Números fraccionarios

Parte I

Matemáticas - Grado 6

2020

1. La necesidad de otros números

En capítulos anteriores los números naturales estuvieron presentes para reconocer y repasar operaciones básicas y superiores, así como posteriores aplicaciones como en la teoría de números. Sin embargo, hay situaciones que el uso de número naturales no es suficiente o inadecuado. El *clásico y trillado* ejemplo de la partición de una torta como la figura 1 muestra la definición y representación de lo que es una fracción. Por supuesto la repuesta es: “un cuarto”; pero esto escrito, en cómodas palabras, numéricamente no se puede ajustar en el conjunto de los números naturales, ya que son números completos, fijos y que no se pueden “romper” en partes pequeñas. Entonces, la manera de escribir y representar la división o la partición tomada de algo es mediante una forma matemática conocida como *número fraccionario*. En modo figurativo, un número fraccionario es un símbolo numérico que indica una partición de algo [5]. Así que, la respuesta matemática a la figura 1 es

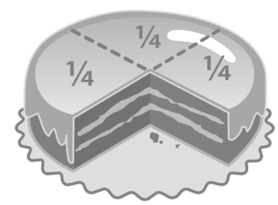

Figura 1: ¿Qué pedazo hace falta en la torta?

$$\frac{1}{4} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \quad \frac{\text{Partición tomada}}{\text{Partición del todo}} \quad \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \quad \frac{\text{Numerador}}{\text{Denominador}}$$

En una fracción, cada número tiene un nombre para identificarla y puede ser más grande el de arriba que el de abajo, o ser iguales pero su finalidad es representar la partición o división de algo. En una fracción la línea en medio de los números es conocido como *vínculo* o simplemente *barra* [9].

Parte de la temática de los números fraccionarios ha sido tratado en los cursos de primaria, así que las próximas secciones apuntan al refuerzo de conceptos de uso común (fracciones equivalentes) y a la profundización en operaciones básicas de estos números, así que los propósitos son:

- Reconocer la importancia los números fraccionarios como un complemento de los números naturales para representar particiones.
- Identificar los algoritmos de suma y multiplicación entre los números fraccionarios, así como los conceptos de equivalencia de fracciones y resolver con ellos alguna situación particular.

Luego de presentar los contenidos, al final del documento la actividad pretende mejorar los siguientes desempeños:

- Reconocimiento de números fraccionarios y su interpretación.
- Planteamiento y solución a situaciones o problemas en los que se apliquen los números fraccionarios y sus operaciones.

A continuación el documento ampliara en una primera parte sobre la interpretación de las fracciones, las fracciones equivalentes y sus herramientas de manejo; en una segunda parte, se ampliará las operaciones básicas como la suma, producto y división haciendo particular énfasis en la suma de fracciones con diferente denominador. Al final de este documento, la sección de ejercicios permitira evaluar los desempeños mencionados.

2. Interpretación de las fracciones

2.1. Concepto

Ya que una fracción representa la partición o división de algo, ese algo es comúnmente llamado la unidad o el todo. Como la unidad es dividida en particiones, se define en modo estricto que *una fracción es el cociente de dos números* [6, 10]. Es decir, una fracción es una **división** como tal, pero sin realizar. Así que,

$$\frac{1}{4} \qquad \text{Se lee un cuarto, es también} \qquad 1 \div 4$$

2.2. Valor de una fracción

Cómo la fracción es una división sin resolver, el modo intuitivo (sin hacer cuentas) de resolver la operación y hallar su valor es comparar el numerador con el denominador [9]. De está comparación pueden surgir 3 valores o clases de fracciones que se mencionaran con ejemplos.

Ejemplo 1. Fracción con valor inferior a 1. Representar la fracción $\frac{3}{5}$.

- Cuando el numerador es más pequeño que el denominador el valor de la fracción se interpreta menor que 1; esta fracción corresponde a una sola unidad donde "el todo" (ver el denominador) se ha partido en 5 partes y se han "tomado" (ver el numerador) 3 partes. Fracciones con valor inferior a 1 se llaman **fracciones propias** [8, 7]. La figura 2 muestra el dibujo de la fracción.

Figura 2: Representación de $\frac{3}{5}$; leáse tres quintos.

Ejemplo 2. Fracción con valor igual a 1. Representar la fracción $\frac{3}{3}$.

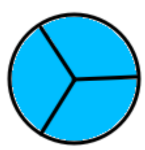

Figura 3: Representación de $\frac{3}{3}$; leáse tres tercios.

- Cuando el numerador es igual al denominador el valor de la fracción se interpreta igual a 1. Esta fracción corresponde a una sola unidad donde "el todo" se ha partido en 3 partes (como indica el denominador) y se han "tomado" todas las 3 partes (ver el numerador). Fracciones con valor igual a 1 se llaman **fracción unidad** [8]. La figura 3 representa esta fracción.

Ejemplo 3. Fracción con valor superior a 1. Representar la fracción $\frac{7}{4}$.

- Cuando el numerador es más grande que el denominador el valor de la fracción se interpreta mayor que 1; esta fracción corresponde a a varias unidades o "todos". La partición de cada unidad la indica el denominador, o sea cada unidad se divide en 4 partes. El numerador indica la cantidad de particiones que se "toman", o sea 7. Pero se toman de 4 en 4 hasta completar 7, es decir como 7=4+3. Casualmente, la cantidad de sumandos en la anterior suma muestra también la cantidad de unidades de la fracción, o sea: 2. Finalmente en una unidad se toman 4 particiones y en la otra 3 particiones como lo indica la figura 4. Fracciones con valor superior a 1 se llaman **fracciones impropias** [8, 7].

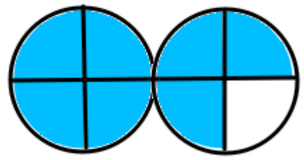

Figura 4: Representación de $\frac{7}{4}$; cada unidad se ha dividido en 4 partes iguales, de las cuales se toman 7 (leáse siete cuartos).

Ejemplo 4. Representar la fracción $\frac{14}{3}$.

- Se trata de una fracción impropia pues el numerador es más grande que el denominador. Inmediatamente se interpreta que tiene varias unidades, cada una dividida por 3 particiones como indica el denominador. Para saber cuantas unidades posee esta fracción, el numerador se descompone en una suma de 3 en 3 hasta completar 14, es decir: 14=3+3+3+3+2. Como esta suma tiene 5 sumandos, quiere decir que hay 5 unidades donde 4 se toman completas y la última se toman 2 particiones. La representación se muestra en la figura 5.

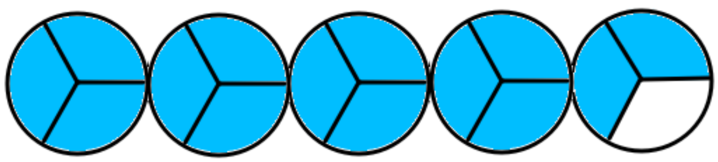

Figura 5: Representación de $\frac{14}{3}$.

Puesto que una fracción es una división que no se hace, la utilidad del valor de una fracción permite dar una primera idea acerca del tamaño de una fracción. Con el conocimiento del valor de una fracción permite sentar las bases de otras fracciones conocidas como *equivalentes* y de las *operaciones entre fracciones*.

3. Fracciones equivalentes

3.1. ¿Qué son?

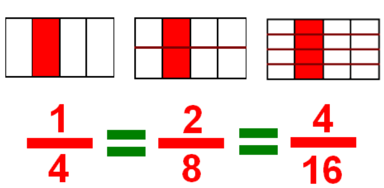

Figura 6: Representación de varias fracciones: numéricamente son diferentes pero gráficamente son semejantes.

En algunas fracciones presentan la cualidad que se pueden representar con la misma forma y tamaño pero con diferentes particiones o divisiones. En la figura 6 cada rectángulo es de igual tamaño y de hecho las porciones de color rojo también son iguales. Sin embargo, la diferencia en cada rectángulo está en las divisiones hechas en su interior. Fracciones que cumplen estas características se llaman *equivalentes*. Estas son fracciones que representan una misma porción o valor, pero se escriben con diferentes números. Para escribir la equivalencia de fracciones se usa un signo igual (=, de color verde) entre ellas [1].
Para comprobar la equivalencia de fracciones, habitualmente no se recurre a un dibujo y sus particiones; en su lugar, se recurre a el **producto en cruz** que consiste en multiplicar el numerador de cada una por el denominador de la otra y comprobar si los resultados son iguales.

Ejemplo 5. Comprobar que las fracciones de la figura 6 son equivalentes.

1) El producto en cruz se usa rápidamente pintando un par de flechas en diagonal y haciendo la multiplicación

$$\frac{1}{4} \quad \frac{2}{8}$$

$$1 \times 8 = 8$$

$$4 \times 2 = 8$$

Como las multiplicaciones tiene igual resultado, las fracciones son equivalentes y sin hacer un dibujo!

2) Haciendo lo mismo con la primera y tercera

$$\frac{4}{16} \quad \frac{1}{4}$$

$$4 \times 4 = 16$$

$$16 \times 1 = 16$$

Las fracciones son equivalentes.

3) Por último,

$$\frac{2}{8} \quad \frac{4}{16}$$

$$2 \times 16 = 32$$

$$8 \times 4 = 32$$

Las fracciones son equivalentes.

Ejemplo 6. Verificar que las fracciones $\frac{13}{5}$ y $\frac{7}{11}$ son o no son equivalentes.

- Usando el producto cruz y haciendo las multiplicaciones se observa que los resultados son diferentes, por tanto **las fracciones NO son equivalentes**.

$$\frac{13}{5} \quad \frac{7}{11}$$

$$13 \times 11 = 143$$

$$5 \times 7 = 35$$

Los ejemplos anteriores muestran como verificar si dos o más fracciones son equivalentes. Las siguientes subsecciones muestra como construir fracciones equivalentes.

3.2. Fracciones equivalentes por amplificación

Es aquel modo en donde el numerador y denominador de una fracción original *se multiplican por el mismo número*; la fracción resultante es más grande o amplificada [1, 2].

Ejemplo 7. Amplificar 7 veces las siguientes fracciones: $\frac{15}{2}$, $\frac{13}{20}$.

1) Según lo mencionado se efectúa así:

$$\frac{15}{2} \begin{array}{c} \to \\ \to \end{array} \frac{15 \times 7}{2 \times 7} = \frac{105}{14}$$

2) Multiplicando arriba y abajo por 7, la fracción amplificada es:

$$\frac{13}{20} \begin{array}{c} \to \\ \to \end{array} \frac{13 \times 7}{20 \times 7} = \frac{91}{140}$$

Cuando se menciona la amplificación de una fracción, el paso intermedio de las multiplicaciones no se escribe, sino que las multiplicaciones se realizan mentalmente. Así, la fracción amplificada 5 veces de $\frac{3}{20}$ es $\frac{15}{100}$.

3.3. Fracciones equivalentes por simplificación

Es aquel modo en donde el numerador y denominador de una fracción original *se dividen por el mismo número*[1]; la fracción resultante es más pequeña o simplificada [1, 2]. El proceso de simplificación de la fracción original termina hasta que no haya un divisor común para numerador y denominador; a la fracción simplificada se llama *fracción irreducible*. Para esta clase de fracciones equivalentes es necesario los conocimientos mencionados en la **Teoría de números** acerca de las reglas elementales de divisibilidad (ver guía en su página 2).

[1] Estas divisiones no se realizan con cualquier número; se hacen con números que sean divisores, esto es con números que dejen una división exacta

Ejemplo 8. Simplificar la fracción $\frac{24}{36}$ hasta su fracción irreducible.

- Para realizar la simplificación primero se busca un número divisor igual o común a 24 y 36; casi siempre se busca el más pequeño y como ambos son números pares se divide por 2; la primera simplificación es $\frac{12}{18}$. De nuevo 12 y 18 son números pares, luego se divide otra vez por 2; la segunda simplificación es $\frac{6}{9}$. Por último, como 6 y 9 son múltiplos de 3 ambos se pueden dividir por 3, dejando la fracción irreducible $\frac{2}{3}$ ya que no hay un divisor común para 2 y 3. Lo explicado anteriormente, se redacta de este modo:

$$\frac{24}{36}\begin{matrix}\to\\\to\end{matrix}\frac{24\div 2}{36\div 2}=\frac{12}{18}\begin{matrix}\to\\\to\end{matrix}\frac{12\div 2}{18\div 2}=\frac{6}{9}\begin{matrix}\to\\\to\end{matrix}\frac{6\div 3}{9\div 3}=\frac{2}{3}$$

En la simplificación, el paso intermedio de las divisiones no se escribe. En su lugar, cada simplificación se pone arriba y abajo tachando cada simplificación hasta llegar a la fracción irreducible, como se muestra aquí:

$$\begin{array}{ll} & 2\\ \text{tercera simplificación, } \div 3 & \cancel{6}\\ \text{segunda simplificación, } \div 2 & \cancel{12}\\ \text{primera simplificación, } \div 2 & \cancel{24}\\ \hline \text{primera simplificación, } \div 2 & \cancel{36}\\ \text{segunda simplificación, } \div 2 & \cancel{18}\\ \text{tercera simplificación, } \div 3 & \cancel{9}\\ & 3\end{array} = \frac{2}{3}$$

Ejemplo 9. Simplificar la fracción $\frac{252}{3600}$ hasta su fracción equivalente irreducible.

- Cuando una fracción tienen números grandes como la fracción propia de este ejemplo, realizar divisiones y tachones hacia arriba y hacia abajo puede llevar a cometer algún error en la simplificación. Como alternativa, se recurre a la Teoría de Números para descomponer los números y efectuar los tachones de otro modo [4]:

  1. Realizar la descomposición en factores primos del numerador y denominador.
  2. Escribir la fracción en forma de multiplicaciones y tachar factores que sean iguales tanto en el numerador como en el denominador.
  3. La fracción irreducible es la multiplicación de factores sin tachar.

  Atendiendo los pasos mencionados, descomponiendo cada número de la fracción [3]

$$\begin{array}{r|l} 252 & 2\\ 126 & 2\\ 63 & 3\\ 21 & 3\\ 7 & 7\\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3600 & 2\\ 1800 & 2\\ 900 & 2\\ 450 & 2\\ 225 & 3\\ 75 & 3\\ 25 & 5\\ 5 & 5\\ 1 & \end{array}$$

Ahora, escribiendo la fracción como multiplicaciones de factores primos para luego tachar números comunes arriba y abajo

$$\frac{252}{3600}=\frac{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{3}\times 7}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times 2\times 2\times\cancel{3}\times\cancel{3}\times 5\times 5}=\frac{7}{2\times 2\times 5\times 5}=\frac{7}{100}$$

En el numerador quedo 7 y en el denominador $2\times 2\times 5\times 5=100$. Finalmente, la fracción equivalente irreducible es $\frac{7}{100}$ (se lee siete cienavos).

Al aplicar esta alternativa hay que tener cuidado con los factores comunes a tachar, pues sólo se tachan los números que se encuentren a la vez en el numerador y en el denominador.

4. Actividad Número 10

Resolver cada ejercicio en el cuaderno, poniendo especial atención a la escritura y a los procedimientos.

1. En cada enunciado, comprender el contexto o situación y expresar el resultado mediante el uso de números fraccionarios.

   a) Si una familia está compuesta por 3 hombres y 4 mujeres, ¿Cuál es la fracción que representa el número de mujeres de la familia? ¿Cuál es la fracción que representa el número de hombres de la familia?

b) ¿Que fracción del día ha transcurrido cuando son las 5 de la tarde? Un día tiene 24 horas.

c) Para una reunión familiar se han comprado dos cajas de milhojas como postre de acompañamiento; cada caja trae 5 porciones. Si se consumieron 7 porciones, ¿Que fracción se consumió según el contenido por caja?

2. Representar (dibujo) y clasificar cada fracción según su valor (propia, impropia, unidad): a) $\frac{23}{8}$ b) $\frac{7}{7}$, c) $\frac{7}{10}$.

3. Escribir dos fracciones equivalentes a $\frac{24}{64}$ pero que tengan numerador menor. Ayuda: usar simplificación.

4. Simplificar la fracción $\frac{256}{712}$ a su forma irreducible.

Nota: La sección referencias contiene fuentes de consulta bibliográficas si se tiene posibilidad de acceder a textos o navegación en la red. Estas aparecen en el contenido de este texto con paréntesis cuadrados [. . .].

Referencias

[1] *Fracciones equivalentes: ejemplos y ejercicios resueltos*, https://pdfz.blogspot.com/2019/10/fracciones-equivalentes-ejemplos-y.html, 2019, Consultado 3 oct 2020.

[2] Aprendópolis, *Cómo obtener fracciones equivalentes*, https://www.youtube.com/watch?v=u5KN0cfShZo, 2013, Consultado 3 oct 2020.

[3] Daniel López Avellaneda, *Factorizar un número*, https://matematicasies.com/Factorizar-un-numero, 2020, Consultado 4 oct 2020.

[4] Ines Blanco, *Simplificar fracciones: aprende cómo hacerlo con ejemplos*, https://www.smartick.es/blog/matematicas/fracciones/simplificar-fracciones/, Consultado 4 oct 2020.

[5] Matematicas facilysencillo, *¿que es una fracción? fácil y sencillo*, https://www.youtube.com/watch?v=fyCVvhBHFzk, 2016, Consultado 14 sep 2020.

[6] Matemáticas fáciles, *Concepto de fracción*, https://blogs.ua.es/matesfacil/secundaria-numeros-operaciones/fracciones/concepto-de-fraccion/, 2018, Consultado 23 sep 2020.

[7] quidimat Matemática Guillermo, *Fracciones propias e impropias representación con chocolate*, https://www.youtube.com/watch?v=hYHAARnqYcM, 2016, Consultado 30 sep 2020.

[8] Laboratorio Pedagógico, *Clasificación de fracciones*, https://www.youtube.com/watch?v=u7Tn1UewjZg, 2012, Consultado 30 sep 2020.

[9] Jesús Ramos and Ludwig Ortiz, *Supermat 6*, Voluntad, 2000.

[10] Veery TV, *Las fracciones: ¿que es una fracción y sus partes?*, https://www.youtube.com/watch?v=u7Tn1UewjZg, 2016, Consultado 23 sep 2020.