

CHAPITRE 13

Sy
calcul

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 28 mars 2022

Table des matières

REMARQUE (Résumé): — Méthode du pivot : opérations sur les lignes :

1. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ($\lambda \in \mathbb{K}$)
2. $L_i \leftarrow \mu L_i$ ($\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$)
3. $L_i \leftrightarrow L_j$

En appliquant la méthode du pivot on obtient

$$(S) \iff \begin{cases} x_{i_1} &= \ell_1(x_{j_1}, \dots, x_{j_n-r}) \\ x_{i_2} &= \ell_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_n-r}) \\ \vdots & \vdots \\ x_{i_r} &= \ell_r(x_{j_1}, \dots, x_{j_n-r}) \\ 0 &= * \end{cases}$$

Les inconnues x_{i_1}, \dots, x_{i_r} sont les inconnues principales, les autres sont appelées paramètre.

On peut supprimer les équations $0 = 0$. S'il y a une équation $0 = \lambda$ avec $\lambda \neq 0$, il n'y a pas de solution : le système est incompatible.

Les inconnues principales dépendent des choix de pivots !

— Représentation matricielle

$$(S) \iff AX = B$$

où A est la matrice du système, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et B est le second membre

(S) a n équations et p inconnues donc A a n lignes et p colonnes.

La matrice $(A \mid B)$ est la matrice augmentée du système.

- Faire une opération L sur les lignes d'une matrice M revient à multiplier M à gauche par une matrice R où R est obtenue en appliquant L sur I_n .
- La méthode du pivot matriciel par lignes :

Définition (Rang d'une matrice): Soit M une matrice et R la matrice échelonnée réduite par lignes associée à M . Le nombre de lignes non nulles de R (le nombre de pivots) est appelée rang de M .
 Soit S un système de matrice augmentée $(A \mid B)$. Le rang de S est le rang de la matrice A .
 Le rang est noté rg .

Proposition (Interprétation): — Soit S un système de n équations, p inconnues de rang r .
 r est le nombre d'inconnues principales, il y a $p - r$ paramètres.
 — Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r .
 r est le nombre de lignes indépendantes : il y a $n - r$ lignes combinaisons linéaires des r lignes indépendantes.

Corollaire: Soit S un système de n équations, p inconnues de rang n .
 Alors S a au moins une solution.
 Si $n = p$ alors S a exactement une solution.
 Si $p > n$, il y a une infinité de solutions.

Définition: Soit S un système à n équations, n inconnues et de rang n .
 On dit que S est un système de Cramer (il a une unique solution)

Proposition: Soit S un système de n équations, p inconnues de rang r .
 — Si $r < n$ alors le système peut-être incompatible : il y a $n - r$ équations de la forme $0 = *$ après la méthode du pivot.
 — Si $r < p$ alors il y a $p - r$ paramètres : si le système n'est pas incompatible, il y aura une infinité de solutions.

Proposition: Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et C une opération élémentaire sur les colonnes de A . On pose A' la matrice obtenue en appliquant C sur les colonnes de A .

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A')$$

Proposition: Le rang d'une matrice est aussi le nombre de colonnes indépendantes. \square

Définition: Une matrice triangulaire supérieure est une matrice carrée avec des coefficients nuls sous sa diagonale :

$$T = \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ 0 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix}$$

diagonale

et triangulaire inférieure si les coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls :

$$T = \begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ * & \dots & \dots & * \end{pmatrix}$$

Un système triangulaire est de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 + \dots \\ \quad + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 + \dots \\ \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \quad a_{pp}x_p = b_p + \dots \\ \quad \quad \quad \quad 0 = \dots \end{cases}$$

REMARQUE:

$$(S) \iff \begin{cases} AX = B \\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \end{cases}$$

On pose

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

On cherche $\varphi^{-1}(\{B\})$

On sait que

- $(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe
- $(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), +)$ aussi

Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$

$$\varphi(X + Y) = A(X + Y) = AX + AY = \varphi(X) + \varphi(Y)$$

Donc φ est un morphisme de groupes.

On peut résoudre (S) de la façon suivante :

-
- On cherche $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $\varphi(X_0) = B$
 - On résout $\varphi(X) = 0$ ($X \in \text{Ker}(\varphi)$)

C'est le système homogène associé :

$$\varphi(X) = B \iff \exists H \in \text{Ker}(\varphi), X = X_0 + H$$

Proposition:

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

$$B = (b_{k,\ell})_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq \ell \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

$$AB = (c_{i,\ell})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq \ell \leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

$$c_{i,\ell} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,\ell}$$