Sólidos: cálculo del volumen y superficie

Geometría - Grado 9

2021

1. Mediciones en sólidos

Para comprender los conceptos de *volumen* y *superficie* en un sólido a continuación se presentan estas situaciones.

- **Medición del volumen.** Usualmente la definición de *volumen* es la capacidad que ocupa un sólido en el espacio tridimensional o de forma equivalente, *volumen* es el número de unidades cúbicas que contiene el sólido [6]. Aunque son definiciones formales, aún son ambiguas porque están soportadas en otros conceptos no intuitivos como "capacidad" y "unidades cúbicas". En realidad, ambos conceptos se fundamentan en una sola acción: "medir o comparar con algo".

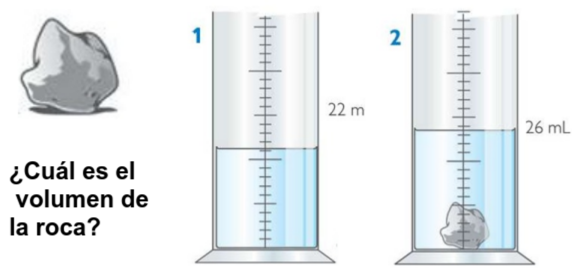


Figura 1: Experimento para comprender el concepto de volumen.

  Como se observa en la figura, para determinar el volumen de la roca se puede efectuar un experimento similar al realizado por el célebre científico de la cultura griega Arquímedes. Un día, cuando él tomaba un baño en una tina se percató de que el agua subía cuando él se sumergía. Mientras que se sumergía desplazaba una cantidad de agua equivalente al espacio ocupado por su cuerpo. Esa cantidad de agua desplazada por el espacio de su cuerpo da entender el concepto de *capacidad*. Por tanto, al sumergir la roca en un recipiente con agua es de esperar una variación en el desplazamiento del agua. Para medir ese desplazamiento del agua se usa un vaso con graduaciones calibradas con respecto a un patrón de medida. A su vez, ese patrón de medida usa como sólido de comparación el sólido más simple, esto es el cubo y por eso se habla de *unidades cúbicas*. Finalmente, el volumen de la roca se obtiene por la resta de las graduaciones después y antes de la sumersión [3].

- **Medición de superficie.** La definición de superficie para un sólido reposa en la afirmación: es la suma de las áreas de cada una de las caras del sólido [7]. La interpretación se propone en la siguiente situación: se requiere forrar con plástico un tanque para almacenar agua con las medidas que aparecen en la figura. Por supuesto, surge la pregunta ¿Cuánto plástico se necesita? El modo práctico de responder, consiste en "desbaratar" cada una de las caras del sólido y extenderlas sobre el plástico.

Así, las bases se convierten en círculos y la pared lateral en un rectángulo. Para determinar la cantidad de plástico a gastar se puede usar una cuadricula imaginaria donde cada cuadrito es el patrón de medida para estimar la cantidad de "unidades cuadradas" que se requieren.

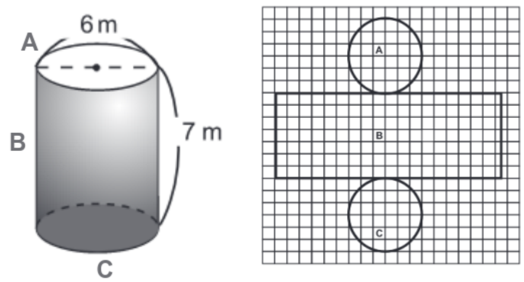


Figura 2: El concepto de superficie en sólidos.

El procedimiento de desbaratar el sólido, en geometría se denomina *efectuar el desarrollo del sólido* mientras que medir en unidades cuadradas se refiere al *concepto de área* como el proceso de medir una extensión delimitada sobre el espacio bidimensional [2].

2. Cálculo de volumen y superficie en un sólido geométrico

Los apartes mencionados en la sección anterior no constituyen un estrategia práctica para calcular una medida sobre un sólido. En su lugar, se acude al siguiente procedimiento estructurado:

1. Identificación y visualización del sólido; esto es, determinar su forma (esfera, pirámide, etc.).
2. Búsqueda de la fórmula de volumen y/o superficie, para calcular lo requerido por el problema o situación; para ello se acude a tablas de fórmulas.
3. Identificar los elementos geométricos o parámetros requeridos por la fórmula (altura, base, radio, etc.) y reemplazarlos en ella.
4. Desarrollar operaciones; esto es, efectuar sumas, multiplicaciones, etc.

Como un procedimiento complementario para el cálculo de la superficie de un sólido, la idea general es realizar el desarrollo del sólido y la suma de áreas de cada cara:

$$\text{Superficie} = \underbrace{\text{Área bases}}_{\text{área caras apoyo}} + \underbrace{\text{Área lateral}}_{\text{área caras pared}}$$

El éxito del cálculo depende de la identificación de la figura y de los desarrollos de las operaciones. Por tanto, en las siguientes secciones se repasaran las fórmulas de área para figuras planas y en la subsiguiente sección se expondrán las fórmulas de superficie y volumen para algunos sólidos.

3. Unidades de medida

La unidad de medida de volumen o superficie suele estar reglamentada bajo una norma o un sistema para evitar ambigüedades al afirmar "unidades cúbicas" o "cuadritos" respectivamente. En el Sistema Internacional de Unidades la unidad de volumen es el metro cúbico (m^3) y para superficie es el metro cuadrado (m^2), ambas derivadas del metro usado como unidad de longitud. Estas unidades se ajustan en múltiplos y submúltiplos para usar apropiadamente en alguna situación. Por ejemplo, se habla de centímetros cúbicos para medir el volumen de un recipiente de cocina o de decímetros cuadrados para el área de extensión de una mesa [5].

4. Fórmulas de área para algunas figuras planas (2D)

La siguiente tabla muestra la fórmula del área de algunos polígonos planos comunes. En algunas de ellas aparece el *perímetro*, recordando que es la suma de los lados del polígono [1].

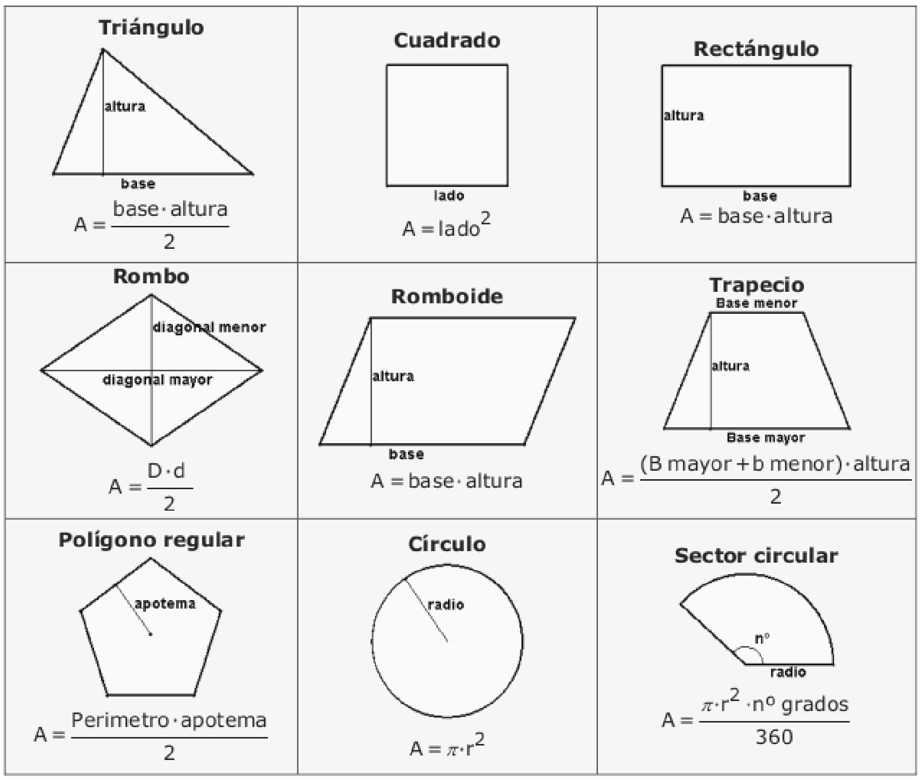


Figura 3: Área de algunos polígonos.

5. Fórmulas de volumen y superficie para algunos sólidos (3D)

La siguiente tabla muestra la fórmula de volumen y superficie de algunos sólidos geométricos comunes. En algunas fórmulas de superficie intervine el *perímetro* de la base, esto es, la suma de los lados de la base del sólido [1].

- **Nota sobre el símbolo π.** Es frecuente encontrar el símbolo π en las fórmulas de volumen y superficie, casualmente en los sólido clasificados como cuerpos redondos. Este símbolo (el cual es la letra griega *pi*) se trata de un número inconmensurable en sus cifras, o sea equivale al número decimal

$$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399\ldots$$

  y representa la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Por supuesto, al momento de usar en una fórmula se usa con unas cuantas cifras o con *cierta aproximación* según lo exija la situación. Normalmente se usa con tres cifras como 3.14 o en una aproximación fraccionaria como $\frac{355}{113}$ debida a los antiguos chinos.

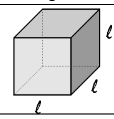
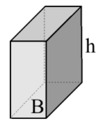
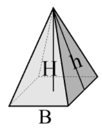
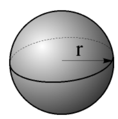
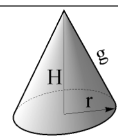
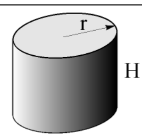
Sólido	Figura	Parámetros	Volumen (V)	Superficie (S)
Cubo		l=lado	l^3	$6l^2$
Prisma		B=área base P=perímetro base h=altura	Bh	$2B+Ph$
Pirámide		B=área base P=perímetro base H=altura h=apotema	$\frac{1}{3}BH$	$\frac{1}{2}Ph+B$
Esfera		r=radio	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$4\pi r^2$
Cono		r=radio H=altura g=generatriz	$\frac{1}{3}\pi H r^2$	$\pi r^2+\pi r g$
Cilindro		r=radio H=altura	$\pi H r^2$	$2\pi r^2+2\pi r H$

Tabla 1: Áreas y volúmenes de algunos sólidos.

6. Ejemplos de aplicación

6.1. Ejemplo 1

Se requiere forrar una tienda de camping con poliéster según las dimensiones de la figura 4; la tienda tiene una base cuadrada. Determinar la extensión superficial de poliéster para forrar la tienda.

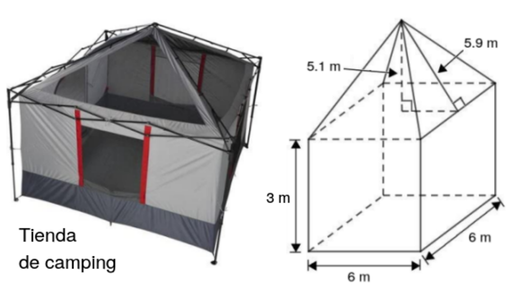


Figura 4: Ejemplo 1.

- **Solución.** Acudiendo a la estrategia de cálculo mencionada anteriormente, se razona:

  1) La tienda se compone de dos sólidos simples: un prisma cuadrangular y una pirámide cuadrangular. Como se trata de de determinar la superficie de la tienda, a cada sólido simple se le debe restar una cara cuadrada correspondiente a la base superior del prisma y la base de la piramide.
  2) La fórmula de superficie es (ver tabla 1):

  $$\text{Prisma cuadrangular: } 2B + Ph_{\text{prisma}}$$
  $$\text{Pirámide cuadrangular: } \frac{1}{2}Ph_{\text{piramide}} + B$$

  3) Cómo parámetros se requiere el área de la base B que es un cuadrado de lado de 6 m, luego $B = 6 \times 6 = 36$ m^2; el perímetro del cuadrado que vale $P = 4 \times 6 = 24$ m; la altura del prisma, $h_{\text{prisma}} = 3$ m y la apotema de la cara lateral de la piramide, $h_{\text{piramide}} = 5.9$ m.
  4) Reemplazando y resolviendo operaciones se tiene para el prisma cuadrangular:

  $$S = 2B + Ph_{\text{prisma}} = 2 \cdot 36 + 24 \cdot 3 = 144 \text{ m}^2$$

  y para la pirámide cuadrangular:

  $$S = \frac{1}{2}Ph_{\text{piramide}} + B = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5.9 + 36 = 106.8 \text{ m}^2$$

  La superficie del sólido de la tienda es la suma de las anteriores superficies descontando 2 veces el área de la base cuadrada:

  $$S = 144 + 106.8 - 2 \cdot 36 = 178.8 \text{ m}^2$$

  Por tanto, se requieren 178.8 m^2 de poliéster para forrar la tienda de camping.

6.2. Ejemplo 2

Encontrar el volumen de un balón de fútbol cuya circunferencia cumple la medida reglamentaria de 70 cm (figura 5).

Figura 5: Ejemplo 2.

- **Solución.** El razonamiento es:

  1) El sólido se asume que es una esfera.
  2) La fórmula de volumen es $\frac{4}{3}\pi r^3$ (ver tabla 1).
  3) Cómo parámetro se requieren el radio r. Cuando se menciona la circunferencia del balón se refiere a su perímetro, luego $P = 70$ cm. Ya que perímetro y radio están relacionados con la fórmula $P = 2\pi r$, despejando el radio se tiene $r = \frac{P}{2\pi}$. Asumiendo $\pi = 3.1$, el radio vale $r = 11.3$ cm.
  4) Reemplazando y resolviendo operaciones, el volumen es:

  $$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3.1 \cdot 11.3^3 = \frac{4}{3} \cdot 3.1 \cdot 1442.9 = \frac{17891.9}{3} = 5964 \text{ cm}^3$$

  El volumen del balón de fútbol reglamentario es comparable a 6 botellas de 1 litro.

7. Actividad 5

Resolver en el cuaderno el problema propuesto con un procedimiento estructurado.

1. Considerar el sólido de la figura 6. Se trata de un prisma hexagonal al cual se le ha removido una piramide hexagonal en la base superior; la base inferior es totalmente plana. El apotema de la base hexagonal mide 2.3 cm; la altura de la piramide removida es de 2 cm y el apotema de una de las caras triangulares vale 3.1 cm. A partir de está información hallar:

    a) El volumen del sólido.

    b) La superficie total del sólido.

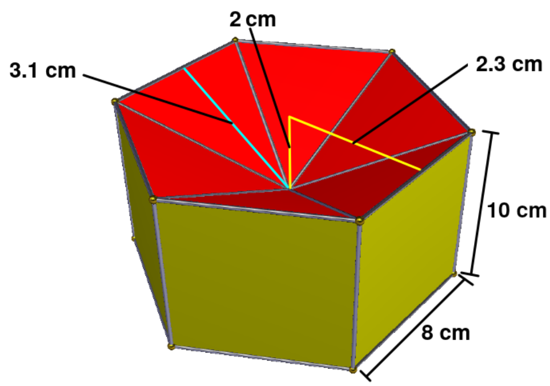


Figura 6: Problema 1.

Nota: La sección referencias contiene fuentes de consulta bibliográficas si se tiene posibilidad de acceder a textos o navegación en la red. Estas aparecen en el contenido de este texto con paréntesis cuadrados [...].

Referencias

[1] Stanley Clemens, Phares O'Daffer, and Thomas Cooney, *Geometría*, first ed., Addison Wesley, México, 1998.

[2] Jesús Antonio Ocampo Sua, *Áreas y superficies*, https://sites.google.com/site/matematicasgradoseptimo/areas-y-superficies, 2013, Consultado 30 mar 2021.

[3] María Estela Raffino, *Volumen*, https://concepto.de/volumen/, 2020, Consultado 27 mar 2021.

[4] Hermenegildo Rodríguez Galbarro, *Áreas, perímetros y volúmenes de figuras geométricas*, https://ingemecanica.com/tutoriales/areas.html, Consultado 9 abr 2021.

[5] Blanca Torres et al., *Supermat 7*, Voluntad, Bogotá, Colombia, 2000.

[6] Wikipedia, *Volumen*, https://es.wikipedia.org/wiki/Volumen, 2021, Consultado 9 abr 2021.

[7] ———, *Área*, https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81rea#%C3%81rea_de_superficies_curvas, 2021, Consultado 9 abr 2021.