Teoría de Números Naturales

Relaciones entre números naturales y sus aplicaciones

Matemáticas

Grado 6

2022

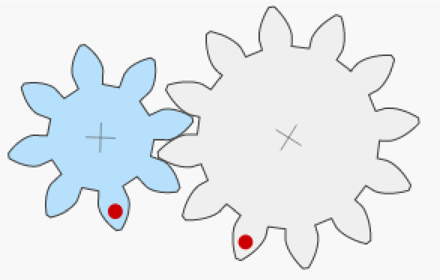
Contenido

Resolver el problema

Introducción

El principio de funcionamiento de un piñón

En la figura, el piñón mayor tiene 12 dientes y el menor 8. ¿Cuántos dientes de cada rueda deben pasar para que vuelvan a coincidir los puntos rojos? ¿Cuántas vueltas habrá girado cada rueda?



Metas

Propósito

Establecer conjeturas sobre las propiedades y relaciones entre los números naturales, como aplicación intensiva del producto y división de números naturales.

Desempeño

Justifico los procedimientos propios de la teoría de números utilizando las propiedades y relaciones entre los números naturales en la resolución de situaciones particulares.

Múltiplos y Divisores

Conceptos básicos

Múltiplos

Se dice que un número es múltiplo de otro si lo contiene un número entero de veces.

Ejemplo. Los múltiplos de 7 son $\{0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, \ldots\}$

Divisores

Un número a es divisor de un número b si la división de b entre a es exacta, esto es, *residuo cero*.

Ejemplo. Los divisores de 60 son $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$; son 12.

Los números naturales

Conceptos básicos

Algunos hechos notables de este conjunto:

- El "0" es múltiplo de todos los naturales.
- El "1" es divisor de todos los naturales.
- El conjunto de los **múltiplos** de un número natural es *infinito*.
- El conjunto de los **divisores** de un número natural es *finito*.

Conformación de los números naturales:

Número unitario. El único natural con un solo divisor: el "1".

Número primo. El natural con exactamente dos divisores.

Número compuesto. El natural con más dos divisores.

Por tanto,

$$\mathbb{N} = \{0,1\} \cup \{\text{Números primos}\} \cup \{\text{Números compuestos}\}$$

Obtención de números primos

Conceptos básicos

La criba de Erastóstenes

Es un procedimiento propuesto por el matemático griego Erastóstenes (siglo III a.e.c.) para obtener los números primos entre 1 y 100 [Wikipedia, 2022a].

El procedimiento consiste en:

- Escribir los números en un arreglo 10×10.
- Tachar el 1, puesto que no es primo.
- Buscar y tachar los múltiplos de 2, 3, 5 y 7 exceptuando el 2, 3, 5 y 7.

Figura 1: Eratóstenes de Cirene

Divisores de un número

Criterios de divisibilidad

Una situación

¿Puedes repartir 75 dulces *equitativamente* entre 2 amigos? ¿entre 3 amigos? ¿entre 7 amigos?

Estrategia de solución: hallar los divisores de 75!

El concepto de división exacta permite conocer si un número es *divisible* por otro. Sin embargo, se requieren estrategias o criterios que permitan agilizar este proceso. Los *criterios de divisibilidad* sirven para:

- Descomponer números compuestos en números primos.
- Saber rápidamente si un número es divisible entre los principales números primos (2, 3, 5, 7 y 11).
- Reparticiones equitativas.

¿Cuándo un número es divisible por...?

Criterios de divisibilidad

Criterios más comunes [Ramos et al., 2000, p. 84].

Número	Criterio divisibilidad	Ejemplo
2	Cuando el número termina en cifra par o cero.	478
3	Cuando la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.	$492 \rightarrow 4+9+2=15$
5	Cuando la última cifra es cero o cinco.	2745

¿Cuándo un número es divisible por...?

Criterios de divisibilidad

Criterios más comunes.

Número	Criterio divisibilidad	Ejemplo
7	Cuando al separar la última cifra de la derecha,multiplicarla por 2 y restar las cifras restantesel resultado es cero o un múltiplo de 7. Hay que repetir hasta quedar una cifra o múltiplo de 7.	504→50-2·4=50-8=42 2415→...

¿Cuándo un número es divisible por...?

Criterios de divisibilidad

Criterios más comunes.

Número	Criterio divisibilidad	Ejemplo
11	Cuando se suman las cifras impares de un lado y las pares del otro; luego se resta el resultado de ambas sumas: si el resultado es cero o múltiplo de 11.	360360→360360 3+0+6=9; 6+3+0=9 9-9=0 44825→

¿Que és?

Descomposición de número en factores primos

Descomponer un número natural en factores primos es encontrar un conjunto de números primos que por medio de una multiplicación permite obtener el número [Wikipedia, 2022b].

Descomponer el número 21

21 tiene por factores primos $\{3,7\}$, por tanto:

$$3 \times 7 = 21$$

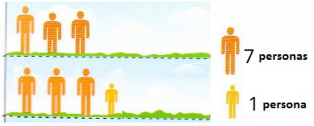


Figura 2: Aplicación de la descomposición en factores primos: los pictogramas.

Teorema fundamental de la aritmética

Descomposición de número en factores primos

Teorema

Todo número natural mayor que 1 puede ser representado exactamente de una única manera como un producto de potencias de números primos [Wikipedia, 2022e]. Si n es un número natural, entonces:

$$n = 2^{e_1} \times 3^{e_2} \times 5^{e_3} \times 7^{e_4} \dots$$

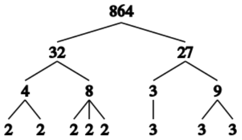


Figura 3: Descomposición en factores primos del número $864 = 2^5 \times 3^3$.

Procedimiento

Descomposición de número en factores primos

El procedimiento para factorizar un número es el siguiente [Ramos et al., 2000]:

- Dividir el número por el menor número primo posible (división exacta). El cociente que haya resultado se pone debajo del número y el divisor a la derecha de una línea vertical.
- Continuar dividiendo ese cociente por el mismo número primo.
- Cuando la división no es exacta, se toma el siguiente número primo con el que se pueda hacer la división.
- Repetir sucesivamente hasta que el cociente final sea 1.
- Finalmente, la descomposición del número se escribe como un producto de potencias de la columna derecha.

Ejemplos de descomposición

Descomposición de número en factores primos

Ejemplo 1

Descomponer en sus factores primos el número 340.

$$
\begin{array}{r|l}
340 & 2 \\
170 & 2 \\
85 & 5 \\
17 & 17 \\
1 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\rightarrow \quad \text{porque } 340 \div 2 = 170 \\
\rightarrow \quad \text{porque } 170 \div 2 = 85 \\
\rightarrow \quad \text{porque } 85 \div 5 = 17 \\
\rightarrow \quad \text{porque } 17 \div 17 = 1 \\
\end{array}
$$

Luego, se escribe $340 = 2^2 \cdot 5 \cdot 17$

Ejemplos de descomposición

Descomposición de número en factores primos

Ejemplo 2

Descomponer en sus factores primos el número 693.

$$\begin{array}{r|l} 693 & 3 \\ 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{ll} \rightarrow & \text{porque } 693 \div 3 = 231 \\ \rightarrow & \text{porque } 231 \div 3 = 77 \\ \rightarrow & \text{porque } 77 \div 7 = 11 \\ \rightarrow & \text{porque } 11 \div 11 = 1 \\ & \end{array}$$

Luego, se escribe $693 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11$

Aplicaciones y usos

Descomposición de número en factores primos

Aquí algunas aplicaciones de la Descomposición.

Raíces cuadradas exactas

En algunos números es posible conocer la raíz cuadrada exacta, como sigue:

1. Descomponer el número en sus factores primos.
2. Si todos los exponentes de los factores, son números pares es posible obtener la raíz, de lo contrario, no es posible.
3. Dividir por dos cada exponente.
4. Componer el número con el producto de los factores; dicho número es la raíz cuadrada.

Aplicaciones y usos

Descomposición de número en factores primos

Ejemplo 3

Hallar la raíz cuadrada de 225, 784.

Solución. Realizando la descomposición y verificando la paridad en los exponentes,

$$\sqrt{225} = \sqrt{3^2 \times 5^2} = 3 \times 5 = 15.$$

$$\sqrt{784} = \sqrt{2^4 \times 7^2} = 2^2 \times 7 = 28.$$

El algoritmo MCD

Máximo común divisor

¿Qué es el MCD?

Es aquel número **mayor** de los divisores comunes de un conjunto de números. Es decir, el número más grande que divide de forma exacta a ese conjunto de números [Ramos et al., 2000, Wikipedia, 2022c]. Se simboliza $\mathrm{MCD}(a, b, \ldots)$

Para comprender, hallar el $\mathrm{MCD}(45, 54)$:

- Hallar todos los divisores de 45: $\{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$
- Hallar todos los divisores de 54: $\{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54\}$
- De ambos conjuntos, **el divisor común más grande** es 9, luego $\mathrm{MCD}(45, 54) = 9$.

Este algoritmo, aunque valido no es eficiente; existen otros modos de hallar el MCD.

Formas de calcular el MCD

Máximo común divisor

Algoritmo 1: ensayo y error

- Elegir el número *que se cree*, tiene menos divisores y hallarlos.
- Con uno de esos divisores, comprobar la división exacta con los otros números del conjunto.
- Si todas las divisiones son exactas, es posible (pero no seguro) que ese número sea el MCD del conjunto.
- Sino, buscar otro número.

Ejemplo 1

Hallar el $\text{MCD}(15, 30, 40)$.

Solución. Se elige 15; sus divisores son $\{3,\ 5\}$. Tomado $40 \div 5$, $30 \div 5$ son divisiones exactas. Luego $\text{MCD}(15, 30, 40) = 5$.

Formas de calcular el MCD

Máximo común divisor

Algoritmo 2: descomposición simultánea

- Descomponer en factores primos de forma simultánea (a la vez) los números hasta donde sea posible.
- El producto de los divisores hallados es el MCD.

Ejemplo 2

Hallar el $\text{MCD}(20, 30, 40)$.

Solución. Tomando la descomposición de los números,

$$\begin{array}{ccc|ccl} 20 & 30 & 40 & 2 & \rightarrow & \text{porque las } \div 2 \text{ son exactas.} \\ 10 & 15 & 20 & 5 & \rightarrow & \text{porque las } \div 5 \text{ son exactas.} \\ 2 & 3 & 4 & & \rightarrow & \text{fin porque no hay divisor.} \end{array}$$

Luego $\text{MCD}(20, 30, 40) = 2 \times 5 = 10$.

Formas de calcular el MCD

Máximo común divisor

Algoritmo 3: descomposición individual

- Descomponer en factores primos cada número.
- El producto de los factores primos comunes con su menor exponente es el MCD del conjunto.

Ejemplo 3

Hallar el $\mathrm{MCD}(90, 120, 126)$.

Solución. Luego de descomponer cada número

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5, \quad 90 = 2 \times 3^2 \times 5, \quad 126 = 2 \times 3^2 \times 7$$

Como 2 y 3 son factores comunes en los números, y el exponente menor es 1 en cada uno, entonces $\mathrm{MCD}(90, 120, 126) = 2 \times 3 = 6$.

El algoritmo mcm

Mínimo común múltiplo

¿Qué es el mcm?

Está definido como el **menor** de los múltiplos comunes de un conjunto de números [Ramos et al., 2000, Wikipedia, 2022d]. Se simboliza mcm$(a, b, \ldots)$.

Para comprender el mcm observar esta situación: en una finca las vacas se deben alimentar cada 12 horas mientras que los caballos cada 8 horas. ¿Cuál es la menor hora de coincidencia para la alimentación?

- vacas: múltiplos de 12: $\{12, 24, 36, 48, 60, 72, \ldots\}$
- caballos: múltiplos de 8: $\{8, 16, 24, 32, 40, 48, \ldots\}$

La menor hora que coinciden para la alimentación es 24 horas.

Formas de calcular el mcm

Mínimo común múltiplo

Algoritmo 1: descomposición simultánea y continua

- Descomponer en factores primos de forma simultánea (a la vez) los números. Si un número no es divisible por el factor primo, entonces se deja como resultado el mismo número, para continuar con el siguiente divisor.
- El procedimiento concluye cuando la última fila es sólo "1".
- El producto de los divisores hallados es el mcm del conjunto.

El procedimiento es similar al MCD, luego no se debe confundir.

Formas de calcular el mcm

Mínimo común múltiplo

Ejemplo 1

Hallar el $\text{mcm}(10, 12, 15)$.

Solución. Tomando la descomposición simultánea de los números,

$$\begin{array}{rrr|lcl}
10 & 12 & 15 & 2 & \rightarrow & \text{porque hay divisibles por } \div 2 \\
5 & 6 & 15 & 2 & \rightarrow & \text{porque hay divisibles por } \div 2 \\
5 & 3 & 15 & 3 & \rightarrow & \text{porque hay divisibles por } \div 3 \\
5 & 1 & 5 & 5 & \rightarrow & \text{porque hay divisibles por } \div 5 \\
1 & 1 & 1 & & \rightarrow & \text{fin porque hay solo unos.}
\end{array}$$

Luego $\text{mcm}(10, 12, 15) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$.

Formas de calcular el mcm

Mínimo común múltiplo

Algoritmo 2: descomposición individual

- Descomponer en factores primos cada número.
- El producto de los factores primos comunes y no comunes, con sus mayores exponentes es el mcm del conjunto.

Es un algoritmo apropiado cuando hay números grandes.

Formas de calcular el mcm

Mínimo común múltiplo

Ejemplo 2

Hallar el $\text{mcm}(168, 144, 512)$.

Solución. Luego de descomponer cada número

$$168 = 2^3 \times 3 \times 7, \quad 144 = 2^4 \times 3^2, \quad 512 = 2^9$$

Como 2^9 y 3^2 son factores comunes con mayor exponente y 7 es el factor no común, entonces $\text{mcm}(168, 144, 512) = 2^9 \times 3^2 \times 7 = 32256$.

Actividad 18

Múltiplos y Divisores

1. ¿Cuáles de los siguientes números son múltiplos de 6?
   $\{33, 54, 9, 88, 68, 6, 89, 53, 73, 77, 42, 3\}$
2. Busca los divisores de 36.
3. ¿Cuáles de los siguientes números son divisores de 48?
   $\{4, 7, 6, 35, 10, 8, 24, 1, 3, 17, 21, 12\}$
4. ¿El número 74652, es divisible por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11?

Actividad 19

Números primos

1. Determinar todos los números primos entre 1 y 100 por el procedimiento de Erastóstenes.
2. Hallar 5 parejas de *números primos gemelos*, o sea, dos números primos que se diferencian en dos unidades. Escribir la resta.
3. Hallar 10 *números semiprimos*, o sea, números compuestos que son el producto de dos números primos. Escribir el número y los factores del producto, esto es, $n = p \times q$.

Actividad 20

Criterios de divisibilidad

1. En la siguiente lista de números hallar aquellos divisibles por 7: 343, 642, 1724, 8452, 23901, 9318.
2. De los siguientes números: 111, 3113, 27172, 27170, 32359, 10011, ¿cuáles son divisibles por 11?
3. Hay 48 personas que van a participar en eventos deportivos. Los equipos deben tener igual número de jugadores. ¿Cuántos jugadores puede haber en cada uno de los equipos?
4. Ana tiene que arreglar 36 sillas rojas y 42 azules en una sala de conferencias. ¿Cuál es el mayor número de sillas que debe colocar en cada fila si quiere colocar el mismo número en cada una de ellas?

Actividad 22

Descomposición factores primos

1. Encontrar la descomposición total en factores primos de los siguientes números:

a) 214	b) 280	c) 375
d) 1617	e) 2310	f) 54210

2. Determinar el número de las siguientes descomposiciones:

a) $2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 1$	b) $2^6 \times 3^3 \times 5$	c) $11^2 \times 13^2 \times 19$

3. ¿Cuántos divisores tiene un número? Para conocer la cantidad, se hace la descomposición en factores primos, se aumenta en uno a cada uno de los exponentes; el producto de esos exponentes aumentados es el número de divisores.
   a) ¿Cuántos divisores tiene 36?
   b) ¿Cuántos divisores tiene 15000?

Actividad 23

Aplicaciones de la descomposición

1. Hallar la raíz cuadrada (si es posible) de los siguientes números: 576, 324, 2025, 12560.
2. Justicar si es falso o verdadero, y con un ejemplo: algunos números no son divisibles por 1.
3. Justicar si es falso o verdadero, y con un ejemplo: si un número es divisible por 6, también es divisible por 2 y 3.
4. Un cuadrado tiene un área de 75625 metros cuadrados, ¿cuánto mide uno de sus lados?
5. ¿Con 5625 baldosas es posible embaldosar el piso de un salón de forma cuadrada? De ser afirmativa la respuesta ¿Cuántas baldosas tiene uno de sus lados?

Actividad 26

Máximo común divisor

1. Hallar el MCD de cada conjunto de números junto con su procedimiento.
   a) $\{10{,}12{,}15\}$ b) $\{32{,}48\}$ c) $\{35{,}105{,}112\}$
   d) $\{60{,}96{,}144\}$
2. Valentina quiere coser una colcha de retazos de tela cuadrados del mayor tamaño posible. Si la colcha tiene que medir 160 cm de largo y 70 cm de ancho, ¿cuánto deben medir los retazos?
3. Un ganadero recoge leche de tres vacas así: la primera dio 12 litros, la segunda 16 y la tercera 24. Sin mezclar la leche de cada vaca decide empacar la leche en cajas de cartón con la condición que cada caja tenga la misma cantidad, ¿cuál es la cantidad máxima de leche de cada caja para que sean todas iguales?

Actividad 26

Máximo común divisor

- **Tarea.** Consultar otro algoritmo para calcular el MCD de un conjunto de números junto con un ejemplo. Otros métodos: descomposición individual, algoritmo de Euclides.

Actividad 27

Mínimo común múltiplo

1. Hallar el mcm de cada conjunto de números junto con su procedimiento.
   a) $\{30,63\}$ b) $\{148,400\}$ c) $\{20,40,50\}$
   d) $\{325,625,820\}$ e) $\{60,144,84\}$
2. En un velódromo parten al mismo tiempo 3 ciclistas. Uno de ellos da una vuelta en 30 segundos, otro cada 27 segundos y el otro cada 24 segundos. ¿A los cuántos segundos se vuelven a cruzar los 3 ciclistas juntos? ¿Cuantas vueltas ha logrado cada ciclista?
3. El planeta Mercurio tarda 88 días terrestres en dar una vuelta alrededor del Sol y Venus tarda 225 días. Si están alineados con el Sol, ¿cuánto tardará en volver a producirse esta alineación?
4. Xavier tiene una cuerda de 120 metros y otra de 180 metros. Desea cortarlas de modo que todos los trozos sean iguales pero lo más largos posible. ¿Es posible dividir las cuerdas con tales condiciones?

Actividad 29

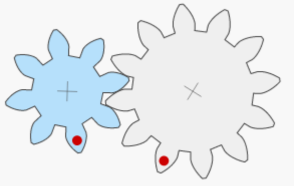
Miscelánea de problemas: ¿MCD o mcm?

1. Ana asiste a la biblioteca del colegio cada 4 días, Blas cada 6 días y Ciro cada 5 días. Si la biblioteca está abierta todos los días y hoy han coincidido los 3. ¿Dentro de cuántos días vuelven a coincidir? ¿En qué día de la semana?
2. Darlen y Elvis tienen tienen 30 roscones, 27 churros y 42 galletas y quieren exhibir el mayor número posible de hileras iguales en el mostrador de su panadería. ¿Cuántas hileras pueden hacer?
3. Un ebanista quiere cortar una lamina de 5467 cm de largo y 781 de ancho, en cuadrados lo más grandes posibles. ¿Cuál debe ser la longitud del lado?

Actividad 29

Miscelánea de problemas: ¿MCD o mcm?

4. En la figura, el piñón mayor tiene 12 dientes y el menor 8. ¿Cuántos dientes de cada rueda deben pasar para que vuelvan a coincidir los puntos rojos? ¿Cuántas vueltas habrá girado cada rueda?



5. Resolver junto con su procedimiento.

   a) $\text{MCD}(625, 3125)$ b) $\text{MCD}(55, 66, 275)$ c) $\text{mcm}(620, 180, 720)$

   d) $\text{mcm}(121, 1331, 484)$

Referencias I

Ramos, J., Ortiz, L., García, G., and Ardila, V. (2000).
Supermat 6.
Voluntad, Bogotá D.C., Colombia.

Wikipedia (2022a).
Criba de eratóstenes.
https://es.wikipedia.org/wiki/Criba_de_Erat%C3%B3stenes.
Recuperado Julio 2022.

Wikipedia (2022b).
Factorización de enteros.
https://es.wikipedia.org/wiki/Factorizaci%C3%B3n_de_enteros.
Recuperado Agosto 2022.

Referencias II

Wikipedia (2022c).
Máximo común divisor.
https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A1ximo_com%C3%BAn_divisor.
Recuperado Septiembre 2022.

Wikipedia (2022d).
Mínimo común múltiplo.
https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%ADnimo_com%C3%BAn_m%C3%BAltiplo.
Recuperado Septiembre 2022.

Referencias III

Wikipedia (2022e).
Teorema fundamental de la aritmética.
https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_fundamental_de_la_aritm%C3%A9tica.
Recuperado Agosto 2022.