Cálculo analítico de límites: técnicas y propiedades

Matemáticas - Grado 11

2020

1. La estrategia

Desde un punto de vista secuencial, el *Cálculo* (como rama de las Matemáticas) introduce el *concepto de límite de una función* como una necesidad rigurosa para dar estructura sólida y aplicada a la siguiente variante del cálculo denominada *Cálculo Infinitesimal*. De aquí la necesidad de profundizar en la temática bajo el enfoque de la pregunta ¿cómo calcular el límite de una función?

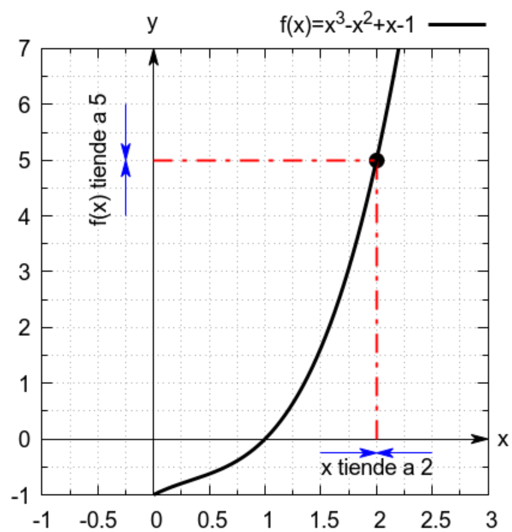

Figura 1: Gráfica de la función.

x	$f(x)$
1.9	4.1490
1.99	4.9105
1.999	4.9910
1.9999	4.9991
2.0001	5.0009
2.001	5.0090
2.01	5.0905
2.1	5.9510

Tabla 1: Valores de $f(x)$ cuando $x \to 2$.

Como ejemplo para analizar la pregunta, considerar el límite de la siguiente función cúbica

$$\lim_{x\to 2}(x^3 - x^2 + x - 1)$$

Los recursos aportados desde la concepción de la definición de límite son la gráfica de la función y una tabulación complementaria desde una calculadora para observar una tendencia como muestran la figura 1 y la tabla 1 [1]. El proceso siguiente es aplicar la definición de límite[1] con un sentido práctico, esto es, que la función $f(x)$ *necesaria y suficientemente* cumpla en las vecindades de $x \to c$, con *i)* poseer dos límites laterales finitos y *ii)* que estos límites sean iguales [6]. La función cúbica en cuestión cumple con esos dos requisitos, de modo que permite afirmar con seguridad que

$$\lim_{x\to 2}(x^3 - x^2 + x - 1) = 5$$

Sin embargo, habitualmente no se suele utilizar tal procedimiento tan extenso, que por cierto no siempre es efectivo y rápido. A cambio, el camino a seguir es el uso de recursos algebraicos (operaciones básicas del álgebra,

[1] Aquí se recuerda muy brevemente la actual definición. La notación $\lim_{x\to c} f(x) = L$ implica que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad 0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$; por cierto nada amable. Ver en [5].

factorización) y propiedades que surgen desde la misma definición formal del límite. Este será el objetivo de las próximas secciones para dar respuesta a la pregunta planteada.
En la práctica, la estrategia implementada para calcular límites se podría sintetizar así:

1. Reconocer el límite en sus partes fundamentales

$$\underbrace{\lim_{x\to 2}}_{\text{Tendencia}} \overbrace{(x^3 - x^2 + x - 1)}^{\text{Función}} = 5 \to \text{Resultado}$$

   es decir, observar la forma de la función $f(x)$ y ver en donde ocurre la tendencia $x \to c$ pues el número c puede ser finito o infinito. El reconocimiento previo de la función y la tendencia permiten dar una idea del "comportamiento de la función" y de las posibles anormalidades cerca de la tendencia.

2. Aplicar la primera (y básica) técnica de **sustitución directa**, reemplazando la tendencia c en la función, esto es, calcular $f(c)$. Esto es posible *siempre y cuando* c sea un número finito; si c equivale al infinito $(x \to \infty)$ se emplea una táctica diferente. Si la función tiene un "buen comportamiento", el límite de la función es justamente la función calculada en $x = c$. Es decir, $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. La función cúbica de ejemplo hace parte de ese selecto grupo de funciones de buen comportamiento, por tanto

$$\lim_{x\to 2}(x^3 - x^2 + x - 1) = (2)^3 - (2)^2 + (2) - 1 = 8 - 4 + 2 - 1 = 5$$

3. Por último verificar la existencia del límite y su valor, el cual debe existir y ser finito. Si luego de la sustitución el resultado obtenido es finito y lógico se tendrá un **límite determinado** finalizando el procedimiento. Sin embargo, hay casos que luego de la sustitución, deja un resultado ilógico e inconcluso conocido como **límite indeterminado**; resultados como

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0$$

   hacen parte de estos casos. En estas situaciones se emplea una técnica que cambie la forma de la función pero no su fondo, es decir, se manipula la expresión para conseguir otra equivalente donde las operaciones tengan sentido lógico y correcto. Usualmente se recurre a la manipulación algebraica o factorización para aplicar en una segunda oportunidad la sustitución con la esperanza de hallar un resultado concreto.

Para el desarrollo de la estrategia mencionada, primero se mostrará una síntesis de funciones conocidas para luego abordar la aplicación de técnicas de cálculo de límites mediante ejemplos. El documento concluye con un conjunto de ejercicios en la actividad propuesta.

2. Síntesis de funciones

Resumir el basto universo de funciones en unas pocas líneas frente al tema tratado aquí es una labor imposible. Aun así, la mayoría de ellas contienen partes comunes de modo que se pueden clasificar por tipos. En lenguaje común y muy generalizado, hay dos clases de funciones: *algebraicas*, conformadas por expresiones con números y variables vinculados por operaciones aritméticas $(+, -, \times, \div, \square^\square, \sqrt{})$ que en teoría se pueden resolver con lápiz y papel y las *trascendentales*, como aquellas que no se pueden resolver con lápiz y papel y requieren un instrumento de cómputo (calculadora o antiguamente una tabla de valores por ejemplo)[2]. La tabla 2 hace un resumen de los tipos de funciones y su "comportamiento" relativo al cálculo de límites.
Funciones algebraicas son las tipo polinomial, racional e irracional; funciones trascendentales son las trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Las funciones por pedazos o trozos caen fuera de la clasificación mencionada.

[2]Por supuesto existe un formalismo matemático puntual para catalogar estos grupos de funciones más alla si se puede resolver manualmente o no, pero cae fuera del contexto de este documento.

Tipo de función	**Ejemplo**	**Comportamiento en $x = c$**
Polinómicas	$f(x) = a + bx + cx^2 + \ldots + mx^n$	Bueno para todo c.
Racionales	$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$	Bueno en todo c, excepto en aquel lugar donde $q(c) = 0$.
Irracionales	$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$	Si el índice n es par, es bueno si $g(c) \geq 0$.
		Bueno para todo c si el índice n es impar.
Trigonométricas	$\sin x$, $\cos x$	Bueno para todo c.
	$\tan x$, $\sec x$ (x en radianes)	Bueno en todo c, excepto en $\ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$
	$\cot x$, $\csc x$ (x en radianes)	Bueno en todo c, excepto en $\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$
Exponenciales	$f(x) = a^x$ con a positivo	Bueno para todo c.
Logarítmicas	$f(x) = \log_a x$ con a positivo y $a \neq 1$	El número c debe ser mayor a 0.
A trozos	$f(x)$ es definida por partes	Mal comportamiento en c. Requiere tabla y gráfica.

Tabla 2: Tipos de funciones matemáticas habituales; se aclara que está clasificación no es única y puede variar según el autor. Lo que ella pretende es mostrar el “comportamiento” o aquellos lugares numéricos donde existen anormalidades que aparecen en el cálculo de límites. El número c se asume finito y cualquiera; las funciones $g(x)$, $p(x)$ y $q(x)$ pueden ser polinomios.

3. Técnicas para calcular límites

A continuación se muestran ejemplos de límites y técnicas para el cálculo de límites. En la gran mayoría de ellos inicialmente se realiza la sustitución directa.

3.1. Técnica de sustitución

Ejemplo 1. Algunos límites básicos. Calcular el límite de cada función polinomial:

1) $\lim\limits_{x \to -3} 4$ 2) $\lim\limits_{x \to 3} x$ 3) $\lim\limits_{t \to -4} t^4$

1) Aunque la función parezca simple el límite no es trivial pues no hay nada en que sustituir.

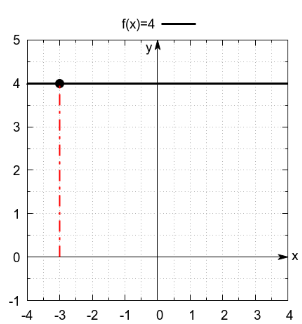

Figura 2: Función constante.

Aún así, el gráfico confirma que

$$\lim_{x \to -3} 4 = 4 \qquad \blacksquare$$

2) Aquí, esta función polinomial su comportamiento es bueno en cualquier número.

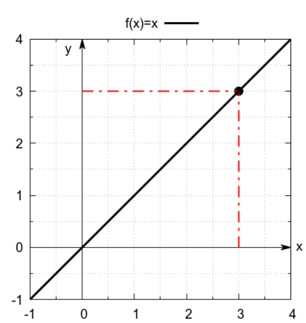

Figura 3: Función idéntica.

Por sustitución, el límite es rápido

$$\lim_{x \to 3} x = (3) = 3 \qquad \blacksquare$$

3) La variable independiente no siempre es x; puede ser cualquier letra o símbolo.

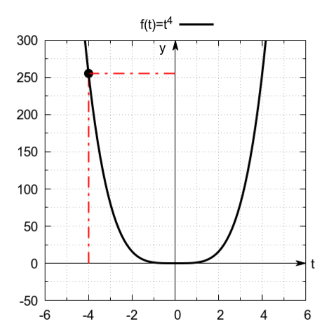

Figura 4: Función cuártica.

Por sustitución directa

$$\lim_{t \to -4} t^4 = (-4)^4 = 256 \qquad \blacksquare$$

La razón de incluir el gráfico en cada función del ejemplo 1 es mostrar una consecuencia obvia en la función polinomial aplicable en otras funciones similares. En cada gráfico la curva no tiene interrupciones en el intervalo mostrado lo cual justifica usar las palabras *buen comportamiento*. En el lenguaje puntual del cálculo, lo anterior es equivalente a decir que la función es **continua** porque tanto el límite como valor de la función existen y tienen el mismo valor en cada punto del intervalo mostrado. Esta también es una justificación de usar la técnica de sustitución en modo rápido y directo en el cálculo de un límite [2].

Ejemplo 2. Límites de funciones algebraicas. Hallar

1) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+x-6}{x+3}$ 2) $\lim\limits_{z\to -3} \sqrt{\dfrac{3z}{z^2-1}}$ 3) $\lim\limits_{t\to -27} \dfrac{2t+1}{\sqrt[3]{t}}$

1) La función es racional con polinomios en numerador y denominador. Por tanto, hay que observar que el denominador no sea 0 cuando $x \to 3$. Por sustitución

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x-6}{x+3} &= \frac{(3)^2+(3)-6}{(3)+3}\\ &= \frac{9+3-6}{3+3} = \frac{6}{6}\\ &= 1 \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

2) Una función mixta: aparte de racional también es irracional con índice 2 (raíz cuadrada). Por tanto, aparte que el denominador no puede ser nulo el resultado dentro del radical debe ser positivo. Por sustitución

$$\begin{aligned}\lim_{z\to -3} \sqrt{\frac{3z}{z^2-1}} &= \sqrt{\frac{3(-3)}{(-3)^2-1}}\\ &= \sqrt{\frac{-9}{9-1}} = \sqrt{\frac{-9}{8}}\\ &= \text{No existe} \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

3) Otra función mixta, pero aquí el denominador es irracional de índice 3 (raíz cúbica) lo que admite cualquier número. Como la tendencia es diferente de cero, se procede a sustituir

$$\begin{aligned}\lim_{t\to -27} \frac{2t+1}{\sqrt[3]{t}} &= \frac{2(-27)+1}{\sqrt[3]{(-27)}}\\ &= \frac{-54+1}{-3} = \frac{-53}{-3}\\ &= \frac{53}{3} = 17.66 \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

En ejemplo 2 cada límite, la función fue previamente analizada con la tabla 2; de aquí que el segundo límite no existe porque no es posible la raíz cuadrada de un número negativo. Hasta ahora, en los ejemplos mostrados se ha usado de modo instintivo la técnica de sustitución, sin embargo detrás de la técnica existe todo un formalismo matemático que permite el desarrollo numérico. Este formalismo es resumido en un conjunto de propiedades que junto con la continuidad de función facilitan el desarrollo de la sustitución para funciones mixtas o complejas.

Ejemplo 3. Límite en funciones compuestas.[3] Hallar el límite de cada función trascendental compuesta con una función polinómica.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^2-3}{x^2+1}\right)^{2x+1}$ 2) $\lim\limits_{\theta\to \frac{5\pi}{6}} \dfrac{\operatorname{sen}(\theta-\frac{\pi}{3})}{\tan\left(\frac{3}{10}\theta\right)}$ (θ en radianes)

1) Esta es una función exponencial compuesta. Por sustitución,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2-3}{x^2+1}\right)^{2x+1} &= \left(\frac{(0)^2-3}{(0)^2+1}\right)^{2(0)+1}\\ &= \left(\frac{0-3}{0+1}\right)^{0+1} = \left(\frac{-3}{1}\right)^{1} = -3 \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

2) Unas funciones trigonométricas compuestas. Por sustitución y usando operaciones con fracciones

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to \frac{5\pi}{6}} \frac{\operatorname{sen}(\theta-\frac{\pi}{3})}{\tan\left(\frac{3}{10}\theta\right)} &= \frac{\operatorname{sen}(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3})}{\tan\left(\frac{3}{10}\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{6})}{\tan\left(\frac{15\pi}{60}\right)}\\ &= \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})}{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

[3] Entiéndase por función compuesta una función anidada dentro de otra función.

Los anteriores ejemplos han mostrado resultados de límites determinados, donde lo único que requiere es una hábil dominio de operaciones algebraicas básicas y concentración en el desarrollo de las mismas. La siguiente subsección aborda el cálculo de límites donde la sustitución directa falla.

3.2. Límites indeterminados y la técnica de cancelación

Si tras calcular un límite por sustitución directa se obtiene un resultado de forma indeterminada no se puede concluir nada válido sobre el límite, ni siquiera su existencia; estos límites particulares se *suele topar* cuando la función es racional, irracional o trigonométrica. La técnica para calcular el límite consiste en modificar (no cambiar) la función por otra en donde sea posible *cancelar* o remover la indeterminación para luego volver a usar la sustitución con un nuevo cálculo que permita encontrar el límite[4]. Según la situación la modificación puede consistir en manipulación algebraica, factorización o racionalización de radicales [2].

Ejemplo 4. Cancelación por manipulación algebraica. Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2+x)^2-4}{x}$$

1) Inicialmente se aplica sustitución directa

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2+x)^2-4}{x} = \frac{(2+(0))^2-4}{(0)} = \frac{(2+0)^2-4}{0} = \frac{(2)^2-4}{0} = \frac{4-4}{0} = \frac{0}{0} \quad \text{Indeterminación!}$$

En el numerador se origina la indeterminación.

2) Por manipulación algebraica con ayuda del cuadrado de un binomio y por factor común (ver Anexo 1), se tiene

$$(2+x)^2-4 = 4+4x+x^2-4 = 4x+x^2 = x(4+x)$$

ahora la función se puede modificar y el factor x se puede *cancelar*,

$$\frac{(2+x)^2-4}{x} = \frac{\cancel{x}(4+x)}{\cancel{x}} = (4+x)$$

una nueva sustitución ya permite evaluar el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2+x)^2-4}{x} = \lim_{x\to 0}(4+x) = 4+0 = 4 \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 5. Cancelación por factorización. Evaluar

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2+x-6}{x+3}$$

1) Por tratarse de una función racional, se revisa numerador y denominador con la sustitución, que deja

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2+x-6}{x+3} = \frac{0}{0} \quad \text{Indeterminación!}$$

La causa de la indeterminación sucede en el numerador ya que es un polinomio cuadrático; el denominador es de forma lineal y éste, no se puede descomponer.

[4]El uso de está técnica se justifica por el hecho de que el límite no depende de valor de la función f en $x=c$, sino que depende de la igualdad de los límites laterales cuando $x\to c$

2) Recurriendo a la factorización cuadrática (ver Anexo 1) el numerador se puede factorizar como

$$x^2+x-6=(x+3)(x-2)$$

de esta forma la función se puede modificar por *cancelación* de factores iguales

$$\frac{x^2+x-6}{x+3}=\frac{\cancel{(x+3)}(x-2)}{\cancel{x+3}}=x-2$$

Finalmente el límite es

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x+3}=\lim_{x\to -3}(x-2)=-5$$ ∎

Ejemplo 6. Cancelación en un límite de funciones trigonométricas. Hallar

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\operatorname{sen} x}$$

1) La sustitución directa lleva a el resultado $0/0$ Indeterminación! Esta sucede en el numerador pues $\tan x$ es una función que depende de otras funciones trigonométricas.

2) Sin embargo usando la identidad $\tan x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ y multiplicando la función convenientemente por 1 se puede reescribir la función

$$\frac{\tan x}{\operatorname{sen} x}=\frac{1\cdot\tan x}{\operatorname{sen} x}=\frac{1}{\operatorname{sen} x}\tan x=\frac{1}{\cancel{\operatorname{sen} x}}\frac{\cancel{\operatorname{sen} x}}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}$$

Luego el límite es

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\cos 0}=1$$ ∎

Como se ha apreciado, la técnica de cancelación requiere una gran habilidad del manejo de recursos algebraicos para la modificación de la función. El “truco” consiste en observar la función más compleja para tratar de reescribirla en funciones más simples.

3.3. Límites infinitos: cuando el denominador es 0

Es común encontrar este tipo de límites en funciones racionales donde el denominador se anula pero no ocurre lo mismo en el numerador (p. ej., $3/0$). Aquí la técnica (si se le puede decir) es realizar un *análisis de límites laterales* (de preferencia numérico o si se dispone del gráfico), o sea, analizar la tendencia a la izquierda o la derecha del punto en cuestión. Si los dos límites coinciden con una misma tendencia (ambos hacia $+\infty$ o hacia $-\infty$) se afirmará que el límite existe. También como nota importante, estos límites manejan una notación especial para la tendencia (que equivale a una forma de reconocer estos límites). P. ej., si la tendencia aparece como $x\to 1^-$ equivale a la afirmación *x tiende a 1 por la izquierda* y $x\to 1^+$ equivale a la afirmación *x tiende a 1 por la derecha*. Estos límites son un caso especial de indeterminación, puesto que el símbolo ∞ no es un número; con el resultado se quiere expresar la *tendencia de crecer sin límite* [2].

Ejemplo 7. Determinado límites infinitos. Hallar los límites propuestos para la misma función

1) $\lim_{x\to -3^-}\frac{x-3}{x+3}$ 2) $\lim_{x\to -3^+}\frac{x-3}{x+3}$ 3) $\lim_{x\to -3}\frac{x-3}{x+3}$

1) Por sustitución se tiene $-\frac{6}{0}$, con tendencia hacia al infinito quedando incógnito el signo. Para determinar el signo, como $x \to -3^-$, basta considerar $x = -3.01$ y calcular $\frac{-3.01-3}{-3.01+3} = \frac{-6.01}{-0.01}$. Como los signos son iguales la tendencia es positiva, así que

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{x-3}{x+3} = +\infty \qquad \blacksquare$$

2) En modo similar al ejercicio anterior: como $x \to -3^+$, basta considerar $x = -2.99$ luego $\frac{-2.99-3}{-2.99+3} = \frac{-5.99}{0.01}$ que deja signo negativo, así que

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{x-3}{x+3} = -\infty \qquad \blacksquare$$

3) En la tendencia $x \to -3$ no específica un lado particular, luego se asume que debe aplicarse la definición de límite con todo rigor: existir y límites laterales iguales. Con la información de los resultados anteriores se concluye

$$\lim_{x \to -3} \frac{x-3}{x+3} = \text{No existe} \qquad \blacksquare$$

3.4. Límites en el infinito

Este tipo de límites responden a la pregunta ¿cuál es la tendencia de la función $f(x)$ cuando la variable x crece sin parar? Para empezar a construir la respuesta y facilitar su comprensión, aquí se consideraran funciones racionales de forma polinómica. Lo primero a conocer es la tendencia de funciones simples como x^n cuando $x \to \pm\infty$. A través de formalismos matemáticos o desde el análisis gráfico, para la *función potencia* $f(x) = x^n$ y *función recíproco de potencia* $f(x) = \frac{1}{x^n}$ con n un número entero positivo se tiene

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{con } n \text{ par} \\ -\infty, & \text{con } n \text{ impar} \end{cases}$
- $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

La técnica de cálculo de estos límites se centra en buscar el término con mayor grado o exponente en la función para luego aplicar lo siguiente:

- Si el término de grado mayor está en el numerador (o si es un polinomio), el resultado es ∞ con signo equivalente al producto del signo del límite potencia aplicado y el signo del coeficiente término de grado mayor.
- Si el término de grado mayor está en el denominador, se dividen todos los términos de la función por ese término y se aplica el límite de recíproco de potencia.

Ejemplo 8. Límites cuando $x \to \pm\infty$. Hallar los siguientes límites

1) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} (4x^2 - 3x^5)$ 2) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x-3}{x+3}$ 3) $\displaystyle\lim_{t \to -\infty} \frac{t^2 - t}{4t^3 + 5}$

1) El término de mayor grado y su signo se identifica con una caja cuadrada

$$\lim_{x \to -\infty} (4x^2 \boxed{-3x^5})$$

De acuerdo a los límites de potencia, como 5 es impar se tiene $\lim_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$ y puesto que el coeficiente es negativo se tiene

$$\lim_{x \to -\infty} (4x^2 - 3x^5) = -(-\infty) = \infty \qquad \blacksquare$$

2) El término de mayor grado está arriba y abajo, luego toda la función se divide por x

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\boxed{x} - 3}{\boxed{x} + 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{x} - \frac{3}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{3}{x}}$$

aplicando los límites de recíproco de potencia en cada término y que $\lim_{x \to \infty} 1 = 1$, queda

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - \cancelto{0}{\frac{3}{x}}}{1 + \cancelto{0}{\frac{3}{x}}} = \frac{1-0}{1+0} = 1 \qquad \blacksquare$$

3) Identificando el término de mayor grado y dividiendo todos los términos de la función por él

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{t^2-t}{4\boxed{t^3}+5} = \lim_{t\to-\infty} \frac{\frac{t^2}{t^3}-\frac{t}{t^3}}{\frac{4t^3}{t^3}+\frac{5}{t^3}}$$

Recordando $\frac{t^2}{t^3} = t^{2-3} = t^{-1} = \frac{1}{t}$ y $\frac{t}{t^3} = t^{1-3} = t^{-2} = \frac{1}{t^2}$. Por aplicación de límites de recíproco de potencia

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{\cancelto{0}{\frac{1}{t}}-\cancelto{0}{\frac{1}{t^2}}}{4+\cancelto{0}{\frac{5}{t^3}}} = \frac{0-0}{4-0} = 0 \qquad \blacksquare$$

4)

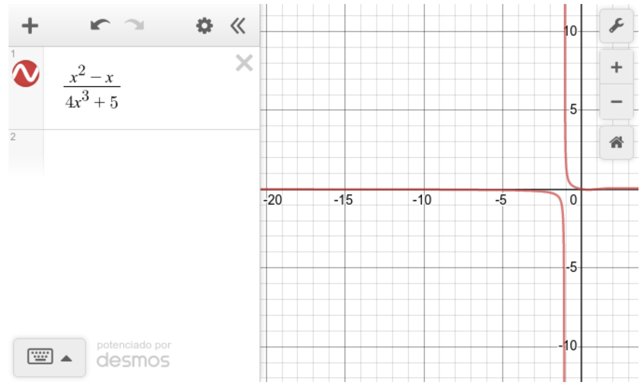

Figura 5: Solución gráfica de $\lim_{t\to-\infty} \frac{t^2-t}{4t^3+5}$ usando el recurso https://www.desmos.com/calculator.

3.5. Técnica final: Google!?

Con el desarrollo de la programación computacional existe software y aplicaciones en línea especializadas en el cálculo de límites. Por supuesto en el Internet actual, las hay libres y gratuitas como por suscripción periodica con fines lucrativos, estando disponibles con ayuda del Ya Famoso Buscador *Google*. En unas pocas líneas y detrás de la programación, estas calculadoras de límites funcionan con la aplicación de diversas propiedades de límites que no se discutieron aquí (pero que si se usaron[5]) y con métodos del cálculo avanzado con la finalidad de brindar el resultado numérico o la explicación paso a paso.

Este recurso es mencionado aquí como un alternativa complementaria de enseñanza o de verificación de resultados; no debería simplemente usarse bajo el enfoque no-ético de `Ctrl+C & Ctrl+V`, ya que en oportunidades y según el tipo de función la calculadora adopta técnicas no mencionadas aquí por falta de espacio (y tiempo) o porque caen fuera del nivel enseñanza. No estaría bien presentado por parte del alumno un desarrollo de un ejercicio con palabras como *Método de Ruffini, Teorema del encaje, Aproximación $\delta-\varepsilon$ o Regla de L'Hôpital.*

Los siguientes sitios de uso libre se dejan como recomendación alternativa:

Calculadora de limites de funciones - Calcular limites - Resolver limites. Aquí los límites únicamente se resuelven numéricamente de un modo simple e intuitivo para el ingreso de funciones. Disponible en español. Ver en:
https://calculadorasonline.com/calculadora-de-limites-de-funciones-calcular-limites-resolver-limites/

Limit Calculator - eMathHelp Aquí la calculadora resuelve numéricamente los límites y muestra los pasos del desarrollo. El modo de uso es similar al anterior recurso. Disponible en ingles. Ver en:
https://www.emathhelp.net/calculators/calculus-1/limit-calculator/

4. Aplicaciones: un par de límites importantes

Las aplicaciones de los límites en el campo cotidiano son muy "limitadas" pues es usado de forma intensa *dentro y para* el Cálculo: no es necesario tener una tabla de límites a la mano para la función de compra de productos

[5] Las Propiedades de los Límites son un conjunto de reglas formales que permiten lograr el desarrollo algebraico mostrado en los diversos ejemplos. Son de especial importancia para demostraciones rigurosas en Matemáticas Aplicadas. Aquí no fueron abordadas con rigor, pues en el presente contexto lo que importante es como usar dichas reglas. Sin embargo, el Anexo 2 presenta un resumen de las propiedades usadas en esta clase.

en la panadería, siempre y cuando el estado económico de los bolsillos no tienda a cero pesos. A continuación se exponen dos límites muy importantes sin demostración por su relevancia de aplicación en el campo científico, haciendo acto de fe matemático en su resultado. Una demostración formal de ellos requieren otras técnicas que caen fuera del nivel de enseñanza básica media pero que con los recursos conocidos (gráfico y tabulación) bastan para creer en su resultado.

1) La función **sinc** x. La función en el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

conocida como seno cardinal de x tiene importantes aplicaciones en la física óptica. Cuando un chorro de luz bordea un obstáculo, la proyección de la sombra en los contornos del obstáculo origina un pequeño patrón de franjas claras y oscuras, fenómeno conocido como difracción; está función permite explicar este comportamiento. Una gráfica de la función permite demostrar en modo simple su resultado a pesar de la indeterminación $0/0$.

2) El número **e**. El límite

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = 2.718281828\ldots$$

es un número irracional conocido como número de Euler o constante de Neper. El límite permite dar origen a una función conocida como función exponencial natural $f(x) = e^x$. También permiten construir los Logaritmo Naturales o de Neper. La función es de intensa aplicación en todos los campos del ámbito científico. El límite tiene multitud de demostraciones, pero en este nivel, por tabulación permite observar la tendencia a pesar de la indeterminación 1^∞.

También estos límite son importantes puesto que ayudan a calcular otros límites mediante la aplicación de propiedades de límites (ver Anexo II). Otros ejemplos y aplicaciones se pueden consultar de forma complementaria en [3].

5. Actividad Número 9

¡ALERTA! Lea con atención las instrucciones para evitar confusiones.

- Para está oportunidad Ud. **solamente debe realizar 3 ejercicios**; puede elegirlos libremente.
- Cada ejercicio está denotado con una cantidad de $\star$ e indica el nivel de dificultad del ejercicio tal que: $\star \Rightarrow$ básico, $\star\star \Rightarrow$ medio, $\star\star\star \Rightarrow$ difícil.
- La calificación de la actividad dependerá de su orden, escritura y cantidad de $\star$ según su elección. La nota es evaluada así:
  - 3 $\star$ equivale a 3.0.
  - 6 $\star$ equivale a 4.0.
  - 9 $\star$ equivale a 5.0.

  en otro caso la nota será proporcional a la anterior distribución siempre y cuando se presenten 3 ejercicios. Presentar 2 ejercicios o menos equivale a una nota inferior a 3.0.
- Resolver cada ejercicio con su respectivo procedimiento; si sólo aparece el resultado numérico será considerado como un ejercicio de 1 $\star$ siempre y cuando sea correcto.
- Indicar claramente en su actividad los ejercicios elegidos siguiendo la numeración correspondiente
- Si Ud. realiza más de 3 ejercicios únicamente serán calificados los tres primeros.

Hallar cada límite

1) ⋆
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-1}{x^2+x+1}$$

2) ⋆
$$\lim_{u\to -2} \frac{u^4-10}{\sqrt[3]{u^7-88}}$$

3) ⋆
$$\lim_{t\to 3} \left(\frac{t^2+1}{2t^2-3}\right)^{t^2-2t}$$

4) ⋆⋆
$$\lim_{t\to 0} \frac{(2+t)^3-8}{t}$$

5) ⋆⋆
$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2+5x+2}{x^3+x^2}$$

6) ⋆⋆
$$\lim_{u\to 0} \frac{\cos(\pi+u)+1}{u}, \quad u \text{ en rad}$$

Ayuda: usar un resultado de la clase anterior y la identidad $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

7) ⋆⋆⋆
$$\lim_{u\to -90^+} \frac{1-\operatorname{sen} u}{\cos u}, \quad u \text{ en grados}$$

8) ⋆⋆⋆
$$\lim_{t\to \infty} \frac{5t^3-2}{(5-3t^2)(4t-1)}$$

9) ⋆⋆⋆
$$\lim_{x\to 2} \frac{5x^3-40}{3x-6}$$

Nota: La sección referencias contiene fuentes de consulta bibliográficas si se tiene posibilidad de acceder a textos o navegación en la red. Estas aparecen en el contenido de este texto con paréntesis cuadrados [...].

Referencias

[1] Víctor Espíritu Montiel and Catalina Navarro Sandoval, *Límites indeterminados mediante el uso de tablas de valores y gráficas*, Revista de Didáctica de las Matemáticas Números **88** (2015), 31–53.

[2] Roland Larson and Robert Hostetler, *Cálculo y geometría analítica*, third ed., McGraw-Hill, jan 1989.

[3] José Llopis, *Matesfacil: cálculo de límites, con y sin indeterminaciones*, https://www.matesfacil.com/BAC/limites/ejercicios-resueltos-limites-1.html, 2020, Consultado 16 jul 2020.

[4] Wikipedia, *Factorización*, https://es.wikipedia.org/wiki/Factorizaci%C3%B3n, 2020, Consultado 15 jul 2020.

[5] ______, *Límite de una función*, https://es.wikipedia.org/wiki/L%C3%ADmite_de_una_funci%C3%B3n#Definici%C3%B3n_formal, 2020, Consultado 13 jul 2020.

[6] Doris Álvarez et al., *Proyecto sé matemáticas 11: libro del estudiante*, Ediciones SM, 2012.

A. Anexo I: Resumen de casos factorización

La tabla 3 reúne métodos de descomposición en factores de expresiones algebraicas generalizadas. Téngase en cuenta que al leer en sentido $\rightharpoonup$ se obtiene la descomposición, mientras que en sentido $\leftharpoondown$ se obtiene el producto. Los símbolos $\pm$ se usan según la situación: si en la columna Producto se usa un + arriba en la columna Factores se elige el símbolo de arriba o viceversa. Para otras situaciones recurrir a fuentes especializadas [4].

Tipo de factorización	Producto	Factores
Factor común	$ax+ay+az$	$a(x+y+z)$
Cuadrado binomio	$a^2 \pm 2ab+b^2$	$(a\pm b)^2$
Diferencia de cuadrados	a^2-b^2	$(a+b)(a-b)$
Factorización cuadrática	$a^2x^2+abx+ac$	$(ax+r)(ax+s)$ donde r y s, son dos factores cuyo producto es $rs=ac$ y suma o resta es $r\pm s=b$
Cubo binomio	$a^3 \pm 3a^2b+3ab^2 \pm b^3$	$(a\pm b)^3$
Suma/Diferencia de cubos	$a^3 \pm b^3$	$(a\pm b)(a^2 \mp ab+b^2)$

Tabla 3: Casos de factorización comunes en el cálculo de límites.

B. Anexo II: Propiedades de los límites

Número por función	$\lim_{x\to c} af(x)$	$= a\lim_{x\to c} f(x)$
Suma/Resta de funciones	$\lim_{x\to c} [f(x)\pm g(x)]$	$= \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$
Producto de funciones	$\lim_{x\to c} [f(x)\cdot g(x)]$	$= [\lim_{x\to c} f(x)]\cdot[\lim_{x\to c} g(x)]$
División de funciones	$\lim_{x\to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$	$= \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$
Potencia de funciones	$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)}$	$= \lim_{x\to c} f(x)^{\lim_{x\to c} g(x)}$
Logaritmo de una función	$\lim_{x\to c} \log f(x)$	$= \log \lim_{x\to c} f(x)$

Tabla 4: Tabla de propiedades fundamentales de los límites.