Chapitre 02

Nombre

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 20 février 2022

Table des matières

Première partie

Trigonométrie

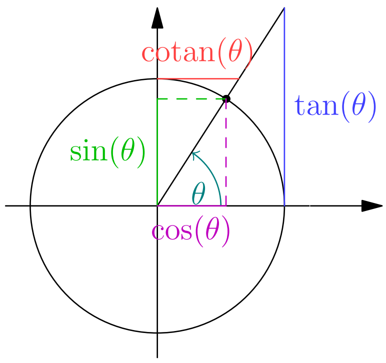
Definition

On définit, pour

$$\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$$
$$\iff \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$$

la <u>tangente</u> de θ par

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



Definition

Pour $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-k\pi,(k+1)\pi[$, on définit la <u>contangente</u> de θ par

$$\operatorname{cotan}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Proposition

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1. $\cos(-a) = \cos(a)$
2. $\cos(a+2\pi) = \cos(a)$
3. $\cos(a+\pi) = -\cos(a)$
4. $\cos(\pi-a) = -\cos(a)$
5. $\sin(-a) = -\sin(a)$
6. $\sin(a+2\pi) = \sin(a)$
7. $\sin(a+\pi) = -\sin(a)$
8. $\sin(\pi-a) = \sin(a)$
9. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
10. $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$
11. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \sin(a)$
12. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \cos(a)$

Proposition

Soient a et b deux réels tels que $a \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $b \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

1. $\tan(a+\pi) = \tan(a)$

2. $\tan(-a) = -\tan(a)$
3. Si $a+b \not\equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]$, alors, $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

Proposition

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Si $a \not\equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]$, alors, $1+\tan^2(a) = \frac{1}{\cos^2(a)}$
2. Si $a \not\equiv \pi \ [2\pi]$

— $\cos(a) = \frac{1-\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{a}{2}\right)}$

— $\sin(a) = \frac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$

— Si $a \not\equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]$, $\tan(a) = \frac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$

Deuxième partie

Nombres complexes de module 1

Proposition

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$(\cos(a) + i\sin(a)) \times (\cos(b) + i\sin(b)) = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$$

Definition

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $e^{ia} = \cos(a) + i\sin(a)$
Ainsi, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, e^{ia} \times e^{ib} = e^{i(a+b)}$

Proposition

Soient a, b, c trois nombres complexes avec $a \neq 0$ et z_1, z_2 les racines de $P : z \mapsto az^2 + bz + c$
Alors, $z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a}$ et $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$

Proposition

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et z_1, z_2, z_3 les solutions de

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

Alors,

$$\begin{cases} z_1 z_2 z_3 = -c \\ z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 = b \\ z_1 + z_2 + z_3 = -a \end{cases}$$

$\square$

Proposition

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres complexes et $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les solutions de

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0 = 1$$

Alors,

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_k \leqslant n} z_{i_1} \times z_{i_2} \times \cdots \times z_{i_k} = (-1)^k a_{n-k}$$

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = -a_{n-1}$$

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = (-1)^k a_0$$

Troisième partie

Géométrie des nombres complexes

Dans ce paragraphe, $\mathscr{P}$ dérisgne un plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

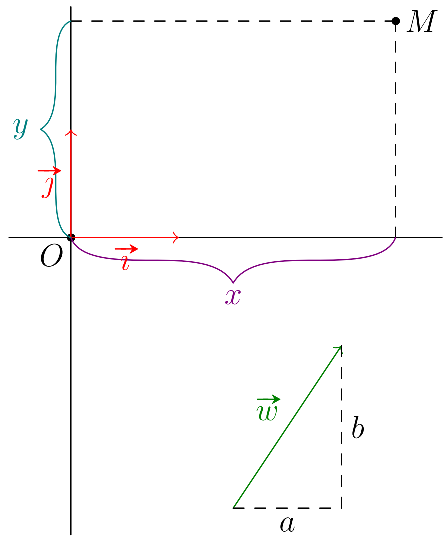
Definition

Soit $M \in \mathscr{P}$. On note (x, y) les coordonnées du point M par rapport au repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
L'affixe de M est le nombre

$$z_M = x + iy \in \mathbb{C}$$

Soit $\vec{w} \in \vec{\mathscr{P}}$ (le plan des vecteurs) et (a, b) les coordonées de $\vec{w}$.
L'affixe de $\vec{w}$ est

$$z_{\vec{w}} = a + ib \in \mathbb{C}$$



Proposition

Soit $(A, B) \in \mathscr{P}^2$ et $(\vec{w_1}, \vec{w_2}) \in \vec{\mathscr{P}}^2$

1. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
2. $z_{\vec{w_1}+\vec{w_2}} = z_{\vec{w_1}} + z_{\vec{w_2}}$

$\square$

Proposition

Soit $(\vec{w_1}, \vec{w_2}) \in \vec{\mathscr{P}}^2$ avec $\vec{w_1} \neq \vec{0}$ et $\vec{w_2} \neq \vec{0}$
Alors, $\left|\dfrac{z_{\vec{w_1}}}{z_{\vec{w_2}}}\right| = \dfrac{\|\vec{w_1}\|}{\|\vec{w_2}\|}$ et $\arg\left(\dfrac{z_{\vec{w_1}}}{z_{\vec{w_2}}}\right) = \underbrace{(\widehat{\vec{w_1}, \vec{w_2}})}_{\text{l'angle entre } \vec{w_1} \text{ et } \vec{w_2}}$

Corollaire

Avec les hypothèses et notations précédentes,

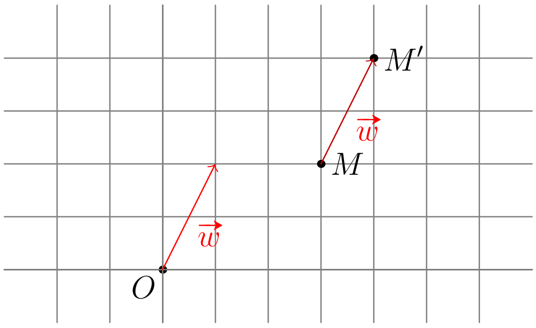
1. $\vec{w_1}$ et $\vec{w_2}$ sont collinéaires $\iff \dfrac{z_{\vec{w_1}}}{z_{\vec{w_2}}} \in \mathbb{R}$
2. $\vec{w_1}$ et $\vec{w_2}$ sont orthogonaux $\iff \dfrac{z_{\vec{w_1}}}{z_{\vec{w_2}}} \in i\mathbb{R}$

Definition

Soit $\vec{w} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$. La <u>translation</u> de vecteur $\vec{w}$ est l'application

$$\begin{aligned} t_{\vec{w}} : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

où M' vérifie $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$



Proposition

Soit $\vec{w} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$ et $(M, M') \in \mathscr{P}^2$

$$M' = t_{\vec{w}}(M) \iff z_{M'} = z_M + z_{\vec{w}}$$

Proposition

Soient $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$.

$$t_{\overrightarrow{w_2}} \circ t_{\overrightarrow{w_1}} = t_{\overrightarrow{w_1}+\overrightarrow{w_2}}$$

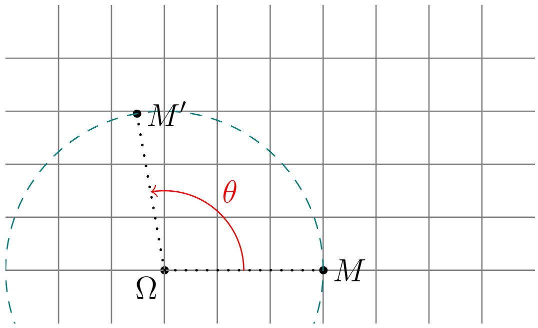
Definition

Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
La <u>rotation</u> de centre Ω et d'angle θ est l'application

$$\begin{aligned} \rho_{\Omega,\theta} : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

où M' vérifie

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{\Omega M}\| = \|\overrightarrow{\Omega M'}\| \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta \end{cases}$$



Proposition

Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ d'affixe ω, $\theta \in \mathbb{R}$ et $(M, M') \in \mathscr{P}^2$

$$(*) : \qquad M' = \rho_{\Omega,\theta}(M) \iff z_{M'} = \omega + e^{i\theta}(z_M - \omega)$$

Remarque *Cas particulier*
Si $\Omega = O$ alors

$$(*) \iff z_{M'} = e^{i\theta} z_M$$

Corollaire

Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ d'affixe ω et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \rho_{\Omega,\theta} &= t_{\overrightarrow{O\Omega}} \circ \rho_{O,\theta} \circ t_{\overrightarrow{\Omega O}} \\ &= t_{\overrightarrow{O\Omega}} \circ \rho_{O,\theta} \circ (t_{\overrightarrow{O\Omega}})^{-1} \end{aligned}$$

Proposition

Soient $(\Omega_1, \Omega_2) \in \mathscr{P}^2$ et $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\rho_{\Omega_1,\theta_1} \circ \rho_{\Omega_1,\theta_2} = \rho_{\Omega_1,\theta_1+\theta_2} = \rho_{\Omega_1,\theta_2} \circ \rho_{\Omega_1,\theta_1}$$

Si $\begin{cases} \Omega_1 \neq \Omega_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0 \ [2\pi] \end{cases}$ alors $\rho_{\Omega_1,\theta_1} \circ \rho_{\Omega_2,\theta_2}$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$

Si $\begin{cases} \Omega_1 \neq \Omega_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \equiv 0 \ [2\pi] \end{cases}$ alors $\rho_{\Omega_1,\theta_1} \circ \rho_{\Omega_2,\theta_2}$ est une translation

Proposition

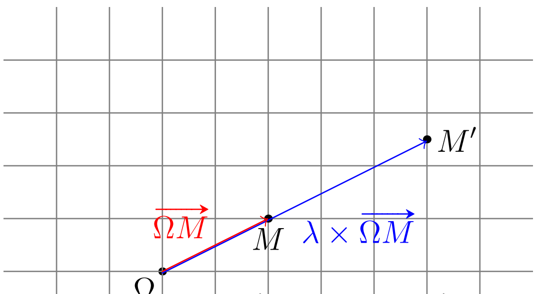
Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ d'affixe ω, $\vec{w} \in \vec{\mathscr{P}}$ d'affixe u. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \not\equiv 0 \ [2\pi]$.
- $t_{\vec{w}} \circ \rho_{\Omega,\theta}$ est une rotation d'angle θ
- $\rho_{\Omega,\theta} \circ t_{\vec{w}}$ est aussi une rotation d'angle θ

Definition

Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
L'homothétie de centre Ω et de rapport λ est l'application

$$\begin{aligned} h_{\Omega,\lambda} : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

où M' vérifie $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$



Proposition

Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ d'affixe ω, $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient $M \in \mathscr{P}$ d'affixe z et $M' \in \mathscr{P}$ d'affixe z'.

$$M' = h_{\Omega,\lambda}(M) \iff z' = \omega + \lambda(z - \omega)$$

Proposition

Soient $(\Omega_1, \Omega_2) \in \mathscr{P}^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathscr{P}^2$

1. Si $\Omega_1 = \Omega_2$ alors, $h_{\Omega_1,\lambda_1} \circ h_{\Omega_2,\lambda_2} = h_{\Omega_1,\lambda_1\lambda_2}$

2. Si $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$, alors, $h_{\Omega_1,\lambda_1} \circ h_{\Omega_2,\lambda_2}$ est une homotéthie de rapport $\lambda_1\lambda_2$
3. Si $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et $\lambda_1\lambda_2 = 1$, alors, $h_{\Omega_1,\lambda_1} \circ h_{\Omega_2,\lambda_2}$ est une translation.

□

Proposition

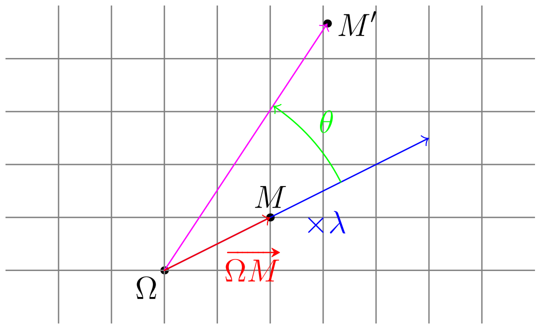
Soit $\Omega \in \mathscr{P}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\vec{w} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$.
Alors, $t_{\vec{w}} \circ h_{\Omega,\lambda}$ et $h_{\Omega,\lambda} \circ t_{\vec{w}}$ sont homothéties de rapport λ. □

Remarque *Cas particulier*
Soit $M \in \mathscr{P}$ d'affixe z, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M' = h_{O,\lambda}(M)$ d'affixe z'
On a $z' = \lambda z$

Definition

Soient $\Omega \in \mathscr{P}$, $(\theta, \lambda) \in \mathbb{R}^2$. La <u>similitude (directe)</u> de centre Ω, d'angle θ et de rapport λ est

$$S_{\Omega,\theta,\lambda} = h_{\Omega,\lambda} \circ \rho_{\Omega,\theta}$$



Proposition

Avec les notations précédentes,

$$S_{\Omega,\theta,\lambda} = \rho_{\Omega,\theta} \circ h_{\Omega,\lambda}$$

Proposition

L'expression complexe de $S_{\Omega,\theta,\lambda}$ est

$$z' = \omega + \lambda e^{i\theta}(z - \omega)$$

Quatrième partie

Exponentielle complexe

Definition

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$\exp(z) = e^{\mathfrak{Re}(z)} \times (\cos(\mathfrak{Im}(z)) + i \sin(\mathfrak{Im}(z))$$

Ainsi, si $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\exp(z) = \exp(a + ib) = e^a \times (\cos(b) + i(\sin(b)) = e^a e^{ib}$$

Proposition

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

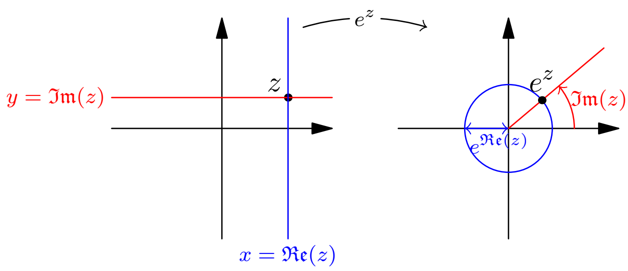
$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \times \exp(z_2)$$

Remarque *Notation*

On écrit e^z à la place de $\exp(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$.

Proposition

$$\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} |e^z| = e^{\mathfrak{Re}(z)} \\ \arg(e^z) \equiv \mathfrak{Im}(z) \ [2\pi] \end{cases}$$



Remarque

$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ n'est pas bijective :

- $\begin{cases} \exp(0) = \exp(2i\pi) = 1 \\ 0 \neq 2i\pi \end{cases}$
- 0 n'a pas d'antécédant

Il n'y a donc pas de logarithme complexe.

Cinquième partie

Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

Definition

Soit f définie sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ ($\forall x \in D, f(x) \in \mathbb{C}$)
On pose :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Re}(f) : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathfrak{Re}(f(x)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathfrak{Im}(f) : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathfrak{Im}(f(x)) \end{aligned}$$

Definition

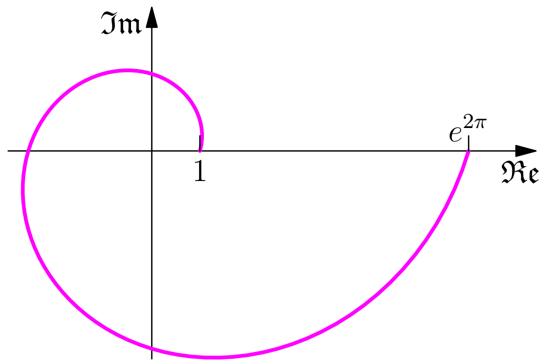
Soit $f : D \to \mathbb{C}$. On dit que

— f est continue si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont continues
— f est dérivable si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont dérivables.
Dans ce cas, la dérivée de f est

$$\begin{aligned} f' : D &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \mathfrak{Re}(f)'(x) + i\mathfrak{Im}(f)'(x) \end{aligned}$$

Remarque

On peut représenter f de la façon suivante.



$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{(1+i)t} \end{aligned}$$

Proposition

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$

1. $u + v$ dérivable et $(u + v)' = u' + v'$
2. uv dérivable et $(uv)' = u'v + v'u$
3. Si $v \neq 0$, $\frac{u}{v}$ dérivable et $\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Proposition

Soit $v : D \to \mathbb{R}$ et $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables (avec $D \subset \mathbb{R}$).
Alors, $u \circ v$ est dérivable et

$$(u \circ v)' = (u' \circ v) \times v'$$

Proposition

Soit $u : D \to \mathbb{C}$ et $f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{u(x)} \end{array}$
Alors, f est dérivable sur D et

$$\forall x \in D, f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$