TD 20 Fractions rationnelles

Exercice 1: ★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Former la décomposition en éléments simples de $\dfrac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)}$.

Exercice 2: ★

Effectuer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles suivantes.

(1) $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$

(2) $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$

(3) $\dfrac{1}{X(X-1)^2}$

(4) $\dfrac{2X}{X^2+1}$

(5) $\dfrac{1}{X^2+X+1}$

(6) $\dfrac{4}{(X^2+1)^2}$

(7) $\dfrac{3X-1}{X^2(X+1)^2}$

(8) $\dfrac{1}{X^4+X^2+1}$

(9) $\dfrac{3}{(X^3-1)^2}$

Exercice 3: ★★

Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F telle que $F^2 = X$.

Exercice 4: ★★★

Déterminer un supplémentaire de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$.

Exercice 5: ★★★

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme scindé à racines simples $x_1, \dots, x_n$.

(1) Décomposer en éléments simples $\dfrac{P''}{P}$.

(2) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0$.

Exercice 6: ★★★★

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ deux-à-deux distincts, et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ deux-à-deux distincts, tels que pour tout i, j, $a_i + \alpha_j \neq 0$.

Résoudre le système

$$(S): \begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1+\alpha_1} + \dfrac{x_2}{a_2+\alpha_1} + \cdots + \dfrac{x_n}{a_n+\alpha_1} = 1 \\ \dfrac{x_1}{a_1+\alpha_2} + \dfrac{x_2}{a_2+\alpha_2} + \cdots + \dfrac{x_n}{a_n+\alpha_2} = 1 \\ \vdots \\ \dfrac{x_1}{a_1+\alpha_n} + \dfrac{x_2}{a_2+\alpha_n} + \cdots + \dfrac{x_n}{a_n+\alpha_n} = 1 \end{cases}$$

Exercice 7: ★★★★

Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ un polynôme à coefficients réels scindé sur $\mathbb{R}$.

(1) Montrer que pour tout x réel, $(P'(x))^2 - P(x)P''(x) \geq 0$.

(2) En déduire que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$.

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because LaTeX now knows how many pages to expect for this document.