CHAPITRE 16
DÉRIVATION

On supposera dans tout ce chapitre, sauf mention explicite du contraire, que I est un intervalle ouvert non vide.

1. Dérivée en un point, fonction dérivée

1.1. Généralités.

Définition 1.1

(1) On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est *dérivable en* $a \in I$ si le taux d'acroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie ℓ quand x tend vers a. Cette limite est alors appelée *dérivée en* a, on la note $f'(a)$ (ou $Df(a)$, $\dfrac{df}{dx}(a)$).

(2) Si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite à droite (resp. à gauche) de a, on dit que f est *dérivable à droite* (resp. *à gauche*) en a et on note $f'_d(a)$ cette limite (resp. $f'_g(a)$).

(3) On dit que f est *dérivable sur* I si f est dérivable en chaque point de I. On note f' l'application qui à $a \in I$ fait correspondre la dérivée de f en a.

Remarque 1.2

On peut aussi (en posant $x = a+h$) regarder la limite en 0 de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Exemple 1.3

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n$ est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$, de dérivée $a \mapsto na^{n-1}$.

(2) La fonction $x \mapsto 1/x$ est dérivable en $a \neq 0$, de dérivée $a \mapsto -1/a^2$.

(3) La fonction $\sqrt{\ }$ n'est pas dérivable en 0.

Proposition 1.4

f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Exemple 1.5

La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais non dérivable en 0.

Proposition 1.6

f est dérivable en a si et seulement si on peut écrire pour tout x dans un voisinage de a, $f(x) = f(a) + l(x-a) + o_a(x-a)$. Dans ce cas, on a $\ell = f'(a)$.

Corollaire 1.7

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Proposition 1.8

Si f admet un extremum local en a et est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.

Remarque 1.9

La réciproque est FAUSSE (par exemple $x \mapsto x^3$ s'annule en 0 sans présenter d'extremum, même local).

Ne pas oublier qu'on a supposé depuis le début que I était ouvert, cet énoncé ne marche pas pour une borne de l'intervalle de définition (par exemple x^2 sur $[0, 1]$).

Définition 1.10

On dit que a est un point critique de f si $f'(a) = 0$. Dans ce cas, on dit aussi que $f(a)$ est une valeur critique de f.

Remarque 1.11

Pour chercher les extrema d'une fonction dérivable, on regarde les points où sa dérivée s'annule. Cela nous donne les candidats aux poins où les extrema sont atteints. En revanche il faut ensuite vérifier à la main que c'est un extremum (parce que la réciproque de la proposition précédente est fausse).

1.2. Opérations sur les fonctions dérivables.

Proposition 1.12

Soient f et g deux fonctions de $I \to \mathbb{R}$ dérivables en a. Alors

— $f + g$ est dérivable en a de dérivée $f'(a) + g'(a)$.

— fg est dérivable en a de dérivée $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Proposition 1.13

Si $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$, f dérivable en $a \in I$, g dérivable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a de dérivée $f'(a)g'(b) = f'(a)g'(f(a))$.

Corollaire 1.14

Si f et g sont dérivables en a et $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en a, de dérivée $\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Remarque 1.15

(1) On peut retranscrire tous ces énoncés avec des fonctions dérivable sur I et non en un point.

(2) On montre ainsi la dérivabilité de fonctions explicites avec un raisonnement du type f est continue comme composée/somme/produit/quotient par une fonction ne s'annulant pas de fonctions dérivables.

Théorème 1.16

Soit $f : I \to J$ bijective monotone, dérivable en a de dérivée $f'(a)$. Alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et sa dérivée vaut alors $\frac{1}{f'(a)}$.

Corollaire 1.17

Si $f : I \to J$ bijective monotone dérivable sur I et dont la dérivée ne s'annule pas, alors f^{-1} est dérivable sur J de dérivée $\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

1.3. Dérivées d'ordre supérieur.

Définition 1.18

(1) Par convention, toute fonction est 0 fois dérivable et $f^{(0)} = f$. On définit ensuite par récurrence le fait qu'une fonction soit k fois dérivable sur I et la dérivée k-ième $f^{(k)}$ d'une fonction : f est $k+1$ fois dérivable sur I si f est k fois dérivable sur I et $f^{(k)}$ est dérivable sur I. On note alors $f^{(k+1)}$ la fonction $f^{(k)\prime}$. On note $D^k(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions k fois dérivable.

(2) On dit que f est *infiniment dérivable* si f est k fois dérivable pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(3) On dit que f est de classe C^k sur I si f est k fois dérivable et sa fonction dérivée $f^{(k)}$ est continue sur I. On note $C^k(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^k sur I.

(4) On dit que f est de classe C^∞ sur I si f est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. On note $C^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I.

Exemple 1.19

(1) La fonction exponentielle est infiniment dérivable (et C^∞) et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\exp^{(k)} = \exp$.

(2) La fonction $x \mapsto x^n$ est infiniment dérivable (et C^∞) et pour tout $k \in \mathbb{N}$, sa dérivée k-ième est $x \mapsto n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$. En particulier si $n \in \mathbb{N}$, elle est nulle pour $k > n$.

(3) La fonction cos et la fonction sin sont infiniment dérivables (et C^∞), pour $k \in \mathbb{N}$, $\cos^{(k)}(x) = \cos(x + k\frac{\pi}{2})$ et $\sin^{(k)}(x) = \sin(x + k\frac{\pi}{2})$.

(4) La fonction $x \mapsto x^2 \cos(x^{-1})$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable en 0 de dérivée nulle, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $2x\cos(x^{-1}) + \sin(x^{-1})$ n'admet pas de limite en 0, donc n'est pas C^1 (une fonction dérivable n'est donc pas nécessairement C^1).

(5) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est indéfiniment dérivable (et C^∞) sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa dérivée k-ième est $x \mapsto \frac{(-)^k k!}{x^{k+1}}$.

(6) Les fonctions $x \mapsto \operatorname{ch} x$ et $x \mapsto \operatorname{sh} x$ sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{ch}^{(n)} = \operatorname{ch}$ si n est pair, sh sinon, $\operatorname{sh}^{(n)} = \operatorname{ch}$ si n est impair, sh sinon.

Proposition 1.20

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $D^k(I, \mathbb{R}) \subset C^k(I, \mathbb{R}) \subset D^{k+1}(I, \mathbb{R})$ et toutes ces inclusions sont strictes.
Une fonction indéfiniment dérivable est de classe C^∞.

Proposition 1.21: Formule de Leibniz

Si f et g sont k fois dérivables sur I, alors fg est k fois dérivable sur I de dérivée $(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$.

Corollaire 1.22

Si f et g sont de classe C^k sur I, fg est de classe C^k sur I.

Proposition 1.23

Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont C^k avec $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est de classe C^k sur I.

Corollaire 1.24

Si f et g sont C^k sur I, avec g ne s'annulant pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est C^k sur I.

2. Propriétés globales des fonctions dérivables

2.1. Accroissements finis.

Théorème 2.1: Rolle

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque 2.2: Interprétation cinématique

Si un point mobile sur un axe est revenu à sa position de départ, sa vitesse s'est annulée au moins une fois. (Il faut s'arrêter pour faire demi-tour sur un axe).

Théorème 2.3: Accroissements finis

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$.

Remarque 2.4

Ce théorème signifie juste que si un point réalise un trajet à vitesse moyenne v, alors il existe un instant du trajet auquel la vitesse instantanée est v.

Corollaire 2.5

(1) *(Inégalité des accroissements finis)* Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ tel que pour tout $t \in]a, b[$, $m \leq f'(t) \leq M$. Alors pour $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

(2) Si f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq k$, alors f est k-lipschitzienne.

(3) Si f est dérivable sur I de dérivée (strictement) positive alors f est (strictement) croissante.

(4) Si f est dérivable sur I de dérivée (strictement) négative alors f est (strictement) décroissante.

(5) Si f est dérivable sur I de dérivée nulle, alors f est constante.

2.2. Prolongement C^1.

Proposition 2.6: Limite de la dérivée

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue, dérivable sur $I - \{a\}$ et f' admet une limite finie ℓ en a, alors f est dérivable en a, de dérivée ℓ.

Corollaire 2.7

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est C^k, C^{k+1} sur $I - \{a\}$ et $f^{(k+1)}$ admet une limite finie en a alors f est C^{k+1} sur I.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x > 0$ et 0 si $x \leq 0$. Montrer que f est C^∞.

2.3. Application aux fonctions réciproques.

Définition 2.8

Soit f une application de classe C^k, $k \geq 1$. On dit que f est un C^k-difféomorphisme si f est C^k, bijective et f^{-1} est C^k.

Théorème 2.9

Une application $f : I \to J$ bijective C^k est un C^k-difféomorphisme si et seulement si sa dérivée ne s'annule pas.

3. Extensions aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition 3.1

(1) On dit que f est *dérivable en* $a \in I$ si $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite en a. On la note alors $f'(a)$ et on l'appelle *dérivée* de f en a.
(2) On dit que f est *dérivable sur* I si f est dérivable en chaque point de I.
(3) De même que précédemment on définit les fonctions k fois dérivables, de classe C^k et de classe C^∞.

Exemple 3.2

$t \mapsto e^{it}$ est dérivable de dérivée $t \mapsto ie^{it}$. Elle est même C^∞.

Proposition 3.3

f est dérivable si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont et on a alors $f' = \mathrm{Re}(f)' + i\,\mathrm{Im}(f)'$.

Démonstration. C'est juste la caractérisation de la limite par parties rélles et imaginaires. □

Proposition 3.4

Opérations sur les fonctions dérivables, de classe C^k (addition, multiplication, quotient).

Remarque 3.5

On ne conserve pas la notion d'extremum pour une fonction à valeurs complexes. On n'a donc plus d'équivalent du théorème de Rolle : par exemple $t \mapsto e^{it}$ prend la même valeur en 1 et 2π mais sa dérivée ne s'annule pas sur $[0, 2\pi]$. On ne conserve donc pas le théorème des accroissements finis. Seule l'inégalité des accroissements finis reste.

Théorème 3.6

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe C^1 sur $]a,b[$ telle que $|f'(t)| \leq M$ pour tout $t \in]a,b[$. Alors $|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$.

Corollaire 3.7

(1) Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $|f'|$ est majorée par M sur I est M-lipschitzienne.

(2) Une fonction dont la dérivée est nulle sur I intervalle est constante.