

## CHAPITRE 16

# Dérivation

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 11 mai 2022

# TABLE DES MATIÈRES

I	Définition et premières propriétés	2
II	Théorème de Rolle et accroissements finis	6
III	Dérivées $n$ -ièmes	11
IV	Fonctions à valeurs complexes	16

## Première partie

### Définition et premières propriétés

Dans ce paragraphe,  $f$  désigne une fonction définie sur un intervalle ouvert non vide  $I$  à valeurs réelles.

**Définition:** Soit  $a \in I$ . On dit que  $f$  est dérivable en  $a$  si  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  a une limite qui est finie quand  $x \rightarrow a$ .  
 Dans ce cas, cette limite est notée  $f'(a)$  et est appelée nombre dérivée de  $f$  en  $a$ .  
 On dit que  $f$  est dérivable sur  $I$  si  $f$  est dérivable en tout  $a \in I$ .  
 L'application  $\begin{matrix} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ a \longmapsto f'(a) \end{matrix}$  est la dérivée de  $f$  et est notée  $f'$ .

**Proposition:**

$f$  est dérivable en  $a \iff f$  a un développement limité d'ordre 1 au voisinage de  $a$

*Preuve:* “  $\implies$  ”  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$   
 donc  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + \underset{x \rightarrow a}{\mathcal{O}}(1)$   
 donc  $f(x) - f(a) = (x - a)f'(a) + \underset{x \rightarrow a}{\mathcal{O}}(x - a)$   
 donc  $f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \underset{x \rightarrow a}{\mathcal{O}}(x - a)$   
 “  $\impliedby$  ”  $f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \underset{x \rightarrow a}{\mathcal{O}}(x - a)$   
 Alors, avec  $x = a$ ,  $a_0 = f(a)$  et donc  

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{a_1(x - a) + \mathcal{O}(x - a)}{x - a} = a_1 + \mathcal{O}(1) \xrightarrow{x \rightarrow a} a_1 \in \mathbb{R}$$

□

**Proposition:** Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors  $f$  est continue en  $a$ .

*Preuve:*

$\forall x, f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \underset{x \rightarrow a}{\mathcal{O}}(x - a)$   
 donc  

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ \neq}} f(x) = f(a) + f'(a) \times 0 + 0 = f(a)$$

□

**Proposition:** Soient  $f$  et  $g$  dérivables en  $a$

1.  $f + g$  est dérivable en  $a$  et  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2.  $f \times g$  est dérivable en  $a$  et  $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

3. Si  $g(a) \neq 0$ , alors  $\frac{f}{g}$  est dérivable en  $a$  et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

*Preuve:*

$$\begin{cases} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \mathfrak{o}(x-a) \\ g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \mathfrak{o}(x-a) \end{cases}$$

$$f(x) + g(x) = f(a) + g(a) + (x-a) \underbrace{(f'(a) + g'(a))}_{(f+g)'(a)} + \mathfrak{o}(x-a)$$

2.

$$f(x) \times g(x) = f(a)g(a) + (x-a) \underbrace{(f(a)g'(a) + g(a)f'(a))}_{(fg)'(a)} + \mathfrak{o}(x-a)$$

3. On suppose  $g(a) \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(x)} &= \frac{1}{g(a) + (x-a)g'(a) + \mathfrak{o}(x-a)} \\ &= \frac{1}{g(a)} \times \frac{1}{1 + (x-a)\frac{g'(a)}{g(a)} + \mathfrak{o}(x-a)} \\ &= \frac{1}{g(a)} \times \left(1 - (x-a)\frac{g'(a)}{g(a)} + \mathfrak{o}(x-a)\right) \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{1}{g(a)} \left( f(a) + (x-a) \left( -\frac{f(a)g'(a)}{g(a)} + f'(a) \right) \right) + \mathfrak{o}(x-a) \\ &= \frac{f(a)}{g(a)} + (x-a) \frac{-f(a)g'(a) + f'(a)g(a)}{(g(a))^2} + \mathfrak{o}(x-a) \end{aligned}$$

□

**Proposition:** Soit  $f$  dérivable en  $a$  et  $g$  dérivable en  $f(a)$ . Alors,  $f \circ g$  est dérivable en  $a$  et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

*Preuve:*

$$\begin{cases} \forall x, f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \underset{x \rightarrow a}{\mathfrak{o}}(x-a) \\ \forall y, g(y) = g(f(a)) + (y-f(a))g'(f(a)) + \underset{y \rightarrow f(a)}{\mathfrak{o}}(y-f(a)) \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + (f(x) - f(a))g'(f(a)) + \underset{x \rightarrow a}{\mathcal{O}}(f(x) - f(a)) \text{ car } f \text{ est continue en } a \\ &= g(f(a)) + (x - a)f'(a)g'(f(a)) + \underset{x \rightarrow a}{\mathcal{O}}\left((x - a)f'(a) + \underset{x \rightarrow a}{\mathcal{O}}(x - a)\right) \\ &= g(f(a)) + (x - a)f'(a)g'(f(a)) + \underset{x \rightarrow a}{\mathcal{O}}(x - a) \end{aligned}$$

□

**Proposition:** On suppose que  $f$  est bijective dérivable en  $a$  et  $f'(a) \neq 0$ . Si  $f^{-1}$  est continue, alors  $f^{-1}$  est dérivable en  $f(a)$  et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

*Preuve:*

$\forall y \neq f(a)$  on pose  $x = f^{-1}(y)$ .  
 $y \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$  et  $x \xrightarrow{y \rightarrow f(a)} a$

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{1}{f'(a)}$$

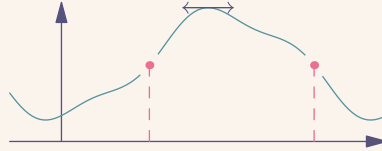
□

## Deuxième partie

### Théorème de Rolle et accroissements finis

**Théorème** (Théorème de Rolle): Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . On suppose que  $f(a) = f(b)$ . Alors,

$$\exists c \in ]a, b[, f'(c) = 0$$



*Preuve:*

$f$  est continue sur le segment  $[a, b]$ . On pose

$$\begin{cases} M = \max_{[a, b]}(f) \\ m = \min_{[a, b]}(f) \end{cases}$$

CAS 1

$$\exists c \in ]a, b[, M = f(c)$$

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \text{ car } \forall x < c, \begin{cases} f(x) - f(c) \leq 0 \\ x - c < 0 \end{cases} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \text{ car } \forall x > c, \begin{cases} f(x) - f(c) \leq 0 \\ x - c > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc,  $f'(c) = 0$

CAS 2

$$\exists c \in ]a, b[, m = f(c)$$

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \text{ car } \forall x < c, \begin{cases} f(x) - f(c) \geq 0 \\ x - c < 0 \end{cases} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \end{aligned}$$

Donc  $f'(c) = 0$

CAS 3

$$\forall c \in ]a, b[, f(c) \notin \{m, M\}$$

Alors

$$\begin{cases} M \in \{f(a), f(b)\} \\ m \in \{f(a), f(b)\} \end{cases}$$

Or,  $f(a) = f(b)$  donc  $M = m$  donc  $f$  est constante donc

$$\forall x \in [a, b], f'(x) = 0$$

□



**Définition:** On dit que  $f$  présente un maximum local en  $a$  s'il existe  $\eta > 0$  tel que

$$\forall x \in ]a - \eta, a + \eta[, f(x) \leq f(a)$$

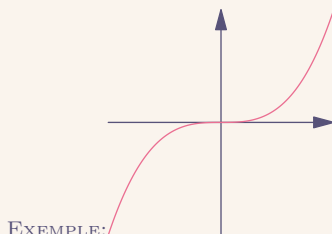
et un minimum local en  $a$  s'il existe  $\eta > 0$  tel que

$$\forall x \in ]a - \eta, a + \eta[, f(x) \geq f(a)$$

Un extremum local est un minimum local ou un maximum local.

**Proposition:** Soit  $a \in I$  tel que  $f(a)$  est un extremum local de  $f$  où  $f$  est dérivable en  $a$ . Alors,  $f'(a) = 0$   $\square$

**Définition:** Soit  $f$  dérivable et  $a \in I$ . On dit que  $a$  est un point critique de  $f$  si  $f'(a) = 0$ . On dit que  $f(a)$  est une valeur critique.

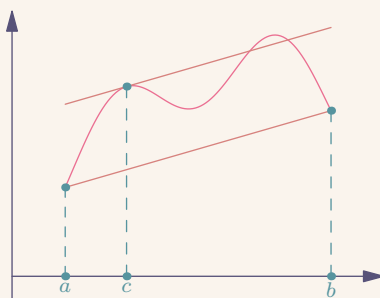


$$x \mapsto x^3$$

$f'(0) = 0$  mais 0 n'est pas un extremum local

**Théorème** (Théorème des accroissements finis): Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . Alors, il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



*Preuve:*

On pose  $\tau = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$g : x \mapsto f(x) - \tau x$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ .

$g(a) - g(b) = f(a) - f(b) - \tau(a - b) = 0$   
D'après le théorème de Rolle, il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $g'(c) = 0$ .

$$\forall x, g'(x) = f'(x) - \tau$$

Donc,  $f'(c) = \tau$

□

**Proposition:** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable avec  $I$  un intervalle non vide.

1.  $f$  est croissante sur  $I \iff \forall x \in I, f'(x) \geq 0$
2.  $f$  est décroissante sur  $I \iff \forall x \in I, f'(x) \leq 0$
3.  $\forall x \in I, f'(x) > 0 \implies f$  strictement croissante
4.  $\forall x \in I, f'(x) < 0 \implies f$  strictement décroissante
5.  $f$  constante  $\iff \forall x \in I, f'(x) = 0$

*Preuve:* 1. “ $\implies$ ” On suppose  $f$  croissante.  
Soit  $x \in I$ .

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Or,  $\forall y, f(y) - f(x)$  et  $y - x$  sont de même signe donc  $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$ .

Et donc  $f'(x) \geq 0$ .

“ $\impliedby$ ” On suppose que

$$\forall x \in I, f'(x) \geq 0$$

Soit  $(a, b) \in I^2$ . On suppose que  $a \leq b$ .

$f$  est continue sur  $[a, b]$

$f$  est dérivable sur  $]a, b[$

donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f(a) - f(b) = \underbrace{f'(c)}_{\geq 0} \underbrace{(a - b)}_{\leq 0} \leq 0$$

donc  $f(a) \leq f(b)$

Donc  $f$  est croissante.

On procède de la même manière pour les autres propositions

□

**Théorème** (Théorème de la limite de la dérivée): Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue (sur  $I$ ),  $a \in I$ . On suppose  $f$  dérivable sur  $I \setminus \{a\}$  et que  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x)$  existe.

Alors,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \neq a]{x \rightarrow a} \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(a)$$

*Preuve:*

On pose  $\ell = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Soit  $x \in I \setminus \{a\}$ .

$f$  est continue sur  $I$  donc sur  $[a, x]$  si  $x \geq a$  et sur  $[x, a]$  si  $x < a$

$f$  est dérivable sur  $I \setminus \{a\}$  donc sur  $]a, x[$  si  $x > a$  et sur  $]x, a[$  si  $x < a$

D'après le théorème des accroissements finis, il existe  $c_x \in ]a, x[ \cup ]x, a[$  tel que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$$

- $\forall x < a$ , on a  $x < c_x < a$   
Par encadrement,  $c_x \xrightarrow[x \rightarrow a]{<} a$
- $\forall x > a$ , on a  $x > c_x > a$   
Par encadrement,  $c_x \xrightarrow[x \rightarrow a]{>} a$

Donc,

$$\lim_{x \xrightarrow[\neq]{} a} c_x = a$$

donc

$$f'(c_x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{\neq} \ell$$

(compositions des limites)

□

**Proposition:** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. On suppose qu'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall x \in I, |f'(x)| \leq M$$

Alors  $f$  est  $M$ -lipschitzienne sur  $I$ .

*Preuve:*

Soient  $(a, b) \in I^2$ .

D'après le théorème des accroissements finis, il existe  $c \in I$  tel que

$$f(a) - f(b) = f'(c)(a - b)$$

donc

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &= |f'(c)| |a - b| \\ &\leq M |a - b| \end{aligned}$$

□

Troisième partie

Dérivées  $n$ -ièmes

**Définition:** On dit que  $f$  est une fois dérivable si  $f$  est dérivable. Dans ce cas, on note  $f^{(1)}$  la fonction  $f'$ .  
 Pour  $n \in \mathbb{N}_*$ , on dit que  $f$  est dérivable  $n$  fois si  $f$  est dérivable  $n - 1$  fois et  $f^{(n-1)}$  est dérivable une fois. Dans ce cas,  $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$ .

REMARQUE (Convention):

$$f^{(0)} = f$$

**Définition:**  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  si  $f$  est dérivable  $n$  fois et  $f^{(n)}$  est continue.

**Proposition:** Soit  $f$  dérivable  $n$  fois et  $k \leq n$ .  
 Alors  $f$  est dérivable  $k$  fois et  $f^{(n)} = \left(f^{(k)}\right)^{(n-k)}$

□

**Proposition:** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables  $n$  fois en  $a$ .  
 Alors,  $f + g$  est dérivable  $n$  fois en  $a$  et

$$(f + g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)$$

Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^n$ , alors,  $f + g$  est de classe  $\mathcal{C}^n$

*Preuve* (Récurrence immédiate sur  $n$ ):

□

**Proposition** (Leibniz): Soient  $f$  et  $g$  dérivables  $n$  fois en  $a$ . Alors,  $f \times g$  est dérivable  $n$  fois en  $a$ . et

$$(*) : \quad (f \times g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$$

Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^n$  alors  $f \times g$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ .

*Preuve* (par récurrence sur  $n$ ): — Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions

$$(f \times g)^{(0)}(a) = (f \times g)(a) = f(a)g(a)$$

et

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} f^{(k)}(a) g^{(0-k)}(a) = f^{(0)}(a) g^{(0)}(a) = f(a)g(a)$$

— Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose  $(*)$  vraie quelles que soient les fonctions  $f$  et  $g$  dérivables  $n$  fois en  $a$ .

Soient  $f$  et  $g$  dérivables  $n - 1$  fois en  $a$ . En particulier, elles sont dérivables  $n$  fois en  $a$ . Donc

$$(f \times g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$$

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \begin{cases} f^{(k)} \text{ est dérivable en } a \\ g^{(n-k)} \text{ est dérivable en } a \end{cases}$$

Donc,  $(f \times g)^{(n)}$  est dérivable en  $a$  donc  $f \times g$  est dérivable  $n + 1$  fois en  $a$ .

$$\begin{aligned} (f \times g)^{(n+1)}(a) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( f^{(k+1)}(a)g^{(n-k)}(a) + f^{(k)}(a)g^{(n-k+1)}(a) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} f^{(k)}(a) \times g^{(n-k+1)}(a) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a)g^{(n-k+1)}(a) \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)}(a)g^{(n+1-k)}(a) + f^{(n+1)}(a)g(a) + f(a)g^{(n+1)}(a) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(a)g^{(n+1-k)}(a) \end{aligned}$$

□

**Proposition:** Soient  $f$  et  $g$  dérivables  $n$  fois (resp. de classe  $\mathcal{C}^n$ ). On suppose  $g(a) \neq 0$ . Alors,  $\frac{f}{g}$  est dérivable  $n$  fois (resp.  $\mathcal{C}^n$ ) en  $a$ .

*Preuve* (par récurrence sur  $n$ ):

Le résultat est vrai pour  $n = 0$  et  $n = 1$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  dérivables  $n$  fois en  $a$  avec  $g(a) \neq 0$ ,  $\frac{f}{g}$  est aussi dérivable  $n$  fois en  $a$ .

Soient  $f$  et  $g$  dérivables  $n + 1$  fois en  $a$  telles que  $g(a) \neq 0$ . Alors,  $\frac{f}{g}$  dérivable en  $a$ . et

$$\left( \frac{f}{g} \right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

- $f'$  est dérivable  $n$  fois en  $a$
- $g$  est dérivable  $n$  fois en  $a$
- $f$  est dérivable  $n$  fois en  $a$
- $g'$  est dérivable  $n$  fois en  $a$

Donc,  $f' \times g - f \times g'$  et  $g^2$  sont dérivables  $n$  fois en  $a$  et  $g(a)^2 \neq 0$

D'après l'hypothèse de récurrence,  $\frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$  est dérivable  $n$  fois en  $a$  donc  $\frac{f}{g}$  dérivable  $n + 1$  fois en  $a$  □

**Proposition:** Soit  $f$  dérivable  $n$  fois en  $a$  et  $g$  dérivable  $n$  fois en  $f(a)$  (resp.  $f$  et  $g$  de classe  $\mathcal{C}^n$ ). Alors,  $g \circ f$  est dérivable  $n$  fois en  $a$  (resp. de classe  $\mathcal{C}^n$ ).

*Preuve* (similaire à la précédente):

□

**Définition:** On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , i.e.  $f$  est dérivable une infinité de fois.

**Proposition** (formule de Taylor avec reste intégral): Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  et  $a \in I$ . Alors

$$(*) \quad \forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

*Preuve* (par récurrence sur  $n$ ): — Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $a \in I$ . Soit  $x \in I$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^0 \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x f^{(1)}(t) \frac{(x-t)^0}{0!} dt &= f(a) + \int_a^x f'(t) dt \\ &= f(a) + f(x) - f(a) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

— Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $(*)$  est vraie pour toute fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $I \ni a$ . Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^{n+2}$ . Alors,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  donc

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

Soit  $x \in I$ . On pose  $\begin{cases} u : t \mapsto -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \\ v = f^{(n+1)} \end{cases}$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  donc

$$\int_a^x u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^x - \int_a^x u(t)v'(t) dt$$

donc

$$\int_a^x f^{(n+1)}(t) dt = \left[ -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^x + \int_a^x f^{(n+2)}(t) \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt$$

D'où,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x f^{(n+2)}(t) \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt$$

□

**Proposition** (Inégalité de Taylor-Lagrange): Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  et  $M \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall x \in I, |f^{(n+1)}(x)| \leq M$$

Alors, pour tout  $a \in I$ ,

$$\forall x \in I, \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

*Preuve:*

D'après la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \left| f(x) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} \right| &= \left| \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt \right| \\ &\leq \left| \int_a^x |f^{(n+1)}(t)| \frac{|x-t|^n}{n!} dt \right| \\ &\leq \left| \int_a^x M \frac{|x-t|^n}{n!} dt \right| \end{aligned}$$

On suppose  $x \geq a$ .

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| &\leq M \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt = M \left[ -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_a^x \\ &\leq M \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

On suppose  $x \leq a$ .

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| &\leq M \int_x^a \frac{(t-x)^n}{n!} dt \\ &\leq M \left[ \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_x^a \\ &\leq M \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} = M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

□

EXEMPLE:

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

On pose

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto e^x \end{aligned}$$

. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $a = 0$ .

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $x \in \mathbb{R}^+$  et  $I = [0, x]$

$$\forall t \in I, |f^{(n+1)}(t)| = |e^t| = e^t \leq e^x$$

$$\forall t \in I, \left| e^t - \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \right| \leq e^x \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc

$$\forall t \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} = e^t$$

donc

$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!}$$

EXERCICE:

Montrer que  $\ln 2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$



## Quatrième partie

# Fonctions à valeurs complexes

**Définition:** Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ , ( $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ ) et  $a \in I$ .

$f$  est dérivable en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{C}$

**Proposition:**

$f$  est dérivable en  $a \iff \Re(f)$  et  $\Im(f)$  sont dérivables en  $a$

Dans ce cas,  $f'(a) = \Re(f)'(a) + i\Im(f)'(a)$

□

**Proposition:** La somme, le produit, de fonctions dérivables sont dérivables; le quotient également si le dénominateur ne s'annule pas.

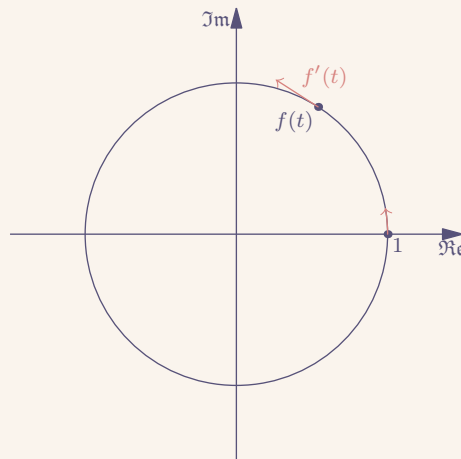
□

**Proposition:** idem avec les dérivées  $n$ -ièmes

□

REMARQUE (Attention  $\trianglelefteq$ ):

Le théorème de Rolle n'est plus vraie.



$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{it} \end{aligned}$$

$$f(0) = f(2\pi) = 1$$

$f$  est continue sur  $[0, 2\pi]$  et dérivable sur  $]0, 2\pi[$

$$\forall t, f'(t) = ie^{it} \neq 0$$

**Proposition:** La formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange sont aussi vrais dans  $\mathbb{C}$ .

□