

CHAPITRE 13

TD

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 8 mai 2022

Table des matières

Première partie

Exercice 5

$$(S) : AX = 0 \text{ où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A = \text{GL}_n(\mathbb{C}) &\iff \text{rg}(A) = n \\ &\iff \text{rg}(S) = n \\ &\iff S \text{ est de Cramer} \\ &\iff X = 0 \text{ est la seule solution de } (S) \end{aligned}$$

On suppose $X \neq 0$ tel que $AX = 0$ et on cherche une contradiction.

$$\begin{aligned} (S) &\iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0 \\ &\implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, -a_{ii}x_i = \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j \\ &\implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{ii}| |x_i| = \left| \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j \right| \\ &\implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{ii}| |x_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| |x_j| \end{aligned}$$

Soit i_0 tel que $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq j \leq n} (|x_j|)$ ($i_0 = \text{argmax } 1 \leq j \leq n (|x_j|)$)

Comme $X \neq 0$, $x_{i_0} > 0$, donc

$$|a_{i_0, i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0, j}| \frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0, j}|$$

une contradiction \nexists

Deuxième partie

Exercice 10

Soient a, b, c, d différents de -1 .