Chapitre 8

Ensemble relations et lois de compo

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 18 mai 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Théorie naïve des ensembles

Définition: Un ensemble est une collection finie ou infinie d'objets de même nature ou non. L'ordre de ces objets n'a pas d'importance.

Exemple: 1. $\{1, x \mapsto x^2, \{1\}\}$ est un ensemble : ses éléments dont l'entier 1, la fonction $x \mapsto x^2$ et un ensemble contenant uniquement 1 (un singleton).
2. $\mathbb{N}$ est un ensemble infini

Remarque (Notation):
Soit E un ensemble et x un objet de E.
On écrit $x \in E$ ou bien $x \ni E$.

Remarque (⚠ Paradoxe):
On note Ω l'ensemble de tous les ensembles. Alors, $\Omega \in \Omega$.
Ce n'est pas le cas de tous les ensembles :

$$\mathbb{N} \notin \mathbb{N} \text{ car } \mathbb{N} \text{ n'est pas un entier}$$

On distingue donc 2 types d'ensembles :
- ceux qui vérifient $E \notin E$, on dit qu'ils sont ordinaires
- ceux qui vérifient $E \in E$, on dit qu'ils sont extra-ordinaires

On note O l'ensemble de tous les ensembles ordinaires.
- Supposons O ordinaire. Alors, $O \notin O$
  Or, O est ordinaire et donc $O \in O$ ↯
- Supposons O extra-ordinaire.
  Alors $O \in O$ et donc O ordinaire ↯

C'est un paradoxe

Pour éviter ce type de paradoxe, on a donné une définition axiomatique qui explique quelles sont les opérations permettant de combiner des ensembles pour en faire un autre.

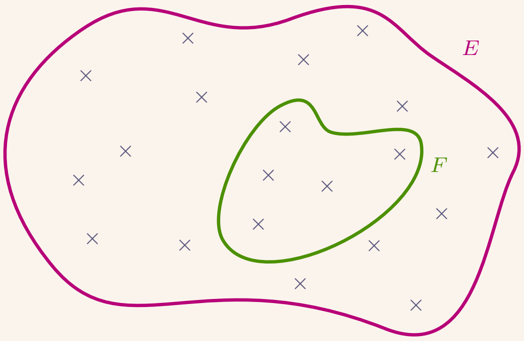
Définition: Soit E un ensemble et F un autre ensemble. On dit que E et F sont égaux (noté $E = F$) si E et F contiennent les mêmes objets.

Exemple: 1. $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{3, 2, 1, 2\}$
On a bien $E = F$.
2. $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$ car $\begin{cases} -1 \in \mathbb{Z} \\ -1 \notin \mathbb{N} \end{cases}$
3. $E = \{0, \{0\}\} \neq \{0\} = F$
car $\begin{cases} \{0\} \in E \\ \{0\} \notin F \end{cases}$
mais, $F \in E$

Définition: L'ensemble vide, noté $\varnothing$ est le seul ensemble à n'avoir aucun élément.

Définition: Soient E et F deux ensembles. On dit que F est inclus dans E, noté $F \subset E$ ou $E \supset F$ si tous les éléments de F sont aussi des éléments de E.

$$\forall x \in F, x \in E$$



Proposition: Pour tout ensemble E, $\varnothing \subset E$

Preuve (par l'absurde)*:*
Si $\varnothing \not\subset E$ alors $\exists x \in \varnothing, x \notin E$: une contradiction $\lightning$

□

EXEMPLE: 1. $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{1, 3\}$
On a $F \subset E$ mais pas $E \subset F$ car $\begin{cases} 2 \in E \\ 2 \notin F \end{cases}$

2. $F = \{0\}$ et $E = \{0, \{0\}\}$
   - $F \in E$ car $\{0\} \in E$
   - $F \subset E$ car $0 \in E$
3. $E = \{\{0\}\}\,; F = \{0\}$
   - $F \not\subset E$ car $0 \notin E$
   - $F \in E$
4. $E = \{\{\{0\}\}\}; F = \{0\}$
   - $F \notin E$
   - $F \not\subset E$
   - $\varnothing \subset F$
   - $\varnothing \subset E$

Définition: Soit E un ensemble. On peut former l'ensemble de toutes les parties de E (une partie de E est un ensemble F avec $F \subset E$). On le note $\mathscr{P}(E)$

$$A \in \mathscr{P}(E) \iff A \subset E$$

EXEMPLE: 1. $E = \{42\}$
Les sous-ensembles de E sont $\varnothing$ et $\{42\} = E$ donc

$$\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{42\}\}$$

2. $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$
3. $E = \{0, 1\}$ donc $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

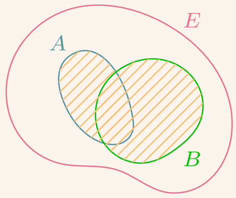
4. $E = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ donc $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$
5. $E = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(\mathscr{P}(E)) &= \mathscr{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, E)\\ &= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}, \{E\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}, \{\varnothing, E\}, \{\{\varnothing\},\\ &\quad \{\{\varnothing\}\}\}, \{\{\varnothing\}, E\}, \{\{\{\varnothing\}\}, E\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, E\},\\ &\quad \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}, E\}, \{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, E\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, E\}\}\end{aligned}$$

Définition: Soit E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$

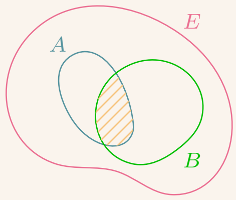
1. La <u>réunion</u> de A et B est

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \ \text{ ou } \ x \in B\}$$



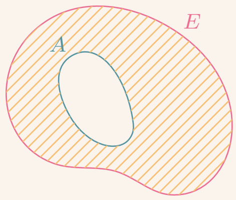
2. L'<u>intersection</u> de A et B est

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \ \text{ et } \ x \in B\}$$



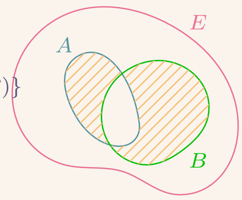
3. Le <u>complémentaire</u> de A dans E est

$$E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\} = C_E A$$



4. La <u>différence symétrique</u> de A et B est

$$\begin{aligned}A \Delta B &= \{x \in E \mid (x \in A \ \text{ et } \ x \notin B) \ \text{ ou } \ (x \notin A \ \text{ et } \ x \in B)\}\\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B)\end{aligned}$$



Proposition: Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$

1. $A \cap A = A$
2. $B \cap A = A \cap B$
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4. $A \cap \varnothing = \varnothing$
5. $A \cap E = A$
6. $A \cup A = A$
7. $B \cup A = A \cup B$
8. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
9. $A \cup \varnothing = A$
10. $A \cup E = E$
11. $(E \setminus A) \setminus A = E \setminus A$
12. $E \setminus (E \setminus A) = A$
13. $E \setminus \varnothing = E$
14. $E \setminus E = \varnothing$
15. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
16. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
17. $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$
18. $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$

Preuve: 16. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

— Soit $x \in A \cap (B \cup C)$ donc $x \in A$ et $x \in B \cup C$

<u>Cas 1</u> $x \in B$, alors $x \in A \cap B$ et donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
<u>Cas 2</u> $x \in C$, alors $x \in A \cap C$ et donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
On a prouvé

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

— Soit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
<u>Cas 1</u> $x \in A \cap B$ donc $x \in A$ et $x \in B$ donc $x \in B \cup C$ et donc $x \in A \cap (B \cup C)$
<u>Cas 2</u> $x \in A \cap C$ donc $x \in A$ et $x \in C$ donc $x \in B \cup C$ et donc $x \in A \cap (B \cup C)$
On a prouvé

$$A \cap (B \cup C) \supset (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

17. $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$

— Montrons que $x \in E \setminus (A \cup B) \implies x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$
Soit $x \in E \setminus (A \cup B)$ donc $x \notin A \cup B$
  — Si $x \in A$, alors $x \in A \cup B$ ↯
  donc $x \notin A$ i.e. $x \in E \setminus A$
  — Si $x \in B$ alors, $x \in A \cup B$ ↯
  Donc $x \notin B$ i.e. $x \in E \setminus B$
On en déduit que $x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$

— $x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$. Montrons que $x \in E \setminus (A \cup B)$
On suppose que $x \notin E \setminus (A \cup B)$ donc $x \in A \cup B$
  — Si $x \in A$, on a une contradiction car $x \in E \setminus A$
  — Si $x \in B$, on a une contradiction car $x \in E \setminus B$
donc $x \in E \setminus (A \cup B)$

□

Deuxième partie

Applications

Définition: Une application f est la donnée de
- un ensemble E appelé ensemble de départ
- un ensemble F appelé ensemble d'arrivée
- une fonction qui associe à tout élément x de E un unique élément de F noté $f(x)$

L'application est notée

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Exemple: 1. Soit $\mathscr{P}$ le plan (affine) et $A \in \mathscr{P}$. Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des droites.

$$\begin{aligned} f : \mathscr{P} \setminus \{A\} &\longrightarrow \mathscr{D} \\ B &\longmapsto (AB) \end{aligned}$$

2. $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$
$F = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

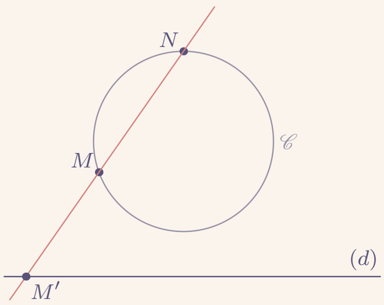
3. $E = \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ f &\longmapsto f'\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

4. $E = [0,1]$ et $F = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$

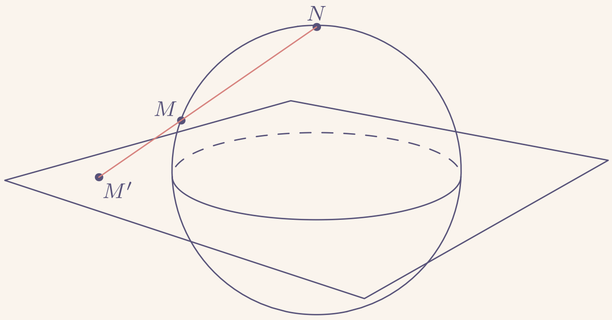
$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto \int_a^x t^2 \ln(t)\, dt \end{aligned}$$

5.



$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{C} \setminus \{N\} &\longrightarrow (d) \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

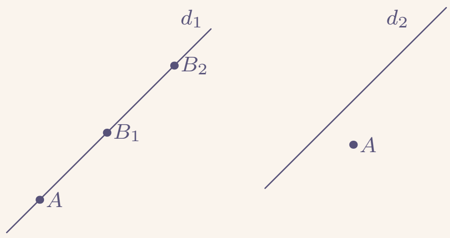
6.



Définition: Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est
- injective si tout élément de F a au plus un antécédent par f
- bijective si tout élément de F a un unique antécédent par f
- surjective si tout élément de F a au moins un antécédent par f

Exemple (suite des exemples précédents):

1. L'application n'est ni injective ni surjective



B_1 et B_2 sont deux antécédants de d_1
d_2 n'a pas d'antécédant par f

2. L'application n'est pas injective :
   - $f : x \mapsto x$ est continue
   - $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ et $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + 42$ sont deux antécédants de f.

   Mais, l'application est surjective d'après le théorème fondamental de l'analyse
3. L'application n'est pas injective ($x \mapsto 0$ et $x \mapsto 42$ sont deux antécédants de 0) mais elle est surjective ($\forall x \in \mathbb{R}, x \mapsto ax$ est un antécédant de a).
4. L'application est injective mais pas surjective (les images sont des primitives de $x \mapsto x^2 \ln(x)$)
5. et 6. sont bijectives

Définition: Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. L'application notée $g \circ f$ est définie par

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

On dit que c'est la composée de f et g.

Proposition: Soient $f : E \to F, g : F \to G, h : G \to G$. Alors, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Preuve:
Par définition, $g \circ f : E \to F$ donc $h \circ (g \circ f) : E \to H$

et $h \circ g : F \to H$ donc $(h \circ g) \circ f : E \to H$ Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} h \circ (g \circ f)(x) &= h(g \circ f(x)) \\ &= h(g(f(x))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (h \circ g) \circ f(x) &= h \circ g(f(x)) \\ &= h(g(f(x))) \end{aligned}$$

Donc, $h \circ (g \circ f)(x) = (h \circ g) \circ f(x)$ □

Remarque (⚠ Attention):
En général, $g \circ f \neq f \circ g$

Par exemple, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$

Alors, $f \circ g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ et $g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$

donc $f \circ g \neq g \circ f$

Proposition: Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$

1. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective
2. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective
3. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective
4. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective

Preuve:

1. On suppose $g \circ f$ injective. On veut montrer que f est injective. Soient $(x, y) \in E^2$. On suppose $f(x) = f(y)$. Montrons que $x = y$.
   Comme $f(x) = f(y)$, $g(f(x)) = g(f(y))$ i.e. $g \circ f(x) = g \circ f(y)$
   Or, $g \circ f$ injective donc $x = y$
2. On suppose $g \circ f$ surjective. On veut montrer que g est surjective. Soit $y \in G$. On cherche $x \in F$ tel que $g(x) = y$.
   Comme $g \circ f : E \to G$ surjective, y a un antécédant $z \in E$ par $g \circ f$.
   On pose $x = f(z) \in F$ et on a bien $g(x) = y$
3. On suppose f et g injectives. Montrons que $g \circ f$ injective. Soient $x, y \in E$. On suppose $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. Montrons $x = y$
   On sait que $g(f(x)) = g(f(y))$. Comme g est injective, $f(x) = f(y)$ et comme f est injective, $x = y$
4. On suppose f et g surjectives. Soit $y \in G$. On cherche $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = y$
   Comme g est surjective, y a un antécédant $z \in F$ par g
   Comme f est surjectives, z a un antécédant $x \in E$ par f
   On en déduit $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(z) = y$

□

Remarque:
$f : E \longrightarrow F$

$$f \text{ injective} \iff \left(\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \implies x = y \right)$$

Définition: Soit $f : E \to F$ une <u>bijection</u>. L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f \end{array} \right.$ est la <u>réciproque</u> de f notée f^{-1}

Définition: L'<u>identité de E</u> est $\mathrm{id}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$

Proposition: Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$

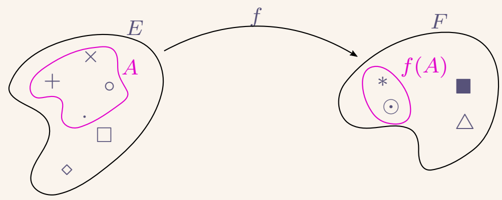
$$\left. \begin{array}{l} f \circ g = \mathrm{id}_F \\ g \circ f = \mathrm{id}_E \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} f \text{ bijective} \\ f^{-1} = g \end{array} \right.$$

Preuve (déjà faite): □

Définition: Soit $f : E \to F$

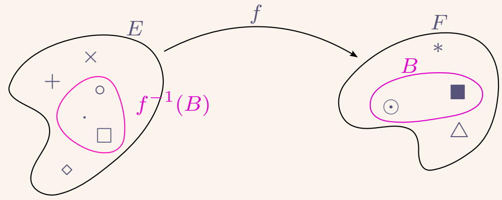
1. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. L'<u>image directe</u> de A par f est

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$



2. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. L'<u>image réciproque</u> de B par f est

$$f^{-1}(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}$$



Remarque:

— $y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)$,
— $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$.

Proposition: Soient $f : E \to F$, $A \in \mathscr{P}(E)$ et $F \in \mathscr{P}(F)$.

1. $f^{-1}\big(f(A)\big) \supset A$,
2. Si f est injective alors $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$,
3. $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$,
4. Si f est surjective, alors $f\big(f^{-1}(B\big) = B$.

Preuve:

1. Soit $x \in A$. Montrons que $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$ i.e. montrons que $f(x) \in f(A)$. Comme $x \in A$, $f(x) \in f(A)$.
2. On suppose f injective. Montrons que $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$. Soit $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$, montrons que $x \in A$. On sait que $f(x) \in f(A)$. Donc, il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Or, f est injective et donc $x = a$. On en déduit que $x \in A$.
   D'après 1., on sait que $f^{-1}\big(f(A)\big) \supset A$. On a montré $f^{-1}\big(f(A)\big) \subset A$. Donc
   $$f^{-1}\big(f(A)\big) = A.$$
3. Soit $y \in f\big(f^{-1}(B)\big)$. Montrons $y \in B$. On sait qu'il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. On a donc $f(x) \in B$ et donc $y \in B$.
4. On suppose f surjective, montrons $B \subset f\big(f^{-1}(B)\big)$. Soit $y \in B$, montrons $y \in f\big(f^{-1}(B)\big)$. On cherche $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. C'est à dire, on cherche $x \in E$ tel que $f(x) \in B$ et $y = f(x)$. On sait que f est surjective donc y a un antécédant $x \in E$ tel que $B \ni y = f(x)$.
   On vient de montrer $B \subset f\big(f^{-1}(B)\big)$ et on a montré dans 3. que $B \supset f\big(f^{-1}(B)\big)$. On en déduit que
   $$f\big(f^{-1}(B)\big) = B.$$

$\square$

Proposition: Soit $f : E \to F$ et $(A, B) \in \mathscr{P}(F)^2$. Alors

$$\begin{cases} f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), & (1) \\ f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). & (2) \end{cases}$$

Preuve:
Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cup B) &\iff f(x) \in A \cup B \\ &\iff f(x) \in A \ \text{ ou } \ f(x) \in B \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \ \text{ ou } \ x \in f^{-1}(B) \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cap B) &\iff f(x) \in A \cap B \\ &\iff f(x) \in A \ \text{ et } \ f(x) \in B \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \ \text{ et } \ x \in f^{-1}(B) \\ &\iff x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). \end{aligned}$$

$\square$

Proposition: Soient $f : E \to F$ et $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$.

1. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
2. Si f est injective, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
3. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Preuve:

1. Soit $y \in f(A \cap B)$. Soit $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A$, $f(x) \in f(A)$ et comme $x \in B$, $f(x) \in f(B)$ et donc $y \in f(A) \cap f(B)$
2. On suppose f injective. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$.
   Comme $y \in f(A)$, il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$.
   Comme $y \in f(B)$, il existe $b \in B$ tel que $y = f(b)$.
   Comme f est injective, $a = b$ et donc $a \in A \cap B$. On en déduit que
   $$y = f(a) \in f(A \cap B).$$
3. Soit $y \in F$. Alors
   $$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\iff \exists x \in A \cup B; y = f(x) \\ &\iff (\exists x \in A \text{ ou } \exists x \in B), y = f(x) \\ &\iff y \in f(A) \text{ ou } y \in f(B) \\ &\iff y \in f(A) \cup f(B). \end{aligned}$$

□

Remarque (Contre-exemple pour 2.):
Cas d'une application qui n'est pas injective

On pose $A = \mathbb{R}_*^+$, $B = \mathbb{R}_*^-$ et

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

On a $A \cap B = \varnothing$ donc $f(A \cap B) = \varnothing$.

Or, $\left.\begin{aligned} f(A) = \mathbb{R}_*^+ \\ f(B) = \mathbb{R}_*^+ \end{aligned}\right\}$ donc $f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}_*^+$.

On a
$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

Définition: Soit $f : E \to F$ et $A \in \mathscr{P}(E)$.

La <u>restriction</u> de f à A est

$$\begin{aligned} f_{|A} : A &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x)a \end{aligned}$$

On dit aussi que f est <u>**un** prolongement</u> de $f_{|A}$.

Remarque (Notation):
L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E.

Exemple:

On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ un prolongement de f car $g_{|\mathbb{R}^*} = f$.

L'applications $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ est un autre prolongement de f.

Troisième partie

Relations binaires

> **Définition:** Soit E un ensemble. Un <u>relation (binaire)</u> sur E est un prédicat définit sur E^2.

Exemple:

1. Avec $E = \mathbb{C}$, $=$ est une relation binaire,
2. Avec $E = \mathbb{R}$, $\leqslant$ est une relation binaire,
3. Avec E l'humanité et la relation binaire $\wedge$:

$$x \wedge y \iff x \text{ et } y \text{ ont la même mère.}$$

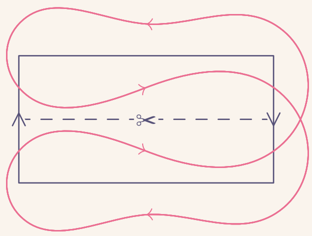
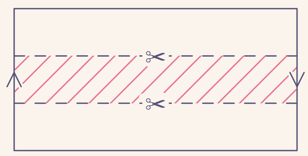
> **Définition:** Soit E un ensemble, $\diamond$ une relation sur E. On dit que $\diamond$ est un <u>relation d'équivalence</u> si
>
> 1. $\forall x \in E, x \diamond x,$ (<u>réflectivité</u>)
> 2. $\forall x, y, \in E, x \diamond y \implies y \diamond x,$ (<u>symétrie</u>)
> 3. $\forall x, y, z \in E, \quad \left.\begin{matrix} x \diamond y \\ y \diamond z \end{matrix}\right\} \implies x \diamond z$ (<u>transitivité</u>)

Exemple:
Avec $E = \mathbb{Z}$ et

$$x \diamond y \iff x \equiv y \ \ [3]$$

"$\diamond$" est une relation d'équivalence.

Remarque:
Le but d'une relation d'équivalence est d'identifier des objets différents.

> **Définition:** Soit E un ensemble et $\diamond$ une relation d'équivalence sur E. Soit $x \in E$. La <u>classe de x (modulo $\diamond$)</u> est
>
> $$\mathscr{C}\!\ell_\diamond(x) = \mathscr{C}\!\ell(x) = \overline{x} = \{y \in E \mid y \diamond x\}.$$

Exemple:

1. Avec $E = \mathbb{C}$ et $\diamond =$ "$=$",

$$\forall z \in \mathbb{C}, \overline{z} = \mathscr{C}\!\ell(z) = \{z\}.$$

2. Avec $E = \mathbb{Z}$ et $\diamond =$ congruence modulo 5, on a

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \{5k \mid k \in \mathbb{Z}\} & \overline{1} &= \{5k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ \overline{2} &= \{5k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\} & \overline{3} &= \{5k+3 \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ \overline{4} &= \{5k+4 \mid k \in \mathbb{Z}\} & \overline{5} &= \overline{0} \end{aligned}$$

On constate que

$$x \equiv y \ \ [5] \iff \overline{x} = \overline{y}.$$

Proposition: Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\diamond$. Alors

$$\forall x, y \in E, x \diamond y \iff \overline{x} = \overline{y}.$$

Preuve:
Soient $x, y \in E$.
- On suppose $x \diamond y$. Soit $z \in \overline{x}$. On sait que $z \diamond x$ et $y \diamond x$. Par transitivité, on en déduit que $z \diamond y$ et donc $z \in \overline{y}$.
- Soit $z \in \overline{y}$, donc $y \diamond z$. Or $x \diamond y$. Comme $\diamond$ est symétrique, on a $y \diamond x$ et par transitivité, on a donc $z \diamond x$. Donc $z \in \overline{x}$.
- On suppose $\overline{x} = \overline{y}$. $\diamond$ réfléctive donc $x \diamond x$ et donc $x \in \overline{x} = \overline{y}$ donc $x \in \overline{y}$ et donc $x \diamond y$.

□

Hors-Programme

Définition: Soit E un ensemble et $\diamond$ une relation d'équivalence.

L'ensemble
$$\{\overline{x} \mid x \in E\} = {}^{E}/_{\diamond}$$
est appelé quotient de E modulo $\diamond$.

Exemple:
1. $E = \mathbb{Z}$ et $\diamond$ = congruence modulo 5 :
$$^{E}/_{\diamond} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\right\} = {}^{\mathbb{Z}}/_{5\mathbb{Z}}$$
2. *Construction de* $\mathbb{Q}$
On suppose avoir déjà construit $\mathbb{Z}$ mais pas $\mathbb{Q}$: on veut donc donner un définition de $^{p}/_{q}$ sans parler de division.
On pose
$$E = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* = \{(p, q) \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}.$$
Soit $\sim$ la relation définie par
$$(p, q) \sim (p', q') \iff pq' = p'q$$
Montrons que $\sim$ est une relation d'équivalence.
   - Soient $(p, q) \in E$. $\sim$ est réfléctive car $(p, q) \sim (p, q) \iff pq = pq$.
   - Soient $(p, q), (p', q') \in E$. On suppose $(p, q) \sim (p', q')$.
$$\begin{aligned}(p, q) \sim (p', q') &\iff pq' = p'q \\ &\iff p'q = pq' \\ &\iff (p', q') \sim (p, q)\end{aligned}$$
Donc $\sim$ est symétrique.
   - Soient $(p, q), (p', q'), (p'', q'') \in E$. On suppose
$$\begin{cases}(p, q) \sim (p', q') \\ (p', q') \sim (p'', q'')\end{cases}$$
On sait que
$$(p, q) \sim (p'', q'') \iff pq'' = p''q$$

Or,

$$\begin{cases} pq' = qp' \\ p'q'' = p''q' \end{cases} \quad \text{donc } pq'p'q'' = p'q'p''q'$$

Donc

$$p'q'(pq'' - p''q) = 0$$

et donc

$$p' = 0 \text{ ou } pq'' - p''q = 0$$

Si $p' = 0$, alors $\begin{cases} pq' = 0 \\ p''q' = 0 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} p = 0 \\ p'' = 0 \end{cases}$. On a donc

$$pq'' = 0 = p''q$$

Si $p' \neq 0$, on a $pq'' - p''q = 0$ et donc

$$pq'' = p''q$$

On a donc $(p, q) \sim (p'', q'')$.
On pose $\mathbb{Q} = {}^{E}/\sim$ et

$$\forall (p, q) \in E, \; \frac{p}{q} = \mathscr{Cl}\big((p, q)\big).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} &\iff \mathscr{Cl}\big((p, q)\big) = \mathscr{Cl}\big((p', q')\big) \\ &\iff (p, q) \sim (p', q') \\ &\iff pq' = p'q \end{aligned}$$

3. *Construction de $\mathbb{Z}$ à partir de $\mathbb{N}$*
On pose $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et $\sim$ la relation $(p, q) \sim (p', q') \iff p + q' = p' + q$.
$\sim$ est une relation d'équivalence. On pose donc $\mathbb{Z} = {}^{\mathbb{N}}/\sim$ et pour $n \in \mathbb{N}$, on définit n par $\mathscr{Cl}\big((n, 0)\big)$ et $-n$ par $\mathscr{Cl}\big((0, n)\big)$.
4. *Constrcution de $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{R}$*
On pose E l'ensemble des polynômes à coefficients réels ($E = \mathbb{R}[X]$) et $\diamond$ la relation d'équivalence

$$P \diamond Q \iff P \equiv Q \;\left[x^2 + 1\right]$$

On pose $\mathbb{C} = {}^{E}/\diamond$.

Il manque une partie du cours ici

Définition: Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E.

On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une <u>partition</u> de E si

$$\begin{cases} E = \displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i \\ \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing \end{cases}$$

On a donc

$$\forall x \in E, \exists! i \in I, x \in A_i.$$

Proposition: Soit E un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\diamond$. Les classes d'équivalences de E modulo $\diamond$ forment une partition de E.

Preuve:

— Soit $x \in E$. On sait que $x \diamond x$ donc $\overline{x} \ni x$. On a montré $E \subset \bigcup_{y \in E} \overline{y}$.

— $\forall y \in E, \overline{y} \subset E$ donc $E \supset \left(\bigcup_{y \in E} \overline{y} \right)$.

— Soit $x, y \in E$ tel que $\overline{x} \neq \overline{y}$. Montrons que $\overline{x} \cap \overline{y} = \varnothing$. Soit $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$. $z \in \overline{x}$ donc $z \diamond x$. De même, $z \in \overline{y}$ donc $z \diamond y$. Par transitivité, $x \diamond y$ et donc $\overline{x} = \overline{y}$: une contradiction.

□

Proposition: Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une partition de E telle que

$$\forall i \in I, A_i \neq \varnothing.$$

Alors il existe une relation d'équivalence $\diamond$ telle que pour tout $i \in I$, A_i est une classe d'équivalence modulo $\diamond$.

Preuve:
Soit $\diamond$ la relation définie par

$$x \diamond y \iff \exists i \in I, \begin{cases} x \in A_i \\ y \in A_i \end{cases}$$

— Soit $x \in E$. Comme $E = \bigcup_{i \in I} A_i$, il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$ donc $x \diamond x$.

— Soient $x, y \in E$. On suppose $x \diamond y$. Soit $i \in I$ tel que $\begin{cases} x \in A_i \\ y \in A_i \end{cases}$ donc $\begin{cases} y \in A_i \\ x \in A_i \end{cases}$ et donc $y \diamond x$.

— Soit $x, y, z \in E$. On suppose $x \diamond y$ et $y \diamond z$.
Soit $i \in I$ tel que $\begin{cases} x \in A_i \\ y \in A_i. \end{cases}$
Soit $j \in I$ tel que $\begin{cases} y \in A_j \\ z \in A_j. \end{cases}$
On a donc $y \in A_i \cap A_j$. Si $i \neq j$, alors $y \in \varnothing$: une contradiction. Donc $i = j$ et donc $\begin{cases} x \in A_i \\ z \in A_i \end{cases}$. On en déduit que $x \diamond z$.

Ainsi $\diamond$ est une relation d'équivalence.

— Soit $i \in I$ et soit $x \in A_i \neq \varnothing$.

$$\overline{x} = \{y \in E \mid y \diamond x\} = \{y \in E \mid y \in A_i\} = A_i.$$

□

Définition: Soit E un ensemble et $\diamond$. On dit que $\diamond$ est une relation d'ordre sur E si

1. $\diamond$ est réfléctive ($\forall x \in E, x \diamond x$),

2. $\diamond$ est anti-symétrique :

$$\forall x, y \in E, \quad \left.\begin{matrix} x \diamond y \\ y \diamond x \end{matrix}\right\} \implies x = y,$$

3. $\diamond$ est transitive $\Big(\forall x, y, z \in E, (x \diamond y \text{ et } y \diamond z) \implies x \diamond z\Big)$.

En général, la relation $\diamond$ est notée $\leqslant$ ou $\preccurlyeq$. On dit aussi que $(E, \diamond)$ est un ensemble ordonné.

Exemple: 1. $(\mathbb{R}, \leqslant)$ est un ensemble ordonné.
2. $\big(\mathscr{P}(E), \subset\big)$ est un ensemble ordonné.
3. $(\mathbb{N}, |)$ est un ensemble ordonné.
4. $(MP2I, \preccurlyeq)$ avec
$$x \preccurlyeq y \iff \text{ note de } x \leqslant \text{ note de } y$$
n'est un ensemble ordonné car $\preccurlyeq$ n'est pas anti symétrique.
5. $E = \mathbb{N}^2$ et $\preccurlyeq$ définie par
$$(x, y) \preccurlyeq (x', y') \iff x < x' \text{ ou } \begin{cases} x = x' \\ y \leqslant y' \end{cases}$$
$(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble ordonné.

Définition: Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. Soient $x, y \in E$. On dit que x et y sont comparables si
$$x \leqslant y \text{ ou } y \leqslant x.$$
On dit que $\leqslant$ est un ordre total si tous les éléments de E sont comparables 2 à 2.

Exemple: — $(\mathbb{R}, \leqslant)$ est totalement ordonné
— $\big(\mathscr{P}(E), \subset\big)$ n'est pas totalement ordonné en général :
Soient $a, b \in E$ avec $a \neq b$. $\{a\}$ et $\{b\}$ ne sont pas comparables.
— $(\mathbb{N}, |)$ n'est pas totalement ordonné :
$2 \nmid 5$ et $5 \nmid 2$ donc 2 et 5 ne sont pas comparables.

Définition: Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, $A \in \mathscr{P}(E)$ et $M \in E$. On dit que A est majorée par M, que M majore A ou que M est un majorant de A si
$$\forall a \in A, a \leqslant M.$$
Soit $m \in E$. On dit que A est minorée par m, que m minore A ou que m est un minorant de A si
$$\forall a \in A, m \leqslant a.$$

Il manque une partie du cours ici

Exemple: 1. $E = \mathbb{R}$ muni de $\leqslant$ et $A = [2, 5]$.
On sait que $\sup A = 5$ car
$$\forall x \in A, x \leqslant 5$$
et
$$\forall y \leqslant 5, \quad 5 > \frac{y+5}{2} > y$$
donc y ne majore pas A.
2. $E = \mathbb{R}$ avec $\leqslant$ et $A =]2, 5[$. $A \not\ni \sup A = 5$ par le même raisonnement.

3. $E = \mathbb{N}^*$ avec $|$ et $A = \{p, q\}$ avec $p \neq q \in E$. $\sup A = \text{PPCM}(p, q) = p \vee q$ (c.f. chapitre 10 arithmétique)
4. $\mathscr{P}(E)$ avec $\subset$ et $A = \{P, Q\}$ avec $P, Q \in \mathscr{P}(E)$ et $P \neq Q$. $\sup A = P \cup Q$.
5. $E = \{0, 1\} \times \mathbb{Z}$ muni de $\leqslant$ défini par

$$(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2) \iff x_1 < x_2 \text{ ou } \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 \leqslant y_2 \end{cases}$$

et $A = \{0\} \times \mathbb{Z}$. (x, y) majore $A \iff x = 1$ donc A est majorée mais n'a pas de borne supérieure.

Proposition: Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $A \in \mathscr{P}(E)$. Si A a une borne supérieure, alors celle-ci est unique. On la note $\sup A$.

Preuve:
Soit M_1 et M_2 deux bornes supérieures de A.

Donc M_2 majore A. Comme M_1 est une borne supérieure de A, on a $M_1 \leqslant M_2$.

De même, on en déduit que $M_2 \leqslant M_1$.

Comme $\leqslant$ est antisymétrique, $M_1 = M_2$. □

Proposition – Définition: Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $A \in \mathscr{P}(E)$ minorée par $m \in E$. On dit que m est une <u>borne inférieur</u> de A si

$$\begin{cases} \forall a \in A,\ m \leqslant a, \\ \forall x \in E,\ (\forall a \in A,\ x \leqslant a) \implies x \leqslant m. \end{cases}$$

Dans ce cas, m est unique et on la note $\inf(A)$. □

Définition: Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $A \in \mathscr{P}(E)$.

1. Soit $M \in E$. On dit qye M est le <u>plus grand élément</u> de A ou que M est le <u>maximum</u> de A si
$$\begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant M, \\ M \in A. \end{cases}$$
Dans ce cas, on le note $M = \max(A)$.
2. Soit $m \in E$. On dit que m est le <u>plus petit élément</u> de A ou que m est le <u>minimum</u> de A si
$$\forall a \in A,\ a \geqslant m m \in A$$
Dans ce cas, on le note $m = \min(A)$.

Proposition: En cas d'éxistence, il y a unicité du minimum et du maximum.

Preuve:
Soient M_1 et M_2 deux maxima. On a $M_1 \in A$ donc $M_1 \leqslant M_2$. Or, $M_2 \in A$ donc $M_2 \leqslant M_1$. On en déduit que $M_1 = M_2$. □

Proposition: Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, $A \in \mathscr{P}(E)$ et $M \in E$.

$$M = \max(A) \iff \begin{cases} M = \sup(A), \\ M \in A; \end{cases}$$

$$M = \min(A) \iff \begin{cases} M = \inf(A), M \in A. \end{cases}$$

Preuve: " $\implies$ " On suppose $M = \max(A)$. On sait déjà que $M \in A$ et que M est un majorant de A.
Soit M' un majorant de A. $M \in A$ donc $M' \geqslant M$. On en déduit que $M = \sup(A)$.
" $\impliedby$ " On suppose $M = \sup(A) \in A$. Alors M majore A et $M \in A$ donc $M = \max(A)$.

□

Exemple:
$E = \mathbb{N}^*$ muni de $|$ et $A = \{3, 5\}$. $\sup(A) = 3 \vee 5 = 15 \notin A$ donc A n'a pas de maximum.

Définition: Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, $A \in \mathscr{P}(E)$ et $M \in A$.

On dit que M est un élément maximal de A si aucun élément de A n'est strictement supérieur à M :

$$\nexists a \in A, \begin{cases} M \leqslant a, \\ M \neq a. \end{cases}$$

On dit que M est un élément minimal de A si aucun élément de A n'est strictement inférieur à M :

$$\nexists a \in A, \begin{cases} M \geqslant a, \\ M \neq a. \end{cases}$$

Exemple:
$E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 2\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ muni de $|$ et $A = E$. Les éléments minimaux de E sont les nombres premiers, il y en a une infinité. Il n'y a donc pas d'élément maximal.

Proposition: Avec les notations précédentes, si A a un maximum M alors M est le seul élément maximal de A.

Preuve:
Soit $M = \max(A)$. Soit $a \in A$ tel que $M \leqslant a$ et $M \neq a$. Comme $a \in A$ et $M = \max(A)$, on sait que $a \leqslant M$. Par antisymétrie, on en déduit que $a = M$: une contradiction.

Donc M est un élément maximal de A.

Soit M' un élément maximal de A. $M' \in A$ donc $M' \leqslant M$ et donc $M = M'$. □

Définition: Soient $(E, \leqslant)$ et $(F, \preccurlyeq)$ deux ensembles ordonnés et $f : E \to F$. On dit que

1. f est croissante si

$$\forall (x, y) \in E^2, x \leqslant y \implies f(x) \preccurlyeq f(y);$$

2. f est <u>décroissante</u> si
$$\forall (x,y) \in E^2, x \leqslant y \implies f(x) \succcurlyeq f(y).$$

Exemple:
$E = \mathbb{N}^*$ muni de $|$, $F = \mathbb{N}^*$ muni de $\leqslant$ et $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & x. \end{array}$

Soit $(x,y) \in E^2$ tels que $x \mid y$. Alors $x \leqslant y$ donc f est croissante.

On pose
$$\begin{aligned} g : F &\longrightarrow E \\ n &\longmapsto n. \end{aligned}$$

$2 \leqslant 3$ mais $2 \nmid 3$ donc g n'est pas croissante et $2 \leqslant 5$ mais $5 \nmid 2$ donc g n'est pas décroissante.

Définition: Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $A \in \mathscr{P}(E)$. On dit que A est <u>bornée</u> si A est à la fois majorée et minorée.

Définition: Avec les notations précédentes, un <u>extremum</u> de A (sous reserve d'éxistence) est un maximum ou un minimum de A.

Quatrième partie

Lois de composition

Définition: Une <u>loi de composition interne</u> est une application f de $E \times E$ dans E.
On la note $x * y$ au lieu de $f(x, y)$ (on est libre de choisir le symbôle).

Définition: Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $\boxtimes$.
On dit que $\boxtimes$ est <u>associative</u> si

$$\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x \boxtimes y) \boxtimes z = x \boxtimes (y \boxtimes z).$$

Dans ce cas, on écrit plutôt $x \boxtimes y \boxtimes z$.

Exemple: — $+$ et $\times$ dans $\mathbb{C}$ sont associatives ;
- $\circ$ est associative ;
- la multiplication matricielle est aussi associative.

Définition: On dit que $\boxtimes$ est <u>commutative</u> si

$$\forall (x, y) \in E^2, x \boxtimes y = y \boxtimes x.$$

Exemple: — $+$ et $\times$ dans $\mathbb{C}$ sont commuatives ;
- $\circ$ n'est pas commutative ;
- la multiplication matricielle n'est pas commutative.

Définition: Soit $e \in E$. On dit que e est un
- <u>élément neutre à gauche</u> si
$$\forall x \in E,\ e \boxtimes x = x;$$
- <u>élément neutre à droite</u> si
$$\forall x \in E,\ x \boxtimes e = x;$$
- <u>élément neutre</u> si
$$\forall x \in E,\ e \boxtimes x = x \boxtimes e = x.$$

Proposition: Sous reserve d'existence, il y a unicité de l'élément neutre.

Preuve:
Soient e et e' deux éléments neutre.
- $e \boxtimes e' = e'$ car e est neutre,
- $e \boxtimes e' = e$ car e' est neutre.

On a donc $e = e'$. □

Axiome (axiome du choix)**:** Soit E un ensemble non vide. Il existe $f : \mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\} \to E$ telle que

$$\forall A \in \mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\},\ f(A) \in A.$$

Définition: Soit $f : E \to F$. Le graphe de f est

$$\Big\{\big(x, f(x)\big) \mid x \in E\Big\} \subset E \times F.$$

Proposition: Soit $G \subset E \times F$. G est le graphe d'une application si et seulement si

$$\forall x \in E,\ \exists! y \in F,\ (x, y) \in G.$$

Preuve: " $\Longrightarrow$ " par définition d'une application
" $\Longleftarrow$ " On pose $f(x)$ le seul élément y de F qui vérifie $(x, y) \in G$. Alors $f \in F^E$ et son graphe vaut G.

□

Définition: Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. L'indicatrice de A est

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : E &\longrightarrow \{0, 1\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple:
1. Dans $\mathbb{C}$, le neutre de $+$ est 0 et le neutre de $\times$ est 1.
2. Dans E^E, le neutre de $\circ$ est id_E.
3. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à valeurs dans $\mathbb{C}$), le neutre de $\times$ est I_n :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

Définition: Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $\boxtimes$ et $x \in E$.

1. On dit que x est simplifiable à gauche si

$$\forall (y, z) \in E^2,\ (x \boxtimes y = x \boxtimes z) \implies x = z.$$

   et que x est simplifiable à droite si

$$\forall (y, z) \in E^2,\ (y \boxtimes x = z \boxtimes y) \implies x = z.$$

2. On dit que x est symétrisable à gauche s'il exiiste $y \in E$ tel que $y \boxtimes x = e$ où e est l'élément neutre de $\boxtimes$.
   De même, on dit que x est symétrisable à droite s'il existe $y \in E$ tel que $x \boxtimes y = e$.
   On dit que x est symétrisable s'il est symétrisable à gauche et à droite, donc s'il existe $y \in E$ tel que $x \boxtimes y = y \boxtimes x = e$.

Exemple:
$E = \mathbb{N}$ muni de la loi $+$, tous les éléments de E sont simplifiables. 0 est le seuele élément de E symétrisable.

Proposition: Avec les notations précédentes, si $\boxtimes$ est associative, et x est symétrisable, alors x est simplifiable.

Preuve:
Soient $y, z \in E$.
— On suppose $x \boxtimes y = x \boxtimes z$. Soit $a \in E$ tel que $a \in E$ tel que $a \boxtimes x = e$. Alors
$$a \boxtimes (x \boxtimes y) = a \boxtimes (x \boxtimes z).$$
Or,
$$\begin{aligned} a \boxtimes (x \boxtimes y) &= (a \boxtimes x) \boxtimes y \\ &= e \boxtimes y \\ &= y. \end{aligned}$$
De même, $a \boxtimes (x \boxtimes z) = z$.
Donc $y = z$.
— De même, si $y \boxtimes x = z \boxtimes x$, on “multiplie” x à droite par a et on obtient $y = z$.

$\square$

Proposition – Définition: On suppose $\boxtimes$ associative. Soit $x \in E$ symétrisable. Alors
$$\exists ! y \in E,\ x \boxtimes y = y \boxtimes x = e.$$
On dit que y est le symétrique de x et on le note $y = x^*$.

Preuve:
Soeint $x, y, z \in E$ tels que
$$\begin{cases} x \boxtimes y = y \boxtimes x = e \\ x \boxtimes z = z \boxtimes x = e \end{cases}$$
Alors, $x \boxtimes y = x \boxtimes z$ et, en simplifiant par x, on a $y = z$. $\square$

Exemple:
Les fonctions symétrisables de $(E^E, \circ)$ sont les bijections et le symétrique d'une bijection est sa réciproque.

Remarque:
1. Si la loi est notée $+$, on parle d'opposé plutôt que de symétrique et on le note $-x$ au lieu de x^*. L'élément neutre est noté 0_E.
2. Si la loi est notée $\times$, on parle d'élément inversible au lieu de symétrisable, d'inverse au lieu de symétrique et on note x^{-1} au lieu de x^*. On note le neutre 1_E.

Exercice:
Soient $x, y \in E = \mathbb{R}_*^+$. On définit la loi de composition interne $\oplus$:
$$x \oplus y = \frac{1}{\frac{1}{x} \oplus \frac{1}{y}}.$$
Cette loi peut-être utile en physique pour le calcul de résistances équivalentes en parallèles.
— Associativité : soient $x, y, z \in E$.
D'une part, on a
$$x \oplus (y \oplus z) = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}}} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}.$$

D'autre part, on a

$$(x \oplus y) \oplus z = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}} + \frac{1}{z}} = \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}.$$

La loi $\oplus$ est associative.

— Commutativité : soient $x, y \in E$.

$$x \oplus y = \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \frac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}} = y \oplus x.$$

Donc la loi $\oplus$ est commutative.

— Élément neutre : soit e l'élément neutre de $\oplus$.

$$\forall x \in E,\ x \oplus e = e \oplus x = x.$$

Comme la loi est commutative, seul l'égalité $x \oplus e = x$ est utile.
Soit $x \in E$. On a donc $\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{e}} = x$ donc $\dfrac{ex}{e+x} = x$ donc $ex = x(e+x)$ et donc $\cancel{ex} = \cancel{ex} + x^2$. On en déduit que $x^2 = 0$, ce qui n'est pas possible car $x \in \mathbb{R}_*^+$. Donc, il n'y a pas d'élément neutre pour $\oplus$.

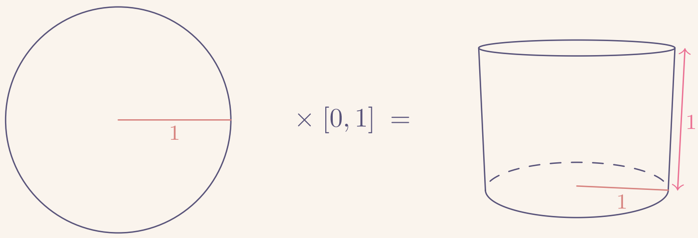
Cinquième partie

Divers

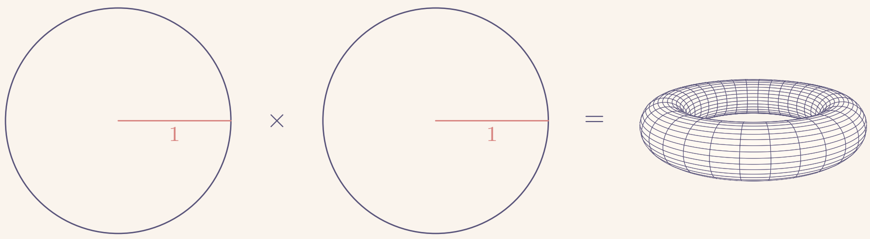
> **Définition:** Soient E et F deux ensembles. Un <u>couple</u> (x, y) est la donnée d'un élément x de E et d'un élément y de F où
>
> $$\forall x, x' \in E, \forall y, y' \in F, \qquad (x,y) = (x', y') \iff \begin{cases} x = x', \\ y = y'. \end{cases}$$
>
> On note $E \times F$ l'ensemble des couples ; c'est le <u>produit cartésien</u> de E et F.

Exemple:
$D \times [0,1]$ est un cylindre plein où D est le disque unité fermé i.e.

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}.$$



$C \times C$ où $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$ est un tore (creu).



> **Définition:** Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont <u>équipotents</u> s'il existe une bijection de E dans F.

Exemple:

1. $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ sont équipotents car $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ k & \longmapsto & k+1 \end{array}$ est bijective.
2. $P = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ pair}\}$ et $I = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ impair}\}$ sont équipotents car $f : \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & I \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$ est bijective.
3. $\mathbb{N}$ et P sont équipotents car $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & P \\ k & \longmapsto & 2k \end{array}$ est bijective.
4. $[0,1]$ et $[0,1[$ sont équipotents car
$$\begin{aligned} f : [0,1] &\longrightarrow [0,1[\\ x &\longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{si } x = \dfrac{1}{n} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^* \\ x & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$
est bijective.
5. De même, $]0,1[$ et $]0,1]$ sont équipotents.

6. $]0,1[$ et $[0,1[$ sont équipotents : $f : \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & [0,1[\\ x & \longmapsto & 1-x \end{array}$ est bijective.
7. $\forall a < b$, $[a,b]$ et $[0,1]$ sont équipotents :
$$\begin{aligned} f : [0,1] &\longrightarrow [a,b] \\ \alpha &\longmapsto \alpha b + (1-\alpha)a \end{aligned}$$
est bijective (interpolation linéaire).
8. $\mathbb{R}$ et $]0,1[$ sont équipotents :
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow]0,1[\\ x &\longmapsto \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{Arctan} x}{\pi} \end{aligned}$$
est bijective.
9. $[0,1[$ et $\mathbb{N}$ ne sont pas équipotents (argument de Cantor). Soit $f : \mathbb{N} \to [0,1[$ une bijection :

k	$f(k)$
0	$0,\ 0\ 0\ 0\ 0\ \ldots$
1	$0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$
2	$0, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots$
$\vdots$	$\vdots \quad \ddots$

On considère le nombre
$$x = 0,\ (a_0+1)(b_1+1)(c_2+1)\cdots$$
$f(1) \neq x$ car ils n'ont pas le même chiffre des dizaines.
$f(2) \neq x$ car ils n'ont pas le même chiffre des centaines.
Par le même raisonement, on en déduit que
$$\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \neq x$$
donc x n'a pas d'antécédant : une contradiction.
10. On verra en exercice que E et $\mathscr{P}(E)$ ne sont pas équipotents. $\mathbb{R}$ et $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ ne sont pas équipotents mais $\mathbb{R}$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ le sont (développement dyadique).
11. $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents ; $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents.

Exercice:
Soit E un ensemble. L'application
$$\begin{aligned} f : \mathscr{P}(E) &\longrightarrow 0,1^E \\ A &\longmapsto \mathbb{1}_A \end{aligned}$$
est bijective.

Soit $g : E \to \{0,1\}$.

<u>Analyse</u> Soit $A \in \mathscr{P}(E)$ tel que $f(A) = g$. Alors $g = \mathbb{1}_A$. donc
$$\forall x \in E,\ g(x) = \mathbb{1}_A(x)$$
et donc
$$\begin{cases} \forall x \in A,\ g(x) = 1 \\ \forall x \in E \setminus A,\ g(x) = 0 \end{cases}$$
On en déduit que
$$A = \{x \in E \mid g(x) = 1\} = g^{-1}\big(\{1\}\big).$$
<u>Synthèse</u> On pose $A = g^{-1}\big(\{1\}\big)$. Montrons que $f(A) = g$.
$$\forall x \in E,\ g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} = \mathbb{1}_A$$
donc $g = \mathbb{1}_A$.

On aurait aussi pu rédiger de la façon suivante : on pose

$$\begin{aligned} u : \{0,1\}^E &\longrightarrow \mathscr{P}(E) \\ g &\longmapsto g^{-1}\big(\{1\}\big). \end{aligned}$$

On montre que u est la réciproque de f :

$$\begin{cases} f \circ u = \mathrm{id}_{\{0,1\}^E}, \\ u \circ f = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}. \end{cases}$$

Définition: Soit $f : E \to F$. L'image de f est

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \big\{f(x) \mid x \in E\big\}.$$

Proposition: Soit $f : E \to F$.

$$f \text{ est surjective} \iff f(E) = F.$$

Définition: Une suite de E est une application de $\mathbb{N}$ dans E.

Remarque (Notation):
Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on écrit u_n à la place de $u(n)$.

Définition: Soient E et I deux ensembles. Une famille de E indéxée par I est une application de I dans E.

À la place de $u(i)$ (avec $i \in I$), on écrit u_i.

Définition: Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. On suppose $I \neq \varnothing$. On pose

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I,\, x \in A_i\}$$

et

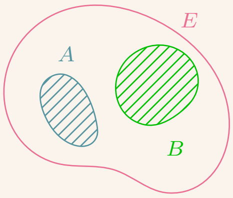
$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I,\, x \in A_i\}.$$

On pose aussi $\displaystyle\bigcup_{i\in\varnothing} A_i = \varnothing$ et $\displaystyle\bigcap_{i\in\varnothing} A_i = E$.

Remarque:
De même que pour les sommes et produits de complexes, on peut intervertir des réunions doubles.

Proposition: Soit E un ensemble, $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$.

$$A \subset (E \setminus B) \iff A \cap B = \varnothing.$$



Preuve: "$\Longrightarrow$" Soit $x \in A \cap B$. Alors $x \in A$ et $x \in B$. Comme $x \in A \subset (E \setminus B)$, alors $x \in E \setminus B$ i.e. $x \notin B$: une contradiction. Donc $A \cap B = \varnothing$.

"$\Longleftarrow$" On suppose $A \cap B = \varnothing$. Soit $x \in A$. Si $x \in B$, alors $x \in A \cap B = \varnothing$: faux. Donc $x \notin B$ et donc $x \in E \setminus B$.

$\square$

Proposition: Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

$\square$

Remarque (⚠ Attention):
$g \circ f$ peut-être bijective alors que f et g ne le sont pas.