

CHAPITRE 18

Polynôme

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 8 mai 2022

TABLE DES MATIÈRES

I	Définition	2
II	Évaluation	10
III	Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	16
IV	L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$	30

Dans ce chapitre, \mathbb{K} désigne un corps

Première partie

Définition

Définition: — Un polynôme à coefficients dans \mathbb{K} est une suite presque nulle de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

- Le polynôme nul, noté 0 est la suite nulle.
- Soit $P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un polynôme non nul.
 $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0_{\mathbb{K}}\}$ est non-vide et majoré. Le degré de P est $\max\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0_{\mathbb{K}}\}$, et on le note $\deg(P)$ et $a_{\deg(P)}$ est le coefficient dominant de P , il est noté $\text{dom}(P)$.
- Le degré du polynôme nul est $-\infty$

Proposition – Définition: Soient $P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux polynômes à coefficients dans \mathbb{K} . Alors, $P + Q = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un polynôme appelé somme de P et Q .

Preuve:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, a_n = 0$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, b_n = 0$$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$ donc

$$\forall n \geq N, a_n + b_n = 0 + 0 = 0$$

donc $P + Q$ est une suite presque nulle. □

Proposition – Définition: Soient $P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux polynômes à coefficients dans \mathbb{K} . On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

La suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est presque nulle. Ce polynôme est appelé produit de P et Q et noté PQ .

Preuve:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, a_n = 0$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, b_n = 0$$

On pose $N = N_1 + N_2$

$$\forall n \geq N, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{N_1} a_k b_{n-k} + \sum_{k=N_1+1}^n a_k b_{n-k}$$

$$\begin{aligned}
& \forall k \geq N_1 + 1, a_k = 0 \text{ donc } \sum_{k=N_1+1}^n a_k b_{n-k} = 0 \\
& \forall k \leq N_1, b - k \geq n - N_1 \geq N_1 + N_2 - N_1 \geq N_2 \text{ donc } \forall k \leq N_1, b_{n-k} = 0 \text{ et donc} \\
& \sum_{k=0}^{N_1} a_k b_{n-k} = 0 \\
& \text{Donc} \\
& \forall n \geq N, c_n = 0
\end{aligned}$$

□

REMARQUE (Notation):

Soit $P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, un polynôme à coefficients dans \mathbb{K} et $\lambda \in \mathbb{K}$. Le polynôme $(\lambda a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est noté λP

REMARQUE (Notation):

On pose $X = (0_{\mathbb{K}}, 1_{\mathbb{K}}, 0_{\mathbb{K}}, \dots) = (\delta_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$

EXEMPLE:

$$\begin{aligned}
X^2 &= X X \\
&= (0 \times 0, 0 \times 1 + 1 \times 0, 0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0, 0, \dots) \\
&= (0, 0, 1, 0, \dots)
\end{aligned}$$

Théorème: Soit $P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un polynôme non nul à coefficients dans \mathbb{K} . Alors

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \quad \text{où } n = \deg(P) \text{ et } X^0 = (1, 0, \dots)$$

Preuve:

Pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: “ $X^k = (\delta_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$ ” où $\delta_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$

- $\delta_{0,n} = (1, 0, \dots) = X^0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vrai
- Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie.

$$X^{k+1} = X^k X = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

où

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{j=0}^n \delta_{k,j} \delta_{1,n-j}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$\begin{aligned}
\delta_{k,j} \delta_{1,n-j} \neq 0 &\iff \begin{cases} k = j \\ 1 = n - j \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} k = j \\ n = k + 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc, si $n \neq k + 1$, alors

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \delta_{k,j} \delta_{1,n-j} = 0$$

et donc $c_n = 0$

$$c_{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} \delta_{k,j} \delta_{1,j+1-j} = \delta_{k,k} \delta_{1,1} = 1$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \delta_{k+1,n}$$

donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie

Ainsi, $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $P = (a_0, \dots, a_n, 0, \dots)$ un polynôme de degré n .

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k X^k &= a_0(1, 0, 0, 0, \dots) \\ &\quad + a_1(0, 1, 0, 0, \dots) \\ &\quad + a_2(0, 0, 1, 0, \dots) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + a_n(0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \\ &= (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots) \\ &= P \end{aligned}$$

□

REMARQUE (Notation):

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} dont l'indéterminée $(0, 1, 0, \dots)$ est notée X .

Proposition: $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$ est une \mathbb{K} -algèbre commutative i.e.

1. $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif
2. $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2, \lambda \cdot (P \times Q) = (\lambda \cdot P) \times Q = P \times (\lambda \cdot Q)$

Preuve: 1. $(\mathbb{K}[X], +)$ est un groupe abélien car $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel

— $X^0 = (1, 0, \dots)$ est le neutre de \times

En effet, $\forall P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$, en posant $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = PX^0$ on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k \delta_{k,n-k} = a_n,$$

donc $PX^0 = P$

— \times est commutative : $\forall P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X], \forall Q = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$, on pose

$R = (c_n)_{n \in \mathbb{N}} = PQ$, $S = (d_n)_{n \in \mathbb{N}} = QP$ alors

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, c_n &= \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \\ &= \sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j \quad (j = n - k) \\ &= \sum_{j=0}^n b_j a_{n-j} \\ &= d_n \end{aligned}$$

donc $PQ = QP$

— Soient

$$\begin{cases} P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X] \\ Q = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X] \\ R = (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X] \end{cases}$$

On pose

$$\begin{cases} S = (d_n)_{n \in \mathbb{N}} = PQ \\ T = (e_n)_{n \in \mathbb{N}} = SR = (PQ)R \\ U = (f_n)_{n \in \mathbb{N}} = QR \\ V = (g_n)_{n \in \mathbb{N}} = PU = P(QR) \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, e_n &= \sum_{k=0}^n d_k c_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \right) c_{n-k} \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n a_j b_{k-j} c_{n-k} \\ &= \sum_{j=0}^n a_j \sum_{k=j}^n b_{k-j} c_{n-k} \\ &= \sum_{j=0}^n a_j \sum_{\ell=0}^{n-j} b_\ell c_{n-j-\ell} \quad (\ell = k - j) \\ &= \sum_{j=0}^n a_j f_{n-j} \\ &= g_n \end{aligned}$$

Donc $T = V$

— Soient $P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $Q = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $R = (C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois polynômes et $P(Q +$

$$R) = (d_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } PQ + PR = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, d_n &= \sum_{k=0}^n a_k (b_{n-k} + c_{n-k}) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} + \sum_{k=0}^n a_k c_{n-k} \\ &= e_n \end{aligned}$$

Donc, $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif

2. $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

$(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel. D'après la propriété précédente,

$$\mathbb{K}[X] = \text{Vect}((X^n \mid n \in \mathbb{N}))$$

donc $\mathbb{K}[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}, P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, Q = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux polynômes. On pose $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = PQ, R = (d_n)_{n \in \mathbb{N}} = \lambda(PQ), S = (e_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda P)Q, T = (f_n)_{n \in \mathbb{N}} = P(\lambda Q)$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, d_n &= \lambda c_n = \lambda \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n (\lambda a_k) b_{n-k} = e_n \\ &= \sum_{k=0}^n a_k (\lambda b_{n-k}) = f_n \end{aligned}$$

□

REMARQUE:

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ est une \mathbb{K} -algèbre non commutative (si $n > 1$)

Proposition: $i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ \lambda & \longmapsto & \lambda X^0 \end{array}$ est un morphisme d'algèbre injectif, i.e.

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \begin{cases} i(\lambda + \mu) = i(\lambda) + i(\mu) \\ i(\lambda \cdot \mu) = i(\lambda) \times i(\mu) \end{cases}$$

et i est injective.

REMARQUE (Notation):

On identifie $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $\lambda X^0 \in \mathbb{K}[X]$. Ainsi, on peut écrire $X^0 = 1$, on peut écrire $2 + X + 3X^2$ au lieu de $2X^0 + X + 3X^2$

Proposition: Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$

- $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$
- Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors
 - $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$

- $\text{dom}(P + Q) = \begin{cases} \text{dom}(P) & \text{si } \deg(P) > \deg(Q) \\ \text{dom}(Q) & \text{si } \deg(P) < \deg(Q) \end{cases}$
- Si $\deg(P) = \deg(Q)$ et $\text{dom}(P) + \text{dom}(Q) \neq 0$,
alors $\begin{cases} \deg(P + Q) = \deg(P) = \deg(Q) \\ \text{dom}(P + Q) = \text{dom}(P) + \text{dom}(Q) \end{cases}$
- Si $\deg(P) = \deg(Q)$ et $\deg(P) + \deg(Q) = 0$, alors $\deg(P + Q) < \deg(P)$

Preuve: — Si $P = 0$, alors $\deg(P + Q) = \deg(Q)$ et donc $\max(\deg(P), \deg(Q)) = \max(-\infty, \deg(Q))$

On a bien $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$

— De même avec $Q = 0$

— On suppose $P \neq 0$ et $Q \neq 0$

$$\text{On pose } \begin{cases} P = \sum_{k=0}^p a_k X^k & p = \deg(P) \\ Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k & q = \deg(Q) \end{cases}$$

On peut supposer $p \geq q$. On pose $b_{q+1} = \dots = b_p = 0$ si $p > q$

$$\text{Ainsi, } Q = \sum_{k=0}^p b_k X^k$$

$$P + Q = \sum_{k=0}^p (a_k + b_k) X^k \text{ donc } \deg(P + Q) \leq p \text{ et } p = \max(\deg(P), \deg(Q))$$

$$\text{De plus, } a_p + b_p = \begin{cases} \text{dom}(P) & \text{si } p > q \\ \neq 0 & \\ \text{dom}(P) + \text{dom}(Q) & \text{si } p = q \end{cases}$$

□

Proposition: Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$$

Preuve:

Si P ou Q est nul, alors la formule est vraie car

$$\begin{cases} \deg(PQ) = -\infty \\ \deg(P) + \deg(Q) = \begin{cases} \text{cte} - \infty = -\infty \\ -\infty + \text{cte} = -\infty \\ -\infty - \infty = -\infty \end{cases} \end{cases}$$

On suppose $P \neq 0$ et $Q \neq 0$. On pose $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ avec $a_p \neq 0$ et $Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k$ avec $b_q \neq 0$

$$\begin{aligned} PQ &= \left(\sum_{k=0}^p a_k X^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^q b_\ell X^\ell \right) \\ &= \sum_{k=0}^p \sum_{\ell=0}^q a_k b_\ell X^{k+\ell} \end{aligned}$$

donc $\deg(PQ) \leq p + q$ et le coefficient devant X^{p+q} est $a_p b_q \neq 0$ (car \mathbb{K} est intègre)
donc $\deg(PQ) = p + q$ □

Deuxième partie

Évaluation

Définition: Soit A une \mathbb{K} -algèbre et $P \in \mathbb{K}[X]$. On pose $P = \sum_{k=0}^n e_k X^k$. Soit $a \in A$.
On pose

$$\begin{aligned} P(a) &= \sum_{k=0}^n e_k a^k \\ &= e_0 1_A + e_1 a + e_2 a^2 + \cdots + e_n a^n \in A \end{aligned}$$

On dit qu'on a évalué P en a , ou spécialisé X avec la valeur de a , ou remplacé X par a , substitué a à X .

Définition: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.
On dit que a est une racine de P si $P(a) = 0_{\mathbb{K}}$.

Définition: Soit $P \in \mathbb{K}[X] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que c'est un polynôme de matrices.

EXEMPLE:

$$P = 1 + 2X - 3X^2, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Définition: Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

$$\text{Alors } P(Q) = \sum_{k=0}^n a_k Q^k \in \mathbb{K}[X]$$

C'est la composée de P et Q .

REMARQUE (\triangle Attention):

Ne pas confondre $\underbrace{P(X+1)}_{\text{composée}}$ et $\underbrace{P(X+1)}_{\text{produit}}$.

$$\text{On a } \underbrace{P(X+1)}_{\text{produit}} = (X+1)P = P(X)(X+1) = P \times (X+1)$$

||

Proposition: Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $\begin{cases} Q \neq 0 \\ P \neq 0 \end{cases}$. On a

$$\deg(P(Q)) = \deg(P) \times \deg(Q)$$

□

EXEMPLE:

$$\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$$

$$P = X^2 + X + 1 \in \mathbb{K}[X] \text{ et } Q = 1 \in \mathbb{K}[X]$$

$$P \neq Q$$

$$\begin{aligned} f_P : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ x &\longmapsto P(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Q : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ x &\longmapsto Q(x) \end{aligned}$$

$$f_P(\bar{0}) = \bar{1} = f_Q(\bar{0})$$

$$f_P(\bar{1}) = \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = \bar{1} = f_Q(\bar{1})$$

donc $f_P = f_Q$ alors que $P \neq Q$

Théorème: Soit A une \mathbb{K} -algèbre. L'application

$$\varphi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow A^A$$

$$P \longmapsto f_P : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ a & \longmapsto & P(a) \end{array}$$

vérifie

1. $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \varphi(P + Q) = \varphi(P) + \varphi(Q)$
2. $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \varphi(PQ) = \varphi(P) \times \varphi(Q)$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall P \in \mathbb{K}[X], \varphi(\lambda P) = \lambda \varphi(P)$

□

EXEMPLE:

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}$$

$$X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$$

— \mathbb{C} est une \mathbb{R} -algèbre donc

$$\forall z \in \mathbb{C}, z^2 - 1 = (z - 1)(z + 1)$$

— $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une \mathbb{R} -algèbre

$$\forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A^2 - I_2 = (A - I_2)(A + I_2)$$

Définition: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

Le polynôme dérivé de P est

$$P' = \sum_{k=0}^n k a_k X^{k-1} = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$$

où

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, k a_k = \underbrace{a_k + \cdots + a_k}_{k \text{ fois}}$$

$$0_{\mathbb{N}} a_k = 0_{\mathbb{K}}$$

REMARQUE:

Si $P \in \mathbb{R}[X]$, $f_P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto P(x)$

$f_{P'} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ alors $f_{P'} = f'_P$
 $x \mapsto P'(x)$

Proposition:

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) > 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition: Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $(P + Q)' = P' + Q'$
2. $(PQ)' = P'Q + PQ'$
3. $(\lambda P)' = \lambda P'$

Preuve:

On pose

$$P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$$

$$Q = \sum_{k=0}^q b_k X^k$$

1. On peut supposer $p \geq q$
 Si $p > q$, on pose $b_{q+1} = \cdots = b_p = 0$

$$P + Q = \sum_{k=0}^p (a_k + b_k) X^k$$

donc

$$\begin{aligned} (P + Q)' &= \sum_{k=0}^p k(a_k + b_k) X^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^p k a_k X^{k-1} + \sum_{k=0}^p k b_k X^{k-1} \\ &= P' + Q' \end{aligned}$$

- 2.

$$PQ = \sum_{k=0}^p \sum_{\ell=0}^q a_k b_{\ell} X^{k+\ell}$$

D'après 1.,

$$\begin{aligned}
 (PQ)' &= \sum_{k=0}^p \sum_{\ell=0}^q \left(a_k b_\ell X^{k+\ell} \right)' \\
 &= \sum_{k=0}^p \sum_{\ell=0}^q a_k b_\ell (k + \ell) X^{k+\ell-1} \\
 &= \sum_{k=0}^p \sum_{\ell=0}^q k a_k b_\ell X^{k-1+\ell} + \sum_{k=0}^p \sum_{\ell=0}^q \ell a_k b_\ell X^{k+\ell-1} \\
 &= \sum_{k=0}^p k a_k X^{k-1} \sum_{\ell=0}^q b_\ell X^\ell + \sum_{k=0}^p a_k X^k \sum_{\ell=0}^q \ell b_\ell X^{\ell-1} \\
 &= P'Q + PQ'
 \end{aligned}$$

3.

$$\lambda P = \sum_{k=0}^p \lambda a_k X^k$$

donc

$$(\lambda P)' = \sum_{k=0}^p \lambda a_k k X^{k-1} = \lambda \sum_{k=0}^p k a_k X^{k-1} = \lambda P'$$

□

Définition: Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit la dérivée k -ième d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ par

- si $k = 0$, $P^{(k)} = P$
- si $k = 1$, $P^{(1)} = P'$
- si $k > 1$, $P^{(k)} = \left(P^{(k-1)} \right)'$

Proposition:

$$\forall k, j \in \mathbb{N}^2, \left(X^k \right)^{(j)} = \begin{cases} 0 & \text{si } j > k \\ k(k-1) \cdots (k-j+1) X^{k-j} = \frac{k!}{(k-j)!} X^{k-j} & \text{si } j \leq k \end{cases}$$

Preuve (par récurrence sur j à k fixé):

□

Proposition: Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$

1. $\forall k \in \mathbb{N}, (P + Q)^{(k)} = P^{(k)} + Q^{(k)}$
2. $\forall k \in \mathbb{N}, (PQ)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} P^{(i)} Q^{(k-i)}$
3. $\forall k \in \mathbb{N}, (\lambda P)^{(k)} = \lambda P^{(k)}$

Preuve (par récurrence sur k):

□

Troisième partie

Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Définition: Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que A divise B (dans $\mathbb{K}[X]$) s'il existe $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$AC = B$$

On dit dans ce cas que A est un diviseur de B ou que B est un multiple de A . On le note alors $A \mid B$

On dit que A et B sont associés s'il existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $A = \lambda B$. Il s'agit d'une relation d'équivalence.

Proposition: Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

$$\left. \begin{array}{l} A \mid B \\ B \mid A \end{array} \right\} \iff A \text{ et } B \text{ sont associés}$$

Preuve: “ \implies ” Soit $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que $AC = B$ et $D \in \mathbb{K}[X]$ tel que $BD = A$.
D'où,

$$A = BD = ACD$$

Or, $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre.

D'où

$$A(1 - CD) = 0$$

donc $A = 0$ ou $CD = 1$

Si $A = 0$, alors $B = 0 \times C = 0 = 1 \times A$ donc A et B sont associés

Si $CD = 1$, on sait que $\mathbb{K}[X]^\times = \mathbb{K} \setminus \{0\}$

Alors, A et B sont associés.

“ \impliedby ” évident

□

Lemme: $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre.

Preuve:

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $PQ = 0$. On suppose que $P \neq 0$ et $Q \neq 0$

Alors $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q) \geq 0$

Or, $PQ = 0$ et $\deg(0) = -\infty$: \nmid une contradiction

□

Lemme:

$$\mathbb{K}[X]^\times = \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

Preuve:

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $PQ = 1$.

Alors, $0 = \deg(1) = \deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

Comme $P \neq 0$, $\deg(P) \geq 0$. De même, $\deg(Q) \geq 0$

Donc $\deg(P) = \deg(Q) = 0$ Donc, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda\mu = 1$

Donc $\lambda \in \mathbb{K}^\times = \mathbb{K} \setminus \{0\}$

□

Proposition: $|$ est une relation réflexive et transitive. \square

Proposition: Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A \mid B$ et $A \mid C$. Alors

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, A \mid BQ + CP$$

\square

Proposition – Définition: Soit $A \in \mathbb{K}[X], B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

$$\exists!(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \begin{cases} A = PQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

On dit que Q est le quotient et R le reste de la division (euclidienne) de A par B .

Preuve: — On prouve l'existence par récurrence sur le degré de A . On fixe $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : " \forall A \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } \deg(A) = n,$$

$$\exists (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2, \begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases} "$$

— Soit $A \in \mathbb{K}[X]$. On suppose $\deg(A) = 0$

Si $\deg(B) > 0$ alors on pose $Q = 0$ et $R = A$. Ainsi $\begin{cases} BQ + R = A \\ \deg(R) = 0 < \deg(B) \end{cases}$

Si $\deg(B) = 0$, alors $A = \lambda$ et $B = \mu$ avec $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{K} \setminus \{0\})^2$.

On pose $\begin{cases} Q = \mu^{-1}\lambda \\ R = 0 \end{cases}$. Alors, $\begin{cases} BQ + R = \mu\mu^{-1}\lambda = \lambda = A \\ \deg(R) = -\infty < 0 = \deg(B) \end{cases}$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(k)$ pour tout $k \leq n$. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(A) = n + 1$. On pose $p = \deg(B)$

Si $p > n + 1$, on pose $\begin{cases} Q = 0 \\ R = A \end{cases}$ et on a

$$\begin{cases} BQ + R = A \\ \deg(R) = n + 1 < p = \deg(B) \end{cases}$$

Si $p \leq n + 1$. On pose $\begin{cases} Q = a_{n+1}b_p^{-1}X^{n+1-p} \\ R = A - BQ \end{cases}$ où $\begin{cases} a_{n+1} = \text{dom}(A) \\ a_p = \text{dom}(B) \end{cases}$ On

a $A = BQ + R$

Or, $\begin{cases} \deg(BQ) = p + n + 1 - p = n + 1 = \deg(A) \\ \text{dom}(BQ) = b_p b_p^{-1} a_{n+1} = a_{n+1} = \text{dom}(A) \end{cases}$

donc $\deg(R) < \deg(A)$ donc $\deg(R) \leq n$

D'après $\mathcal{P}(n)$,

$$\exists (Q_1, R_1) \in \mathbb{K}[X]^2, \begin{cases} R = BQ_1 + R_1 \\ \deg(R_1) < \deg(B) \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{aligned} A &= BQ + R \\ &= BQ + BQ_1 + R_1 \\ &= B(Q + Q_1) + R_1 \end{aligned}$$

et $\deg(R_1) < \deg(B)$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Donc, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence forte. Si $A = 0$, on pose $Q = R = 0$ et on a bien $BQ + R = 0 = A$ et $\deg(R) = -\infty < \deg(B)$

— Unicité

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. On suppose que $A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2$ avec

$$Q_1, Q_2, R_1, R_2 \in \mathbb{K}[X] \text{ et } \begin{cases} \deg(R_1) < \deg(B) \\ \deg(R_2) < \deg(B) \end{cases}$$

D'où,

$$B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$$

Or,

$$\deg(R_2 - R_1) \leq \max(\deg(R_2), \deg(R_1)) < \deg(B)$$

Or,

$$\begin{aligned} \deg(B(Q_1 - Q_2)) &= \deg(B) + \deg(Q_1 - Q_2) \\ &\geq \deg(B) \text{ si } Q_1 - Q_2 \neq 0 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{cases} Q_1 - Q_2 = 0 \\ R_2 - R_1 = B(Q_2 - Q_1) = 0 \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} Q_1 = Q_2 \\ R_2 = R_1 \end{cases}$$

□

EXEMPLE:

Division euclidienne de $A = X^5 + X^3 - X^2 + 1$ par $B = X^2 + \frac{1}{2}X - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

$$\begin{array}{r|l}
X^5 + X^3 - X^2 + 1 & X^2 + \frac{1}{2}X - 1 \\
- & \hline
X^5 + \frac{1}{2}X^4 - X^3 & \boxed{X^3 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{9}{4}X - \frac{21}{8}} \\
\hline
-\frac{1}{2}X^4 + 2X^3 - X^2 + 1 & \text{quotient} \\
- & \hline
-\frac{1}{2}X^4 - \frac{1}{4}X^3 + \frac{1}{2}X^2 & \\
\hline
\frac{9}{4}X^3 - \frac{3}{2}X^2 + 1 & \\
- & \hline
\frac{9}{4}X^3 + \frac{9}{8}X^2 - \frac{9}{4}X & \\
\hline
-\frac{21}{8}X^2 + \frac{9}{4}X + 1 & \\
- & \hline
-\frac{21}{8}X^2 - \frac{21}{16}X + \frac{21}{8} & \text{reste} \\
\hline
\boxed{\frac{57}{16}X - \frac{13}{8}} &
\end{array}$$

Théorème: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.

$$P(a) = 0 \iff X - a \mid P$$

Preuve: “ \Leftarrow ” On suppose $P = (X - a) \times Q$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$. On substitue a à X

$$P(a) = (a - a) \times Q(a) = 0_{\mathbb{K}} \times Q(a) = 0_{\mathbb{K}}$$

“ \Rightarrow ” On suppose que $P(a) = 0$. On réalise la division euclidienne de P par $X - a$:

$$\begin{cases} P = (X - a) \times Q + R \\ \deg(R) < \deg(X - a) = 1 \end{cases}$$

donc $R = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$

D'où,

$$0 = P(a) = (a - a) \times Q(a) + R(a) = \lambda$$

donc

$$P = (X - a) \times Q$$

et donc

$$X - a \mid P$$

□

Corollaire: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul de degré n . Alors, P a au plus n racines distinctes dans \mathbb{K}

Preuve (par récurrence sur n): — C'est évident pour $n = 0$

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la proposition vraie pour les polynômes de degré n .

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n + 1$

Si P n'a pas de racine alors le résultat est trivialement vrai pour P

Si P a une racine a , alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ non nul tel que $P = (X - a) \times Q$

$n + 1 = \deg(P) = 1 + \deg(Q)$ donc $\deg(Q) = n$

D'après l'hypothèse de récurrence, Q a au plus n racines distinctes

Soit b une racine de P différente de a . Alors,

$$0 = P(b) = \underbrace{(b - a)}_{\neq 0} \times Q(b)$$

donc $Q(b) = 0$

Donc P a bien au plus $n + 1$ racines. □

Définition: Soient A et B deux polynômes dont l'un au moins est non nul, $D \in \mathbb{K}[X]$. On dit que D est un PGCD de A et B si D est un diviseur commun de A et B et de degré maximal.

Proposition: Avec les hypothèses précédentes, deux PGCD quelconques de A et B sont nécessairement associés

Preuve:

On forme

$$E = \{AU + BV \mid (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2\}$$

— E est un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$

— $\forall P \in E, \forall Q \in \mathbb{K}[X], PQ \in E$

On dit que E est un *idéal* de $\mathbb{K}[X]$

Soit $D \in E$ un polynôme non nul de degré minimal. Soit $P \in E$ On divise P par D :

$$\begin{cases} P = DQ + R \\ \deg(R) < \deg(D) \end{cases}$$

D'où

$$R = \underbrace{P}_{\in E} - \underbrace{DQ}_{\in E} \in E$$

$\deg(R) < \deg(D)$ donc $R = 0$

Donc,

$$\forall P \in E, D \mid P$$

$A \in E$ donc $D \mid A$

$B \in E$ donc $D \mid B$

Soit Δ un diviseur commun quelconque de A et B . On pose $D = AU + BV$

$\left. \begin{array}{l} \Delta \mid A \\ \Delta \mid B \end{array} \right\}$ donc $\Delta \mid AU + BV$ donc $\Delta \mid D$

donc $\deg(\Delta) \leq \deg(D)$

Ainsi, D est un PGCD de A et B . De plus, Δ est un PGCD de A et B alors

$$\begin{cases} \Delta \mid D \\ \deg(\Delta) = \deg(D) \end{cases}$$

Donc $D = \Delta Q$ avec $\begin{cases} Q \in \mathbb{K}[X] \\ \deg(Q) = 0 \end{cases}$
donc D et Δ sont associés. □

REMARQUE:

Dans la preuve précédente, on a aussi montré les deux propositions suivantes.

Théorème (Théorème de Bézout): Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A \neq 0$ ou $B \neq 0$
Soit D un PGCD de A et B . Alors

$$\exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2, AU + BV = D$$
■

Proposition: Avec les hypothèses précédents,

$$\begin{aligned} & \forall \Delta \in \mathbb{K}[X], \\ & \left. \begin{array}{l} \Delta \mid A \\ \Delta \mid B \end{array} \right\} \iff \Delta \mid D \end{aligned}$$
■

Définition: On dit qu'un polynôme est unitaire si son coefficient dominant vaut 1.

Proposition – Définition: Soient A et B deux polynômes dont l'un au moins est non nul. Parmi tous les PGCD de A et B , un seul est unitaire. On le note $A \wedge B$.

Preuve:

Soit D un PGCD de A et B . Alors $\text{dom}(D)^{-1}D$ est associé à D , donc c'est un PGCD de A et B et il est unitaire. Soient D et Δ deux PGCD unitaires de A et B . Ils sont associés

$$\Delta = \lambda D \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

D'où,

$$1 = \text{dom}(\Delta) = \lambda \text{dom}(D) = \lambda$$

Donc $\Delta = D$ □

Proposition: Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Soit R le reste de la division de A par B . Alors,

$$A \wedge B = B \wedge R$$

Preuve (idem que dans \mathbb{Z}):

□

EXEMPLE:

$$D = (5X^2 + 3X - 1) \wedge (X + 3)$$

$$\begin{array}{r|l}
 X^2 + 3X - 1 & X + 3 \\
 \hline
 - 5X^2 + 15X & 5X - 12 \\
 \hline
 -12X - 1 & \\
 - 12X - 36 & \\
 \hline
 35 &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 X + 3 & \\
 \hline
 - X & \\
 \hline
 3 & \\
 - 3 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 X + 3 & 35 \\
 \hline
 \frac{1}{35}X + \frac{3}{35} & \\
 \hline
 3 & \\
 - 3 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

$$D = (X + 3) \wedge 35 = 1$$

Théorème (Théorème de Gauss): Soient A, B, C trois polynômes non nuls tels que

$$\begin{cases} A \mid BC \\ A \wedge B = 1 \end{cases}$$

Alors, $A \mid C$

Preuve (idem que dans \mathbb{Z}):

□

Corollaire: Avec les notations précédentes,

$$\left. \begin{array}{l} A \mid B \\ B \mid C \\ A \wedge B = 1 \end{array} \right\} \implies AB \mid C$$

Proposition: Soient A et B deux polynômes non nuls et D un PGCD de A et B . Soit $x \in \mathbb{K}$.

$$A(x) = B(x) = 0 \iff D(X) = 0$$

Preuve: “ \implies ” On suppose $A(x) = B(x) = 0$
D’après le théorème de Bézout,

$$D = AU + BV \text{ avec } (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$$

Donc,

$$D(x) = A(x)U(x) + B(x)V(x) = 0 + 0 = 0$$

“ \impliedby ” On suppose $D(x) = 0$. On pose $\begin{cases} A = DA_1 \\ B = DB_1 \end{cases}$ avec $(A_1, B_1) \in \mathbb{K}[X]^2$

D'où,

$$\begin{cases} A(x) = D(x)A_1(x) = 0 \\ B(x) = D(x)B_1(x) = 0 \end{cases}$$

□

Définition: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

On dit que P n'est pas irréductible si il existe $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ non constants tels que $P = QR$ **ou** si P est constant.

Sinon, on dit que P est irréductible.

EXEMPLE: 1. $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$

On suppose que

$$X^2 + 1 = QR \text{ avec } (Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$$

$$\begin{cases} \deg(Q) > 0 \\ \deg(R) > 0 \end{cases}$$

Donc, P et Q sont de degré 1, donc ont chacun une racine réelle donc $X^2 + 1$ a au moins une racine réelle : \nmid une contradiction.

2. $X^2 + 1$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$$

3. $X^4 + 1$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ et pourtant il n'a aucune racine réelle.

$$\begin{aligned} X^4 + 1 &= X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^2 \\ &= (X^2 + 1)^2 - 2X^2 \\ &= \underbrace{(X^2 + 1 - \sqrt{2}X)}_{\in \mathbb{R}[X]} \underbrace{(X^2 + 1 + \sqrt{2}X)}_{\in \mathbb{R}[X]} \end{aligned}$$

Théorème (Théorème de D'Alembert - Gauss):

$$\forall P \in \mathbb{C}[X] \text{ non constant, } \exists a \in \mathbb{C}, P(a) = 0$$

□

Corollaire: Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1.

Preuve:

Les polynômes de degré 1 sont évidemment irréductibles.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) \geq 2$. Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P .

Donc $X - a \mid P$.

$$\begin{cases} P = (X - a) \times Q \\ Q \in \mathbb{C}[X] \end{cases}$$

$\left. \begin{array}{l} \deg(Q) \geq 1 \\ \deg(X - a) = 1 \end{array} \right\}$ donc P n'est pas irréductible. \square

EXEMPLE:

Factoriser $X^4 + 1$ dans \mathbb{C}

Les racines complexes de $X^4 + 1$ sont $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$
Donc,

$$\begin{aligned} X^4 - 1 &= \left(X - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(X + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &\quad \times \left(X + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(X - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

Définition: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, $\mu \in \mathbb{N}$.

On dit que a est une racine de P de multiplicité μ si

$$\begin{cases} (X - a)^\mu \mid P \\ (X - a)^{\mu+1} \nmid P \end{cases}$$

Si $\mu = 1$, on dit que a est une racine simple.

Si $\mu = 2$, on dit que a est une racine double.

REMARQUE:

a est une racine de multiplicité 0 si et seulement si $P(a) \neq 0$

Lemme: Soient $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ non nuls. On suppose que A divise B dans $\mathbb{C}[X]$
Alors, A divise B dans $\mathbb{R}[X]$

Preuve:

On suppose que

$$(*) \quad B = AQ \text{ avec } Q \in \mathbb{C}[X]$$

On divise B par A dans $\mathbb{R}[X]$:

$$(**) \quad B = AQ_1 + R_1 \text{ avec } \begin{cases} (Q_1, R_1) \in \mathbb{R}[X]^2 \\ \deg(R_1) < \deg(A) \end{cases}$$

Comme $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$, $(**)$ est aussi le résultat de la division euclidienne de B par A dans $\mathbb{C}[X]$.

$(*)$ correspond aussi à une division euclidienne dans $\mathbb{C}[X]$

Par unicité, $\begin{cases} Q = Q_1 \in \mathbb{R}[X] \\ R_1 = 0 \end{cases}$

Donc A divise B dans $\mathbb{R}[X]$ \square

Proposition: Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{N}$.

Si a est une racine de P de multiplicité μ alors \bar{a} est une racine de P de multiplicité μ .

Preuve (par récurrence sur μ):

On pose

$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : \text{“}\forall P \in \mathbb{R}[X] \text{ et } a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ racine de } P \text{ de multiplicité } \mu,$
 $\text{alors } \bar{a} \text{ est aussi une racine de } P \text{ de multiplicité } \mu\text{”}$

— Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que $P(a) \neq 0$.

On pose $P = \sum_{i=0}^p \alpha_i X^i$ avec $\alpha_0, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P(\bar{a}) &= \sum_{i=0}^p \alpha_i \bar{a}^i \\ &= \sum_{i=0}^p \overline{\alpha_i a^i} \\ &= \sum_{i=0}^p \overline{\alpha_i a^i} \\ &= \overline{\left(\sum_{i=0}^p \alpha_i a^i \right)} \\ &= \overline{P(a)} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie

— Soit $\mu \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(\mu)$ vraie.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ une racine de P de multiplicité $\mu + 1$. On pose

$$\begin{cases} P = (X - a)^{\mu+1} Q \\ Q \in \mathbb{C}[X] \\ Q(a) \neq 0 \end{cases}$$

On pose aussi $P = \sum_{i=0}^p \alpha_i a^i$ avec $\alpha_0, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$

$\mu + 1 \geq 1$ donc $P(a) = 0$. D'où, $P(\bar{a}) = \overline{P(a)} = \bar{0} = 0$

donc $\underbrace{(\bar{a} - a)^{\mu+1}}_{\neq 0} Q(\bar{a}) = 0$

Donc, $Q = (X - \bar{a}) Q_1$ avec $Q_1 \in \mathbb{C}[X]$

D'où

$$\begin{aligned} P &= (X - a)^{\mu+1} (X - \bar{a}) Q_1 \\ &= (X - a)(X - \bar{a})(X - a)^\mu Q_1 \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} (X - a)(X - \bar{a}) &= X^2 - (a + \bar{a})X + a\bar{a} \\ &= X^2 - 2\Re(a)X + |a|^2 \in \mathbb{R}[X] \end{aligned}$$

D'après le lemme précédent, $(X - a)^\mu Q_1 \in \mathbb{R}[X]$

De plus,

$$0 \neq Q(a) = (\bar{a} - a) Q_1(a)$$

donc $Q_1(a) \neq 0$

Donc a est une racine de $(X - a)^\mu Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ de multiplicité μ .

D'après $\mathcal{P}(\mu)$, \bar{a} est aussi une racine de $(X - a)^\mu Q_1$ de multiplicité μ .
Donc, on peut écrire

$$(X - a)^\mu Q_1 = (X - \bar{a})^\mu Q_2 \text{ avec } \begin{cases} Q_2 \in \mathbb{C}[X] \\ Q_2(\bar{a}) \neq 0 \end{cases}$$

Donc,

$$P = (X - a)(X - \bar{a})^{\mu+1} Q_2$$

Donc \bar{a} est une racine de P de multiplicité $\mu + 1$

□

Corollaire: Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatifs.

Preuve: — Les polynômes de degré 1 sont évidemment irréductibles

- Les polynômes constants ne sont pas irréductibles par définition
- Les polynômes de degré 2 ayant au moins une racine réelle peuvent s'écrire comme produit de deux polynômes réels de degré 1 à coefficients réels
- Réciproquement, si un polynôme de degré 2 n'est pas irréductible, c'est forcément un produit de 2 polynômes de degré 1 à coefficients réels et donc ce polynôme a au moins une racine réelle
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) \geq 3$

On note a_1, \dots, a_r les racines réelles distinctes de P ,

$$a_{r+1}, \overline{a_{r+1}}, a_{r+2}, \overline{a_{r+2}}, \dots, a_s, \overline{a_s}$$

les racines non réelles distinctes de P . On note aussi

$$\forall k \in \llbracket 1, s \rrbracket, \mu_k \text{ la multiplicité de } a_k$$

Donc

$$P = \text{dom}(P)(X - a_1)^{\mu_1} \cdots (X - a_r)^{\mu_r} (X - a_{r+1})^{\mu_{r+1}} (X - \overline{a_{r+1}})^{\mu_{r+1}} \\ \times \cdots \times (X - a_s)^{\mu_s} (X - \overline{a_s})^{\mu_s}$$

Or,

$$\begin{aligned} \forall k \geq r+1, (X - a_k)^{\mu_k} (X - \overline{a_k})^{\mu_k} &= ((x - a)(x - \bar{a}))^{\mu_k} \\ &= (X^2 - 2\Re(a)X + |a|^2)^{\mu_k} \\ &\in \mathbb{R}[X] \end{aligned}$$

D'où,

$$P = \underbrace{\text{dom}(P)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\prod_{k=1}^r (X - a_k)^{\mu_k}}_{\in \mathbb{R}[X]} \underbrace{\prod_{k=r+1}^s (X^2 - 2\Re(a_k)X + |a_k|^2)^{\mu_k}}_{\in \mathbb{R}[X]}$$

$$P \text{ irréductible} \iff \begin{cases} \text{il y a une unique racine réelle simple} \\ \text{et aucune racine non réelle} \\ \text{ou} \\ \text{il n'y a aucune racine réelle et 2 racines} \\ \text{non réelles conjuguées simples} \end{cases}$$

□

Théorème: Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Tout polynôme de \mathbb{K} se découpe en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ et cette décomposition est unique à multiplication par une constante non nulle près. \square

Proposition: Soient $A, B \in \mathbb{C}[X]$ non nuls.

$$A \mid B \iff \begin{array}{l} \forall a \in \mathbb{C}, \text{ si } a \text{ est une racine de } A \text{ de multiplicité } \mu \in \mathbb{N}, \\ \text{alors } a \text{ est racine de } B \text{ avec une multiplicité } \geq \mu \end{array}$$

Preuve: “ \implies ” On suppose $A \mid B$

Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de A de multiplicité μ

Alors, $(X - a)^\mu \mid A$ donc $(X - a)^\mu \mid B$

Donc a est une racine de B de multiplicité $\geq \mu$

“ \impliedby ” On décompose A et B en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$:

$$B = \text{dom}(B) \prod_{a \in \mathcal{R}} (X - a)^{\nu_a}$$

où \mathcal{R} est l'ensemble des racines de B ; et

$$A = \text{dom}(A) \prod_{a \in \mathcal{S}} (X - a)^{\mu_a}$$

où \mathcal{S} est l'ensemble des racines de A

On suppose que $\begin{cases} \mathcal{S} \subset \mathcal{R} \\ \forall a \in \mathcal{S}, \mu_a \leq \nu_a \end{cases}$

D'où,

$$B = \frac{\text{dom}(B)}{\text{dom}(A)} \underbrace{\text{dom}(A) \prod_{a \in \mathcal{S}} (X - a)^{\mu_a}}_A \times \underbrace{\prod_{a \in \mathcal{S}} (X - a)^{\nu_a - \mu_a} \times \prod_{a \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{S}} (X - a)^{\nu_a}}_{\in \mathbb{C}[X]}$$

Donc, $A \mid B$

\square

EXERCICE:

Montrer que $1 + X + X^2 \mid X^{3n} - 1$

Les racines de $1 + X + X^2$ sont j et j^2

$$\begin{aligned} j^{3n} - 1 &= (j^3)^n - 1 = 1 - 1 = 0 \\ (j^2)^{3n} &= (j^3)^{2n} - 1 = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Proposition: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n > 0$

Alors P a exactement n racines comptées avec multiplicité.

Preuve:

$$P = \text{dom}(P) \times \prod_{a \in \mathcal{R}} (X - a)^{\mu_a}$$

où \mathcal{R} est l'ensemble des racines distinctes de P

$$n = \deg(P) = \sum_{a \in \mathcal{R}} \deg((X - a)^{\mu_a}) = \sum_{a \in \mathcal{R}} \mu_a$$

□

Quatrième partie

L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$

REMARQUE (Rappel):

$(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel engendré par $(1, X, X^2, \dots)$

Proposition: La famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

Preuve:

Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille presque nulle de scalaires telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n X^n = 0$

$(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$: on le note P .

Or,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n X^n = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots) = P$$

Donc $P = 0$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n = 0$$

□

Corollaire:

$$\dim(\mathbb{K}[X]) = +\infty$$

□

Définition: Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) \leq n\}$$

Théorème: $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ de dimension $n + 1$

Preuve:

$$\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^n)$$

□

Proposition: Soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille de polynômes non nuls telle que

$$\forall i \neq j, \deg(P_i) \neq \deg(P_j)$$

Alors $(P_i)_{i \in I}$ est libre.

Preuve:

Soit $n \in \mathbb{N}$ et i_1, \dots, i_n des éléments distincts de I

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. On suppose

$$\lambda_1 P_{i_1} + \dots + \lambda_n P_{i_n} = 0$$

Quitte à renuméroter les polynômes, on peut supposer que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \deg(P_{i_n}) > \deg(P_{i_k})$$

Si $\lambda_n \neq 0$,

$$\deg(\lambda_1 P_{i_1} + \cdots + \lambda_n P_{i_n}) = \deg(P_{i_n}) \neq -\infty$$

Donc $\lambda_n = 0$

Donc $\lambda_1 P_{i_1} + \cdots + \lambda_{n-1} P_{i_{n-1}} = 0$

On conclut par récurrence sur n . □

Théorème (Formule de Taylor): Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

Preuve:

$(1, X-a, \dots, (X-a)^n)$ est libre.

Comme $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$, c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Donc, il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$P = \sum_{k=0}^n \lambda_k (X-a)^k$$

On remarque que

$$P(a) = \lambda_0$$

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P^{(i)}(a) &= \sum_{k=0}^n \lambda_k \underbrace{\left((X-a)^k \right)^{(i)}(a)}_{= \begin{cases} 0 & \text{si } k < i \\ i! & \text{si } k = i \\ \frac{k!}{(k-i)!} (X-a)^{k+1} & \text{si } k > i \end{cases}} \\ &= \lambda_i i! \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lambda_i = \frac{P^{(i)}(a)}{i!} \quad \square$$

Proposition: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.

$$\left. \begin{array}{l} a \text{ est une racine de } P \\ \text{de multiplicité } \mu \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \forall k \leq \mu-1, P^{(k)}(a) = 0 \\ P^{(\mu)}(a) \neq 0 \end{array} \right.$$

Preuve:

On pose $n = \deg(P)$

“ \Leftarrow ”

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k \\
 &= \sum_{k=\mu}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k \\
 &= (X-a)^\mu \underbrace{\sum_{k=\mu}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^{k-\mu}}_{Q \in \mathbb{K}[X]}
 \end{aligned}$$

Donc $\begin{cases} (X-a)^\mu \mid P \\ Q(a) = \frac{P^{(\mu)}(a)}{\mu!} \neq 0 \end{cases}$

“ \Rightarrow ”

$$\begin{cases} P = (X-a)^\mu Q \\ Q(a) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \forall k \leq \mu-1, P^{(k)}(a) &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} ((X-a)^\mu)^{(j)}(a) Q^{(k-j)}(a) \\
 &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\mu!}{(\mu-j)!} \underbrace{(a-a)^{\mu-j}}_{=0} Q^{(k-j)}(a) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P^{(\mu)}(a) &= \binom{\mu}{\mu} \times \mu! \times 1 \times Q^{(0)}(a) \\
 &= Q(a) \\
 &\neq 0
 \end{aligned}$$

□

Corollaire: Avec les notations précédentes, si a est une racine de P de multiplicité μ , alors a est une racine de P' de multiplicité $\mu-1$

□

Définition: On dit qu'un polynôme P est scindé sur \mathbb{K} si P est un produit de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré 1, i.e. toutes les racines de P sont dans \mathbb{K}

EXERCICE: 1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur \mathbb{R} à racines simples avec $\deg(P) \geq 2$. Montrer que P' est scindé sur \mathbb{R} à racines simple.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé avec $\deg(P) \geq 2$. Montrer que P' est scindé.

Solution

1.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg(P) = n$ scindé sur \mathbb{R} .
On note $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ les n racines de P

Soit $f_P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction polynomiale.

Aussi, f_P est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

D'après le théorème de Rolle,

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \exists y_i \in]x_i, x_{i+1}[, f'_P(y_i) = 0$$

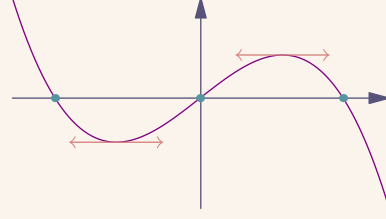
Donc y_1, \dots, y_{n-1} sont racines de P' .

De plus,

$$y_1 < x_2 < y_2 < x_3 < y_3 < \dots < y_{n-1}$$

On a donc trouvé $n-1$ racines distinctes de P' . Or, $\deg(P') = n-1$.

Donc, on a trouvé TOUTES les racines complexes de P' . Donc P' est scindé à racines simples.



2. On note $x_1 < \dots < x_p$ les racines de P et $n = \deg(P)$. On note pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, μ_i la multiplicité de x_i . Donc,

$$\sum_{i=1}^p \mu_i = n$$

D'après le théorème de Rolle,

$$\forall i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \exists y_i \in]x_i, x_{i+1}[, P'(y_i) = 0$$

On a trouvé $p-1$ racines réelles de P' . $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, x_i est une racine de P' de multiplicité $\mu_i - 1$.

Ce qui fait, $\sum_{i=1}^p (\mu_i - 1) = n - p$ racines réelles de P' comptées avec multiplicité.

En tout, on a trouvé $n-1$ racines réelles de P' comptées avec multiplicité.

Comme $\deg(P') = n-1$, P' n'a pas d'autres racines donc P' est scindé.

EXERCICE (Problème):

Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$\forall i \neq j, x_i \neq x_j$$

Soient $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. On cherche $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré minimal tel que

$$(*) \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(x_i) = y_i$$

$$\text{Soit } \varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ P & \longmapsto & (P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{array}$$

$$(*) \iff \varphi(P) = (y_1, \dots, y_n)$$

On cherche, parmi tous les antécédants de (y_1, \dots, y_n) celui de plus bas degré.

φ est linéaire :

$$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},$$

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha P + \beta Q) &= (\alpha P(x_1) + \beta Q(x_1), \dots, \alpha P(x_n) + \beta Q(x_n)) \\ &= (\alpha P(x_1), \dots, \alpha P(x_n)) + (\beta Q(x_1), \dots, \beta Q(x_n)) \\ &= \alpha \varphi(P) + \beta \varphi(Q) \end{aligned}$$

— Donc φ est un morphisme de groupes additifs.

— $(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=0}^n y_i e_i$ où (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{K}^n

Si on trouve $L_1, \dots, L_n \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\varphi(L_1) = e_1, \dots, \varphi(L_n) = e_n$, alors

$$\begin{aligned} \varphi\left(\sum_{i=1}^n y_i L_i\right) &= \sum_{i=1}^n y_i \varphi(L_i) \\ &= \sum_{i=1}^n y_i e_i \\ &= (y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

—

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(P) = (0, \dots, 0) \\ &\iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(x_i) = 0 \\ &\iff \exists Q \in \mathbb{K}[X], P = (X - x_1) \cdots (X - x_n) Q \end{aligned}$$

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $L_i \in \mathbb{K}[X]$.

$$\begin{aligned} \varphi(L_i) = e_i &\iff (L_i(x_1), L_i(x_2), \dots, L_i(x_n)) = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0) \\ &\iff \begin{cases} L_i(x_i) = 1 \\ \forall j \neq i, L_i(x_j) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \exists Q \in \mathbb{K}[X], L_i = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (X - x_j) Q \\ 1 = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (x_i - x_j) Q(x_i) \end{cases} \\ &\iff L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \varphi(P) = (y_1, \dots, y_n) &\iff \exists Q \in \mathbb{K}[X], P = \underbrace{\sum_{i=1}^n y_i L_i}_{\substack{\text{solution particulière} \\ \deg(\cdot) \leq n-1}} + \underbrace{\prod_{k=1}^n (X - x_k) Q}_{\substack{\text{solutions de l'équation} \\ \text{homogène associée} \\ \deg(\cdot) \geq n}} \end{aligned}$$

Le polynôme de plus bas degré solution du problème d'interpolation est

$$\sum_{i=1}^n y_i \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

Définition: Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ avec

$$\forall i \neq j, x_i \neq x_j$$

On pose

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, L_i = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

L_i est le i -ème polynôme interpolateur de Lagrange associé à (x_1, \dots, x_n) :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, L_i(x_j) = \delta_{i,j}$$

Proposition: Avec les notations précédentes, (L_1, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Preuve: — $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \deg(L_i) = n - 1$
 — Soit $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. On pose

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, y_i = P(x_i)$$

On pose $Q = \sum_{i=1}^{n-1} y_i L_i$. Q est le seul polynôme de degré $\leq n - 1$ tel que $Q(x_i) = y_i$ pour tout i .

Donc, $P - Q \in \text{Vect}(L_1, \dots, L_n)$. Donc (L_1, \dots, L_n) est une famille génératrice de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. Or, $\dim(\mathbb{K}_{n-1}[X]) = n$. Donc (L_1, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ \square

EXEMPLE:

$\mathbb{K} = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et $n = 3$

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{2} \\ x_2 &= \bar{0} \\ x_3 &= \bar{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= \bar{1} \\ y_2 &= \bar{1} \\ y_3 &= \bar{2} \end{aligned}$$

Le seul polynôme de degré ≤ 2 tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$ est $\sum_{i=1}^3 y_i \prod_{\substack{1 \leq j \leq 3 \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$

$$\begin{aligned} L_1 &= (x_1 - x_2)^{-1}(x_1 - x_3)^{-1}(X - x_2)(X - x_3) \\ &= \bar{3} \times \bar{2} \times X(X + \bar{1}) = X(X + \bar{1}) = X^2 + X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 &= (x_2 - x_1)^{-1}(x_2 - x_3)^{-1}(X - x_1)(X - x_3) \\ &= \bar{2} \times \bar{1}(X - \bar{2}) \times (X - \bar{1}) \\ &= \bar{2}X^2 + \bar{3}X + \bar{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_3 &= (x_3 - x_1)^{-1}(x_3 - x_2)^{-1}(X - x_1)(X - x_2) \\ &= \bar{3} \times \bar{4} \times (X - \bar{2}) \times X \\ &= \bar{2}X(X - \bar{2}) \\ &= \bar{2}X^2 + X \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} P &= X^2 + X + \bar{2}X + \bar{3}X + \bar{1} + \bar{4}X^2 + \bar{2} \\ &= \bar{2}X^2 + X + \bar{1} \end{aligned}$$

Vérification :

$$\begin{aligned} P(\bar{2}) &= \bar{3} + \bar{2} + \bar{1} = \bar{1} = y_1 \\ P(\bar{0}) &= \bar{1} = y_2 \\ P(\bar{-1}) &= \bar{2} - \bar{1} + \bar{1} = \bar{2} = y_3 \end{aligned}$$

