

CHAPITRE 16

TD

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 28 mars 2022

Table des matières

Exercice 1

$$\cos(\sqrt{x}) = 1 - \frac{x}{2} + \mathfrak{O}(x)$$

Donc, $f : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$

Exercice 2

$$\begin{aligned} \frac{xf(a) - af(x)}{x-a} &= \frac{xf(a) - a(f(a) + (x-a)f'(a) + \mathfrak{O}(x-a))}{x-a} \\ &= f(a) - af'(a) + \mathfrak{O}(1) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow a} f(a) - af'(a) \end{aligned}$$

Exercice 3

Soit $x \geq 1$. f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$. Donc

$$\exists c \in]x, x+1[, f(x+1) - f(x) = f'(c) < f'(x)$$

De même,

$$\exists d \in]x-1, x[, f(x) - f(x-1) = f'(d) > f'(x)$$

On pose $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ donc

$$\begin{aligned} - f(x+1) - f(x) &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell - \ell = 0 \\ - f(x) - f(x-1) &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell - \ell = 0 \end{aligned}$$

Par encadrement, $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

Exercice 4

Soit

$$g_M : x \mapsto f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}(f'(x) + f'(a)) - (x-a)^3 M$$

g_M est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$

$$g_M(a) = 0$$

$$g_M(b) = f(b) - f(a) - \frac{b-a}{2}(f'(b) + f'(a)) - (b-a)^3 M$$

$$\text{On pose } M = \frac{1}{(b-a)^3} \left(f(b) - f(a) - \frac{b-a}{2}(f'(b) + f'(a)) \right)$$

Ainsi, $g_M(b) = 0$

D'après le théorème de Rolle, il existe $\gamma \in]a, b[$ tel que $g'_M(\gamma) = 0$
D'où,

$$\begin{aligned} 0 &= f'(\gamma) - \frac{1}{2}(f'(\gamma) + f'(a)) - \frac{\gamma - a}{2}f''(\gamma) - 3(\gamma - a)^2M \\ &= \frac{1}{2}(f'(\gamma) - f'(a)) - \frac{\gamma - a}{2}f''(\gamma) - 3(\gamma - a)^2M \end{aligned}$$

Or,

$$g'_M(a) = 0$$

- g'_M est continue sur $[a, \gamma]$
- g'_M est dérivable sur $]a, \gamma[$
- $g'_M(a) = g'_M(\gamma)$

Donc, il existe $c \in]a, \gamma[\subset]a, b[$ tel que

$$g''_M(c) = 0$$

d'où $M = -\frac{1}{12}f^{(3)}(c)$

On en déduit

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}(f'(b) + f'(a)) - \frac{(b-a)^3}{12}f^{(3)}(c)$$

Exercice 7

Idée de la solution

$$f(2x) = f(x) + ax + \mathfrak{o}(x)$$

$$\begin{aligned} f(x) &\xleftarrow{n \rightarrow +\infty} f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)a\frac{x}{2} + \mathfrak{o}(x) \\ &= f\left(\frac{x}{4}\right) + a\frac{x}{2} + a\frac{x}{4} + \mathfrak{o}(x) \\ &= f\left(\frac{x}{2^n}\right) + a\sum_{k=1}^n \frac{x}{2^k} + \mathfrak{o}(x) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0) + ax + \mathfrak{o}(x) \end{aligned}$$

Solution

Donc, $f(x) = f(0) + ax + \mathfrak{o}(x)$

$\varepsilon(x) \rightarrow 0$

$$f(2x) = f(x) + ax + x\varepsilon(x)$$

$$\begin{aligned} f(x) &\xleftarrow{n \rightarrow +\infty} f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)a\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= f\left(\frac{x}{4}\right) + a\frac{x}{2} + a\frac{x}{4} + \frac{x}{4}\varepsilon\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x}{2}\varepsilon\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= f\left(\frac{x}{2^n}\right) + a\sum_{k=1}^n \frac{x}{2^k} + x\underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}\varepsilon\left(\frac{x}{2^k}\right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} ?} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0) + ax + ? \end{aligned}$$

On pose

$$\forall x > 0, \varepsilon(x) = \frac{f(2x) - f(x)}{x} - a$$

D'après l'énoncé, $\varepsilon(x) \xrightarrow[x > 0]{} 0$ et

$$(\mathcal{E}) : \quad \forall x > 0, f(2x) = f(x) + ax + x\varepsilon(x)$$

On en déduit par récurrence que

$\forall n \in \mathbb{N}_*, P(n)$ est vraie, avec

$$P(n) : " \forall x > 0, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) + ax \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} + x \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \varepsilon\left(\frac{x}{2^k}\right) "$$

— D'après (\mathcal{E}) ,

$$\forall x > 0, f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{ax}{2} + \frac{x}{2} \varepsilon\left(\frac{x}{2}\right)$$

donc $P(1)$ est vraie

— Soit $n \in \mathbb{N}_*$. On suppose $P(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} \forall x > 0, f(x) &= f\left(\frac{x}{2^n}\right) + ax \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} + x \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \varepsilon\left(\frac{x}{2^k}\right) \\ &= f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) + a \frac{x}{2^{n+1}} + \frac{x}{2^{n+1}} \varepsilon\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \\ &\quad + ax \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} + x \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \varepsilon\left(\frac{x}{2^k}\right) \\ &= f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) + ax \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} + x \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} \varepsilon\left(\frac{x}{2^k}\right) \end{aligned}$$

Donc, $P(n+1)$ est vraie

On fixe $x > 0$.

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(0) \text{ car } f \text{ est continue en } 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

Comme $\lim_{x \xrightarrow[x > 0]{} 0} \varepsilon(x) = 0$, on sait que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in]0, \eta[, |\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. On considère $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]0, \eta[, |\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$$

Soit $x \in]0, \eta[$.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{x}{2^k} \leq x$$

donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{x}{2^k} \in]0, \eta[$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{N}, \left| \varepsilon \left(\frac{x}{2} \right) \right| \leq \varepsilon$$

Donc

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}_*, \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \varepsilon \left(\frac{x}{2^k} \right) \right| &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \left| \varepsilon \left(\frac{x}{2^k} \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \varepsilon \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) \varepsilon \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

De plus, pour tout $x > 0$, il existe $N'_x \in \mathbb{N}_*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}'_*, \left| f \left(\frac{x}{2^n} \right) - f(0) \right| \leq \varepsilon x$$

et il existe $N_x \in \mathbb{N}_*$ tel que

$$\forall n \geq N_x, \left| a \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} - a \right| \leq \varepsilon$$

donc

$$\forall n \geq N, ax - \varepsilon x \leq ax \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \leq ax + \varepsilon x$$

$$\begin{aligned} &\forall x \in]0, \eta''[, \forall n \geq \max(N, N'_x), \\ f(0) - \varepsilon x + ax - \varepsilon x - \varepsilon x &\leq f(x) \leq f(0) + \varepsilon x + ax + \varepsilon x + \varepsilon x \end{aligned}$$

donc

$$-3\varepsilon \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} - a \leq 3\varepsilon$$

Donc $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} - a = 0$ et donc f est dérivable à droite en 0 et $f'(0) = a$

Exercice 5

1. On pose $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(z - f'(a)) > 0$.
Il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$\forall k \in]-\eta_1, \eta_1[\setminus \{0\}, a + h \in I, \left| \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| \leq \varepsilon_1$$

En particulier,

$$\forall h \in]0, \eta_1[, \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq f'(a) + \varepsilon_1 < z$$

De même, il existe $\eta_2 > 0$ tel que

$$\forall h \in]0, \eta_2[, \left| \frac{f(b+h) - f(b)}{h} - f'(b) \right| \leq \varepsilon_2 = \frac{1}{2}(f'(b) - z)$$

donc

$$\forall h \in]0, \eta_2[, \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \geq f'(b) - \varepsilon_2 > z$$

On pose $\eta = \min(\eta_1, \eta_2) > 0$,

$$\forall h \in]0, \eta[, \frac{f(a+h) - f(a)}{h} < z < \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

2. On fixe $h \in]0, \eta[$ et $g_h : x \mapsto \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
 g_h est continue sur son domaine de définition, et d'après 1.,

$$g_h(a) < z < g_h(b)$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $y \in I$ tel que

$$y+h \in I \text{ et } z = g_h(y) = \frac{f(y+h) - f(y)}{h}$$

D'après le théorème des accroissements finis,

$$\exists x \in]y, y+h[, f'(x) = \frac{f(y+h) - f(y)}{h} = z$$