CHAPITRE 33

Famille sommables

1. Motivations

Tout comme avec les séries, la notion de famille sommable permet de définir la somme d'une famille infinie de nombres complexes. Ce qui différentie les deux notions, c'est que la somme d'une famille sommable ne dépend pas de l'ordre choisi pour ajouter les membres de la famille, ce qui n'est pas le cas pour une série.

Exemple 1.1

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$. Classiquement, la série $\sum u_n$ converge de somme $\ln(2)$. On change à présent l'ordre dans lequel on somme ces nombres : au lieu d'alterner un nombre positif et un négatif, on somme deux nombres positifs puis un négatif : en d'autres termes, on pose

$$v_1 = 1, v_2 = \frac{1}{3}, v_3 = -\frac{1}{2}, v_4 = \frac{1}{5}, v_5 = \frac{1}{7}, v_6 = -\frac{1}{4}, \dots$$

ou encore, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $v_{3p+1} = \dfrac{1}{4p+1}, v_{3p+2} = \dfrac{1}{4p+3}$ et tout $p \geq 1$, $v_{3p+3} = -\dfrac{1}{2p}$.

Cette fois, la série $\sum v_n$ converge de somme $\dfrac{3}{2}\ln(2)$.

En revanche, si ajoute un terme positif puis un terme négatif, deux termes positifs puis un négatif, trois termes positifs puis un négatif, et ainsi de suite, on obtient une série divergente.

Pouvoir sommer sans avoir besoin de faire attention à l'ordre de sommation est nécessaire par exemple pour intervertir deux sommes. Pour ce faire, la définition de somme ci-après ne repose pas sur un ordre particulier, donc les éléments que l'on additionne ne forment pas une suite, leur somme est définie globalement.

2. Famille sommable de réels positifs

Définition 2.1

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. On dit que cette famille est *sommable* si l'ensemble $\{\sum_{j\in J} u_j | J \subset I, J \text{ fini}\}$ est majoré. Dans ce cas, la *somme* de $(u_i)_{i\in I}$ est la borne supérieure de cet ensemble, et on la note $\sum_{i\in I} u_i$. Si la famille n'est pas sommable, alors on pose $\sum_{i\in I} u_i = +\infty$.

Remarque 2.2

Une famille finie de réels positifs est sommable, et sa somme en tant que famille sommable est la somme de tous ses termes.

Théorème 2.3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ converge. Dans ce cas, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Proposition 2.4

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de réels positifs et $\sigma : I \to I$ une permutation. Alors la famille $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable et $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}$.

Proposition 2.5

Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles sommables indexées sur le même ensemble I. Alors $(u_i + v_i)_{i\in I}$ est sommable et $\sum_{i\in I}(u_i + v_i) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$.

Remarque 2.6

La formule ci-dessus est encore valable si l'une au moins des deux familles n'est pas sommable.

Proposition 2.7

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable et $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Alors $(\lambda u_i)_{i\in I}$ est sommable et $\sum_{i\in I} \lambda u_i = \lambda \sum_{i\in I} u_i$.

Théorème 2.8: sommation par paquets

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Soit $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I. Alors $\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} u_i = \sum_{i\in I} u_i$.

Théorème 2.9: Fubini positif

Soit $(u_{i,j})_{i\in I, j\in J}$ une famille de réels positifs. Alors $\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{i,j}$.

3. Famille sommable de nombres réels

Définition 3.1

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels. On dit que cette famille est *sommable* si la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable.

Proposition-Définition 3.2

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels. On définit deux familles en posant

$$\forall i \in I,\ u_i^+ = \max(u_i, 0) \text{ et } u_i^- = -\min(u_i, 0).$$

Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les deux familles $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ le sont.

Dans ce cas, on définit la *somme* de la famille $(u_i)_{i\in I}$ par la formule

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-.$$

4. Famille sommable de nombres complexes

Définition 4.1

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes. On dit que cette famille est *sommable* si la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable.

L'ensemble des familles sommables est noté $\ell^1(I)$.

Remarque 4.2

Une sous-famille d'une famille sommable est sommable.

Proposition-Définition 4.3

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes. La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les familles $(\mathrm{Re}(u_i))_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}(u_i)_{i\in I})$ le sont. Dans ce cas, on définit la *somme* de la famille $(u_i)_{i\in I}$ par la formule

$$\sum_{j\in I} u_j = \sum_{j\in I} \mathrm{Re}(u_j) + i\sum_{j\in J} \mathrm{Im}(u_j).$$

Proposition 4.4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Alors la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente. Dans ce cas, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Proposition 4.5

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes et $\sigma : I \to I$ une permutation. Alors la famille $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable et $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}$.

Proposition 4.6

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $J \subset I$ telle que $\left|\sum)i \in I u_i - \sum_{i\in J} u_i\right| \leq \varepsilon$.

Proposition 4.7

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable et $(v_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes telle que pour tout $i \in I$, $|v_i| \leq u_i$. Alors la famille $(v_i)_{i\in I}$ est sommable.

Proposition 4.8

$\ell^1(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^I$ et l'application $S : (u_i)_{i\in I} \in \ell^1(I) \mapsto \sum_{i\in I} u_i$ est une forme linéaire.

Théorème 4.9: sommation par paquets

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes. Soit $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I. Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable alors $\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j} u_i = \sum_{i\in I} u_i$.

Théorème 4.10: Fubini

Soit $(u_{i,j})_{i\in I, j\in J}$ une famille sommable de complexes. Alors $\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{i,j}$.

5. Produit de Cauchy

Définition 5.1

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres complexes. On définit le *produit de Cauchy* des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ comme la série de terme général (c_n) où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Théorème 5.2

On reprend les notations précédentes : si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy $\sum c_n$ converge absolument et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

Exemple 5.3

Avec cette formule, on retrouve la formule $e^a e^b = e^{a+b}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.