Sucesiones y aplicaciones

Matemáticas - Grado 11

2020

1. Propósitos y desempeños

En este periodo los propósitos de aprendizaje serán:

- Reconocer conceptos de limite, continuidad, derivadas para el desarrollo del análisis matemático.
- Construir conceptos de limite, derivada y realizar cálculos, haciendo uso de sus propiedades y procedimientos.
- Resolver ejercicios básicos del cálculo de límites y derivadas.

y los desempeños de evaluación son:

- Reconoce los conceptos de límite, continuidad y derivadas el análisis matemático de variación de magnitudes.
- Construye el concepto de límite y continuidad de una función y los representa gráficamente; construye el concepto de derivada de una función.
- Resuelve ejercicios básicos de cálculo de límites, derivadas, haciendo uso de las propiedades y procedimientos indicados.

2. Sucesiones

2.1. Acercamiento

Es común en competiciones deportivas de numerosos participantes realizar etapas de eliminación para obtener el campeón. Por ejemplo, en la clasificación de la Eurocopa de Fútbol comienzan 32 equipos, reduciéndose su número en cada ronda, de modo tal que el número de equipos en cada ronda son: primera con 32, segunda con 16, tercera con 8, cuarta con 4 y finalmente la quinta con 2.
Tal conjunto de números recibe el nombre de <u>sucesión</u> y cada elemento de se denomina <u>término</u> [1].

2.2. Definición

Una sucesión es un conjunto (finito o infinito) de elementos numéricos obtenidos desde una regla o *función* cuyo dominio o variable de entrada es un *número natural* [3]. Del ejemplo anterior, la variable de entrada es: ronda 1, donde una función deja 32 equipos.

2.3. Notación

Una sucesión se representa por una letra cualquiera con un subíndice a su derecha: a_n. La n indica un número natural y a_n la función de la sucesión [3, 5]. a_n recibe el nombre del término general o término *n-ésimo* de la sucesión,

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & \cdots & n, & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ a_1, & a_2, & a_3, & \cdots & a_n, & \cdots \end{array}$$
$$\underbrace{\hphantom{a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \cdots \quad a_n, \quad \cdots}}_{\text{términos}}$$

Ejemplo 1. Encontrar los 5 primeros términos de cada sucesión: 1) $a_n = 2^{6-n}$, 2) $b_n = 2n+1$

1) El término general es 2^{6-n},

$$\begin{array}{lll} n=1, & a_1 = 2^{6-1} = 2^5 = & 32 \\ n=2, & a_2 = 2^{6-2} = 2^4 = & 16 \\ n=3, & a_3 = 2^{6-3} = 2^3 = & 8 \\ n=4, & a_4 = 2^{6-4} = 2^2 = & 4 \\ n=5, & a_5 = 2^{6-5} = 2^1 = & 2 \end{array}$$

2) El término general es $2n+1$,

$$\begin{array}{lll} n=1, & b_1 = 2(1)+1 = & 3 \\ n=2, & b_2 = 2(2)+1 = & 5 \\ n=3, & b_3 = 2(3)+1 = & 7 \\ n=4, & b_4 = 2(4)+1 = & 9 \\ n=5, & b_5 = 2(5)+1 = & 11 \end{array}$$

Ejemplo 2. Analizar la sucesión dada analítica y graficamente.

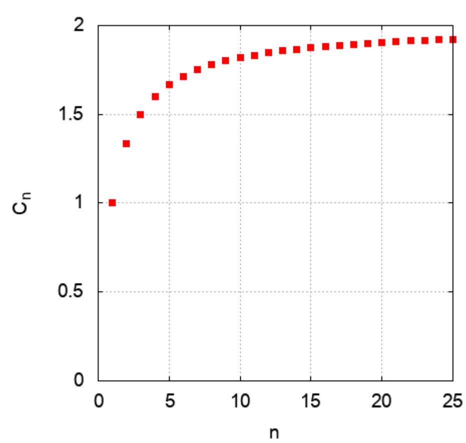
$$C_n = \frac{2n}{n+1}$$

1) Hallando unos pocos términos

$$C_n = \left\{ \frac{2}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \ldots \right\}$$

se muestra que la sucesión es racional (fraccionaria). Escribiendo cada término en número decimal con ayuda de una calculadora, la sucesión tiene una *tendencia* de crecimiento.

2) Haciendo un gráfico discreto por puntos se aprecia que la sucesión C_n *tiende o se aproxima* hacia 2 cuando n aumenta.



2.4. Tipos

A continuación de destacan algunos tipos relevates [1, 6].

Creciente. Cuando un término es mayor que el anterior: $a_{n+1} > a_n$

Decreciente. Cuando un término es menor que el anterior: $a_{n+1} < a_n$

Acotada. Cuando existe un número finito M tal que $-M \le a_n \le M$ sin importar el número n.

Recursiva. Aquella que para calcular a_n, necesita una regla o función con términos anteriores.

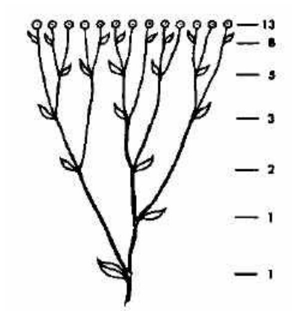
Ejemplo 3. La sucesión C_n del ejemplo 2, es creciente (en sentido estricto) y acotada; todos sus términos están creciendo, sin embargo no pasa de 2 cuando n aumenta.

Ejemplo 4. Una sucesión recursiva muy famosa es la de *Fibonacci*; ella aparece en algunos hechos curiosos de la naturaleza [4]. Por ejemplo, una especie de hierba originaria de España (*Achillea ptarmica*), los puntos donde nacen nuevas ramas siguen la sucesión 1, 1, 3, 5, 8, 13, 21, ... La sucesión se cálcula incialmente con $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ y la función $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ desde $n = 2$.

1) Algunos términos se obtienen reemplazando en la función

$$
\begin{aligned}
f_3 &= f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2\\
f_4 &= f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3\\
f_5 &= f_4 + f_2 = 3 + 2 = 5\\
f_6 &= f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8\\
f_7 &= 13\\
f_8 &= 21\\
f_9 &= 34
\end{aligned}
$$

2) Distribución de ramas en *Achillea ptarmica* [2]



3. Actividad Número 6

1. Encontrar los cinco primeros términos de la sucesión

$$d_n = 3 - \frac{4}{n}$$

2. Analizar cada sucesión, calculando los diez primeros términos (esto es, n desde 1 hasta 10) y elaborando un gráfico discreto.

a)

$$p_n = 3 - \frac{1}{2^n}$$

b)

$$q_n = \frac{3n^2}{n^2 + 1}$$

Verificar si cada suseción tiene una tendencia (es decir un número finito cuando n es muy grande). Para ello, con una calculadora evalue el término general para $n = 50$, $n = 100$, $n = 1000, \ldots$

3. Algunas calculadoras usan un algoritmo recursivo de programación de una función específica. Asi, para obtener la raíz cuadrada de un número, $\sqrt{x}$, se usa una secuencia recursiva con $g_1 = \frac{x}{2}$ siendo x el número al que se desea hallar la raíz y reemplazando en la secuencia

$$g_{n+1} = 0{,}5 \times \left(g_n + \frac{x}{g_n}\right), \quad \text{desde } n = 1$$

la secuencia finaliza hasta obtener una precisión deseada. Hallar los cinco primeros términos de la secuencia para la raíz cuadrada de 19 (es decir, $x = 19$) y compare sus resultados con el valor exacto proporcionado por la calculadora. Escribir los términos con 5 cifras decimales.

Referencias

[1] Gregorio Coronado and José Fernández, *Sucesiones*, https://www.fisicalab.com/apartado/sucesiones, Consultado 17 abr 2020.

[2] Ron Knott, *Fibonacci numbers, the golden section and plants*, http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html#section3, 2016, Consultado 18 abr 2020.

[3] Roland Larson and Robert Hostetler, *Cálculo y geometría analítica*, third ed., McGraw-Hill, jan 1989.

[4] Grupo Lemat, *Situaciones en las que aparece la sucesión de fibonacci*, https://www.lemat.unican.es/lemat/proyecto_lemat/sucesiones/nivel1/teoria/situaciones.htm, 2009, Consultado 16 abr 2020.

[5] ———, *Sucesiones*, https://www.lemat.unican.es/lemat/proyecto_lemat/sucesiones/nivel1/sucesiones_cuna.htm, 2009, Consultado 16 abr 2020.

[6] Wikipedia, *Sucesión matemática*, https://es.wikipedia.org/wiki/Sucesi%C3%B3n_matem%C3%A1tica, 2020, Consultado 16 abr 2020.