

## TD 18 Polynômes formels

**Exercice 1: ★★**

Soit  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ ,  $a \neq b$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Exprimer le reste de la division de  $P$  par  $(X - a)(X - b)$  en fonction de  $P(a)$  et  $P(b)$ .

**Exercice 2: ★**

Factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  les polynômes  $X^4 + 1$ ,  $X^5 - 1$ ,  $(X^2 - X + 1)^2 + 1$ .

**Exercice 3: ★**

Résoudre les équations suivantes.

- (1)  $Q^2 = XP^2$  d'inconnues  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ .
- (2)  $P(P(X)) = P(X)$  d'inconnue  $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ .

**Exercice 4: ★★**

Soient  $A, B \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $A^2|B^2$ . Montrer que  $A|B$ .

**Exercice 5: ★★★**

Soient  $a \in ]0, \pi[$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Factoriser dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme  $X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1$ .

**Exercice 6: ★★★ Mines-Ponts MP**

Trouver les polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que  $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$ .

**Exercice 7: ★★★**

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique polynôme  $P_n$  tel que  $P_n - P'_n = X^n$ . Exprimer les coefficients de  $P_n$  à l'aide de factorielles.

**Exercice 8: ★★★ CCP MP**

On cherche les polynômes

$$P(X) = (X - a)(X - b) \in \mathbb{C}[X]$$

tels que  $P(X)$  divise  $P(X^3)$ . Montrer que, si  $a = b$ ,  $P \in \mathbb{R}[X]$  et que si  $a \neq b$  et  $a^3 \neq b^3$ , il existe 6 polynômes dont 4 dans  $\mathbb{R}[X]$ .

Trouver les polynômes  $P$  si  $a \neq b$  et  $a^3 = b^3$  et en déduire que 13 polynômes en tout conviennent, dont 7 dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 9: ★★**

Soient  $n, p, q \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $1 + X + X^2$  divise  $X^{3n} + X^{3p+1} + X^{3q+2}$ .

**Exercice 10: ★★★ Centrale PSI**

Soient  $x, y, z$  trois nombres complexes vérifiant  $x + y + z = 0$ . Établir

$$\frac{x^5 + y^5 + z^5}{5} = \left( \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \right) \left( \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \right).$$

### Exercice 11: ★★★ Polynômes de Legendre

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$L_n = \frac{n!}{(2n)!} ((X^2 - 1)^n)^{(n)}.$$

- (1) Montrer que  $L_n$  est un polynôme unitaire de degré  $n$ .
- (2) Montrer que

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_{-1}^1 L_n(t)Q(t) dt = 0.$$

- (3) En déduire que  $L_n$  possède  $n$  racines simples, toutes dans  $[-1, 1]$ .

### Exercice 12: ★★★

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  scindé à racines simples. Montrer qu'aucun coefficient nul de  $P$  ne peut être encadré par deux coefficients non nuls de même signe.

### Exercice 13: ★★★

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme scindé à racines simples, et  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ . Montrer que les racines complexes de  $P^2 + \alpha^2$  sont toutes simples.

### Exercice 14: ★★★

Dans tout l'exercice,  $P$  désigne un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  dont toutes les racines réelles sont simples. Au polynôme  $P$ , on associe une suite finie de polynômes, dite *suite de Sturm* de  $P$ , de la façon suivante :

$$\begin{cases} P_0 = P \\ P_1 = -P' \\ \forall k \text{ tel que } P_k \neq 0, P_{k+1} = -R \text{ où } R \text{ est le reste de la division euclidienne de } P_{k-1} \text{ par } P_k. \end{cases}$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on note  $s_P(x)$  le nombre de changements de signes dans la suite  $(P_k(x))_{k \in \llbracket 0, N \rrbracket}$  dans laquelle on a préalablement supprimé les termes nuls (par exemple, si  $(P_k(x))_{0 \leq k \leq 2} = (1, -1, 1)$  alors  $s_P(x) = 2$  tandis que si  $(P_k(x))_{0 \leq k \leq 2} = (1, 0, -1)$ , alors  $s_P(x) = 1$ ).

- (1) Expliquer pourquoi la suite de Sturm d'un polynôme est finie.
- (2) Calculer la suite de Sturm associée au polynôme  $P = X^4 + 4X^3 + 4$  (on admet que les racines de  $P$  sont simples), puis calculer  $s_P(0)$  et  $s_P(3)$ .
- (3) Soit  $P$  un polynôme dont toutes les racines sont simples, et  $(P_k)_{k \in \llbracket 0, N \rrbracket}$  la suite de Sturm associée.
  - (a) Montrer que pour tout  $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ ,  $P_i$  et  $P_{i+1}$  n'ont pas de racines communes.
  - (b) Soient  $k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$  et  $a$  une racine de  $P_k$ . Montrer que  $P_{k-1}(a)P_{k+1}(a) < 0$ .
  - (c) Soit  $[\alpha, \beta]$  un intervalle ne contenant aucune racine réelle d'aucun polynôme de la suite  $(P_k)$  :

$$\forall x \in [\alpha, \beta], \forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, P_k(x) \neq 0.$$

Montrer que la fonction  $s_P$  est constante sur  $[\alpha, \beta]$ .

- (d) Soit  $[\alpha, \beta]$  un intervalle qui contient exactement une racine  $a$  de  $P$  mais aucune racine des polynômes  $P_k$  pour  $k \neq 0$  :

$$\begin{cases} \forall x \in [\alpha, \beta], (P_0(x) = 0 \iff x = a) \\ \forall x \in [\alpha, \beta], \forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, P_k(x) \neq 0. \end{cases}$$

Soient  $x, y \in [\alpha, \beta]$  tels que  $x < a < y$ . Montrer que  $s_P(x) + 1 = s_P(y)$ .

- (e) Soit  $[\alpha, \beta]$  un intervalle qui contient exactement une racine  $a$  de l'un des polynômes  $P_k$  pour  $k \neq 0$  et aucune racine des autres polynômes de la suite de Sturm :

$$\begin{cases} \forall x \in [\alpha, \beta], (P_k(x) = 0 \iff x = a) \\ \forall x \in [\alpha, \beta], \forall i \neq k, P_i(x) \neq 0. \end{cases}$$

Montrer que  $s_P$  est constante sur  $[\alpha, \beta]$ . On pourra dresser le tableau de signes des fonctions  $t \mapsto P_{k-1}(t)$ ,  $t \mapsto P_k(t)$  et  $t \mapsto P_{k+1}(t)$ .

- (f) Soient  $a \leq b$  deux réels non racines de  $P$ . Dédurre de tout ce qui précède que le nombre de racines de  $P$  dans l'intervalle  $[a, b]$  est égal à  $s_P(b) - s_P(a)$ .

### Exercice 15: ★★★★★

[X MP] Soient  $A$  et  $B$  deux polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  vérifiant pour tout complexe  $z$ ,

$$A(z) = 0 \iff B(z) = 0 \text{ et } A(z) = 1 \iff B(z) = 1.$$

Montrer que  $A = B$ .

### Exercice 16: ★★★★★ Mines-Ponts MP

- (1) Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme scindé tel que  $\deg(P) \geq 2$ . Montrer que  $P'$  est scindé.  
 (2) Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $X^{10} + aX^9 + bX^8 + cX^7 + X + 1$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 17: ★★★★★

[X PC] Résoudre dans  $\mathbb{C}^3$  le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 0 \\ x^5 + y^5 + z^5 = 0. \end{cases}$$

### Exercice 18: ★★★★★

Soit  $n$  un entier naturel. On appelle *polynômes de Bernstein* de degré  $n$  les polynômes

$$B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}, \quad k \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

**Polynômes de Bernstein.**

- (1) Représenter sur un même graphique les fonctions  $x \in [0, 1] \mapsto B_{3,k}(x)$  pour  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ .  
 (2) (a) Calculer  $\sum_{k=0}^n B_{n,k}$ . En déduire que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $0 \leq B_{n,k}(x) \leq 1$ .  
 (b) Calculer  $\sum_{k=0}^n k B_{n,k}$ ,  $\sum_{k=0}^n k(k-1) B_{n,k}$  puis  $\sum_{k=0}^n k^2 B_{n,k}$ .  
 (3) Exprimer  $B'_{n,k}$  en fonction de  $B_{n-1,k-1}$  et  $B_{n-1,k}$  pour  $n \geq 1$ .  
 (4) Établir que la famille  $(B_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

(5) Pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on pose  $B(P) = \sum_{k=0}^n P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}$ .

(a) Montrer que  $B$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

(b) Déterminer le noyau de  $B$ ; qu'en déduit-on ?

**Théorème de Weierstrass.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $P_n(f)$  la fonction définie par  $P_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x)$ .

(1) On pose dans cette question  $f : x \mapsto x^2$ . Déterminer  $P_n(f)$  puis montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(f)(x) = f(x)$ .

(2) On se propose de généraliser ce résultat à toute fonction continue  $f$ .

(a) Calculer, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x)$ .

(b) Soit  $x \in [0, 1]$  et  $\varepsilon > 0$ . Soit  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall t \in [0, 1], |x - t| \leq \alpha \implies |f(x) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On pose  $A = \left\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid \left|x - \frac{k}{n}\right| < \alpha\right\}$  et  $B = \left\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid \left|x - \frac{k}{n}\right| \geq \alpha\right\}$ .

Justifier que  $\alpha$  existe puis montrer que  $\sum_{k \in B} B_{n,k}(x) \leq \frac{x(1-x)}{n\alpha^2} \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$ .

(c) En déduire que  $|P_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\alpha^2}$  où  $M = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$ . En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(f)(x) = f(x)$ .