

CHAPITRE 18

TD

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

Table des matières

Exercice 8	1
Exercice 11	2
Exercice 2	3
Exercice 5	3
Exercice 7	4
Exercice 10	5
Exercice 12	6
Exercice 15	6
Exercice 17	7
Exercice 1	8
Exercice 4	8
Exercice 19 (supplémentaire)	9
Exercice 13	10
Exercice 18	10

Exercice 8

— On suppose $a \neq b$.

$$P \mid P(X^3) \iff a \text{ et } b \text{ sont racines de } P(X^3) \\ \iff P(a^3) = P(b^3) = 0 \iff (a^3 = a \text{ ou } a^3 = b) \text{ et } (b^3 = a \text{ ou } b^3 = b)$$

Or,

$$\begin{aligned} \begin{cases} a^3 = a \\ b^3 = a \end{cases} &\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 1 \\ b \in \{1, j, j^2\} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -1 \\ b \in \{1, -j, -j^2\} \end{cases} \\ &\iff P \in \{(X-1)(X-j), (X-1)(X-j^2), (X+1)(X+j), (X+1)(X+j^2)\} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a^3 = a \\ b^3 = b \end{cases} \quad \text{donne des polynômes (en plus des précédents) dans}$$

$$\{X(X-1), X(X+1), (X-1)(X+1)\}$$

$$\begin{cases} a^3 = b \\ b^3 = a \end{cases} \iff \begin{cases} a^3 = b \\ a^9 = a \end{cases} \iff \exists k \in \llbracket 0, 7 \rrbracket, \begin{cases} a = e^{\frac{ik\pi}{4}} \\ b = e^{\frac{3ik\pi}{4}} \end{cases}$$

On a donc,

$$\left\{ \left(X - e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}} \right), \underbrace{(X-i)(X+i)}_{\in \mathbb{R}[X]}, \left(X - e^{\frac{5i\pi}{4}} \right) \left(X - e^{\frac{-i\pi}{4}} \right) \right\}$$

— On suppose $a = b$.

$$\begin{aligned} P \mid P(X^3) &\iff \begin{cases} P(a^3) = 0 \\ 3a^2 P'(a^3) = 0 \end{cases} \\ &\iff a^3 = a \\ &\iff a \in \{0, 1, -1\} \\ &\iff P \in \{X^2, (X-1)^2, (X+1)^2\} \end{aligned}$$

Exercice 11

$$L_n = \frac{n!}{(2n)!} ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$$

1. $\deg(L_n) = 2n - n = n$ et $\text{dom}(L_n) = 1$ car

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{n!}{(2n)!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (X^{2k})^{(n)} (-1)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{(2n)!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(2k)!}{(2k-n)!} X^{2k-n} (-1)^{n-k} \end{aligned}$$

2. Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

On pose $f_n : t \mapsto \frac{n!}{(2n)!} (t^2 - 1)^n$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 L_n(t) Q(t) dt &= f_n^{(n)}(t) Q(t) dt \\ &= \left[f_n^{(n-1)}(t) Q(t) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f_n^{(n-1)}(t) Q'(t) dt \end{aligned}$$

$f_n^{(n-1)}(1) = 0$ car 1 est racine de $(X^2 - 1)^n$ avec multiplicité n . De même, $f_n^{(n-1)}(-1) = 0$. Par récurrence, à n fixé,

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \mathcal{P}(k) : \int_{-1}^1 L_n(t) Q(t) dt = (-1)^k \int_{-1}^1 f_n^{(n-k)}(t) Q^{(k)}(t) dt$$

-
3. $\int_{-1}^1 L_n dt = 0$, $t \mapsto L_n(t)$ est continue sur $[-1, 1]$ et n'est pas l'application nulle.
 donc L_n change de signe sur $[-1, 1]$ donc L_n a au moins une racine dans $[-1, 1]$.
 Supposons que L_n a une unique racine a dans $[-1, 1]$ et qu'elle change de signes en a .
 Donc, $t \mapsto L_n(t)(t - a)$ ne change pas de signes sur $[-1, 1]$, est continue et d'intégrale nulle. Donc c'est l'application nulle \nexists .
 On prouve par récurrence sur k que $t \mapsto L_n(t)$ change de signe au moins k -fois. Avec $k = n$, on trouve n racines distinctes dans $[-1, 1]$ et comme $\deg(L_n) = n$ donc, il n'y a pas plus de n racines.

Exercice 2

1.

$$\begin{aligned} z^4 + 1 = 0 &\iff z^4 = -1 = e^{i\pi} \\ &\iff z \in \left\{ e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}} \right\} \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{C}[X]$,

$$\begin{aligned} X^4 - 1 &= \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right) \left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right) \left(X - e^{\frac{5i\pi}{4}}\right) \left(X - e^{\frac{7i\pi}{4}}\right) \\ &= \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right) \left(X - e^{\frac{7i\pi}{4}}\right) \left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right) \left(X - e^{\frac{5i\pi}{4}}\right) \\ &= \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X + 1\right) \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)X + 1\right) \\ &= \left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right) \left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right) \in \mathbb{R}[X] \end{aligned}$$

2. $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$

$$\begin{aligned} (z^2 - z + 1)^2 + 1 = 0 &\iff (z^2 - z + 1)^2 = -1 \\ &\iff z^2 - z + 1 = i \text{ ou } z^2 - z + 1 = -i \\ &\iff z = \frac{1 \pm (1 + 2i)}{2} \text{ ou } z = \frac{1 \pm (1 - 2i)}{2} \end{aligned}$$

Dans \mathbb{C} ,

$$\begin{aligned} P &= (X - (1 + i))(X - (-i))(X - (1 - i))(X - i) \\ &= (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 1) \in \mathbb{R}[X] \end{aligned}$$

Exercice 5

$$\begin{aligned} z^{2n} - 2\cos(na)z^n + 1 = 0 &\iff z^n = e^{\pm ina} \\ &\iff z \in \left\{ e^{ia} \times e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \cup \left\{ e^{-ia} \times e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \llbracket -(n-1), 0 \rrbracket \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X^{2n} - 2 \cos(na) X^n + 1 &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\left(a + \frac{2k\pi}{n}\right)} \right) \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\left(-a + \frac{2k\pi}{n}\right)} \right) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2 \cos \left(a + \frac{2k\pi}{n} \right) X + 1 \right)
\end{aligned}$$

Exercice 7

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}_n[X] \\
P &\longmapsto P - P'
\end{aligned}$$

f est linéaire

$$\begin{aligned}
P \in \text{Ker}(f) &\iff P - P' = 0 \\
&\iff P = 0
\end{aligned}$$

Donc $f \in \text{GL}(\mathbb{K}_n[X])$ et $P_n = f^{-1}(X^n)$

$$\begin{aligned}
P_n &= \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k \\
P'_n &= \sum_{k=1}^n k \alpha_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \alpha_{k+1} X^k \\
P_n - P'_n &= \alpha_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - (k+1) \alpha_{k+1}) X^k \\
&\begin{cases} \alpha_n = 1 \\ \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \alpha_k = (k+1) \alpha_{k+1} \end{cases} \\
\alpha_n &= 1 = \frac{n!}{n!} \\
\alpha_{n-1} &= n \alpha_n = n = \frac{n!}{(n-1)!} \\
\alpha_{n-2} &= (n-1) \alpha_{n-1} = (n-1)n = \frac{n!}{(n-2)!}
\end{aligned}$$

Preuve par récurrence :

$$\alpha_{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Donc,

$$P_n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} X^k$$

Exercice 10

On pose

$$\begin{aligned} P &= (X - x)(X - y)(X - z) \\ &= X^3 - (x + y + z)X^2 + (xy + xz + yz)X - xyz \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{cases} \Delta = x + y + z \\ p = xyz \\ q = xy + xz + yz \end{cases}$$

On sait que $\Delta = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= (x + y + z)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + \underbrace{2xy + 2yz + 2xz}_{2q} \end{aligned}$$

donc,

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} = -q$$

$$0 = P(x) = x^3 - \Delta x^2 + qx - p$$

$$0 = P(y) = y^3 - \Delta y^2 + qy - p$$

$$0 = P(z) = z^3 - \Delta z^2 + qz - p$$

D'où,

$$x^3 + y^3 + z^3 = -q\Delta + 3p = 3p$$

donc

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} = p$$

On a aussi

$$0 = x^5 + qx^3 - px^2$$

$$0 = y^5 + qy^3 - py^2$$

$$0 = z^5 + qz^3 - pz^2$$

et donc

$$x^5 + y^5 + z^5 = -3qp - 2qp = -5qp$$

donc

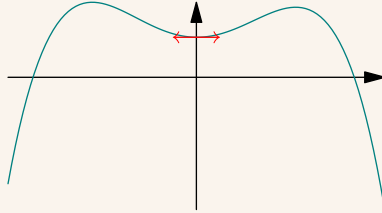
$$\frac{x^5 + y^5 + z^5}{5} = -qp = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \times \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}$$

Exercice 12

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{cases} P^{(k)}(0) = 0 \\ P^{(k-1)}(0) > 0 \\ P^{(k+1)}(0) > 0 \end{cases}$$



Exercice 15

On suppose $\deg(A) \geq \deg(B)$.

$$\deg(A - B) \leq \deg(A)$$

Soient a_1, \dots, a_p les racines distinctes de A (et donc de B) avec $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ leur multiplicité en tant que racine de A et β_1, \dots, β_p leur multiplicité en tant que racine de B .

Donc,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^p \alpha_i = \deg(A) \\ \sum_{i=1}^p \beta_i = \deg(B) \end{cases}$$

$\forall i, a_i$ est une racine de $A - B$ de multiplicité $\min(\alpha_i, \beta_i)$

$$A - B = (A - 1) - (B - 1)$$

Soient a'_1, \dots, a'_q les racines de $A - 1$ (et donc de $B - 1$) avec $\alpha'_1, \dots, \alpha'_q$ leur multiplicité en tant que racine de $A - 1$, et $\beta'_1, \dots, \beta'_q$ leur multiplicité en tant que racine de $B - 1$.

On remarque que $\{a_1, \dots, a_p\} \cap \{a'_1, \dots, a'_q\} = \emptyset$

$\forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, a'_j$ est racine de $A - B$ avec multiplicité $\min(\alpha'_j, \beta'_j)$.

$\forall i, a_i$ racine de A' avec multiplicité $\alpha_i - 1$. $\forall i, a'_i$ racine de A' avec multiplicité $\alpha'_i - 1$.

$$\sum_{i=1}^p (\alpha_i - 1) + \sum_{i=1}^q (\alpha'_i - 1) \leq \deg(A') = \deg(A) - 1$$

D'où,

$$\deg(A) - p + \deg(A)q \leq \deg(A) - 1$$

Donc

$$p + q \geq \deg(A) + 1$$

On a donc trouvé au moins $p + q$ racines différentes de $A - B$ avec $p + q > \deg(A - B)$. Donc $A - B = 0$

Exercice 17

Soient $x, y, z \in \mathbb{C}$. On pose

$$\begin{cases} \delta = x + y + z \\ q = xy + xz + yz \\ p = xyz \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} P &= (X - x)(X - y)(X - z) \\ &= X^3 - \delta X^2 + qX - p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta^2 &= (x + y + z)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2q \end{aligned}$$

donc $x^2 + y^2 + z^2 = \delta^2 - 2q$

De plus,

$$\begin{cases} 0 = P(x) &= x^3 - \delta x^2 + qx - p \\ 0 = P(y) &= y^3 - \delta y^2 + qy - p \\ 0 = P(z) &= z^3 - \delta z^2 + qz - p \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= \delta(x^2 + y^2 + z^2) - q(x + y + z) + 3p \\ &= \delta(\delta^2 - 2q) - q\delta + 3p \\ &= \delta^3 - 3q\delta + 3p \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 &= \delta(x^3 + y^3 + z^3) - q(x^2 + y^2 + z^2) + p(x + y + z) \\ &= \delta(\delta^3 - 3q\delta + 3p) - q(\delta^2 - 2q) + p\delta \end{aligned}$$

et

$$x^5 + y^5 + z^5 = \delta(x^4 + y^4 + z^4) - q(x^3 + y^3 + z^3) + p(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 0 \\ x^5 + y^5 + z^5 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \delta^2 - 2q = 0 \\ \delta(\delta^3 - 3q\delta + 4p) = 0 \\ -q\delta + 3p = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 0 = 0 \\ \delta = 0 \\ q = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \delta^2 = 2q \\ \delta \neq 0 \\ q \neq 0 \\ 3p = q\delta \\ \delta^3 - 3q\delta + 4p = 0 \end{cases} \\
&\iff \delta = q = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \delta^2 = 2q \\ 3p = q\delta \\ q\delta \left(2 - 3 + \frac{4}{3}\right) = 0 \end{cases} \\
&\iff \delta = q = 0 \\
&\iff x, y, z \text{ sont racines de } X^3 - p = 0 \text{ avec } p \in \mathbb{C} \text{ quelconque} \\
&\iff \begin{cases} y = xj \\ z = xj^2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = xj^2 \\ z = xj \end{cases} \quad \text{avec } x \in \mathbb{C} \text{ quelconque}
\end{aligned}$$

Vérification :

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 &= x^2(1 + j^2 + j^4) = x^2(1 + j + j^2) = 0 \\
x^4 + y^4 + z^4 &= x^4(1 + j^4 + j^8) = x^4(1 + j + j^2) = 0 \\
x^5 + y^5 + z^5 &= x^5(1 + j^5 + j^{10}) = x^5(1 + j + j^2) = 0
\end{aligned}$$

Exercice 1

$$\begin{cases} P = (X - a)(X - b)Q + R \\ \deg R < 2 \end{cases}$$

Donc, $R = \alpha X + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\begin{cases} P(a) = R(a) = \alpha a + \beta \\ P(b) = R(b) = \alpha b + \beta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(a) \\ P(b) \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a-b} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{a-b} \begin{pmatrix} P(a) - P(b) \\ -bP(a) + aP(b) \end{pmatrix}$$

Exercice 4

$$A = \prod_{i=1}^r P_i \quad P_i \text{ irréductible}$$
$$B = \prod_{j=1}^s Q_j \quad Q_j \text{ irréductible}$$

donc

$$A^2 = \prod_{i=1}^r P_i^2$$
$$B^2 = \prod_{j=1}^s Q_j^2$$

$$A^2 \mid B^2 \iff \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \exists j \in \llbracket 1, s \rrbracket, P_i = Q_j$$
$$\iff A \mid B$$

Exercice 19 (supplémentaire)

Trouver tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$XP(X+1) = (X+4)P(X)$$

ANALYSE Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$XP(X+1) = (X+4)P(X)$$

En remplaçant X par 0, on obtient

$$4P(0) = 0$$

donc 0 est racine de P .

En remplaçant X par -4, on obtient

$$-4P(-3) = 0$$

donc -3 est une racine de P .

En remplaçant X par -3, on obtient

$$-3P(-2) = -P(-3) = 0$$

donc -2 est racine de P .

En remplaçant X par -2, on obtient

$$-2P(-1) = -2P(-2) = 0$$

donc -1 est racine de P .

D'où,

$$P = X(X+1)(X+2)(X+3)Q(X)$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.
Donc,

$$\begin{aligned} X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)Q(X+1) \\ = (X+4)X(X+1)(X+2)(X+3)Q(X). \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{R}[X]$ est intègre,

$$Q(X) = Q(X+1).$$

Si Q n'est pas constant, alors Q a au moins une racine $a \in \mathbb{C}$ et alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, Q(a+k) = Q(a) = 0.$$

Donc, Q a une infinité de racines donc $Q = 0$.

Donc Q est constant.

SYNTHÈSE Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et

$$P = \lambda X(X+1)(X+2)(X+3).$$

On vérifie aisément que

$$XP(X+1) = (X+4)P(X).$$

Exercice 13

$P^2 + \alpha^2$ n'a pas de racines réelles.

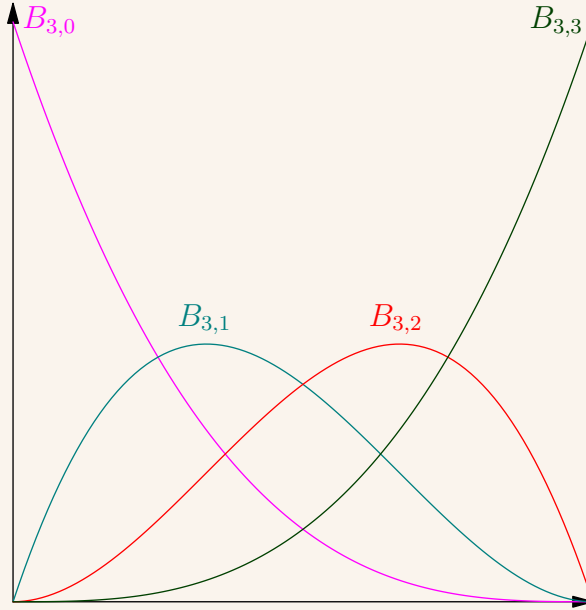
Soit x une racine de $P^2 + \alpha^2$ de multiplicité au moins 2. Donc x est une racine de $2P'P$.

$$x \notin \mathbb{R} \text{ donc } \begin{cases} P(x) \neq 0 \\ P'(x) \neq 0 \end{cases} \quad \text{car } P \text{ et } P' \text{ sont scindés sur } \mathbb{R}. \quad \text{!}$$

Exercice 18

1.

$$\begin{aligned} \forall x, B_{3,0}(x) &= (1-x)^3 \\ B_{3,1}(x) &= 3x(1-x)^2 \\ B_{3,2}(x) &= 3x^2(1-x) \\ B_{3,3}(x) &= x^3 \end{aligned}$$



2. (a)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n b_{n,k} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= (X + 1 - X)^n \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\forall x \in [0, 1], B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \geq 0$$

$$\sum_{k=0}^n B_{n,k}(x) = 1$$

donc

$$\forall x \in [0, 1], B_{n,k}(x) \leq 1$$

(b)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k B_{n,k} &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} X^{j+1} (1-X)^{n-1-j} \\ &= nX \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} X^j (1-X)^{n-1-j} \\ &= nX (X + 1 - X)^{n-1} \\ &= nX\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} &= \sum_{k=2}^n \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} X^k (1-X)^{n-k} \\
&= n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} X^k (1-X)^{n-k} \\
&= n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} X^{j+2} (1-X)^{n-2-j} \\
&= n(n-1) X^2 (X + (1-X))^{n-2} \\
&= n(n-1) X^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \sum_{k=1}^n k^2 B_{n,k} &= \sum_{k=1}^n k((k-1)+1) B_{n,k} \\
&= \sum_{k=1}^n k(k-1) B_{n,k} + \sum_{k=1}^n k B_{n,k} \\
&= n(n-1) X^2 + nX \\
&= n^2 X^2 + n(X - X^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B'_{n,0} &= -n(1-X)^{n-1} = -nB_{n-1,0} \\
B'_{n,n} &= nX^{n-1} = nB_{n-1,n-1}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
B'_{n-k} &= \binom{n}{k} \left(kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k)X^k(1-X)^{n-k-1} \right) \\
&= n \binom{n-1}{k-1} X^{k-1}(1-X)^{n-k} - n \binom{n-1}{n-k-1} X^k(1-X)^{n-k-1} \\
&= nB_{n-1,k-1} - nB_{n-1,k}
\end{aligned}$$

4. On montre par récurrence sur n que $(B_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ est libre.
Soient $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$. On suppose que

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k B_{n,k} = 0$$

Donc

$$-n\lambda_0 B_{n-1,0} + n\lambda_n B_{n-1,n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} n\lambda_k (B_{n-1,k-1} - B_{n-1,k}) = 0$$

Donc

$$-\lambda_0 B_{n-1,0} + \lambda_n B_{n-1,n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_{j+1} B_{n-1,j+1} - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k B_{n-1,k} = 0$$

Donc

$$(\lambda_1 - \lambda_0) B_{n-1,0} = (\lambda_n - \lambda_{n-1}) B_{n-1,n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) B_{n-1,k} = 0$$

D'après l'hypothèse de récurrence,

$$\lambda_1 - \lambda_0 = 0 \lambda_n - \lambda_{n-1} = 0 \forall k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket, \lambda_{k+1} - \lambda_k = 0$$

Donc

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_k = \lambda_0$$

D'où

$$\sum_{k=0}^n \lambda_0 B_{n,k} = 0$$

donc

$$\lambda_0 \times 1 = 0$$

et donc

$$\lambda_0 = 0$$

Donc

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_k = 0$$

5. (a) Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} B(\lambda P + \mu Q) &= \sum_{k=0}^n (\lambda P + \mu Q) \left(\frac{k}{n} \right) B_{n,k} \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\lambda P \left(\frac{k}{n} \right) + \mu Q \left(\frac{k}{n} \right) \right) B_{n,k} \\ &= \lambda \sum_{k=0}^n P \left(\frac{k}{n} \right) B_{n,k} + \mu \sum_{k=0}^n Q \left(\frac{k}{n} \right) B_{n,k} \\ &= \lambda B(P) + \mu B(Q) \end{aligned}$$

$$\forall k, \deg(B_{n,k}) \leq n$$

donc

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \deg(B(P)) \leq n$$

(b)

$$\begin{aligned} \text{Ker}(B) &= \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^n P \left(\frac{k}{n} \right) B_{n,k} = 0 \right\} \\ &= \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P \left(\frac{k}{n} \right) = 0 \right\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

donc B injective et donc B est bijective.