Chapitre 20

Fractions rationnelle

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 28 mars 2022

Table des matières

Première partie

Construction de $\mathbb{K}(X)$

Proposition
Définition: On définit la relation $\sim$ sur $\mathbb{K}[X] \times \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)$ par

$$(P, Q) \sim (A, B) \iff PB = QA$$

Cette relation est une relation d'équivalence. On note $\big(\mathbb{K}[X] \times \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)\big)/_\sim$. Les éléments de $\mathbb{K}(X)$ sont appelés fractions rationnelles.
On note $\dfrac{P}{Q}$ la classe d'équivalence du couple (P, Q).

Preuve:
On note $E = \mathbb{K}[X]\big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)$.
- Soit $(P, Q) \in E$. $PQ = QP$ car $\times$ est commutative dans $\mathbb{K}[X]$. Donc $(P, Q) \sim (P, Q)$
- Soient $(P, Q) \in E, (A, B) \in E$. On suppose que $(P, Q) \sim (A, B)$. Donc $PB = QA$
  Donc, $(A, B) \sim (P, Q)$
- Soit $\big((P, Q), (A, B), (C, D)\big) \in E^3$. On suppose

$$\begin{cases} (P, Q) \sim (A, B) \\ (A, B) \sim (C, D) \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{cases} PB = QA \\ AD = BC \end{cases}$$

Donc

$$PBD = QAD = QBC$$

donc $B(PD - QC) = 0$
Comme $B \neq 0$ et comme $\mathbb{K}[X]$ est intègre,

$$PD - QC = 0$$

et donc $(P, Q) \sim (C, D)$

$\square$

Proposition: Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)$ et $R \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Alors

$$\frac{PR}{QR} = \frac{P}{Q}$$

Preuve:

$$\begin{aligned}\frac{PR}{QR} = \frac{P}{Q} &\iff (PQ, QR) \sim (P, Q)\\ &\iff PRQ = QRP\end{aligned}$$

□

Définition: Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \setminus \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)$. On dit que la fraction $\dfrac{P}{Q}$ est sous forme irréductible si $P \wedge Q = 1$.

Proposition
Définition: Soient $(P, Q) \sim (A, B)$. Alors

$$\deg(P) - \deg(Q) = \deg(A) - \deg(B)$$

Le degré de $\dfrac{P}{Q}$ est $\deg(P) - \deg(Q)$. On note ce "nombre" $\deg\left(\dfrac{P}{Q}\right)$.

Preuve:
On sait que $PB = QA$ donc

$$\deg(P) + \deg(Q) = \deg(Q) + \deg(A)$$

et donc

$$\deg(P) - \deg(Q) = \deg(A) - \deg(B)$$

□

Proposition
Définition: Soient $(P, Q) \sim (A, B)$ et $(R, S) \sim (C, D)$. Alors, $(PR, QS) \sim (AC, BD)$.
Le produit de $\dfrac{P}{Q}$ avec $\dfrac{R}{S}$ est $\dfrac{PR}{QS}$

Preuve:
On sait que $\begin{cases} PB = QA \\ RD = SC \end{cases}$. D'où,

$$PBRD = QASC$$

et donc

$$(PR)(BD) = (QS)(AC)$$

donc

$$(PR, QS) \sim (AC, BD)$$

$\square$

Proposition
Définition: Avec les notations précédentes,

$$(PS + RQ, QS) \sim (AD + BC, BD)$$

On définit la somme de $\dfrac{P}{Q}$ et $\dfrac{R}{S}$ par

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{S} = \frac{PS + RQ}{QS}$$

Preuve:
On sait que $\begin{cases} PB = QA \\ RD = SC \end{cases}$. Donc,

$$\begin{aligned} (PS + RQ)BD &= PSBD + RQBD \\ &= QASD + SCQB \\ &= QS(AD + BC) \end{aligned}$$

$\square$

Théorème: $\big(\mathbb{K}(X), +, \times\big)$ est un corps.

Preuve (partielle)*:* 1. "+" est associative : soient $\left(\dfrac{P}{Q}, \dfrac{R}{S}, \dfrac{A}{B}\right) \in \mathbb{K}(X)^3$.

$$\begin{array}{c} \dfrac{P}{Q} + \left(\dfrac{R}{S} + \dfrac{A}{B}\right) = \dfrac{P}{Q} + \dfrac{RB + AS}{SB} = \dfrac{PSB + QRB + QAS}{QSB} \\ \| \\ \left(\dfrac{P}{Q} + \dfrac{R}{S}\right) + \dfrac{A}{B} = \dfrac{PS + RQ}{QS} + \dfrac{A}{B} = \dfrac{PSB + RQB + AQS}{QSB} \end{array}$$

2. " + " est commutative

3. $\dfrac{0}{1}$ est neutre pour " $+$ "

$$\frac{P}{Q}+\frac{0}{1}=\frac{P\times 1+0\times Q}{Q\times 1}=\frac{P}{Q}$$

4. Soit $\dfrac{P}{Q}\in\mathbb{K}(X)$.

$$\frac{P}{Q}+\frac{-P}{Q}=\frac{PQ-QP}{Q^2}=\frac{0}{Q^2}=\frac{0}{1}$$

5. " $\times$ " est associative
6. " $\times$ " est commutative
7. $\dfrac{1}{1}$ est le neutre pour " $\times$ "
8. Soient $\left(\dfrac{P}{Q},\dfrac{R}{S},\dfrac{A}{B}\right)\in\mathbb{K}(X)^3$

$$\frac{P}{Q}\left(\frac{R}{S}+\frac{A}{B}\right)=\frac{P}{Q}\times\frac{RB+AS}{SB}=\frac{PRB+PAS}{QSB}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{P}{Q}\times\frac{R}{S}+\frac{P}{Q}\times\frac{A}{B}&=\frac{PR}{QS}+\frac{PA}{QB}\\&=\frac{PRQB+QSPA}{Q^2SB}\\&=\frac{PRB+SPA}{QSB}\end{aligned}$$

9. Soit $\dfrac{P}{Q}\neq\dfrac{0}{1}$ donc $P\times 1\neq Q\times 0$ donc $P\neq 0$.

$$\frac{P}{Q}\times\frac{Q}{P}=\frac{PQ}{PQ}=\frac{1}{1}$$

10. $\dfrac{1}{1}\neq\dfrac{0}{1}$ car $1\times 1\neq 0\times 1$

□

Proposition:

$$\forall P,A\in\mathbb{K}[X],\forall Q\in\mathbb{K}[X]\setminus\{0\},\qquad \frac{P}{Q}+\frac{A}{Q}=\frac{P+A}{Q}$$

Proposition: $i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ P & \longmapsto & \dfrac{P}{1} \end{array}$ est un morphisme d'anneaux injectif.

Preuve:
Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

$$\begin{aligned} i(P+Q) &= \frac{P+Q}{1} = \frac{P}{1} + \frac{Q}{1} = i(P) + i(Q) \\ i(PQ) &= \frac{PQ}{1} = \frac{PQ}{1 \times 1} = \frac{P}{1} \times \frac{Q}{1} = i(P) \times i(Q) \\ i(1) &= \frac{1}{1} \end{aligned}$$

Donc i est un morphisme d'anneaux.

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker}(i) &\iff i(P) = \frac{0}{1} \\ &\iff \frac{P}{1} = \frac{0}{1} \\ &\iff P \times 1 = 0 \times 1 \\ &\iff P = 0 \end{aligned}$$

donc i est injective. □

Définition: Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On pose

$$\lambda F = \frac{\lambda P}{Q} = \frac{\lambda}{1} \times \frac{P}{Q}$$

Proposition: $\big(\mathbb{K}(X), +, \cdot\big)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ P & \longmapsto & \dfrac{P}{1} \end{array}$ est linéaire. □

Remarque:
On peut identifier $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $\dfrac{P}{1} \in \mathbb{K}(X)$ i.e. écrire $P = \dfrac{P}{1}$ et alors
$\begin{cases} \mathbb{K}[X] \text{ est un sous-anneau de } \mathbb{K}(X) \\ \mathbb{K}[X] \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{K}(X) \end{cases}$
De plus, les deux définitions de degré coïncident.

Proposition: Soit $F, G \in \mathbb{K}(X)$.

1. $\deg(F+G) \leqslant \max(\deg F, \deg G)$
   Si $\deg(F) \neq \deg(G)$ alors $\deg(F+G) = \max(\deg F, \deg G)$;
2. $\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G)$;
3. Si $F \neq 0$, $\deg\left(\dfrac{1}{F}\right) = -\deg(F)$.

Preuve:
On pose $F = \dfrac{A}{B}$ et $G = \dfrac{P}{Q}$.

1. $F + G = \dfrac{AQ+PB}{BQ}$. On suppose que $\deg(F) \geqslant \deg(G)$ i.e. $\deg A - \deg B \geqslant \deg P - \deg Q$.

   $$\deg(F+G) = \deg(QA+PB) - \deg(BQ)$$

   On a

   $$\deg(AQ) = \deg(A) + \deg(Q) \geqslant \deg(P) + \deg(B) = \deg(PB).$$

   D'où

   $$\deg(F+G) \leqslant \deg(AQ) - \deg(BQ) = \deg\left(\frac{AQ}{BQ}\right) = \deg(F).$$

   Si $\deg(F) > \deg(G)$, alors $\deg(AQ) > \deg(PB)$ et donc

   $$\deg(F+G) = \deg(AQ) - \deg(BQ) = \deg(F).$$

2.
   $$\begin{aligned}\deg(FG) &= \deg\left(\frac{AP}{BQ}\right)\\ &= \deg(AP) - \deg(BQ)\\ &= \deg(A) + \deg(P) - \deg(B) - \deg(Q)\\ &= \deg F + \deg G.\end{aligned}$$

3. $\deg\left(\dfrac{1}{F}\right) = \deg(1) - \deg(F) = -\deg(F)$

□

Deuxième partie

Décomposition en éléments simples

Définition

Lemme:

$$\forall F \in \mathbb{K}(X), \exists!(E,G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X), \begin{cases} F = E + G \\ \deg(G) < 0 \end{cases}$$

On dit que E est la partie entière de F.

Preuve:
On pose $F = \dfrac{P}{Q}$ avec $P \in \mathbb{K}[X], Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

ANALYSE Soit $E \in \mathbb{K}[X]$ et $G \in \mathbb{K}(X)$ tels que

$$F = E + G \deg(G) < 0.$$

On pose $G = \dfrac{A}{Q}$ avec $A \in \mathbb{K}[X]$.

$$\begin{aligned} F = E + G &\iff \frac{P}{Q} = E + \frac{A}{Q} \\ &\iff P = EQ + A. \end{aligned}$$

$\deg G < 0, \deg A < \deg Q$.
Don E est le quotient de la division euclidienne de P par Q et A sont reste.

SYNTHÈSE Soient E le quotient et A le reste de la division euclidienne de P par Q. On a alors

$$\begin{cases} P = EQ + A \\ \deg(A) < \deg(Q) \end{cases}$$

et donc

$$F = E + \frac{A}{Q} \deg\left(\frac{A}{Q}\right) < 0.$$

□

EXEMPLE:
$F = \dfrac{X^3 + X - 1}{X^2 + 2}$, $\deg F = 1$.

$$\begin{array}{r|l} X^3 + X - 1 & X^2 + 2 \\ \cline{2-2} -\quad X^3 + 2X & \quad X \\ \hline -X - 1 & \end{array}$$

Donc,

$$F = \frac{X(X^2+2) - (X+1)}{X^2+2} = X - \frac{X+1}{X^2+2}.$$

Lemme: Soit $F = \dfrac{P}{AB}$ avec

$$\begin{cases} (P, A, B) \in \mathbb{K}[X]^3; \\ A \neq 0; B \neq 0; \\ A \wedge B = 1; \deg F < 0. \end{cases}$$

Alors,

$$\exists!(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2, \begin{cases} F = \dfrac{U}{A} + \dfrac{V}{B} \\ \deg\left(\dfrac{U}{A}\right) < 0 \text{ et } \deg\left(\dfrac{V}{R}\right). \end{cases}$$

Preuve: <u>ANALYSE</u> On suppose que

$$\begin{cases} F = \dfrac{U}{A} + \dfrac{V}{B} \\ U \in \mathbb{K}[X], \deg U < \deg A \\ V \in \mathbb{K}[X], \deg V < \deg B. \end{cases}$$

D'où

$$\frac{P}{AB} = \frac{UB + VA}{AB}$$

et donc $P = UB + VA$. D'après le théorème de Bézout, il existe $(R, S) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$RB + SA = P.$$

On a alors

$$0 = B(R - U) + A(S - V)$$

donc

$$A(S - V) = B(U - R)$$

donc

$$A \mid B(U - R) \qquad \text{dans } \mathbb{K}[X].$$

D'après le théorème de Gauss,

$$A \mid U - R$$

Donc $U - R = AT$ avec $T \in \mathbb{K}[X]$ donc

$$A(S - V) = BAT$$

donc

$$S - V = BT$$

donc

$$\begin{cases} R = -AT + U \\ S = BT + V \end{cases}.$$

On a

$$\begin{cases} S = BT + V \\ \deg V < \deg B \end{cases}$$

donc V est le reste de la division euclidienne de S par B et U est le reste de la division euclidienne de R par A.

<u>SYNTHÈSE</u> Soit $(R, S) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$P = RB + SA.$$

Soit V le reste de la division euclidienne de S par B.

$$\begin{cases} S = BT + V, T \in \mathbb{K}[X] \\ \deg V < \deg B \end{cases}$$

D'où,

$$\frac{P}{AB} = \frac{R}{A} + T + \frac{V}{B} = \frac{R + AT}{A} + \frac{V}{B}$$

et

$$\deg\left(\frac{V}{B}\right) = \deg(V) - \deg(B) < 0.$$

Si $\deg\left(\dfrac{R + AT}{A}\right) \geqslant 0$, alors

$$\deg\left(\frac{R + AT}{A}\right) > \deg\left(\frac{V}{B}\right)$$

et alors

$$\deg\left(\frac{P}{AB}\right) = \deg\left(\frac{R + AT}{A}\right) \geqslant 0.$$

Or,

$$\deg\left(\frac{P}{AB}\right) < 0.$$

Donc

$$\deg\left(\frac{R + AT}{A}\right) < 0.$$

On pose $U = R + AT$. On a bien

$$\frac{P}{AB} = \frac{U}{A} + \frac{V}{B} \text{ avec } \deg\left(\frac{U}{V}\right) < 0 \text{ et } \deg\left(\frac{V}{R}\right) < 0.$$

$\square$

Lemme: Soit $H \in \mathbb{K}[X]$ irréductible, $n \in \mathbb{N}_*$, $P \in \mathbb{K}[X]$, $F = \dfrac{P}{H^n}$ et $\deg F < 0$. Alors,

$$\begin{cases} \exists!(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2, F = \dfrac{U}{H^n} + \dfrac{V}{H^{n-1}}; \\ \deg U < \deg H; \\ \deg\left(\dfrac{V}{H^{n+1}}\right) < 0. \end{cases}$$

Preuve: <u>Analyse</u> $F = \dfrac{U}{H^n} + \dfrac{V}{H^{n-1}}$ avec

$$\begin{cases} \deg U < \deg H, \\ U \in \mathbb{K}[X], V \in \mathbb{K}[X], \\ \deg\left(\dfrac{V}{H^{n-1}}\right) < 0. \end{cases}$$

D'où

$$P = U + VH, \deg U < \deg H.$$

Donc V est le quotient et U le reste de la division euclidienne de P par H.

<u>Synthèse</u> Soient V et U le quotient et le reste de la division euclidienne de P par H :

$$\begin{cases} P = U + VH \\ \deg U < \deg H. \end{cases}$$

D'où

$$F = \frac{U}{H^n} + \frac{V}{H^{n-1}}$$

$$\deg U < \deg H$$

Si $\deg\left(\dfrac{V}{H^{n-1}}\right) \geqslant 0$, alors $\deg F = \deg\left(\dfrac{V}{H^{n-1}}\right) \geqslant 0$: une contradiction. Donc $\deg\left(\dfrac{V}{H^{n-1}}\right) < 0$.

□

Théorème (Théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}(\mathbf{X})$)**:** Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $F = \dfrac{P}{Q}$ la forme irréductible de F. On note $(z_1, \ldots, z_p)$ les racines complexes de Q et $(\mu_1, \ldots, \mu_p)$ leur multiplicité.

Alors,

$$\exists!(E, a_{1,1}, \ldots, a_{1,\mu_1}, a_{2,1}, \ldots, a_{2,\mu_2}, \ldots, a_{p,1}, \ldots, a_{p,\mu_p}) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}^{\deg Q},$$

$$F = E + \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{a_{i,j}}{(X - z_i)^j} \right).$$

Exemple:
$F = \dfrac{X^7 - 1}{X^5 + 2X^3 + X} \in \mathbb{C}(X)$

$$\begin{array}{rr|l}
 & X^7 - 1 & X^5 + 2X^3 + X \\ \cline{3-3}
- & X^7 + 2X^5 + X^3 & \qquad X^2 - 2 \\ \cline{1-2}
 & -2X^5 - X^3 - 1 & \\
- & -2X^5 - 4X^3 - 2X & \\ \cline{1-2}
 & 3X^3 + 2X - 1 &
\end{array}$$

$$F = (X^2 - 2) + \frac{3X^3 + 2X - 1}{X^5 + 2X^3 + X}$$

$$\begin{aligned}
X^5 + 2X^3 + X &= X(X^4 + 2X^2 + 1) \\
&= X(X^2 + 1)^2 \\
&= X(X - i)^2 (X + i)^2
\end{aligned}$$

D'après le 2ème lemme,

$$\frac{3X^3 + 2X - 1}{X^5 + 2X^3 + X} = \frac{a}{X} + \frac{bX + c}{(X - i)^2}$$

D'après le 3ème lemme,

$$\begin{aligned}
\frac{bX + c}{(X - i)^2} &= \frac{f}{(X - i)^2} + \frac{g}{X - i} \\
\frac{dX + e}{(X + i)^2} &= \frac{h}{(X + i)^2} + \frac{h}{X + i}
\end{aligned}$$

$$F = (X^2 - 2) + \frac{a}{X} + \frac{f}{(X - i)^2} + \frac{g}{X - i} + \frac{h}{(X - i)^2} + \frac{k}{X + i}.$$

On multiplie par X :

$$\frac{X^7 - 1}{X^4 + 2X^2 + 1} = a + X \left(X^2 - 2 + \frac{f}{(X - i)^2} + \frac{g}{X - i} + \frac{h}{(X - i)^2} + \frac{k}{X + 1} \right).$$

En remplaçant X par 0, on obtient

$$a = \frac{-1}{1} = -1.$$

On multiplie par $(X-i)^2$ et on remplace X par i :

$$\frac{3i^2+2i-1}{i(2i)^2} = f.$$

Donc,

$$f = \frac{-i-1}{-4i} = \frac{1}{4} - \frac{i}{4}$$

De même,

$$h = \frac{3(-i)^3+2(-i)-1}{-i(-2i)^2} = \overline{f} = \frac{1}{4} + \frac{i}{4}$$

$$\frac{3X^2+2X-1}{X^5+2X^3}+\frac{1}{X}-\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{4}\right)\frac{1}{(X-i)^2}-\left(\frac{1}{4}+\frac{i}{4}\right)\frac{1}{(X+i)^2}=\frac{g}{X-i}+\frac{h}{X+i}$$

$$\begin{aligned}
\frac{g}{X-i}+\frac{h}{X+i} &= \frac{3X^3+2X-1+X^4+2X^2+1+X(X+i)^2\left(-\frac{1}{4}+\frac{i}{4}\right)-X(X-i)^2\left(\frac{1}{4}-\frac{i}{4}\right)}{X^5+2X^3+X}\\
&= \frac{12X^3+8X-4+4X^4+8X^2+4+X^3(-1+i)+(1-i)X-X^3(1+i)-2X^2(1-i)+X(1+i)}{4(X^5+2X^3+X)}\\
&= \frac{4X^4+10X^3+8X^2+10X}{4\left(X^5+2X^3+X\right)}\\
&= \frac{2X^3+5X^2+2X+5}{2(X^4+2X^2+1)}\\
&= \frac{(X-i)(X+i)(2X+5)}{2(X-i)^2(X+i)^2}\\
&= \frac{2X+5}{2(X-i)(X+i)}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{cases} g=\dfrac{2i+5}{2\times 2i}=\dfrac{(2i+5)i}{-4}=\dfrac{2-5i}{4}\\[2ex] h=\dfrac{2(-i)+5}{2(-2i)}=\dfrac{2+5i}{4}\end{cases}$$

Preuve:
On suppose $\frac{P}{Q} \notin \mathbb{C}[X]$. On peut supposer Q unitaire.

<u>EXISTENCE</u> D'après le lemme 1, il existe $E \in \mathbb{C}[X]$, $G \in \mathbb{C}(X)$ tels que

$$\begin{cases} \frac{P}{Q} = E + G \\ \deg(G) < 0 \end{cases}$$

Soit $\frac{A}{B}$ la forme irréductible de G avec B unitaire ($A \wedge B = 1$ et $A \neq 0$).

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{A}{B}$$

donc

$$PB = EBQ + AQ \qquad (*)$$

donc

$$AQ = PB - EBQ$$

donc

$$A \mid B(P - EQ)$$

D'après le théorème de Gauss,

$$A \mid P - EQ$$

Soit $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$AR = P - EQ$$

D'où

$$\frac{AR}{Q} = \frac{P}{Q} - E = \frac{A}{B}$$

D'où

$$\frac{R}{Q} = \frac{1}{B}$$

donc $B \mid Q$.
De $(*)$, on a aussi

$$P \mid Q(EB + A)$$

Or, $P \wedge Q = 1$. Donc

$$P \mid EB + A$$

Soit $S \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$PS = EB + A$$

Donc

$$\frac{PS}{B} = E + \frac{A}{B} = \frac{P}{Q}$$

Donc
$$\frac{S}{B} = \frac{1}{Q}$$
et donc $Q \mid B$
Donc $Q = B$ (car ils sont unitaires).
Donc $G = \dfrac{A}{Q}$.
Or,
$$Q = \prod_{j=1}^{p} (X - z_j)^{\mu_j}$$
$$\forall j \neq k, (X - z_j)^{\mu_j} \wedge (X - z_k)^{\mu_k} = 1$$
D'après le lemme 2, il existe $(A_1, \dots, A_p) \in \mathbb{C}[X]^p$ tel que
$$\begin{cases} \dfrac{A}{Q} = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{A_j}{(X - z_j)^{\mu_j}} \\ \forall j \in [\![1, p]\!], \deg(A_j) < \mu_j \end{cases}$$
Soit $j \in [\![1, p]\!]$. D'après le lemme 3,
$$\frac{A_j}{(X - z_j)^{\mu_j}} = \frac{a_{j,\mu_j}}{(X - z_j)^{\mu_j}} + \frac{A_{j,1}}{(X - z_j)^{\mu_j - 1}}$$
avec
$$\begin{cases} a_{j,\mu_j} \in \mathbb{C} \\ A_{j,1} \in \mathbb{C}_{\mu_j - 2}[X] \end{cases}$$
En itérant ce procédé, on trouve $(a_{j,\mu_j}, \dots, a_{j,1}) \in \mathbb{C}^{\mu_j}$ tel que
$$\frac{A_j}{(X - z_j)^{\mu_j}} = \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{j,k}}{(X - z_j)^k}$$
D'où
$$\frac{P}{Q} = E + \underbrace{\sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{j,k}}{(X - z_j)^k}}_{\deg(\quad) < 0}$$

<u>Unicité</u> Soit $E_1 \in \mathbb{C}[X]$ et $(b_{j,k})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ 1 \leqslant k \leqslant \mu_j}} \in \mathbb{C}^{\sum_{j=1}^{p} \mu_j}$ tels que
$$\frac{P}{Q} = E_1 + \underbrace{\sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{b_{j,k}}{(X - z_j)^k}}_{\deg(\quad) < 0}$$

D'après le lemme 1,

$$E = E_1 \text{ et } \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{j,k}}{(X-z_j)^k} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{b_{j,k}}{(X-z_j)^k}$$

$\forall j \in [\![1,p]\!]$,

$$\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{k=0}^{\mu_j} \frac{b_{j,k}}{(X-z_j)^k} = \frac{\sum_{k=1}^{\mu_j} b_{j,k}(X-z_j)^{\mu_j-k}}{(X-z_j)^{\mu_j}} \\ \| \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\mu_j} \frac{a_{j,k}}{(X-z_j)^k} = \frac{\sum_{k=1}^{\mu_j} a_{j,k}(X-z_j)^{\mu_j-k}}{(X-z_j)^{\mu_j}} \end{array}$$

Donc,

$$\sum_{k=1}^{\mu_j} a_{j,k}(X-z_j)^k = \sum_{k=1}^{\mu_j} b_{j,k}(X-z_j)^k$$

Comme $\big(X-z_j,(X-z_j)^2,\dots,(X-z_j)^{\mu_j}\big)$ est libre dans $\mathbb{C}[X]$,

$$\forall k \in [\![1,\mu_j]\!], b_{j,k} = a_{j,k}$$

□

Théorème (Théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$)**:**
Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $P \wedge Q = 1$, Q unitaire, $Q \notin \{0,1\}$. On pose

$$Q = \prod_{i=1}^{p}(X-a_i)^{\mu_i} \prod_{k=1}^{q}(X^2+\alpha_k X+\beta_k)^{\nu_k}$$

avec

$$\begin{cases} p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, \\ (a_1,\dots,a_p) \in \mathbb{R}^p \\ (\alpha_1,\dots,\alpha_q,\beta_1,\dots,\beta_q) \in \mathbb{R}^{2q} \\ (\mu_1,\dots,\mu_p,\nu_1,\dots,\nu_p) \in \mathbb{N}^{p+q} \\ \forall j \in [\![1,q]\!], \alpha_k^2 - 4\beta_k < 0 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \exists!(E, &\gamma_{1,1},\dots,\gamma_{1,\mu_1},\gamma_{2,1},\dots,\gamma_{2,\mu_2},\dots,\gamma_{p,1},\dots,\gamma_{p,\mu_p}, \\ &\delta_{1,1},\dots,\delta_{1,\nu_1},\delta_{2,1},\dots,\delta_{2,\nu_2},\dots,\delta_{q,1},\dots,\delta_{q,\nu_q}, \\ &\varepsilon_{1,1},\dots,\varepsilon_{1,\nu_1},\varepsilon_{2,1},\dots,\varepsilon_{2,\nu_2},\dots,\varepsilon_{q,1},\dots,\varepsilon_{q,\nu_q}\big) \\ &\in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}^{\mu_1+\dots+\mu_p} \times \mathbb{R}^{2(\nu_1+\dots+\nu_q)} \end{aligned}$$

$$\frac{P}{Q} = E + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{\gamma_{i,j}}{(X-a_i)^j} + \sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{\nu_k} \frac{\delta_{k,j}X+\varepsilon_{k,j}}{(X^2+\alpha_k X+\beta_k)^j}$$

□

Définition: Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. Soient $(P,Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ tels que $\begin{cases} P \wedge Q = 1 \\ F = \dfrac{P}{Q} \end{cases}$.
Les racines de P sont appelées zéros de F
Les racines de Q sont appelées pôles de F

Proposition: Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ et $z \in \mathbb{C}$ un pôle simple de F. Le coefficiant devant $\dfrac{1}{X-z}$ dans la décomposition en éléments simples de F est $\dfrac{P(z)}{Q'(z)}$.

Preuve:
Soit $(P,Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ tels que

$$\begin{cases} F = \dfrac{P}{Q} \\ P \wedge Q = 1 \\ Q \text{ unitaire} \end{cases}$$

On pose

$$Q = (X-z)\prod_{i=1}^{q}(X-z_i)^{\mu_i}$$

où $z_1, \ldots, z_q$ sont les racines distinctes de z du polynôme Q. Donc,

$$\frac{P}{Q} = F = \frac{a}{X-z} + \sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{b_{i,k}}{(X-z_i)^k}$$

avec $a, (b_{i,k})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant q \\ 1 \leqslant k \leqslant \mu_i}}$ des nombres complexes.
On muliplie par $X-z$.

$$\frac{P}{\prod_{i=1}^{q}(X-z_i)^{\mu_i}} = a + (X-z)\sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{b_{i,k}}{(X-z_i)^k}$$

On remplace X par z.

$$\frac{P(z)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{q}(z-z_i)^{\mu_i}} = a$$

Or,

$$Q = (X-z)\prod_{i=1}^{q}(X-z_i)^{\mu_i}$$

D'où

$$Q' = \prod_{i=1}^{q}(X-z_i)^{\mu_i} + (X-z)\left(\prod_{i=1}^{q}(X-z_i)^{\mu_i}\right)'$$

Don

$$Q'(z) = \prod_{i=1}^{q}(z-z_i)^{\mu_i}$$

Donc

$$a = \frac{P(z)}{Q'(z)}$$

□

Proposition: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $\deg(P) \geqslant 1$, $(z_1,\ldots,z_p)$ les racines de P, $\mu_1,\ldots,\mu_p$ leur multiplicité. Alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{p}\frac{\mu_i}{X-z_i}$$

Preuve:
On pose

$$P = \alpha\prod_{i=1}^{p}(X-z_i)^{\mu_i}$$

Donc

$$P' = \alpha\sum_{i=1}^{p}\left(\prod_{j\neq i}(X-z_j)^{\mu_j}\right)\mu_i(X-z_i)^{\mu_i-1}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\frac{P'}{P} &= \frac{\cancel{\alpha}\sum_{i=1}^{p} \mu_i (X-z_i)^{\mu_i - 1} \prod_{j\neq i}(X-z_j)^{\mu_j}}{\cancel{\alpha}\prod_{i=1}^{p}(X-z_i)^{\mu_i}} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \mu_i \frac{(X-z_i)^{\mu_i-1}\prod j \neq i)(X-z_j)^{\mu_j}}{\prod_{j=1}^{p}(X-z_j)^{\mu_j}} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \mu_i \frac{1}{X-z_i}
\end{aligned}$$

□

Remarque:
Il existe un "truc" pour retenir cette formule :

$$\frac{P'}{P} = \underbrace{\ln(P)'}_{\text{n'existe pas !}} = \left(\ln\left(\alpha \prod_{i=1}^{p}(X-z_i)^{\mu_i}\right)\right)' = \left(\sum_{i=1}^{p} \mu_i \ln(X-z_i)\right)' = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \frac{1}{X-z_i}$$