

CHAPITRE 12

TD

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 8 mai 2022

Table des matières

I	Exercice 3	1
II	Exercice 2	1
III	Exercice 6	2
IV	Exercice 7	2
V	Exercice 12	2
VI	Exercice 19	3
VII	Exercice 20	3
VIII	Exercice 10	4
IX	Exercice 15	5

Première partie

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{C}_* \rightarrow \mathbb{R}_*$ un isomorphisme.

$i^2 = -1$ donc $f(i^2) = f(-1)$ donc $f(i)^2 = f(-1)$

$(-1)^2 = 1$ donc $f((-1)^2) = f(1) = 1$ donc $f(-1)^2 = 1$ donc $f(-1) = \pm 1$

Or, $f(-1) = 1 \iff f(-1) = f(1) \iff -1 = 1$: une contradiction

Donc, $\underbrace{f(i)^2}_{>0} = -1$ une contradiction aussi

Deuxième partie

Exercice 2

1. “ $i \implies ii$ ”

$$\begin{aligned} \forall a, b \in G, (ab)^2 &= abab \\ &= aabb \\ &= a^2b^2 \end{aligned}$$

- “ $ii \implies i$ ”

$$\begin{aligned} \forall (a, b) \in G^2, abab &= a^2b^2 \\ \text{donc } bab &= ab^2 \\ \text{donc } ba &= ab \end{aligned}$$

‘ $\implies iii$ ’

$$\forall a, b \in G, (a, b)^{-1} = b^{-1} a^{-1} = a^{-1} b^{-1}$$

“ $iii \implies i$ ”

$$\forall a, b \in G, ab = (b^{-1} a^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1} = ba$$

2. Soit $a, b \in G$

$$— (a, b)^2 = e$$

$$— a^2 b^2 = e \cdot e = e$$

Donc, $(a, b)^2 = a^2 b^2$ donc G est abélien

Troisième partie

Exercice 6

$$\langle 1 \rangle = \mathbb{Z} \text{ à prouver avec } \mathbb{Z} \subset \langle 1 \rangle \subset \mathbb{Z}$$

$$\langle 2 \rangle = 2\mathbb{Z}$$

Quatrième partie

Exercice 7

Soit $f : (\mathbb{Q}, +) \rightarrow (\mathbb{Q}_*, \times)$ un isomorphisme.

On pose

$$\begin{cases} a = f^{-1}(2) \in \mathbb{Q} \\ b = \frac{a}{2} \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Donne $a = 2b$, on a $2 = f(a) = f(b + b) = f(b) \times f(b) = f(b)^2$

Donc, $f(b) = \pm\sqrt{2}$. Or, $f(b) \in \mathbb{Q}_*$. \nexists

Cinquième partie

Exercice 12

$G \cap \mathbb{R}_*^+ \neq \emptyset$ minoré par 0 donc a existe

1. $a = \min(G \cap \mathbb{R}_*^+)$. On adapte l'exercice 5. Soit $g \in G$

On pose $q = \left\lfloor \frac{g}{a} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$ et $r = g - qa \in G$

Or, $q \leq \frac{g}{a}$ donc $aq \leq g$ donc $r \geq 0$

$\frac{g}{a} < q + 1$ donc $g < aq + a$ donc $r < a$

Si $r > 0$, alors $\begin{cases} r \in G \cap \mathbb{R}_*^+ \\ r < a \leq r : \text{une contradiction} \end{cases} \nexists$

Donc $r = 0$ donc $g = aq$ avec $q \in \mathbb{Z}$ donc $g \in a\mathbb{Z}$

Donc, $G \subset a\mathbb{Z}$

$a \in G$ donc $a\mathbb{Z} \subset G$

Donc $G = a\mathbb{Z}$

2. Soit $g \in G \cap \mathbb{R}_*^+$. Comme $a \notin (G \cap \mathbb{R}_*^+)$, $g \neq a$
 Or, $g \geq a$ donc $g > a$ donc g ne minore pas $G \cap \mathbb{R}_*^+$ donc il existe $g_1 \in G \cap \mathbb{R}_*^+$ tel que $g_1 < g$
 De cette façon, on fabrique une suite (g_n) strictement décroissante minorée par a . Donc (g_n) converge. On pose $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n$
 Donc $\underbrace{g_{n+1} - g_n}_{\in G} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell - \ell = 0$
 On vient de trouver une suite $(g_{n+1} - g_n)_{n \in \mathbb{N}_*}$ de G qui converge vers 0. Donc $a = 0$
 Soit $I =]a, b[$ et $g \in G$ tel que $0 < g < b - a$
 On pose $n = \left\lfloor \frac{a}{g} \right\rfloor$. On a donc
- $$n \leq \frac{a}{g} < n + 1$$
- donc $ng \leq a < g(n + 1)$.
 Or,

$$g(n + 1) = ng + g \leq a + g < a + b - a < b$$

 donc $(n + 1) \in]a, b[\cap G$

Sixième partie

Exercice 19

Soit $a \in A \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto ax \end{aligned}$$

$1 \in \text{Im}(f)$?

— Soient $x, y \in A$

$$f(x + y) = a(x + y)ax + ay = f(x) + f(y)$$

donc f est un endomorphisme de $(A, +)$

— Soit $x \in A$

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(f) &\iff f(x) = 0 \\ &\iff ax = 0 \\ &\iff a = 0 \text{ ou } x = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

$\text{Ker}(f) = \{0\}$ donc f est injective.

Comme A est fini, f est bijective donc $\text{Im} = A \ni 1$

Septième partie

Exercice 20

Analyse : Soit $\mathbb{K} = (\{0, 1, a, b\}, +, \times)$ un corps à 4 éléments.

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	$b \diagdown 0$	$0 \diagdown b$	$a \diagdown a$
a	a	$0 \diagdown b$	$b \diagdown 1$	$1 \diagdown a$
b	b	$a \diagdown a$	$1 \diagdown b$	$0 \diagdown 0$

\times	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

$$\begin{aligned}
 a^2 &= b \neq 1 \\
 b^2 &= a \neq 1 \\
 \implies -1 &\notin \{0, a, b\} \\
 \implies -1 &= 1 \\
 \implies 1 + 1 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a + a &= a(1 + 1) \\
 &= a \times 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Donc, $K = \{0, 1, a, a^{-1}\}$: le sous-corps engendré par a

+	0	1	a	a^{-1}
0	0	1	a	a^{-1}
1	1	0	a^{-1}	a
a	a	a^{-1}	0	1
a^{-1}	a^{-1}	a	1	0

\times	0	1	a	a^{-1}
0	0	0	0	0
1	0	1	a	a^{-1}
a	0	a	a^{-1}	1
a^{-1}	0	a^{-1}	1	a

Synthèse : Il faut vérifier que

- $+$ est associative
- \times est associative
- la distributivité

Huitième partie

Exercice 10

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

- $\mathbb{Z}[i] \subset \mathbb{C}$

— Soient $u, v \in \mathbb{Z}[i]$. On pose $u = a + ib$ et $v = c + id$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$.

$$\begin{aligned} u + v &= \underbrace{(a + c)}_{\in \mathbb{Z}} + i \underbrace{(b + d)}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}[i] \\ uv &= \underbrace{(ac - bd)}_{\in \mathbb{Z}} + i \underbrace{(ad + bc)}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}[i] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -u &= -a - ib \in \mathbb{Z}[i] \\ 0 &= 0 + i \times 0 \in \mathbb{Z}[i]1 &= 1 + i \times 0 \in \mathbb{Z}[i] \end{aligned}$$

— Soit $u \in \mathbb{Z}[i]^\times$. On sait qu'il existe $v \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $uv = 1$.

$$\text{Donc, } |u|^2 |v|^2 = |uv|^2 = 1^2 = 1$$

$$\text{Comme } u \in \mathbb{Z}[i], |u|^2 = \Re(u)^2 + \Im(u)^2 \in \mathbb{N}$$

$$\text{De même, } |v|^2 \in \mathbb{N}$$

$$\text{Donc, } |u|^2 = 1.$$

$$\text{On pose } u = a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2. \text{ On a } a^2 + b^2 = 1$$

$$\text{donc } \begin{cases} 0 \leq a^2 \leq 1 \\ 0 \leq b^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc, } \begin{cases} a^2 \in \{0, 1\} \\ b^2 \in \{0, 1\} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc, } u \in \{\pm i, \pm 1\}$$

—

$$\begin{aligned} 1^{-1} &= 1 \in \mathbb{Z}[i] \\ (-1)^{-1} &= -1 \in \mathbb{Z}[i] \\ i^{-1} &= -i \in \mathbb{Z}[i] \\ (-i)^{-1} &= i \in \mathbb{Z}[i] \end{aligned}$$

AUTRE MÉTHODE $u \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$. $u = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} \in \mathbb{Z}[i] &\iff \frac{1}{a + ib} \in \mathbb{Z}[i] \\ &\iff \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \in \mathbb{Z}[i] \\ &\iff \begin{cases} \frac{a}{a^2 + b^2} \in \mathbb{Z} \\ \frac{-b}{a^2 + b^2} \in \mathbb{Z} \end{cases} &\iff \begin{cases} a^2 + b^2 \mid a \\ a^2 + b^2 \mid b \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} a^2 + b^2 \leq |a| \\ a^2 + b^2 \leq |b| \end{cases} &\implies \begin{cases} a \in \{0, 1, -1\} \\ b \in \{0, 1, -1\} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Neuvième partie

Exercice 15

$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ morphisme d'anneaux

$$f_{\mathbb{R}} = \text{id}_{\mathbb{R}}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(z) &= f(a + ib) \\ &= f(a) + f(ib) \\ &= a + f(i)f(b) \\ &= a + bf(i) \end{aligned}$$

$i^2 = -1$ donc $f(i^2) = f(-1) = -1$ donc $f(i)^2 = -1$ donc $f(i) \in \{i, -i\}$
Donc $f \in \{\text{id}_{\mathbb{C}}, z \mapsto \bar{z}\}$