Cinemática e Dinâmica

Equações de Movimento

Jeferson Lima

⟨http://gitlab.com/jeferson.lima⟩

2 de março de 2020

Informações Úteis

Material disponível em:

https://gitlab.com/cursoseaulas/robotica-movel/-/wikis/home

Informações Úteis

Material disponível em:

https://gitlab.com/cursoseaulas/robotica-movel/-/wikis/home

Datas Importantes

- Entrega
- Envio

Informações Úteis

Material disponível em:

https://gitlab.com/cursoseaulas/robotica-movel/-/wikis/home

Datas Importantes

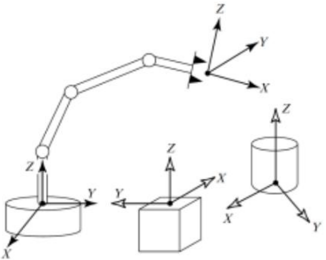
- Entrega
- Envio

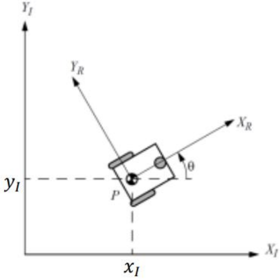
Requisitos da Disciplina

- Teoria de Controle
- Linguagem de Programação - **Python** ou **C++**
- Eletrônica

Modelagem Cinemática e Dinâmica

- Tipo de Modelos:
  - Modelo Cinemático ✓;
  - Modelo Dinâmico;





Modelagem Cinemática e Dinâmica

Conceitos

- A cinemática é a área da Física que estuda o movimento dos corpos.
- Em robótica móvel a cinemática estabelece relações entre o deslocamento (locomoção) do robô e a atuação a ele imposta.
- A cinemática direta estabelece modelos que estimam o deslocamento do robô dada uma atuação, por exemplo, velocidades imposta às suas rodas.
- A cinemática reversa estabelece modelos que estimam a atuação necessária para que o robô realize um determinado deslocamento, por exemplo, percorrer uma trajetória.
- Comumente, os modelos cinemáticos são baseados em equações diferenciais de primeira ordem não lineares. Tais modelos são linearizados e discretizados no tempo quanto utilizados em aplicações robótica. [1]

- Modelo Cinemático:
  - Modelagem Cinemática Direta e Inversa para robôs;
  - Transformação homogênea;
  - Nonholonomic constraints

Modelagem Cinemática

Transformação homogênea

- coordenada como um vetor de posição $\mathbb{R}^{3\times 1}$, composto pelas coordenadas X, Y e Z.
- um ponto ${}^{A}\mathbf{P}$ representa a distância ao longo dos eixos do plano $\{A\}$. Os elementos individuais de ${}^{A}\mathbf{P}$ podem ser visto pela equação (1).

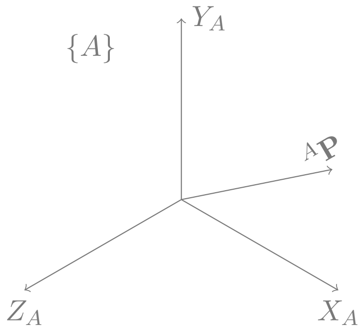


Figura: Vetor em relação ao plano $\{A\}$

$$
{}^{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \qquad (1)
$$

Modelagem Cinemática

Transformação homogênea - Matriz de Rotação

- O vetor definido por ${}^{A}\mathbf{P}$ pode ser rotacionado pela matriz de rotação $\mathbf{R}$, conforme a equação (2).

$$ {}^{B}_{A}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{11} & r_{11} \\ r_{21} & r_{21} & r_{21} \\ r_{31} & r_{31} & r_{31} \end{bmatrix} \tag{2} $$

Considera os exemplos

$$ \mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} $$

ou:

$$ \mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ eixo } Z \text{ fixo} $$

Modelagem Cinemática

Transformação homogênea - Matriz de Rotação

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \text{ eixo } x \text{ fixo}$$

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \text{ eixo } y \text{ fixo}$$

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ eixo } z \text{ fixo}$$

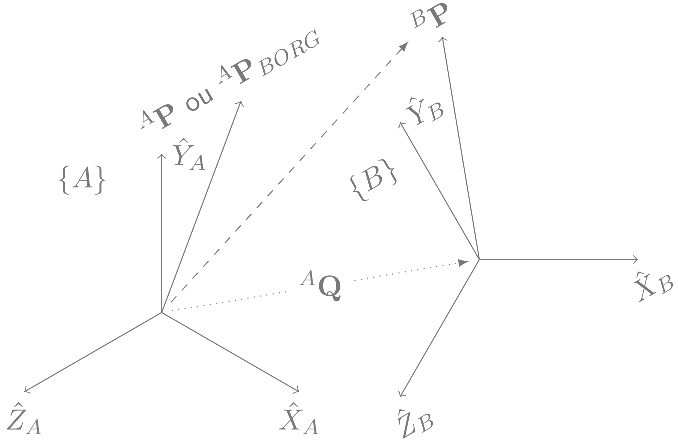
- A rotação, em torno e Z, de um angulo qualquer θ em ${}^{A}P$ é descrita como na equação (3).

$$
{}^{B}\mathbf{P} = {}^{B}_{A}\mathbf{R}(\theta){}^{A}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^{A}p_x \\ {}^{A}p_y \\ {}^{A}p_z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3}
$$

Modelagem Cinemática

Transformação homogênea - Translação

- Operador de translação $\mathbf{D}$:



Modelagem Cinemática

Transformação homogênea - Translação

- O Deslocamento é chamado de translação, e dá-se pelo operador translacional $\mathbf{D}_A(q)$, onde ${}^{A}\mathbf{Q}$ representa uma translação entre os planos $\{A\}$ e $\{B\}$ e é expresso pela equação (4).

$$ {}^{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}, \qquad \text{e} \qquad \mathbf{D}_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4} $$

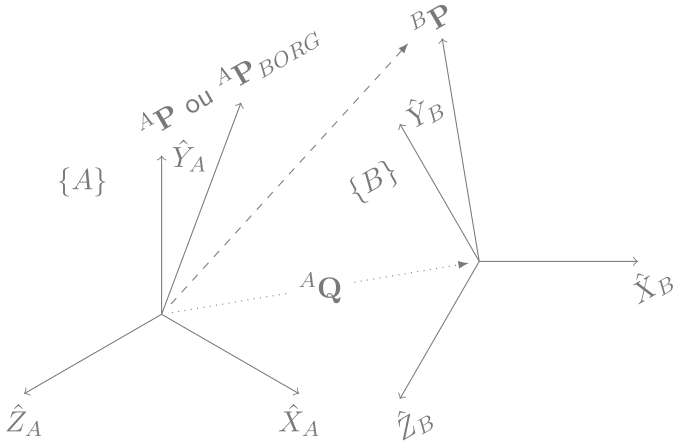
- Adota-se agora a notação para translação e rotação de um vetor, conforme a equação (5). Observa-se que a matriz $\mathbf{D}_A$ foi incorporada pela nova notação.

$$ \begin{bmatrix} {}^{B}_{A}\mathbf{P} \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}\mathbf{R} & & {}^{A}\mathbf{Q} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{{}^{A}_{B}\mathcal{A}} \begin{bmatrix} {}^{B}\mathbf{P} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5} $$

Modelagem Cinemática

Transformação homogênea - Operadores

- Aplicando se a transformação homogênea da coordenada ${}^{A}P$ pelos operadores de rotação e translação temos ${}^{B}P$



- Na forma generalizada, a transformação homogênea ${}^{i}_{0}\mathbf{T}$ pode ser expressa por uma sucessiva pode ser encontrada fazendo o produto das sucessivas transformações de ${}^{i-1}_{0}\mathcal{A}_i$. Conforme é mostrado na equação (6).

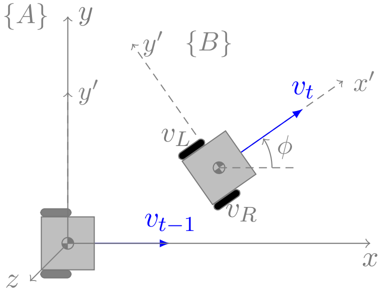
$$\begin{aligned} {}^{i}_{0}\mathbf{T} &= {}^{0}_{1}\mathcal{A}{}^{1}_{2}\mathcal{A}\cdots{}^{i-1}_{i}\mathcal{A} = \prod_{j=1}^{i} {}^{j-1}_{i}\mathcal{A}, \quad \text{para } i = 1, 2, \cdots, n \\ &= \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i & p_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{i}_{0}\mathbf{R} & {}^{i}_{0}\mathbf{P} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

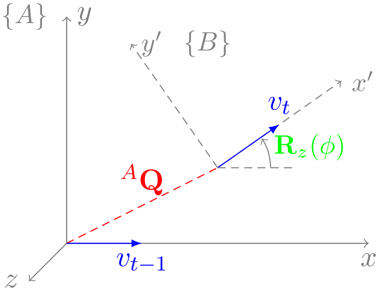
- onde, ${}^{i}_{0}\mathbf{P}$ é o vetor de orientação do referencial i em relação a base 0.

Modelagem Cinemática

Transformação homogênea - Exemplo Prático

1. Considerando que v_{t-1} é um vetor unitário em $\mathbf{P}_{x,y,z} = \{1,0,0\}$ e sobre uma deslocamento de $\mathbf{Q} = \{2,1,0\}$ e rotação $\mathbf{R_z}(\phi) = 20^o$, qual será a posição final de v no plano $\{A\}$?



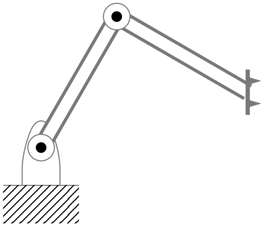


Transformação Homogênea:

$$\begin{bmatrix} {}^B_A\mathbf{P} \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^A_B\mathbf{R}_z(\phi) & & {}^A\mathbf{Q} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} {}^B\mathbf{P} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Modelagem Cinemática

Transformação homogênea - Exercício: Braço Robótico 2DOF



a

Figura: Robo 2DOF

Modelagem Cinemática

Coordenadas Generalizadas

- Consider a fixed or mobile robot with generalized coordinates q 1 ; q 2 ; . . .; q n in the joint (or actuation) space and x 1 ; x 2 ; . . .; x m in the task space. Define the vectors:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ . \\ q_n \end{bmatrix}, \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n m \end{bmatrix}$$

- **Cinemática Direta e Inversa**. A direct kinematics describes robot states as a function of its inputs (wheel speeds, joints motion, wheel steering, etc.). From inverse kinematics one can design a motion planning, which means that the robot inputs can be calculated for a desired robot state sequence.

Modelagem Cinemática

Coordenadas Generalizadas

- A relação entre as Cinemática Direta e Cinemática inversa é Cinemática Direta é obtido através da Matriz Jacobiana do Robô.

$$\mathbf{p} = \mathbf{J}\mathbf{q} \text{ e, } \mathbf{q} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{p}$$

bem como:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{J}\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}t}$$

ou também:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{S}(q)\dot{\mathbf{v}}$$

onde J é dado por:

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{q}} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial q_n}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

Modelagem Cinemática

Cinemática Direta e Inversa - Exercício: Braço Robótico 2DOF

Cinemática de Robôs

Conceitos

- **Um robô é modelado como um corpo rígido**
  - 3 variáveis x, y, ϕ (plano)
  - 6 variáveis $x, y, z, \alpha, \beta, \phi$ (espaço)
- Deve-se estabelecer uma relação entre o referencial local (robô) e o referencial global
  - Referencial global, exemplo $\{I\}$, ou $\{W\}$;
  -
  - Referencial local, exemplo $\{M\}$, ou $\{A\}$;

Cinemática de Robôs

Conceitos

- O modelo cinemático não leva em conta a inércia do robô, deformações em sua estrutura, forças oriundas do deslocamento (atrito, escorregamento, etc.), e demais fatores internos e externos que possam afetar a locomoção.
- Os modelos dinâmicos são capazes de incorporar estas variáveis, mas são muito mais complexos que os modelos cinemáticos.
- Os modelos cinemáticos são suficientes quando a locamoção se dá a baixas velocidades e em piso plano e horizontal que propicie contato adequado para não haver escorregamento.
- Apesar do modelo cinemático ser inerentemente um modelo aproximado, podemos corrigir seus resultados a partir dos sensores do robô. Os algoritmos de localização robótica fazem exatamente isto.[1]

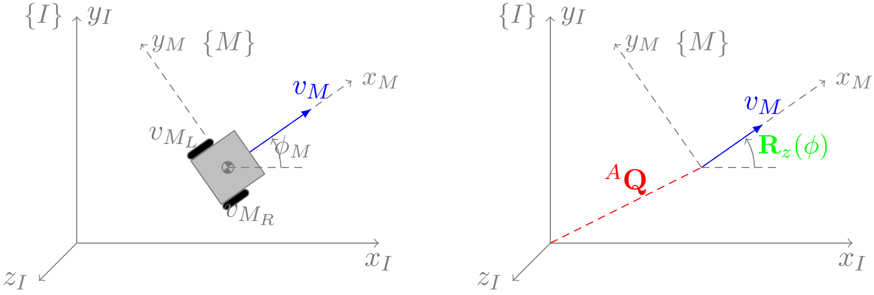
Cinemática de Robôs
Diversos modelos de cinemática

- **Cinemática Externa** describes robot position and orientation according to some reference coordinate frame.
- **Cinemática Interna** explains the relation between system internal variables (e.g., wheel rotation and robot motion)
- **Restrições de movimento** appear when a system has less input variables than degrees of freedom (DOFs). Holonomic constraints prohibit certain robot poses while a nonholonomic constraint prohibits certain robot velocities (the robot can drive only in the direction of the wheels' rotation) [Wheeled Mobile Robotics]

Cinemática de Robôs

Cinemática Externa

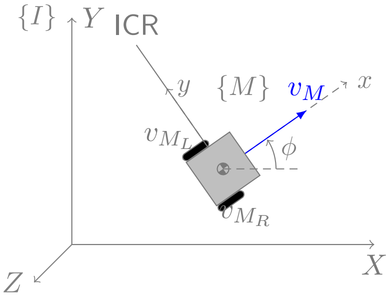
- O deslocamento de um robô deve ser expresso em relação a um sistema de coordenadas (referencial) inercial (global). No plano, utilizamos coordenadas cartesianas (eixos X e Y).



$$\begin{bmatrix} x_I \\ y_I \\ z_I \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{M}_{I}\mathbf{P} \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{I}_{M}\mathbf{R}_z(\phi) & & {}^{I}\mathbf{Q} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} {}^{M}\mathbf{P} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cinemática de Robôs

Cinemática Interna



- Posição:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Configuração (localização e orientação):

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \phi \end{bmatrix}$$

Cinemática de Robôs

Robô Diferencial

- Analisando a velocidade angular de ω, temos:

$$\omega = \frac{v_L(t)}{R(t) - \frac{L}{2}}$$
$$\omega = \frac{v_R(t)}{R(t) + \frac{L}{2}}$$

logo:

$$\omega(t) = \frac{v_R(t) - v_L(t)}{L}, \text{ e } R(t) = \frac{Lv_R(t) + v_L(t)}{2v_R(t) - v_L(t)}$$

assim, a velocidade tangencial do veiculo é dada por:

$$v(t) = \omega(t)R(t) = \frac{v_R(t) - v_L(t)}{2} \tag{7}$$

Cinemática de Robôs

Robô Diferencial

- As velocidades tangenciais $v_L(t) = r\omega_L(t)$ e $v_R(t) = r\omega_R(t)$, temos então a cinemática interna do robô (coordenadas locais):

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{x}_M(t) \\ \dot{y}_M(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_M(t) \\ \dot{v}_M(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ 0 & 0 \\ -\frac{r}{L} & \frac{r}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_L(t) \\ \omega_R(t) \end{bmatrix}}$$

- e em coordenadas globais [1]:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi(t)) & 0 \\ \sin(\phi(t)) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}}$$

onde as variáveis $v(t)$ e $\omega(t)$

- Mas o *encoder* fornece apenas a posição das rodas, como calcular a velocidade?
  ... **Aproximação de Euler**, Aproximação de Tustin, Transformação Bilinear...

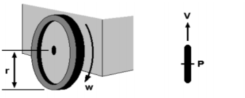
$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k + v_k T_s \cos(\phi_k) \\
y_{k+1} &= y_k + v_k T_s \sin(\phi_k) \\
\phi_{k+1} &= \phi_k + \omega_k T_s
\end{aligned}
$$

continuar ...

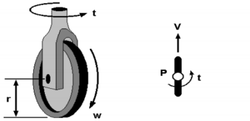
Modelo Cinemático

Tipo de Rodas

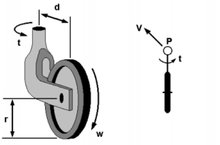
Fixa



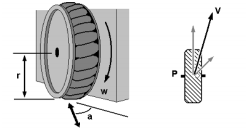
Orientável (centrada)



Orientável (fora do centro)



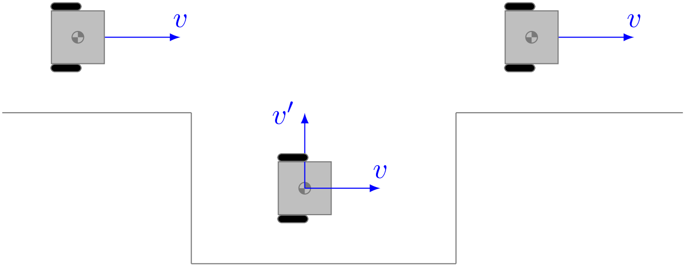
Sueca (omnidirecional)



Modelo Cinemático

Robô Diferencial

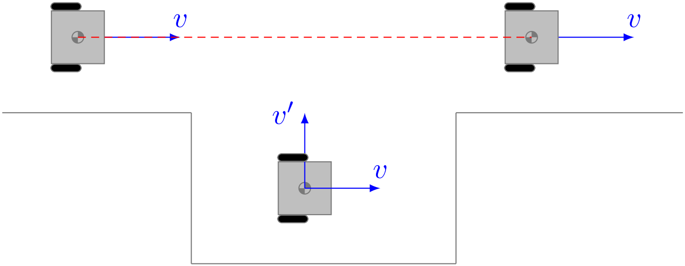
- Restrição não-holonômica
  - O robô pode mover-se apenas na direção normal ao eixo das rodas motrizes
- As próprias rodas já inserem as restrições!



Modelo Cinemático

Robô Diferencial

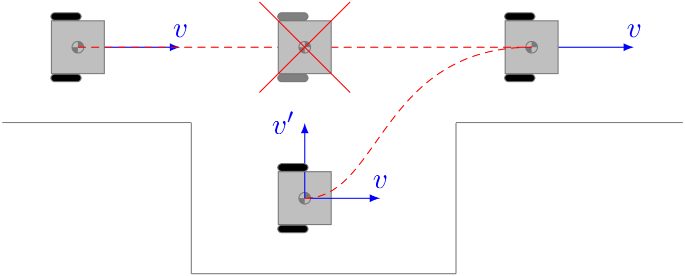
- Restrição não-holonômica
  - O robô pode mover-se apenas na direção normal ao eixo das rodas motrizes
- As próprias rodas já inserem as restrições!



Modelo Cinemático

Robô Diferencial

- Restrição não-holonômica
  - O robô pode mover-se apenas na direção normal ao eixo das rodas motrizes
- As próprias rodas já inserem as restrições!



Modelo Cinemático

Robô Diferencial

restricoes

Modelagem Dinâmica

Robot dynamic modeling deals with the derivation of the dynamic equations of the robot motion.

The kinematic model only describes static transformation of some robot ve- locities (pseudo velocities) to the velocities expressed in global coordinates. However, the dynamic motion model of the mechanical system includes dynamic properties such as system motion caused by external forces and system inertia.

- Método de Euler
- Método de Lagrange

Modelo Dinâmico

Formulação de Lagrange

- Equilíbrio de Energias:

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} \tag{8}$$

- A equação de energia cinética $(\mathcal{T})$ é dada por:

$$\mathcal{T} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} {}_{i}^{i+1}\dot{\mathbf{P}}^{T} \cdot m_i \cdot {}_{i}^{i+1}\dot{\mathbf{P}} + \omega_i^T \cdot \mathbf{J}_i \cdot \omega_i \tag{9}$$

ou para um robô em uma superfície:

$$\boxed{\mathcal{T} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{J}{2}\dot{\phi}^2}, \text{ e } \boxed{\mathcal{V} = 0}$$

onde:	m	Massa
	ω	Velocidade Angular
	J	Inércia

Modelo Dinâmico

Formulação de Lagrange

- Para Sistemas Holonômicos:

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} + \tau_{d_k} = f_k, \quad k = 1, 2, ..., n \tag{10}$$

- Para Sistemas Não-Holonômicos [2]

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} + \tau_{d_k} = f_k - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{jk} \tag{11}$$

Modelo Dinâmico

Formulação de Lagrange

- O modelo dinâmico de um robô movel com restrições de movimento pode ser expresso pelo sistema de matrizes abaixo:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{E}(\mathbf{q})\mathbf{u} - \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \qquad (12)$$

onde:

$\mathbf{q}$	Vetor das coordenadas generalizadas
$\mathbf{M}(\mathbf{q})$	Matriz de massa e inercia
$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Vetor de força Coriolis e centrifuga
$\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}})$	Vetor de atrito
$\mathbf{G}(\mathbf{q})$	Vector da força gravitacional
$\mathbf{E}(\mathbf{q})$	Matriz dos tranformação dos atuadores
$\mathbf{u}$	Vetor de entrada
$\mathbf{A}^T(\mathbf{q})$	Matriz de restrições de movimento
$\boldsymbol{\lambda}$	Multiplicador de Lagrange

Modelagem Dinâmica

Formulação de Lagrange - Exemplo Robô Diferencial

Modelagem Dinâmica

Formulação de Lagrange - Multiplicador de Lagrange

A solução para λ_i pode ser encontrada por:

- Método 1: Pseudo-velocidades ✓
- Método 2: Redução de Order ✗
- Método 3: Equações de Euler-Lagrange Modificadas ✗
- Método 4: Calculo das Forças de restrições ✗

Modelagem Dinâmica

Formulação de Lagrange - Pseudo-velocidades

- O objetivo é resolver as restrições de λ_i:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{E}(\mathbf{q})\mathbf{u} - \cancel{\mathbf{A}(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\lambda}} \tag{13}$$

- reelembrando:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}(q)\mathbf{v}$$

- bem como:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{S}}(q)\mathbf{v} + \mathbf{S}(q)\dot{\mathbf{v}} \tag{14}$$

- Subustituindo (13) em (14) e aplicando a relãção $\mathbf{A}(q)\mathbf{S}(q) = 0$, temos a equação de aceleração do sistema:

$$\dot{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1}\left(\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{V}}\right) \tag{15}$$

Modelagem Dinâmica

Formulação de Lagrange - Pseudo-velocidades

- (15) na forma de equação:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}(q)\mathbf{v} \\ -\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{V}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{E}} \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

- onde:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{V}} &= \mathbf{S}(q)^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{S}}(q)\mathbf{v} + \mathbf{S}(q)^T(\mathbf{V} + \mathbf{F} + \mathbf{G}) \\ \tilde{\mathbf{M}} &= \mathbf{S}(q)^T \mathbf{M}\mathbf{S}(q) \\ \tilde{\mathbf{E}} &= \mathbf{S}(q)^T \mathbf{E}\mathbf{S} \end{aligned}$$

onde:

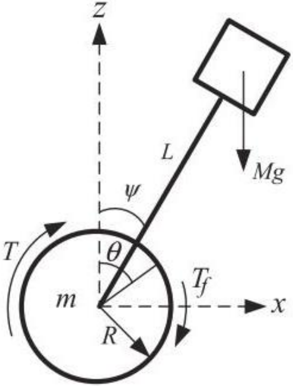
$\mathbf{x}$	Vetor de estados
$\mathbf{S}$	Matriz Jacobiana

Modelagem Dinâmica

Formulação de Lagrange - Exemplo Robô Diferencial

Modelagem de um Uniciclo

Modelagem de um Uniciclo



example: Comparative Analysis between Fuzzy Logic Control, LQR Control with Kalman Filter and PID Control for a Two Wheeled Inverted Pendulum

Referências I