

# Теория вычислительных процессов

## Process calculus

### Сети Петри

ИВТ и ПМ  
ЗабГУ

2021

# Outline

## Дискретные системы

### Сети Петри

- Примеры

- Формальное описание

- Диаграммы состояний

### Ссылки

# Дискретные системы

- ▶ *Дискретная динамическая система* – одно из наиболее общих понятий в теоретическом программировании.
- ▶ Примеры: компьютеры, их элементы и устройства, компьютерные сети; компьютерные программы и операционные системы; системы сбора и автоматической обработки цифровой информации; системы автоматического управления объектами и процессами; производственные системы дискретного характера (сборочные линии); социально-экономические и другие.

- ▶ Приведенные примеры — сложные системы, имеющие сложную внутреннюю структуру.
- ▶ Эти системы дискретные:
  - ▶ в их внутренней структуре можно выделить счетное число состояний (в которых они могут пребывать в некоторые моменты времени)
  - ▶ а также переходить из состояния в состояние в некоторые моменты времени.
- ▶ множество может быть очень и очень большим, но чаще всего, оно конечно и счетно.

- ▶ Приведенные примеры — сложные системы, имеющие сложную внутреннюю структуру.
- ▶ Эти системы дискретные:
  - ▶ в их внутренней структуре можно выделить счетное число состояний (в которых они могут пребывать в некоторые моменты времени)
  - ▶ а также переходить из состояния в состояние в некоторые моменты времени.
- ▶ множество может быть очень и очень большим, но чаще всего, оно конечно и счетно.
- ▶ Многие непрерывные (или аналоговые) системы можно представить дискретными, вводя некоторые границы дискретизации. Например: звук.

- ▶ Автомат – математической абстракцией последовательной дискретной системы.
- ▶ Постоянно появляется необходимость моделировать новые динамические дискретные системы.
- ▶ Например параллельные системы с недетерминированным поведением, в которых отдельные компоненты функционируют, в основном, независимо, взаимодействуя друг с другом время от времени.  
примеры: многопроцессорные вычислительные системы;  
параллельные программы;  
многозадачные операционные системы;  
асинхронные электронные схемы и т.д.

- ▶ Системы с параллельно функционирующими и асинхронно (т.е. в произвольные моменты времени) взаимодействующими компонентами не описываются адекватно в терминах классической теории автоматов.
- ▶ Среди многих существующих методов описания и анализа дискретных параллельных систем выделился подход, который основан на сетевых моделях специального вида – сети Петри.

# Outline

Дискретные системы

**Сети Петри**

Примеры

Формальное описание

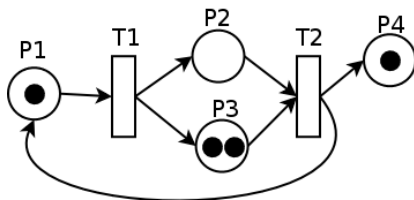
Диаграммы состояний

Ссылки



# Сети Петри

Сети Петри – это инструмент для математического моделирования и исследования сложных систем.



# Сети Петри

- ▶ Сеть Петри описывает *структуру* и *поведение* динамической системы.
- ▶ Идея Сети Петри впервые использована немецким математиком и информатиком Карлом Адамом Петри для описания химических процессов в первой половине XX века
- ▶ Формальное описание сети опубликовано в 1962 году
- ▶ Сети Петри позволили в том числе развить идеи из области параллельных и распределённых вычислений
- ▶ Business Process Model and Notation, диаграмма деятельности, событийная цепочка процессов – графические аналоги сети Петри

# Сеть Петри

Определим сеть Петри как четвёрку:

$$N = (P, T, I, O)$$

- ▶  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  – конечное множество **позиций**;
- ▶  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$  – конечное множество **переходов**;
- ▶  $I : T \rightarrow P$  – входная функция, сопоставляющая переходу  $T$  мультимножество<sup>1</sup> его входных позиций  $P$ ;
- ▶  $O : T \rightarrow P$  – выходная функция, сопоставляющая переходу мультимножество его выходных позиций  $P$ .

---

<sup>1</sup>множество, которое может содержать несколько экземпляров одного и того же объекта

# Сеть Петри

## Пример

$$P = \{p_1, p_2, p_3\}$$

$$T = \{t_1, t_2\}$$

$$I(t_1) = \{p_1, p_1, p_2\}; O(t_1) = \{p_3\}$$

$$I(t_2) = \{p_1, p_2, p_2\}; O(t_2) = \{p_3\}$$

# Сеть Петри

Наглядное представление сети Петри – двудольный, ориентированный мультиграф.

# Сеть Петри

Наглядное представление сети Петри – двудольный, ориентированный мультиграф.

*Двудольный граф* (биграф) – граф, множество вершин которого можно разбить на две части таким образом, что каждое ребро графа соединяет какую-то вершину из одной части с какой-то вершиной другой части. Т.е. то есть не существует рёбер между вершинами одной и той же части.

*Мультиграф* – граф, в котором разрешается присутствие кратных рёбер.

# Сеть Петри

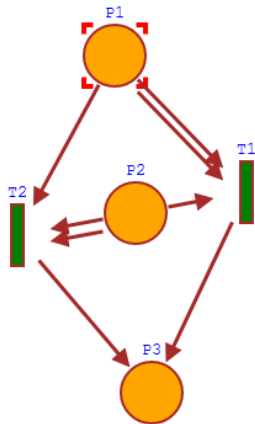
## Пример

$$P = \{p_1, p_2, p_3\}$$

$$T = \{t_1, t_2\}$$

$$I(t_1) = \{p_1, p_1, p_2\}; O(t_1) = \{p_3\}$$

$$I(t_2) = \{p_1, p_2, p_2\}; O(t_2) = \{p_3\}$$



Симуляция и задание сетей Петри: [petri.hp102.ru/pnet.html](http://petri.hp102.ru/pnet.html)

# Сеть Петри

## Пример

Задание в виде продукционных правил:

$$t_1 : \{p_3, p_1\} \rightarrow \{p_1, p_2, p_3\}$$

$$t_2 : \{p_1\} \rightarrow \{p_1, p_2\}$$

аналогично

$$P = \{p_1, p_2, p_3\}$$

$$T = \{t_1, t_2\}$$

$$I(t_1) = \{p_3, p_1\}; \quad O(t_1) = \{p_1, p_2, p_3\}$$

$$I(t_2) = \{p_1\}; \quad O(t_2) = \{p_1, p_2\}$$



# Маркировка

- ▶ Маркировка – это размещение по позициям сети Петри фишек, изображаемых на графе сети Петри точками.
- ▶ Фишки используются для определения выполнения сети Петри. Количество фишек в позиции при выполнении сети Петри может изменяться от 0 до бесконечности.



# Маркировка сетей Петри

Выполнение сети Петри. Пример.

<http://petri.hp102.ru/pnet.html>

Для выполнения сети Петри на бумаге можно использовать монеты

# Правила выполнения Сети Петри

- ▶ Сеть Петри выполняется посредством *запусков переходов*.
- ▶ **Запуск перехода** управляется фишками в его входных позициях и сопровождается удалением фишек из этих позиций и добавлением новых фишек в его выходные позиции.
- ▶ Переход может запускаться только в том случае, когда он *разрешен*.
- ▶ Переход называется **разрешенным**, если каждая из его входных позиций содержит число фишек, не меньшее, чем число дуг, ведущих из этой позиции в переход (или кратности входной дуги).
- ▶ Разрешённые переходы можно запускать в произвольном порядке

# Outline

Дискретные системы

Сети Петри

Примеры

Формальное описание

Диаграммы состояний

Ссылки

# Примеры моделирования сетями Петри

- ▶ Простой процесс с двумя состояниями
- ▶ Запуск параллельных процессов
- ▶ Запуск одного из параллельных процессов
- ▶ || процесс с общим ресурсом
- ▶ deadlock

# Примеры моделирования сетями Петри

Последовательная обработка запросов сервером

Опишем обработку как набор состояний. Сами состояния будем обозначать позициями

- ▶ s1 – сервер ждёт
- ▶ s2 – запрос поступил и ждёт
- ▶ s3 – запрос обрабатывается
- ▶ s3 – запрос обработан

Смену состояний будем называть событиями. События обозначим переходами

- ▶ t1 – поступил запрос
- ▶ t2 – сервер начал обработку
- ▶ t3 – сервер закончил обработку
- ▶ t3 – результат отправлен клиенту

# Outline

Дискретные системы

Сети Петри

Примеры

**Формальное описание**

Диаграммы состояний

Ссылки

# Переходы

- ▶  $\hat{\#}: T \times P \rightarrow \mathbb{N}_0$
- ▶  $\hat{\#}(t, p)$  – кратность дуги из  $t$  в  $p$
- ▶  $\hat{\#}: P \times T \rightarrow \mathbb{N}_0$
- ▶  $\hat{\#}(p, t)$  – кратность дуги из  $p$  в  $t$
- ▶  $\mathbb{N}_0$  – множество натуральных чисел и 0
- ▶  $\mu(p)$  – число фишек в позиции  $p$



# Переходы

- ▶ Переход  $t$  **разрешён** если  $\forall p \in I(t)$  справедливо  $\mu(p) \geq \hat{\#}(p, t)$
- ▶ **Запуск** перехода

$$\mu'(p) = \mu(p) - \hat{\#}(p, t) + \#(t, p)$$

- ▶ Сеть можно запускать до тех пор, пока в ней есть разрешённые переходы
- ▶ Порядок запуска переходов не определён

# Переходы

- ▶  $\mu = \langle 5, 1 \rangle$
- ▶  $\mu' = \langle 3, 2 \rangle$
- ▶ Запуск  $\mu \rightarrow \mu'$

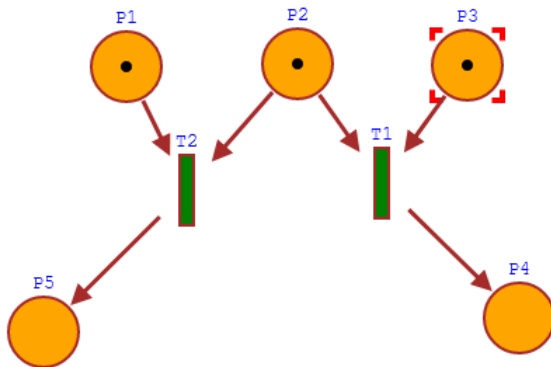


- ▶ Фишки обычно означает: в буфере есть запись, переменная доступна
- ▶ место – переменная буфер
- ▶ переход – функция устройство

# Одновременность и конфликт

- ▶ Сети Петри – асинхронны
- ▶ Не измеряем время
- ▶ Переход – примитивное событие, не занимающее времени
- ▶ Но различаем порядок событий
- ▶ В один и тот же момент времени может быть запущен только один переход

# Конфликт



При данной маркировке разрешены оба перехода, но запуск любого из них деактивирует другой переход

# Outline

Дискретные системы

Сети Петри

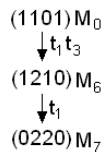
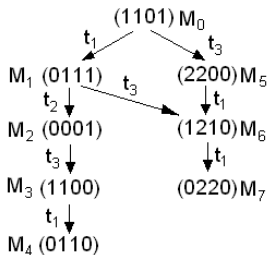
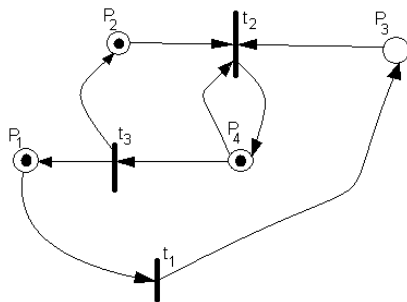
Примеры

Формальное описание

Диаграммы состояний

Ссылки

# Диаграммы состояний



# Outline

Дискретные системы

Сети Петри

Примеры

Формальное описание

Диаграммы состояний

Ссылки

- ▶ Моделирование параллельных процессов. Сети Петри. Мараховский В. Б., Розенблюм Л. Я., Яковлев А. В. — СПб.: Профессиональная литература, 2014. – 400 с
- ▶ Теория сетей Петри и моделирования систем, Питерсон Дж. 1984
- ▶ [petri.hp102.ru/pnet.html](http://petri.hp102.ru/pnet.html) – создание и запуск сетей Петри
- ▶ <https://apo.adrian-jagus.ch.de> – создание и анализ сетей Петри



Материалы дисциплины  
[github.com/ivtipm/ProcessCalculus](https://github.com/ivtipm/ProcessCalculus)