Solución a triángulos no rectángulos

Matemáticas - Grado 10

2020

1. Y...Si el triángulo no es rectángulo?

En la mayoría de problemas y aplicaciones que maneja la trigonometría casi siempre el planteamiento de la solución se recurre al uso de un triángulo rectángulo. Así, unos cuantos pasos de procedimientos algebraicos y pulsaciones de teclas en una calculadora permite resolver un problema; al menos así se ha inferido desde lecciones anteriores sobre la resolución de problemas con razones trigonométricas. Sin embargo, hay un selecto conjunto de situaciones en los cuales "casi no siempre" se puede resolver a través de un triangulo rectángulo. Tales situaciones se presentan cuando el triángulo construido es NO-rectángulo o la información suministrada no encaja apropiadamente en algunas de las razones trigonométricas.
Para ilustrar una de tales situaciones, se recurre a uno de los emocionantes e instantáneos momentos que presenta el fútbol: el cobro de un tiro libre[1]. La figura 1 muestra el momento inicial de la emocionante jugada y su planteamiento, donde por supuesto los actores principales son un espectador, el jugador que realiza el tiro y el balón [6].

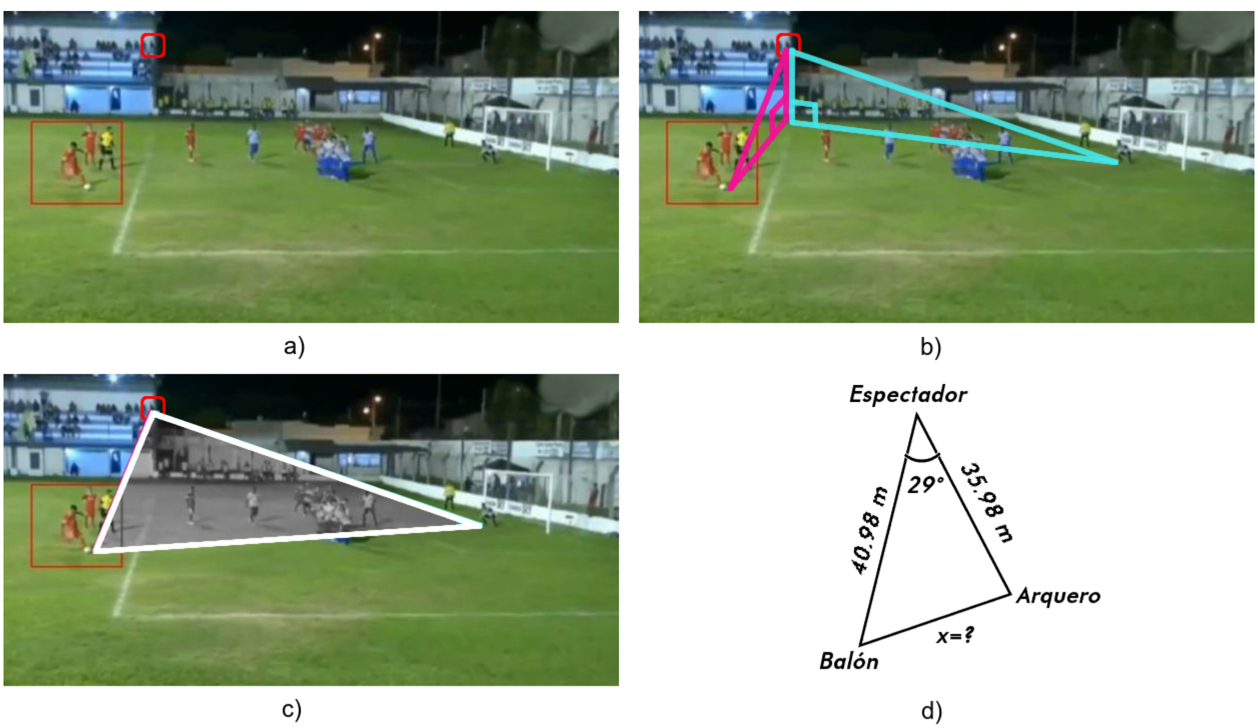


Figura 1: Análisis de una situación del fútbol (cobro de tiro libre) cuyo planteamiento finaliza en la construcción de un triángulo no rectángulo. Desenlace de esta jugada aquí.

[1] En sentido estricto y apasionado a la luz del reglamento se habla de un tiro libre directo, siendo aquel lanzamiento directo a la portería del equipo contrario.

En esta situación deportiva, el esquema de análisis no se aparta de los procedimiento para resolver problemas en trigonometría tratados en la lección anterior: lectura del problema, análisis, planteamiento y solución. El cuadro a) de la figura 1 muestra la atención del espectador desde la tribuna fijada en el jugador quien ejecuta el cobro (ver cuadros en rojo) y quizás, le surgen los interrogantes métricos como: ¿desde esa distancia anotará el gol? ¿que distancia hay desde el balón hasta el arquero?. Asumiendo que nuestro espectador aparte de conocimientos futbolísticos también posee tiene conocimientos trigonométricos, realiza un análisis preliminar como muestra el cuadro b): el espectador está en la tribuna a una altura de 4.5 m; el ángulo de depresión de la línea visual para ver el balón es de 6°, pues debe agachar levemente su cabeza para apreciar el cobro; similarmente, el ángulo de depresión de la visual hacia al arquero es más o menos 7°. Con esta información, él puede construir un par de triángulos rectángulos con vértices en los actores del desarrollo del cobro: uno para el balón (color rosa) y otro para el arquero (color verde claro). Conocido el ángulo de depresión y la altura de la tribuna puede deducir la distancia visual aplicando la razón seno[2]; así, puede determinar la distancia visual hacia el balón y el arquero. Ya que los actores de la jugada son el espectador, balón y arquero, él deduce que el problema se plantea construyendo un triángulo como muestra el cuadro c) pues su objeto es hallar un valor aproximado para la distancia entre balón y arquero. Para terminar su planteamiento, el espectador desde su ubicación debe girar la cabeza unos 29° para apreciar el cobro, permitiendo concluir el planteamiento con el dibujo del cuadro d).
De acuerdo al planteamiento del cuadro d), se observa que el triángulo de la situación no es rectángulo y por la forma de sus ángulos se clasificaría como *acutángulo* y por tanto, no tiene ningún ángulo rectángulo para aplicar alguna razón trigonométrica. Y... Si el triángulo es no rectángulo? Cómo se puede resolver tal triángulo y colaborar a nuestro espectador intrigado? El camino hacia la solución es el objetivo de esta lección y en estas situaciones se recurre al uso de dos herramientas de uso exclusivo en triángulos no rectángulos denominados *teoremas del seno y del coseno*. De aquí, que los propósitos son:

- Identificar y aplicar el teorema más apropiado para resolver situaciones geométricas o reales.
- Resolver las situaciones que requieran la aplicación de algunos de los teoremas.

El documento continua con el marco teórico de los teoremas y cómo aplicarlos, desarrollo de algunos ejemplos y una actividad que muestre el desempeño de la resolución de triángulos no rectángulos con la aplicación de algunos de los teoremas.

2. Teoremas del seno y del coseno

Antes de abordar las herramientas de solución, para esta lección se tienen en cuenta las siguientes notaciones:

- Un triángulo no rectángulo es conocido como *triángulo oblicuángulo*. Triángulos acutángulos y obtusángulos pertenecen a esta denominación.
- Los teoremas[3] mencionados aplican o sirven para triángulos no rectángulos. Esto no quiere decir, que no se pueda aplicar en un triángulo rectángulo; tan sólo, se enfatiza que son apropiados para triángulos oblicuángulo.
- Luego de dibujar el triángulo problema, los ángulos se denotan con letras mayúsculas ubicados cerca del vértice y los lados con la misma letra en minúscula usada en el ángulo opuesto.

En la literatura (libros o internet) en lugar de usar la palabra “teorema” se usa de manera equivalente la palabra “ley”.

2.1. Teorema del seno

[2] En efecto, si D es el ángulo de depresión la razón seno permite hallar la hipotenusa de cada triángulo equivalente a la distancia visual: distancia visual = $\frac{\text{altura}}{\operatorname{sen} D}$

[3] Un *teorema* es una afirmación demostrada que puede llegar a expresarse como una fórmula.

El teorema establece que la razón (o divisón) entre el seno de un ángulo y su lado opuesto permanece constante. Este hecho sucede en cualquier ángulo y su respectivo lado opuesto [2, 1]. En forma de fórmula y de acuerdo a la figura 2 lo anterior se escribe así:

$$\frac{\operatorname{sen} E}{e} = \frac{\operatorname{sen} F}{f} = \frac{\operatorname{sen} G}{g} \tag{1}$$

El teorema se usa apropiadamente en los siguientes casos o situaciones [5, pág. 3]:

- Cuando hay dos ángulos y un lado.
- Cuando hay dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos.

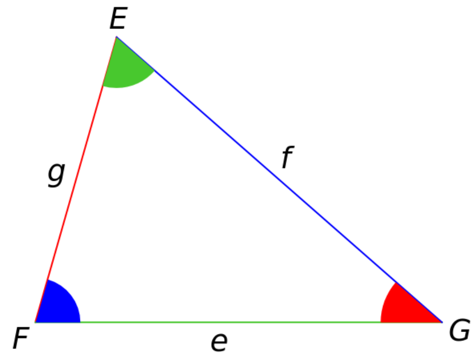


Figura 2: Teorema del seno y su uso en el triángulo: obsérvese los colores que relacionan el ángulo y el lado opuesto. A su vez, los ángulos están escritos en mayúsculas y los lados en minúscula. Estas asociaciones entre colores y letras facilitan el uso del teorema.

2.2. Teorema del coseno

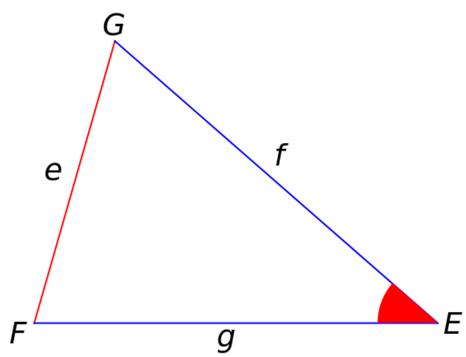


Figura 3: Teorema del coseno y su uso en el triángulo: aquí los colores y letras se relacionan con un sólo ángulo y su respectivo lado opuesto (ver color rojo). Este teorema requiere el conocimiento de los lados adyacentes al ángulo (lados en color azul).

Este teorema menciona que en cualquier triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de ellos por el coseno del ángulo que forman [2, 1]. De acuerdo a la figura 3 se formula así:

$$e^2 = f^2 + g^2 - 2fg\cos E \tag{2}$$

El teorema es útil en los siguientes casos [5, pág. 3]:

- Cuando hay dos lados y un ángulo entre ellos.
- Cuando se conocen todos los lados.

Esta herramienta es conocida como el *teorema de Pitágoras generalizado* pues hay parecido con la fórmula de Pitágoras.

3. Procedimientos para la resolución de triángulos oblicuángulos

Mencionadas las herramientas para tratar los triángulos oblicuángulos un procedimiento para aplicar algún teorema para una situación particular es como sigue:

1) Poner letras a los lados (minúsculas) y los ángulos (mayúsculas) del triángulo.

2) **Identificar** la información disponible del triángulo para obtener una idea preliminar de cual teorema usar:
   - 2 ángulos y 1 lado, o, dos lados y un ángulo opuesto → <u>usar *t. seno*</u>.
   - 2 lados y 1 ángulo entre ellos, o, todos los lados → <u>*t. coseno*</u>.

3) **Aplicar** la respectiva fórmula.

4) Despejar y resolver numéricamente la ecuación planteada.

Los pasos 1) y 2) son esenciales para resolver esta clase de triángulos, pues una vez identificada la información disponible esta se sustituye en la fórmula necesaria para luego realizar los cómputos numéricos. Adicionalmente, hay que tener en cuenta que la suma de los ángulos interiores vale 180°, pues a veces permite conocer un ángulo faltante que no se encuentra en la información inicial [5, pág. 14-21].

4. Ejemplos de aplicación

A continuación se abordan algunos ejemplos mostrando la resolución de triángulos NO rectángulos. Vale la pena recordar de modo sintético que estas situaciones siguen la misma estructura de resolución al igual que con triángulos rectángulos: la lectura del problema, un breve análisis, el planteamiento y su posterior solución.

Ejemplo 1. *Ejemplo geométrico.* Encontrar el perímetro del triángulo de la figura 4 y clasificarlo.

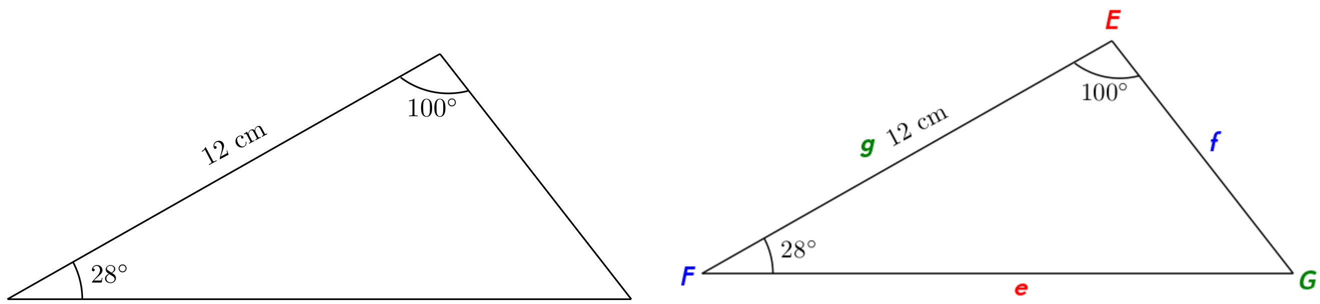


Figura 4: Ejemplo 1. Izquierda: esquema del problema. Derecha: denominación de ángulos y lados (obsérvese que la letra mayúsculas denota el ángulo y la minúscula su respectivo lado opuesto).

1) De acuerdo a la figura 4 (izquierda), se han denotado los ángulos con su respectivo lado opuesto. Se *identifica* de la figura que hay **dos ángulos y un lado común entre ellos** luego conviene usar el **teorema del seno** para hallar los lados faltantes.

2) Para *aplicar* la fórmula 1 del teorema seno se revisa la información disponible: $E = 100°$, $F = 28°$, $g = 12$ cm; las incógnitas son e =? y f =?. El ángulo G no está en la figura, pero se puede determinar con la suma de ángulos interiores, luego $G = 180° - 100° - 28° = 52°$. Antes de aplicar el teorema, es de aclarar que al momento de usarlo solamente se usan dos de las tres fracciones (¡NO las tres al tiempo!) con el objeto de relacionar tres cantidades conocidas y una incógnita. Así, relacionando las letras F y G planteamiento y despeje permiten hallar el lado f,

$$\frac{\operatorname{sen} F}{f} = \frac{\operatorname{sen} G}{g} \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen} 28°}{f} = \frac{\operatorname{sen} 52°}{12} \quad \Rightarrow \quad \frac{0.47}{f} = \frac{0.79}{12} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{0.47 \cdot 12}{0.79} = 7.1 \text{ cm}$$

y similarmente para letras E y G para hallar el lado e,

$$\frac{\operatorname{sen} E}{e} = \frac{\operatorname{sen} G}{g} \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen} 100°}{e} = \frac{\operatorname{sen} 52°}{12} \quad \Rightarrow \quad \frac{0.99}{e} = \frac{0.79}{12} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{0.99 \cdot 12}{0.79} = 15.0 \text{ cm}$$

3) El perímetro es la suma de todos los lados,

$$P = 12 + 7.1 + 15.0 = 34.1 \text{ cm}$$

El triángulo se clasifica comparando (ver si es mayor o menor) el cuadrado de la diagonal con la suma de los cuadrados de los lados menores (hecho tratado en lecciones) anteriores,

$$15.0^2 \quad ? \quad 12^2 + 7.1^2 \quad \Rightarrow \quad 225.0 \quad ? \quad 194.41 \quad \Rightarrow \quad 225.0 > 194.41$$

Por tanto, el triángulo se clasifica como obtusángulo. ∎

Ejemplo 2. *Aplicación en navegación (cinemática).* Hallar el ángulo entre las direcciones de dos aviones que parten de un mismo punto y que al cabo de 3 horas se encuentran a una distancia de 520 km, siendo sus velocidades de 380 Km/h y 420 Km/h respectivamente.

1) Asumiendo que los aviones se desplazan en línea recta sus recorridos forman dos de los tres lados del triángulo; el enunciado de la situación aclara que luego de 3 horas los aviones están separados por 520 Km, medida que completa el tercer lado. Sin embargo, hace falta la medida de la distancia recorrida por cada avión. A partir de las velocidades de cada avión y teniendo en cuenta que distancia=velocidad×tiempo se tiene para cada avión: 1140 Km y 1260 Km. Luego del análisis la figura 5, se *identifica* que están **todos los lados** y como incógnita un ángulo, por tanto es evidente usar el **teorema del coseno** para resolver este problema.

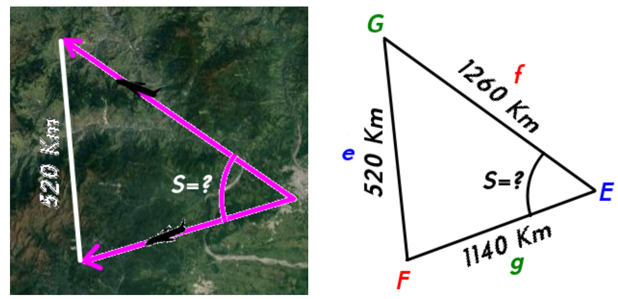


Figura 5: Izquierda: posición de los aviones luego de 3 horas. Derecha: denominación de ángulos y lados del triángulo problema.

2) Para *aplicar* en modo práctico la fórmula 2, la denotación de la letra E se ha dejado justo donde está el ángulo incógnita; esto con el fin de facilitar la sustitución de la información disponible y posterior despeje. Así, se conoce: $e = 520$ Km, $f = 1260$ Km y $g = 1140$ Km y como incógnita $E = S$. Lo que sigue es la aplicación del teorema con la sustitución mencionada y luego el despeje numérico de la incógnita,

$$e^2 = f^2 + g^2 - 2fg\cos E \quad \Rightarrow \quad 520^2 = 1260^2 + 1140^2 - 2\cdot 1260\cdot 1140\cos S \quad \Rightarrow$$

$$270400 = 2887200 - 2872800\cos S \quad \Rightarrow \quad \cos S = \frac{2887200 - 270400}{2872800} \quad \Rightarrow \quad \cos S = 0.91$$

Con ayuda de una calculadora el ángulo S cuyo coseno vale 0.91 vale 24.4°.

3) Luego de 3 horas de haber partido los aviones desde un mismo punto, su ángulo de separación es de 24.4°. ■

Ejemplo 3. *Aplicación a la topografía.* Un topógrafo olvidó su equipo de medición y desea calcular la distancia entre dos edificios. Para ello, desde un punto A logra medir las distancias a los respectivos edificios siendo de 180 m y 210 m. También conoce que el ángulo formado por los dos edificios desde el punto A es de 39.4°. Hallar la distancia entre los dos edificios (adaptado de referencia [3]).

1) La comprensión lectora muestra la construcción del triángulo inferior de la figura 6 donde se identifican **dos lados y un ángulo entre ellos**, justo para usar el **teorema del coseno**. Casos similares que requieran usar este teorema es apropiado poner letra E en el ángulo y así facilitar el reemplazo en la fórmula.

2) De la figura 6 se tiene $f = 210$ m, $g = 180$ m, $E = 39.4°$ y e como incógnita d. Aplicando la fórmula 2,

$$e^2 = f^2 + g^2 - 2fg\cos E$$
$$d^2 = 210^2 + 180^2 - 2\cdot 210\cdot 180\cos 39.4°$$
$$d^2 = 76500 - 75600\cdot 0.77 \quad \Rightarrow \quad d^2 = 18288$$
$$\sqrt{d^2} = \sqrt{18288} \quad \Rightarrow \quad d = 135.23$$

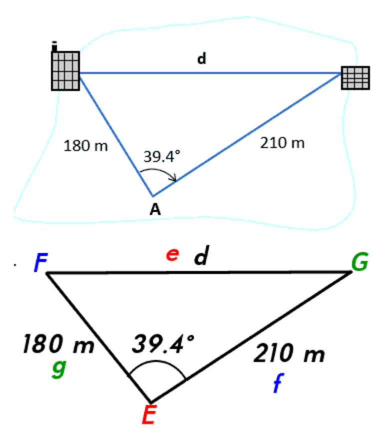


Figura 6: Denotación del triángulo.

3) Los edificios están separados por 135.23 m.

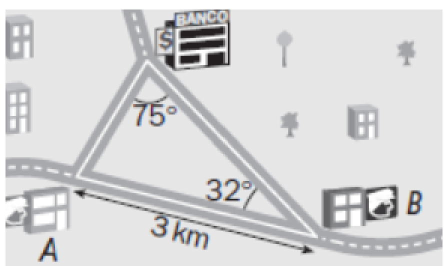
Esta sección ha mostrado el razonamiento para la resolución de triángulos NO rectángulos desde la *identificación* de parámetros (lados y ángulos) y su posterior *aplicación* mediante algún teorema. Otros ejemplos complementarios se pueden revisar en las referencias [4] y [7].
Finalmente, también está disponible software en-línea y para dispositivos (PC y celular) que permiten solucionar problemas de triángulos y que son apropiadas para usar como herramienta de verificación de resultados pues algunas de ellas se limitan al cómputo numérico sin el desarrollo de procedimientos. Una de ellas es TrianCal, el cuál es un software en-línea que resuelve completamente un triángulo a partir de tres parámetros conocidos que se pueden ingresar de manera intuitiva.

5. Actividad Número 8

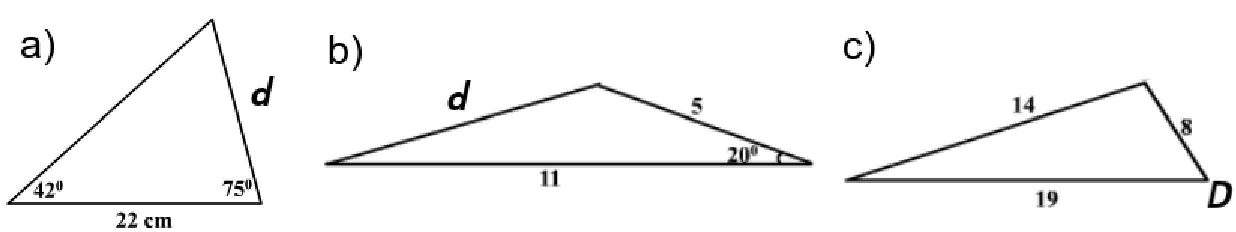
Resolver cada ejercicio con su respectivo procedimiento en el cuaderno. De nuevo, se aclara que el procedimiento de solución no necesariamente debe seguirse como en los ejemplos anteriores, aunque para esta clase de triángulos es casi obligatorio el dibujo de la situación para determinar la estrategia de solución. Unos parámetros a tener en cuenta en la revisión serán el orden y la escritura.

1. Según el contexto planteado en la sección 1, hallar la distancia en metros desde la ubicación del balón hasta el arquero observada por el espectador desde las gradas del estadio.

2. Un banco está ubicado en la parte alta de una loma y desde allí, cuesta abajo se observan dos estaciones de policía separadas por un ángulo de 75°. Los policías de la estación A pueden acudir al banco a una velocidad de 22 Km/h y los de la estación B a 45 Km/h. Desde la estación B, la línea hacia el banco forma un ángulo de 32° con la línea que une a las dos estaciones, las cuales están separadas 3 Km (ver figura). En caso de una emergencia en el banco ¿Que policías llegarían primero?



3. Para cada triángulo y según la información que aparece, solamente mencionar y escribir con que teorema se puede hallar la incógnita de letra d (mayúscula o minúscula). No hay que resolver el triángulo.



Nota: La sección referencias contiene fuentes de consulta bibliográficas si se tiene posibilidad de acceder a textos o navegación en la red. Estas aparecen en el contenido de este texto con paréntesis cuadrados [...].

Referencias

[1] Milton Abramowitz y Irene Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, tenth ed., pág. 79, National Bureau of Standards, dec 1972, disponible en http://people.math.sfu.ca/~cbm/aands/page_79.htm.

[2] Marlady Bogota y Víctor Ardila, *Supermat 10*, Educactiva, sep 2000.

[3] Carlos Alberto Julián, *Ley de cosenos - Ejercicios resueltos*, https://www.fisimat.com.mx/ley-de-cosenos/, 2020, Consultado 10 Oct 2020.

[4] Diana Marcela Molina Acuña, *Teorema del seno 1*, https://www.youtube.com/watch?v=0tgR2usFzi0, 2020, Consultado 14 Oct 2020.

[5] Diego Fernando Ramírez Jiménez, *Resolución de triángulos oblicuángulos*, arXiv e-prints (2019), 3, disponible en https://arxiv.org/abs/1909.12119.

[6] Feisal Rishmawy, *El golazo de tiro libre de Marcelo Saraiva*, https://futbolcentroamerica.com/noticias/El-golazo-de-tiro-libre-de-Marcelo-Saraiva-20200120-0008.html, 2020, Consultado 7 oct 2020.

[7] El típico problema, *El típico problema de calcular un lado mediante el teorema del coseno*, https://www.youtube.com/watch?v=XDHUZ8Ft6kQ, 2014, Consultado 14 Oct 2020.