De sucesiones a límites

Matemáticas - Grado 11

2020

1. Un acercamiento a la noción de límite

La noción de *Límite* en la rama de la matemáticas llamada *Cálculo*[1] es de vital importancia ya que constituye el eje central para la formulación aplicada de esta rama conocida como *Cálculo Infinitesimal*. En modo breve e histórico, quienes dieron origen (I. Newton, G. Leibnitz en el siglo XVIII) a esta nueva rama primero usaron instintivamente el cálculo infinitesimal y luego, con el paso del tiempo, siglos después mediante una rigurosidad matemática adecuada otros (A. Cauchy, K. Weierstrass a mitad del siglo XIX) formalizaron el concepto de límite propiamente dicho tal como se conoce hoy. Así, la evolución del Cálculo, quizás obedeció al afán por resolver algunos problemas que con las matemáticas habituales pueden resultar muy dispendiosos. Por ejemplo, es fácil determinar el área de una sección rectangular, pero no lo es para una sección con porciones curvadas y de forma irregular. Curiosamente, en la actualidad tanto a nivel de enseñanza media o superior primero se aborda el concepto de límite y luego el cálculo infinitesimal, en sentido opuesto a la evolución mencionada. Por supuesto por el afán del tiempo presente, la compresión del concepto genera dificultades entre los aprendices [3].

Para un acercamiento al concepto, se analizará la siguiente situación científica. La presión atmósferica es una variable física que mide la fuerza por unidad de área que ejerce el aire de la atmósfera sobre algún lugar de la superficie terrestre; usualmente se mide en unidades de atmósferas (atm) o en milímetros de mercurio (mmHg). La presión atmósferica es sensible a los cambios de altura con tendencia a disminuir cuando aumenta la altura: una ciudad cercana al mar tiene mayor presión atmósferica que una ciudad en la alta montaña. A nivel del mar (altura cero) la presión atmósferica vale 1 atm (760 mmHg). La experiencia ha determinado que por cada kilómetro de altura que se asciende respecto al nivel del mar, la presión es de 0.88 veces la presión del kilómetro anterior (hecho valido para los primeros 20 kilómetros de altura). Se plantean las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la presión atmósferica en el Cerro de Monserrate de Bogotá ubicado *casi* a 3 Km sobre el nivel del mar?

b) Si se asciende de modo indefinido, ¿hacia que valor *tiende* la presión atmósferica?

Para dar solución, conviene primero modelar la situación como una sucesión ya que la altura se presenta en modo discreto 1 Km, 2 Km, … En la altura $n = 0$, se tiene $P_0 = 1$ atm; al siguiente kilómetro, $n = 1$, la presión es 0.88 veces la presión de la altura cero, $P_1 = 0.88 \cdot P_0 = 0.88 \cdot 1 = 0.88$ atm. Para el Cerro de Monserrate, $n = 3$, se tiene en modo sucesivo $P_3 = 0.88 \cdot P_2$ o mejor $P_3 = 0.88 \cdot 0.88 \cdot 0.88 \cdot 1$ que es equivalente a $P_3 = 0.88^3 \cdot 1 = 0.68$ atm, por lo que mediciones de la presión en ese lugar *estarán cerca* de ese valor. Lo anterior también permite inferir que el modelo en forma de sucesión es $P_n = 0.88^n \cdot 1$.

La anterior expresión permite responder la segunda pregunta: no hay mención a una altura específica sin embargo se entiende por una altura considerable. Así para 20 Km, $P_{20} = 0.08$ atm y para 50 Km asumiendo que el modelo es valido en dicha altura, $P_{50} \to 0.0$ atm; con el símbolo $\to$ se refiere a que vale casi cero o, a *que hay una tendencia hacia cero pero no llega valer cero* pues una calculadora alcanza a mostrar unas cifras que experimentalmente no son posibles de medir. La figura 1 también muestra este hecho pues para *grandes valores* de la altura n la presión *tiende* a cero. El anterior análisis permite inferir los siguientes resultados:

[1] Entendida como aquella rama que analiza los cambios y la continuidad de las funciones mediante mediante razonamientos que usan de cantidades infinitas (muy grandes) o infinitesimales (muy pequeñas).

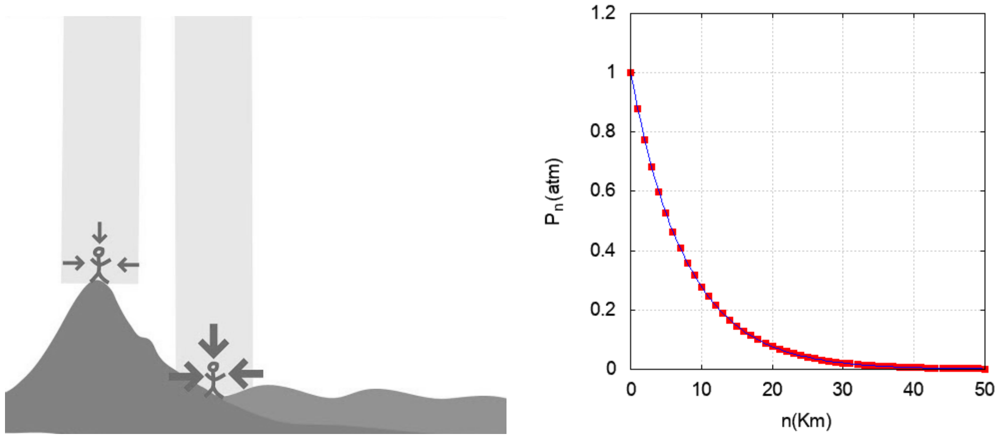


Figura 1: Variación de la presión atmósferica en términos de la altura modelada como una sucesión. La línea continua representa el modelo como función. Ya como función, para una ciudad como Bogotá con $n = 2.6$ Km la presión es de $P = 0.72$ atm o 545 mmHg.

- En el lenguaje matemático usado aparecen palabaras o frases como *casi*, *estarán cerca* y *que hay una tendencia hacia cero pero no llega valer cero*. Es decir, se hace mención a la proximidad de un número o hacia la tendencia de un número. Cuando se pregunta por la presión en el Cerro de Monserrate a *casi 3 Km sobre el nivel del mar*, se refiere a valores circunvecinos a 3 dado a que el modelo empleado es una sucesión donde la variable independiente es un número entero. En sentido estricto el cerro se encuentra a 3.152 Km sobre el nivel del mar, pero este es un número real no valido como argumento para la sucesión. Sin embargo, cuando es *aproximado* a la cifra entera, 3, la presión hallada es una buena *tendencia* para 3.152.
- Conforme la altura toma valores cada vez más grandes, la presión tiende una tendencia o aproximación a 0, sin valer 0 estrictamente. En lenguaje matemático, esto es, *la expresión tiene un límite cuando el argumento toma valores cada vez más grandes o indefinidos.*
- Para observar una tendencia o *límite* de un modelo de 2 variables (altura, presión), es más adecuado el concepto de función que de sucesión. Al usar la sucesión, P_n, solo usa números enteros mientras que como función, $P(n)$, admite cualquier número.

Para profundizar el concepto de límite -objetivo de esta clase- a continuación en esta clase se aborda su definición, una introducción al computo de límites de funciones y ejercicios relativos al tema.

2. Aproximación a la definición de límite

La intencionalidad del título de la presente sección tiene la finalidad de mencionar la definición de límite tratando de ser claro y a su vez explícito, pero no formal y con rigor matemático. Puesto que históricamente el concepto es relativamente joven en la evolución del Cálculo, se han postulado varias definiciones según la época. El autor de estas líneas prefiere el concepto manejado a principios del siglo XIX (debida a A. Cauchy) frente al concepto moderno y vigente que data desde finales del siglo XIX (debido a K. Weierstrass).

Definición de Límite. [2]Cuando los valores sucesivos que toma una variable dependiente -aquí una función $f(x)$- se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como se quiera, a este último valor se le llama el límite de la función cuando la variable independiente -aquí x-

[2]La definición moderna reza así: si, dado cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$, tal que, las diferencias $f(a \pm \delta) - L$ es menor en valor absoluto a ε, entonces se dice que el número L es el límite de $f(x)$ cuando $x \to a$. Por supuesto, una definición nada amable para el aprendiz.

tiende a un valor fijo [2]. Si el límite corresponde con un único valor fijo L cuando x tiende a un valor fijo a, la forma de representar esta afirmación es

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Léase "el límite de la función f de x cuando x tiende a a es L".

De acuerdo a la definición, al hablar de un límite matemático, implica que:

- Debe existir como un número finito.
- Debe tener un valor único.

Vale aclarar, que el concepto de límite es más aplicable a funciones de variable con número real que para sucesiones, puesto que estas manejan variables discretas con números naturales dejando vacíos numéricos entre dos naturales. Dicho lo anterior, la situación de la presión atmósferica para una altura grande e indefinida a la luz de un límite es

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = 0$$

Con la notación $\lim_{n\to\infty}$, se hace referencia al uso de una estrategia de análisis de la función P en las vecindades de la altura n cuando se aproxima a valores grandes[3] ($n \to \infty$), y cuyo resultado concluye con la existencia de una presión que tiende al valor numérico 0. No hay que confundir el concepto como una mera operación de sustitución.

3. Evaluando límites

En seguida se mencionaran ejemplos introductorios al uso de límites en funciones con el objeto expreso de profundizar en el concepto. A través de recursos como la tabulación, la gráfica de una función y la calculadora se explicara como calcularlos [4], aclarando que no son los únicos modos formales de calcularlos, siendo esto tema de próxima clase.

Ejemplo 1. El límite existe y es único. Evaluar la función $f(x) = 3x - 2$ en varios puntos próximos a $x = 2$ y usar los resultados para estimar el límite

$$\lim_{x\to 2} (3x - 2)$$

	x tiende a 2 por la izquierda					x tiende a 2 por la derecha			
x	1.8	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.2
$f(x)$	3.4	3.7	3.97	3.997	4	4.003	4.03	4.3	4.6

Tabla 1: Cómputos de $f(x) = 3x - 2$.

[3] Aquí, el uso del símbolo infinito ∞ hace referencia a una cantidad indeterminadamente grande o sin fin, y como tal no representa un número.

1) La tabla 1 muestra algunos valores de $f(x)$ evaluados en una calculadora en puntos cercanos a 2 y en x =2. Por ejemplo, teniendo en cuenta que primero se realiza la multiplicación y luego la resta, $f(1.9) = (3\cdot 1.9)-2 = 5.7-2 = 3.7$. Asumiendo que los números se ubican en una recta real creciente hacia la derecha, los valores de x que se aproximan a 2 tanto a la izquierda como a la derecha, los resultados de $f(x)$ se acercan y convergen hacia 4. Esto es existe un valor fijo de $f(x)$ cuando $x \to 2$ (léase x tiende a 2). También se observa que a la izquierda de x =2, $f(x) \to 4$ (léase f de x tiende a 4) y que por la derecha de x =2 también $f(x) \to 4$. Como tanto por izquierda y por derecha el valor fijo es el mismo se concluye que hay un único valor fijo. Como existe un único valor fijo se tiene

$$\lim_{x\to 2}(3x-2) = 4 \qquad \blacksquare$$

El ejemplo 1 permite ampliar una noción acerca del hecho de que el límite de cualquier función debe ser el mismo valor fijo tanto a la izquierda como a la derecha. En sentido preciso, para que un límite exista en una función, sus límites laterales también deben existir y ser iguales. Este hecho también tiene su notación particular,

$$\underbrace{\lim_{x\to 2^-}(3x-2) = 4}_{\text{Cuando x tiende por la izquierda}} \qquad \underbrace{\lim_{x\to 2^+}(3x-2) = 4}_{\text{Cuando x tiende por la derecha}}$$

Cuando las funciones son de forma lineal o polinómicas, se cumple la existencia y la igualdad de límites laterales por lo que un análisis extenso similar al ejemplo 1 no es necesario. Sin embargo, cuando las funciones son "raras" conviene realizar un análisis de límites laterales.

Ejemplo 2. El límite en una función a trozos. Graficar y hallar el límite cuando x tiende a 3 en la función

$$g(x) = \begin{cases} 2, & x \neq 3 \\ 1, & x = 3 \end{cases}$$

1)

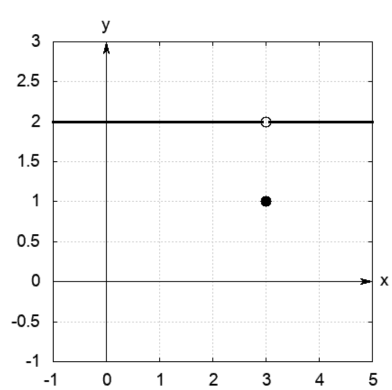


Figura 2: Función $g(x)$.

2) Está función de la forma rara se denomina función a trozos porque según el valor de x, $g(x)$ tomara un valor apropiado. Aquí se entiende que para cualquier número x excepto $x = 3$, g vale 2; esto se representa por la línea continua y el punto blanco en ella. Pero en $x = 3$, la función "salta" de $y = 2$ a $y = 1$; el punto negro indica el valor de g. Del gráfico, $g(x)$ aparenta tener una novedad anormal en $x = 3$. Sin embargo, apreciando los límites laterales a izquierda y derecha de $x = 3$ los valores de $g(x)$ tienden a un único valor: 2. Por tanto,

$$\lim_{x\to 3} g(x) = 2 \qquad \blacksquare$$

El ejemplo 2 muestra la diferencia entre el valor de una función y el límite de una función, pudiendo llegar a ser de resultado diferente.

Ejemplo 3. Límites laterales diferentes. Observar la gráfica de la función $y = \frac{1}{x-5}$ y evaluar

$$\lim_{x\to 5}\frac{1}{x-5}$$

1)

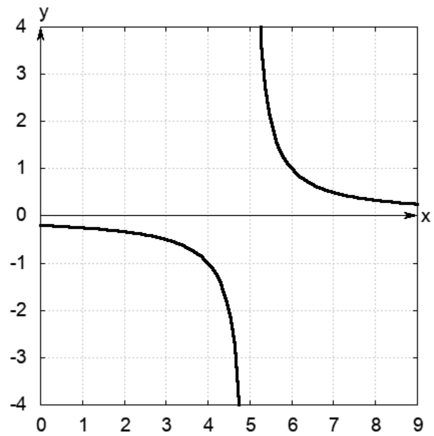


Figura 3: Función y.

2) La figura 3 rapidamente muestra algo inusual en las vecindades de $x=5$. Para apreciar el comportamiento lateral, con una calculadora a la izquierda de 5, se tiene por ejemplo, para $x=4.99$, $y=1/(4.99-5)=-100$; para $x=4.999$, $y=1/(4.999-5)=-1000$ mostrando valores más grandes y negativos. Y por la derecha para $x=5.01$, $y=1/(5.01-5)=100$; para $x=5.001$, $y=1/(5.001-5)=1000$ con valores más grandes y positivos. Se concluye que los límites laterales son diferentes y sin un valor fijo en las proximidades de 5. Por tanto,

$$\lim_{x\to 5}\frac{1}{x-5}=\text{No existe} \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 4. Límite en un punto donde la función no está definida. Mostrar la existencia de límite cuando x tiende a 1 en la función

$$h(x)=\frac{x^3-3x+2}{x-1}$$

1) Aquí conviene usar herramientas virtuales según disponibilidad de recursos. Funciones racionales como $h(x)$, una gráfica rápida puede dar un primer indicio cuando $x\to 1$, aunque a veces no siempre es fiable. El sitio https://www.desmos.com/calculator es una calculadora gráfica gratuita para cualquier navegador. La figura 4 muestra la gráfica de $h(x)$.

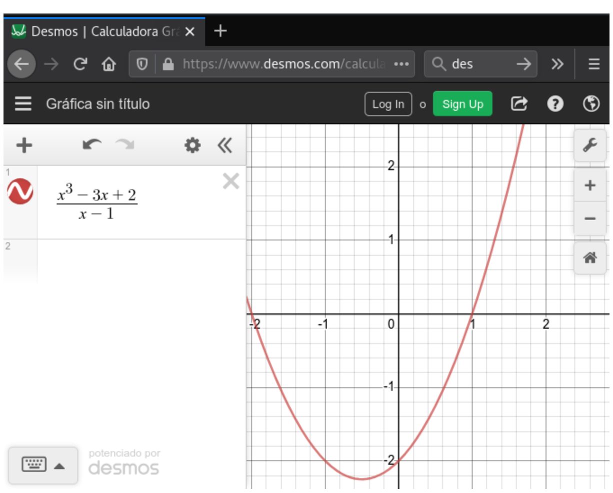
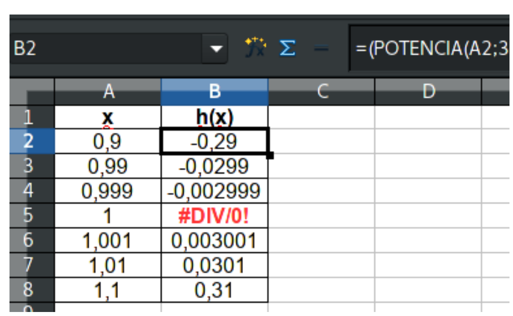


Figura 4: Función $h(x)$.

2) El primer indicio muestra que los límites laterales en $x\to 1$ dejan $h(x)\to 0$. Para una confirmación mayor, un computo numérico en puntos próximos a $x=1$ permiten confirmar el límite. Este computo se puede realizar en una calculadora científica usando debidamente los paréntesis de agrupación. P. ej., en $x=0.8$ $\boxed{(}\,\boxed{0.8}\,\boxed{x^y}\,\boxed{3}\,\boxed{-}\,\boxed{3}\,\boxed{\times}\,\boxed{0.8}\,\boxed{+}\,\boxed{2}\,\boxed{)}$ $\boxed{/}\,\boxed{(}\,\boxed{0.8}\,\boxed{-}\,\boxed{1}\,\boxed{)}\,\boxed{=}\,\boxed{-0.56}$. También con un paquete informático como *OpenOffice Calc* o *Office Excel* con la orden (POTENCIA(A2;3)-3*A2+2)/(A2-1) resuelve rápidamente algunos puntos


B2 =(POTENCIA(A2;3

	A	B	C	D
1	x	h(x)		
2	0,9	-0,29		
3	0,99	-0,0299		
4	0,999	-0,002999		
5	1	#DIV/0!		
6	1,001	0,003001		
7	1,01	0,0301		
8	1,1	0,31		

Figura 5: Valores $h(x)$ alrededor de $x=1$.

3) La figura 5 muestra que en $x = 1$, $h(x)$ no tiene un valor definido dando un error numérico. En efecto, en este punto se tiene $h(1) = 0/0$, lo cual es una división indeterminada concluyendo que $h(x)$ no está definido en $x = 1$.

4) A pesar que la función $h(x)$ no tiene un valor fijo en el punto donde se calcula el límite, la figura 4 si muestra límites laterales definidos con un mismo y único valor. Por tanto,

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1} = 0 \qquad \blacksquare$$

Los ejemplos expuestos están realizados en un "modo didáctico" con la finalidad de comprender el concepto de límite y no implica que en la práctica también se deban calcular de modo similar. Ya en sentido práctico, ejercicios y problemas se abordan con técnicas de sustitución y métodos algebraicos para realizar en unas pocas líneas. Las estrategias mencionadas se hacen útiles cuando las funciones y puntos de estudio son "fuera de lo normal", como en situaciones que se dan en ciencias aplicadas o matemáticas avanzadas donde es necesario usar la definición rigurosa de límite. Otras orientaciones complementarias a lo mencionado también se encuentran en la referencia [1].

4. Actividad Número 8

Resolver cada ejercicio en el cuaderno. Se recomienda el apoyo en una calculadora o programa informático para el computo de funciones. Unos parámetros a tener en cuenta en la revisión a parte del computo numérico serán el orden y la escritura.

1. Completar la tabla con una calculadora o programa informático y usar los resultados para calcular el límite correspondiente

$$\lim_{x\to 2} (3x^2 - 4)$$

	x tiende a 2 por la izquierda			x tiende a 2 por la derecha		
x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$						

2. Sea la función a trozos dada por

$$p(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$$

Esto es, para cualquier x exepto 2 se toma la función cuadrática; en $x = 2$ se toma el punto. La figura 6 muestra la gráfica de $p(x)$. Responder

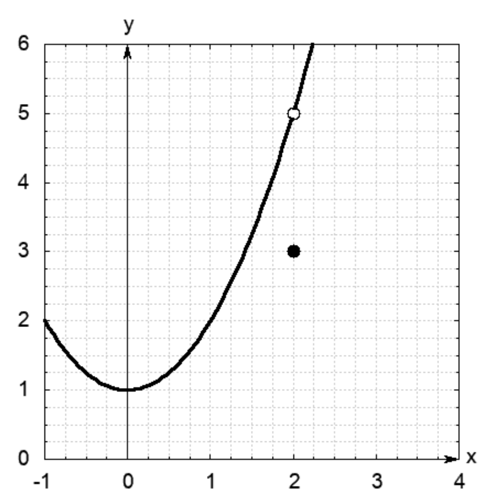


Figura 6: Problema 2.

a) Usando los trazos de la figura o una calculadora estimar:

- el valor de $p(x)$ cuando $x = 1.75$.
- el valor de $p(x)$ cuando $x = 2$.
- el valor de $p(x)$ cuando $x = 2.25$.

b) Según las respuestas anteriores, hallar el límite

$$\lim_{x \to 2} p(x)$$

Argumente su resultado.

3. Graficar la siguiente función a trozos

$$q(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 2x + 1, & x > 1 \end{cases}$$

Por ejemplo, puede usar valores de x entre -1 y 4 ($-1 \leq x \leq 4$) para la tabulación. Usar la gráfica para hallar el límite (si existe)

$$\lim_{x \to 1} q(x)$$

4. Verificar la existencia y el posible valor del siguiente límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

Nota: La sección referencias contiene fuentes de consulta bibliográficas si se tiene posibilidad de acceder a textos o navegación en la red. Estas aparecen en el contenido de este texto con paréntesis cuadrados [...].

Referencias

[1] Pioneros descubriendo las matemáticas, *Qué es un límite*, https://www.youtube.com/watch?v=Lw17XRJo-y0, 2019, Consultado 9 jul 2020.

[2] Víctor Espíritu Montiel and Catalina Navarro Sandoval, *Límites indeterminados mediante el uso de tablas de valores y gráficas*, Revista de Didáctica de las Matemáticas Números **88** (2015), 31–53.

[3] Roland Larson and Robert Hostetler, *Cálculo y geometría analítica*, third ed., McGraw-Hill, jan 1989.

[4] Doris Álvarez et al., *Proyecto sé matemáticas 11: libro del estudiante*, Ediciones SM, 2012.