Chapitre 8

Ensemble relations et lois de compo

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 24 février 2022

Table des matières

Première partie

Théorie naïve des ensembles

Definition

Un <u>ensemble</u> est une collection finie ou infinie d'objets de même nature ou non. L'ordre de ces objets n'a pas d'importance.

Remarque *Notation*
Soit E un ensemble et x un objet de E.
On écrit $x \in E$ ou bien $x \ni E$.

Remarque ⚠ *Paradoxe*
On note Ω l'ensemble de tous les ensembles. Alors, $\Omega \in \Omega$.
Ce n'est pas le cas de tous les ensembles :

$$\mathbb{N} \notin \mathbb{N} \text{ car } \mathbb{N} \text{ n'est pas un entier}$$

On distingue donc 2 types d'ensembles :
- ceux qui vérifient $E \notin E$, on dit qu'ils sont <u>ordinaires</u>
- ceux qui vérifient $E \in E$, on dit qu'ils sont <u>extra-ordinaires</u>

On note O l'ensemble de tous les ensembles ordinaires.
- Supposons O ordinaire. Alors, $O \notin O$
  Or, O est ordinaire et donc $O \in O$ $\lightning$
- Supposons O extra-ordinaire.
  Alors $O \in O$ et donc O ordinaire $\lightning$

$\boxed{\text{C'est un paradoxe}}$

Pour éviter ce type de paradoxe, on a donné une définition axiomatique qui explique quelles sont les opérations permettant de combiner des ensembles pour en faire un autre.

Definition

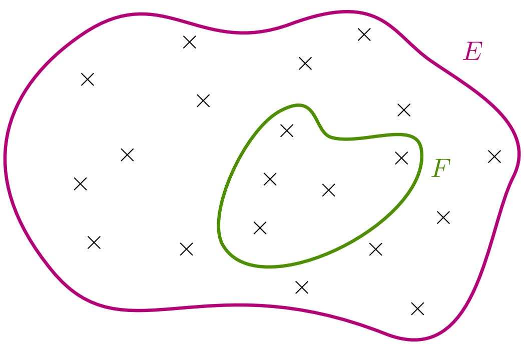
Soit E un ensemble et F un autre ensemble. On dit que E et F sont <u>égaux</u> (noté $E = F$) si E et F contiennent les mêmes objets.

Definition

L'ensemble <u>vide</u>, noté $\varnothing$ est le seul ensemble à n'avoir aucun élément.

Definition

Soient E et F deux ensembles. On dit que F est <u>inclus</u> dans E, noté $F \subset E$ ou $E \supset F$ si tous les éléments de F sont aussi des éléments de E.



$\forall x \in F, x \in E$

Proposition

Pour tout ensemble E, $\varnothing \subset E$

■

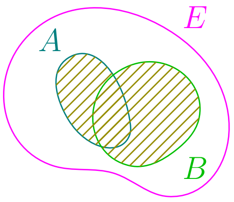
Definition

Soit E un ensemble. On peut former l'ensemble de toutes les parties de E (une partie de E est un ensemble F avec $F \subset E$). On le note $\mathscr{P}(E)$

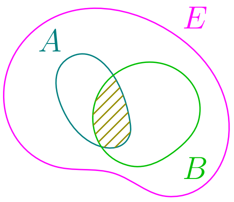
$$A \in \mathscr{P}(E) \iff A \subset E$$

Definition

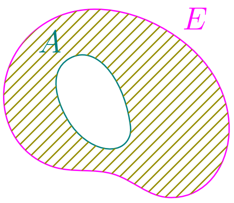
Soit E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$

1. 

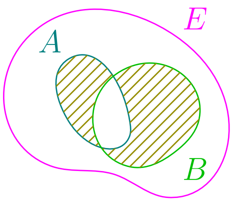
La réunion de A et B est
$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \ \text{ou} \ x \in B\}$$

2. 

L'intersection de A et B est
$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \ \text{et} \ x \in B\}$$

3. 

Le complémentaire de A dans E est
$$E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\} = C_E A$$

4. 

La différence symétrique de A et B est
$$\begin{aligned} A \Delta B &= \{x \in E \mid (x \in A \ \text{et} \ x \notin B) \ \text{ou} \ (x \notin A \ \text{et} \ x \in B)\} \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$

Proposition Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$

1. $A \cap A = A$
2. $B \cap A = A \cap B$
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4. $A \cap \varnothing = \varnothing$
5. $A \cap E = A$
6. $A \cup A = A$
7. $B \cup A = A \cup B$
8. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
9. $A \cup \varnothing = A$
10. $A \cup E = E$
11. $(E \setminus A) \setminus A = E \setminus A$
12. $E \setminus (E \setminus A) = A$
13. $E \setminus \varnothing = E$
14. $E \setminus E = \varnothing$
15. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
16. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
17. $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$
18. $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$

■

Deuxième partie

Applications

Definition

Une application f est la donnée de
- un ensemble E appelé ensemble de départ
- un ensemble F appelé ensemble d'arrivée
- une fonction qui associe à tout élément x de E un unique élément de F noté $f(x)$

L'application est notée

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Definition

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est
- injective si tout élément de F a au plus un antécédant par f
- bijective si tout élément de F a un unique antécédant par f
- surjective si tout élément de F a au moins un antécédant par f

Definition

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. L'application notée $g \circ f$ est définie par

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

On dit que c'est la composée de f et g.

Proposition

Soient $f : E \to F, g : F \to G, h : G \to G$. Alors, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

■

Remarque ⚠ *Attention*
En général, $g \circ f \neq f \circ g$

Par exemple, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$

Alors, $f \circ g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ et $g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$

donc $f \circ g \neq g \circ f$

Proposition

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$
1. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective

2. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective
3. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective
4. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective

■

Remarque

$f : E \longrightarrow F$

$$f \text{ injective} \iff \left(\forall (x,y) \in E^2, f(x) = f(y) \implies x = y\right)$$

Definition

Soit $f : E \to F$ une <u>bijection</u>. L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \text{l'unique antécédant de } y \text{ par } f \end{array} \right.$ est la <u>réciproque</u> de f notée f^{-1}

Definition

L'<u>identité de E</u> est $\mathrm{id}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$

Proposition

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$

$$\left.\begin{array}{l} f \circ g = \mathrm{id}_F \\ g \circ f = \mathrm{id}_E \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} f \text{ bijective} \\ f^{-1} = g \end{array}\right.$$

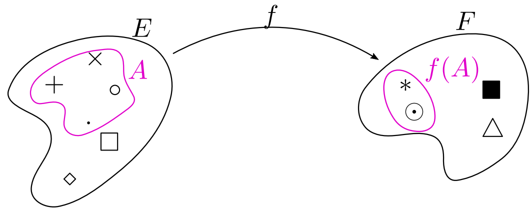
■

Definition

Soit $f : E \to F$

1. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. L'<u>image directe</u> de A par f est

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$



2. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. L'image réciproque de B par f est

$$f^{-1}(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}$$