Exercice 1

Une urne contient des jetons numérotés de 1 à n, on les tire un à un sans remise jusqu'à obtenir celui numéroté 1. On note X le nombre de tirages ainsi effectués.

(1) Déterminer la loi de X.

(2) Reconnaître cette loi.

Exercice 2

D'un sac contenant n jetons numérotés de 1 à n ($n \geq 3$), on extrait simultanément 3 jetons. Soit X la variable aléatoire égale au point tiré dont la valeur est intermédiaire entre les deux autres.

(1) Quelle est la loi de X ?

(2) Calculer $E(X)$.

Exercice 3

m personnes montent dans un ascenseur : chaque personne peut descendre à l'un des n arrêts que dessert l'ascenseur avec la probabilité $1/n$.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, X_i est la variable de Bernoulli valant 1 si l'ascenceur s'arrête au i-ème étage et Y_i désigne le nombre de personne s'arrêtant au i-ème étage. X désigne le nombre d'arrêts de l'ascenseur.

(1) Déterminer, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, les lois des variables Y_i et X_i.

(2) Calculer $E(X)$.

Exercice 4

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p un réel de $]0, 1[$ et on pose $q = 1 - p$.
On dispose d'une pièce donnant “Pile” avec la probabilité p et “Face” avec la probabilité q.
On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

— Soit si l'on a obtenu “Pile”.

— Soit si l'on a obtenu n fois “Face”.

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (respectivement F_k) l'évènement “ on obtient Pile (respectivement Face) au $k^{\text{ème}}$ lancer”.
On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de Piles obtenus et enfin Y_n le nombre de Faces obtenus. On admet que T_n, X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un même espace probabilisé (Ω, P) que l'on ne cherchera pas à préciser.

(1) Déterminer la loi de T_n et calculer $E(T_n)$.

(2) Déterminer la loi de X_n et calculer $E(X_n)$.

(3) Calculer $E(Y_n)$.

Exercice 5

Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p ($p \in]0; 1[$). Soient $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

(1) Déterminer la loi du couple (U, V).

(2) U et V sont-elles indépendantes ? Conclusion ?

Exercice 6

On jette un dé bleu et un dé rouge. On note X les points indiqués par le dé bleu, Y ceux du dé rouge et on définit la variable aléatoire Z de la manière suivante :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \leq 3, \\ Y(\omega) & \text{si } X(\omega) > 3 \text{ et } Y(\omega) > 3, \\ Y(\omega) + 3 & \text{si } X(\omega) > 3 \text{ et } Y(\omega) \leq 3. \end{cases}$$

Déterminer les lois des couples (X, Y) et (X, Z). Vérifier que ces couples ont mêmes lois marginales mais pas même loi.

Exercice 7

Une urne contient N boules blanches ou noires, la proportion de boules blanches étant p et la proportion de boules noires $q = 1 - p$.

On tire simultanément n boules de l'urne. On note X le nombre de boules blanches tirées : on sait que X suit une loi hypergéométrique de paramètres (N, n, p).

On suppose que l'on numérote les boules blanches de 1 à Np. On note, pour $i \in [\![1; Np]\!]$, X_i la variable indicatrice de l'événement "la i-ème boule blanche est tirée".

(1) Calculer, pour tout $i \in [\![1; Np]\!]$, l'espérance et la variance de X_i.

(2) Calculer pour i et j dans $[\![1; Np]\!]$, $i \neq j$, la covariance de (X_i, X_j).

(3) En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 8

Une entreprise souhaite recruter un cadre, n personnes se présentent pour le poste. Chacun d'entre eux passe à tour de rôle un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in]0, 1[$. On pose également $q = 1p$. On définit la variable aléatoire X par $X = k$ si le k-ième candidat qui réussit le test est engagé, et $X = n + 1$ si personne n'est engagé.

(1) Déterminer la loi de X.

(2) Calculer l'espérance de X.

(3) Quelle est la valeur minimale de p pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter l'un des candidats ?

Exercice 9

A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. Quel avion choisissez-vous ? (on discutera en fonction de p).

Exercice 10

On considère une suite de n épreuves répétées indépendantes avec pour chaque épreuve trois issues possibles : succès avec probabilité p, échec avec probabilité q ou nul avec probabilité r $(p + q + r = 1)$. On notera respectivement S_i, E_i et N_i les événements succès, échec, nul à la i-ème épreuve.

(1) Dans cette question, $n = 5$. Quelle est la probabilité d'obtenir dans cet ordre deux succès suivis d'un échec et de deux nuls ? Quelle est celle d'obtenir (sans condition d'ordre) deux succès, un échec et deux nuls ?

(2) Généraliser en montrant que la probabilité d'obtenir au cours des n épreuves (et sans condition d'ordre) i succès, j échecs et k nuls $(i + j + k = n)$ vaut :

$$\frac{n!}{i!\,j!\,k!} p^i q^j r^k.$$

(3) *Application* : un match de coupe entre deux équipes de football s'étant terminé sur un score nul, l'équipe qualifiée est désignée par la séance des penaltys. Un joueur de l'équipe A tire un penalty face au gardien de l'équipe B, puis un joueur de l'équipe B tire un penalty face à celui de l'équipe A et ainsi de suite jusqu'à ce que chaque équipe ait tiré 5 penaltys. On admet que la probabilité de réussir un penalty est dans chaque cas de $0,7$ et que tous les tirs sont indépendants. Calculer la probabilité que les deux équipes soient encore à égalité après avoir tiré chacune ses 5 penaltys. Calculer la probabilité de qualification de A au bout de ses 5 penaltys.