Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $T > 0$. On suppose que $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,dt$ est constante. Montrer que f est T-périodique.

Exercice 2: CCP MP

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| = \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Exercice 3: X MP

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0$. On note m le minimum de f et M son maximum sur $[0, 1]$. Prouver que

$$\int_0^1 f(t)^2\,dt \leq -mM.$$

Exercice 4

La fonction $t \mapsto \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ est-elle continue par morceaux sur $[0, 1]$?

Exercice 5

Déterminer les limites des suites de terme général suivant.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$ 2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2 + n^2}$ 3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$.

Exercice 6

Déterminer la limite de la suite de terme général $\left(\dfrac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{1/n}$.

Exercice 7

Calculer les limites quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right)$.

Exercice 8

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note x_n le plus petit réel strictement positif en lequel f_n atteint un maximum local. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} f_n(x_n)$.

Exercice 9

Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$.

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f''(x) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.