.2 Topologie de $\mathbb{R}^2$

Définition: La <u>norme (euclidienne)</u> de $\mathbb{R}^2$ est l'application définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Proposition: La norme euclidienne vérifie :

1. (séparation)

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \|(x, y)\| = 0 \iff x = y = 0,$$

2. (homogénéité positive)

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \|\lambda (x, y)\| = |\lambda| \, \|(x, y)\|$$

3. (inégalité triangulaire)

$$\forall (x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^2, \|(x, y) + (a, b)\| \leqslant \|(x, y)\| + \|(a, b)\|.$$

Preuve:
Déjà vue en replaçant (x, y) par $x + iy \in \mathbb{C}$ et $\|(x, y)\|$ par |x+iy| $\square$

Définition: Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+$.
La <u>boule ouverte</u> (ou <u>disque ouvert</u>) de centre (a, b) et de rayon r est

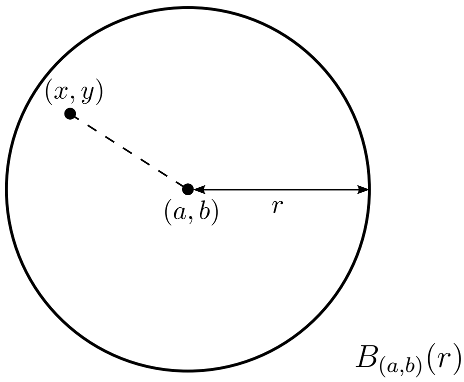
$$B_{(a,b)}(r) = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (a, b)\| < r\big\}.$$

La <u>boule fermée</u> (ou <u>disque fermé</u>) de centre (a, b) et de rayon r est

$$\overline{B_{(a,b)}}(r) = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (a, b)\| \leqslant r\big\}.$$

La <u>sphère</u> (ou <u>boule</u>) de centre (a, b) et de rayon r est

$$S_{(a,b)}(r) = \partial\overline{B_{(a,b)}}(r) = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (a, b)\| = r\big\}.$$

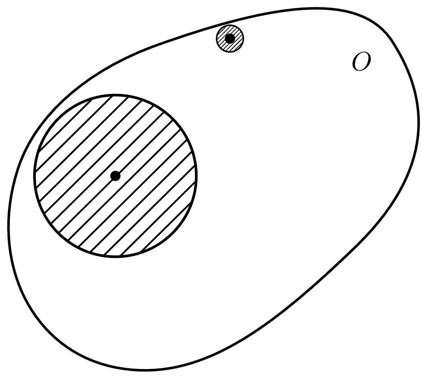


Remarque:
On parle de boule en dimension quelconque.

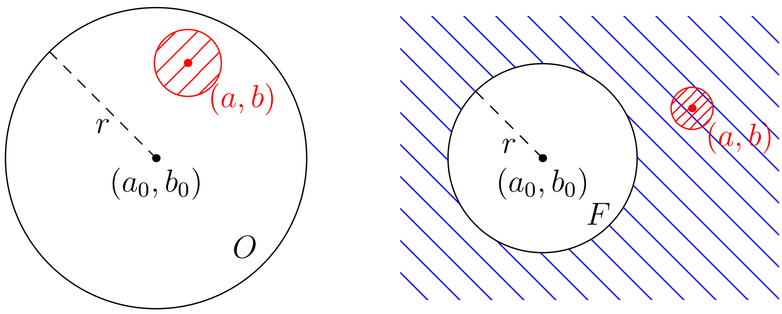
Définition: Une <u>partie ouverte</u> O de $\mathbb{R}^2$ (ou <u>un ouvert</u>) si

$$\forall (x, y) \in O, \exists r > 0, B_{(a,b)}(r) \subset O.$$

Une partie F est <u>fermée</u> su $\mathbb{R}^2 \setminus F$ est ouverte.



Proposition: Une boule ouverte est ouverte. Une boule fermée est fermée.



Preuve:
$\varnothing$ est un ouvert.
Soit B la boule ouverte de centre $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$.
On pose $\rho = \dfrac{1}{2}\big(r - \|(a, b) - (a_0, b_0)\|\big)$. Montrons que

$$B_{(a,b)}(\rho) \subset B_{(a,b)}(r).$$

Soit $(x, y) \in B_{(a,b)}(\rho)$.

$$\begin{aligned}
\|(x, y) - (a_0, b_0)\| &= \|(x, y) - (a, b) + (a, b) - (a_0, b_0)\| \\
&\leqslant \|(x, y) - (a, b)\| + \|(a, b) - (a_0, b_0)\| \\
&< \rho + \|(a, b) - (a_0, b_0)\| = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}\|(a, b) - (a_0, b_0)\| \\
&< r
\end{aligned}$$

Soit F la boule fermée de centre (a_0, b_0) et de rayon $r \geqslant 0$.
Soit $(a, b) \notin F$. On pose

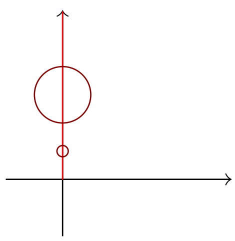
$$\rho = \frac{1}{2}\big(\|(a,b) - (a_0, b_0)\| - r\big) > 0.$$

Montrons que $B_{(a,b)}(\rho) \subset \mathbb{R}^2 \setminus F$.
Soit $(x, y) \in B_{(a,b)}(\rho)$.

$$\begin{aligned}
\|(x,y) - (a_0,b_0)\| &= \|(x,y) - (a,b) + (a,b) - (a_0,b_0)\| \\
&\geqslant \Big| \underbrace{\|(x,y) - (a,b)\|}_{\leqslant \rho} - \underbrace{\|(a,b) - (a_0,b_0)\|}_{> r} \Big| \\
&\geqslant \|(a,b) - (a_0,b_0)\| - \|(x,y) - (a,b)\| \\
&> \|(a,b) - (a_0,b_0)\| - \rho \\
&> \frac{1}{2}\|(a,b) - (a_0,b_0)\| + \frac{1}{2} r \\
&> r
\end{aligned}$$

donc $(x, y) \notin F$. □

EXEMPLE:
1. $\varnothing$ est ouvert.
   $\mathbb{R}^2$ est ouvert.
2. $\varnothing$ est fermé.
   $\mathbb{R}^2$ est fermé.
3. $\{(x, 0) \mid x > 0\}$ n'est ni ouverte ni fermé.



Définition: Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $V \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$.
On dit que V est un voisinage de (a, b) s'il existe $r > 0$ tel que

$$B_{(a,b)}(r) \subset V.$$

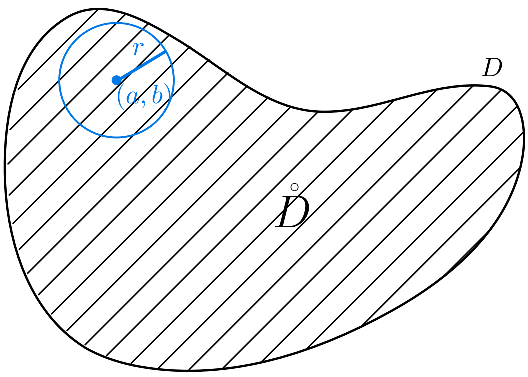
Proposition: Un ouvert non vide est un voisinage en chacun de ces points. □

Définition: Soit $D \subset \mathbb{R}^2$. Un point intérieur de D est un couple $(a, b) \in D$ tel que

$$\exists r > 0, B_{(a,b)}(r) \subset D.$$

en d'autres termes, si D est un voisinage de (a, b).
On note $\mathring{D}$ l'ensemble des points interieurs à D. C'est l'intérieur de D.

Proposition: $\mathring{D}$ est le plus grand ouvert O de $\mathbb{R}^2$ tel que $O \subset D$.



Preuve:
Soit $(a, b) \in \mathring{D}$.
Par définition, il existe $r > 0$ tel que

$$B_{(a,b)}(r) \subset D.$$

Montrons que $B_{(a,b)}(r) \subset \mathring{D}$.
Soit $(x, y) \in B_{(a,b)}(r)$. Comme $B_{(a,b)}(r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, il existe $\rho > 0$ tel que

$$B_{(x,y)}(\rho) \subset B_{(a,b)}(r)$$

donc $(x, y) \in \mathring{D}$.
Donc $\mathring{D}$ est ouvert, $\mathring{D} \subset D$.
Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que $O \subset D$. Montrons que $O \subset \mathring{D}$.
Soit $(x, y) \in O$. Soit $r > 0$ tel que

$$B_{(x,y)}(r) \subset O \subset D$$

donc $(x, y) \in \mathring{D}$. $\square$

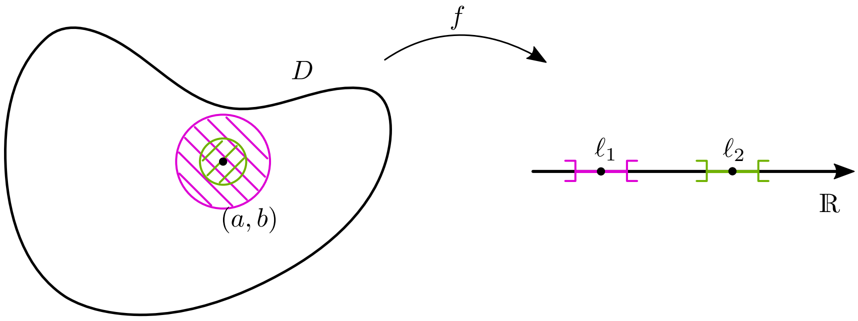
Définition: Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathring{D}$.
On dit que <u>$f(x,y)$ tend vers ℓ quand (x,y) tend vers (a,b)</u> ou que ℓ est <u>une limite</u> de f en (a,b) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall (x,y) \in D, \|(x,y) - (a,b)\| < r \implies |f(x,y) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

en d'autres termes si

$$\forall V \in \mathscr{V}_\ell, \exists W \in \mathscr{V}_{(a,b)}, \forall (x,y) \in W \cap D, f(x,y) \in V.$$

Proposition (unicité de la limite)**:** Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathring{D}$, $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ telles que ℓ_1 et ℓ_2 sont des limites de f en (a,b).
Alors $\ell_1 = \ell_2$.



Preuve:
On suppose $\ell_1 < \ell_2$. On pose $\varepsilon = \dfrac{\ell_2 - \ell_1}{2} > 0$.
Soit $r_1 > 0$ tel que

$$f\big(B_{(a,b)}(r_1)\big) \subset]\ell_1 - \varepsilon, \ell_1 + \varepsilon[.$$

Soit $r_2 > 0$ tel que

$$f\big(B_{(a,b)}(r_2)\big) \subset]\ell_2 - \varepsilon, \ell_2 + \varepsilon[.$$

On pose $r = \min(r_1, r_2)$ donc

$$B_{(a,b)}(r_1) \cap B_{(a,b)}(r_2) = B_{(a,b)}(r) \neq \varnothing.$$

Soit $(x,y) \in B_{(a,b)}(r)$. Alors,

$$f(x,y) \in]\ell_1 - \varepsilon, \ell_1 + \varepsilon[\cap]\ell_2 - \varepsilon, \ell_2 + \varepsilon[= \varnothing.$$

$\lightning$ □

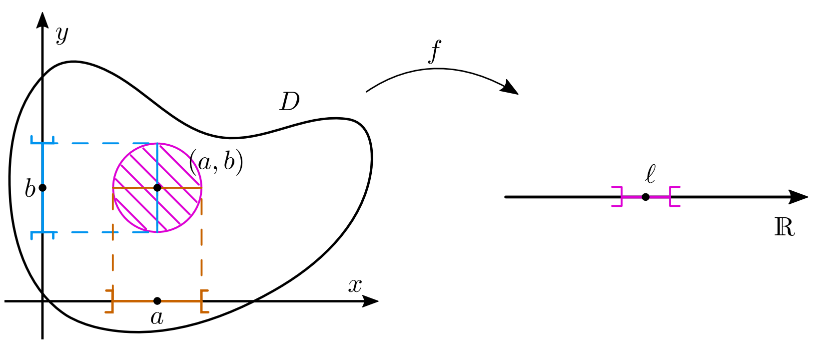
Définition: Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathring{D}$.
On dit que f est <u>continue</u> en (a,b) si

$$f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} f(a,b).$$

Proposition: <u>Si</u> $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} \ell$

<u>alors</u> $\begin{cases} f(x,b) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \\ f(a,y) \xrightarrow[y\to b]{} \ell. \end{cases}$

Preuve:



□

<u>Contre-exemple</u> : exercice 3.

Exemple: 1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$ limite en $(0,0)$?

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $r = \varepsilon$.

$$\forall (x,y) \in B_{(0,0)}(r), |f(x,y)| = |x| \leqslant \|(x,y)\| < r = \varepsilon$$

Donc $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} 0$.

2. limite $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^3 \end{array}$ en $(0,0)$?

   Soit $\varepsilon > 0$. On pose $r = \sqrt[3]{r} > 0$.

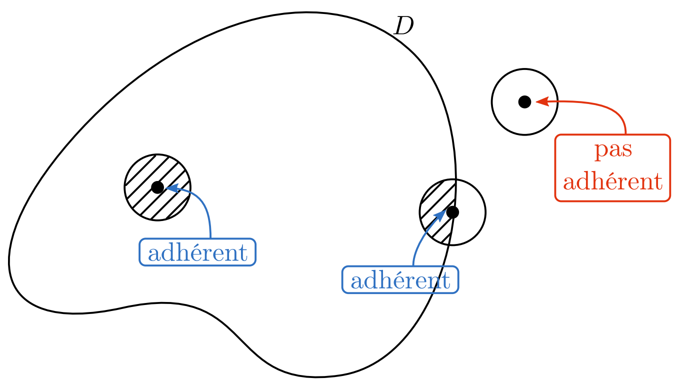
   $$\forall (x,y) \in B_{(0,0)}(r), |f(x,y)| = \left|x^3\right| \leqslant \|(x,y)\|^3 < r^3 = \varepsilon.$$

3. limite de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^3y^2 \end{array}$ en $(0,0)$?

   Soit $\varepsilon > 0$. On pose $r = \sqrt[5]{\varepsilon} > 0$.

   $$\forall (x,y) \in B_{(0,0)}(r), |f(x,y)| = \left|x^3y^2\right| \leqslant \|(x,y)\|^3\|(x,y)\|^2 < r^5 = \varepsilon.$$

Définition: Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.



On dit que (x,y) est adhérent à D si

$$\forall r > 0, B_{(x,y)}(r) \cap D \neq \varnothing.$$

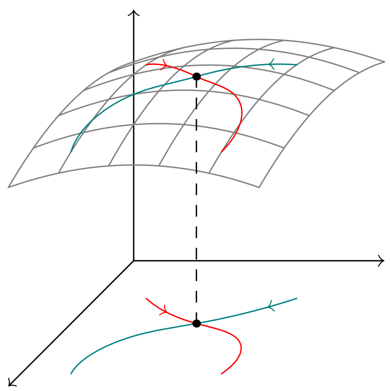
L'ensemble des points adhérents à D est noté $\overline{D}$. On dit que $\overline{D}$ est l'adhérence de D.

Définition: Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(a,b) \in \overline{D}$, $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers ℓ quand (x,y) tend vers (a,b) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall (x,y) \in B_{(a,b)}(r) \cap D, |f(x,y) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

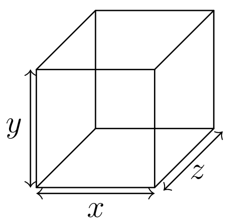
Proposition:

1. Dans ce contexte, il y a unicité de la limite
2. La limite d'une somme, d'un produit, d'un quotien, d'une composée se comporte comme dans le cas d'une seule variable.
3. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ continue. Soient $g : I \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ continues telles que
$$\forall t \in I, \big(g(t), h(t)\big) \in D.$$
Alors
$$t \in I \mapsto f\big(g(t), h(t)\big) \in \mathbb{R}$$
est continue.



22.3 Dérivation

Motivation :



$$S(x,y,z) = 2(xy + xz + yz)$$
$$V(x,y,z) = xyz$$

On cherche à minimiser S avec la contrainte $V = 1$.

Soit $f : \begin{array}{rcl} \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & S\left(x, y, \dfrac{1}{xy}\right) = 2\left(xy + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x}\right). \end{array}$

On cherche $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$ tel que
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_*^+), f(x,y) \geqslant f(a,b).$$

Définition: Soit $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(a,b) \in U$.
Si $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a} \in \mathbb{R}$, alors on dit que f a une dérivée partielle

suivant x en (a,b) et cette limite est notée

$$\partial f_1(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).$$

Si $\lim\limits_{y\to b} \dfrac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} \in \mathbb{R}$, alors on dit que f a une dérivée partielle suivant y et la limite est notée

$$\partial f_2(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

Exemple: 1. $f : (x,y) \mapsto xy + x - y$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \mapsto y+1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \mapsto x-1.$$

2. $f : (x,y) \mapsto xy + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \mapsto y - \frac{1}{x^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \mapsto x - \frac{1}{y^2}.$$

3. Trouver f telle que $\begin{cases} (1) : & \dfrac{\partial f}{\partial x} = y, \\ (2) : & \dfrac{\partial f}{\partial y} = x. \end{cases}$

   D'après (1) :

$$\forall (x,y), \exists C(y) \in \mathbb{R}, f(x,y) = xy + C(y)$$

   et donc

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + C'(y)$$

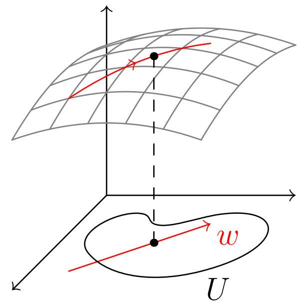
   donc $C'(y) = 0$ et donc C est constante.

4. Trouver f telle que $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -y, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x. \end{cases}$

   Ce n'est pas possible !

Définition:

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert. Soit $(a, b) \in U$. Soit $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$.
Si
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tw_1, b + tw_2) - f(a, b)}{t}$$
existe et est réelle, alors on dit que f a une dérivée dans la direction de w et la limite est notée
$$\mathrm{d}f(w)\,(a, b) = D_w(f)\,(a, b).$$



Exemple:

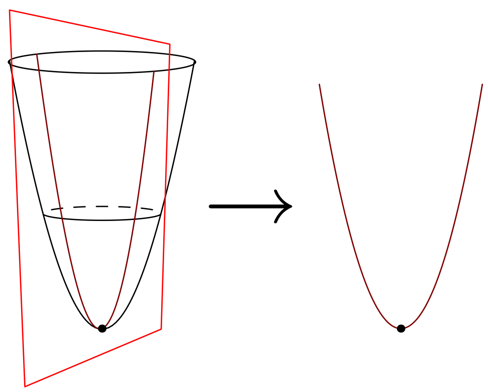
$$\begin{aligned} f : \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

On pose $(a, b) = (1, 2)$, $w = (w_1, w_2) = (1, 1)$.

$$\begin{aligned} \frac{f(1 + t, 2 + t) - f(1, 2)}{t} &= \frac{1}{t}\left((1 + t)(2 + t) + \frac{1}{1 + t} + \frac{1}{2 + t} - 3 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{t}\left(2 + 3t + o(t) + 1 - t + o(t) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{t}{2} + o(t)\right) - 3 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{t}\left(\frac{7}{4}t + o(t)\right) \\ &= \frac{7}{4} + o(1) \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Donc,
$$\mathrm{d}f(1, 1)\,(1, 2) = \frac{7}{4}.$$

Remarque:



Théorème: Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $(a, b) \in U$. On suppose que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent en (a, b) et sont **continues** en (a, b). Alors,

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (a + h, b + k) \in U,$$
$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \underset{(h,k)\to(0,0)}{o}\big(\|(h, k)\|\big).$$

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues.

□

Remarque:
En physique, cette formule correspond à :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

En effet :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f &= f(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y) - f(x, y)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Proposition: Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ en $(a, b) \in U$. Alors,

$$\forall w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{d}f(w)\,(a, b) = w_1\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + w_2\frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

Preuve:
Soit $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $t \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\big(f(a + tw_1, b + tw_2) - f(a, b)\big) &= \frac{1}{t}\left(tw_1\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + tw_2\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \underset{t\to 0}{o}\big(\|tw\|\big)\right)\\ &= w_1\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + w_2\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \underset{t\to 0}{o}(1)\\ &\xrightarrow[t\to 0]{} w_1\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + w_2\frac{\partial f}{\partial y}(a, b).\end{aligned}$$

□

Définition: Avec les hypothèses précédentes, en posant

$$\nabla f(a, b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right)$$

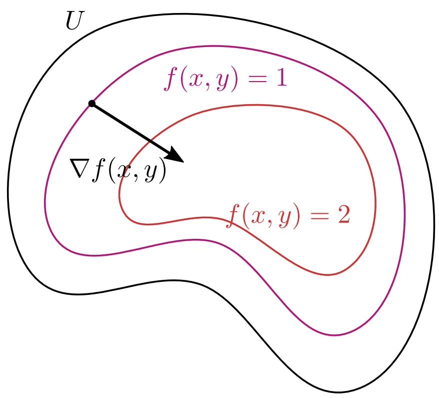
on obtient

$$\mathrm{d}f(w)\,(a,b) = \langle w \mid \nabla f(a,b)\rangle$$

où $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est le produit scalaire.
Le vecteur $\nabla f(a,b)$ est appelé gradient de f en (a,b).
Le développement limité à l'ordre 1 de f devient

$$f\big((a,b)+w\big) = f(a,b) + \langle w \mid \nabla f(a,b)\rangle + \underset{w\to 0}{o}(\|w\|)$$

Proposition: Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.



∇f est orthogonal au lignes de niveaux de f, son orientation va dans le sens d'une augmentation de f.

Preuve:
Soit $\gamma : I \to U$ une courbe de niveau :

$$\forall t \in I, f\big(\gamma(t)\big) = \text{cste}.$$

D'après le lemme suivant :

$$\forall t \in I, 0 = (f\circ\gamma)'(t) = \mathrm{d}f\big(\gamma'(t)\big)\big(\gamma(t)\big) = \big\langle \gamma'(t) \mid \nabla f\big(\gamma(t)\big)\big\rangle$$

Donc $\nabla f\big(\gamma(t)\big)$ est orthogonal à $\gamma'(t)$.
Pour tout $t \in I$, on pose $w(t) = t\,\nabla f\big(\gamma(t)\big)$. Donc

$$f\big(\gamma(t)+w(t)\big) = f\big(\gamma(t)\big) + t\|\nabla f(\gamma(t))\|^2 + \underset{t\to 0}{o}(t)$$

Pour t assez petit, $f\big(\gamma(t)+w(t)\big) - f\big(\gamma(t)\big)$ est du même signe que t. $\square$

REMARQUE:

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto -mgz \end{aligned}$$

l'énerge potentielle de pesenteur
On a donc

$$\nabla V(x, y, z) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) = (0, 0, -mg) = \vec{P}.$$

Lemme: Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, $\gamma : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & U \\ t & \longmapsto & \big(x(t), y(t)\big) \end{array}$ où x et y sont dérivables.
On pose

$$\forall t \in I, \gamma'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big).$$

Alors $f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et

$$\begin{aligned} \forall t \in I, (f \circ \gamma)'(t) &= \mathrm{d}f\big(\gamma'(t)\big)\big(\gamma(t)\big) \\ &= \big\langle \gamma'(t) \mid \nabla f\big(\gamma(t)\big) \big\rangle \\ &= x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big). \end{aligned}$$

Preuve:
On fixe $t \in I$.

$$\begin{aligned} \forall h \neq 0, \frac{f \circ \gamma(t+h) - f \circ \gamma(t)}{h} &= \frac{1}{h}\big(f(\gamma(t)) + h\gamma'(t) + \underset{h \to 0}{o}(h) - f(\gamma(t))\big) \\ &= \frac{1}{h}\Big(f(\gamma(t)) + \langle h\gamma'(t) \mid \nabla f(\gamma(t)) \rangle + \underset{h \to 0}{o}(\|h\gamma'(t)\|) - f(\gamma(t)) \Big) \\ &= \langle \gamma'(t) \mid \nabla f(\gamma(t)) \rangle + \underset{h \to 0}{o}(1) \\ &\xrightarrow[h \to 0]{} \langle \gamma'(t) \mid \nabla f(\gamma(t)) \rangle \end{aligned}$$

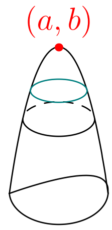
$\square$

Définition: Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $(a, b) \in U$. On dit que (a, b) est un <u>point critique</u> de f si $\nabla f(a, b) = 0$ i.e. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$.
Dans ce cas, $f(a, b)$ est appelé <u>valeur critique</u> de f.

Proposition:
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $(a,b) \in U$ tel que

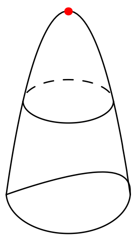
$$\exists r > 0, \forall (x,y) \in B_{(a,b)}(r), f(x,y) \leqslant f(a,b)$$

Alors $\nabla f(a,b) = (0,0)$.

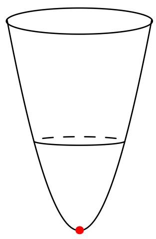


Preuve:
Soit $g : x \mapsto f(x,b)$. $g(a)$ est un maximum local de g donc $g'(a) = 0$.
Or, $g'(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$
donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$.
Soit $h : y \mapsto f(a,y)$. On a de même $h'(b) = 0$.
Or, $h'(b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.
Donc, $\nabla f(a,b) = (0,0)$. $\square$

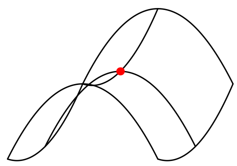
Remarque:
Un minimum local est aussi une valeur critique.



(a) Maximum local



(b) Minimum local



(c) Point de selle / Point col

Exemple:
On revient à l'exemple donné en introduction :

$$\begin{aligned} f : \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto 2\left(xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

$\left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$.
On a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\left(y - \dfrac{1}{x^2}\right), \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\left(x - \dfrac{1}{y^2}\right). \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\\
\iff &\begin{cases} y=\dfrac{1}{x^2}\\ x=\dfrac{1}{y^2}\end{cases}\\
\iff &\begin{cases} y=\dfrac{1}{x^2}\\ x=x^4\end{cases}\\
\iff &\begin{cases} x=1\\ y=1\end{cases}
\end{aligned}$$

On vérivie que f présente en effet un minium local en $(1,1)$.

$$f(1,1)=6$$

On fixe $y\in\mathbb{R}_*^+$ et

$$g:x\mapsto 2\left(xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$$

Donc

$$\forall x\in\mathbb{R}_*^+, g'(x)=2\left(y-\frac{1}{x^2}\right).$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{y}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$2\left(2\sqrt{y}+\frac{1}{y}\right)$	$\nearrow$	

Ainsi,

$$\forall x\in\mathbb{R}_*^+,\forall y\in\mathbb{R}_*^+, f(x,y)\geqslant 2\left(2\sqrt{y}+\frac{1}{y}\right)$$

Soit $h:y\mapsto 2\sqrt{y}+\dfrac{1}{y}$. On a

$$\forall y>0, h'(y)=\frac{1}{\sqrt{y}}-\frac{1}{y^2}=\frac{y\sqrt{y}-1}{y^2}=\frac{y^{\frac{3}{2}}-1}{y^2}$$

y	0		1		$+\infty$
$h'(y)$		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	3	$\nearrow$	

Donc,

$$\forall x, y > 0, f(x,y) \geqslant 2 \times 3 = 6 = f(1,1).$$

Proposition (règle de la chaîne)**:** Soit $f : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$.

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & U \\ (u,v) & \longmapsto & \varphi(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big) \end{array}$.

On suppose que x et y sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur V.

Alors, $f \circ \varphi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f\big(\varphi(u,v)\big) \end{array}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\begin{aligned}\forall (u_0, v_0) \in V, \frac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial u}(u_0,v_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(u_0,v_0)\big) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(u_0,v_0)\big)\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall (u_0, v_0) \in V, \frac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial v}(u_0,v_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(u_0,v_0)\big) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(u_0,v_0)\big)\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\end{aligned}$$

Exemple (changement de coordonnées polaires):
On pose

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}_*^+ \times]0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \big(R_*^+ \times \{0\}\big) \\ (r,\theta) &\longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}^2 \setminus \big(R_*^+ \times \{0\}\big) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g : \overbrace{\mathbb{R}_*^+ \times]0, 2\pi[}^{=V} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (r,\theta) &\longmapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta).\end{aligned}$$

$\forall (r_0, \theta_0) \in V,$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r}(r_0, \theta_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r_0 \cos\theta_0, r_0 \sin\theta_0)\cos\theta_0 \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(r_0 \cos\theta_0, r_0 \sin\theta_0)\sin\theta_0 \\ &= 2r_0 \cos^2\theta_0 + 2r_0 \sin^2(\theta_0) \\ &= 2r_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(r_0 \cos\theta_0, r_0 \sin\theta_0) r_0 \sin\theta_0 \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(r_0 \cos\theta_0, r_0 \sin\theta_0) r_0 \cos\theta_0 \\ &= -2{r_0}^2 \cos(\theta_0)\sin(\theta_0) + 2{r_0}^2 \sin(\theta_0)\cos(\theta_0) \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc,

$$g(r, \theta) = r^2.$$

Exemple:
Résoudre

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{x^2+y^2}. \end{cases}$$

On pose $g : (r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r} &= \frac{1}{r}\cos^2\theta + \frac{1}{r}\sin^2\theta = \frac{1}{r}, \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} &= -\cos(\theta)\sin(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta) = 0.\end{aligned}$$

Donc,

$$\exists C \in \mathbb{R}, g : (r, \theta) \mapsto \ln r + C$$

d'où,

$$\begin{aligned}\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, f(x, y) &= \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C.\end{aligned}$$

Remarque:
Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Soit $(x, y) \in U$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\nabla f(x,y)\big) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Soit

$$\begin{aligned} \varphi : V &\longrightarrow U \\ (u,v) &\longmapsto \big(x(u,v), y(u,v)\big) \end{aligned}$$

avec x, y de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $g = f \circ \varphi$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\nabla g(u,v)\big) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}}_{J(u,v)} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\ &= J(u,v)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\nabla f(x,y)\big) \end{aligned}$$

où $J(u,v) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\nabla x(u,v)\big) \vdots \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\nabla y(u,v)\big)\big)$.
On dit que $J(u,v)$ est <u>la jacobienne</u> de φ en (u,v). L'application linéaire canoniquement associée à $J(u,v)$ est la <u>différentielle de φ</u> en (u,v) noté $\mathrm{d}\varphi(u,v)$.
On a $\mathrm{d}\varphi(u,v) \in \mathscr{L}(R^2)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\mathrm{d}\varphi(u,v)\big) = J(u,v)$.
Par exemple, la jacobienne du changement de coordonnées polaires est

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

$$\underbrace{\det(J)}_{\text{le jacobien}} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

Dans une intégrale double, si $(x,y) = \varphi(u,v)$, alors $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \det(J)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.
Ici,

$$\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta.$$

Preuve:
On pose $(x_0, y_0) = \varphi(u_0, v_0)$. Pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(u_0+h, v_0+k) \in V$, en posant $g = f \circ \varphi$.

$$\begin{aligned}
g(u_0 + h, v_0 + h) &= f\big(x(u_0 + h, v_0 + k), y(u_0 + h, v_0 + k)\big) \\
&= f\left(x(u_0, v_0) + h\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) + k\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) + o\left(\|(h,k)\|\right),\right. \\
&\qquad \left. y(u_0, v_0) + h\frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) + k\frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) + o\left(\|(h,k)\|\right)\right) \\
&= f(x_0, y_0) \\
&\quad + \left(h\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) + k\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) + o(\|(h,k)\|)\right)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\
&\quad + \left(h\frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) + k\frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) + o(\|(h,k)\|)\right)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\
&\quad + o(\|(h,k)\|) \\
&= f(x_0, y_0) \\
&\quad + h\left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \\
&\quad + k\left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \qquad + o(\|(h,k)\|) \\
&= g(u_0, v_0) + h\frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0) + k\frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0) + o(\|(h,k)\|)
\end{aligned}$$

Par identification,

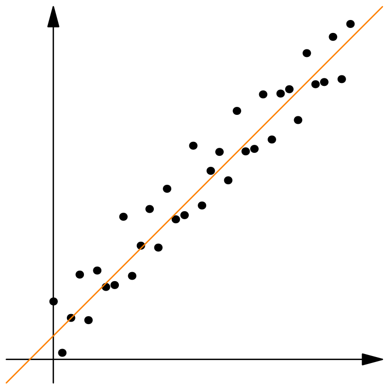
$$\frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0) = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

□

Exemple (Régression linéaire):



$$y = ax + b$$

On fixe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varepsilon(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (ax_i + b)\big)^2$$

l'erreur totale.
On veut minimiser $\varepsilon(a, b)$. On a

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial a}(a, b) = -2 \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)x_i, \\ \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial b}(a, b) = -2 \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b). \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} (a, b) \text{ point critique de } \varepsilon &\iff \begin{cases} a \displaystyle\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ a \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a \left(\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \overline{x}^2 \right) = \overline{y} - \overline{xy} \\ b = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i - \dfrac{a}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{xy} \end{cases} \\ &\quad \text{où } \overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \ \overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ &\iff \begin{cases} a = \dfrac{\operatorname{Cov}(x, y)}{V(x)} \\ b = \overline{y} - a\overline{x} \end{cases} \end{aligned}$$

Coefficient de corrélation : $\dfrac{\operatorname{Cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} \in [-1, 1]$

Chapitre 23

Dénombrement

23.1 Cardinal d'un ensemble

Lemme: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$, et $X \subsetneq [\![1, n]\!]$ avec $X \neq \varnothing$ ($\subsetneq$ signifie inclus et différent).
Alors
$$\exists\ 0 < p < n, \exists f : X \to [\![1, p]\!] \text{ bijective }.$$

Preuve (par récurrence sur n)*:*
On pose, pour $n \geqslant 2$,

$\mathscr{P}(n)$: "$\forall X \subsetneq [\![1, n]\!]$ tel que $X \neq \varnothing, \exists\, 0 < p < n, \exists f : X \to [\![1, p]\!]$ bijective"

— Soit $X \subsetneq [\![1, 2]\!]$ avec $X \neq \varnothing$. Par définition d'une inclusion,
$$X = \{1\} \text{ ou } X = \{2\}.$$
On pose $p = 1$.
Si $X = \{1\}$, alors on pose
$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow [\![1, 1]\!] = \{1\} \\ 1 &\longmapsto 1 \end{aligned}$$
f est bien bijective.
Si $X = \{2\}$, alors on pose
$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \{1\} \\ 2 &\longmapsto 1 \end{aligned}$$
De nouveau, f est bijective.
Ainsi, $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

— Soit $n \geqslant 2$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie. Soit $X \subsetneq [\![1, n+1]\!]$ avex $X \neq \varnothing$.

<u>CAS 1</u> On suppose que $n+1 \notin X$.
Alors $X \subset [\![1,n]\!]$.

— Si $X = [\![1,n]\!]$, alors on pose $p = n < n+1$ et $f : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & [\![1,p]\!] = X \\ i & \longmapsto & i \end{array}$ est bijective.

— Si $X \subsetneq [\![1,n]\!]$, d'après $\mathscr{P}(n)$, il existe $p \in [\![1,n-1]\!]$ et une bijection $f : X \to [\![1,p]\!]$.
On a bien $p < n+1$.

<u>CAS 2</u> $n+1 \in X$. On pose $Y = X \setminus \{n+1\}$. Ainsi $Y \subset [\![1,n+1]\!]$.

— Si $X = [\![1,n]\!]$, alors $X = [\![1,n]\!] \cup \{n+1\}$: $\lightning$

— Si $Y = \varnothing$, alors $X = \{n+1\}$. On pose donc $p = 1 < n+1$ et $f : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & [\![1,p]\!] = \{1\} \\ n+1 & \longmapsto & 1 \end{array}$ est bijective.

— On suppose $Y \neq \varnothing$. D'après $\mathscr{P}(n)$, il existe $q \in [\![1,n-1]\!]$ et $g : Y \to [\![1,q]\!]$ bijective.
On pose $f : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & [\![1,q+1]\!] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq n+1, \\ q+1 & \text{si } x = n+1. \end{cases} \end{array}$
On pose aussi $p = q+1 \leqslant n < n+1$. f est bijective.
On pose

$$\begin{aligned} h : [\![1,q+1]\!] &\longrightarrow X \\ i &\longmapsto \begin{cases} g^{-1}(i) & \text{si } i \leqslant q, \\ n+1 & \text{si } i = q+1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1,q+1]\!]\,, f\big(h(i)\big) &= \begin{cases} f\big(g^{-1}(i)\big) & \text{si } i \leqslant q \\ f(n+1) & \text{si } i = q+1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} g\big(g^{-1}(i)\big) & \text{si } i \leqslant q \\ q+1 & \text{si } i = q+1 \end{cases} \\ &= i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in X, h\big(f(x)\big) &= \begin{cases} h\big(g(x)\big) & \text{si } x \neq n+1 \\ h(q+1) & \text{si } x = n+1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} g^{-1}\big(g(x)\big) & \text{si } x \neq n+1 \\ n+1 & \text{si } x = n+1 \end{cases} \\ &= x \end{aligned}$$

$\square$

Lemme: Soient n, p deux entiers non-nuls et $f : [\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$ une surjection. Alors $p \geqslant n$.

Preuve (par récurrence sur n)*:*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathscr{P}(n) : \text{“ } \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall f : [\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!], f \text{ surjective } \implies p \geqslant n.\text{”}$$

— Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : [\![1,p]\!] \to [\![1,1]\!] = \{1\}$. On suppose f surjetive. Nécessairement, $p \geqslant 1$.
— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : [\![1,p]\!] \to [\![1,n+1]\!]$. On suppose f surjective. On veut montrer que $p \geqslant n+1$. On pose

$$X = f^{-1}\big([\![1,n]\!]\big) = \{i \in [\![1,p]\!] \mid f(i) \neq n+1\}.$$

Commme f est surjective, $X \neq \varnothing$ et $X \neq [\![1,p]\!]$. D'après le lemme précédent, il existe $0 < q < p$ et $g : X \to [\![1,q]\!]$ bijective.
Ainsi $f \circ g^{-1} : [\![1,q]\!] \to [\![1,n]\!]$ est surjective.
D'après $\mathscr{P}(n)$, $q \geqslant n$.
Si $p \leqslant n$, alors $q < p \leqslant n$: $\lightning$
Donc $p > n$ et donc $p \geqslant n+1$.

□

Lemme: Soient $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$, $f : [\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$. Alors $p \leqslant n$.

Preuve:
On pose

$$\begin{aligned} g : [\![1,n]\!] &\longrightarrow [\![1,p]\!] \\ i &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } f^{-1}\big(\{i\}\big) = \varnothing, \\ j & \text{si } f^{-1}\big(\{i\}\big) = \{j\}. \end{cases} \end{aligned}$$

g est surjective. Soit $k \in [\![1,p]\!]$, alors $g\big(f(k)\big) = k$ car k est un antécédant de $f(k)$ par f.
D'après le lemme précédent, $n \geqslant p$. □

Corollaire: Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $f : [\![1,n]\!] \to [\![1,p]\!]$ bijective. Alors $n = p$

Définition: Soit X un ensemble. On dit que X est fini si $X = \varnothing$ ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection $f : X \to [\![1, n]\!]$.
Soit X un ensemble fini. Le cardinal de X est
— 0 si $X = \varnothing$
— sinon, c'est le seul entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel il existe une bijection de X dans $[\![1, n]\!]$.
On le note $\mathrm{Card}(X)$, $\#X$ ou $|X|$.

Proposition: Soit E un ensemble fini et $X \in \mathscr{P}(E)$.
Alors X est fini et $\#X \leqslant \#E$.
Si $\#X = \#E$, alors $X = E$.

Preuve: CAS 1 Si $E = \varnothing$, alors $X = \varnothing$.
CAS 2 $E \neq \varnothing$. On pose $n = \#E \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : E \to [\![1, n]\!]$ une bijection.
On suppose $X \neq \varnothing$. On pose $Y = f(X) \subset [\![1, n]\!]$
— Si $Y = [\![1, n]\!]$, alors $X = E$ et donc $\#X = n \leqslant \#E$.
— Si $Y \subsetneq [\![1, n]\!]$, comme $Y \neq \varnothing$, il existe $p \in [\![1, n-1]\!]$ et $g : Y \to [\![1, p]\!]$: une bijection.

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow [\![1, p]\!] \\ x &\longmapsto g\big(f(x)\big) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "h"] & Y \arrow[d, "g"] \\ & {[\![1, p]\!]} \end{tikzcd}$$

Montrons que h est bijective. On pose

$$\begin{aligned} k : [\![1, p]\!] &\longrightarrow X \\ i &\longmapsto f^{-1}\big(g^{-1}(i)\big). \end{aligned}$$

h et k sont réciproques l'une de l'autre, donc $\#X = p \leqslant n$.
On suppose $X = \varnothing$, alors $\#X = 0 < n$.

□

Proposition: Soit E un ensemble fini, $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tel que $A \cap B = \varnothing$.
Alors

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B.$$

Preuve:
Le résultat est évident si $A = \varnothing$ et $B = \varnothing$.
On suppose $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$. On pose $a = \#A$ et $\#B$. Soient

$$\begin{cases} f : A \to [\![1, a]\!] & \text{une bijection} \\ g : B \to [\![1, b]\!] & \text{une bijection} \end{cases}$$

On pose

$$\begin{aligned} h : A \cup B &\longrightarrow [\![a + b]\!] \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A, \\ a + g(x) & \text{si } x \in B. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $A \cap B = \varnothing$, h est bien définie.
Soit

$$\begin{aligned} k : [\![1, a + b]\!] &\longrightarrow A \cup B \\ i &\longmapsto \begin{cases} f^{-1}(i) & \text{si } i \leqslant a \\ g^{-1}(i - a) & \text{si } i > a. \end{cases} \end{aligned}$$

On vérifie que h et k sont réciproques l'une de l'autre.
Donc $\#(A \cup B) = a + b$. □

Proposition: Soient E un ensemble fini, $n \in \mathbb{N}^*$, $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{P}(E)^n$ telles que

$$\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing.$$

Alors

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \#A_i$$

Preuve (par récurrence sur n)*:*
On a traité le cas $n = 2$ précédemment.
Soit $n \geqslant 2$ pour lequel le résultat est vrai. Soit $(A_1, \ldots, A_{n+1}) \in \mathscr{P}(E)^{n+1}$ telles que

$$\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing.$$

On pose $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Alors

$$\begin{aligned} A \cap A_{n+1} &= \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1} \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1}) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} \varnothing \\ &= \varnothing. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \#(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) &= \#(A \cup A_{n+1}) \\ &= \#A = \#A_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \#A_i + \#A_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \#A. \end{aligned}$$

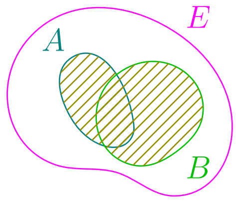
□

Proposition: Soient E un ensemble fini, $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Alors

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

Preuve:

On pose $\begin{cases} C = A \cap B \\ A' = A \setminus C \\ B' = B \setminus C. \end{cases}$



Alors

$$\begin{cases} A' \cup B' \cup C = A \cup B, \\ A' \cap B' = A' \cap C = B' \cap C = \varnothing. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} \#(A \cup B) &= \#(A' \cup B' \cup C) \\ &= \#A' + \#B' + \#C. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{cases} A = A' \cup C \\ A' \cap C = \varnothing \end{cases}$$

donc

$$\#A = \#A' + \#C$$

donc

$$\#A' = \#A - \#C.$$

De même,

$$\#B' = \#B - \#C.$$

D'où

$$\begin{aligned} \#(A \cup B) &= \#A - \#C + \#B - \#C + \#C \\ &= \#A + \#B - \#C \end{aligned}$$

□

Au passage, on a prouvé la proposition suivante :

Proposition: Soient E un ensemble fini, $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ avec $B \subset A$. Alors

$$\#(A \setminus B) = \#A - \#B.$$

□

Exemple:
Soit E un ensemble fini, $(A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3$.

$$\begin{aligned} \#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C \\ - \#(A \cap B) - \#(B \cap C) - \#(A \cap C) \\ + \#(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Soit $(A, B, C, D) \in \mathscr{P}(E)^4$.

$$\begin{aligned}\#(A \cup B \cup C \cup D) = {} & \#A + \#B + \#C + \#D \\ & - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(A \cap D) - \#(B \cap C) - \#(B \cap D) - \#(C \cap D) \\ & + \#(A \cap B \cap C) + \#(A \cap B \cap D) + \#(B \cap C \cap D) + \#(A \cap C \cap D) \\ & - \#(A \cap B \cap C \cap D).\end{aligned}$$

En généralisant, on obtient la formule du crible :

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_k \leqslant n} \#(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

Proposition: Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \to F$.

1. Si f est injective, alors $\#E \leqslant \#F$,
2. Si f est surjective, alors $\#E \geqslant \#F$,
3. Si f est bijective, alors $\#E = \#F$,

Preuve: 1.
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & F \arrow[d, "bij"] \\ \llbracket 1, n \rrbracket \arrow[u, "bij"] \arrow[r, dashed, "inj"] & \llbracket 1, p \rrbracket \end{tikzcd}$$

2.
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "surj"] & F \arrow[d, "bij"] \\ \llbracket 1, n \rrbracket \arrow[u, "bij"] \arrow[r, dashed, "surj"] & \llbracket 1, p \rrbracket \end{tikzcd}$$

□

Proposition (principe des tiroirs – pigeonhole principle)**:** Soit $f : E \to F$ telle que $\#E > \#F$. Alors

$$\exists (x, y) \in E^2, \begin{cases} x \neq y, \\ f(x) = f(y) \end{cases}$$

Preuve:
C'est la contraposée du point 1. de la proposition précédente. □

Proposition: Soit $E \to F$ où E et F sont finis et $\#E = \#F$.

$$f \text{ injective } \iff f \text{ surjective } \iff f \text{ bijective }.$$

Preuve:

— On suppose f injective. Soit

$$\begin{aligned} g : E &\longrightarrow \mathrm{Im}(f) \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

g est bijective donc $\#E = \#\mathrm{Im}\, f$. Or, $\#E = \#F$ donc $\mathrm{Im}\, f = F$ et donc f est surjective.

— On suppose f surjective. Alors

$$E = \bigcup_{y \in F}^{\cdot} f^{-1}\big(\{y\}\big)$$

donc

$$\#E = \sum_{y \in F} \# f^{-1}\big(\{y\}\big) \geqslant \sum_{y \in F} 1 = \#F$$

donc

$$\forall y \in F, \# f^{-1}\big(\{y\}\big) = 1$$

donc f est bijective.

$\square$