

CHAPITRE 11

TD

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 8 mai 2022

Table des matières

I	Exercice 23	1
II	Exercice	3
III	Exercice 10	4
III	Méthode 1	4
III	Méthode 2	5
IV	Exercice 11	5
V	Exercice 12	6
VI	Exercice 3	7
VII	Exercice 6	8
VIII	Exercice 7	9
IX	Exercice 3	9
X	Exercice 14	10
XI	Exercice 9	10
XII	Exercice 23	12
XIII	Exercice	15
XIV	Exercice 21	16
XV	Exercice 19	17

Première partie

Exercice 23

5. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{2+x}$.
 f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et décroissante sur $] -\infty; -2[$ et sur $]2; +\infty[$.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f	0 ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ 0

On pose $g : x \mapsto f(x) - x = \frac{1}{2+x} - x$ dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et

$$\forall x \neq -2, g'(x) = -\frac{1}{(2+x)^2} - 1 < 0$$

x	$-\infty$	α	-2	β	$+\infty$
g	$-\infty$ ↘ 0 ↘ $-\infty$			$+\infty$ ↘ 0 ↘ $-\infty$	

x	$-\infty$	α	-2	β	$+\infty$
f	0 ↘ α ↘ $-\infty$			$+\infty$ ↘ β ↘ 0	
$f(x) - x$		+	0	-	

(u_n) n'est pas définie s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$f^k(u_0) = -2$$

$$(f^k(x) \neq (f(x))^k, f^k = f \circ \dots \circ f)$$

— On suppose la suite bien définie,

$$\begin{aligned} \forall x \neq -2, |f'(x)| &= \left| -\frac{1}{(2+x)^2} \right| \\ &= \frac{1}{(2+x)^2} \end{aligned}$$

En particulier si $x > 0$, alors $f'(x) \leq \frac{1}{4}$

— On suppose $u_0 > -2$ alors $u_1 > 0$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, u_n > 0$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, |u_{n+1} - \beta| = |f(u_n) - f(\beta)| \leq \frac{1}{4} |u_n - \beta|$$

On en déduit par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, |u_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |u_1 - \beta|$$

- Or, $\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
 Donc, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \beta$
- Si $u_0 = \alpha$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$
- Si, $u_0 < -2$ et $u_0 \neq \alpha$, je conjecture qu'il existe $p \in \mathbb{N}_*$ tel que $u_p > -2$ et alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \beta$

Deuxième partie

Exercice

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(E_n) : x^5 + nx - 1 = 0$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$.

$$\forall n \in \mathbb{R}, f'_n(x) = 5x^4 + n > 0 \text{ sauf si } \begin{cases} x = 0 \\ n = 0 \end{cases}$$

u_n est le seul réel tel que $f_n(u_n) = 0$.

x	$-\infty$	0	u_n	$+\infty$
f_n	$-\infty$	-1	0	$+\infty$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} f_n(u_{n+1}) &= u_{n+1}^5 + nu_{n+1} - 1 \\ &= \underbrace{u_{n+1}^5 + (n+1)u_{n+1} - 1}_{f_{n+1}(u_{n+1})} - u_{n+1} \\ &= -u_{n+1} < 0 \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} < u_n$.

Les suites (u_n) est décroissante minorée par 0 donc elle converge.

On pose $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

On sait que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n^5 + nu_n - 1 = 0$$

Or,

$$\begin{aligned} u_n^5 &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell^5 \\ nu_n &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} -\infty & \text{si } \ell < 0 \\ +\infty & \text{si } \ell > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si, $\ell < 0$ alors $u_n^5 + nu_n - 1 \rightarrow -\infty \neq 0$.

Si, $\ell > 0$ alors $u_n^5 + nu_n - 1 \rightarrow +\infty \neq 0$.

Donc, $\boxed{\ell = 0}$

Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, nu_n = 1 - u_n^5 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

donc $\boxed{u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}}$

$$u_n = \frac{1}{n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right)$$

Donc,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, nu_n &= 1 - \left(\frac{1}{n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right)^5 \\ &= 1 - \frac{1}{n^5} (1 + o(1))^5 \\ &= 1 - \frac{1}{n^5} (1 + o(1)) \\ &= 1 - \frac{1}{n^5} + o \left(\frac{1}{n^5} \right) \end{aligned}$$

Donc,

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o \left(\frac{1}{n^6} \right)$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}_*, nu_n &= 1 - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o \left(\frac{1}{n^6} \right) \right)^5 \\ &= 1 - \frac{1}{n^5} \left(1 - \frac{1}{n^5} + o \left(\frac{1}{n^5} \right) \right)^5 \\ &= 1 - \frac{1}{n^5} \left(1 - \frac{5}{n^5} + o \left(\frac{1}{n^5} \right) \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n^5} + \frac{5}{n^{10}} + o \left(\frac{1}{n^{10}} \right) \end{aligned}$$

Donc,

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + \frac{5}{n^{11}} + o \left(\frac{1}{n^{11}} \right)$$

Troisième partie

Exercice 10

1. On sait que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \ell - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon$$

III.1 Méthode 1

En particulier, avec $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} > 0$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell - \varepsilon = \frac{1+\ell}{2} < 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq$$

La suite $(u_n)_{n \geq N}$ est décroissante minorée par 0 donc converge.

On pose $M = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. Alors, $u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L$

Si $L \neq 0$ alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{L}{L} = 1 \neq \ell$: une contradiction

Donc $L = 0$

III.2 Méthode 2

On pose $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon = \frac{1+\varepsilon}{2}$$

Donc

$$\forall n \geq N, \prod_{k=N}^n \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \prod_{k=N}^n \frac{1+\ell}{2}$$

donc

$$\forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-N+1}$$

et donc

$$\forall n \geq N, u_{n+1} \leq \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-N+1} u_n$$

$$\frac{1+\ell}{2} \in]0, 1[\text{ donc } \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-N+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par encadrement, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

2.

$$3. \forall n \in \mathbb{N}, u_n = n, \frac{n+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \text{ mais } u_n \rightarrow +\infty.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{n}, \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \text{ mais } u_n \rightarrow 0$$

Quatrième partie

Exercice 11

1. Soit $\varepsilon > 0$ (quelconque fixé). On cherche $N \in \mathbb{N}_*$ tel que

$$\forall n \geq N, \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i \right| \leq \varepsilon$$

Soit $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ Il existe $N' \in \mathbb{N}_*$ tel que

$$\forall n \geq N', |u_n| \leq \varepsilon'$$

La suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N'-1} |u_i| \right)$ converge vers 0.

Il existe $N'' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N'', \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N'-1} |u_i| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

On pose $N = \max(N', N'') \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\forall n \geq N, \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i \right| &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |u_i| = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{N'-1} |u_i| + \sum_{i=1}^n |u_i| \right) \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N'-1} |u_i| + \frac{n - N' + 1}{n} \varepsilon' \\
&\leq \varepsilon' + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N'-1} |u_i| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

2. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n - \ell \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'après la 1. ,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Or,

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}_*, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u_i - \ell) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ell \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i - \ell
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i = \ell + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

3. La réciproque est fautive : contre exemple

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, u_n = (-1)^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n (-1)^i \right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{donc } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Cinquième partie

Exercice 12

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, \forall k \in \mathbb{N}_*, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{k} + \frac{k}{n}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $k \in \mathbb{N}_*$ tel que $\frac{1}{k} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (par exemple $k = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil + 1$)

La suite $\left(\frac{k}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}_*}$ tends vers 0. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \frac{k}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc,

$$\forall n \geq N, 0 \leq u_n \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Sixième partie

Exercice 3

a.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_n &= \sqrt{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} - \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \\ &\sim -\frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

b. $\forall n \in \mathbb{N}_*$

$$n - (-1)^n = n \left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right) \sim n$$

$$\text{car } \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

De même, $n + (-1)^n \sim n$ donc $u_n \sim \frac{n}{n} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

c. $\forall n \in \mathbb{N}_*$

$$\begin{aligned} u_n &= (2 + (-1)^n)^{\frac{1}{n}} \\ &= e^{\frac{1}{n} \ln(2 + (-1)^n)} \\ &= e^{\frac{1}{n} + O(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \\ \text{car } \frac{1}{n} O(1) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

e. $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$kx - 1 < [kx] \leq kx$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}_*$,

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (kx - 1) < u_n \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n kx$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}_*$,

$$\underbrace{\frac{1}{n^2} \left(\frac{xn(n+1)}{2} - n \right)}_{\sim \frac{x}{2}} \leq u_n \leq \underbrace{\frac{x}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2}}_{\sim \frac{x}{2}}$$

Donc, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{2}$

g. $\forall n \in \mathbb{N}_*$

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n}$$

donc, $\forall n \in \mathbb{N}_*$,

$$\underbrace{\frac{2n+1}{n+1}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2} \leq u_n \leq \underbrace{\frac{2n+1}{n}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2}$$

donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$

$$1. \forall n \in \mathbb{N}_*, u_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2, 0 \leq u_n &= \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n}{n \times n \times n \times \dots \times n} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \dots \times \frac{n}{n} \\ &= \frac{1}{n} \prod_{k=2}^n \frac{k}{n} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Septième partie

Exercice 6

5)

$$\forall n \in \mathbb{N}_* u_n = e^{n \ln \left(\frac{2^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{1}{n}} + 4^{\frac{1}{n}}}{3} \right)}$$

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{2^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{1}{n}} + 4^{\frac{1}{n}}}{3} \right) &= \ln \left(\frac{1}{3} \left(3 + \frac{1}{n} (\ln 2 + \ln 3 + \ln 4) + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right) \\ &= \ln \left(1 + \frac{1}{3n} \ln 24 + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &\sim \frac{\ln 24}{3n} \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \ln \left(\frac{2^{\frac{1}{n}} + 3^{\frac{1}{n}} + 4^{\frac{1}{n}}}{3} \right) \sim \frac{\ln 24}{3} \rightarrow \frac{\ln 24}{3}$$

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{3} \ln 24} = \sqrt[3]{24}$$

6) $\forall n \in \mathbb{N}_*$,

$$u_n = e^{n^2 \ln \left(\frac{\text{Arctan}(n+1)}{\text{Arctan}(n)} \right)}$$

$$\frac{\text{Arctan}(n+1)}{\text{Arctan}(n)} = \frac{\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)} &= \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{1 - \frac{2}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{2}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{4}{\pi^2 n^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{n+1}\right) &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{Arctan}(n+1)}{\operatorname{Arctan}(n)} &= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2} \right) \times \left(1 + \frac{2}{\pi n} + \frac{4}{\pi^2 n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\
&= 1 + \frac{2}{\pi n} - \frac{2}{\pi n} + \frac{4}{\pi^2 n^2} - \frac{4}{\pi^2 n^2} + \frac{2}{\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= 1 + \frac{2}{\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{\operatorname{Arctan}(n+1)}{\operatorname{Arctan}(n)}\right) &\sim \frac{2}{\pi n^2} \\
n^2 \ln\left(\frac{\operatorname{Arctan}(n+1)}{\operatorname{Arctan}(n)}\right) &\sim \frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

Donc, $u_n \rightarrow e^{\frac{2}{\pi}}$

Huitième partie

Exercice 7

$$\forall n \in \mathbb{N}, a^n - 1 < \lfloor a^n \rfloor \leq a^n$$

CAS 1 : $a > 1$ Alors, $a^n - 1 > 0$ et donc,

$$(a^n - 1)^{\frac{1}{n}} < u_n \leq a$$

$$\begin{aligned}
(a^n - 1)^{\frac{1}{n}} &= e^{\frac{1}{n} \ln(a^n - 1)} \\
&= e^{\frac{1}{n} \ln(a^n(1 - \frac{1}{a^n}))} \\
&= \ln(a) + \frac{1}{n} \ln\left(1 - \frac{1}{a^n}\right) \\
&\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{\ln a} = a
\end{aligned}$$

CAS 2 : $a = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}_*, u_n = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 = a$

CAS 3 : $0 < a < 1$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, a^n \in]0, 1[$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}_* \lfloor a^n \rfloor = 0$$

donc u_n n'existe pas (car $\forall n \in \mathbb{N}_*, u_n = e^{\frac{1}{n} \ln(\lfloor a^n \rfloor)}$ et $\ln(0)$ n'existe pas)

Neuvième partie

Exercice 3

On pose

$$\begin{cases} \ell_1 = \lim u_{2n} \\ \ell_2 = \lim u_{2n+1} \\ \ell_3 = \lim u_{3n} \end{cases}$$

$(u_{6n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite de (u_{2n}) et de (u_{3n}) donc

$$u_{6n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_1$$

$$u_{6n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_3$$

Par unicité de la limite, $\ell_1 = \ell_3$.

$(u_{6n+3})_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous suite de (u_{2n+1}) et de (u_{3n}) donc $\ell_2 = \ell_3$

D'où $\ell_1 = \ell_2$, (u_n) converge.

Dixième partie

Exercice 14

Méthode 1

Soit $n \in \mathbb{N}_*$

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n^2 + 3n + 7} - \sqrt{n^2 + an + b} \\ &= n\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}} - n\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2}} \\ &= n\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}\right) - \frac{1}{8} \times \frac{9}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\quad - n\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{n} + \frac{b}{n^2}\right) - \frac{1}{8} \times \frac{a^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{3-a}{2} + \left(\frac{7}{2} - \frac{9}{8} - \frac{b}{2} + \frac{a^2}{8}\right) \times \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3-a}{2} \end{aligned}$$

Méthode 2

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(n^2 + 3n + 7) - (n^2 + an + b)}{\sqrt{n^2 + 3n + 7} + \sqrt{n^2 + an + b}} \\ &\sim \begin{cases} \frac{(3-a)n}{7-b} & \text{si } a \neq 3 \rightarrow \frac{3-a}{2} \\ \frac{2n}{2n} & \text{si } a = 3 \rightarrow 0 = \frac{3-a}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$\sqrt{n^2 + 3n + 7} = n + o(n)$ car $\frac{\sqrt{n^2 + 3n + 7}}{n} = \sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}} \rightarrow 1$
pour la même raison, $\sqrt{n^2 + an + b} = n + o(n)$

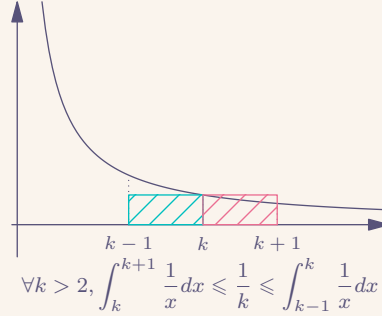
Donc, $\sqrt{n^2 + 3n + 7} + \sqrt{n^2 + an + b} = 2n + o(n) \sim 2n$

Onzième partie

Exercice 9

Hyper classique !

1. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$



Or,

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$$

donc

$$\forall k \geq 2, \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$

et

$$\forall k \geq 1, \frac{1}{k+1} \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}_*$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln(n) \right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+2) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$u_n - v_n = -\ln(n+1) + \ln(n) = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

3. (u_n) converge, on note γ sa limite :

$$u_n = \gamma + o(1)$$

donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) = \gamma + o(1)$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)}$$

4. $S_n \sim \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

5.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \\
&= \ln(2n) + \gamma + o(1) - \ln(n-1) - \gamma + o(1) \\
&= \ln\left(\frac{2n}{n-1} + o(1)\right) \\
&\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2
\end{aligned}$$

Douzième partie

Exercice 23

4.

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + 1 \end{cases}$$

On pose

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + 1 - x \end{aligned}$$

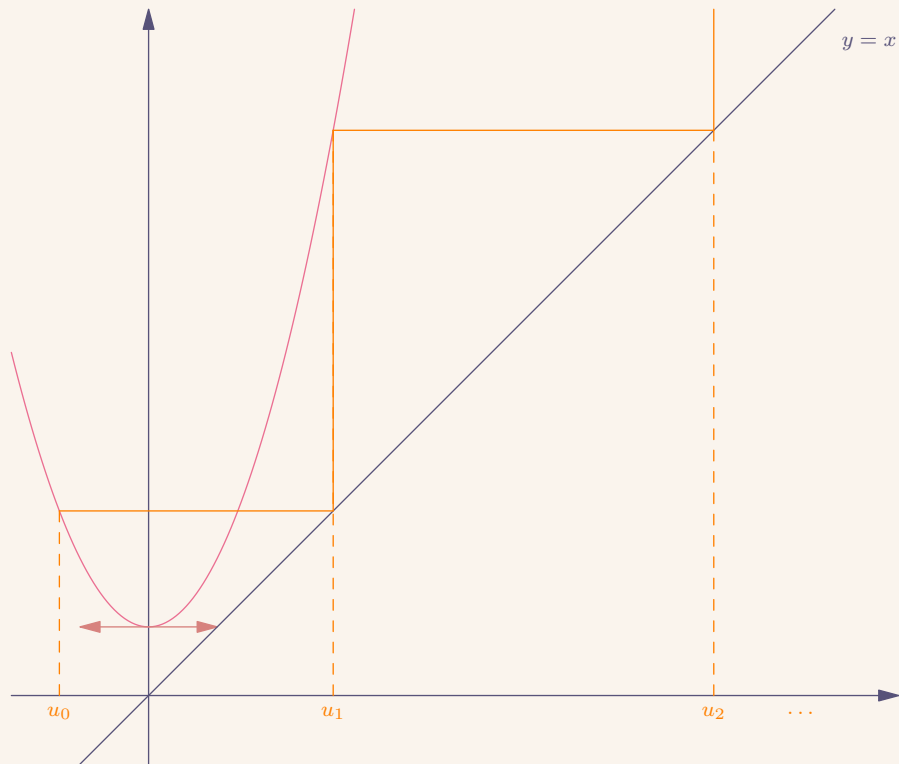
x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$+\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$		$+$	

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
g		$\frac{3}{4}$	

 $[0, +\infty[$ est stable par f ,

$$u_1 = f(u_0) \geq 1$$

donc $u_1 \in [0, +\infty[$



Donc, $\forall n \geq 1, u_n \in [0, +\infty[$.

De plus,

$$\forall n \geq 1, u_{n+1} - u_n = g(u_n) > 0$$

Donc, (u_n) croissante donc elle a une limite finie ou $+\infty$.

On suppose que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$.

Comme f est continue, $f(\ell) = \ell$. Alors, $g(\ell) = 0$: une contradiction

8.

$$u_0 \in [-2, 2] \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$$

Soit $f : x \mapsto \sqrt{2 - x}$

x	-2	1	2
f	2	1	0
$g(x)$	+	0	-

On pose $g : x \mapsto f(x) - x$

x	-2	α	2
g	4	0	-2

$$\begin{aligned}
g(\alpha) = 0 &\iff \alpha = \sqrt{2 - \alpha} \\
&\iff \begin{cases} \alpha^2 = 2 - \alpha \\ \alpha \geq 0 \end{cases} \\
&\iff \alpha = 1
\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned}
&\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} v_n = u_{2n} \\ w_n = u_{2n+1} \end{cases} \\
&\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} v_{n+1} = u_{2n+2} = f(f(u_{2n})) = f \circ f(v_n) \\ w_{n+1} = u_{2n+3} = f \circ f(w_n) \end{cases}
\end{aligned}$$

x	-2	1	2
$f \circ f$	0		$\sqrt{2}$

On pose $h : x \mapsto f(f(x)) - x = \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}} - x$

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-2, 2[, h'(x) &= \frac{-\frac{-1}{2\sqrt{2-x}}}{2\sqrt{2-\sqrt{2-x}}} - 1 \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2-x}\sqrt{2-\sqrt{2-x}}} - 1 \\
&= \frac{1 - 4\sqrt{4 - 2x - (2-x)\sqrt{2-x}}}{4\sqrt{2-x}\sqrt{2-\sqrt{2-x}}}
\end{aligned}$$

$1 - 4\sqrt{4 - 2x - (2-x)\sqrt{2-x}}$ a le même signe que
 $\left(1 - 4\sqrt{4 - 2x - (2-x)\sqrt{2-x}}\right) \left(1 + 4\sqrt{4 - 2x - (2-x)\sqrt{2-x}}\right)$
donc que $1 - 16(4 - 2x - (2-x)\sqrt{2-x})$.

On décide de passer par l'inégalité des accroissements finis.

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-2, 2[, |f'(x)| &= \left| -\frac{1}{2\sqrt{2-x}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{2-x}} < 1 \\
&\iff \sqrt{2-x} > \frac{1}{2} \\
&\iff 2-x > \frac{1}{4} \\
&\iff x < \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

— Si $u_0 < \frac{7}{4}$ alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1}| < M |u_n - 1|$$

$$\text{avec } M = \sup_{x \in]-2, u_n[} |f'(x)| < 1$$

$$\text{Donc, } |u_n - 1| < M^n |u_0 - 1| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

— Si $u_0 > \frac{7}{4}$ alors $u_1 < \frac{7}{4} \dots$ (pas prouvé rigoureusement)

Treizième partie

Exercice

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right) \end{cases}$$

On pose

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R}_*^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)
\end{aligned}$$

f est définie et dérivable sur \mathbb{R}_*^+ et

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{x^2} \right)$$

x	0	\sqrt{a}	$+\infty$
f	$+\infty$	\sqrt{a}	$+\infty$
$f(x) - x$	+	0	-

On pose

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto f(x) - x
\end{aligned}$$

$$\forall x > 0, g'(x) = f'(x) - 1 = -\frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2} < 0$$

x	0	\sqrt{a}	$+\infty$
g	$+\infty$	0	$-\infty$

$$\forall x > 0, g(x) = -\frac{x}{2} + \frac{a}{2x}$$

- Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: “ u_n existe et $u_n > 0$ ”
 - D’après l’énoncé, u_0 existe et $u_0 > 0$. Donc, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
 $u_n > 0$ donc u_n appartient au domaine de définition de f donc u_{n+1} existe. De plus, $u_{n+1} = f(u_n) \geq \sqrt{a} > 0$
Donc, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie
- Pour $n \in \mathbb{N}_*$, $\mathcal{Q}(n)$: “ $u_n \geq \sqrt{a}$ ”
 - $u_1 = f(u_0) \geq \sqrt{a}$
 - Soit $n \in \mathbb{N}_*$ tel que $u_n \geq \sqrt{a}$. Alors, $u_{n+1} = f(u_n) \geq \sqrt{a}$

De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, u_n \geq \sqrt{a}$$

donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, u_{n+1} - u_n = g(u_n) \leq 0$$

Donc, (u_n) est décroissante, minorée par \sqrt{a} donc (u_n) converge vers un point fixe de f (car f est continue).

Or, \sqrt{a} est le seul point fixe de f . Donc,

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{a}$$

Quatorzième partie

Exercice 21

1. $\{\lim u_n\}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

(u_n) diverge car $u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

1 est la valeur d’adhérence de (u_n) car $u_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

Soit $\ell \neq 1$ un autre valeur d’adhérence.

Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$

Comme $\ell \neq 1$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$1 \notin [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$$

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_{\varphi(n)} \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$$

Donc

$$\forall n \geq N, \varphi(n) \text{ impair}$$

Donc,

$$\forall n \geq N, u_{\varphi(n)} = \varphi(n) \geq n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Donc $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$

3. Soit u bornée divergente. D'après le théorème de Bolzano Weierstrass, u a au moins une valeur d'adhérence ℓ .

u diverge donc $u_n \not\underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ell$ donc

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \ell| > \varepsilon$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (N = 1) : & \exists n_1 \geq 1, |u_{n_1} - \ell| > \varepsilon \\ (N = n_1 + 1) : & \exists n_2 \geq n_1 + 1, |u_{n_2} - \ell| > \varepsilon \\ (N = n_2 + 1) : & \exists n_3 \geq n_2 + 1, |u_{n_3} - \ell| > \varepsilon \end{aligned}$$

On construit de cette façon $(n_k)_k$ strictement croissante telle que

$$\forall k, |u_{n_k} - \ell| > \varepsilon$$

(u_{n_k}) est une sous suite de u donc bornée.

D'après le théorème de Bolzano Weierstrass, $(u_{n_k})_k$ a une sous suite $(u_{n_{\varphi(k)}})_k$ convergente vers ℓ' ($\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante).

Or, $\forall k, |u_{n_{\varphi(k)}} - \ell| > \varepsilon$

Donc, $u_{n_{\varphi(k)}} \underset{k \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ell$. Donc, $\ell' \neq \ell$.

Or, $(u_{n_{\varphi(k)}})$ est une sous suite de (u_n) donc ℓ' est une valeur d'adhérence de u .

Quinzième partie

Exercice 19

1. Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Soient $p \geq N$ et $q \geq N$.

$$\begin{aligned} |u_p - u_q| &= |u_p - \ell + \ell - u_q| \\ &\leq |u_p - \ell| + |u_q - \ell| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

2. Soit u une suite de Cauchy.

On sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p > N, \forall q > N, |u_p - u_q| \leq 1$$

En particulier,

$$\forall n > N, |u_n - u_{N+1}| \leq 1$$

donc

$$\forall n > N, u_{N+1} - 1 \leq u_n \leq 1 + u_{N+1}$$

donc $(u_n)_{n > N}$ est bornée. Il existe $M_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n > N, |u_n| \leq M_1$$

La famille $(u_n)_{n \leq N}$ est finie. On pose

$$M_2 = \max_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket} |u_n|$$

On pose $M = \max(M_1, M_2)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$$

Donc (u_n) est bornée.

3. Comme a est bornée, (b_n) est bien définie.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{cases} b_{n+1} = \sup\{a_p \mid p \geq n+1\} \\ b_n = \sup\{a_p \mid p \geq n\} \end{cases}$$

$$\forall p \geq n+1, a_p \leq b_n \text{ (car } p \geq n)$$

Donc, b_n majore $\{a_p \mid p \geq n+1\}$ donc $b_{n+1} \leq b_n$

La suite (b_n) est décroissante.

Comme (a_n) est bornée, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, m \leq a_n$$

En particulier,

$$\forall p \geq n, b_n \leq a_p \leq m$$

Ainsi, (b_n) est minorée.

Donc, (b_n) converge.

(b) Comme (b_n) converge vers a , il existe donc $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, |b_n - a| \leq \varepsilon$$

et donc

$$\forall n \geq N_1, b_n \leq a + \varepsilon$$

Comme (a_n) est de Cauchy, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p > N_2, \forall n > N_2, |a_p - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc

$$\forall p > N_1, \forall n > N_2, a_p \leq a_n + \frac{\varepsilon}{2}$$

On pose $N = \max(N_1, N_2) + 1$.

Comme $N \geq N_1$, on a $b_N \leq a + \varepsilon$

De plus,

$$\forall n \geq N, n > N_2$$

et donc $\forall n \geq N, \forall p \geq N, a_p \leq a_n + \frac{\varepsilon}{2}$

(c) On sait déjà que $b_N \leq a + \varepsilon$

Soit $n \geq N$

— $b_n = \sup\{a_p \mid p \geq n\} \geq a_n$

— $\forall p \geq N, a_p \leq a_n + \frac{\varepsilon}{2}$

donc $a_n + \frac{\varepsilon}{2}$ majore $\{a_p \mid p \geq n\}$.

donc $a_n + \frac{\varepsilon}{2} \geq b_n$

Enfin, (b_n) est décroissante de limite a donc $b_N \geq a$ donc $b_N - \frac{\varepsilon}{2} \geq a - \frac{\varepsilon}{2} > a - \varepsilon$.

En particulier

$$\forall n \geq N, a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon$$

Donc (a_n) converge vers a par définition de la limite