Chapitre 15

TD

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 25 février 2022

Table des matières

Première partie

Exercice 3

1. $0 \in F$.
   Soit $P, Q \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On pose $R = \lambda P + \mu Q$. Montrons que $R \in F$.

$$\begin{aligned} 2R'(1) + R(0) &= 2(\lambda P'(1) + \mu Q'(1)) + \lambda P(0) + \mu Q(0) \\ &= \lambda(2P'(1) + P(0)) + \mu(2Q'(1) + Q'(0)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Donc $R \in F$ et donc F est un sous-espace vectoriel de E.
2.

$$\begin{aligned} P \in F &\iff 2P'(1) + P(0) \\ &\iff 2(b + 2c) + a = 0 \\ &\iff a + 2b + 4c = 0 \end{aligned}$$

3. *Touver une famille génératrice de E*

$$\begin{aligned} P \in F &\iff a + 2b + 4c = 0 \\ &\iff a = -2b - 4c \\ &\iff \forall x, P(x) = (-2b - 4c) + bx + cx^2 \\ &\iff \forall x, P(x) = b\underbrace{(-2 + x)}_{\in E} + c\underbrace{(-4 + x^2)}_{\in E} \end{aligned}$$

Donc, $F = \mathrm{Vect}(P_1, P_2)$ où $\begin{cases} P_1 : x \mapsto -2 + x \\ P_2 : x \mapsto -4 + x^2 \end{cases}$

4. *Cette famille est-elle une base ?*
   P_1 et P_2 ne sont pas colinéaires car ils n'ont pas le même degré donc (P_1, P_2) est une base de F. On a $\dim(F) = 2$.

Deuxième partie

Exercise 7

Let $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ such that

$$\lambda(u_n) + \mu(v_n) + \nu(w_n) = (0)$$

Thus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda 2^n + \mu 3^n + \nu 4^n = 0$$

<u>1st METHOD</u> In particular, with $n \in \{0, 1, 2\}$, we have

$$(S) : \quad \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ 2\lambda + 3\mu + 4\nu = 0 \\ 4\lambda + 9\mu + 16\nu = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (S) &\iff \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ \mu + 2\nu = 0 \\ 5\mu + 12\nu = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ \mu + 2\nu = 0 \\ 2\nu = 0 \end{cases} \\ &\iff \lambda = \mu = \nu = 0 \end{aligned}$$

Therefore, u, v and w are linearly independant.
<u>2nd METHOD</u> Suppose $\nu \neq 0$. Then,

$$0 = \lambda u_n + \mu v_n + \nu w_n \sim \nu 4^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \pm\infty$$

Hence, $\nu = 0$.
Suppose $\nu \neq 0$, then $0 = \lambda 2^n + \mu 3^n \sim \mu 3^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$
Thus, $\mu = 0$. Also, $\lambda = 0$

Troisième partie

Exercice 8

Soit $P \in E$. On pose

$$P : x \mapsto ax^2 + bx + c$$

avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
P \in F &\iff \begin{cases} P(1) = 0 \\ \displaystyle\int_0^1 P(t)\ dt = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ \dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{2} + c = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a + b + c = 0 \\ \dfrac{2}{3}a + \dfrac{1}{2}b = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = -\dfrac{3}{4}b \\ c = -\dfrac{1}{4}b \end{cases} \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = -\frac{3}{4}bx^2 + bx - \frac{1}{4}b = b\left(-\frac{3}{4}x^2 + x - \frac{1}{4}\right) \\
&\iff P \in \operatorname{Vect}(Q)
\end{aligned}$$

où $Q : x \mapsto -\dfrac{3}{4}x^2 + x - \dfrac{1}{4}$
Donc, $F = \operatorname{Vect}(Q)$ est un sous-corps vectoriel de E. De plus, $Q \neq 0$ donc (Q) est une base de F.

Quatrième partie

Exercice 9

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in H_2 &\iff \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y-z+t=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2y+2z=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y=-z \\ x=-t \end{cases} \\
&\iff (x,y,z,t) = (-t,-z,z,t) = z(0,-1,1,0) + t(-1,0,0,1) \\
&\iff (x,y,z,t) \in \mathrm{Vect}(u_1,u_2) \\
&\qquad \text{où } \begin{cases} u_1 = (0,-1,1,0) \\ u_2 = (-1,0,0,1) \end{cases}
\end{aligned}$$

$H_2 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$
u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires donc (u_1, u_2) est une base de H_2.

Cinquième partie

Exercice 12

$$\begin{array}{c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

$$\underbrace{\frac{S}{3}\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}\right)}_{C_1}$$

$$\left.\begin{cases} a_{11}+a_{12}+a_{13}=0 \\ \vdots \\ a_{11}+a_{22}+a_{33}=0 \end{cases}\right) \begin{array}{l} \text{8 équations} \\ \text{9 inconnues} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} a & -a-b & b \\ \hline b-a & 0 & -b+a \\ \hline -b & a+b & -a \end{array} = a\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 \end{array}\right) + b\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

L'ensemble $\mathscr{C}$ des carrés magiques est $\left\{\dfrac{S}{3}C_1 + aC_2 + bC_3 \mid (a,b,S) \in \mathbb{K}\right\} =$ $\mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3)$.

Montrons que (C_1, C_2, C_3) est libre. Soit $(\lambda, a, b) \in \mathbb{K}^3$

$$
\begin{aligned}
&\lambda C_1 + aC_2 + bC_3 = 0 \\
\iff& \begin{array}{c|c|c}
\lambda + a & \lambda - a - b & \lambda + b \\ \hline
\lambda + b - a & \lambda & \lambda - b + a \\ \hline
\lambda - b & \lambda + a + b & \lambda - a
\end{array} = \begin{array}{c|c|c}
0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0
\end{array} \\
\iff& \begin{cases} \lambda = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Sixième partie

Exercice 11

Partie 1

1. En replacant t par 0, par $\dfrac{\pi}{8}$ et par $-\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$, on obtient

$$
(S) : \quad \begin{cases} a + b = 0 \\ ae^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} + be^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} = 0 \\ ae^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}} - be^{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} = 0 \end{cases}
$$

$$
\begin{vmatrix} e^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} & e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} \\ e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}} & -e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} \end{vmatrix} = -e^{\frac{3\pi}{2\sqrt{3}}} - e^{-\frac{3\pi}{2\sqrt{3}}} \neq 0
$$

donc

$$
\begin{pmatrix} e^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} & e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} \\ e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}} & -e^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})
$$

donc le système $\begin{cases} ae^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} be^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} = 0 \\ ae^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}} - be^{-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}} = 0 \end{cases}$ est de Cramer. Son unique solution est $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

2.

$$\begin{aligned}
af_1(t) = bf_2(t) + cf_3(c) &= a\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) \\
&+ b\left(1 - \frac{t}{2} + o(t)\right)\left(\frac{t\sqrt{3}}{2} + o(t^2)\right) \\
&+ c\left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + o(t^2)\right)\left(1 - \frac{3t^2}{8} + o(t^2)\right) \\
&= (a+c) + t\left(a + \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2}\right) + t^2\left(\frac{a}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{4}\right) + o(t^2)
\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité,

$$(S): \quad \begin{cases} a + c = 0 \\ a + \dfrac{b\sqrt{3}}{2} - \dfrac{c}{2} = 0 \\ a - \dfrac{b\sqrt{3}}{2} - \dfrac{c}{2} = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 1 & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow -L_3 + L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}(A) = 3$ donc $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ donc S est de Cramer donc $a = b = c = 0$

3.

$$\forall t, |f_2(t)| \leqslant e^{-\frac{t}{2}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

donc $f_2(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

De même, $f_3(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ et $f_1(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} = 0$

Si $a \neq 0$, alors, $0 = af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \pm\infty$

Donc $a = 0$.

$$\forall t, b\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + c\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

Si $c \neq 0$,

$$\forall t \not\equiv \frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad \left[\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right], \frac{b}{c}\tan\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = 1$$

donc $c = 0$ et donc $b = 0$

4. $f_1' = f_1 \in G$

$$\begin{aligned}
\forall t, f_2'(t) &= -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}f_2(t) + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3(t)
\end{aligned}$$

donc $f_2' \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}) = G$

$$\forall t, f_3'(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$$

Soit $f : t \mapsto af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t)$

$$\begin{aligned} f' &= af_1 - \frac{b}{2}f_2 + b\frac{\sqrt{3}}{2}f_3 - \frac{c}{2}f_3 - c\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 \\ &= af_1 - \left(\frac{b}{2} - \frac{c\sqrt{3}}{2}f_2\right) + \left(\frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2}\right)f_3 \in G \end{aligned}$$

5. Les coordonnées de f est dans la base $\mathscr{B}$ sont $\left(a, -\frac{b}{2}, -\frac{c\sqrt{3}}{2}, \frac{b\sqrt{3}}{2}, -\frac{c}{2}\right)$

   Les coordonnées de f_1 sont $(1, 0, 0)$

   Les coordonnées de f_2 sont $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

   Les coordonnées de f_2 sont $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Partie 2

3. — $0 \in \mathscr{S}$ d'après 2.
   — Soient $f, g \in \mathscr{S}$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
     $\lambda f + \mu g$ est dérivable 3 fois,

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)^{(3)} &= \lambda f^{(3)} + \mu g^{(3)} \\ &= \lambda f + \mu g \end{aligned}$$

     donc $\lambda f + \mu g \in \mathscr{S}$
     Donc $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

   $f_1' = f_1$ donc $f_1^{(3)} = f_1$ donc $f_1 \in \mathscr{S}$

$$\begin{aligned}
f_2' &= -\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3 \\
f_2'' &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3\right) + \frac{\sqrt{3}}{2\left(-\frac{1}{2}f_3 - \frac{\sqrt{3}}{2}f_2\right)} \\
&= -\frac{1}{2}f_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}f_3 \\
f_2^{(3)} &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}f_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_2\right) \\
&= f_2
\end{aligned}$$

De même, $f_3^{(3)} = f_3$ $\mathscr{S}$ est stable par combinaison linéaire donc

$$G = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3) \subset \mathscr{S}$$

4. $g' = f' + f'' + f^{(3)} = f + f' + f'' = g$
5.

$$\begin{aligned}
y' - y = 0 &\iff \exists\lambda \in \mathbb{R}, \forall t, y(t) = \lambda e^t \\
&\iff y \in \mathrm{Vect}(f_1)
\end{aligned}$$

6. (f_1, f_2) car j et j^2 sont toujours solutions de $1 + z + z^2$
7. $\dfrac{\lambda}{3}f_1$ est une solution particulière

$$\frac{\lambda}{3}f_1 + \mathrm{Vect}(f_2, f_3)$$

8.

$$\begin{aligned}
f \in \mathscr{S} &\implies f + f' + f'' \in \mathrm{Vect}(f_1) \\
&\implies \exists\lambda, f + f' + f'' = \lambda f_1 \\
&\implies \exists(\lambda, a, b), f = \frac{\lambda}{3}f_1 + af_2 + bf_3 \in G
\end{aligned}$$

Septième partie

Exercise 10

We need to show that $F \subset G$. Let $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(nx) = T_n(\cos x)$$

where T_n is the n-th Tchebychev polynomial.
Thus,

$$\big(x \mapsto \cos(nx)\big) \in G$$

. In fact,

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \cos(nx) &= \mathfrak{Re}\left(e^{inx}\right) \\
&= \mathfrak{Re}\left(\left(e^{ix}\right)^n\right) \\
&= \mathfrak{Re}\left((\cos x + i \sin x)^n\right) \\
&= \mathfrak{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} i^k \sin^k x \cos^{n-k} x \binom{n}{k}\right) \\
&= \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ even}}} \binom{n}{k} \cos^{n-k} x \sin^k x i^k \\
&= \sum_{0 \leqslant p \leqslant \frac{n}{2}} \binom{n}{2p} \cos^{n-2p} x \left(\sin^2 x\right)^p (-1)^p \\
&= \sum_{0 \leqslant p \leqslant \frac{n}{2}} (-1)^p \binom{n}{2p} \cos^{n-2p} x \left(1 - \cos^2 x\right)^p
\end{aligned}$$

And,

$$T_n : u \mapsto \sum_{0 \leqslant p \leqslant \frac{n}{2}} (-1)^p \binom{n}{2p} u^{n-2p} \left(1 - u^2\right)^p$$

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \cos^n x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^n \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx} e^{-i(n-k)x} \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(2k-n)x} \\
&= \mathfrak{Re}\left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(2k-n)x}\right) \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos\left(|2k-n| x\right)
\end{aligned}$$

So, $(x \mapsto \cos^n x) \in F$.