Chapitre 16

Dérivation

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 8 mai 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Définition et premières propriétés

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction définie sur un intervalle ouvert non vide I à valeurs réelles.

Définition: Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite qui est finie quand $x \to a$.
Dans ce cas, cette limite est notée $f'(a)$ et est appelée nombre dérivée de f en a
On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout $a \in I$.
L'application $\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & f'(a) \end{array}$ est la dérivée de f et est notée f'

Proposition:

f est dérivable en a $\iff$ f a un développement limité d'ordre 1 au voisinage de a

■

Proposition: Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

■

Proposition: Soient f et g dérivables en a

1. $f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2. $f \times g$ est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
3. Si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

■

Proposition: Soit f dérivable en a et g dérivable en $f(a)$. Alors, $f \circ g$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

■

Proposition: On suppose que f est bijective dérivable en a et $f'(a) \neq 0$. Si f^{-1} est continue, alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

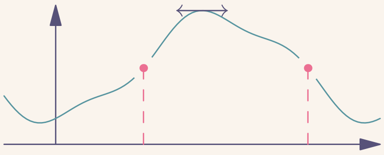
■

Deuxième partie

Théorème de Rolle et accroissements finis

Théorème (Théorème de Rolle)**:** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$.
Alors,

$$\exists c \in]a,b[, f'(c) = 0$$



Définition: On dit que f présente un <u>maximum local</u> en a s'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]a-\eta, a+\eta[, f(x) \leqslant f(a)$$

et un <u>minimum local</u> en a s'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in]a-\eta, a+\eta[, f(x) \geqslant f(a)$$

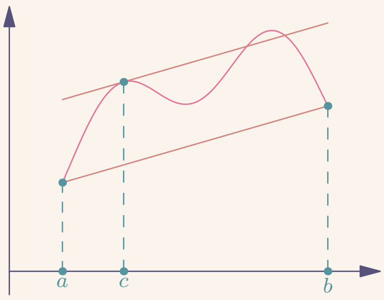
Un <u>extremum local</u> est un minimum local ou un maximum local.

Proposition: Soit $a \in I$ tel que $f(a)$ est un extremum local de f où f est dérivable en a. Alors, $f'(a) = 0$ □

Définition: Soit f dérivable et $a \in I$. On dit que a est un <u>point critique</u> de f si $f'(a) = 0$. On dit que $f(a)$ est une <u>valeur critique</u>.

Théorème (Théorème des accroissements finis)**:** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$



Proposition: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable avec I un intervalle non vide.

1. f est croissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$
2. f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \leqslant 0$
3. $\forall x \in I, f'(x) > 0 \implies f$ strictement croissante
4. $\forall x \in I, f'(x) < 0 \implies f$ strictement décroissante
5. f constante $\iff \forall x \in I, f'(x) = 0$

■

Théorème (Théorème de la limite de la dérivée)**:** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue (sur I), $a \in I$. On suppose f dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} f'(x)$ existe.

Alors,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[\substack{x \to a \\ \neq}]{} \lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f'(a)$$

■

Proposition: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, \left|f'(x)\right| \leqslant M$$

Alors f est M-lipschitzienne sur I.

■

Troisième partie

Dérivées n-ièmes

Définition: On dit que f est une fois dérivable si f est dérivable. Dans ce cas, on note $f^{(1)}$ la fonction f'.
Pour $n \in \mathbb{N}_*$, on dit que f est dérivable n fois si f est dérivable $n-1$ fois et $f^{(n-1)}$ est dérivable une fois. Dans ce cas, $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Remarque (Convention):

$$f^{(0)} = f$$

Définition: f est de classe $\mathscr{C}^n$ si f est dérivables n fois et $f^{(n)}$ est continue.

Proposition: Soit f dérivable n fois et $k \leqslant n$.
Alors f est dérivables k fois et $f^{(n)} = \left(f^{(k)}\right)^{(n-k)}$ □

Proposition: Soit f et g deux fonctions dérivables n fois en a.
Alors, $f+g$ est dérivable n fois en a et

$$(f+g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)$$

Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$, alors, $f+g$ est de classe $\mathscr{C}^n$

■

Proposition (Leibniz)**:** Soient f et g dérivables n fois en a. Alors, $f \times g$ est dérivables n fois en a. et

$$(*): \qquad (f \times g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n)}(a) g^{(n-k)}(a)$$

Si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$ alors $f \times g$ est de classe $\mathscr{C}^n$.

■

Proposition: Soient f et g dérivables n fois (resp. de classe $\mathscr{C}^n$). On suppose $g(a) \neq 0$.
Alors, $\dfrac{f}{g}$ est dérivables n fois (resp. $\mathscr{C}^n$) en a.

■

Proposition: Soit f dérivable n fois en a et g dérivable n fois en $f(a)$ (resp. f et g de classe $\mathscr{C}^n$).
Alors, $g \circ f$ est dérivable n fois en a (resp. de classe $\mathscr{C}^n$).

■

Définition: On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si f est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, i.e.

f est dérivable une infinité de fois.

Proposition (formule de Taylor avec reste intégral)**:** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et $a \in I$. Alors

$$(*) \qquad \forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\ dt$$

■

Proposition (Inégalité de Taylor-Lagrange)**:** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, \left| f^{(n+1)}(x) \right| \leqslant M$$

Alors, pour tout $a \in I$,

$$\forall x \in I, \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

■

Quatrième partie

Fonctions à valeurs complexes

Définition: Soient $f : I \to \mathbb{C}$, (I intervalle de $\mathbb{R}$) et $a \in I$.
f est dérivable en a si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{C}$

Proposition:

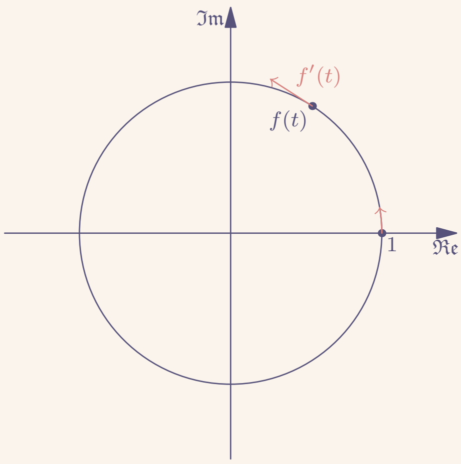
$$f \text{ est dérivable en } a \iff \mathfrak{Re}(f) \text{ et } \mathfrak{Im}(f) \text{ sont dérivables en } a$$

Dans ce cas, $f'(a) = \mathfrak{Re}(f)'(a) + i\mathfrak{Im}(f)'(a)$ □

Proposition: La somme, le produit, de fonctions dérivables sont dérivables ; le quotient également si le dénominateur ne s'annule pas. □

Proposition: idem avec les dérivées n-ièmes □

Remarque (Attention ⚠):
Le théorème de Rolle n'est plus vraie.



$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{it} \end{aligned}$$

$f(0) = f(2\pi) = 1$
f est continue sur $[0, 2\pi]$ et dérivable sur $]0, 2\pi[$
$\forall t, f'(t) = ie^{it} \neq 0$

Proposition: La formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange sont aussi vrais dans $\mathbb{C}$. □