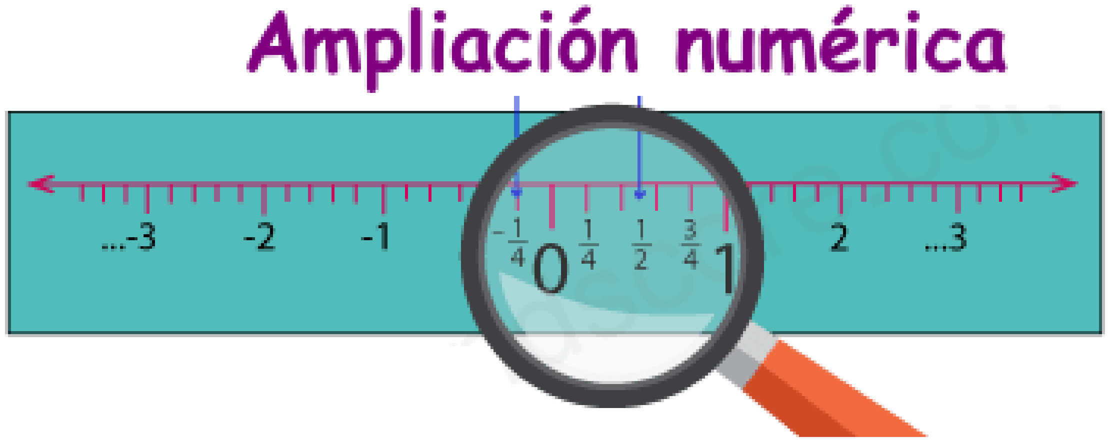
Números Racionales y sus usos



Matemáticas - Grado 8
2022

Contenidos

i. Introducción: utilidad de los números racionales

ii. Conceptos números racionales

iii. Generalidades números racionales

iv. Los números decimales: clasificación

v. Conversión entre racionales

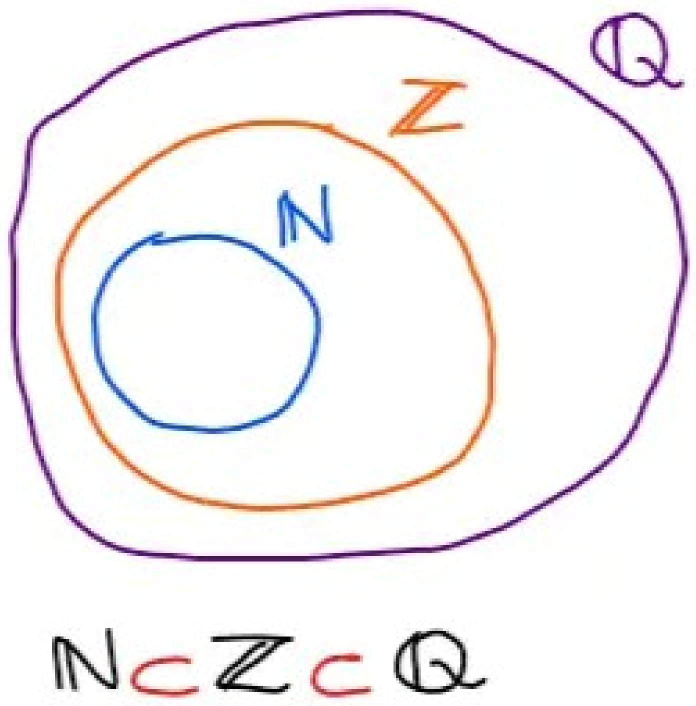
vi. Comparación entre racionales

vii. Recta numérica

viii. Operaciones con racionales decimales

ix. Operaciones con racionales fraccionarios

x. Actividad(es)



Los números decimales: ¿Por qué son útiles?

Corredores que participaron en la final 100 metros planos en los Juegos Olímpicos de Tokyo 2020.

➢ Deporte: atletismo, 100 metros planos

Posición	Atleta	País	Tiempo
1	Lamont Jacobs	Italia	9.80 segundos
2	Fred Kerley	Estados Unidos	9.84 segundos
3	Andre de Grasse	Canadá	9.89 segundos
4	Akani Simbine	Sudáfrica	9.93 segundos
5	Ronnie Baker	Estados Unidos	9.95 segundos
6	Bingtian Su	China	9.98 segundos
-	Enoch Adegoke	Nigeria	No finalizó
-	Zharnel Hughes	Gran Bretaña	Descalificado

Las actuales exigencias deportivas en medidas de tiempo requieren diferenciar tiempos cercanos muy estrechos.

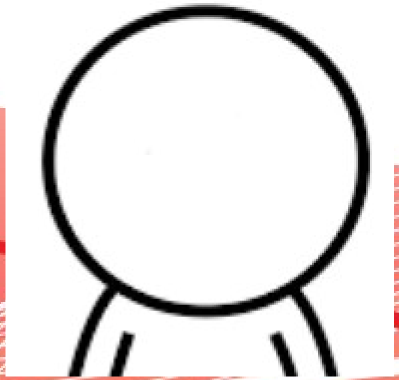
Los números decimales: ¿Por qué son útiles?

- <u>Sistema GPS: programación y eficiencia</u>

Las estimaciones numéricas de georreferenciación requeridos por dispositivos celulares y de escritorio son desarrollados para ser eficientes y rápidos. Ejemplo. Ubicación geográfica del Colegio.

Lat.: 4°33'24"
Long.: -74°5'38"

Así lo ves tu....



Lat.: 4.5565980369

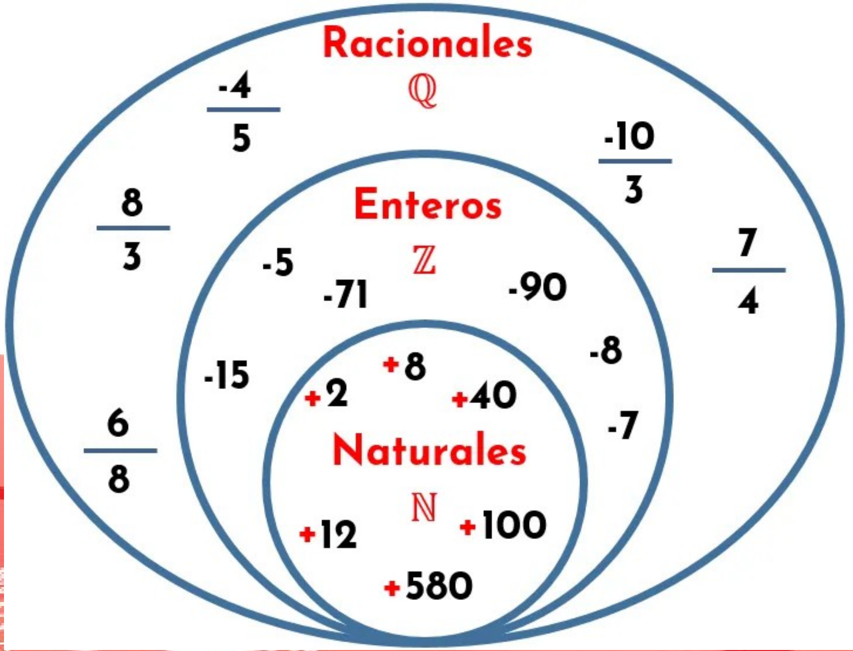
Long.: -74.0939724644

Así lo ve él ...

Los números racionales: conceptos

- La teoría: ¿Qué son?

Es el conjunto de todas las fracciones irreducibles (que están simplificadas) y equivalentes positivas y negativas.



- La práctica: ¿Cuáles son?

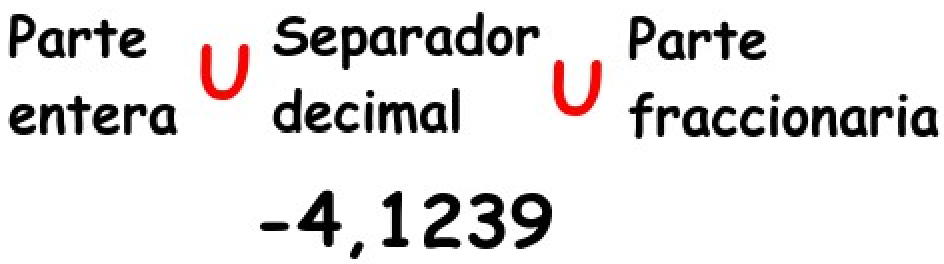
Son todos los números que pueden representarse como el cociente de dos números enteros. El cociente puede ser...

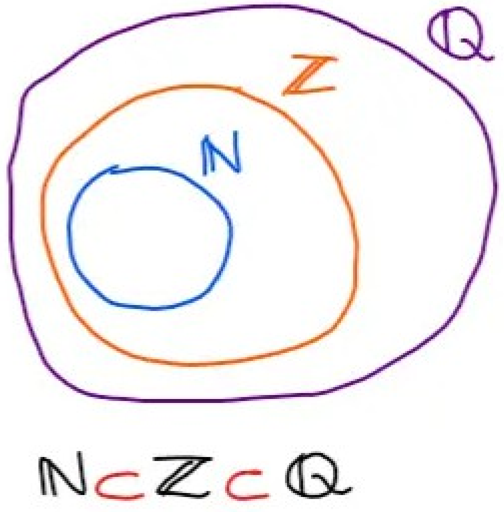
$$\frac{9}{5} \text{ es lo mismo que } 9 \div 5$$

$$\begin{array}{r|l} 9 & 5 \\ \hline 4\,0 & 1{,}8 \\ 0 & \end{array}$$

Los números racionales: generalidades

- Para tener en cuenta:
- Racional fraccionario. Escritos en forma fraccionaria. Muestra una división incompleta. Clases de fracciones: propias, impropias, mixtas.
- Racional decimal (número decimal). Muestra una división completa. Consta de





- Todo racional fraccionario se puede escribir como racional decimal usando la división (lo contrario..., más adelante).

Los números decimales: clases

- Según la clase de fraccionario, existe una clase de decimal.
- En resumen:

Número decimal
- Racional (Fracción)
  - Exacto
    Ej. 5,21
  - Periódico
    - Puro
      Ej. 5, 11111...
    - Mixto
      Ej. 5,211111...

Conversiones entre racionales

$$\frac{1}{8} = 0,125$$

$$0.354 = \frac{354}{1000} = \frac{177}{500}$$

- Habitualmente se manejan fórmulas o “trucos de memoria” (nemotecnia) para facilitar la conversión.
- En general, la estrategia consiste en ajustar la fracción y luego realizar simplificación.
- Uso separador decimal. Depende del contexto o del país. Para Colombia se recomienda la coma ",".

Conversiones entre racionales: 1. fracción a decimal

- Basta con realizar la división entre numerador y denominador de la fracción (Si! Dejar la pereza y *realizarla*).
- El algoritmo concluye cuando el residuo es cero o las cifras del cociente se repiten de nuevo.
- Ver ejemplo,

$$\frac{1072}{495} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l|l}
1072 & 495 \\ \cline{2-2}
\;\;820 & 2{,}165656 \\
\;\;3250 & \\
\;\;\;\;2800 & \\
\;\;\;\;\;\;3250 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;2800 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;3250 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;280 &
\end{array}$$

$$1072 \div 495 = 2{,}1\overline{65}$$

Imagen tomada de *Convertir fracciones en decimales.*

Conversiones entre racionales:
2. decimal a fracción

- Basta con poner mucha atención… a los siguientes algoritmos nemotécnicos.
- Requiere conocimiento de la clase de decimal: exacto, periodico, periodico no-puro.

- A continuación se menciona algoritmo nemotécnico con ejemplos.

Imagen tomada de *Convertir decimales en fracciones.*

Conversiones entre racionales:
2. decimal a fracción

- Para decimales exactos. Regla:

$$\frac{\text{Numero sin coma}}{\text{1 y tantos 0 como cifras decimales}}$$

- Para decimales periodicos. Regla:

$$\frac{\text{Parte entera y periodo-parte entera}}{\text{Tantos 9 como cifras del periodo}}$$

- Para decimales periodicos no-puros (mixtos). Regla:

$$\frac{\text{Parte entera, anteperiodo y periodo-parte entera, anteperiodo}}{\text{Tantos 9 cifras del periodo, Tantos 0 cifras anteperiodo}}$$

- Realizar simplificación si es posible.

Conversiones entre racionales:
2. decimal a fracción

- Para decimales exactos. Ejemplo:

$$0.32 = \frac{32}{100} = \frac{8}{25}$$

- Para decimales periodicos. Ej.:

$$9.\overline{28} = \frac{928 - 9}{99} = \frac{919}{99}$$

- Para decimales periodicos no-puros (mixtos). Ejemplo:

$$4.15\overline{07} = \frac{41507 - 415}{9900} = \frac{41092}{9900}$$

- Realizar simplificación si es posible.

Comparación de racionales

- Para comparar racionales decimales. Se comparan partes enteras: si resultan iguales se empiezan a comparar las cifras decimales siguientes de la misma posición, de izquierda a derecha hasta que una de ellas sea mayor o menor que otra.
- Ejemplo. **9,876** **9,879**

9=9

8=8

7=7

6<9

- Para comparar racionales fraccionarios. Hay diversos modos. i) Convertir a decimal y comparar. ii) Efectuar un producto cruz y comparar sus resultados.
- Ejemplo.

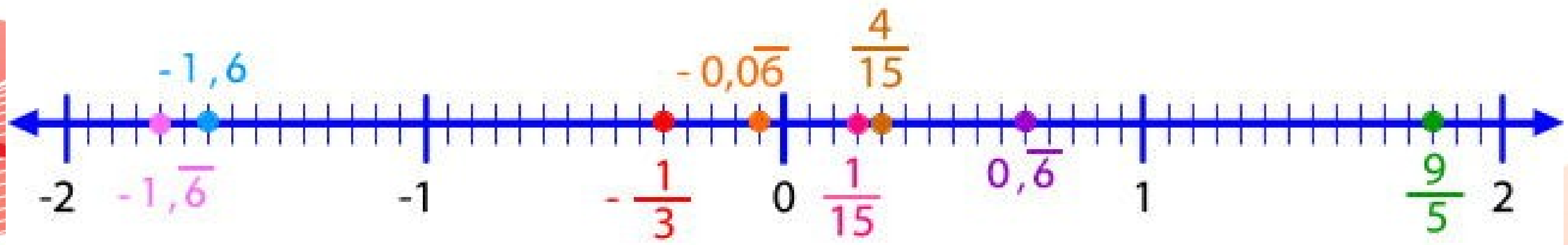
$$\frac{4}{3} \quad \square \quad \frac{33}{25}$$

$$4 \times 25 \quad \square \quad 3 \times 33$$

$$100 \quad > \quad 99$$

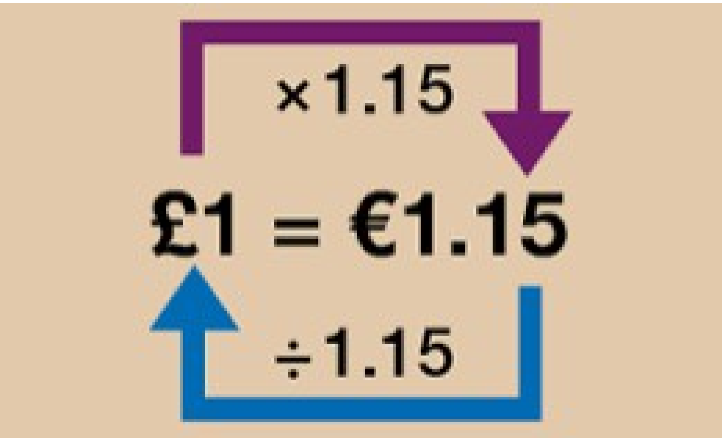
La recta numérica para racionales

- Recta numérica para los racionales. *Cada número racional se puede asociar con un único punto en la recta numérca.*
- Fracciones propias. El número está entre -1 y 1 según el signo. Se divide la unidad en tantas partes como indica el denominador y se toman tantas como indica el numerador.
- Fracciones impropias. Se recomienda convertir a mixta mediante división natural.
- Fracciones mixtas. La parte entera da la ubicación inicial; la parte fraccionaria se ubica como una fracción propia en la unidad contigua (hacia la derecha si es "+"; hacia la izquierda si es "-").
- Ejemplo.



Operaciones con números racionales

- Operaciones básicas. Los algoritmos para +, -, x, ÷ dependen de la clase de racional.
- Entre racionales decimales. El manejo está muy relacionado con el separador decimal y la cantidad de cifras decimales requeridas del contexto.
- Entre racionales fraccionarios. El manejo está centrado en los "algoritmos clásicos" deducidos desde la recta numérica o procesos geométricos.
- Situaciones de uso:



Racionales decimales: adición/sustracción

- Números alineados por el separador decimal. En ocasiones, a un número decimal se le agregan ceros (resta) hacia la derecha.
- La suma (resta) sigue la misma regla de suma (resta) de números enteros.
- El resultado acumula cifras decimales de aquel número con más cifras decimales
- Ejemplos.

$71{,}56 + 8{,}4233 =$

$$\begin{array}{r} 71{,}56 \\ +\ \ 8{,}4233 \\ \hline 79{,}9833 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8{,}4233 \\ +\ 71{,}56 \\ \hline 79{,}9833 \end{array}$$

$71{,}56 + 8{,}4233 = 79{,}9833$

$0{,}888 + (-1) =$

$$\begin{array}{r} 1{,}000 \\ -\ 0{,}888 \\ \hline 0{,}112 \end{array}$$

Se hace una resta pero el resultado es negativo. Por qué?

$0{,}888 + (-1) = \ -0{,}112$

Racionales decimales: producto

- Es similar al producto de números naturales.
- El separador decimal del resultado es ubicado hacia la izquierda según la cantidad total de cifras decimales de los factores.
- El producto sigue la misma regla del producto de signos de los enteros.
- Ejemplos.

$$0{,}0183 \times 0{,}31 =$$

$$\begin{array}{r} 0{,}0\,1\,8\,3 \\ \times \quad 0{,}3\,1 \\ \hline 1\,8\,3 \\ 0\,0\,5\,4\,9 \\ 0\,0\,0 \\ \hline 0{,}0\,0\,5\,6\,7\,3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}0\,1\,8\,3 \\ \times \quad 0{,}3\,1 \\ \hline 1\,8\,3 \\ 0\,0\,5\,4\,9 \\ \hline 0{,}0\,0\,5\,6\,7\,3 \end{array}$$

$$3.2 \times 1.04 =$$

$$\begin{array}{r} 3.2 \\ \times \quad 1.0\,4 \\ \hline 1\,2\,8 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 3\,2 \\ \hline 3.3\,2\,8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3.2 \\ \times \quad 1.0\,4 \\ \hline 1\,2\,8 \\ 3\,2\,\cdot \\ \hline 3.3\,2\,8 \end{array}$$

Racionales decimales: división

- La división se transforma en otra equivalente, multiplicando dividendo y divisor por múltiplos de 10 que tengan tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor.
- La división sigue la misma regla de la división de signos de los enteros.
- Ejemplos.

$$\begin{array}{r|l} 185{,}4 & 8{,}32 \\ \hline & \end{array} \quad \times 100 \quad \begin{array}{r|l} 18540 & 832 \\ \hline 1900 & 22{,}28 \\ 2360 & \\ 6960 & \\ 304 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 18 & 0{,}45 \\ \hline & \end{array} \quad \times 100 \quad \begin{array}{r|l} 1800 & 45 \\ \hline 180 & 40 \\ 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 8{,}12 & 0{,}0004 \\ \hline & \end{array} \quad \times 10000 \quad \begin{array}{r|l} 81200 & 4 \\ \hline 012 & 20300 \\ 0 & \end{array}$$

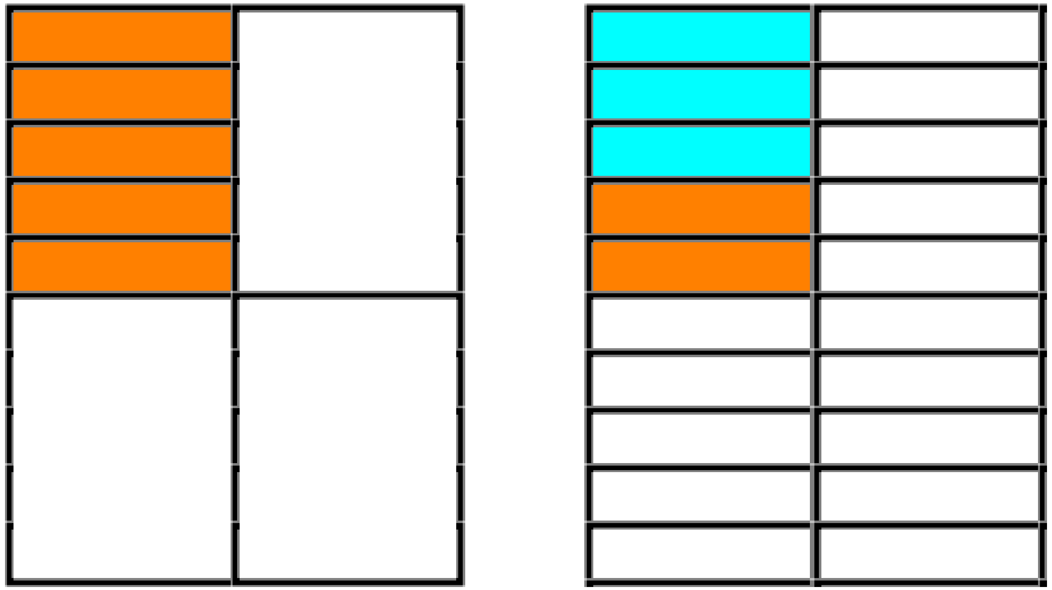
Racionales fraccionarios: producto

- Consiste en realizar el producto de numeradores y luego el producto de denominadores; si es posible, simplificar el resultado. En general,

$$\frac{a}{b} \times \frac{h}{k} \times \frac{p}{q} = \frac{a \cdot h \cdot p}{b \cdot k \cdot q}$$

- La multiplicación sigue la misma regla del producto de signos de los enteros.
- Si el racional no tiene denominador, se asume que este vale 1.
- Ejemplo. Determinar los ¾ de los 2/7 de los 7/5 de -150.

De $\frac{1}{4}$ tomar sus $\frac{3}{5} \rightarrow \frac{3}{20}$



$$\frac{1}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{7} \times \frac{7}{5} \times \left(-\frac{150}{1}\right) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot (-150)}{4 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 1} = -\frac{6300}{140} = -45$$

Racionales fraccionarios: división

- Consiste en realizar el producto de la primera fracción con la segunda fracción invertida; si es posible, simplificar el resultado. En general,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$\frac{3}{20} \div \frac{3}{5} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{3}{5} \times \frac{\square}{\square} = \frac{3}{20}$$

$$\frac{\square}{\square} = \frac{3}{20} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{60} \underbrace{\longrightarrow}_{\text{simplificar}} \frac{1}{4}$$

- La división sigue la misma regla de la división de signos de los enteros.
- Si el racional no tiene denominador, se asume que este vale 1.

$$\frac{3}{20} \div \frac{3}{5} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{4}$$

- Ejemplo. El perímetro de un cuadrado es de 50/35 cm. Hallar la medida del lado.

$$\frac{50}{35} \div \frac{4}{1} = \frac{50}{35} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{14}\ \text{cm}$$

Racionales fraccionarios: adición/sustracción

Antes de +/- fracciones… unos conceptos:

- Fracciones homógeneas: fracciones con igual denominador.
- Fracciones heterógeneas: fracciones con diferente denominador.
- En lo posible, simplificar el resultado.
- Aplican las mismas reglas para la suma/resta de enteros.

Operación con frac. Homógeneas

- Se suman/restan los numeradores de las fracciones y se deja el denominador común.

$$\frac{7}{12} - \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Operación con frac. Heterógeneas

- Paso 1. Obtener fracciones equivalentes con un denominador común.
- Paso 2. Operar las fracciones homógeneas

$$\frac{2}{7} + \frac{1}{3} = \frac{2 \times 3}{7 \times 3} + \frac{1 \times 7}{3 \times 7} = \frac{6}{21} + \frac{7}{21} = \frac{13}{21}$$

Racionales fraccionarios: adición/sustracción

Técnicas para +/- en Fracciones Heterógeneas

1. Para dos fracciones

- Únicamente para dos fracciones y con números "sencillos".
- Requiere mayor atención con racionales negativos.
- *Desventajas*: Las multiplicaciones amplifican los resultados parciales; en algunas situaciones el resultado es "sobre-amplificado" por lo que es necesario simplificarlo.
- Ejemplo. Resolver 5/2 + 21/4

$$\frac{5}{2}+\frac{21}{4}=\frac{5}{2}+\frac{21}{4}$$

Cada línea es un producto!

$$=\frac{\boxed{(5)(4)}+\boxed{(2)(21)}}{\boxed{(2)(4)}}$$

$$=\frac{20+42}{8}=\frac{62}{8}$$

Racionales fraccionarios: adición/sustracción

Técnicas para +/- en Fracciones Heterógeneas

2. Para dos o más fracciones

- Requiere dominio del mínimo común múltimo (m.c.m) de un conjunto de números.
- *Paso 1*. Hallar m.c.m. de los denominadores.
- *Paso 2*. Amplificar cada fracción de modo que su denominador sea el m.c.m..
- *Paso 3*. Operar las fracciones homogéneas resultantes.
- Ejemplo. Resolver -17/315+2/45
- Ejemplo. Comprobar que el resultado de -1+8/5-13/8 tiene parte entera -1 y parte fraccionaria de -11/40.

Racionales fraccionarios: adición/sustracción

Técnicas para +/- en Fracciones Heterógeneas

Paso 1.

$$\begin{array}{rr|l}
315 & 45 & 3 \rightarrow 3 \text{ porque } 315 \div 3 = 105 \quad \text{y porque } 45 \div 3 = 15 \\
105 & 15 & 3 \rightarrow 3 \text{ porque } 105 \div 3 = 35 \quad \text{y porque } 15 \div 3 = 5 \\
35 & 5 & 5 \rightarrow 5 \text{ porque } 35 \div 5 = 7 \quad \text{y porque } 5 \div 5 = 1 \\
7 & 1 & 7 \rightarrow 7 \text{ porque } 7 \div 7 = 1 \\
1 & 1 &
\end{array}$$

$$m.c.m.(315, 45) = 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 315$$

Paso 2.

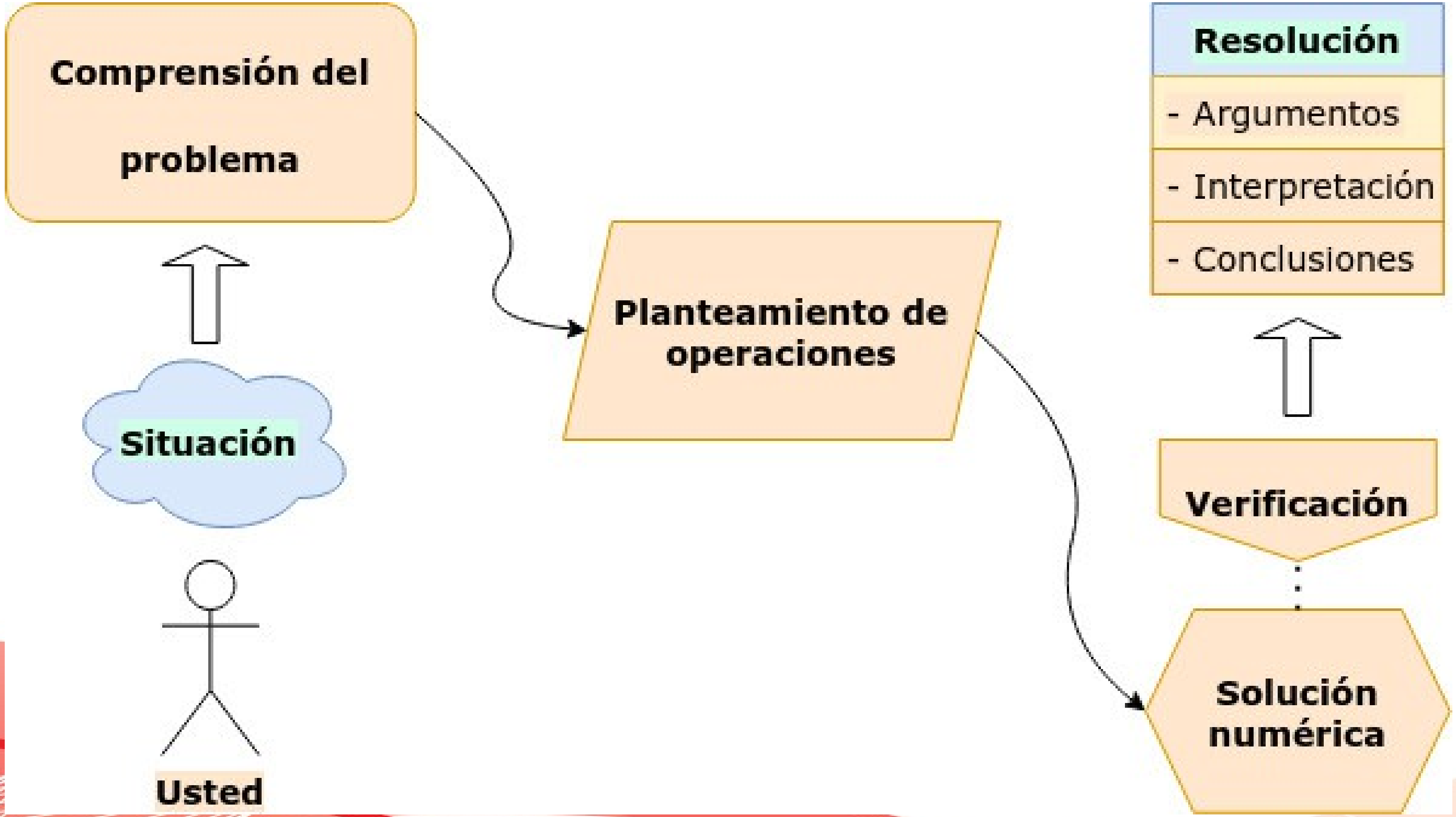
$$\text{Para } \frac{17}{315} \rightarrow 315 \div 315 = 1, \text{ amplificar por } 1 \rightarrow \frac{17}{315}\frac{\times 1}{\times 1} = \frac{17}{315}$$

$$\text{Para } \frac{2}{45} \rightarrow 315 \div 45 = 7, \text{ amplificar por } 7 \rightarrow \frac{2}{45}\frac{\times 7}{\times 7} = \frac{14}{315}$$

Paso 3.

$$-\frac{17}{315} + \frac{2}{45} = -\frac{17}{315} + \frac{14}{315} = -\frac{3}{315} = -\frac{1}{105}$$

Usando racionales: resolución de problemas



Actividad 3

i. Pregunta introducción.

ii. Escribir la hora actual en notación fraccionaria impropia, mixta y decimal. Esto es, la parte entera es la hora y la parte fraccionaria es la fracción de hora.

iii. Convertir a decimal cada fracción y clasificar el decimal: a) 43/6 b) 2/11 c) 1/8 d) 1072/495

iv. Las fracciones con denominador 7, se pueden considerar como un racional. Justifque con uno o varios ejemplos.

- Procedimientos de división realizados en el cuaderno tendran valoración considerable.

Actividad 4

i. Convertir a racional fraccionario los siguientes decimales:

a) 1,333... b) 1,75 c) 0,123123123... d) 4,3858585...

ii. Esteban y su compañero necesitan realizar orificios con taladro sobre láminas de madeflex para una instalación de gas. Para ello, su compañero de trabajo le solicita unas brocas: "*Socio: alcanceme la de 0,125 y la de 0,16 pulgadas para ensayar*..."; Esteban observa en el manual del taladro la tabla adjunta. ¿Qué brocas le debe entregar a su compañero?

Nº broca	1	1,5	2	3,2	4
Diámetro (pulgadas)	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{25}$

- Procedimientos de división realizados en el cuaderno tendran valoración considerable.

Actividad 5

i. El número π (pi) de la geometría circular es un número que ha tenido diferentes aproximaciones como racional de acuerdo a la evolución histórica de las matemáticas. La cultura mesopotámica (1900 a.e.c.) lo expreso como 22/7; la egipcia (1800 a.e.c.) como 256/81; en el siglo II e.c., Claudio Ptolomeo (cultura griega) lo aproxima a 377/120; el matemático chino Zu Chongzhi (siglo V e.c.) como 355/113 siendo esta una de las mejores. Ordenar cada aproximación (fracción) de mayor a menor según la cultura.

ii. Ubicar en la recta numérica:

a) -13/5 b) -2/7 c) -0,8 d) -5,999...

Actividad 7

i. Un camión estando vacío, pesa 5220 kg. Si es cargado con 4 cajas que pesan 238.52 kg, 558.2 kg, 110 kg y 772.8 kg a) ¿Cuál es la carga neta? b) ¿Cuál es el peso total del camión?

ii. ¿Qué número hay que restar a la suma de 128.37+5.13 para que la diferencia sea 67.5?

iii. Resolver: (-5.38+4.21)x0.03

iv. Un obrero gana 32.25 USD por hora y trabaja 8.5 horas diarias ¿Cuánto gana en una semana de 6 días laborales?

Actividad 8

El reencauche de llantas consiste en retirar la banda de rodamiento de las llantas gastadas para colocarles una nueva que les permita seguir siendo útiles. Por supuesto se asume que una llanta tiene forma circular, siendo la más común de diámetro de 17 pulgadas. A partir de esta información resolver:

a) Si una pulgada equivale a 2.54 cm, hallar el radio de la llanta en centímetros.

b) Hallar el perímetro de la llanta, asumiendo pi=3.14.

c) ¿Qué cantidad banda de rodamiento se requiere para reencauchar las 4 llantas de un automóvil? Exprese el resultado en metros con dos cifras decimales (1m tiene 100 cm).

d) Comercialmente las bandas de rodamiento se adquieren por metros. ¿Bastarán 6 metros para reencauchar las 4 llantas? Use el resultado anterior y especifique cuánto sobra o cuánto falta.

Actividad 9

El precio interno de referencia para la compra de café pergamino seco (tipo exportación) por carga de 125 Kg a la fecha del 4 Abril 2022 es de $2007000, un precio comercial que las cooperativas de caficultores pagan a los productores. A nivel internacional, el precio es manejado en dólares por libra americana (USD/lb), es decir, 1 libra de café se paga 2.30 dólares. A la misma fecha, la tasa de cambio del dólar señalaba que 1 dólar americano (USD) tenía un valor de 3705 pesos colombianos (COP).

En este problema se analizará las ganancias o pérdidas de un caficultor colombiano a causa de la falta de unidad de peso universal o unificado.

Info: <https://federaciondecafeteros.org/>

Actividad 9

a) Si 1 libra americana equivale a 0.454 kg, ¿Cuántas libras americanas tiene una carga de café? Exprese el resultado sin decimales.

b) Según el resultado anterior, ¿Cuál es el precio en dólares de una carga de café?

c) Según el resultado anterior, use la tasa de cambio de USD a COP para hallar el precio externo de la carga de café.

d) Según el resultado anterior, realice la resta Precio interno – Precio externo. Si el resultado es positivo indica ganancia. ¿Ud. qué opina?

Actividad 10

Para esta actividad el alumno debe verificar su nombre con la lista de asistencia.

1) Hallar los 5/8 de los 5/16 de los 5/64 de la cantidad de letras de su nombre.

2) Construir las siguientes razones:

   a) vocales de su nombre / total letras de su nombre

   b) consonantes de su nombre / total letras de su nombre

3) Multiplicar las fracciones del punto 2.

4) Dividir la primera razón entre la segunda.

No simplificar los resultados.

Actividad 11

1) Resolver:

$$-\frac{3}{4} - 4\frac{3}{4} - \frac{11}{4}$$

2) Resolver:

$$5\frac{3}{5} - 12\frac{2}{3}$$

3) Resolver usando la técnica del m.c.m.:

$$-\frac{2}{315} + \frac{1}{225}$$

4) En una reunión $\frac{3}{7}$ de las personas son mujeres, $\frac{1}{5}$ son hombres y el resto son niños. ¿Qué fracción del total de personas son niños?

Referencias

- Números racionales
https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_racional

- Conversión de racionales
https://es.calcuworld.com/calculadoras-matematicas/decimales-a-fracciones/
https://es.calcuworld.com/calculadoras-matematicas/fracciones-a-decimales/
https://www.universoformulas.com/matematicas/aritmetica/convertir-decimal-fraccion/

- Ejercicio de práctica
https://es.liveworksheets.com/worksheets/es/Matem%C3%A1ticas/Fracciones_y_n%C3%BAmeros_decimales/Conv

- Representación en la recta de los números racionales
http://clasesmatematicas.blogspot.com/2013/12/representacion-numeros-racionales-recta-numerica.html

- Operaciones con racionales
https://portalacademico.cch.unam.mx/alumno/matematicas1/unidad1/operacionesNumerosRacionales

- Fracción
https://es.wikipedia.org/wiki/Fracci%C3%B3n