

CHAPITRE 20

Fractions rationnelle

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 28 mars 2022

Table des matières

I	Construction de $\mathbb{K}(X)$	2
II	Décomposition en éléments simples	6

Première partie

Construction de $\mathbb{K}(X)$

Proposition

Définition: On définit la relation \sim sur $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ par

$$(P, Q) \sim (A, B) \iff PB = QA$$

Cette relation est une relation d'équivalence. On note $(\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})) / \sim$. Les éléments de $\mathbb{K}(X)$ sont appelés fractions rationnelles.

On note $\frac{P}{Q}$ la classe d'équivalence du couple (P, Q) .

Proposition: Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ et $R \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Alors

$$\frac{PR}{QR} = \frac{P}{Q}$$

Définition: Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \setminus (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$. On dit que la fraction $\frac{P}{Q}$ est sous forme irréductible si $P \wedge Q = 1$.

Proposition

Définition: Soient $(P, Q) \sim (A, B)$. Alors

$$\deg(P) - \deg(Q) = \deg(A) - \deg(B)$$

Le degré de $\frac{P}{Q}$ est $\deg(P) - \deg(Q)$. On note ce “nombre” $\deg\left(\frac{P}{Q}\right)$.

Proposition

Définition: Soient $(P, Q) \sim (A, B)$ et $(R, S) \sim (C, D)$. Alors, $(PR, QS) \sim (AC, BD)$.

Le produit de $\frac{P}{Q}$ avec $\frac{R}{S}$ est $\frac{PR}{QS}$

Proposition

Définition: Avec les notations précédentes,

$$(PS + RQ, QS) \sim (AD + BC, BD)$$

On définit la somme de $\frac{P}{Q}$ et $\frac{R}{S}$ par

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{PS + RQ}{QS}$$

Théorème: $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps. ■

Proposition:

$$\forall P, A \in \mathbb{K}[X], \forall Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}, \quad \frac{P}{Q} + \frac{A}{Q} = \frac{P + A}{Q}$$

Proposition: $i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ P & \longmapsto & \frac{P}{1} \end{array}$ est un morphisme d'anneaux injectif. ■

Définition: Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On pose

$$\lambda F = \frac{\lambda P}{Q} = \frac{\lambda}{1} \times \frac{P}{Q}$$

Proposition: $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel et $i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ P & \longmapsto & \frac{P}{1} \end{array}$ est linéaire. □

REMARQUE:

On peut identifier $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $\frac{P}{1} \in \mathbb{K}(X)$ i.e. écrire $P = \frac{P}{1}$ et alors

$\begin{cases} \mathbb{K}[X] \text{ est un sous-anneau de } \mathbb{K}(X) \\ \mathbb{K}[X] \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{K}(X) \end{cases}$
De plus, les deux définitions de degré coïncident.

Proposition: Soit $F, G \in \mathbb{K}(X)$.

1. $\deg(F + G) \leq \max(\deg F, \deg G)$
Si $\deg(F) \neq \deg(G)$ alors $\deg(F + G) = \max(\deg F, \deg G)$;
2. $\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G)$;
3. Si $F \neq 0$, $\deg\left(\frac{1}{F}\right) = -\deg(F)$.

■

Deuxième partie

Décomposition en éléments simples

Définition**Lemme:**

$$\forall F \in \mathbb{K}(X), \exists! (E, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X), \begin{cases} F = E + G \\ \deg(G) < 0 \end{cases}$$

On dit que E est la partie entière de F .

■

Lemme: Soit $F = \frac{P}{AB}$ avec

$$\begin{cases} (P, A, B) \in \mathbb{K}[X]^3; \\ A \neq 0; B \neq 0; \\ A \wedge B = 1; \deg F < 0. \end{cases}$$

Alors,

$$\exists! (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2, \begin{cases} F = \frac{U}{A} + \frac{V}{B} \\ \deg\left(\frac{U}{A}\right) < 0 \text{ et } \deg\left(\frac{V}{B}\right) < 0. \end{cases}$$

■

Lemme: Soit $H \in \mathbb{K}[X]$ irréductible, $n \in \mathbb{N}_*$, $P \in \mathbb{K}[X]$, $F = \frac{P}{H^n}$ et $\deg F < 0$. Alors,

$$\begin{cases} \exists! (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2, F = \frac{U}{H^n} + \frac{V}{H^{n-1}}; \\ \deg U < \deg H; \\ \deg\left(\frac{V}{H^{n-1}}\right) < 0. \end{cases}$$

■

Théorème (Théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}(\mathbf{X})$):Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $F = \frac{P}{Q}$ la forme irréductible de F . On note (z_1, \dots, z_p) les racines complexes de Q et (μ_1, \dots, μ_p) leur multiplicité.

Alors,

$$\begin{aligned} \exists! (E, a_{1,1}, \dots, a_{1,\mu_1}, a_{2,1}, \dots, a_{2,\mu_2}, \dots, a_{p,1}, \dots, a_{p,\mu_p}) &\in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}^{\deg Q}, \\ F = E + \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{a_{i,j}}{(X - z_i)^j} \right). \end{aligned}$$

■

Théorème (Théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$):
Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $P \wedge Q = 1$, Q unitaire, $Q \notin \{0, 1\}$. On pose

$$Q = \prod_{i=1}^p (X - a_i)^{\mu_i} \prod_{k=1}^q (X^2 + \alpha_k X + \beta_k)^{\nu_k}$$

avec

$$\begin{cases} p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, \\ (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_q) \in \mathbb{R}^{2q} \\ (\mu_1, \dots, \mu_p, \nu_1, \dots, \nu_q) \in \mathbb{N}^{p+q} \\ \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \alpha_j^2 - 4\beta_j < 0 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \exists! (E, \gamma_{1,1}, \dots, \gamma_{1,\mu_1}, \gamma_{2,1}, \dots, \gamma_{2,\mu_2}, \dots, \gamma_{p,1}, \dots, \gamma_{p,\mu_p}, \\ \delta_{1,1}, \dots, \delta_{1,\nu_1}, \delta_{2,1}, \dots, \delta_{2,\nu_2}, \dots, \delta_{q,1}, \dots, \delta_{q,\nu_q}, \\ \varepsilon_{1,1}, \dots, \varepsilon_{1,\nu_1}, \varepsilon_{2,1}, \dots, \varepsilon_{2,\nu_2}, \dots, \varepsilon_{q,1}, \dots, \varepsilon_{q,\nu_q}) \\ \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}^{\mu_1 + \dots + \mu_p} \times \mathbb{R}^{2(\nu_1 + \dots + \nu_q)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} = E + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{\gamma_{i,j}}{(X - a_i)^j} \\ + \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^{\nu_k} \frac{\delta_{k,j} X + \varepsilon_{k,j}}{(X^2 + \alpha_k X + \beta_k)^j} \end{aligned}$$

□

Définition: Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. Soient $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ tels que $\begin{cases} P \wedge Q = 1 \\ F = \frac{P}{Q} \end{cases}$.

Les racines de P sont appelées zéros de F
Les racines de Q sont appelées pôles de F

Proposition: Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ et $z \in \mathbb{C}$ un pôle simple de F . Le coefficient devant $\frac{1}{X-z}$ dans la décomposition en éléments simples de F est $\frac{P(z)}{Q'(z)}$.

■

Proposition: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $\deg(P) \geq 1$, (z_1, \dots, z_p) les racines de P , μ_1, \dots, μ_p leur multiplicité. Alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^p \frac{\mu_i}{X - z_i}$$

■

REMARQUE:

Il existe un “truc” pour retenir cette formule :

$$\frac{P'}{P} = \underbrace{\ln(P)'}_{\text{n'existe pas!}} = \left(\ln \left(\alpha \prod_{i=1}^p (X - z_i)^{\mu_i} \right) \right)' = \left(\sum_{i=1}^p \mu_i \ln(X - z_i) \right)' = \sum_{i=1}^p \mu_i \frac{1}{X - z_i}$$