

CHAPITRE 14

TD

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

Table des matières

Exercice 1	1
Exercice 2	2
Exercice 3	2
Exercice 4	2
Exercice 5	3
Exercice 6	3
Exercice 7	4
Exercice 8	4
Exercice 9	5
Exercice 10	5
Exercice 11	6
Exercice 12	6
Exercice 13	7

Exercice 1

Pour $t \in [0, 1]$, on note $d(t)$ la distance en km parcourue en t heure.

$$d : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

On suppose $\begin{cases} d(0) = 0 \\ d(1) = 4 \\ d \text{ continue et croissante} \end{cases}$
On veut prouver qu'il existe t tel que

$$d\left(t + \frac{1}{2}\right) - d(t) = 2$$

On pose $\delta : t \mapsto d\left(t + \frac{1}{2}\right) - d(t)$ continue.

$$\begin{cases} \delta(0) = d\left(\frac{1}{2}\right) \\ \delta\left(\frac{1}{2}\right) = 4 - d\left(\frac{1}{2}\right) \leq d(1) \end{cases}$$

— Si $d\left(\frac{1}{2}\right) > 2$, alors $\delta\left(\frac{1}{2}\right) < 2 < \delta(0)$ donc il existe t tel que $\delta(t) = 2$

— Si $d\left(\frac{1}{2}\right) \leq 2$, alors $\delta\left(\frac{1}{2}\right) \geq 2 \geq \delta(0)$ donc il existe t tel que $\delta(t) = 2$

Donc il existe t tel que $\delta(t) = 2$ i.e. $d\left(t + \frac{1}{2}\right) = 2 + d(t)$

Exercice 2

On pose $\begin{cases} M : x \mapsto \max(f(x), g(x)) \\ m : x \mapsto \min(f(x), g(x)) \end{cases}$

On remarque que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} M(x) + m(x) = f(x) + g(x) \\ M(x) - m(x) = |f(x) - g(x)| \end{cases}$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, M(x) = \frac{1}{2} (f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$$

et

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}, m(x) = \frac{1}{2} (f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|) \right)$$

On a bien M continue

Exercice 3

$\forall n \in \mathbb{Z}, x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est constante sur $[n, n+1[$ donc $\begin{cases} \text{continue sur }]n, n+1[\\ \text{et continue à droite en } n \end{cases}$

Soit $f : x \mapsto (x - \lfloor x \rfloor)^2 + \lfloor x \rfloor$

Soit $n \in \mathbb{Z}$. f est continue sur $]n, n+1[$

Donc f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

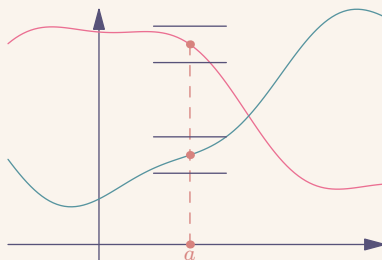
$$f(n) = 0^2 + n = n$$

$$\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} (x - n)^2 + n = n$$

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} (x - (n-1))^2 + (n-1) = 1 + n - 1 = n$$

Donc f est continue en n donc f est continue sur \mathbb{R}

Exercice 4



On suppose, sans perte de généralité, $f(a) < g(a)$.

On pose $\varepsilon = \frac{g(a) - f(a)}{3} > 0$.

$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} g(a)$ donc il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$\forall x \in]a - \eta_1, a + \eta_1[\cap I, |g(x) - g(a)| \leq \varepsilon$$

De même, il existe $\eta_2 > 0$ tel que

$$\forall x \in]a - \eta_2, a + \eta_2[\cap I, |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

On suppose $a \in \overset{\circ}{A}$ (sinon $J = \{a\}$ conviendrait...)

donc il existe $\eta_3 > 0$ tel que $]a - \eta_3, a + \eta_3[\subset I$.

On pose $J =]a - \eta_1, a + \eta_1[\cap]a - \eta_2, a + \eta_2[\cap]a - \eta_3, a + \eta_3[$.

J est un intervalle ouvert non vide (car $a \in J$) inclus dans I .

$$\begin{aligned} \forall x \in J, f(x) &\leq f(a) + \varepsilon = \frac{2f(a) + g(a)}{3} \\ &< \frac{f(a) + 2g(a)}{3} \\ &\leq g(a) - \varepsilon \\ &\leq g(x) \end{aligned}$$

Donc,

$$\forall x \in J, f(x) \neq g(x)$$

Exercice 5

On pose

$$\begin{aligned} g : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) - x \end{aligned}$$

g est continue

$$\begin{cases} g(0) = f(0) \geq 0 \\ g(1) = f(1) - 1 \leq 0 \end{cases}$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires,

$$\exists a \in [0, 1], g(a) = 0 \text{ i.e. } f(a) = a$$

Exercice 6

—

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq x^2 |x - 2| \xrightarrow[x \rightarrow 2]{x \rightarrow 0} 0$$

Par encadrement,

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \neq 0]{x \rightarrow 0} 0 & = f(0) \\ f(x) \xrightarrow[x \neq 2]{x \rightarrow 2} 0 & = f(2) \end{cases}$$

Donc f est continue en 0 et en 2

— Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

\mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} dnc il existe $(x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R} donc il existe $(y_n) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ telle que $y_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$

$$\left\{ \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} f(x_n) = x_n^2(x_n - 2) \times 0 = 0 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \\ f(y_n) = y_n^2(y_n - 2) \times 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a^2(a - 2) \end{cases} \right.$$

Comme $a \notin \{0, 2\}$, $a^2(a - 2) \neq 0$ donc f n'est pas continue en a

Exercice 7

CAS 1 $\forall x \geq a, f(x) = 0$

Alors,

$$0 = f(a) = \max_{[a, +\infty[} f$$

CAS 2 $\exists x_0 \geq a, f(x_0) > 0$.

On pose $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$

Il existe $\eta \geq x_0$ tel que

$$\forall x \geq \eta, f(x) \leq \varepsilon$$

f est continue sur $[a, \eta]$ donc elle a un maximum

$$\max_{[a, \eta]} f = f(b) \text{ avec } b \in [a, \eta]$$

D'où,

$$\forall x \geq a, f(x) \leq \begin{cases} \varepsilon < f(x_0) \underset{\text{car } x_0 \in [a, \eta]}{\leq} f(b) & \text{si } x \geq \eta \\ f(b) & \text{si } x \leq \eta \end{cases}$$

Exercice 8

Preuve du " \Leftarrow " de la proposition 2.10 du cours

Soit $y \in]a, b[$. f est croissante sur $]a, y[$ et majorée par $f(y)$ donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x < y}} f(x) = \sup_{]a, y[} f \leq f(y)$$

f est croissante sur $]y, b[$ minorée par $f(b)$ donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow y \\ >}} f(x) = \inf_{]y, b[} f \geq f(y)$$

Supposons $\sup_{]a, y[} f < f(y)$.

Soit $t \in]a, y[$, $f(t) \leq \sup_{]a, y[} f < f(y)$

donc $\sup_{]a, y[} f \in [f(t), f(y)] \subset [f(a), f(b)] = f([a, b])$

donc

$$\exists u \in]a, b[, \sup_{]a, y[} f = f(u)$$

Donc $f(u) < f(y)$

Soit $w \in]f(u), f(y)[\subset [f(a), f(b)] = f([a, b])$ donc $w = f(r)$ avec $r \in [a, b]$.

$$f(r) > f(u) \text{ donc } r > u$$

$$f(r) < f(y) \text{ donc } r < y$$

donc $r \in]a, y[$ donc $f(u) < w = f(r) \leq f(u) \nmid$

Exercice 9

1. Récurrence :

$$— f\left(a^{\frac{1}{a^0}}\right) = f(a)$$

$$— f\left(a^{\frac{1}{2^{n+1}}}\right) = f\left(\left(a^{\frac{1}{2^n}}\right)^2\right) = f\left(a^{\frac{1}{2^n}}\right) = f(a)$$

2. $\forall a > 0, a^{\frac{1}{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

f est continue donc

$$f\left(a^{\frac{1}{2^n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(1)$$

$$\parallel \\ f(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$$

Donc $f(a) = f(1)$

$f(0) = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ >}} f(a) = f(1)$ car f est continue en 0

donc $\forall a \in \mathbb{R}^+, f(a) = f(1)$, f est constant

Exercice 10

— Soit $x \in E_f$. $f(x) = x$ donc $x \in \text{Im}(f)$

— Soit $x \in \text{Im}(f)$, $x = f(u)$.

Alors, $f(x) = f(f(u)) = f(u) = x$ donc $x \in E_f$

D'où $E_f = \text{Im}(f) = f([0, 1])$

Comme f est continue, $f([0, 1])$ est un segment non vide car $f(1) \in \text{Im}(f) = E_f$
 Soient $a \leq b$ dans $[0, 1]$
 $g : [0, a] \rightarrow [a, b]$ continue telle que $g(a) = a$
 $h : [b, 1] \rightarrow [a, b]$ continue telle que $h(b) = b$
 On pose

$$f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \longmapsto \begin{cases} g(x) & \text{si } x \leq a \\ x & \text{si } a \leq x \leq b \\ h(x) & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

Montrer que f est continue est $f \circ f = f$

Exercice 11

On suppose $A \neq \emptyset$ et on pose

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \inf \{|x - a| \mid a \in A\}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(\forall a \in A, |x - a| \geq 0 \text{ donc } f(x) \text{ existe} \right)$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\forall a \in A, f(x) = \inf_{a \in A} (|x - a|) \leq |x - a| = |x - y + y - a|$$

$$\leq |x - y| + |y - a|$$

donc

$$\forall a \in A, |y - a| \geq f(x) - |x - y|$$

donc

$$f(y) \geq f(x) - |x - y|$$

donc

$$f(x) - f(y) \leq |x - y|$$

On peut prouver de même que

$$f(y) - f(x) \leq |y - x| = |x - y|$$

D'où,

$$-|x - y| \leq f(x) - f(y) \leq |x - y|$$

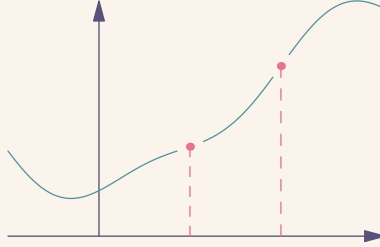
donc

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

donc f est 1-lipschitzienne donc continue

Exercice 12

$$\forall y \in [0, 1], \varphi(y) = \lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x \neq y}} f(x)$$



1. Soit $y \in [0, 1]$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta_1 > 0$ tel que

$$\forall x \in [0, 1] \cap]y - \eta_1, y + \eta_1[\setminus \{y\}, -\frac{\varepsilon}{2} \leq -f(x) + \varphi(y) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

2. Soit $z \in [0, 1] \cap]y - \frac{\eta_1}{2}, y + \frac{\eta_1}{2}[$. Il existe $\eta_2 > 0$ tel que

$$\forall x \in [0, 1] \cap]z - \eta_2, z + \eta_2[\setminus \{z\}, -\frac{\varepsilon}{2} \leq f(x) - \varphi(z) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

3. Soit $x \in [0, 1] \cap]z - \eta, z + \eta[\setminus \{y, z\}$ où $\eta = \frac{1}{2} \min(\eta_1, \eta_2)$.

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y| \leq \eta + \frac{\eta_1}{2} \leq \frac{\eta_1}{2} + \frac{\eta_1}{2} = \eta_1$$

$$\varphi(y) - \varphi(z) = \underbrace{\varphi(y) - f(x)}_{\in [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]} \underbrace{f(x) - \varphi(z)}_{\in [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]} \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

Exercice 13

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \sup_{t \in [a, b]} (f(t) + xg(t))$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. $t \mapsto f(t) + xg(t)$ est continue sur $[a, b]$ donc $\varphi(x)$ existe. φ est définie sur \mathbb{R} . On pose

$$\begin{cases} m = \min_{t \in [a, b]} (g(t)) \\ M = \max_{t \in [a, b]} (g(t)) \end{cases}$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], \varphi(x) &\geq f(t) + xg(t) \\ &\geq f(t) + yg(t) + (x - y)g(t) \end{aligned}$$

Si $x \geq y$, $g(t) \geq m$ donc $(x - y)g(t) \geq m(x - y)$
 Si $x \leq y$, $g(t) \leq M$ donc $(x - y)g(t) \leq M(x - y)$

Dans les deux cas, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in [a, b], \varphi(x) - \mu(x - y) \geq f(t) + yg(t)$$

donc

$$\varphi(x) - \mu(x - y) \geq \varphi(y)$$

donc

$$\varphi(x) - \varphi(y) \geq \mu(x - y)$$

En échangeant les rôles de x et y , il existe $\nu \in \mathbb{R}$ tel que

$$\varphi(y) - \varphi(x) \geq \nu(y - x)$$

Donc

$$\mu(x - y) < \varphi(x) - \varphi(y) \leq \nu(x - y)$$

Par encadrement, $\varphi(x) - \varphi(y) \xrightarrow[x \rightarrow y]{\neq} 0$

donc $\varphi(x) \xrightarrow[x \rightarrow y]{\neq} \varphi(y)$

donc φ est continue en y