

Aplicaciones del límite I: de las tasas de variación a la noción de derivada

Matemáticas

Grado 11

2021

Introducción: un límite importante

El cociente incremental

Una aplicación importante del límite es el **cociente incremental** de una función. Tal límite se puede manifestar así (informal) ...:

$$\text{Cociente incremental} = \lim_{\text{Cambios} \rightarrow 0} \frac{\text{Cambio var. dependiente}}{\text{Cambio var. independiente}}$$

Los “cambios” son simples restas entre valores muy próximos:

$$\text{Cambio} = \text{Valor posterior} - \text{Valor anterior}$$

Introducción: un límite importante

El cociente incremental

Una aplicación importante del límite es el **cociente incremental** de una función. Tal límite se puede manifestar así (informal) ...:

$$\text{Cociente incremental} = \lim_{\text{Cambios} \rightarrow 0} \frac{\text{Cambio var. dependiente}}{\text{Cambio var. independiente}}$$

Los “cambios” son simples restas entre valores muy próximos:

$$\text{Cambio} = \text{Valor posterior} - \text{Valor anterior}$$

Tal límite se puede definir así (formal) [5]:

$$\text{c. i. } f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{ó, c. i. } f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Introducción: Variación del PIB en Colombia

Contexto y definiciones



Figura: *Todo tiempo pasado fue...*

Un breve análisis de nuestra economía Colombiana.

- PIB!? ¿Qué es?
- PIB per cápita!? ¿Qué es?
- ¿Nos afecta?
Comparación regional
- Impacto social:
protestas en Colombia
- Y esto... ¿Cómo se relaciona con el tema?
Tasas de variación PIB \Longleftrightarrow
Cociente incremental

Introducción: Variación del PIB en Colombia

Modelo: PIB en función del tiempo

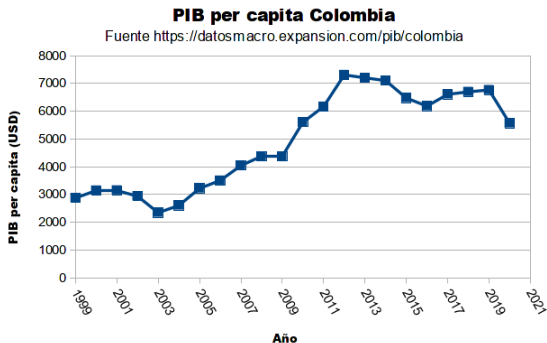


Figura: Función PIB per cápita versus tiempo para Colombia [1].

Variables independiente y dependiente? Dominio? Imagen?

Introducción: Variación del PIB en Colombia

Cociente incremental: tasas de variación

Formas de “observar” los cambios del PIB [3].

- Tasa de variación porcentual,

$$TV = \frac{\text{PIB Año final} - \text{PIB Año inicial}}{\text{PIB Año inicial}} \times 100 \% \quad (1)$$

- Tasa de variación media anual,

$$TVM = \frac{\text{PIB Año final} - \text{PIB Año inicial}}{\text{Año final} - \text{Año inicial}} \quad (2)$$

- Variaciones en detalle (ver ejemplo a continuación).

Introducción: Variación del PIB en Colombia

Cociente incremental: tasas de variación

Como ejemplo, a continuación se muestra TVM anual para el año inicial 2009 y año final 2011. Consultando la tabla del PIB de Colombia de las 2 últimas décadas (ver al final) se tiene,

$$\begin{aligned} \text{TVM} &= \frac{\text{PIB Año 2011} - \text{PIB Año 2009}}{2011 - 2009} \\ &= \frac{6166 - 4371}{2011 - 2009} \\ &= \frac{1795}{2} = 897.5 \end{aligned}$$

El signo de la variación es *positiva*.

Introducción: un límite importante

Cociente incremental: conclusiones

- Las tasas de variación “derivan” del aumento/disminución del PIB.
- Tasas de variación positivas, *indican* un aumento del PIB.
- Tasas de variación negativas, *indican* una disminución del PIB.
- Cuando la tasa cambia de signo, el PIB cambia de comportamiento: sube/baja.

Introducción: un límite importante

Cociente incremental: conclusiones

- Si en el cociente incremental TVM, se toma límite

$$\text{TVM}(\text{instantánea}) = \lim_{x \rightarrow \text{Año inicial}} \frac{\text{PIB}(x) - \text{PIB}(\text{Año inicial})}{x - \text{Año inicial}}$$

se obtiene, la tasa de variación *instantánea*; ella permite *pronosticar* el PIB.

- Si ese límite existe, ese número se denomina *derivada* del PIB en ese Año inicial.

Introducción: un límite importante

Del cociente incremental a noción de derivada

- Como una generalización a cualquier función $f(x)$, si el cociente incremental tomado como límite

$$\text{c. i. } f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe y es único, a ese número se denomina *derivada* de f en ese punto a .

- Usualmente ese límite se representa como $f'(a)$, por tanto [2]:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Actividad 11

Usando la fórmula de *tasa de variación media* (TVM) dada por la fórmula 2 y los registros de la tabla del PIB de Colombia de las 2 últimas décadas ((ver al final)) determinar las TVM entre los respectivos años propuestos y escribir el signo de la variación (positiva o negativa).

- 1 Hallar la TVM anual para el 2001 y 2003.
- 2 Hallar la TVM anual para el 2010 y 2015.

Tabla del PIB de Colombia años 1999 - 2020

Año	PIB per cápita (USD)	Año	PIB per cápita (USD)
2020	5567,24	2009	4371,9
2019	6766,12	2008	4376,62
2018	6698,86	2007	4042,68
2017	6609,18	2006	3503,42
2016	6183,2	2005	3220,22
2015	6475,84	2004	2604,26
2014	7104,78	2003	2343,48
2013	7205,08	2002	2938,2
2012	7308,92	2001	3149,42
2011	6166,68	2000	3145,88
2010	5603,82	1999	2874,48

Fuente **DatosMacro**.

Referencias I



Datosmacro.

Pib de colombia.

<https://datosmacro.expansion.com/pib/colombia>,
2021.

Consultado 11 sep 2021.



Roland Larson and Robert Hostetler.

Cálculo y Geometría Analítica.

McGraw-Hill, third edition, jan 1989.



Funciones matemáticas.

Tasa de variación media e instantánea.

[https://www.funciones.xyz/
tasa-de-variacion-media-e-instantanea/](https://www.funciones.xyz/tasa-de-variacion-media-e-instantanea/), 2021.

Consultado 1 sep 2021.

Referencias II



Wikipedia.

Límite de una función.

https://es.wikipedia.org/wiki/L%C3%ADmite_de_una_funci%C3%B3n, 2021.

Consultado 1 ago 2021.



Doris Álvarez et al.

Proyecto sé Matemáticas 11: libro del estudiante.

Ediciones SM, 2012.