Chapitre 20

Fractions rationnelle

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 8 mai 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Construction de $\mathbb{K}(X)$

Proposition – Définition: On définit la relation $\sim$ sur $\mathbb{K}[X] \times \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)$ par

$$(P,Q) \sim (A,B) \iff PB = QA$$

Cette relation est une relation d'équivalence. On note $\big(\mathbb{K}[X] \times \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)\big)/\sim$. Les éléments de $\mathbb{K}(X)$ sont appelés <u>fractions rationnelles</u>.
On note $\dfrac{P}{Q}$ la classe d'équivalence du couple (P,Q).

Proposition: Soient $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)$ et $R \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Alors

$$\frac{PR}{QR} = \frac{P}{Q}$$

Définition: Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \setminus \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)$. On dit que la fraction $\dfrac{P}{Q}$ est sous forme <u>irréductible</u> si $P \wedge Q = 1$.

Proposition – Définition: Soient $(P,Q) \sim (A,B)$. Alors

$$\deg(P) - \deg(Q) = \deg(A) - \deg(B)$$

Le <u>degré</u> de $\dfrac{P}{Q}$ est $\deg(P) - \deg(Q)$. On note ce "nombre" $\deg\left(\dfrac{P}{Q}\right)$.

Proposition – Définition: Soient $(P,Q) \sim (A,B)$ et $(R,S) \sim (C,D)$. Alors, $(PR,QS) \sim (AC,BD)$.
Le <u>produit</u> de $\dfrac{P}{Q}$ avec $\dfrac{R}{S}$ est $\dfrac{PR}{QS}$

Proposition – Définition: Avec les notations précédentes,

$$(PS + RQ, QS) \sim (AD + BC, BD)$$

On définit la somme de $\dfrac{P}{Q}$ et $\dfrac{R}{S}$ par

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{PS + RQ}{QS}$$

Théorème: $\big(\mathbb{K}(X),+,\times\big)$ est un corps.

■

Proposition:

$$\forall P, A \in \mathbb{K}[X], \forall Q \in \mathbb{K}[X]\setminus\{0\}, \qquad \frac{P}{Q}+\frac{A}{Q}=\frac{P+A}{Q}$$

Proposition: $i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ P & \longmapsto & \dfrac{P}{1} \end{array}$ est un morphisme d'anneaux injectif.

■

Définition: Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $F=\dfrac{P}{Q}\in\mathbb{K}(X)$. On pose

$$\lambda F = \frac{\lambda P}{Q} = \frac{\lambda}{1}\times\frac{P}{Q}$$

Proposition: $\big(\mathbb{K}(X),+,\cdot\big)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ P & \longmapsto & \dfrac{P}{1} \end{array}$ est linéaire. □

Remarque:
On peut identifier $P\in\mathbb{K}[X]$ avec $\dfrac{P}{1}\in\mathbb{K}(X)$ i.e. écrire $P=\dfrac{P}{1}$ et alors $\begin{cases}\mathbb{K}[X] \text{ est un sous-anneau de } \mathbb{K}(X)\\ \mathbb{K}[X] \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{K}(X)\end{cases}$
De plus, les deux définitions de degré coïncident.

Proposition: Soit $F, G \in \mathbb{K}(X)$.

1. $\deg(F+G)\leqslant\max(\deg F,\deg G)$
   Si $\deg(F)\neq\deg(G)$ alors $\deg(F+G)=\max(\deg F,\deg G)$;
2. $\deg(FG)=\deg(F)+\deg(G)$;
3. Si $F\neq 0$, $\deg\left(\dfrac{1}{F}\right)=-\deg(F)$.

■

Deuxième partie

Décomposition en éléments simples

Définition

Lemme:
$$\forall F \in \mathbb{K}(X), \exists!(E,G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X), \begin{cases} F = E + G \\ \deg(G) < 0 \end{cases}$$
On dit que E est la partie entière de F.

■

Lemme: Soit $F = \dfrac{P}{AB}$ avec
$$\begin{cases} (P, A, B) \in \mathbb{K}[X]^3; \\ A \neq 0; B \neq 0; \\ A \wedge B = 1; \deg F < 0. \end{cases}$$
Alors,
$$\exists!(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2, \begin{cases} F = \dfrac{U}{A} + \dfrac{V}{B} \\ \deg\left(\dfrac{U}{A}\right) < 0 \text{ et } \deg\left(\dfrac{V}{R}\right). \end{cases}$$

■

Lemme: Soit $H \in \mathbb{K}[X]$ irréductible, $n \in \mathbb{N}_*$, $P \in \mathbb{K}[X]$, $F = \dfrac{P}{H^n}$ et $\deg F < 0$.
Alors,
$$\begin{cases} \exists!(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2, F = \dfrac{U}{H^n} + \dfrac{V}{H^{n-1}}; \\ \deg U < \deg H; \\ \deg\left(\dfrac{V}{H^{n+1}}\right) < 0. \end{cases}$$

■

Théorème (Théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}(\mathbf{X})$)**:** Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $F = \dfrac{P}{Q}$ la forme irréductible de F. On note $(z_1, \ldots, z_p)$ les racines complexes de Q et $(\mu_1, \ldots, \mu_p)$ leur multiplicité.
Alors,
$$\exists!(E, a_{1,1}, \ldots, a_{1,\mu_1}, a_{2,1}, \ldots, a_{2,\mu_2}, \ldots, a_{p,1}, \ldots, a_{p,\mu_p}) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}^{\deg Q},$$
$$F = E + \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{a_{i,j}}{(X - z_i)^j} \right).$$

■

Théorème (Théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$)**:** Soit $(P, Q) \in$

$\mathbb{R}[X]^2$, $P \wedge Q = 1$, Q unitaire, $Q \notin \{0, 1\}$. On pose

$$Q = \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{\mu_i} \prod_{k=1}^{q} (X^2 + \alpha_k X + \beta_k)^{\nu_k}$$

avec

$$\begin{cases} p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, \\ (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_q) \in \mathbb{R}^{2q} \\ (\mu_1, \dots, \mu_p, \nu_1, \dots, \nu_p) \in \mathbb{N}^{p+q} \\ \forall j \in [\![1, q]\!], \alpha_k^2 - 4\beta_k < 0 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \exists!(E, &\gamma_{1,1}, \dots, \gamma_{1,\mu_1}, \gamma_{2,1}, \dots, \gamma_{2,\mu_2}, \dots, \gamma_{p,1}, \dots, \gamma_{p,\mu_p}, \\ &\delta_{1,1}, \dots, \delta_{1,\nu_1}, \delta_{2,1}, \dots, \delta_{2,\nu_2}, \dots, \delta_{q,1}, \dots, \delta_{q,\nu_q}, \\ &\varepsilon_{1,1}, \dots, \varepsilon_{1,\nu_1}, \varepsilon_{2,1}, \dots, \varepsilon_{2,\nu_2}, \dots, \varepsilon_{q,1}, \dots, \varepsilon_{q,\nu_q}) \\ &\in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}^{\mu_1 + \dots + \mu_p} \times \mathbb{R}^{2(\nu_1 + \dots + \nu_q)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} = E + &\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{\gamma_{i,j}}{(X - a_i)^j} \\ &+ \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=1}^{\nu_k} \frac{\delta_{k,j} X + \varepsilon_{k,j}}{(X^2 + \alpha_k X + \beta_k)^j} \end{aligned}$$

□

Définition: Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. Soient $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ tels que $\begin{cases} P \wedge Q = 1 \\ F = \dfrac{P}{Q} \end{cases}$.

Les racines de P sont appelées <u>zéros de F</u>
Les racines de Q sont appelées <u>pôles de F</u>

Proposition: Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ et $z \in \mathbb{C}$ un pôle simple de F. Le coefficient devant $\dfrac{1}{X - z}$ dans la décomposition en éléments simples de F est $\dfrac{P(z)}{Q'(z)}$.

■

Proposition: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $\deg(P) \geqslant 1$, $(z_1, \dots, z_p)$ les racines de P, $\mu_1, \dots, \mu_p$ leur multiplicité. Alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{X - z_i}$$

■

Remarque:

Il existe un “truc” pour retenir cette formule :

$$\frac{P'}{P} = \underbrace{\ln(P)'}_{\text{n'existe pas !}} = \left(\ln\left(\alpha\prod_{i=1}^{p}(X-z_i)^{\mu_i}\right)\right)' = \left(\sum_{i=1}^{p}\mu_i\ln(X-z_i)\right)' = \sum_{i=1}^{p}\mu_i\frac{1}{X-z_i}$$