

## CHAPITRE 15



Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 8 mai 2022

# TABLE DES MATIÈRES

I	Définition et premières propriétés	2
II	Sous-espaces vectoriels	6
III	Familles de vecteurs	15

## Première partie

### Définition et premières propriétés

**Définition:** Soit  $E$  un ensemble muni d'une loi interne  $+$  et d'une loi  $\cdot$  définie sur  $\mathbb{K} \times E$  à valeurs dans  $E$  où  $\mathbb{K}$  est un corps.

On dit que  $(E, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ ) si

1.  $(E, +)$  est un groupe abélien
2. (a)

$$\forall u \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \\ \mu \cdot (\lambda \cdot u) = (\underbrace{\mu \times \lambda}_{\times \text{ de } \mathbb{K}}) \cdot u$$

- (b)  $\forall u \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot u = u$
3. (a)

$$\forall u \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \\ (\underbrace{\lambda \cdot u}_{+ \text{ de } E}) + (\underbrace{\mu \cdot u}_{+ \text{ de } E}) = (\underbrace{\lambda + \mu}_{+ \text{ de } \mathbb{K}}) \cdot u$$

- (b)

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u, v) \in E^2, \\ \lambda \cdot (u + v) = (\lambda \cdot u) + (\lambda \cdot v)$$

Les éléments de  $E$  sont alors appelés vecteurs et les éléments de  $\mathbb{K}$  sont dits scalaires.  
Par convention,  $\cdot$  est prioritaire sur  $+$ .

EXEMPLE:

Soit  $\mathbb{K}$  corps,  $\mathbb{K}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

EXEMPLE:

Soit  $\vec{\mathcal{S}}$  l'ensemble des vecteurs du plan.  $\vec{\mathcal{S}}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

EXEMPLE:

$\mathbb{C}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

En généralisant, tout corps  $\mathbb{K}$  est un  $\mathbb{L}$ -espace vectoriel pour  $\mathbb{L}$  un sous-corps de  $\mathbb{K}$

EXEMPLE:

$(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$  avec

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda \cdot (y_1, \dots, y_n) = (\lambda \cdot y_1, \dots, \lambda \cdot y_n)$$

est un espace vectoriel.

EXEMPLE:

Soient  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{D}$  un ensemble non vide.

$(E^{\mathcal{D}}, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel où pour  $f, g \in E^{\mathcal{D}}$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$

$$f + g : \mathcal{D} \longrightarrow E \\ x \longmapsto f(x) + g(x)$$

$$\lambda f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \lambda \cdot f(x)$$

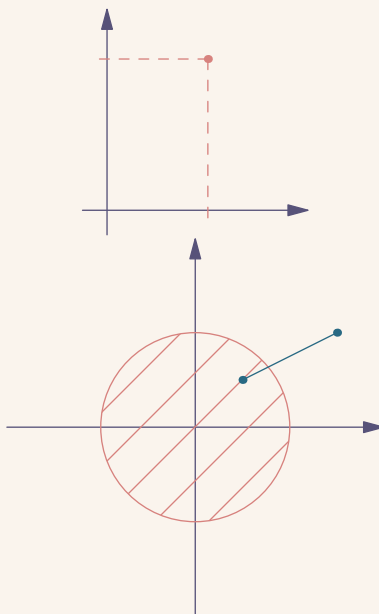
Par exemple,  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

$\mathcal{C}^0(\mathcal{D}, \mathbb{R})$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

EXEMPLE:

—  $\mathbb{R}^+$  n'est pas un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

—  $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$  n'est pas un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel pour les lois usuelles



**Proposition:** Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

1.  $\forall u \in E, 0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$
2.  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot 0_E = 0_E$
3.  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \lambda \cdot u = 0_E \implies \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } u = 0_E$

*Preuve:* 1. Soit  $u \in E$ .

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{K}} \cdot u &= (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \cdot u \end{aligned}$$

$(E, +)$  est un groupe donc  $0_E = 0_{\mathbb{K}} \cdot u$

2. Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

$$\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$$

$\lambda \cdot 0_E$  est régulier pour  $+$  :

$$0_E = \lambda \cdot 0_E$$

3. Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $u \in E$  tel que  $\lambda \cdot u = 0_E$

CAS 1  $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$

CAS 2  $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$  Alors,  $\lambda^{-1} \in \mathbb{K}$  et donc

$$\begin{aligned} \lambda \cdot u = 0_E &\implies \lambda^{-1}(\lambda \cdot u) = \lambda^{-1} \cdot 0_E \\ &\implies (\lambda^{-1} \times \lambda) \cdot u = 0_E \text{ d'après 2.} \\ &\implies 1_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E \\ &\implies u = 0_E \end{aligned}$$

□

**Proposition:** Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u \in E$ . Alors,  $-u = (-1_{\mathbb{K}}) \cdot u$

*Preuve:*

$$\begin{aligned} u + (-1_{\mathbb{K}}) \cdot u &= (1_{\mathbb{K}} \cdot u) + (-1_{\mathbb{K}}) \cdot u \\ &= (1_{\mathbb{K}} + (-1_{\mathbb{K}})) \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} u \\ &= 0_E \end{aligned}$$

Donc  $-u = (-1_{\mathbb{K}}) \cdot u$

□

Deuxième partie

Sous-espaces vectoriels

**Définition:** Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit  $F \subset E$ . On dit que  $F$  est un sous- $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de  $E$  si

1.  $F \neq \emptyset$
2.  $\forall (u, v) \in F^2, u + v \in F$
3.  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in F, \lambda u \in F$

**Proposition:** Avec les notations précédentes,  $(F, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

*Preuve:* — D'après 2.,  $+$  est interne dans  $F$

—  $(E, +)$  est un groupe abélien donc  $+$  est associative et commutative dans  $E$  donc dans  $F$

—  $F \neq \emptyset$ . Soit  $u \in F$ . D'après 3.,

$$0_{\mathbb{K}} \cdot u \in F$$

Comme  $u \in E$  et  $(E, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,

$$0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$$

Donc,  $0_E \in F$

— Soit  $u \in F$ . Comme  $u \in E$ ,

$$-u = -(1_{\mathbb{K}}) \cdot u \in F \text{ d'après 3.}$$

— Les autres axiomes sont aisément vérifiés.

□

**Proposition:** Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F \subset E$ .  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $(E, +, \cdot)$  si et seulement si

1.  $F \neq \emptyset$
2.  $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (u, v) \in F^2, \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$

*Preuve:* “  $\implies$  ” On sait déjà que  $F$  est non vide.

$$\forall u, v \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \left. \begin{array}{l} \lambda u \in F \\ \mu v \in F \end{array} \right\} \text{ donc } \lambda u + \mu v \in F$$

“  $\impliedby$  ” — On sait déjà que  $F$  est non-vide

— Soient  $u, v \in F$

$$u + v = 1_{\mathbb{K}} \cdot u + 1_{\mathbb{K}} \cdot v \in F$$

— Soit  $u \in F, \lambda \in \mathbb{K}$ .

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \cdot u \in F$$

□

**Définition:** Soient  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ . Une combinaison linéaire de  $(u_1, \dots, u_n)$  est un vecteur de  $E$  de la forme  $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$  où  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$



REMARQUE:

On peut aussi démontrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si

$$F \neq \emptyset \text{ et } \forall u, v \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u + v \in F$$

EXEMPLE: 1.  $F = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) + \Im(z) = 1\} \subset \mathbb{C}$

$F$  est un sous- $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de  $\mathbb{C}$ ?

Non car  $0 \notin F$

2.  $F = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) + \Im(z) = 0\}$  est un sous- $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de  $\mathbb{C}$  mais pas un sous- $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

En effet,  $1 - i \in F$   $i(1 - i) = i + 1 \notin F$

3.  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

$F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

$G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2\}$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $E$  puisque  $0_E \notin G$ .

4.  $E = \mathbb{R}^D$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

$F = \mathcal{C}^0(D, \mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  (fonctions continues)

$G = \mathcal{D}(D, \mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  (fonctions dérivables)

Si  $D = ]-a, a[$  avec  $a \in \mathbb{R}$ ,  $H = \{f \in E \mid f \text{ impaire}\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$

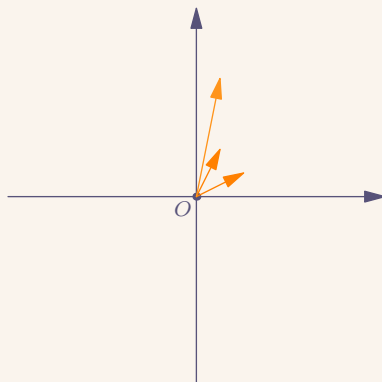
Si  $D = \mathbb{R}$ ,  $L = \{f \in E \mid f \text{ 1-périodique}\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$

$M = \{f \in E \mid f \text{ périodique}\}$  n'est pas un sous-ensemble vectoriel de  $E$

5. L'ensemble des solutions sur un intervalle  $I$  d'une équation différentielle linéaire est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^I$

EXERCICE (Exercice):

Trouver tous les sous- $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$



- $\{(0,0)\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$
- Les droites passant par  $O$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$
- $\mathbb{R}^2$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$

et rien d'autre!

**Proposition:** Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{F}$  une famille non vide de sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors  $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Preuve:

On pose  $G = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ .

- $\forall F \in \mathcal{F}, 0_E \in F$  car  $F$  est un sous espace vectoriel de  $E$  donc  $0_E \in G$ .

— Soient  $u, v \in G$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ . On pose  $w = \lambda u + \mu v$ .

$$\forall F \in \mathcal{F}, \left. \begin{array}{l} u \in F \\ v \in F \end{array} \right\} \text{ donc } w \in F$$

donc  $w \in G$

□

REMARQUE (Attention  $\trianglelefteq$ ):

Une réunion de sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel en général.

EXERCICE:

$F \cup G$  est un sous-espace vectoriel de  $E \iff F \subset G$  ou  $G \subset F$

**Définition:** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On définit leur somme  $F + G$  par

$$F + G = \{x + y \mid x \in F, y \in G\}$$

**Proposition:** Avec les notations précédentes,  $F + G$  est le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  contenant  $F \cup G$ .

Preuve: — —  $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \in F + G$

— Soient  $u \in F + G, v \in F + G, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x + y \text{ avec } \begin{cases} x \in F \\ y \in G \end{cases} \\ v = a + b \text{ avec } \begin{cases} a \in F \\ b \in G \end{cases} \end{array} \right.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \lambda u + \mu v &= \lambda(x + y) + \mu(a + b) \\ &= \lambda x + \lambda y + \mu a + \mu b \\ &= \underbrace{(\lambda x + \mu a)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda y + \mu b)}_{\in G} \in F + G \end{aligned}$$

Ainsi  $F + G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

— Soit  $x \in F \cup G$ .

Si  $x \in F$  alors  $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \in F + G$

Si  $x \in G$  alors  $x = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G} \in F + G$

Donc,  $F \cup G \subset F + G$

— Soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$  tel que  $F \cup G \subset H$

Soit  $u \in F + G$ . On pose  $u = x + y$  avec  $\begin{cases} x \in F \\ y \in G \end{cases}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in F \subset F \cup G \subset H \\ y \in G \subset F \cup G \subset H \end{array} \right.$$

$H$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  donc  $x + y \in H$ .  
On a montré que  $F + G \subset H$

□

**Définition:** Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $K$ -espace vectoriel et  $(F_i)_{i \in I}$  une famille quelconque non vide de sous-espaces vectoriels de  $E$ . On définit  $\sum_{i \in I} F_i$  par

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} F_i &= \left\{ \sum_{i \in I} x_i \mid (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} F_i; (x_i) \text{ presque nulle} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i \in I} x_i \mid (x_i) \in \prod_{i \in I} F_i; \{i \in I \mid x_i \neq 0_E\} \text{ est fini} \right\} \end{aligned}$$

$\sum_{i \in I} F_i$  est l'ensemble de sommes finies obtenues à partir d'éléments de  $\prod_{i \in I} F_i$

EXEMPLE:

$$E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, F_i = \{x \mapsto ax^i \mid a \in \mathbb{R}\}$$

$\sum_{i \in \mathbb{N}} F_i$  est l'ensemble des fonctions polynomiales

**Proposition:** Une somme quelconque de sous-espaces vectoriels est le plus petit sous-espace vectoriel contenant leur réunion. □

**Définition:** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On dit qu'ils sont en somme directe si

$$\forall u \in F + G, \exists!(x, y) \in F \times G, u = x + y$$

Dans ce cas, l'espace  $F + G$  est noté  $F \oplus G$

EXEMPLE:

$$E = \mathbb{R}^3$$

$$F = \{(x, 0, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$G = \left\{ (x, y, z) \mid (S) : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \right\}$$

$F \oplus G$ ?

$$\text{--- } (0, 0, 0) \in F \text{ car } 0 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Soient } x, y \in \mathbb{R}, \begin{cases} u = (x, 0, x) \\ v = (y, 0, y) \end{cases}$$

$$\text{Soient } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
\lambda u + \mu v &= \lambda(x, 0, 0) + \mu(y, 0, y) \\
&= (\lambda x, 0, \lambda x) + (\mu y, 0, \mu y) \\
&= (\lambda x + \mu y, 0, \lambda x + \mu y) \in F
\end{aligned}$$

Donc  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$

—  $(0, 0, 0) \in G$  car  $(S)$  est homogène

$$\begin{cases} u = (x, y, z) \in G \\ v = (a, b, c) \in G \end{cases}$$

Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\lambda u + \mu v \in G &\iff \lambda(x, y, z) + \mu(a, b, c) \in G \\
&\iff (\lambda x + \mu a, \lambda y + \mu b, \lambda z + \mu c) \in G \\
&\iff \begin{cases} (\lambda x + \mu a) + (\lambda y + \mu b) + (\lambda z + \mu c) = 0 \\ (\lambda y + \mu b) - (\lambda z + \mu c) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda \overbrace{(x+y+z)}^{=0} + \mu \overbrace{(a+b+c)}^{=0} \\ \lambda \overbrace{(y-z)}^{=0} + \mu \overbrace{(b-c)}^{=0} = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

— Soit  $w \in E$ . On pose  $w = (x, y, z)$

$$\begin{aligned}
w \in F + G &\iff \exists (u, v) \in F \times G, w = u + v \\
&\iff \exists x' \in \mathbb{R}, \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} w = (x', 0, x') + (a, b, c) \\ a + b + c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \\
&\iff \exists (x', a, b, c) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} (x, y, z) = (a + x', b, c + x') \\ a + b + c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \\
&\iff \exists (x', a, b, c) \in \mathbb{R}^4, (S') : \begin{cases} a + x' = x \\ b = y \\ c + x' = z \\ a + b + c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$(S')$  est un système linéaire à 4 inconnues  $(x', a, b, c)$ , 5 équations, 3 paramètres  $(x, y, z)$

$$(S') \iff \begin{cases} b = y \\ c = y \\ x' = z - y \\ a = x - z + y \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

Si  $x + 3y - z \neq 0$  alors  $(S')$  n'a pas de solutions et donc  $w \notin F + G$

Si  $x + 3y - z = 0$  alors  $(S')$  a une unique solution alors

$$\exists! (u, v) \in F \times G, w = u + v$$

On a montré que

$$F \oplus G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y - z = 0\}$$

**Proposition:** Soient  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$   
 $F$  et  $G$  sont en somme directe si et seulement si  $F \cap G = \{0_E\}$

*Preuve:* “  $\implies$  ” On suppose la somme directe.

Soit  $x \in F \cap G$ .

D’une part,  $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$

D’autre part,  $0_E = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{(-x)}_{\in G}$

Par unicité,  $x = 0_E$

“  $\impliedby$  ” On suppose  $F \cap G = \{0_E\}$

Soit  $x \in F + G$  et on suppose que  $x$  a deux décompositions :

$$\begin{cases} x = u + v, & u \in F, v \in G \\ x = u' + v', & u' \in F, v' \in G \end{cases}$$

D’où,  $u - u' = v' - v$

Or,  $\begin{cases} u - u' \in F \\ v - v' \in G \end{cases}$

Donc,  $u - u' \in F \cap G = \{0_E\}$

donc  $u - u' = 0_E$  donc  $u = u'$  donc  $v' = v$

□

REMARQUE:

Ce résultat est inutile pour l’instant (en l’absence d’arguments dimensionnels) pour prouver un résultat de la forme  $E = F \oplus G$

EXEMPLE:

$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$F = \{f \in E \mid f \text{ paire}\}$  et  $G = \{f \in E \mid f \text{ impaire}\}$

Prouvons que  $E = F \oplus G$

Soit  $f \in F \cap G$  donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x) = -f(x)$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(x)$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$$

donc  $f = 0_E$

Ainsi, la somme de  $F$  et  $G$  est directe

$$F + G = F \oplus G$$

Montrons que  $E = F + G$ . Soit  $f \in E$ .

ANALYSE Soient  $g \in G$  et  $h \in F$  telles que

$$f = g + h$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = -g(x) + h(x) \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ g(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{cases}$$

Donc  $F + G = F \oplus G$ .

SYNTHÈSE On pose

$$\begin{cases} g : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \\ h : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \end{cases}$$

On vérifie que  $\begin{cases} g \in F \\ h \in F \\ g + h = f \end{cases}$   
On a prouvé que  $E = F + G$

EXEMPLE:

$$E = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

$$F = S_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{|c|} \hline (u) \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline (u) \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{pmatrix}$$

$$G = A_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \begin{array}{|c|} \hline (u) \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline (-u) \\ \hline \end{array} & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = F \oplus G$$

**Définition:** Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On dit que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$  si

$$E = F \oplus G$$

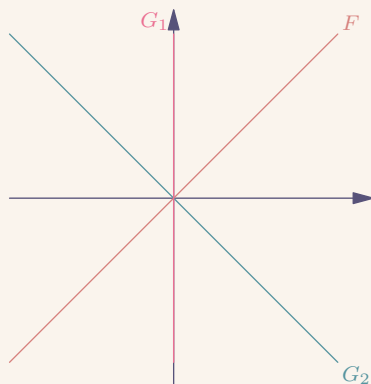
en d'autres termes,

$$\forall x \in E, \exists!(y, z) \in F \times G, x = y + z$$

EXEMPLE:

$$E = \mathbb{R}^2$$

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x\}$$



$$G_1 \oplus F = E \text{ et } G_2 \oplus F = E$$

Soit  $(x, y) \in E$

$$\begin{aligned} (x, y) &= \underbrace{(x, x)}_{\in F} + \underbrace{(0, y - x)}_{\in G_1} \\ &= \underbrace{\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)}_{\in F} + \underbrace{\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)}_{\in G_2} \end{aligned}$$

**Définition:** Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille non vide de sous-espaces vectoriels de  $(E, +, \cdot)$ . On dit qu'ils sont en somme directe si

$$\forall x \in \sum_{i \in I} F_i, \exists! (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} F_i \text{ presque nulle telle que } x = \sum_{i \in I} x_i$$

Dans ce cas, on écrit  $\bigoplus_{i \in I} F_i$  à la place de  $\sum_{i \in I} F_i$

EXEMPLE:

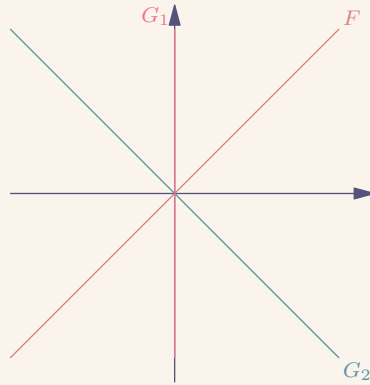
$E$  : l'espace des fonctions polynomiales

$$\forall i \in \mathbb{N}, F_i = \{x \mapsto ax^i \mid a \in \mathbb{K}\}$$

$$E = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} F_i$$

EXEMPLE:

$$E = \mathbb{R}^2$$



$$\begin{cases} F = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ G = \{(0, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ H = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} \end{cases}$$

On a  $F \cap G \cap H = \{0_E\}$  mais leur somme n'est pas directe

$$\begin{aligned} (0, 0) &= \underbrace{(1, 1)}_{\in F} + \underbrace{(0, -2)}_{\in G} + \underbrace{(-1, 1)}_{\in H} \\ &= \underbrace{(2, 2)}_{\in F} + \underbrace{(0, -4)}_{\in G} + \underbrace{(-2, 2)}_{\in H} \end{aligned}$$

Troisième partie

Familles de vecteurs



**Définition:** Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $A \in \mathcal{P}(E)$ . Le sous-espace vectoriel engendré par  $A$  est le plus petit sous espace vectoriel  $V$  de  $E$  tel que  $A \subset V$ .  
On le note  $\text{Vect}(A)$

EXEMPLE:

$E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- $\text{Vect}(\{0_E\}) = \{0_E\}$
- $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$
- $\text{Vect}(E) = E$
- Soit  $u \in E \setminus \{0_E\}$   
 $\text{Vect}(\{u\}) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u$
- Soient  $u, v \in E \setminus \{0_E\}$   
 $\text{Vect}(\{u, v\}) = \{\lambda u + \mu v \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\} = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$

**Définition:** Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u \in E \setminus \{0_E\}$ . La droite (vectorielle) engendrée par  $u$  est  $\mathbb{K}u = \text{Vect}(u) = \text{Vect}(\{u\})$ . Soit  $v \in E$ . On dit que  $u$  et  $v$  sont colinéaires si  $v \in \mathbb{K}u$ . Si  $v$  n'est pas colinéaire à  $u$  alors,  $\text{Vect}(u, v) = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$  est appelé plan (vectoriel) engendré par  $u$  et  $v$ .

EXEMPLE:

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 est une droite vectorielle.

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants est un plan vectoriel.

$$\{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \mid y'' + y = 0\} = \text{Vect}(\cos, \sin)$$

**Proposition:** Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille non vide de vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $(E, +, \cdot)$ . Alors,

$$\begin{aligned} \text{Vect}((e_i)_{i \in I}) &= \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i e_i \mid (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I \text{ et } (\lambda_i) \text{ presque nulle} \right\} \\ &= \sum_{i \in I} \mathbb{K}e_i \end{aligned}$$

*Preuve:*

On pose  $F = \sum_{i \in I} \mathbb{K}e_i$

$F$  est un sous espace vectoriel de  $E$ .

$$\begin{aligned} \forall i \in I, e_i &= \underbrace{\sum_{j \in I} \lambda_j e_j}_{\in F} \text{ où } \lambda_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \\ &= \delta_{i,j} \text{ (symbole de Kronecker)} \end{aligned}$$

Soit  $G$  un sous espace vectoriel de  $E$  tel que

$$\forall i \in I, e_i \in G$$

Soit  $u \in F$ . Soit  $(\lambda_i)_{i \in I}$  une famille presque nulle de scalaires telle que  $u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$

Soit  $\{i_1, \dots, i_k\} = \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0_K\}$

Donc,

$$u = \sum_{j=1}^k \underbrace{\lambda_{i_j} e_{i_j}}_{\in G} \in G$$

Donc  $F \subset G$

□

**Définition:** On dit que  $(e_i)_{i \in I}$  est une famille génératrice de  $E$  si

$$E = \text{Vect}((e_i)_{i \in I})$$

EXEMPLE:

$$E = \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} e_1 &= (1, 0, 1) \\ e_2 &= (0, 1, 1) \\ e_3 &= (1, 1, 1) \\ e_4 &= (1, 0, 0) \\ e_5 &= (0, 1, 2) \end{cases}$$

Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . On cherche  $(\lambda_1, \dots, \lambda_5) \in \mathbb{R}^5$  tels que

$$(E) : (x, y, z) = \sum_{i=1}^5 \lambda_i e_i$$

$$(E) \iff (x, y, z) = (\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4, \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_5)$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 + \boxed{\lambda_4} = x \\ \lambda_2 + \boxed{\lambda_3} + \lambda_5 = y \\ \boxed{\lambda_1} + \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_5 = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_4 = x - \lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_3 = y - \lambda_2 - \lambda_5 \\ \lambda_1 = z - \lambda_2 - \lambda_3 - 2\lambda_5 \end{cases}$$

Par exemple,  $(\lambda_1 = z - y, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = y, \lambda_4 = x - z, \lambda_5 = 0)$  est solution

Donc

$$\text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) = E$$

EXEMPLE:

$$E = \mathbb{R}^4$$

$$\begin{cases} e_1 = (1, 0, 1, 0) \\ e_2 = (0, 1, 0, 1) \\ e_3 = (1, 1, 1, 1) \\ e_4 = (1, -1, 1, -1) \\ e_5 = (1, 1, 0, 0) \end{cases}$$

Soit  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ ,  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \in \mathbb{R}^5$

$$\begin{aligned}
 (E) \quad (x, y, z, t) = \sum_{i=1}^5 \lambda_i e_i &\iff \begin{cases} x = \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 \\ y = \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_5 \\ z = \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ t = \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 \end{cases} \\
 &\iff \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \end{matrix} \begin{cases} \lambda_5 = x - z \\ \lambda_5 = y - t \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = z \\ \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = t \end{cases} \\
 &\iff \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} \lambda_5 = x - z \\ \boxed{0 = y - t - x + z} \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = z \\ \lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 = t \end{cases}
 \end{aligned}$$

Par exemple ;  $(1, 0, 0, 0) \notin \text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$

**Proposition:** Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille génératrice de  $E$  et  $(u_j)_{j \in J}$  une surfamille de  $(e_i)_{i \in I}$  constituée de vecteurs de  $E$  :

$$\forall i \in I, \exists j \in J, e_i = u_j$$

Alors,  $(u_j)_{j \in J}$  engendre  $E$ . □

**Proposition:** Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille génératrice de  $E$  et  $i_0 \in I$

$$\begin{aligned}
 (e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}} \text{ engendre } E &\iff e_{i_0} \in \text{Vect}((e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}) \\
 &\iff e_{i_0} \text{ est une combinaison linéaire des } e_i \text{ (} i \in I, i \neq i_0 \text{)}
 \end{aligned}$$

*Preuve:* “  $\implies$  ”  $E = \text{Vect}((e_i)_{i \neq i_0})$  et  $e_{i_0} \in E$

“  $\impliedby$  ” Soit  $u \in E$ . Soit  $(\lambda_i)_{i \in I}$  une famille presque nulle de scalaires telle que

$$u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$$

Soit  $(\mu_i)_{i \neq i_0}$  une famille de scalaires telle que

$$e_{i_0} = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \mu_i e_i$$

D'où,

$$\begin{aligned}
 u &= \lambda_{i_0} e_{i_0} + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i e_i \\
 &= \lambda_{i_0} \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \mu_i e_i + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i e_i \\
 &= \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} (\lambda_{i_0} \mu_i + \lambda_i) e_i \\
 &\in \text{Vect}((e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}})
 \end{aligned}$$

□

**Proposition:** Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille génératrice de  $E$ ,  $i_0 \in I$ .

1. On pose  $u_i = \begin{cases} e_i & \text{si } i \neq i_0 \\ \lambda e_{i_0} & \text{sinon} \end{cases}$  où  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$

Alors,  $(u_i)_{i \in I}$  engendre  $E$

2. Soit  $v \in \text{Vect}((e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}})$ .

On pose  $u_i = \begin{cases} e_i & \text{si } i \neq i_0 \\ e_{i_0} + v & \text{sinon} \end{cases}$  où  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$

Alors,  $(u_i)_{i \in I}$  engendre  $E$

*Preuve:* 1. Soit  $u \in E$ . On pose

$$u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$$

où  $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^I$  presque nulle

$$\begin{aligned} u &= \lambda_{i_0} e_{i_0} + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i e_i \\ &= \lambda_{i_0} \lambda^{-1} u_{i_0} + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i u_i \\ &\in \text{Vect}((u_i)_{i \in I}) \end{aligned}$$

2. Soit  $u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i \in E$

$$\begin{aligned} u &= \lambda_{i_0} e_{i_0} + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i e_i \\ &= \lambda_{i_0} (u_{i_0} - v) + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i u_i \end{aligned}$$

Or,  $v = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \mu_i e_i = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \mu_i u_i$  où  $(\mu_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$  presque nulle

Donc,  $u = \lambda_{i_0} + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} (\lambda_i - \lambda_{i_0} \mu_i) u_i \in \text{Vect}((u_i)_{i \in I})$

□

**Définition:** Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs. On dit que  $(e_i)_{i \in I}$  est libre si aucun vecteur de cette famille n'est une combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille :

$$\forall i \in I, e_i \notin \text{Vect}((e_j)_{j \in I \setminus \{i\}})$$

On dit aussi que les  $e_i$  sont linéairement indépendants

**Proposition:**

$$(e_i)_{i \in I} \text{ est libre } \iff \forall (\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle, } \left( \sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0_E \implies \forall i \in I, \lambda_i = 0_{\mathbb{K}} \right)$$

*Preuve:* “  $\implies$  ” Soit  $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^I$  presque nulle. On suppose que

$$\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0_E$$

On suppose aussi qu'il existe  $i_0 \in I$  tel que  $\lambda_{i_0} \neq 0_{\mathbb{K}}$

On a alors

$$\lambda_{i_0} e_{i_0} = - \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i e_i$$

$\lambda_{i_0} \neq 0_{\mathbb{K}}$  donc il a un inverse  $\lambda_{i_0}^{-1}$  donc

$$e_{i_0} = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \left( -\lambda_i \lambda_{i_0}^{-1} \right) e_i \in \text{Vect}((e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}})$$

une contradiction  $\nmid$

“  $\impliedby$  ” On suppose que  $(e_i)_{i \in I}$  n'est pas libre. On considère  $i_0 \in I$  tel que  $e_{i_0}$  soit une combinaison linéaire des  $e_i, i \in I \setminus \{i_0\}$

$$e_{i_0} = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \mu_i e_i$$

avec  $(\mu_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$  famille presque nulle de scalaires.

Alors,  $1_{\mathbb{K}} e_{i_0} - \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \mu_i e_i = 0_E$  Par hypothèse

$$\begin{cases} 1_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} \\ \forall i \neq i_0, -\mu_i = 0_{\mathbb{K}} \end{cases}$$

une contradiction  $\nmid$

□

EXEMPLE:

$E = \mathbb{R}^3$  On pose  $\begin{cases} e_1 = (1, 1, 0) \\ e_2 = (1, 0, 1) \end{cases}$

Soit  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_E \iff (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2) = (0, 0, 0)$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Donc,  $(e_1, e_2)$  est libre.

EXEMPLE:

$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, e_1 = \cos, e_2 = \sin$

Soit  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_E &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) = 0 \\ &\implies \begin{cases} \lambda_1 = 0 & (x = 0) \\ \lambda_2 = 0 & (x = 0 \text{ dans la dérivée}) \end{cases} \end{aligned}$$

Donc  $(e_1, e_2)$  est libre.

**Proposition:** Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille libre de  $E$ . Alors

$$\sum_{i \in I} \mathbb{K}e_i = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{K}e_i$$

i.e.

$$\forall u \in \sum_{i \in I} \mathbb{K}e_i, \exists! (\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle telle que } u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$$

En d'autres termes, tout vecteur de  $E$  a au plus une décomposition en combinaisons linéaires des  $e_i, i \in I$

*Preuve:*

$$\text{Soit } u \in \sum_{i \in I} \mathbb{K}e_i$$

On suppose que  $u$  a au plus 2 décompositions

$$u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i = \sum_{i \in I} \mu_i e_i$$

avec  $(\lambda_i)$  et  $(\mu_i)$  presque nulles.

Alors,

$$0_E = u - u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i - \sum_{i \in I} \mu_i e_i = \sum_{i \in I} (\lambda_i - \mu_i) e_i$$

Or,  $(e_i)_{i \in I}$  est libre donc

$$\forall i \in I, \lambda_i \mu_i = 0_{\mathbb{K}}$$

□

**Proposition:** Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille libre de  $E$ .

1. Toute sous famille de  $(e_i)$  est encore libre
2. Soit  $u \in E$ ,  $\mathcal{F} = (e_i \mid i \in I) \cup \{u\}$ .

$$\mathcal{F} \text{ est libre} \iff u \notin \text{Vect}(e_i \mid i \in I)$$

3. (a) Quand on remplace un vecteur  $e_i$  par  $\lambda e_i$  avec  $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ , la famille obtenue est libre.
- (b) Quand on remplace un vecteur  $e_i$  par  $v + e_i$  avec  $v \in \text{Vect}(e_j \mid j \neq i)$ , la famille obtenue est libre.

**Définition:** Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $E$ . On dit que  $(e_i)$  est une base de  $E$  si c'est à la fois une famille libre et génératrice de  $E$ ; i.e. si

$$E = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{K}e_i$$

i.e. si

$$\forall u \in E, \exists! (\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle telle que } u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$$

Dans ce cas, on dit que les  $\lambda_i$  sont les coordonnées de  $u$  dans la base  $(e_i)_{i \in I}$

- EXEMPLE: 1.  $(1, i)$  est une base de  $\mathbb{C}$  en tant que  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  
 2.  $(1)$  est une base de  $\mathbb{C}$  en tant que  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  
 3.

$$\begin{cases} u = 1 + i \\ v = 1 - i \end{cases}$$

$(u, v)$  est une  $\mathbb{R}$ -base de  $\mathbb{C}$

En effet, soit  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} z = \lambda u + \mu v &\iff a + ib = \lambda + \mu + i(\lambda - \mu) \\ &\iff \begin{cases} a = \lambda + \mu \\ b = \lambda - \mu \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda = \frac{a+b}{2} \\ \mu = \frac{a-b}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

#### AUTRE MÉTHODE

$(1, i)$  base  
 donc  $(1, 1 + i)$  base  
 donc  $(1 - (1 + i), 1 + i)$  base  
 donc  $(-2i, 1 + i)$  base  
 donc  $(1 + i - 2i, 1 + i)$  base  
 donc  $(1 - i, 1 + i)$  base

- EXEMPLE (Bases canoniques): 1. La base canonique de  $\mathbb{K}^n$  est  $(e_1, \dots, e_n)$  où  $\forall i, e_i = (0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}, \underbrace{1_{\mathbb{K}}}_{\text{en ième position}}, 0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}})$  car

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathbb{K}^n, \exists! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, u = (x_1, \dots, x_n) &= x_1(1_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}) \\ &+ x_2(0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}) \\ &\vdots \\ &+ x_n(0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \dots, 1_{\mathbb{K}}) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i e_i \end{aligned}$$

2.  $E$  l'ensemble des fonctions polynomiales de  $\mathbb{K}$  dans  $\mathbb{K}$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  où  $\mathbb{K}$  est infini.  
 La base canonique de  $E$  est  $(x \mapsto x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  car

$$\forall P \in E, \exists! n \in \mathbb{N}, \exists! (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}, \forall x \in \mathbb{K}, P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

3.  $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$   
 La base canonique de  $E$  est  $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  où

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, E_{i,j} = \left( \sigma_{i,j}^{k,\ell} \right)_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \ell \leq p}}$$

i.e.

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & 1_{\mathbb{K}} & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$\begin{matrix} j \\ \downarrow \end{matrix}$

$$\forall A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}, A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} E_{i,j}$$