Filtro de Kalman

Sistemas Lineares

Jeferson Lima

http://gitlab.com/jeferson.lima

3 de março de 2020

Informações Úteis

Material disponível em:

https://gitlab.com/cursoseaulas/robotica-movel/-/wikis/home

Informações Úteis

Material disponível em:

https://gitlab.com/cursoseaulas/robotica-movel/-/wikis/home

Datas Importantes

- Entrega
- Envio

Informações Úteis

Material disponível em:

https://gitlab.com/cursoseaulas/robotica-movel/-/wikis/home

Datas Importantes

- Entrega
- Envio

Requisitos da Disciplina

- Teoria de Controle
- Linguagem de Programação - **Python** ou **C++**
- Eletrônica

Teorema de Bayes
Revisão

Revisão

- Estado Estimado x de um sistema observado z e com controle em u.
- Objetivo:

$$P(x|z,u) \tag{1}$$

Bayes Filter
Revisão

$$\text{Bel}(x_t) = \eta P(z_t|x_t) \int P(x_t|u_t, x_{t-1})\text{Bel}(x_{t-1})\text{d}x_{t-1}$$

- Predição:

$$\overline{\text{Bel}}(x_t) = \int P(x_t|u_t, x_{t-1})\text{Bel}(x_{t-1})\text{d}x_{t-1}$$

- Correção:

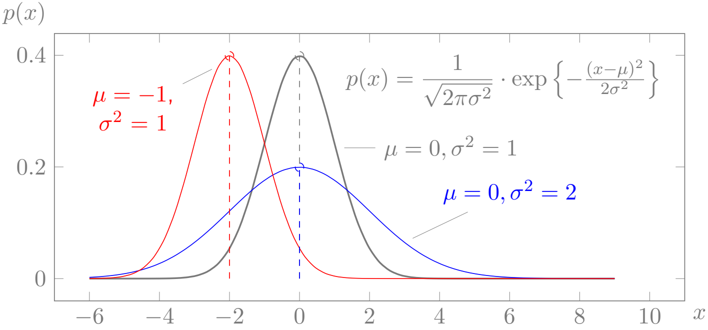
$$\text{Bel}(x_t) = \eta P(z_t|x_t) \int P(x_t|u_t, x_t)\overline{\text{Bel}}(x_t)\text{d}x_{t-1}$$

Distribuição Normal (Gaussiana)

Revisão

- **Uma Variável:** $P(x) \sim N(\mu, \sigma^2)$

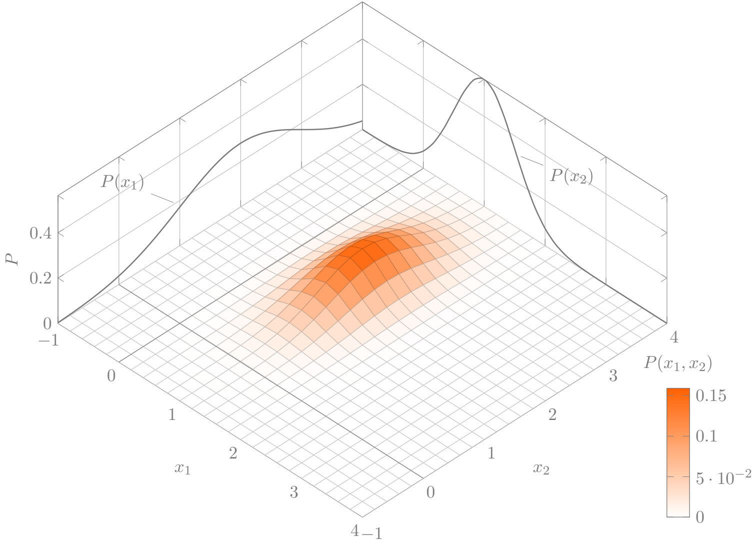
$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$



Distribuição Normal (Gaussiana)

Revisão

- Bivariável: $P(\mathbf{x}) \sim N(\mu, \sum)$



Distribuição Normal (Gaussiana)

Revisão

- Bivariável: $p(\mathbf{x}) \sim N(\mu, \sum)$

$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \| \sum \|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mu)^T \sum{}^{-1} (\mathbf{x} - \mu) \right\}$$

- Para um sistema de duas Variável:

$$p(\mathbf{x}) \sim N(\mu, \sum)$$

logo:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right)$$

Distribuição Normal (Gaussiana)

Propriedades

- Caso Univariavel:

$$\left.\begin{array}{l} X \sim N\left(\mu, \sigma_2\right) \\ Y = aX + b \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad Y \sim N\left(a\mu + b\right) \tag{2}$$

- Caso Multivariável:

$$\left.\begin{array}{l} X \sim N\left(\mu, \sum\right) \\ Y = AX + B \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad Y \sim N\left(A\mu + B, A \sum A^T\right) \tag{3}$$

Kalman filter

Modelo determinístico e estocástico

- Num modelo determinístico o resultado do sistema é pré determinado em função dos dados de entrada, exemplo:

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t$$
$$z_t = C_t x_t$$

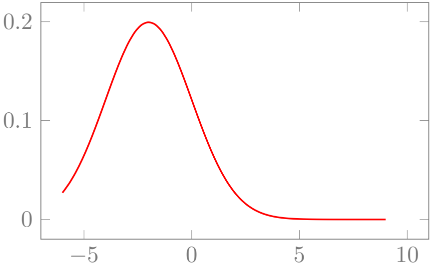
- Num modelo estocástico o resultado do sistema não depende somente dos dados de entrada, mas também de outros fatores, normalmente aleatórios:

$$x_t = A_t x_{t-1} + B u_t + \varepsilon_t \tag{4}$$
$$z_t = C_t x_t + \delta_t \tag{5}$$

  - A_t Matriz $(n \times n)$ que descreve os estados do modelo.
  - B_t Matriz $(n \times l)$ que descreve os estados do controle.
  - C_t Matrix $(k \times n)$ sendo os estados de x_t.
  - ε_t Variável aleatória do processo.
  - δ_t Rúido aleatório com distribuição normal e covariância de R_t e Q_t.

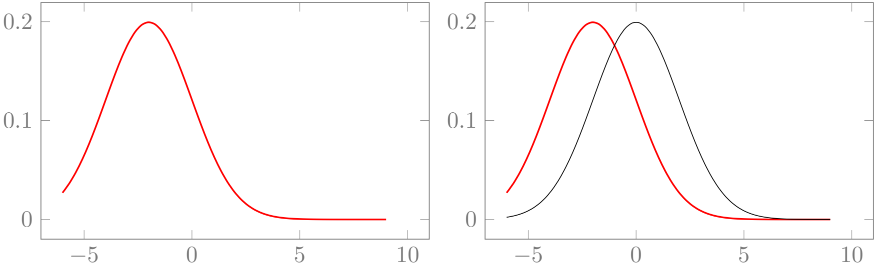
Kalman filter

Representação Grafica



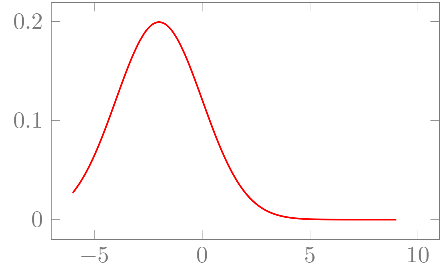
Kalman filter

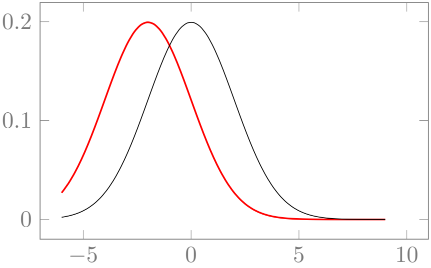
Representação Grafica

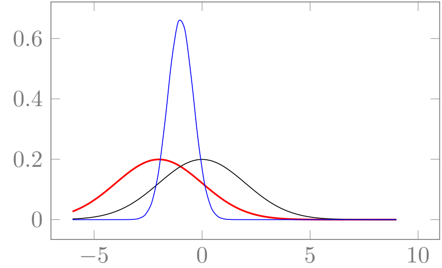


Kalman filter

Representação Grafica

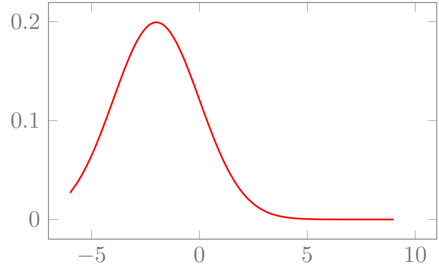


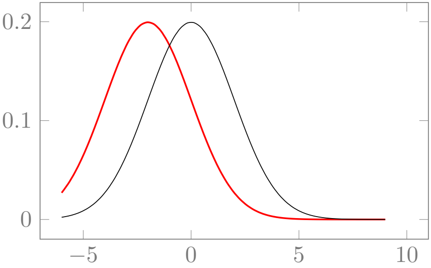


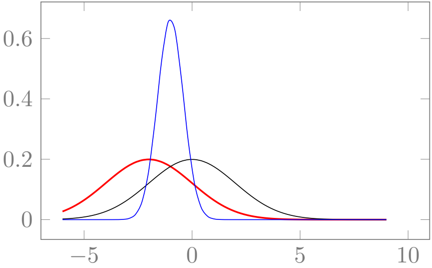


Kalman filter

Representação Grafica



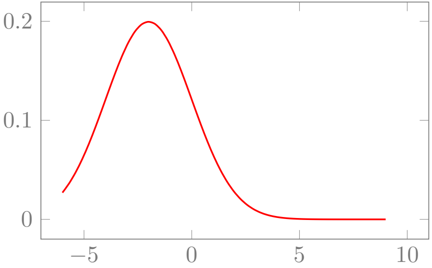


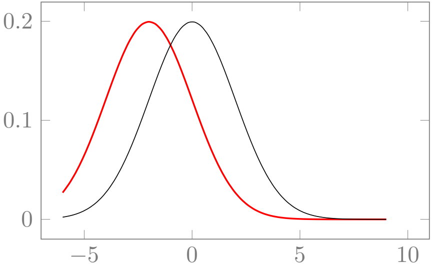


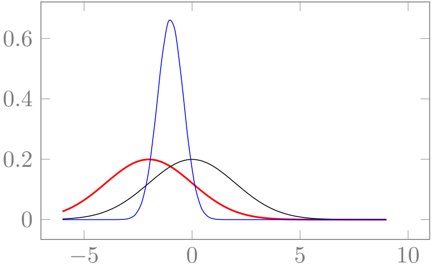
Como encontrar a solução para o grafico azul?

Kalman filter

Representação Grafica







Como encontrar a solução para o grafico azul?

$p(x_t|z_t, u_t) = \eta p(z_t|x_t) p(x_t|z_{t-1}, u_t)$

onde:

- z_t: estado observado no tempo t
- u_t: ação no tempo t
- x_t: estado do sistema em t

Kalman filter

Revisão

$$
\begin{aligned}
\text{Bel}(x_t) &= P(x_t|u_1, z_1, \cdots, z_t) \\
\text{Bayes} &= \eta P(z_t|x_t, u_1, z_1, \cdots, u_t) P(x_t, u_1, z_1, \cdots, u_t) \\
\text{Markov} &= \eta P(z_t|x_t) P(x_t, u_1, z_1, \cdots, u_t) \\
\text{Prob. Total} &= \eta P(z_t|x_t) \int P(x_t|u_1, z_1, \cdots, u_t, x_{t-1}) \\
&\qquad P(x_{t-1}|u_1, z_1, \cdots, u_t) \mathrm{d}x_{t-1} \\
\text{Markov} &= \eta P(z_t|x_t) \int P(x_t|u_t, x_{t-1}) P(x_{t-1}|u_1, z_1, \cdots, u_t) \mathrm{d}x_{t-1} \\
\text{Markov} &= \eta P(z_t|x_t) \int P(x_t|u_t, x_{t-1}) P(x_{t-1}|u_1, z_1, \cdots, z_{t-1}) \mathrm{d}x_{t-1}
\end{aligned}
$$

Bayes Filter

$$
\text{Bel}(x_t) = \eta P(z_t|x_t) \int P(x_t|u_t, x_{t-1}) \text{Bel}(x_{t-1})) \mathrm{d}x_{t-1}
$$

Kalman filter

Algoritmo

- Iniciando as Variável:

$$\text{Bel}(x_0) = N\left(x_0, \mu_o, \sum_0\right) \tag{6}$$

- Tempo de convergência do filtro.

Kalman filter

Algoritmo

- Com base na equação:

$$\text{Bel}(x_t) = \eta P(z_t|x_t) \int P(x_t|u_t, x_{t-1}) \text{Bel}(x_{t-1}) \mathrm{d}x_{t-1}$$

- E considerando que o sistema abaixo é linear e observável:

$$\begin{aligned} x_t &= A_t x_{t-1} + B_t u_t \\ z_t &= C_t x_t \end{aligned}$$

- Um sistem é observável se o posto da matriz $\mathcal{O}$ é igual a n.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C_t \\ C_t A_t \\ C_t A_t^2 \\ \vdots \\ C_t A_t^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \text{rank}(\mathcal{O}) = n$$

Kalman filter

Algoritmo - Prediction

- Temos a função de probabilidade do sistema, expressa por:

$$p(x_t|u_t, x_{t-1}) = N\left(x_t; A_t x_{t-1} + B_t u_t, Q_t\right)$$

- ou seja:

$$\overline{\mathsf{Bel}}(x_t) = \int \underbrace{P(x_t|u_t, x_{t-1})}_{\sim N(x_t; A_t x_{t-1} + B_t u_t, Q_t)} \overbrace{\mathsf{Bel}(x_{t-1})}^{\sim N\left(x_{t-1}; \mu_{t-1}, \sum t-1\right)} \mathsf{d}x_{t-1}$$

Kalman filter

Algoritmo - Prediction

$$\overline{\mathsf{Bel}}(x_t) = \int P(x_t|u_t, x_{t-1}) \qquad \mathsf{Bel}(x_{t-1})\mathsf{d}x_{t-1}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\sim N\left(x_t; A_t x_{t-1} + B_t u_t, Q_t\right) \quad \sim N\left(x_{t-1}; \mu_{t-1}, \sum{}_{t-1}\right)$$

$$\Downarrow$$

Relembrando ...

$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \| \sum \|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \sum{}^{-1} (\mathbf{x}-\mu)\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{\mathsf{Bel}}(x_t) = \eta \int \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x_t - A_t x_{t-1} - B_t\right)^T Q_t \left(x_t - A_t x_{t-1} - B_t\right)\right\}$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x_{t-1} - \mu_{t-1}\right)^T \sum{}_{t-1} \left(x_{t-1} - \mu_{t-1}\right)\right\} \mathsf{d}x_{t-1}$$

Kalman filter

Algoritmo - Prediction

- Continuando ...

$$\overline{\mathsf{Bel}}(x_t) = \eta \int \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x_t - A_t x_{t-1} - B_t\right)^T Q_t \left(x_t - A_t x_{t-1} - B_t\right)\right\}$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x_{t-1} - \mu_{t-1}\right)^T \sum{}_{t-1}\left(x_{t-1} - \mu_{t-1}\right)\right\} \mathsf{d}x_{t-1}$$

Prediction

$$\overline{\mathsf{Bel}} = \begin{cases} \overline{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t \\ \overline{\sum}_t = A_t \sum_{t-1} A_t^T + Q_t \end{cases} \tag{7}$$

Kalman filter

Algoritmo - Measurement Update

- Considerando a saída do sistema:

$$z_t = C_t x_t + \delta_t$$

- Apresentadas as equações lineares do observador de estados, temos a função de probalilidade:

$$P(z_t|x_t) = N\left(z_t; C_t x_t, R_t\right)$$

- ou seja:

$$\mathrm{Bel}(x_t) = \eta \quad \underbrace{P(z_t|x_t)}_{\sim N\left(z_t; C_t x_t, Q_t^{-1}\right)} \quad \overbrace{\overline{\mathrm{Bel}}(x_t)}^{\sim N\left(x_t; \overline{\mu}_t, \overline{\sum}_t\right)}$$

Kalman filter

Algoritmo - Measurement Update

$$
\begin{array}{llll}
\text{Bel}(x_t) & = \eta & P(z_t|x_t) & \overline{\text{Bel}}(x_t) \\
 & & \Downarrow & \Downarrow \\
 & & \sim N\left(z_t; C_t x_t, Q_t\right) & \sim N\left(x_t; \overline{\mu}_t, \overline{\sum}_t\right) \\
 & & \Downarrow & \\
\text{Bel}(x_t) & = \eta & \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(z_t - C_t x_t\right)^T R_t \left(z_t - C_t x_t\right)\right\} & \\
 & & \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(x_t - \overline{\mu}_t\right)^T \overline{\sum}_t^{-1} \left(x_t - \mu_t\right)\right\} &
\end{array}
$$

Measurement Update

$$
\overline{\text{Bel}} = \begin{cases} \mu_t = \overline{\mu}_t + K_t(z_t - C_t\overline{\mu}_t) \\ \sum_t = (I - K_t C_t)\overline{\sum}_t \end{cases} \tag{8}
$$

$$
\text{Com } K_t = \overline{\sum}_t C_t^T (C_t \overline{\sum}_t C_t^T + R_t)^{-1} \tag{9}
$$

Kalman filter

Algoritmo

Algorithm 1 Kalman-filter

procedure $\textsc{Prediction}(\mu_{t-1}, \sum_{t-1}, u_t, z_t)$
    $\overline{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$
    $\overline{\sum}_t = A_t \sum_{t-1} A_t^T + Q_t$
    Return $\left(\overline{\mu}_t, \overline{\sum}_t\right)$
end procedure
procedure $\textsc{MeasurementUpdate}(\overline{\mu}_t, \overline{\sum}_t, z_t)$
    $K_t = \overline{\sum}_t C_t^T (C_t \overline{\sum}_t C_t^T + R_t)^{-1}$
    $\mu_t = \overline{\mu}_t + K_t(z_t - C_t)$
    $\sum_t = (I - K_t C_t)\overline{\sum}_t$
    Return $(\mu_t, \sum_t)$
end procedure

Kalman filter

Exercício

Kalman filter

Desafio Carro Autonomo x Ciclista

Referências