Chapitre 11

CD

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 5 janvier 2022

Table des matières

Première partie

Exercice 1

Contre-exemple : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^{-n} \sin(n)$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = 0$ mais $(\lfloor u_n \rfloor)_{\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, elle oscile entre 0 et 1.

Deuxième partie

Exercice 2

1

$$\begin{aligned}
&\forall n \in \mathbb{N}, \\
&\qquad \left(\forall x \in [0,1], x^n \geqslant \frac{x^n}{1+x} \geqslant -x^n\right) \\
&\qquad \iff \int_0^1 x^n dx \geqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \geqslant -\int_0^1 x^n dx \\
&\qquad \iff \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \geqslant I_n \geqslant -\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \\
&\qquad \iff \frac{1^{n+1}}{n+1} \geqslant I_n \geqslant -\frac{1^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{1^{n+1}}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc, par le théorème des gendarmes,

$$I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Troisième partie

Exercice 3

1.

$$\forall n \in \mathbb{N} u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \implies u_n^2 \qquad = n + 1 + n - 2\sqrt{n^2+n}$$

Quatrième partie

Exercice 6

1.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}_*, u_n &= \sqrt[n]{n} \\ &= n^{\frac{1}{n}} \\ &= e^{\frac{1}{n}\ln(n)} \end{aligned}$$

Or, $\dfrac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Donc, $u_n = e^{\frac{\ln(n)}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1$

2.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_n &= \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2} \\ &= \left(\frac{n+1-2}{n+1}\right)^{n+2} \\ &= \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{n+2} \\ &= e^{(n+2)\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)} \\ &= e^{(n+2)\left(\left(\frac{2}{n+1}\right)+o\left(\frac{2}{n+1}\right)\right)} \end{aligned}$$