Exercice 1: ★

Calculer la somme des séries de terme général u_n suivantes :

$$(a)\ u_n = \frac{1}{n(n+1)},\quad (b)\ u_n = \frac{n^2+1}{n!},\quad (c)\ u_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 2: ★★

Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$.

Exercice 3: ★★

Déterminer la nature des séries de terme général u_n suivantes :

$$(a)\ u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+3)!},\quad (b)\ u_n = \frac{\ln(n)}{n^3}$$

$$(c)\ u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}\qquad (d)\ u_n = \frac{\ln(n)}{n}$$

$$(e)\ u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}\qquad (f)\ u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}.$$

Exercice 4: ★

Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}.$$

Exercice 5: ★★★

Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\beta$ où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

Exercice 6: ★★★

Nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right)$.

Exercice 7: ★★★

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.

(1) Pour tout n, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

(2) Même question avec $v_n = \dfrac{u_n}{u_1+u_2+\cdots+u_n}$. Pour la divergence, on pourra étudier $\sum \ln(1-v_n)$.

Exercice 8: ★★★★

Convergence de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n^2}^{n^2+1} \frac{\sin^2(\pi x)}{x^\alpha}\, dx$.

Exercice 9: ★★★★

Soient (a_n) une suite positive et (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{a_n}{u_n}$.

Montrer que la suite (u_n) converge si et seulement si la série de terme général a_n converge.

Exercice 10: ★★★

Donner la nature des séries de terme général u_n :

$$1)\ u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} \quad 2)\ u_n = \cos\left(\pi n^2 \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) \quad 3)\ u_n = \ln\left(1 + \frac{\sin(n\pi/3)}{n}\right).$$

Exercice 11: ★★★★

On note (k_n) la suite croissante des entiers naturels non nuls dont l'écriture décimale ne comporte pas de 9. Quelle est la nature de $\sum \dfrac{1}{k_n}$?

Exercice 12: ★★★★

(1) Donner un développement asymptotique à deux termes de

$$u_n = \sum_{p=2}^{n} \frac{\ln p}{p}$$

On pourra introduire la fonction $f : t \mapsto (\ln t)/t$.

(2) À l'aide de la constante d'Euler, calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$