Métodos de solución de la ecuación cuadrática

Matemáticas - Grado 9
2021

Ecuación cuadrática

Características

- Conocida por babilonios y Egipcios. Diofanto ofreció algunas soluciones.

Figura: Diofanto de Alejandría (s. III)

Ecuación cuadrática

Características

- Conocida por babilonios y Egipcios. Diofanto ofreció algunas soluciones.
- Es una función igualada a un único valor, por ejemplo: $x^2 - 3x + 5 = 5$.

Figura: Diofanto de Alejandría (s. III)

Ecuación cuadrática

Características

- Conocida por babilonios y Egipcios. Diofanto ofreció algunas soluciones.
- Es una función igualada a un único valor, por ejemplo: $x^2 - 3x + 5 = 5$.
- Pueden clasificarse como completas e incompletas.

Figura: Diofanto de Alejandría (s. III)

Ecuación cuadrática

Características

- Conocida por babilonios y Egipcios. Diofanto ofreció algunas soluciones.
- Es una función igualada a un único valor, por ejemplo: $x^2 - 3x + 5 = 5$.
- Pueden clasificarse como completas e incompletas.
- Toda ecuación cuadrática, es decir de segundo grado, tiene 2 raíces.

Figura: Diofanto de Alejandría (s. III)

Ecuación cuadrática

Características

- Conocida por babilonios y Egipcios. Diofanto ofreció algunas soluciones.
- Es una función igualada a un único valor, por ejemplo: $x^2 - 3x + 5 = 5$.
- Pueden clasificarse como completas e incompletas.
- Toda ecuación cuadrática, es decir de segundo grado, tiene 2 raíces.
- Aplicada en diferentes campos: astronomía, física, economía, . . .

Figura: Diofanto de Alejandría (s. III)

Ecuación cuadrática

Clasificación

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ puede clasificarse según el valor de los coeficientes a, b y c.

1. *Completas.* Cuando a, b y c toman valores diferentes de cero.
2. *Incompletas.* Cuando alguno de los coeficientes toma el valor de cero.
   - De la forma $ax^2 = 0$; los coeficientes b y c valen cero.
   - De la forma $ax^2 + c = 0$; el coeficiente b vale cero, carece del término lineal.
   - De la forma $ax^2 + bx = 0$; el coeficiente c vale cero, carece del término constante.
3. Si el término a es igual a cero o no está presente no existe ecuación cuadrática.

Ecuación cuadrática

Clasificación

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ puede clasificarse según el valor de los coeficientes a, b y c.

1. *Completas.* Cuando a, b y c toman valores diferentes de cero.
2. *Incompletas.* Cuando alguno de los coeficientes toma el valor de cero.
   - De la forma $ax^2 = 0$; los coeficientes b y c valen cero.
   - De la forma $ax^2 + c = 0$; el coeficiente b vale cero, carece del término lineal.
   - De la forma $ax^2 + bx = 0$; el coeficiente c vale cero, carece del término constante.
3. Si el término a es igual a cero o no está presente no existe ecuación cuadrática.

Ecuación cuadrática

Clasificación

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ puede clasificarse según el valor de los coeficientes a, b y c.

1. *Completas.* Cuando a, b y c toman valores diferentes de cero.
2. *Incompletas.* Cuando alguno de los coeficientes toma el valor de cero.
   - De la forma $ax^2 = 0$; los coeficientes b y c valen cero.
   - De la forma $ax^2 + c = 0$; el coeficiente b vale cero, carece del término lineal.
   - De la forma $ax^2 + bx = 0$; el coeficiente c vale cero, carece del término constante.
3. Si el término a es igual a cero o no está presente no existe ecuación cuadrática.

Ecuación cuadrática

Clasificación

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ puede clasificarse según el valor de los coeficientes a, b y c.

1. *Completas.* Cuando a, b y c toman valores diferentes de cero.
2. *Incompletas.* Cuando alguno de los coeficientes toma el valor de cero.
   - De la forma $ax^2 = 0$; los coeficientes b y c valen cero.
   - De la forma $ax^2 + c = 0$; el coeficiente b vale cero, carece del término lineal.
   - De la forma $ax^2 + bx = 0$; el coeficiente c vale cero, carece del término constante.
3. Si el término a es igual a cero o no está presente no existe ecuación cuadrática.

Solución de la ecuación cuadrática

Resolviendo la ecuación cuadrática

Las raíces x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ pueden hallarse mediante 3 métodos, teniendo en cuenta que la ecuación puede tener ninguna, una o dos raíces:

1. *Factorización.* Según los coeficientes a, b, y c, por aplicación de un caso de factorización: trinomio cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados, trinomio con $a = 1$ o $a \neq 1$ y factor común.
2. *Método gráfico.* Las raíces son los puntos de corte con el eje x.
3. *Fórmula cuadrática.* Usada en aquellos casos complejos donde no es posible realizar una factorización.

Solución de la ecuación cuadrática

Resolviendo la ecuación cuadrática

Las raíces x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ pueden hallarse mediante 3 métodos, teniendo en cuenta que la ecuación puede tener ninguna, una o dos raíces:

1. *Factorización.* Según los coeficientes a, b, y c, por aplicación de un caso de factorización: trinomio cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados, trinomio con $a = 1$ o $a \neq 1$ y factor común.
2. *Método gráfico.* Las raíces son los puntos de corte con el eje x.
3. *Fórmula cuadrática.* Usada en aquellos casos complejos donde no es posible realizar una factorización.

Solución de la ecuación cuadrática

Resolviendo la ecuación cuadrática

Las raíces x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ pueden hallarse mediante 3 métodos, teniendo en cuenta que la ecuación puede tener ninguna, una o dos raíces:

1. *Factorización.* Según los coeficientes a, b, y c, por aplicación de un caso de factorización: trinomio cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados, trinomio con $a = 1$ o $a \neq 1$ y factor común.
2. *Método gráfico.* Las raíces son los puntos de corte con el eje x.
3. *Fórmula cuadrática.* Usada en aquellos casos complejos donde no es posible realizar una factorización.

Solución de la ecuación cuadrática

Resolviendo la ecuación cuadrática

Las raíces x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ pueden hallarse mediante 3 métodos, teniendo en cuenta que la ecuación puede tener ninguna, una o dos raíces:

1. *Factorización.* Según los coeficientes a, b, y c, por aplicación de un caso de factorización: trinomio cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados, trinomio con $a = 1$ o $a \neq 1$ y factor común.
2. *Método gráfico.* Las raíces son los puntos de corte con el eje x.
3. *Fórmula cuadrática.* Usada en aquellos casos complejos donde no es posible realizar una factorización.

Factorización

Solución de la ecuación cuadrática por factorización

Método de factorización

De acuerdo a los coeficientes de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, se factoriza (*si es posible*) según el caso a la forma:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \tag{1}$$

luego se iguala cada factor a cero y se despeja la incógnita

$$x - x_1 = 0 \quad x - x_2 = 0 \tag{2}$$

$$x = x_1 \quad x = x_2 \tag{3}$$

Factorización

Cuál técnica usar?

- Trinomio con $a = 1$: $x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0$.
- Diferencia de cuadrados: $ax^2 + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x + x_2) = 0$.
- Factor común: $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0$
- Trinomio con $a \neq 1$: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \frac{(ax - x_1)(ax - x_2)}{a} = 0$.
- Trinomio cuadrado perfecto: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)^2 = 0$.
- Si no es posible la factorización, usar otro método.

Factorización

Cuál técnica usar?

- Trinomio con $a = 1$: $x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0$.
- Diferencia de cuadrados: $ax^2 + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x + x_2) = 0$.
- Factor común: $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0$
- Trinomio con $a \neq 1$: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \frac{(ax-x_1)(ax-x_2)}{a} = 0$.
- Trinomio cuadrado perfecto: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)^2 = 0$.
- Si no es posible la factorización, usar otro método.

Factorización

Cuál técnica usar?

- Trinomio con $a = 1$: $x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0$.
- Diferencia de cuadrados: $ax^2 + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x + x_2) = 0$.
- Factor común: $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0$
- Trinomio con $a \neq 1$: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \frac{(ax - x_1)(ax - x_2)}{a} = 0$.
- Trinomio cuadrado perfecto: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)^2 = 0$.
- Si no es posible la factorización, usar otro método.

Factorización

Cuál técnica usar?

- Trinomio con $a = 1$: $x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0$.
- Diferencia de cuadrados: $ax^2 + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x + x_2) = 0$.
- Factor común: $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0$
- Trinomio con $a \neq 1$: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \frac{(ax - x_1)(ax - x_2)}{a} = 0$.
- Trinomio cuadrado perfecto: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)^2 = 0$.
- Si no es posible la factorización, usar otro método.

Factorización

Cuál técnica usar?

- Trinomio con $a = 1$: $x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0$.
- Diferencia de cuadrados: $ax^2 + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x + x_2) = 0$.
- Factor común: $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0$
- Trinomio con $a \neq 1$: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \frac{(ax - x_1)(ax - x_2)}{a} = 0$.
- Trinomio cuadrado perfecto: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)^2 = 0$.
- Si no es posible la factorización, usar otro método.

Factorización

Cuál técnica usar?

- Trinomio con $a = 1$: $x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0$.
- Diferencia de cuadrados: $ax^2 + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x + x_2) = 0$.
- Factor común: $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0$
- Trinomio con $a \neq 1$: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \frac{(ax - x_1)(ax - x_2)}{a} = 0$.
- Trinomio cuadrado perfecto: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)^2 = 0$.
- Si no es posible la factorización, usar otro método.

Factorización

Cuál técnica usar?

- Trinomio con $a = 1$: $x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0$.
- Diferencia de cuadrados: $ax^2 + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x + x_2) = 0$.
- Factor común: $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0$
- Trinomio con $a \neq 1$: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \frac{(ax - x_1)(ax - x_2)}{a} = 0$.
- Trinomio cuadrado perfecto: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)^2 = 0$.
- Si no es posible la factorización, usar otro método.

Método gráfico

Características de la gráfica de una ecuación cuadrática

- Cada término tiene un nombre:

$$\underbrace{ax^2}_{\text{cuadrático}} + \underbrace{bx}_{\text{lineal}} + \underbrace{c}_{\text{constante}} = 0$$

- La gráfica se llama parábola; tiene forma de "U" o de "n".
- Término importante: a. Si a es positivo, gráfico en "U"; Si a es negativo, gráfico en "n".
- Cálculo de la raíces: fácil! Graficar la ecuación y observar el corte de las ramas con el eje x.

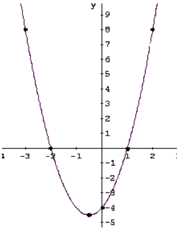


Figura: Gráfica de una ecuación cuadrática. Más gráficas aquí.

Fórmula cuadrática

Solución general de la ecuación cuadrática

- Es un método para hallar las raíces de la ecuación cuadrática.

x_1 y x_2

... resuelveme

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

Fórmula cuadrática

Solución general de la ecuación cuadrática

- Es un método para hallar las raíces de la ecuación cuadrática.
- Consiste en determinar y reemplazar los coeficientes de la ecuación en una fórmula.

x_1 y x_2

... resuelveme

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

Fórmula cuadrática

Solución general de la ecuación cuadrática

- Es un método para hallar las raíces de la ecuación cuadrática.
- Consiste en determinar y reemplazar los coeficientes de la ecuación en una fórmula.
- Aplicado en situaciones donde por falta conocimiento, no es posible hallar las raíces rápidamente.

x_1 y x_2

... resuelveme

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

Fórmula cuadrática

Expresión de la fórmula cuadrática

Fórmula general

En la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, la fórmula general para hallar las raíces es:

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{donde } \Delta = b^2 - 4ac \tag{4}$$

- El símbolo Δ se denomina discriminante de la ecuación cuadrática.
- El símbolo $\pm$ indica que la primera raíz se halla con una suma y la segunda con una resta de los términos.

Fórmula cuadrática

Expresión de la fórmula cuadrática

Fórmula general

En la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, la fórmula general para hallar las raíces es:

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{donde } \Delta = b^2 - 4ac \tag{4}$$

- El símbolo Δ se denomina discriminante de la ecuación cuadrática.
- El símbolo $\pm$ indica que la primera raíz se halla con una suma y la segunda con una resta de los términos.

Fórmula cuadrática

Expresión de la fórmula cuadrática

Fórmula general

En la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, la fórmula general para hallar las raíces es:

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{donde } \Delta = b^2 - 4ac \tag{4}$$

- El símbolo Δ se denomina discriminante de la ecuación cuadrática.
- El símbolo $\pm$ indica que la primera raíz se halla con una suma y la segunda con una resta de los términos.

Fórmula cuadrática

Discriminante y el carácter de las raíces

Según el valor que tome Δ se pueden considerar 3 casos:

1. $\Delta > 0$, *una cantidad positiva*. Las raíces son reales y desiguales (puede requerir uso de calculadora).
2. $\Delta = 0$, *es cero*. Las raíces son reales e iguales.
3. $\Delta < 0$, *una cantidad negativa*. No existen raíces reales; las raíces pertenecen a otro conjunto numérico ($\mathbb{C}$).

Fórmula cuadrática

Discriminante y el carácter de las raíces

Según el valor que tome Δ se pueden considerar 3 casos:

1. $\Delta > 0$, *una cantidad positiva*. Las raíces son reales y desiguales (puede requerir uso de calculadora).
2. $\Delta = 0$, *es cero*. Las raíces son reales e iguales.
3. $\Delta < 0$, *una cantidad negativa*. No existen raíces reales; las raíces pertenecen a otro conjunto numérico ($\mathbb{C}$).

Fórmula cuadrática

Discriminante y el carácter de las raíces

Según el valor que tome Δ se pueden considerar 3 casos:

1. $\Delta > 0$, *una cantidad positiva*. Las raíces son reales y desiguales (puede requerir uso de calculadora).
2. $\Delta = 0$, *es cero*. Las raíces son reales e iguales.
3. $\Delta < 0$, *una cantidad negativa*. No existen raíces reales; las raíces pertenecen a otro conjunto numérico ($\mathbb{C}$).

Fórmula cuadrática

Discriminante y el carácter de las raíces

Según el valor que tome Δ se pueden considerar 3 casos:

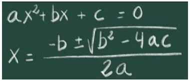
1. $\Delta > 0$, *una cantidad positiva*. Las raíces son reales y desiguales (puede requerir uso de calculadora).
2. $\Delta = 0$, *es cero*. Las raíces son reales e iguales.
3. $\Delta < 0$, *una cantidad negativa*. No existen raíces reales; las raíces pertenecen a otro conjunto numérico ($\mathbb{C}$).

Fórmula cuadrática

Discriminante y el carácter de las raíces

Según el valor que tome Δ se pueden considerar 3 casos:

1. $\Delta > 0$, *una cantidad positiva*. Las raíces son reales y desiguales (puede requerir uso de calculadora).
2. $\Delta = 0$, *es cero*. Las raíces son reales e iguales.
3. $\Delta < 0$, *una cantidad negativa*. No existen raíces reales; las raíces pertenecen a otro conjunto numérico ($\mathbb{C}$).



Ejemplos

...

Actividad en construcción

Ejercicio

Trasponer y reducir términos en cada ítem igualando cada ecuación a cero; averiguar los coeficientes *a*, *b*, *c* y clasificar la ecuación cuadrática. De acuerdo al coeficiente *a* dibujar la forma de la parábola (“U“ o ”n“).

- $3x^2 - 5x + 2 = 0$
- $6x^2 = -5x + 32$
- $x^2 + 3x = 5x + 3$
- $6r^2 - 9r = -\frac{4}{3}$
- $9r - 6 = (r-4)(r+4)$