Chapitre 18

TD

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 12 mars 2022

Table des matières

Exercice 8

— On suppose $a \neq b$.

$$\begin{aligned} P \mid P(X^3) &\iff a \text{ et } b \text{ sont racines de } P(X^3) \\ &\iff P(a^3) = P(b^3) = 0 \iff \qquad (a^3 = a \text{ ou } a^3 = b) \text{ et } (b^3 = a \text{ ou } b^3 = b) \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \begin{cases} a^3 = a \\ b^3 = a \end{cases} &\iff \cancel{\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}} \text{ ou } \begin{cases} a = 1 \\ b \in \{\cancel{1}, j, j^2\} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -1 \\ b \in \{\cancel{-1}, -j, -j^2\} \end{cases} \\ &\iff P \in \left\{(X-1)(X-j), (X-1)(X-j^2), (X+1)(X+j), (X+1)(X+j^2)\right\} \end{aligned}$$

$\begin{cases} a^3 = a \\ b^3 = b \end{cases}$ donne des polynômes (en plus des précédents) dans

$$\left\{X(X-1), X(X+1), (X-1)(X+1)\right\}$$

$$\begin{cases} a^3 = b \\ b^3 = a \end{cases} \iff \begin{cases} a^3 = b \\ a^9 = a \end{cases} \iff \exists k \in [\![0, 7]\!], \begin{cases} a = e^{\frac{ik\pi}{4}} \\ b = e^{\frac{3ik\pi}{4}} \end{cases}$$

On a donc,

$$\left\{ \left(X - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right), \underbrace{(X-i)(X+i)}_{\in \mathbb{R}[X]}, \left(X - e^{\frac{5i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{\frac{-i\pi}{4}}\right) \right\}$$

— On suppose $a = b$.

$$\begin{aligned} P \mid P(X^3) &\iff \begin{cases} P(a^3) = 0 \\ 3a^2 P'(a^3) = 0 \end{cases} \\ &\iff a^3 = a \\ &\iff a \in \{0, 1, -1\} \\ &\iff P \in \left\{X^2, (X-1)^2, (X+1)^2\right\} \end{aligned}$$

Exercice 11

$$L_n = \frac{n!}{(2n)!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$$

1. $\deg(L_n) = 2n - n = n$ et $\text{dom}(L_n) = 1$ car

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{n!}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(X^{2k}\right)^{(n)} (-1)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(2k)!}{(2k-n)!} X^{2k-n} (-1)^{n-k} \end{aligned}$$

2. Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   On pose $f_n : t \mapsto \dfrac{n!}{(2n)!} \left(t^2 - 1\right)^n$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} L_n(t)Q(t)\ dt &= f_n^{(n)}(t)Q(t)\ dt \\ &= \left[f_n^{(n-1)}(t)Q(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f_n^{(n-1)}(t)Q'(d)\ dt \end{aligned}$$

   $f_n^{(n-1)}(1) = 0$ car 1 est racine de $\left(X^2 - 1\right)^n$ avec multiplicité n. De même, $f_n^{(n-1)}(-1) = 0$. Par récurence, à n fixé,

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!]\,, \mathscr{P}(k) : \text{“} \int_{-1}^{1} L_n(t)Q(t)\ dt = (-1)^k \int_{-1}^{1} f_n^{(n-k)}(t)Q^{(k)}(t)\ dt\text{”}$$

3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} L_n\ dt = 0$, $t \mapsto L_n(t)$ est continue sur $[-1, 1]$ et n'est pas l'application nulle.
   donc L_n change de signe sur $[-1, 1]$ donc L_n a au moins une racine dans $[-1, 1]$.
   Supposons que L_n a une unique racine a dans $[-1, 1]$ et qu'elle change de signes en a. Donc, $t \mapsto L_n(t)(t - a)$ ne change pas de signes sur $[-1, 1]$, est continue et d'intégrale nulle. Donc c'est l'application nulle $\lightning$.
   On prouve par récurrence sur k que $t \mapsto L_n(t)$ change de signe au moins k-fois. Avec $k = n$, on trouve n racines disctinctes dans $[-1, 1]$ et comme $\deg(L_n) = n$ donc, il n'y a pas plus de n racines.

Exercice 2

1.

$$\begin{aligned} z^4 + 1 = 0 &\iff z^4 = -1 = e^{i\pi} \\ &\iff z \in \left\{e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}}\right\} \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{C}[X]$,

$$\begin{aligned}
X^4-1 &= \left(X-e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X-e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X-e^{\frac{5i\pi}{4}}\right)\left(X-e^{\frac{7i\pi}{4}}\right) \\
&= \left(X-e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X-e^{\frac{7i\pi}{4}}\left(X-e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X-e^{\frac{5i\pi}{4}}\right)\right) \\
&= \left(X^2-2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X+1\right)\left(X^2-2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)X+1\right) \\
&= \left(X^2-\sqrt{X}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right) \in \mathbb{R}[X]
\end{aligned}$$

2. $P=\left(X^2-X+1\right)^2+1$

$$\begin{aligned}
\left(z^2-z+1\right)^2+1=0 &\iff \left(z^2-z+1\right)^2=-1 \\
&\iff z^2-z+1=i \text{ ou } z^2-z+1=-i \\
&\iff z=\frac{1\pm(1+2i)}{2} \text{ ou } z=\frac{1\pm(1-2i)}{2}
\end{aligned}$$

Dans $\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
P &= \big(X-(1+i)\big)\big(X-(-i)\big)\big(X-(1-i)\big)\big(X-i\big) \\
&= \left(X^2-2X+2\right)\left(X^2+1\right) \in \mathbb{R}[X]
\end{aligned}$$

Exercice 5

$$\begin{aligned}
z^{2n}-2\cos(na)z^n+1=0 &\iff z^n=e^{\pm ina} \\
&\iff z\in\left\{e^{ia}\times e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k\in[\![0,n-1]\!]\right\}\cup\left\{e^{-ia}\times e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k\in[\![-(n-1),0]\!]\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X^{2n}-2\cos(na)X^n+1 &= \prod_{k=0}^{n-1}\left(X-e^{i\left(a+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-e^{i\left(-a+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2-2\cos\left(a+\frac{2k\pi}{n}\right)X+1\right)
\end{aligned}$$

Exercice 7

$$\begin{aligned}
f:\mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}_n[X] \\
P &\longmapsto P-P'
\end{aligned}$$

f est linéaire

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(f) &\iff P - P' = 0 \\ &\iff P = 0 \end{aligned}$$

Donc $f \in \mathrm{GL}\big(\mathbb{K}_n[X]\big)$ et $P_n = f^{-1}(X^n)$

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$$

$$P_n' = \sum_{k=1}^{n} k\alpha_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\alpha_{k+1} X^k$$

$$P_n - P_n' = \alpha_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \big(\alpha_k - (k+1)\alpha_{l+1}\big) X^k$$

$$\begin{cases} \alpha_n = 1 \\ \forall k \in [\![0, n-1]\!]\,, \alpha_k = (k+1)\alpha_{k+1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_n = 1 = \frac{n!}{n!} \\ &\alpha_{n-1} = n\alpha_n = n = \frac{n!}{(n-1)!} \\ &\alpha_{n-2} = (n-1)\alpha_{n-1} = (n-1)n = \frac{n!}{(n-2)!} \end{aligned}$$

Preuve par récurrence :

$$\alpha_{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Donc,

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} X^k$$

Exercice 10

On pose

$$\begin{aligned} P &= (X-x)(X-y)(X-z) \\ &= X^3 - (x+y+z)X^2 + (xy+xz+yz)X - xyz \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{cases} s = x + y + z \\ p = xyz \\ q = xy + xz + yz \end{cases}$$

On sait que $s = 0$.

$$\begin{aligned} s^2 &= (x+y+z)^2 \\ &= x^2+y^2+z^2+\underbrace{2xy+2yz+2xz}_{2q} \end{aligned}$$

donc,

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{2} = -q$$

$$\begin{aligned} 0 = P(x) &= x^3 - sx^2 + qx - p \\ 0 = P(y) &= y^3 - sy^2 + qy - p \\ 0 = P(z) &= z^3 - sz^2 + qz - p \end{aligned}$$

D'où,

$$x^3+y^3+z^3 = -qs + 3p = 3q$$

donc

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{3} = p$$

On a aussi

$$\begin{aligned} 0 &= x^5 + qx^3 - px^2 \\ 0 &= y^5 + qy^3 - py^2 \\ 0 &= z^5 + qz^3 - pz^2 \end{aligned}$$

et donc

$$x^5+y^5+z^5 = -3qp - 2qp = -5qp$$

donc

$$\frac{x^5+y^5+z^5}{5} = -qp = \frac{x^2+y^2+z^2}{2} \times \frac{x^3+y^3+z^3}{3}$$

Exercice 12

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{cases} P^{(k)}(0) = 0 \\ P^{(k-1)}(0) > 0 \\ P^{(k+1)}(0) > 0 \end{cases}$$

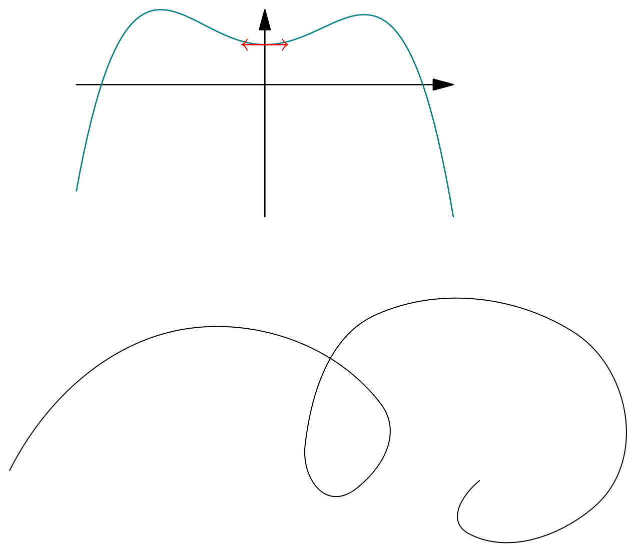

FIGURE 1 – Exercice 12

Exercice 15

On suppose $\deg(A) \geqslant \deg(B)$.

$$\deg(A-B) \leqslant \deg(A)$$

Soient $a_1, \dots, a_p$ les racines distinctes de A (et donc de B) avec $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ leur multiplicité en tant que racine de A et $\beta_1, \dots, \beta_p$ leur multiplicité en tant que racine de B.
Donc,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = \deg(A) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \beta_i = \deg(B) \end{cases}$$

$\forall i, a_i$ est une racine de $A - B$ de multiplicité $\min(\alpha_i, \beta_i)$

$$A - B = (A-1) - (B-1)$$

Soient $a'_1, \dots, a'_q$ les racines de $A - 1$ (et donc de $B - 1$) avec $\alpha'_1, \dots, \alpha'_q$ leur multiplicité en tant que racine de $A - 1$, et $\beta'_1, \dots, \beta'_q$ leur multiplicité en tant que racine de $B - 1$.

On remarque que $\{a_1, \dots, a_p\} \cap \{a'_1, \dots, a'_q\} = \varnothing$

$\forall j \in [\![1, q]\!], a'_j$ est racine de $A - B$ avec multiplicité $\min(\alpha'_j, \beta'_j)$.
$\forall i, a_i$ racone de A' avec multiplicité $\alpha_i - 1$. $\forall i, a'_i$ racone de A' avec multiplicité $\alpha'_i - 1$.

$$\sum_{i=1}^{p}(\alpha_i - 1) + \sum_{i=1}^{q}(\alpha'_j - 1) \leqslant \deg(A') = \deg(A) - 1$$

D'où,

$$\deg(A) - p + \deg(A)q \leqslant \deg(A) - 1$$

Donc

$$p + q \geqslant \deg(A) + 1$$

On a donc trouvé au moins $p + q$ racines différentes de $A - B$ avec $p + q > \deg(A - B)$. Donc $A - B = 0$

Exercice 17

Soient $x, y, z \in \mathbb{C}$. On pose

$$\begin{cases} s = x + y + z \\ q = xy + xz + yz \\ p = xyz \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} P &= (X - x)(X - y)(X - z) \\ &= X^3 - sX^2 + qX - p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^2 &= (x + y + z)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2q \end{aligned}$$

donc $x^2 + y^2 + z^2 = s^2 - 2q$
De plus,

$$\begin{cases} 0 = P(x) & = x^3 - sx^2 + qx - p \\ 0 = P(y) & = y^3 - sy^2 + qy - p \\ 0 = P(z) & = z^3 - sz^2 + qz - p \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= s(x^2 + y^2 + z^2) - q(x + y + z) + 3p \\ &= s(s^2 - 2q) - qs + 3p \\ &= s^3 - 3qs + 3p \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x^4+y^4+z^4 &= s(x^3+y^3+z^3) - q(x^2+y^2+z^2) + p(x+y+z) \\ &= s(s^3-3qs+3p) - q(s^2-2q) + ps \end{aligned}$$

et

$$x^5+y^5+z^5 = s(x^4+y^4+z^4) - q(x^3+y^3+z^3) + p(x^2+y^2+z^2)$$

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x^2+y^2+z^2=0 \\ x^4+y^4+z^4=0 \\ x^5+y^5+z^5=0 \end{cases} &\iff \begin{cases} s^2-2q=0 \\ s(s^3-3qs+4p)=0 \\ -qs+3p=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 0=0 \\ s=0 \\ q=0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} s^2=2q \\ s\neq 0 \\ q\neq 0 \\ 3p=qs \\ s^3-3qs+4p=0 \end{cases} \\
&\iff s=q=0 \ \text{ ou } \begin{cases} s^2=2q \\ 3p=qs \\ qs\left(2-3+\dfrac{4}{3}\right)=0 \end{cases} \\
&\iff s=q=0 \\
&\iff x,y,z \text{ sont racines de } X^3-p=0 \text{ avec } p\in\mathbb{C} \text{ quelconque} \\
&\iff \begin{cases} y=xj \\ z=xj^2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y=xj^2 \\ z=xj \end{cases} \quad \text{avec } x\in\mathbb{C} \text{ quelconque}
\end{aligned}$$

Vérification :

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= x^2(1+j^2+j^4) = x^2(1+j+j^2) = 0 \\ x^4+y^4+z^4 &= x^4(1+j^4+j^8) = x^4(1+j+j^2) = 0 \\ x^5+y^5+z^5 &= x^5(1+j^5+j^{10}) = x^5(1+j+j^2) = 0 \end{aligned}$$

Exercice 1

$$\begin{cases} P=(X-a)(X-b)Q+R \\ \deg R<2 \end{cases}$$

Donc, $R=\alpha X+\beta$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$.

$$\begin{cases} P(a) = R(a) = \alpha a + \beta \\ P(b) = R(b) = \alpha b + \beta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(a) \\ P(b) \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a-b} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{a-b} \begin{pmatrix} P(a) - P(b) \\ -bP(a) + aP(b) \end{pmatrix}$$

Exercice 4

$$A = \prod_{i=1}^{r} P_i \qquad P_i \text{ irreductible}$$

$$B = \prod_{j=1}^{s} Q_i \qquad Q_i \text{ irreductible}$$

donc

$$A^2 = \prod_{i=1}^{r} P_i^2$$

$$B^2 = \prod_{j=1}^{s} Q_i^2$$

$$\begin{aligned} A^2 \mid B^2 &\iff \forall i \in [\![1, r]\!], \exists j \in [\![1, s]\!], P_i = P_j \\ &\iff A \mid b \end{aligned}$$

Exercice 19 (supplémentaire)

Trouver tous les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$XP(X+1) = (X+4)P(X)$$

Analyse Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$XP(X+1) = (X+4)P(X)$$

En remplaçant X par 0, on obtient

$$4P(0) = 0$$

donc 0 est racine de P.
En replaçant X par -4, on obtient

$$-4P(-3) = 0$$

donc -3 est une racine de P.
En remplaçant X par -3, on obtient

$$-3P(-2) = -P(-3) = 0$$

donc -2 est racine de P.
En replaçant X par -2, on obtient

$$-2P(-1) = -2P(-2) = 0$$

donc -1 est racine de P.
D'où,

$$P = X(X+1)(X+2)(X+3)\,Q(X)$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.
Donc,

$$\begin{aligned} &X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)\,Q(X+1) \\ &= (X+4)X(X+1)(X+2)(X+3)\,Q(X). \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{R}[X]$ est intègre,

$$Q(X) = Q(X+1).$$

Si Q n'est pas constant, alors Q a au moins une racine $a \in \mathbb{C}$ et alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, Q(a+k) = Q(a) = 0.$$

Donc, Q a une infinité de racines donc $Q = 0$.
Donc Q est constant.

Synthèse Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et

$$P = \lambda X(X+1)(X+2)(X+3).$$

On vérifie aisément que

$$XP(X+1) = (X+4)P(X).$$

Exercice 13

$P^2 + \alpha^2$ n'a pas de racines réelles.
Soit x une racine de $P^2 + \alpha^2$ de multiplicité au moins 2. Donc x est une racine de $2P'P$.
$x \notin \mathbb{R}$ donc $\begin{cases} P(x) \neq 0 \\ P'(x) \neq 0 \end{cases}$ car P et P' sont scindés sur $\mathbb{R}$. $\lightning$