Repaso de factorización
Parte II: trinomios no-perfectos, cubo de binomios

Matemáticas - Grado 9

2021

Resumen

A continuación se exponen técnicas de factorización en algunas expresiones algebraicas frecuentes como son algunos trinomios que no son cuadrados perfectos (trinomios no-perfectos) y expresiones con factores cúbicos originados desde el producto notable del cubo de un binomio. Tales expresiones también son factorizables con un procedimiento deducible desde una fórmula o tabla.

1. Factorización de un trinomio no-perfecto

Un trinomio no-perfecto se identifica cuando una expresión algebraica es de la forma (ordenada)

$$x^2 + bx + c$$

donde b y c son números enteros. Estos trinomios tienen las siguientes características:

1. El coeficiente del primer término es 1.
2. La letra del segundo término es la misma que la del primero, pero con exponente a la mitad.
3. El tercer término carece de letra.

La fórmula de factorización de tal expresión es escribir la expresión como el producto de dos binomios:

$$x^2 + bx + c = (x + r)(x + s) \tag{1}$$

los números r y s se ajustan de modo tal que la *suma algebraica* $r + s = b$ y el *producto algebraica* $rs = c$. En la práctica, requiere un buen dominio de la multiplicación de números naturales y atención a los signos de los términos del trinomio.

Ejemplo 1. Factorizar $x^2 + 5x + 6$.

1) Alistar un par de binomios con la raíz cuadrada del primer término: $(x \quad)(x \quad)$
2) En el primer factor se pone el signo del segundo término del trinomio, y en el segundo el producto de los dos signos: $(x+ \quad)(x+ \quad)$
3) Ya que los *dos signos son iguales* se hallan los números r, s tal que la **suma** sea 5 (el término del medio) y a su vez el **producto** es 6 (el último término); tales números son 3 y 2. En efecto, $3 + 2 = 5$ y $3 \times 2 = 6$.
4) Para finalizar, los números r y s hallados permiten la factorización del trinomio: $(x + 3)(x + 2)$ ■

Ejemplo 2. Factorizar $z^2 - 7z - 30$.

1) Alistando los binomios y ajustando los signos como el ejemplo anterior: $(z- \quad)(z+ \quad)$
2) Puesto que los *dos signos son diferentes*, los números r, s se hallan tal que la **resta** sea 7 (el término del medio) y a su vez el **producto** es 30 (el último término); tales números son 10 y 3. En efecto, $10 - 3 = 7$ y $10 \times 3 = 30$.
3) Para finalizar, el número mayor se pone en el primer factor y el menor en el segundo: $(z - 10)(z + 3)$ ■

2. Factorización de un cubo perfecto

Está técnica permite factorizar expresiones algebraicas de cuatro términos. Su derivación procede del producto notable $(a+b)^3$ cuya solución gráfica se ilustra en la figura 1. Los cuatro términos (ordenados) deben cumplir las

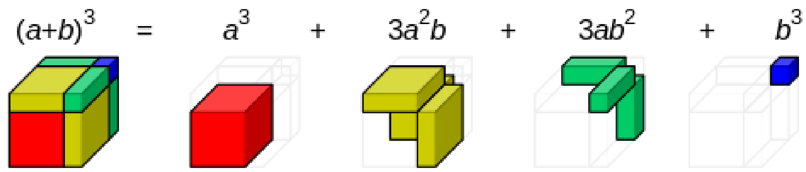

Figura 1: Visualización del producto notable del cubo de un binomio.

siguientes condiciones para efectuar la factorización:

1. Tener cuatro términos.
2. Primer y último término deben tener raíz cúbica exacta[1].
3. El segundo término es el producto de 3 por el cuadrado de la raíz cúbica del primer término por la raíz cúbica del último término.
4. El tercer término es el producto de 3 por la raíz del primer término por el cuadrado de la raíz del último término.

De cumplirse estas condiciones la factorización se reduce al cubo de un binomio cuyos términos son las raíces cúbicas del primer y último término de la expresión:

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3 \tag{2}$$

El símbolo ± denota una de las siguientes posibilidades: si la expresión tiene todos los signos positivos en el binomio factorizado se pone signo +; si los signos se alternan entre + y - en el binomio factorizado se pone signo -.
En está técnica, el procedimiento principal es la verificación de las cuatro condiciones.

Ejemplo 3. Verificar si el siguiente polinomio es cubo un perfecto y factorizarlo: $8m^3-12m^2+6m-1$.

1) Tiene cuatro términos y está ordenado; la raíz cúbica de $8m^3$ es $2m$; la raíz cúbica de 1 es 1; los signos se alternan.

2) En el segundo y tercer término:

$$3\cdot(2m)^2\cdot(1) = 12m^2$$
$$3\cdot(2m)\cdot(1)^2 = 6m$$

3) Como se cumplen las condiciones mencionadas, la factorización es: $8m^3-12m^2+6m-1 = (2m-1)^3$ ■

Ejemplo 4. Verificar si el siguiente polinomio es cubo un perfecto y factorizarlo: $8-36x-54x^2+27x^3$.

1) Aunque cumple con algunas de las cuatro condiciones, por simple visualización de los signos la expresión no es un cubo perfecto y por tanto no es posible factorizarla con la técnica mencionada. ■

[1] La raíz cúbica de un monomio se obtiene extrayendo la raíz cúbica de su coeficiente y dividiendo el exponente de cada letra entre 3.

3. Ejercicios de práctica

Los ejercicios propuestos en seguida, están destinados para facilitar el adiestramiento y la práctica real de las técnicas de factorización mencionadas. Estos ejercicios no son calificables, por tanto no tienen nota de evaluación.

1. Factorizar las siguientes expresiones usando la técnica para trinomio no-perfecto (si es posible).

   a) $u^2 - 12u + 11$

   b) $m^2 + 6m - 16$

   c) $b^2 + 7b + 6$

   d) $k^2 + k - 30$

2. Factorizar las siguientes expresiones usando la técnica del cubo perfecto (si es posible).

   a) $y^3 + 12y^2 + 16y + 64$

   b) $64q^3 + 144q^2 + 108q + 27$

   c) $c^3 - 75c - 15c^2 - 125$

4. Actividad 2

La actividad será desarrollada en-línea en una próxima sesión, así que la nota será evaluada en la misma clase.