

CHAPITRE 17

Dimension finie

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 24 février 2022

Definition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On dit que E est de dimension finie si E a au moins une famille génératrice finie. On dit que E est de dimension infinie sinon.

Théorème

Théorème de la base extraite

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel non nul de dimension finie. Soit \mathcal{G} une famille génératrice finie de E . Alors, il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

Preuve

par récurrence sur $\#G = \text{Card}(G)$

- Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel non nul engendré par $\mathcal{G} = (u)$.
Si $u = 0_E$, alors $E = \{0_E\}$: une contradiction \nmid
Donc $u \neq 0_E$ donc (u) est libre. En effet,

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u = 0_E \implies \lambda = 0_{\mathbb{K}}$$

Donc \mathcal{G} est une base de E .

- Soit $n \in \mathbb{N}_*$. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On suppose que si E a une famille génératrice constituée de n vecteurs, alors on peut extraire de cette famille une base de E .
Soit \mathcal{G} une famille génératrice de E avec $n + 1$ vecteurs.
Si \mathcal{G} est libre, alors \mathcal{G} est une base de E .
Si \mathcal{G} n'est pas libre, alors il existe $u \in \mathcal{G}$ tel que $u \in \text{Vect}(\mathcal{G} \setminus \{u\})$
Donc $\mathcal{G} \setminus \{u\}$ engendre E . Or, $\mathcal{G} \setminus \{u\}$ possède n vecteurs. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base \mathcal{B} de E telle que

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{G} \setminus \{u\} \subset \mathcal{G}$$

□

Corollaire

Tout espace de dimension finie a une base.

□

Théorème

Théorème de la base incomplète

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, \mathcal{G} une famille génératrice finie de E . \mathcal{L} une famille libre de E . Alors, il existe une base \mathcal{B} de E telle que

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{B} \setminus \mathcal{L} \subset \mathcal{G}$$

Preuve

par récurrence sur $\#(\mathcal{G} \setminus \mathcal{L})$

— Avec les notations précédentes, on suppose que $\mathcal{G} \setminus \mathcal{L} \neq \emptyset$

$$\forall u \in \mathcal{G}, u \in \mathcal{L}$$

Donc $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}$ donc \mathcal{L} est génératrice donc \mathcal{L} est une base de E . On pose $\mathcal{B} = \mathcal{L}$ et alors

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{B} \setminus \mathcal{L} = \emptyset \subset \mathcal{G}$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que si \mathcal{G} est génératrice et \mathcal{L} libre avec $\#(\mathcal{G} \setminus \mathcal{L}) = n$ alors il existe une base \mathcal{B} de E telle que

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{B} \setminus \mathcal{L} \subset \mathcal{G}$$

Soient à présent \mathcal{G} une famille génératrice de E et \mathcal{L} une famille libre de E telles que $\#(\mathcal{G} \setminus \mathcal{L}) = n + 1 > 0$

Si \mathcal{L} engendre E , alors \mathcal{L} est une base de E . On pose $\mathcal{B} = \mathcal{L}$ et on a bien

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{B} \setminus \mathcal{L} = \emptyset \subset \mathcal{G}$$

On suppose que \mathcal{L} n'engendre pas E . Il existe $u \in \mathcal{G}$ tel que $u \notin \langle \mathcal{L} \rangle$ (car sinon, $\mathcal{G} \subset \text{Vect}(\mathcal{L})$ et donc $\underbrace{\text{Vect}(\mathcal{G})}_{=E} \subset \underbrace{\text{Vect}(\mathcal{L})}_{\subset E}$)

Donc $\mathcal{L} \cup \{u\}$ est libre. On pose $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{u\}$

$$\mathcal{G} \setminus \mathcal{L}' = \mathcal{G} \setminus (\mathcal{L} \cup \{u\}) = (\mathcal{G} \setminus \mathcal{L}) \setminus \{u\}$$

donc $\#(\mathcal{G} \setminus \mathcal{L}') = n + 1 - 1 = n$

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe \mathcal{B} une base de E telle que

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{L}' \subset \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{B} \setminus \mathcal{L}' \subset \mathcal{G}$$

$$\mathcal{B} \setminus \mathcal{L} = \underbrace{\mathcal{B} \setminus \mathcal{L}'}_{\subset \mathcal{G}} \cup \underbrace{\{u\}}_{\subset \mathcal{G} \text{ car } u \in \mathcal{G}}$$

On a $\mathcal{B} \setminus \mathcal{L} \subset \mathcal{G}$

□

Théorème

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E ont le même cardinal.

Preuve

Soit \mathcal{G} une famille génératrice finie de E et $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ une base de E . On note $n = \#\mathcal{B}$

Soit \mathcal{B}' une base de E . On pose $p = n - \#(\mathcal{B} \cap \mathcal{B}')$. Montrons par récurrence sur p que $\#\mathcal{B} = \#\mathcal{B}'$

— On suppose que $p = 0$. Alors, $\#(\mathcal{B} \cap \mathcal{B}') = n$

Or, $\mathcal{B}' \cap \mathcal{B} \subset \mathcal{B}$ donc $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}' = \mathcal{B}$ donc $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$ et donc $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$

-
- Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que si \mathcal{B}' est une base de E telle que $n - \#(\mathcal{B} \cap \mathcal{B}') = p$, alors $\#\mathcal{B}' = n$
 Aoit \mathcal{B}' une base de E telle que $n - \#(\mathcal{B} \cap \mathcal{B}') = p + 1 > 0$
 Donc $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}' \neq \mathcal{B}$. Soit $u \in \mathcal{B}' \setminus \mathcal{B}$. D'après le lemme d'échange, il existe $v \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'$ tel que $\mathcal{B}' \setminus \{u\} \cup \{v\}$ est une base de E . On pose $\mathcal{B}'' = \mathcal{B}' \setminus \{u\} \cup \{v\}$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}'' \cap \mathcal{B} &= ((\mathcal{B}' \setminus \{u\}) \cap \mathcal{B}) \cup \{v\} \\ &= (\mathcal{B}' \cap \mathcal{B}) \cup \{v\}\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}n - \#(\mathcal{B}'' \cap \mathcal{B}) &= n - (\#(\mathcal{B}' \cap \mathcal{B}) + 1) \\ &= p + 1 - 1 \\ &= p\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence,

$$\#\mathcal{B}'' = n$$

Or, $\#\mathcal{B}'' = \#\mathcal{B}'$

□

Lemme

Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E telles que $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$. Alors, $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.

Preuve

On suppose $\mathcal{B}' \neq \mathcal{B}$. Soit $u \in \mathcal{B}' \setminus \mathcal{B}$ $u \in E = \text{Vect}(\mathcal{B})$ donc $\mathcal{B} \cup \{u\}$ n'est pas libre. Donc $\mathcal{B} \cup \{u\} \subset \mathcal{B}'$ et \mathcal{B}' est libre donc $\mathcal{B} \cup \{u\}$ est libre : une contradiction \nmid □

Lemme

Lemme d'échange

Soient \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 deux bases de E et $u \in \mathcal{B}_1 \setminus \mathcal{B}_2$. Alors, il existe $v \in \mathcal{B}_2$ tel que $(\mathcal{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ soit une base de E .

Preuve

1^{de} méthode

On suppose que pour tout $v \in \mathcal{B}_2$, $(\mathcal{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ n'est pas une base de E . Soit $v \in \mathcal{B}_2$.

- Supposons $(\mathcal{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ non libre. $\mathcal{B}_1 \setminus \{u\}$ est libre. Donc $v \in \text{Vect}(\mathcal{B}_1 \setminus \{u\})$
- Supposons $(\mathcal{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ non génératrice. Comme \mathcal{B}_1 engendre E , $u \notin \text{Vect}(\mathcal{B}_1 \setminus \{v\})$. On suppose que $\mathcal{B}_1 \neq \mathcal{B}_2$. $\forall v \in \mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_1$, $\text{Vect}(\mathcal{B}_1 \setminus \{v\}) = \text{Vect}(\mathcal{B}_1) = E \ni u$ donc, $(\mathcal{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ engendre E et donc

$$v \in \text{Vect}(\mathcal{B}_1 \setminus \{u\})$$

On a aussi

$$\forall v \in \mathcal{B}_1 \setminus \{u\}, v \in \text{Vect}(\mathcal{B}_1 \setminus \{u\})$$

Comme $u \notin \mathcal{B}_2$, on a

$$\forall v \in \mathcal{B}_2, v \in \text{Vect}(\mathcal{B}_1 \setminus \{u\})$$

donc

$$E = \text{Vect}(\mathcal{B}_2) \subset \text{Vect}(\mathcal{B}_1 \setminus \{u\})$$

donc $\mathcal{B}_1 \setminus \{u\}$ engendre E donc $\mathcal{B}_1 \setminus \{u\}$ est une base de E . Or, $\mathcal{B}_1 \setminus \{u\} \subset \mathcal{B}_1$, donc $\mathcal{B}_1 \setminus \{u\} = \mathcal{B}_1$

□

Preuve

2^{nde} méthode

On suppose que pour tout $v \in \mathcal{B}_2$, $(\mathcal{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ n'est pas une base de E

- Comme $u \in \mathcal{B}_1 \setminus \mathcal{B}_2$, nécessairement $\mathcal{B}_1 \neq \mathcal{B}_2$ donc $\mathcal{B}_2 \not\subset \mathcal{B}_1$, donc $\mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_1 \neq \emptyset$
- Soit $v \in \mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_1$. Il existe $(\lambda_w)_{w \in \mathcal{B}_1}$ une famille de scalaires presque nulle telle que

$$v = \sum_{w \in \mathcal{B}_1} \lambda_w w - \lambda_u u + \sum_{w \in \mathcal{B}_1 \setminus \{u\}} \lambda_w w$$

Si $\lambda_u \neq 0_E$, alors

$$u = \lambda_u^{-1} \left(v - \sum_{w \in \mathcal{B}_1 \setminus \{u\}} \lambda_w w \right) \in \text{Vect}(\mathcal{B}_1 \setminus \{u\} \cup v)$$

donc $\mathcal{B}_1 \subset \text{Vect}(\mathcal{B}_1 \setminus \{u\} \cup \{v\})$
 et donc $E \subset \text{Vect}(\mathcal{B}_1 \setminus \{u\} \cup \{v\})$
 et donc $\mathcal{B}_1 \setminus \{u\} \cup \{v\}$ engendre E
 donc $\mathcal{B}_1 \setminus \{u\} \cup \{v\}$ n'est pas libre
 donc $v \in \text{Vect}(\mathcal{B}_1 \setminus \{u\})$ (car $\mathcal{B}_1 \setminus \{u\}$ est libre)
 donc $\lambda_u = 0_{\mathbb{K}} \nmid$
 ,

Donc, $\lambda_u = 0_{\mathbb{K}}$, donc $v \in \text{Vect}(\mathcal{B}_1 \setminus \{u\})$

On vient de prouver que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_1 &\subset \text{Vect}(\mathcal{B}_1 \setminus \{u\}) \\ \mathcal{B}_1 \setminus \{u\} &\subset \text{Vect}(\mathcal{B}_1 \setminus \{u\}) \end{aligned}$$

Comme $u \notin \mathcal{B}_2$,

$$\mathcal{B}_2 \subset \text{Vect}(\mathcal{B}_1 \setminus \{u\})$$

donc

$$E = \text{Vect}(\mathcal{B}_2) \subset \text{Vect}(\mathcal{B}_1 \setminus \{u\})$$

donc $\mathcal{B}_1 \setminus \{u\}$ engendre E . Donc, $\mathcal{B}_1 \setminus \{u\}$ est une base de E .

Or, $\mathcal{B}_1 \setminus \{u\} \subset \mathcal{B}_1$, donc $\mathcal{B}_1 \setminus \{u\} = \mathcal{B}_1$

□

Definition

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Le cardinal commun à toutes les bases de E est appelé dimension de E est notée $\dim(E)$ ou $\dim_{\mathbb{K}}(E)$. C'est donc aussi le nombre de coordonnées de n'importe quel vecteur dans n'importe quelle base.

Exemple

1. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ et $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$
2. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$
3. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$

Corollaire

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, \mathcal{L} une famille libre de E , \mathcal{G} une famille génératrice de E . On note $n = \dim(E)$

1. $\#\mathcal{G} \geq n$ et $(\#\mathcal{G} = n \implies \mathcal{G} \text{ est une base de } E)$
2. $\#\mathcal{L} \leq n$ et $(\#\mathcal{L} = n \implies \mathcal{L} \text{ est une base de } E)$

Corollaire

$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est de dimension infinie. $\forall i \in \mathbb{N}, e_i : x \mapsto x^i$
 $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Proposition

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. Alors $E \times F$ est de dimension finie et $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$

Preuve

Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E , (f_1, \dots, f_p) une base de F . On pose

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_1 & = & (e_1, 0_F) \\ u_2 & = & (e_2, 0_F) \\ & \vdots & \\ u_n & = & (e_n, 0_F) \\ u_{n+1} & = & (0_E, f_1) \\ u_{n+2} & = & (0_E, f_2) \\ & \vdots & \\ u_{n+p} & = & (0_E, f_p) \end{array} \right.$$

Soit $(x, y) \in E \times F$.

$$\left\{ \exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \exists (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{K}^p, y = \sum_{j=1}^p y_j f_j \right.$$

$$\begin{aligned} (x, y) &= \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^p y_j f_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i (e_i + 0_F) + \sum_{j=1}^p y_j (0_E, f_j) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i u_i + \sum_{j=1}^p y_j u_{n+j} \end{aligned}$$

Donc, $E \times F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{n+p})$ donc $E \times F$ est de dimension finie.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+p}) \in \mathbb{K}^{n+p}$ tel que

$$(*) : \sum_{k=1}^{n+p} \lambda_k u_k = 0_{E \times F} = (0_E, 0_F)$$

$$\begin{aligned} (*) &\iff \sum_{k=1}^n \lambda_k (e_k, 0_F) + \sum_{k=n+1}^p \lambda_k (0_E, f_{k-n}) = (0_E, 0_F) \\ &\iff \begin{cases} \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0_E \\ \sum_{k=n+1}^p \lambda_k f_{k-n} = 0_F \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k = 0_{\mathbb{K}} & (\text{car } (e_1, \dots, e_n) \text{ est libre}) \\ \forall k \in \llbracket n+1, n+p \rrbracket, \lambda_k = 0_{\mathbb{K}} & (\text{car } (f_1, \dots, f_p) \text{ est libre}) \end{cases} \end{aligned}$$

Donc (u_1, \dots, u_{n+p}) est une base de $E \times F$. Donc, $\dim(E \times F) = n + p = \dim(E) + \dim(F)$ \square

Remarque *Convention*

$$\dim(\{0_E\}) = 0$$

Théorème

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E . Alors, F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$

Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$

Preuve

On considère

$$A = \{k \in \mathbb{N} \mid \text{il existe une famille libre de } F \text{ à } k \text{ éléments}\}$$

On suppose $F \neq \{0_E\}$.

- Soit $u \in F \setminus \{0_E\}$. (u) est libre donc $1 \in A$ et donc $A \neq \emptyset$
- Soit \mathcal{L} une famille libre de F . Alors, \mathcal{L} est une famille libre de E donc $\#\mathcal{L} \leq \dim(E)$
Donc A est majorée par $\dim(E)$
On en déduit que A a un plus grand élément p .
- Soit \mathcal{L} une famille libre de F avec p éléments.
Si \mathcal{L} n'engendre pas F , alors il existe $u \in F$ tel que $u \notin \text{Vect}(\mathcal{L})$ et donc $\mathcal{L} \cup \{u\}$ est une famille libre de F , donc $p+1 \in A$ en contradiction avec la maximalité de p .
Donc \mathcal{L} est une base de F donc F est de dimension finie et $\dim(F) = p \leq \dim(E)$

Soit \mathcal{B} une base de F . Alors, \mathcal{B} est aussi une famille de libre de E . Donc $\#\mathcal{B} \leq \dim(E)$ donc $\dim(F) = \dim(E)$

Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors \mathcal{B} est une base de E , et donc $F = \text{Vect}(\mathcal{B}) = E$ \square

Proposition

Formule de Grassmann

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espace vectoriels de E . Alors,

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Preuve

Soit (e_1, \dots, e_p) une base de $F \cap G$. (e_1, \dots, e_p) est une famille libre de F .

On complète (e_1, \dots, e_p) en une base $(e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_q)$ de F .

De même, on complète (e_1, \dots, e_p) en une base $(e_1, \dots, e_p, v_1, \dots, v_r)$ de G .

On pose $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_q, v_1, \dots, v_r)$. Montrons que \mathcal{B} est une base de $F + G$

— Soit $u \in F + G$

$$\text{On pose } u = v + w \text{ avec } \begin{cases} v \in F \\ w \in G \end{cases}.$$

$$\text{On pose } v = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^q \mu_i u_i \text{ avec } (\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{K}^{p+q}$$

$$\text{On pose aussi } w = \sum_{i=1}^p \lambda'_i e_i + \sum_{j=1}^r \nu_j v_j \text{ avec } (\lambda'_1, \dots, \lambda'_p, \nu_1, \dots, \nu_r) \in \mathbb{K}^{p+r}$$

D'où,

$$u = \sum_{i=1}^p (\lambda_i + \lambda'_i) e_i + \sum_{j=1}^q \mu_j u_j + \sum_{k=1}^r \nu_k v_k \in \text{Vect}(\mathcal{B})$$

— Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q, \nu_1, \dots, \nu_r) \in \mathbb{K}^{p+q+r}$.
On suppose

$$(*) \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^q \mu_j u_j + \sum_{k=1}^r \nu_k v_k = 0_E$$

D'où,

$$\underbrace{\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^q \mu_j u_j}_{\in F} = - \underbrace{\sum_{k=1}^r \nu_k v_k}_{\in G}$$

Donc,

$$f = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^q \mu_j u_j \in F \cap G$$

Comme (e_1, \dots, e_p) est une base de $F \cap G$, $\exists ! (\lambda'_1, \dots, \lambda'_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$f = \sum_{i=1}^p \lambda'_i e_i = \sum_{i=1}^p \lambda'_i e_i + \sum_{j=1}^q 0_{\mathbb{K}} u_j$$

Comme $(e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_q)$ est une base de F ,

$$\forall k \in \llbracket 1, q \rrbracket, \mu_j = 0_{\mathbb{K}}$$

De même,

$$\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \nu_k = 0_{\mathbb{K}}$$

On remplace dans $(*)$ pour trouver

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = 0_E$$

Comme (e_1, \dots, e_p) est libre,

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \lambda_i = 0_{\mathbb{K}}$$

Donc \mathcal{B} est libre.

Donc,

$$\begin{aligned} \dim(F + G) &= p + q + r \\ &= (p + q) + (p + r) - p \\ &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \end{aligned}$$

□

Corollaire

Avec les hypothèse précédentes,

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases}$$

Preuve

“ \implies ” On suppose $E = F \oplus G$

Comme la somme est directe, $F \cap G = \{0_E\}$

$$\begin{aligned}\dim(E) &= \dim(F) \\ &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \\ &= \dim(F) + \dim(G)\end{aligned}$$

“ \impliedby ” On suppose $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

On sait déjà que $F + G = F \oplus G$

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = \dim(E)$$

Donc $F + G = E$

□