

CHAPITRE 15



Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 18 mai 2022

TABLE DES MATIÈRES

I	Définition et premières propriétés	2
II	Sous-espaces vectoriels	6
III	Familles de vecteurs	15

Première partie

Définition et premières propriétés

Définition: Soit E un ensemble muni d'une loi interne $+$ et d'une loi \cdot définie sur $\mathbb{K} \times E$ à valeurs dans E où \mathbb{K} est un corps.

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel (ou un espace vectoriel sur \mathbb{K}) si

1. $(E, +)$ est un groupe abélien
2. (a)

$$\forall u \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \\ \mu \cdot (\lambda \cdot u) = (\underbrace{\mu \times \lambda}_{\times \text{ de } \mathbb{K}}) \cdot u$$

- (b) $\forall u \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot u = u$
3. (a)

$$\forall u \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \\ (\underbrace{\lambda \cdot u}_{+ \text{ de } E}) + (\underbrace{\mu \cdot u}_{+ \text{ de } E}) = (\underbrace{\lambda + \mu}_{+ \text{ de } \mathbb{K}}) \cdot u$$

- (b)

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u, v) \in E^2, \\ \lambda \cdot (u + v) = (\lambda \cdot u) + (\lambda \cdot v)$$

Les éléments de E sont alors appelés vecteurs et les éléments de \mathbb{K} sont dits scalaires.
Par convention, \cdot est prioritaire sur $+$.

EXEMPLE:

Soit \mathbb{K} corps, \mathbb{K} est un \mathbb{K} -espace vectoriel

EXEMPLE:

Soit $\vec{\mathcal{S}}$ l'ensemble des vecteurs du plan. $\vec{\mathcal{S}}$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

EXEMPLE:

\mathbb{C} est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

En généralisant, tout corps \mathbb{K} est un \mathbb{L} -espace vectoriel pour \mathbb{L} un sous-corps de \mathbb{K}

EXEMPLE:

$(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ avec

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda \cdot (y_1, \dots, y_n) = (\lambda \cdot y_1, \dots, \lambda \cdot y_n)$$

est un espace vectoriel.

EXEMPLE:

Soient $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et \mathcal{D} un ensemble non vide.

$(E^{\mathcal{D}}, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel où pour $f, g \in E^{\mathcal{D}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

$$f + g : \mathcal{D} \longrightarrow E \\ x \longmapsto f(x) + g(x)$$

$$\lambda f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \lambda \cdot f(x)$$

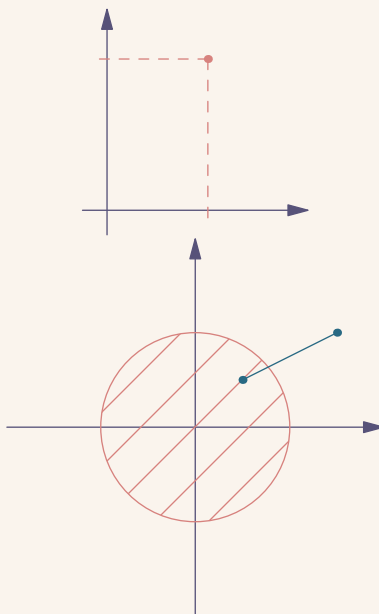
Par exemple, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel

$\mathcal{C}^0(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel

EXEMPLE:

— \mathbb{R}^+ n'est pas un \mathbb{R} -espace vectoriel

— $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un \mathbb{R} -espace vectoriel pour les lois usuelles



Proposition: Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.

1. $\forall u \in E, 0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot 0_E = 0_E$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \lambda \cdot u = 0_E \implies \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } u = 0_E$

Preuve: 1. Soit $u \in E$.

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{K}} \cdot u &= (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \cdot u \end{aligned}$$

$(E, +)$ est un groupe donc $0_E = 0_{\mathbb{K}} \cdot u$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$$

$\lambda \cdot 0_E$ est régulier pour $+$:

$$0_E = \lambda \cdot 0_E$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in E$ tel que $\lambda \cdot u = 0_E$

CAS 1 $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$

CAS 2 $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ Alors, $\lambda^{-1} \in \mathbb{K}$ et donc

$$\begin{aligned} \lambda \cdot u = 0_E &\implies \lambda^{-1}(\lambda \cdot u) = \lambda^{-1} \cdot 0_E \\ &\implies (\lambda^{-1} \times \lambda) \cdot u = 0_E \text{ d'après 2.} \\ &\implies 1_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E \\ &\implies u = 0_E \end{aligned}$$

□

Proposition: Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et $u \in E$. Alors, $-u = (-1_{\mathbb{K}}) \cdot u$

Preuve:

$$\begin{aligned} u + (-1_{\mathbb{K}}) \cdot u &= (1_{\mathbb{K}} \cdot u) + (-1_{\mathbb{K}}) \cdot u \\ &= (1_{\mathbb{K}} + (-1_{\mathbb{K}})) \cdot u \\ &= 0_{\mathbb{K}} u \\ &= 0_E \end{aligned}$$

Donc $-u = (-1_{\mathbb{K}}) \cdot u$

□

Deuxième partie

Sous-espaces vectoriels

Définition: Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit $F \subset E$.
On dit que F est un sous- \mathbb{K} -espace vectoriel de E si

1. $F \neq \emptyset$
2. $\forall (u, v) \in F^2, u + v \in F$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in F, \lambda u \in F$

Proposition: Avec les notations précédentes, $(F, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel

Preuve: — D'après 2., $+$ est interne dans F

- $(E, +)$ est un groupe abélien donc $+$ est associative et commutative dans E donc dans F
- $F \neq \emptyset$. Soit $u \in F$. D'après 3.,

$$0_{\mathbb{K}} \cdot u \in F$$

Comme $u \in E$ et $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel,

$$0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$$

Donc, $0_E \in F$

- Soit $u \in F$. Comme $u \in E$,

$$-u = -(1_{\mathbb{K}}) \cdot u \in F \text{ d'après 3.}$$

- Les autres axiomes sont aisément vérifiés.

□

Proposition: Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et $F \subset E$.
 F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$ si et seulement si

1. $F \neq \emptyset$
2. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (u, v) \in F^2, \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$

Preuve: “ \implies ” On sait déjà que F est non vide.

$$\forall u, v \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \left. \begin{array}{l} \lambda u \in F \\ \mu v \in F \end{array} \right\} \text{ donc } \lambda u + \mu v \in F$$

“ \impliedby ” — On sait déjà que F est non-vide

- Soient $u, v \in F$

$$u + v = 1_{\mathbb{K}} \cdot u + 1_{\mathbb{K}} \cdot v \in F$$

- Soit $u \in F, \lambda \in \mathbb{K}$.

$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot u + 0_{\mathbb{K}} \cdot u \in F$$

□

Définition: Soient $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. Une combinaison linéaire de (u_1, \dots, u_n) est un vecteur de E de la forme $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$

REMARQUE:

On peut aussi démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$F \neq \emptyset \text{ et } \forall u, v \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u + v \in F$$

EXEMPLE: 1. $F = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) + \Im(z) = 1\} \subset \mathbb{C}$

F est un sous- \mathbb{R} -espace vectoriel de \mathbb{C} ?

Non car $0 \notin F$

2. $F = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) + \Im(z) = 0\}$ est un sous- \mathbb{R} -espace vectoriel de \mathbb{C} mais pas un sous- \mathbb{C} -espace vectoriel.

En effet, $1 - i \in F$ $i(1 - i) = i + 1 \notin F$

3. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

$F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n\}$ est un sous-espace vectoriel de E .

$G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E puisque $0_E \notin G$.

4. $E = \mathbb{R}^D$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel

$F = \mathcal{C}^0(D, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de E (fonctions continues)

$G = \mathcal{D}(D, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de E (fonctions dérivables)

Si $D =]-a, a[$ avec $a \in \mathbb{R}$, $H = \{f \in E \mid f \text{ impaire}\}$ est un sous-espace vectoriel de E

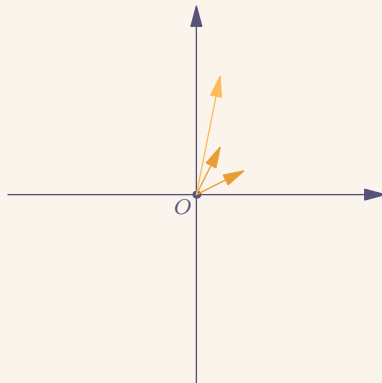
Si $D = \mathbb{R}$, $L = \{f \in E \mid f \text{ 1-périodique}\}$ est un sous-espace vectoriel de E

$M = \{f \in E \mid f \text{ périodique}\}$ n'est pas un sous-ensemble vectoriel de E

5. L'ensemble des solutions sur un intervalle I d'une équation différentielle linéaire est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^I

EXERCICE (Exercice):

Trouver tous les sous- \mathbb{R} -espaces vectoriels de \mathbb{R}^2



- $\{(0,0)\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2
- Les droites passant par O sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2
- \mathbb{R}^2 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2

et rien d'autre!

Proposition: Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et \mathcal{F} une famille non vide de sous-espaces vectoriels de E . Alors $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$ est un sous-espace vectoriel de E .

Preuve:

On pose $G = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$.

- $\forall F \in \mathcal{F}, 0_E \in F$ car F est un sous espace vectoriel de E donc $0_E \in G$.

— Soient $u, v \in G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On pose $w = \lambda u + \mu v$.

$$\forall F \in \mathcal{F}, \left. \begin{array}{l} u \in F \\ v \in F \end{array} \right\} \text{ donc } w \in F$$

donc $w \in G$

□

REMARQUE (Attention \trianglelefteq):

Une réunion de sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel en général.

EXERCICE:

$F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E \iff F \subset G$ ou $G \subset F$

Définition: Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On définit leur somme $F + G$ par

$$F + G = \{x + y \mid x \in F, y \in G\}$$

Proposition: Avec les notations précédentes, $F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$.

Preuve: — — $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \in F + G$

— Soient $u \in F + G, v \in F + G, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x + y \text{ avec } \begin{cases} x \in F \\ y \in G \end{cases} \\ v = a + b \text{ avec } \begin{cases} a \in F \\ b \in G \end{cases} \end{array} \right.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \lambda u + \mu v &= \lambda(x + y) + \mu(a + b) \\ &= \lambda x + \lambda y + \mu a + \mu b \\ &= \underbrace{(\lambda x + \mu a)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda y + \mu b)}_{\in G} \in F + G \end{aligned}$$

Ainsi $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E .

— Soit $x \in F \cup G$.

Si $x \in F$ alors $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \in F + G$

Si $x \in G$ alors $x = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G} \in F + G$

Donc, $F \cup G \subset F + G$

— Soit H un sous-espace vectoriel de E tel que $F \cup G \subset H$

Soit $u \in F + G$. On pose $u = x + y$ avec $\begin{cases} x \in F \\ y \in G \end{cases}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in F \subset F \cup G \subset H \\ y \in G \subset F \cup G \subset H \end{array} \right.$$

H est un sous-espace vectoriel de E donc $x + y \in H$.
On a montré que $F + G \subset H$

□

Définition: Soit $(E, +, \cdot)$ un K -espace vectoriel et $(F_i)_{i \in I}$ une famille quelconque non vide de sous-espaces vectoriels de E . On définit $\sum_{i \in I} F_i$ par

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} F_i &= \left\{ \sum_{i \in I} x_i \mid (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} F_i; (x_i) \text{ presque nulle} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i \in I} x_i \mid (x_i) \in \prod_{i \in I} F_i; \{i \in I \mid x_i \neq 0_E\} \text{ est fini} \right\} \end{aligned}$$

$\sum_{i \in I} F_i$ est l'ensemble de sommes finies obtenues à partir d'éléments de $\prod_{i \in I} F_i$

EXEMPLE:

$$E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, F_i = \{x \mapsto ax^i \mid a \in \mathbb{R}\}$$

$\sum_{i \in \mathbb{N}} F_i$ est l'ensemble des fonctions polynomiales

Proposition: Une somme quelconque de sous-espaces vectoriels est le plus petit sous-espace vectoriel contenant leur réunion. □

Définition: Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit qu'ils sont en somme directe si

$$\forall u \in F + G, \exists!(x, y) \in F \times G, u = x + y$$

Dans ce cas, l'espace $F + G$ est noté $F \oplus G$

EXEMPLE:

$$E = \mathbb{R}^3$$

$$F = \{(x, 0, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$G = \left\{ (x, y, z) \mid (S) : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \right\}$$

$F \oplus G$?

$$— (0, 0, 0) \in F \text{ car } 0 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Soient } x, y \in \mathbb{R}, \begin{cases} u = (x, 0, x) \\ v = (y, 0, y) \end{cases}$$

$$\text{Soient } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
\lambda u + \mu v &= \lambda(x, 0, 0) + \mu(y, 0, y) \\
&= (\lambda x, 0, \lambda x) + (\mu y, 0, \mu y) \\
&= (\lambda x + \mu y, 0, \lambda x + \mu y) \in F
\end{aligned}$$

Donc F est un sous-espace vectoriel de E

— $(0, 0, 0) \in G$ car (S) est homogène

$$\begin{cases} u = (x, y, z) \in G \\ v = (a, b, c) \in G \end{cases}$$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\lambda u + \mu v \in G &\iff \lambda(x, y, z) + \mu(a, b, c) \in G \\
&\iff (\lambda x + \mu a, \lambda y + \mu b, \lambda z + \mu c) \in G \\
&\iff \begin{cases} (\lambda x + \mu a) + (\lambda y + \mu b) + (\lambda z + \mu c) = 0 \\ (\lambda y + \mu b) - (\lambda z + \mu c) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda \overbrace{(x+y+z)}^{=0} + \mu \overbrace{(a+b+c)}^{=0} \\ \lambda \underbrace{(y-z)}_{=0} + \mu \underbrace{(b-c)}_{=0} = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

— Soit $w \in E$. On pose $w = (x, y, z)$

$$\begin{aligned}
w \in F + G &\iff \exists (u, v) \in F \times G, w = u + v \\
&\iff \exists x' \in \mathbb{R}, \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} w = (x', 0, x') + (a, b, c) \\ a + b + c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \\
&\iff \exists (x', a, b, c) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} (x, y, z) = (a + x', b, c + x') \\ a + b + c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases} \\
&\iff \exists (x', a, b, c) \in \mathbb{R}^4, (S') : \begin{cases} a + x' = x \\ b = y \\ c + x' = z \\ a + b + c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

(S') est un système linéaire à 4 inconnues (x', a, b, c) , 5 équations, 3 paramètres (x, y, z)

$$(S') \iff \begin{cases} b = y \\ c = y \\ x' = z - y \\ a = x - z + y \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

Si $x + 3y - z \neq 0$ alors (S') n'a pas de solutions et donc $w \notin F + G$

Si $x + 3y - z = 0$ alors (S') a une unique solution alors

$$\exists! (u, v) \in F \times G, w = u + v$$

On a montré que

$$F \oplus G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y - z = 0\}$$

Proposition: Soient $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E
 F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$

Preuve: “ \implies ” On suppose la somme directe.

Soit $x \in F \cap G$.

D’une part, $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$

D’autre part, $0_E = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{(-x)}_{\in G}$

Par unicité, $x = 0_E$

“ \impliedby ” On suppose $F \cap G = \{0_E\}$

Soit $x \in F + G$ et on suppose que x a deux décompositions :

$$\begin{cases} x = u + v, & u \in F, v \in G \\ x = u' + v', & u' \in F, v' \in G \end{cases}$$

D’où, $u - u' = v' - v$

Or, $\begin{cases} u - u' \in F \\ v - v' \in G \end{cases}$

Donc, $u - u' \in F \cap G = \{0_E\}$

donc $u - u' = 0_E$ donc $u = u'$ donc $v' = v$

□

REMARQUE:

Ce résultat est inutile pour l’instant (en l’absence d’arguments dimensionnels) pour prouver un résultat de la forme $E = F \oplus G$

EXEMPLE:

$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$F = \{f \in E \mid f \text{ paire}\}$ et $G = \{f \in E \mid f \text{ impaire}\}$

Prouvons que $E = F \oplus G$

Soit $f \in F \cap G$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x) = -f(x)$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f(x)$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$$

donc $f = 0_E$

Ainsi, la somme de F et G est directe

$$F + G = F \oplus G$$

Montrons que $E = F + G$. Soit $f \in E$.

ANALYSE Soient $g \in G$ et $h \in F$ telles que

$$f = g + h$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = -g(x) + h(x) \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} h(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \\ g(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \end{cases}$$

Donc $F + G = F \oplus G$.

SYNTHÈSE On pose

$$\begin{cases} g : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \\ h : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \end{cases}$$

On vérifie que $\begin{cases} g \in F \\ h \in F \\ g + h = f \end{cases}$

On a prouvé que $E = F + G$

EXEMPLE:

$E = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

$$F = S_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{|c|} \hline (u) \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline (u) \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{pmatrix}$$

$$G = A_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \begin{array}{|c|} \hline (u) \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline (-u) \\ \hline \end{array} & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = F \oplus G$$

Définition: Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. On dit que F et G sont supplémentaires dans E si

$$E = F \oplus G$$

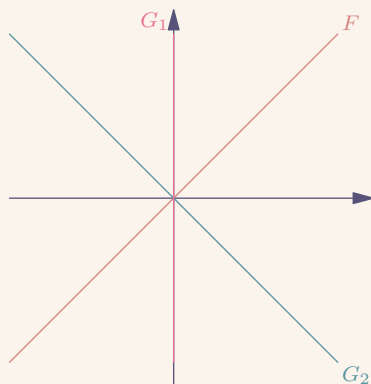
en d'autres termes,

$$\forall x \in E, \exists!(y, z) \in F \times G, x = y + z$$

EXEMPLE:

$E = \mathbb{R}^2$

$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x\}$



$$G_1 \oplus F = E \text{ et } G_2 \oplus F = E$$

Soit $(x, y) \in E$

$$\begin{aligned} (x, y) &= \underbrace{(x, x)}_{\in F} + \underbrace{(0, y - x)}_{\in G_1} \\ &= \underbrace{\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)}_{\in F} + \underbrace{\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)}_{\in G_2} \end{aligned}$$

Définition: Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille non vide de sous-espaces vectoriels de $(E, +, \cdot)$. On dit qu'ils sont en somme directe si

$$\forall x \in \sum_{i \in I} F_i, \exists! (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} F_i \text{ presque nulle telle que } x = \sum_{i \in I} x_i$$

Dans ce cas, on écrit $\bigoplus_{i \in I} F_i$ à la place de $\sum_{i \in I} F_i$

EXEMPLE:

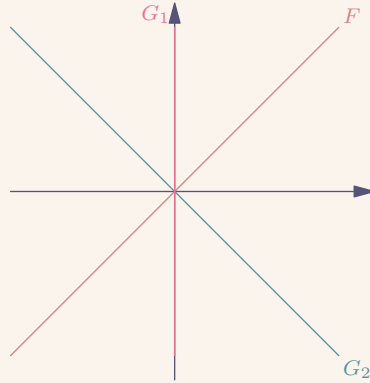
E : l'espace des fonctions polynomiales

$$\forall i \in \mathbb{N}, F_i = \{x \mapsto ax^i \mid a \in \mathbb{K}\}$$

$$E = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} F_i$$

EXEMPLE:

$$E = \mathbb{R}^2$$



$$\begin{cases} F = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ G = \{(0, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ H = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} \end{cases}$$

On a $F \cap G \cap H = \{0_E\}$ mais leur somme n'est pas directe

$$\begin{aligned} (0, 0) &= \underbrace{(1, 1)}_{\in F} + \underbrace{(0, -2)}_{\in G} + \underbrace{(-1, 1)}_{\in H} \\ &= \underbrace{(2, 2)}_{\in F} + \underbrace{(0, -4)}_{\in G} + \underbrace{(-2, 2)}_{\in H} \end{aligned}$$

Troisième partie

Familles de vecteurs

Définition: Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et $A \in \mathcal{P}(E)$. Le sous-espace vectoriel engendré par A est le plus petit sous espace vectoriel V de E tel que $A \subset V$.
On le note $\text{Vect}(A)$

EXEMPLE:

E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

- $\text{Vect}(\{0_E\}) = \{0_E\}$
- $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$
- $\text{Vect}(E) = E$
- Soit $u \in E \setminus \{0_E\}$
 $\text{Vect}(\{u\}) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}u$
- Soient $u, v \in E \setminus \{0_E\}$
 $\text{Vect}(\{u, v\}) = \{\lambda u + \mu v \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\} = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$

Définition: Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et $u \in E \setminus \{0_E\}$. La droite (vectorielle) engendrée par u est $\mathbb{K}u = \text{Vect}(u) = \text{Vect}(\{u\})$. Soit $v \in E$. On dit que u et v sont colinéaires si $v \in \mathbb{K}u$. Si v n'est pas colinéaire à u alors, $\text{Vect}(u, v) = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$ est appelé plan (vectoriel) engendré par u et v .

EXEMPLE:

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 est une droite vectorielle.

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants est un plan vectoriel.

$$\{y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \mid y'' + y = 0\} = \text{Vect}(\cos, \sin)$$

Proposition: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille non vide de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$. Alors,

$$\begin{aligned} \text{Vect}((e_i)_{i \in I}) &= \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i e_i \mid (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I \text{ et } (\lambda_i) \text{ presque nulle} \right\} \\ &= \sum_{i \in I} \mathbb{K}e_i \end{aligned}$$

Preuve:

On pose $F = \sum_{i \in I} \mathbb{K}e_i$

F est un sous espace vectoriel de E .

$$\begin{aligned} \forall i \in I, e_i &= \underbrace{\sum_{j \in I} \lambda_j e_j}_{\in F} \text{ où } \lambda_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \\ &= \delta_{i,j} \text{ (symbole de Kronecker)} \end{aligned}$$

Soit G un sous espace vectoriel de E tel que

$$\forall i \in I, e_i \in G$$

Soit $u \in F$. Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille presque nulle de scalaires telle que $u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$

Soit $\{i_1, \dots, i_k\} = \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0_K\}$
Donc,

$$u = \sum_{j=1}^k \underbrace{\lambda_{i_j} e_{i_j}}_{\in G} \in G$$

Donc $F \subset G$

□

Définition: On dit que $(e_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E si

$$E = \text{Vect}((e_i)_{i \in I})$$

EXEMPLE:

$$E = \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} e_1 &= (1, 0, 1) \\ e_2 &= (0, 1, 1) \\ e_3 &= (1, 1, 1) \\ e_4 &= (1, 0, 0) \\ e_5 &= (0, 1, 2) \end{cases}$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On cherche $(\lambda_1, \dots, \lambda_5) \in \mathbb{R}^5$ tels que

$$(E) : (x, y, z) = \sum_{i=1}^5 \lambda_i e_i$$

$$(E) \iff (x, y, z) = (\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4, \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_5)$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 + \boxed{\lambda_4} = x \\ \lambda_2 + \boxed{\lambda_3} + \lambda_5 = y \\ \boxed{\lambda_1} + \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_5 = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_4 = x - \lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_3 = y - \lambda_2 - \lambda_5 \\ \lambda_1 = z - \lambda_2 - \lambda_3 - 2\lambda_5 \end{cases}$$

Par exemple, $(\lambda_1 = z - y, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = y, \lambda_4 = x - z, \lambda_5 = 0)$ est solution

Donc

$$\text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) = E$$

EXEMPLE:

$$E = \mathbb{R}^4$$

$$\begin{cases} e_1 = (1, 0, 1, 0) \\ e_2 = (0, 1, 0, 1) \\ e_3 = (1, 1, 1, 1) \\ e_4 = (1, -1, 1, -1) \\ e_5 = (1, 1, 0, 0) \end{cases}$$

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \in \mathbb{R}^5$

$$\begin{aligned}
 (E) \quad (x, y, z, t) = \sum_{i=1}^5 \lambda_i e_i &\iff \begin{cases} x = \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 \\ y = \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_5 \\ z = \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ t = \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 \end{cases} \\
 &\iff \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \end{matrix} \begin{cases} \lambda_5 = x - z \\ \lambda_5 = y - t \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = z \\ \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = t \end{cases} \\
 &\iff \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} \lambda_5 = x - z \\ \boxed{0 = y - t - x + z} \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = z \\ \lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 = t \end{cases}
 \end{aligned}$$

Par exemple ; $(1, 0, 0, 0) \notin \text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$

Proposition: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E et $(u_j)_{j \in J}$ une surfamille de $(e_i)_{i \in I}$ constituée de vecteurs de E :

$$\forall i \in I, \exists j \in J, e_i = u_j$$

Alors, $(u_j)_{j \in J}$ engendre E . □

Proposition: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E et $i_0 \in I$

$$\begin{aligned}
 (e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}} \text{ engendre } E &\iff e_{i_0} \in \text{Vect}((e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}) \\
 &\iff e_{i_0} \text{ est une combinaison linéaire des } e_i \text{ (} i \in I, i \neq i_0 \text{)}
 \end{aligned}$$

Preuve: “ \implies ” $E = \text{Vect}((e_i)_{i \neq i_0})$ et $e_{i_0} \in E$

“ \impliedby ” Soit $u \in E$. Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille presque nulle de scalaires telle que

$$u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$$

Soit $(\mu_i)_{i \neq i_0}$ une famille de scalaires telle que

$$e_{i_0} = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \mu_i e_i$$

D'où,

$$\begin{aligned}
 u &= \lambda_{i_0} e_{i_0} + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i e_i \\
 &= \lambda_{i_0} \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \mu_i e_i + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i e_i \\
 &= \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} (\lambda_{i_0} \mu_i + \lambda_i) e_i \\
 &\in \text{Vect}((e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}})
 \end{aligned}$$

□

Proposition: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E , $i_0 \in I$.

1. On pose $u_i = \begin{cases} e_i & \text{si } i \neq i_0 \\ \lambda e_{i_0} & \text{sinon} \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$

Alors, $(u_i)_{i \in I}$ engendre E

2. Soit $v \in \text{Vect}((e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}})$.

On pose $u_i = \begin{cases} e_i & \text{si } i \neq i_0 \\ e_{i_0} + v & \text{sinon} \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$

Alors, $(u_i)_{i \in I}$ engendre E

Preuve: 1. Soit $u \in E$. On pose

$$u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$$

où $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^I$ presque nulle

$$\begin{aligned} u &= \lambda_{i_0} e_{i_0} + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i e_i \\ &= \lambda_{i_0} \lambda^{-1} u_{i_0} + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i u_i \\ &\in \text{Vect}((u_i)_{i \in I}) \end{aligned}$$

2. Soit $u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i \in E$

$$\begin{aligned} u &= \lambda_{i_0} e_{i_0} + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i e_i \\ &= \lambda_{i_0} (u_{i_0} - v) + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i u_i \end{aligned}$$

Or, $v = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \mu_i e_i = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \mu_i u_i$ où $(\mu_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ presque nulle

Donc, $u = \lambda_{i_0} + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} (\lambda_i - \lambda_{i_0} \mu_i) u_i \in \text{Vect}((u_i)_{i \in I})$

□

Définition: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs. On dit que $(e_i)_{i \in I}$ est libre si aucun vecteur de cette famille n'est une combinaison linéaire des autres vecteurs de cette famille :

$$\forall i \in I, e_i \notin \text{Vect}((e_j)_{j \in I \setminus \{i\}})$$

On dit aussi que les e_i sont linéairement indépendants

Proposition:

$$(e_i)_{i \in I} \text{ est libre } \iff \forall (\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle, } \left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0_E \implies \forall i \in I, \lambda_i = 0_{\mathbb{K}} \right)$$

Preuve: “ \implies ” Soit $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^I$ presque nulle. On suppose que

$$\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0_E$$

On suppose aussi qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0_{\mathbb{K}}$

On a alors

$$\lambda_{i_0} e_{i_0} = - \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \lambda_i e_i$$

$\lambda_{i_0} \neq 0_{\mathbb{K}}$ donc il a un inverse $\lambda_{i_0}^{-1}$ donc

$$e_{i_0} = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \left(-\lambda_i \lambda_{i_0}^{-1} \right) e_i \in \text{Vect}((e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}})$$

une contradiction \nmid

“ \impliedby ” On suppose que $(e_i)_{i \in I}$ n'est pas libre. On considère $i_0 \in I$ tel que e_{i_0} soit une combinaison linéaire des $e_i, i \in I \setminus \{i_0\}$

$$e_{i_0} = \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \mu_i e_i$$

avec $(\mu_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ famille presque nulle de scalaires.

Alors, $1_{\mathbb{K}} e_{i_0} - \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \mu_i e_i = 0_E$ Par hypothèse

$$\begin{cases} 1_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}} \\ \forall i \neq i_0, -\mu_i = 0_{\mathbb{K}} \end{cases}$$

une contradiction \nmid

□

EXEMPLE:

$E = \mathbb{R}^3$ On pose $\begin{cases} e_1 = (1, 1, 0) \\ e_2 = (1, 0, 1) \end{cases}$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_E \iff (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2) = (0, 0, 0)$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Donc, (e_1, e_2) est libre.

EXEMPLE:

$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, e_1 = \cos, e_2 = \sin$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_E &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) = 0 \\ &\implies \begin{cases} \lambda_1 = 0 & (x = 0) \\ \lambda_2 = 0 & (x = 0 \text{ dans la dérivée}) \end{cases} \end{aligned}$$

Donc (e_1, e_2) est libre.

Proposition: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille libre de E . Alors

$$\sum_{i \in I} \mathbb{K}e_i = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{K}e_i$$

i.e.

$$\forall u \in \sum_{i \in I} \mathbb{K}e_i, \exists! (\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle telle que } u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$$

En d'autres termes, tout vecteur de E a au plus une décomposition en combinaisons linéaires des $e_i, i \in I$

Preuve:

$$\text{Soit } u \in \sum_{i \in I} \mathbb{K}e_i$$

On suppose que u a au plus 2 décompositions

$$u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i = \sum_{i \in I} \mu_i e_i$$

avec (λ_i) et (μ_i) presque nulles.

Alors,

$$0_E = u - u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i - \sum_{i \in I} \mu_i e_i = \sum_{i \in I} (\lambda_i - \mu_i) e_i$$

Or, $(e_i)_{i \in I}$ est libre donc

$$\forall i \in I, \lambda_i \mu_i = 0_{\mathbb{K}}$$

□

Proposition: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille libre de E .

1. Toute sous famille de (e_i) est encore libre
2. Soit $u \in E$, $\mathcal{F} = (e_i \mid i \in I) \cup \{u\}$.

$$\mathcal{F} \text{ est libre} \iff u \notin \text{Vect}(e_i \mid i \in I)$$

3. (a) Quand on remplace un vecteur e_i par λe_i avec $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, la famille obtenue est libre.
- (b) Quand on remplace un vecteur e_i par $v + e_i$ avec $v \in \text{Vect}(e_j \mid j \neq i)$, la famille obtenue est libre.

Définition: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . On dit que (e_i) est une base de E si c'est à la fois une famille libre et génératrice de E ; i.e. si

$$E = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{K}e_i$$

i.e. si

$$\forall u \in E, \exists! (\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle telle que } u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$$

Dans ce cas, on dit que les λ_i sont les coordonnées de u dans la base $(e_i)_{i \in I}$

- EXEMPLE: 1. $(1, i)$ est une base de \mathbb{C} en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel
 2. (1) est une base de \mathbb{C} en tant que \mathbb{C} -espace vectoriel
 3.

$$\begin{cases} u = 1 + i \\ v = 1 - i \end{cases}$$

(u, v) est une \mathbb{R} -base de \mathbb{C}

En effet, soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$z = \lambda u + \mu v \iff a + ib = \lambda + \mu + i(\lambda - \mu)$$

$$\iff \begin{cases} a = \lambda + \mu \\ b = \lambda - \mu \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = \frac{a+b}{2} \\ \mu = \frac{a-b}{2} \end{cases}$$

AUTRE MÉTHODE

$(1, i)$ base
 donc $(1, 1 + i)$ base
 donc $(1 - (1 + i), 1 + i)$ base
 donc $(-2i, 1 + i)$ base
 donc $(1 + i - 2i, 1 + i)$ base
 donc $(1 - i, 1 + i)$ base

- EXEMPLE (Bases canoniques): 1. La base canonique de \mathbb{K}^n est (e_1, \dots, e_n) où $\forall i, e_i = (0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}, \underbrace{1_{\mathbb{K}}}_{\text{en ième position}}, 0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}})$ car

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathbb{K}^n, \exists! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, u = (x_1, \dots, x_n) &= x_1(1_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}) \\ &+ x_2(0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}, \dots, 0_{\mathbb{K}}) \\ &\vdots \\ &+ x_n(0_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \dots, 1_{\mathbb{K}}) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i e_i \end{aligned}$$

2. E l'ensemble des fonctions polynomiales de \mathbb{K} dans \mathbb{K} à coefficients dans \mathbb{K} où \mathbb{K} est infini.
 La base canonique de E est $(x \mapsto x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ car

$$\forall P \in E, \exists! n \in \mathbb{N}, \exists! (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}, \forall x \in \mathbb{K}, P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

3. $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
 La base canonique de E est $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ où

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, E_{i,j} = \left(\sigma_{i,j}^{k,\ell} \right)_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \ell \leq p}}$$

i.e.

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & 1_{\mathbb{K}} & \vdots \\ 0_{\mathbb{K}} & \cdots & 0_{\mathbb{K}} \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$\begin{matrix} j \\ \downarrow \end{matrix}$

$$\forall A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}, A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{i,j} E_{i,j}$$