Chapitre 20

Fractions rationnelle

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 12 mars 2022

Table des matières

Première partie

Construction de $\mathbb{K}(X)$

Proposition Définition

On définit la relation $\sim$ sur $\mathbb{K}[X] \times \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)$ par

$$(P, Q) \sim (A, B) \iff PB = QA$$

Cette relation est une relation d'équivalence. On note $\big(\mathbb{K}[X] \times \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)\big)/\sim$.
Les éléments de $\mathbb{K}(X)$ sont appelés fractions rationnelles.
On note $\dfrac{P}{Q}$ la classe d'équivalence du couple (P, Q).

■

Proposition

Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)$ et $R \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Alors

$$\frac{PR}{QR} = \frac{P}{Q}$$

■

Definition

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \setminus \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)$. On dit que la fraction $\dfrac{P}{Q}$ est sous forme irréductible si $P \wedge Q = 1$.

Proposition Définition

Soient $(P, Q) \sim (A, B)$. Alors

$$\deg(P) - \deg(Q) = \deg(A) - \deg(B)$$

Le degré de $\dfrac{P}{Q}$ est $\deg(P) - \deg(Q)$. On note ce "nombre" $\deg\left(\dfrac{P}{Q}\right)$.

■

Proposition Définition

Soient $(P, Q) \sim (A, B)$ et $(R, S) \sim (C, D)$. Alors, $(PR, QS) \sim (AC, BD)$.
Le produit de $\dfrac{P}{Q}$ avec $\dfrac{R}{S}$ est $\dfrac{PR}{QS}$

■

Proposition Définition

Avec les notations précédentes,

$$(PS + RQ, QS) \sim (AD + BC, BD)$$

On définit la somme de $\dfrac{P}{Q}$ et $\dfrac{R}{S}$ par

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{PS + RQ}{QS}$$

■

Théorème

$(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps.

■

Proposition

$$\forall P, A \in \mathbb{K}[X], \forall Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}, \qquad \frac{P}{Q} + \frac{A}{Q} = \frac{P+A}{Q}$$

Proposition

$i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ P & \longmapsto & \dfrac{P}{1} \end{array}$ est un morphisme d'anneaux injectif.

■

Definition

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On pose

$$\lambda F = \frac{\lambda P}{Q} = \frac{\lambda}{1} \times \frac{P}{Q}$$

Proposition

$(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ P & \longmapsto & \dfrac{P}{1} \end{array}$ est linéaire.

□

Remarque

On peut identifier $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $\dfrac{P}{1} \in \mathbb{K}(X)$ i.e. écrire $P = \dfrac{P}{1}$ et alors
$\begin{cases} \mathbb{K}[X] \text{ est un sous-anneau de } \mathbb{K}(X) \\ \mathbb{K}[X] \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{K}(X) \end{cases}$
De plus, les deux définitions de degré coïncident.

Proposition

Soit $F, G \in \mathbb{K}(X)$.

1. $\deg(F+G) \leqslant \max(\deg F, \deg G)$
   Si $\deg(F) \neq \deg(G)$ alors $\deg(F+G) = \max(\deg F, \deg G)$;
2. $\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G)$;

3. Si $F \neq 0$, $\deg\left(\dfrac{1}{F}\right) = -\deg(F)$.

■

Deuxième partie

Décomposition en éléments simples

Définition
Lemme

$$\forall F \in \mathbb{K}(X), \exists!(E,G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X), \begin{cases} F = E + G \\ \deg(G) < 0 \end{cases}$$

On dit que E est la partie entière de F.

■

Lemme

Soit $F = \dfrac{P}{AB}$ avec

$$\begin{cases} (P,A,B) \in \mathbb{K}[X]^3; \\ A \neq 0; B \neq 0; \\ A \wedge B = 1; \deg F < 0. \end{cases}$$

Alors,

$$\exists!(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2, \begin{cases} F = \dfrac{U}{A} + \dfrac{V}{B} \\ \deg\left(\dfrac{U}{A}\right) < 0 \text{ et } \deg\left(\dfrac{V}{R}\right). \end{cases}$$

■

Lemme

Soit $H \in \mathbb{K}[X]$ irréductible, $n \in \mathbb{N}_*$, $P \in \mathbb{K}[X]$, $F = \dfrac{P}{H^n}$ et $\deg F < 0$. Alors,

$$\begin{cases} \exists!(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2, F = \dfrac{U}{H^n} + \dfrac{V}{H^{n-1}}; \\ \deg U < \deg H; \\ \deg\left(\dfrac{V}{H^{n+1}}\right) < 0. \end{cases}$$

■

Théorème **Théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$**

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $F = \dfrac{P}{Q}$ la forme irréductible de F. On note $(z_1, \ldots, z_p)$ les racines complexes de Q et $(\mu_1, \ldots, \mu_p)$ leur multiplicité.
Alors,

$$\exists!(E, a_{1,1}, \ldots, a_{1,\mu_1}, a_{2,1}, \ldots, a_{2,\mu_2}, \ldots, a_{p,1}, \ldots, a_{p,\mu_p}) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}^{\deg Q},$$
$$F = E + \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{a_{i,j}}{(X - z_i)^j} \right).$$