# Usos de las relaciones trigonométricas

Matemáticas - Grado 10

2020

## 1. Sobre el uso de las relaciones trigonométricas

A manera de introducción, en la clase anterior (ver documento *Trigonometría: ángulo y relaciones* nombrado como `rel_trigmt-mini.pdf`) se analizaron dos razones entre los lados de un triángulo rectángulo y su *relación* con el ángulo. En primer análisis se considero la relación entre el ángulo y la razón cateto opuesto-hipotenusa, y su conclusión fue que a mayor longitud del cateto también aumenta la razón y el ángulo. En la relación entre el ángulo y la razón cateto adyacente-hipotenusa (a pesar que el cateto adyacente se mantuvo de medida fija), se concluyo del análisis que a medida que aumenta la hipotenusa y el ángulo la razón disminuye. Claramente, del análisis realizado muestra la relación matemática entre ángulo y un par de lados del triángulo en cuestión, por lo que, en términos de lenguaje matemático se habla mejor de *relaciones trigonométricas* en lugar de *razones trigonométricas*. Ya que el triángulo rectángulo tiene 3 lados y tomando 2 razones respecto a un ángulo a la vez, existen $3 \times 2 = 6$ relaciones, que serán el tema a tratar más adelante.
La importancia de las relaciones trigonométricas se ha mostrado históricamente desde tiempos antiguos para el desarrollo y solución de diversas situaciones. La determinación del tamaño de la Tierra por Eratóstenes (siglo III a.C.); el cómputo del ángulo de elevación de un cañón distancia para garantizar un impacto efectivo en el blanco durante campañas militares del siglo XVIII; la necesidad de algoritmos prácticos en la navegación marítima para la ubicación geográfica y de tiempo (tanto en tiempos antiguos como contemporáneos); la construcción de un edificio que cumpla ciertas exigencias de resistencia y orientación, son tan sólo ejemplos representativos donde actúan las relaciones trigonométricas[5].
Para esta clase, tiene por objetivos el conocimiento y aplicaciones sencillas de tales relaciones. Así mismo, es de requerimiento la identificación de las partes del triángulo rectángulo, el despeje de ecuaciones y el manejo de calculadora. En modo de objetivos específicos, se pretende.

- Reconocer e identificar las 6 relaciones trigonométricas.
- Manejar de la calculadora para encontrar una relación trigonométricas.
- Usar las relaciones trigonométricas para proponer soluciones a problemas.

A continuación se desarrolla el tema iniciando con las relaciones trigonométricas, seguido por el manejo de la calculadora y por último una actividad aplicada para la información aprendida.

## 2. Relaciones trigonométricas

### 2.1. Definición

Las seis relaciones se definen como el cociente entre dos lados del triángulo rectángulo y el ángulo entre ellos. Es muy importante mencionar que hay que tener cuidado y concentración en el ángulo en cuestión, pues el determina la forma de la relación y el planteamiento de un problema. Por ello, se recomienda realizar el dibujo de un triángulo con un sólo ángulo (el que contiene alguna medida o de referencia del problema).

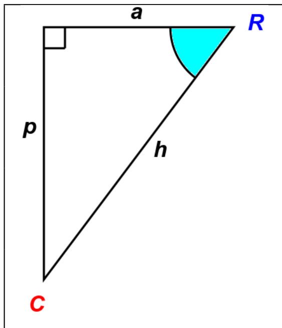
|  | Fundamentales | Complementarias |
|---|---|---|
| | $\operatorname{sen} R = \frac{\text{C. Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{p}{h}$ | $\operatorname{cosec} R = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{C. Opuesto}} = \frac{h}{p}$ |
| | $\cos R = \frac{\text{C. Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a}{h}$ | $\sec R = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{C. Adyacente}} = \frac{h}{a}$ |
| | $\tan R = \frac{\text{C. Opuesto}}{\text{C. Adyacente}} = \frac{p}{a}$ | $\cot R = \frac{\text{C. Adyacente}}{\text{C. Opuesto}} = \frac{a}{p}$ |



Tabla 1: Triángulo rectángulo de referencia y sus relaciones trigonométricas. La posición y letras del triángulo se han denotado de manera asociativa: el cateto $a$ es el adyacente (pegado) al ángulo de referencia $R$, el cateto $p$ es el opuesto (alejado) al ángulo de referencia $R$ y $h$ es la hipotenusa. El ángulo $C$ (que no está dibujado) es el ángulo complementario de $R$, esto es, $C = 90° - R$ [6].

Para un triángulo rectángulo la tabla 1 enuncia las relaciones con el ángulo de referencia. Ellas estas escritas en forma abreviada (pues es el modo común de trabajarlas para ahorrar escritura): **sen** indica razón *seno*, **cos** indica razón *coseno*, **tan** indica razón *tangente*, **cosec** indica razón *cosecante*[1], **sec** indica razón *secante*, **cot** indica razón *cotangente*. El motivo de "bautizar" las relaciones con estos nombres son derivaciones lingüísticas del latín asociadas a las partes de la circunferencia y se expondrán en otra oportunidad [2]. La tabla las clasifica, a modo de columnas, en dos grupos de relaciones:

**Fundamentales:** históricamente son las más relevantes o primordiales al momento de ubicar en un triángulo. Tanto en la antigüedad como en el tiempo de hoy, sus valores numéricos son de fácil acceso. Antes de la invención de la calculadora estos valores aparecían en libros denominados *tablas de logaritmos y funciones trigonométricas* [1]; hoy en día, si Ud. observa una calculadora científica, en ella aparecen únicamente las teclas representativas de estas relaciones. Este grupo también se conoce como *relaciones directas*.

**Complementarias:** son las relaciones a las que les antecede el prefijo *co*. También conocidas como *relaciones reciprocas*, pues están definidas en modo invertido a las fundamentales. No son ampliamente usadas (una razón por la cual no aparecen en la calculadora) y un computo rápido se realiza de la forma 1÷(relación fundamental).

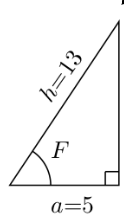
**Ejemplo 1.** En un triángulo rectángulo la razón secante es conocida para un ángulo de referencia y vale $\sec F = \frac{13}{5}$. Hallar el valor de las otras relaciones trigonométricas.

1) El ángulo de referencia es $F$ y de la tabla 1 comparando con la relación secante, se obtiene que por igualación de términos

$$\sec F = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{C. Adyacente}} = \frac{h}{a} \to \frac{13}{5}$$

Por tanto, $h = 13$ y $a = 5$. Esto es, ya se conocen dos lados del triángulo y la posición del ángulo.

2) El teorema de Pitágoras: $h^2 = a^2 + p^2$





permite hallar el lado desconocido: $p = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, luego ya se conocen los tres lados.

3) Las cinco relaciones restantes se hallan con ayuda de la tabla 1.

$$\operatorname{sen} F = \frac{12}{13}, \qquad \cos F = \frac{5}{13},$$
$$\tan F = \frac{12}{5}, \qquad \operatorname{cosec} F = \frac{13}{12},$$
$$\cot F = \frac{5}{12}.$$

[1] También se simboliza como csc.

**Ejemplo 2.** Dada cada relación fundamental encontrar la relación complementaria,
1) $\operatorname{sen} K = \frac{4}{5}$. 2) $\cos H = \frac{2}{7}$. 3) $\tan L = 0.25$.
Téngase en cuenta que cada relación fundamental tiene una relación complementaria a través de de la forma 1÷(relación fundamental).

1) La relación complementaria para el seno es la cosecante; puesto que la expresión tiene forma fraccionaria, basta con invertir sus términos según definición de la tabla 1,

$$\operatorname{cosec} K = \frac{5}{4}$$

2) La relación complementaria para el coseno es la secante; otro modo de encontrar la relación es usar $sec = 1 \div cos$ y aplicar la consabida *regla de la oreja*,

$$\sec H = \frac{1}{\cos H} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{2}{7}} = \frac{7 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{7}{2}$$

3) La relación complementaria para la tangente es la cotangente; aquí, un computo ágil con una calculadora $1 \div \tan L = 1 \div 0.25 = 4.0$, luego

$$\cot L = 4.0$$

De los anteriores ejemplos se aprecia que las relaciones seno y coseno son menores a 1; secante y cosecante mayores a 1, y las relaciones tangente y cotangente pueden tener cualquier valor.

## 2.2. Manejo de la calculadora científica

Este instrumento electrónico permite ahora realizar los cálculos trigonométricos de forma ágil y práctica. Dada su importancia en secundaria para las ciencias aplicadas, aquí se expondrá una guía básica, tratando de generalizar el tipo de calculadoras que existen en el mercado[2].

| Características generales | |
|---|---|
| AC | Elimina todo lo que se haya introducido en pantalla. |
| EXE , = | Ejecuta o evalúa una instrucción. |
| Ans | Permite acceder al último resultado calculado; esto es, una memoria de muy corto plazo. |
| MODE | Permite escoger el sistema de medida angular. Pulsando esta tecla junto con un número clave se puede elegir: DEG sistema sexagesimal, RAD sistema cíclico, GRA sistema centesimal. Genéricamente ese número clave es 4, 5, 6. En dispositivos Android, la tecla ° equivale a sistema sexagesimal. |
| SHIFT | Permite a acceder a segundas funciones. En dispositivos Android, la tecla INV hace este papel. |
| $x^{-1}$ | Halla el reciproco de un número, es decir $1 \div x$. |
| sin, cos tan | Evalúa una función trigonométrica de un ángulo. Por diseño de fábrica la función seno está escrito en inglés, sine. |
| $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ $\tan^{-1}$ | Evalúa el ángulo de una razón trigonométrica. Se accede combinando SHIFT func. trig número |

Tabla 2: Funciones de calculadora científica de uso común en Trigonometría.

En el momento de usar la calculadora, se debe reconocer el separado decimal ya que no tener esto en cuenta puede llevar a confusiones y errores. Para reconocer el separador de su dispositivo, evalúe por ejemplo 4003÷4;

[2] El autor presente, manifiesta que la calculadora de mayor uso por la comunidad estudiantil es la casio fx-82.

el resultado es 1000.75, por tanto el carácter separador de decimales aparece después de 1000. Similarmente, para verificar que los ángulos corresponden al sistema sexagesimal evalúe $\boxed{\text{tan}}$ $\boxed{45}$: si su resultado es 1 está correctamente configurado, de lo contrario revise su dispositivo. Una información más amplia de configuración se encuentra en la referencia electrónica [3].

**Ejemplo 3.** Nota: los siguientes ejemplos requieren una calculadora científica configurada en sistema sexagesimal (modo DEG con unidad de grados para el ángulo)[3].

1) Evaluar $\operatorname{sen} 20.505°$
2) Calcular $\cot 75.3°$
3) Computar el ángulo $M$, si $\cos M = 0.6$; es decir, ¿cuál es el ángulo $M$ para que el coseno sea 0.6?

1) Ingresando directamente a la calculadora:
$\boxed{\text{sin}}\boxed{20.505}\boxed{=}0.350$
En otras calculadoras, el ingreso es al revés, primero el número y luego la función:
$\boxed{20.505}\boxed{\text{sin}}\boxed{=}0.350$

2) Puesto que casi ninguna calculadora trae la tecla cotangente, el computo se realiza de varias maneras aprovechando su relación complementaria. Usando paréntesis,
$\boxed{(}\boxed{\text{tan}}\boxed{75.3}\boxed{)}\boxed{x^{-1}}\boxed{=}0.262$
Otro modo usando la memoria de la tecla $\boxed{\text{Ans}}$; primero
$\boxed{\text{tan}}\boxed{75.3}\boxed{=}3.811$
luego limpiar la pantalla $\boxed{\text{AC}}$ y finalmente
$\boxed{1}\boxed{/}\boxed{\text{Ans}}\boxed{=}0.262$

3) El computo es:
$\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\text{cos}}\boxed{0.6}\boxed{=}53.13$
Quizás para otras calculadoras, el registro es al revés:
$\boxed{0.6}\boxed{\text{INV}}\boxed{\text{cos}}\boxed{=}53.13$
Luego el ángulo es de 53.13°.

En dispositivos Android, la calculadora científica pre-configurada de fabrica posee limitadas funciones y algunas versiones obsoletas del sistema operativo no traen la configuración científica. Por tal razón, se sugiere la aplicación RealCalc Scientific Calculator. Esta es una calculadora científica gratuita con ingreso de instrucciones al revés.

### 2.3. Usando las relaciones trigonométricas

Un uso básico de las relaciones consiste en resolver o encontrar toda la información de un triángulo rectángulo, esto es: sus 3 lados, sus 3 ángulos, perímetro y área; o también, alguna información particular del triángulo: un lado o un ángulo. En cualquier modo, para resolver tal problema, como mínimo se necesita conocer dos elementos siempre y cuando uno de ellos sea un lado. También vale la pena tener en cuenta que en esta clase de triángulos uno de sus ángulos vale 90°.
El procedimiento para abordar problemas con un triángulo rectángulo sigue este esquema:

I) Dibujar el problema e identificar elementos conocidos si no existe una figura de apoyo.

II) Reconocer la información conocida. Aquí puede suceder: se conocen un ángulo y un lado, o, se conocen dos lados.

III) Plantear una relación trigonométrica o aplicar el teorema de Pitágoras y usar despeje de ecuaciones para encontrar la solución solicitada.

En seguida se profundizara en un repaso elemental de despeje de ecuaciones y en el numeral II).

[3] En física, se prefiere trabajar con el sistema cíclico, esto es el radian como unidad de ángulo; luego es necesario el modo RAD.

### 2.3.1. Despeje de ecuaciones

Si Ud. considera tener un dominio adecuado en esta temática puede omitir esta subsección y continuar con la siguiente.
En esta temática particular, las ecuaciones que aparecen son de 3 variables siendo dos de ellas conocidas y "por lo general"de forma fraccionaria $x = \frac{y}{z}$, lo cual facilita la mecanización y el adiestramiento; muchas fórmulas de la geometría, física y química se expresan de ese modo, incluso con más variables. Para el despeje de una variable, esta clase de ecuaciones usa la propiedad matemática de mantener la igualdad en ambos lados siempre y cuando los dos miembros se multipliquen (o se dividan) por una misma cantidad[4] [4].

**Ejemplo 4.** De la ecuación $x = \frac{y}{z}$, despejar: 1) $y$. 2) $z$.

1) Multiplicando ambos miembros de la ecuación por $z$,

$$z \cdot x = z \cdot \frac{y}{z}$$
$$z \cdot x = \cancel{z} \cdot \frac{y}{\cancel{z}}$$
$$z \cdot x = y$$

que equivale a

$$y = z \cdot x$$

2) Aquí, primero al multiplicar la ecuación por $z$, deja el resultado del ejemplo anterior,

$$z \cdot x = y$$

luego dividiendo ambos miembros de la ecuación por $x$,

$$\frac{z \cdot x}{x} = \frac{y}{x}$$
$$\frac{z \cdot \cancel{x}}{\cancel{x}} = \frac{y}{x}$$

que equivale a

$$z = \frac{y}{x}$$

El anterior ejemplo generalizado pueden aplicarse a fórmulas de 3 variables como la densidad (química) $D = \frac{m}{V}$, aceleración media (física) $a = \frac{v}{t}$, o incluso en una fórmula de 4 variables como el volumen de una caja (geometría) $V = abc$. Es sólo cuestión de asociar cada variable a las respectivas letras $x$, $y$, $z$ [7].
Otra manera para el adiestramiento de despeje en fórmulas de la forma $x = \frac{y}{z}$ consiste en el uso de un triángulo nemotécnico[5] como el de la figura 1.

En la punta izquierda del triángulo se ubica el miembro izquierdo de la ecuación, es decir $x$ (en rojo), en la punta de arriba $y$, y en la punta derecha $z$.

- Para despejar la variable $y$ basta con ocultarla con el dedo; lo que queda visible es el producto $x \cdot z$.
- Para despejar la variable $z$ basta con ocultarla con el dedo; lo que queda visible es la división $\frac{y}{x}$.

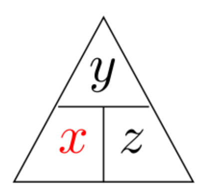


Figura 1: Esquema para facilitar el despeje de una letra en una fórmula de 3 variables.

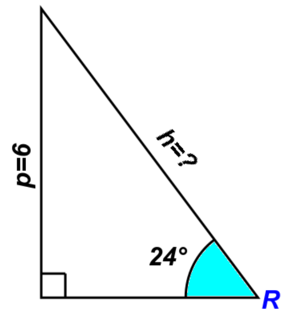
### 2.3.2. Metodología para resolver triángulos rectángulos

Según los datos del triángulo, se procede a identificar los lados conocidos y desconocidos, junto con el ángulo que los relaciona. Lo anterior permite usar la relación trigonométrica adecuada para luego plantear, despejar y con cómputos numéricos encontrar la información solicitada.

[4] Tema aprendido en Matemáticas grado 9.
[5] Procedimiento de asociación mental para facilitar el manejo de algo.

**Ejemplo 5. Cuando se conoce un lado y un ángulo agudo.** Encontrar la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene un ángulo de 24° y un cateto opuesto de 6 cm.

1) Diagrama




2) Para adquirir dominio en la solución, conviene nombrar cada elemento disponible con las letras usadas en la tabla 1, luego $\measuredangle R = 24°$, $p = 6$; el elemento desconocido es $h$ =?. Se procede a "encajar" los 3 elementos del problema con una relación trigonométrica específica y de preferencia que sea una fundamental.

3) La más apropiada para el planteamiento es la relación seno:

$$\operatorname{sen} R = \frac{p}{h}, \quad \operatorname{sen} 24° = \frac{6}{h}$$

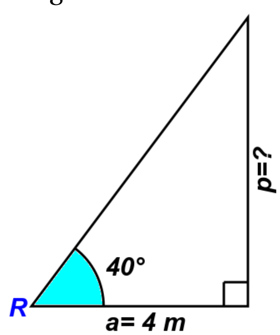
Despejando y calculando $h$,

$$h = \frac{6}{\operatorname{sen} 24°} = \frac{6}{0.407} = 14.74$$

La hipotenusa vale 14.74 cm.

**Ejemplo 6. Cuando se conoce un lado y un ángulo agudo.** Encontrar el área (en metros cuadrados) del triángulo rectángulo de la figura.

1) Diagrama




2) De la figura se tiene el ángulo $\measuredangle R = 40°$ y cateto adyacente $a = 4$. El área de un triángulo es

$$A = \frac{a \cdot p}{2}$$

siendo $a$ la base (cat. adyacente) y $p$ la altura (cat. opuesto), siendo este el elemento desconocido, $p$ =?. Por "encaje", los 3 elementos del problema coinciden con la relación tangente.

3) El planteamiento con la relación tangente es:

$$\tan R = \frac{p}{a}, \quad \tan 40° = \frac{p}{4}$$

Despejando y calculando $p$,

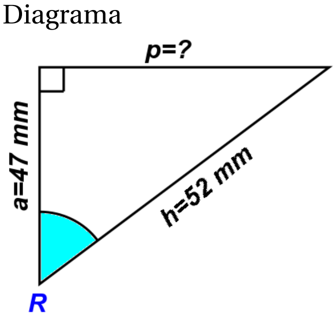
$$p = 4 \cdot \tan 40° = 4 \cdot 0.839 = 3.356$$

El cateto opuesto vale 3.356 m, luego el área es

$$A = \frac{4 \cdot 3.356}{2} = 6.71 \quad \text{m}^2$$

**Ejemplo 7. Cuando se conocen dos lados**[6]. Encontrar todos los ángulos agudos del triángulo rectángulo de la figura; expresar cada ángulo en el sistema sexagesimal.

1) Diagrama




Aquí el ángulo $\measuredangle R$ fue ubicado arbitrariamente; también se hubiese podido elegir el ángulo del vértice opuesto.

2) Sin embargo, una vez elegido el ángulo respecto a él se identifican los lados. Por la elección tomada, se conoce el cateto adyacente $a = 47$ y la hipotenusa $h = 52$; se desconoce el ángulo $\measuredangle R$. El encaje de elementos cae muy bien con la relación coseno. Así que el planteamiento es:

$$\cos R = \frac{a}{h}$$

3) Con los datos se tiene $\cos R = \frac{47}{52}$. Aquí no es necesario despejar, luego:

$$\cos R = 0.904$$

Revisando el ejemplo 3, una calculadora permite conocer el ángulo cuyo coseno vale 0.904. Este vale $R = 25.31°$. El segundo ángulo se halla usando el ángulo complementario

$$\measuredangle C = 90° - \measuredangle R = 90° - 25.31° = 64.69°$$

[6] En estas situaciones hay que poner especial cuidado en la identificación de los lados.

## 3. Actividad Número 4

Resolver cada ejercicio en el cuaderno. Luego de la lectura del ejercicio, se recomienda realizar un gráfico claro para realizar un planteamiento y procedimiento ordenado hacia la solución.

1. En un triángulo rectángulo la relación seno para un ángulo de referencia vale $\operatorname{sen} A = \frac{12}{15}$.
   a) Encontrar las otras relaciones trigonométricas.
   b) Hallar el ángulo $A$ en sistema sexagesimal. **Ayuda.** Existen un par de métodos: sin calculadora; dibujar el triángulo rectángulo, ubicando correctamente los lados y el ángulo según la relación y con un transportador medir el ángulo en cuestión. Con calculadora; convertir la fracción a número decimal mediante una división y seguir las indicaciones del ejemplo 3.
2. En un triángulo rectángulo $\triangle PQR$ (el ángulo $Q = 90°$) se conoce que $\operatorname{sen} R = 0.2727$. Encontrar el ángulo complementario $P$.
3. Encontrar el área de un triángulo rectángulo cuyo ángulo agudo es de 62° y cateto adyacente es de 240 cm.

**Nota:** La sección referencias contiene fuentes de consulta bibliográficas si se tiene posibilidad de acceder a textos o navegación en la red. Estas aparecen en el contenido de este texto con paréntesis cuadrados [...].

## Referencias


[1] Milton Abramowitz and Irene Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, tenth ed., National Bureau of Standards, dec 1972.

[2] Marlady Bogota and Víctor Ardila, *Supermat 10*, Educactiva, sep 2000.

[3] Yo Te Explico, *Configuración básica de mi calculadora*, https://www.youtube.com/watch?v=ZyX-OEhxWaI, 2016, Consultado 14 jun 2020.

[4] Antonio González, *Despejar en ecuaciones*, https://www.slideshare.net/onio72/fq1-despejar-en-ecuaciones/1, 2014, Consultado 20 jun 2020.

[5] Ronald González, *Usos y aplicaciones de las razones trígonométricas.*, https://sites.google.com/site/razones1883/usos-y-aplicaciones-de-las-razones-trigonometricas, Consultado 13 jun 2020.

[6] Roland Larson and Robert Hostetler, *Cálculo y geometría analítica*, third ed., McGraw-Hill, jan 1989.

[7] Darío Rivera, *Despeje de variables en fórmulas*, https://www.youtube.com/watch?v=UvCkJ7OkL2M, 2016, Consultado 20 jun 2020.