Números fraccionarios: las operaciones básicas

Parte II

Matemáticas - Grado 6

2020

1. Introducción: las operaciones básicas con números fracciones

Luego de reconocer la interpretación de una fracción y los procedimientos para obtener fracciones equivalentes en la segunda parte se abordaran las operaciones básicas para estos números. De acuerdo con el concepto mencionado anteriormente, una fracción es un cociente de dos números, pero sin resolver la división ($\frac{1}{4}$ es lo mismo que $1 \div 4$). Así que bajo este concepto, establecer las operaciones básicas requieren "nuevas reglas" o *algoritmos* pues las fracciones poseen dos partes: numerador (arriba del vínculo o barra) y denominador (debajo del vínculo) y en cada operación, cada parte tiene un papel importante.

Cada operación es posible representarla como un dibujo para propósitos de comprensión, pero no es el procedimiento o algoritmo apropiado pues se pierde rapidez y agilidad para resolverla. Sin embargo, en esta introducción se realizará una excepción para ilustrar los algoritmos de la suma y multiplicación de fracciones.

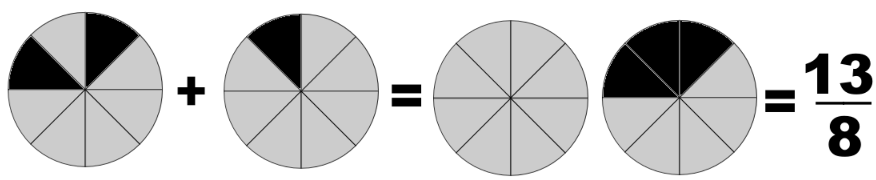

Figura 1: Representación de la suma de fracciones.

La figura 1 ilustra la suma de fracciones: puesto que la suma denota un proceso de **agregar o aumentar**, en los números fraccionarios la operación **suma** es desarrollada por unidades que tengan la misma partición del todo (en este caso cada círculo es partido en 8 partes) y se limita a sumar las cantidades numéricas de los numeradores manteniendo la misma partición de la unidad. En lugar de la figura, se procede así:

$$\frac{6}{8} + \frac{7}{8} = \frac{6+7}{8} = \frac{13}{8}$$

La multiplicación de fracciones, quizás tiene un sentido diferente a la multiplicación de números naturales cuya finalidad es **obtener cantidades más grandes** de forma rápida. En su lugar, la multiplicación de fracciones se interpreta como el procedimiento de hacer particiones aún más pequeñas que la unidad de cada fracción que interviene en la multiplicación.

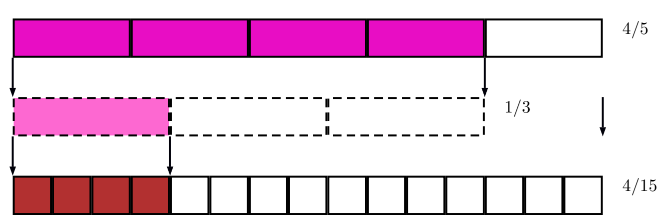

Figura 2: Representación de la multiplicación de fracciones.

Por ejemplo, la figura 2 ilustra la multiplicación $\frac{4}{5} \times \frac{1}{3}$. La operación **multiplicación** se interpreta que, de los $\frac{4}{5}$ de la unidad se toma la tercera parte expresando el resultado con divisiones tres veces más pequeñas de las que tiene la fracción $\frac{4}{5}$. En esta operación la parte coloreada de $\frac{4}{5}$ es una nueva unidad que se divide en tres partes y solo se toma una, y a su vez esta parte se representa en una unidad de 15 particiones. En lugar de la figura, se procede así:

$$\frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{4 \times 1}{5 \times 3} = \frac{4}{15}$$

De manera similar pero opuesta se pueden interpretar las operaciones resta de fracciones (quitar o disminuir la cantidad de la unidad) y división de fracciones (agrandar las particiones).

El propósito de esta lección es mostrar los algoritmos de las operaciones básicas, exponiendo primero el procedimiento seguido de ejemplos de "cómo se usa el algoritmo". Es importante mencionar que las operaciones con fracciones requieren mayor capacidad de razonamiento, pues requiere desde la concentración mental, reconocimiento de las partes de la fracción, dominio de las operaciones básicas y hasta el buen uso del mínimo común múltiplo; temáticas tratadas en lecciones anteriores. A continuación el documento sigue con el desarrollo de cada operación y luego finaliza con una actividad para aplicar los algoritmos presentados.

2. Operaciones con fracciones

2.1. Suma y resta

La suma[1] y la resta[2] de fracciones comparten el mismo algoritmo o procedimiento; tan sólo el signo de la operación hace la diferencia. Sin embargo, el algoritmo toma dos caminos según como aparezcan los denominadores de la fracciones a sumar (o restar). Si las fracciones tienen igual denominador se tiene una suma (o resta) de *fracciones homogéneas*, en caso contrario se tiene suma (o resta) *fracciones heterogéneas*. En cada situación el algoritmo es diferente [6].

2.1.1. Suma (o resta) de fracciones homogéneas

Algoritmo

Para sumar (o restar) fracciones de igual denominador, se deja el denominador y se suma (o restan) los numeradores [3, 4].

Ejemplo 1. Resolver cada operación con fracciones homogéneas.

a)

$$\frac{5}{11} + \frac{12}{11}$$

b)

$$\frac{72}{151} + \frac{21}{151} - \frac{15}{151}$$

a) Solución.

$$\frac{5}{11} + \frac{12}{11} = \frac{5+12}{11} = \frac{17}{11}$$

b) Solución.

$$\frac{72}{151} + \frac{21}{151} - \frac{15}{151} = \frac{72+21-15}{151} = \frac{78}{151}$$

[1] También se conoce como adición.
[2] También conocida como sustracción.

2.1.2. Suma (o resta) de fracciones heterogéneas

Algoritmo

Para sumar (o restar) fracciones de diferente denominador se emplea el siguiente proceso [3, 5]:

1. Hallar el mínimo común múltiplo ($m.c.m.$) de los denominadores de las fracciones.
2. Amplificar cada fracción a una fracción equivalente con la condición que su denominador sea $m.c.m$.
3. Sumar (o restar) las fracciones equivalentes homogéneas.

Ejemplo 2. Resolver la operación con fracciones heterogéneas (Obsérvese que los denominadores tienen números diferentes).

$$\frac{3}{2} - \frac{5}{9}$$

Solución. Siguiendo los pasos del algoritmo,

1. Los denominadores son 2 y 9, luego encontrando el $m.c.m.(2,9)$

$$\begin{array}{cc|cll} 2 & 9 & 2 & & \\ 1 & 9 & 3 & \rightarrow \quad 1 \text{ porque } 2 \div 2 = 1. & 9 \text{ porque } 9 \div 2 \text{ no es exacta.} \\ 1 & 3 & 3 & \rightarrow & 3 \text{ porque } 9 \div 3 = 3. \\ 1 & 1 & & & 1 \text{ porque } 3 \div 3 = 1. \end{array}$$

$$m.c.m.(2,9) = 2 \times 3 \times 3 = 18$$

Este $m.c.m.$ será el nuevo denominador de las fracciones.

2. Cada fracción se amplifica en otra tal que, el denominador sea $m.c.m.$ hallado. Para encontrar el factor que amplifica la fracción se divide el $m.c.m.$ por el denominador de cada fracción; encontrado el factor se amplifica la fracción:

$$\begin{array}{lclcl} \text{Para } \frac{3}{2} & \rightarrow & 18 \div 2 = 9, \text{ luego se amplifica por } 9 & \rightarrow & \frac{3}{2}\frac{\times 9}{\times 9} = \frac{27}{18} \\ \text{Para } \frac{5}{9} & \rightarrow & 18 \div 9 = 2, \text{ luego se amplifica por } 2 & \rightarrow & \frac{5}{9}\frac{\times 2}{\times 2} = \frac{10}{18} \end{array}$$

3. Como las fracciones equivalentes ya son homogéneas (obsérvese que tienen igual denominador) ya se puede resolver la operación:

$$\frac{3}{2} - \frac{5}{9} = \frac{27}{18} - \frac{10}{18} = \frac{27-10}{18} = \frac{17}{18}$$

Ejemplo 3. Hallar el resultado de:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{4}{15}$$

Solución. Siguiendo los pasos del algoritmo.

1. Los denominadores son 3, 5 y 15.

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 15 & 3 \\ 1 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

$$m.c.m.(3,5,15) = 3 \times 5 = 15$$

2. Amplificando cada fracción,

$$\begin{array}{rcll} \text{Para } \dfrac{2}{3} & \longrightarrow & 15 \div 3 = 5, \text{ luego se amplifica por } 5 & \longrightarrow \quad \dfrac{2}{3}\dfrac{\times 5}{\times 5} = \dfrac{10}{15} \\ \text{Para } \dfrac{1}{5} & \longrightarrow & 15 \div 5 = 3, \text{ luego se amplifica por } 3 & \longrightarrow \quad \dfrac{1}{5}\dfrac{\times 3}{\times 3} = \dfrac{3}{15} \\ \text{Para } \dfrac{4}{15} & \longrightarrow & 15 \div 15 = 1, \text{ luego se amplifica por } 1 & \longrightarrow \quad \dfrac{4}{15}\dfrac{\times 1}{\times 1} = \dfrac{4}{15} \end{array}$$

3. Sumando las fracciones equivalentes homogéneas,

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{4}{15} = \frac{10}{15} + \frac{3}{15} + \frac{4}{15} = \frac{10+3+4}{15} = \frac{17}{15}$$

2.2. Multiplicación

Algoritmo

Para multiplicar dos o más fracciones se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí [2].

Ejemplo 4. Hallar cada multiplicación de fracciones.

a)
$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{7}$$

b)
$$\frac{8}{4} \times \frac{5}{3} \times \frac{1}{10}$$

a) Solución. De acuerdo al algoritmo, se multiplica “todo lo de arriba” y “todo lo de abajo”:

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{5 \times 7} = \frac{6}{35}$$

b) Solución.

$$\frac{8}{4} \times \frac{5}{3} \times \frac{1}{10} = \frac{8 \times 5 \times 1}{4 \times 3 \times 10} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

En ocasiones, luego de multiplicar las fracciones se realiza la simplificación como ocurrió en este ejemplo.

2.3. División

Algoritmo

Para dividir dos fracciones se multiplica el numerador de una fracción por el denominador de la otra y viceversa [1].

Aunque parezca extraño, el algoritmo de la “división de fracciones” usa el recurso de la multiplicación! Esto sucede porque el algoritmo, muestra el *cómo se hace*, pero no profundiza *por qué se hace*. En esta particular operación, otro modo de enunciar el algoritmo es:

Para dividir dos fracciones, se multiplica el dividendo por el recíproco del divisor.

Cuando se menciona fracción recíproca, se refiere a aquella fracción con numerador y denominador invertidos, tal que cuando se multiplica la fracción por su fracción recíproca su resultado es 1. Por ejemplo, la fracción recíproca de $\frac{11}{3}$ es $\frac{3}{11}$ puesto que $\frac{11}{3} \times \frac{3}{11} = \frac{33}{33} = 1$. Como aclaración adicional, en la introducción de la lección se representó el producto $\frac{4}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$. Haciendo la división $\frac{4}{15} \div \frac{1}{3}$ se espera que el resultado sea $\frac{4}{5}$ según la lógica de la división. Para resolver la operación, se toma el recíproco del divisor, es decir $\frac{3}{1}$, que al multiplicar y simplificar $\frac{4}{5} \times \frac{3}{1} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$. Observando la forma como se ponen los números en la operación justifica porque usar el algoritmo del cajón azul. Otros algoritmo alternativo para esta operación es la conocida ley de la oreja.

Ejemplo 5. Hallar cada división de fracciones.

a)
$$\frac{5}{8} \div \frac{11}{4}$$

b)
$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{7}$$

a) Solución. Según el algoritmo del cajón azul
$$\frac{5}{8} \div \frac{11}{4} = \frac{5 \times 4}{8 \times 11} = \frac{20}{88}$$
Otro modo de recordar la operación es efectuar los productos en cruz como en la verificación de las fracciones equivalentes.

b) Solución. Aquí, haciendo los productos con la ley de la oreja
$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}} = \frac{21}{20}$$

3. Actividad Número 11

Resolver en el cuaderno los siguientes ejercicios. Poner especial atención a la escritura y a los procedimientos con las fracciones.

1. Hallar el resultado de:
$$\frac{14}{9} - \frac{7}{9} + \frac{11}{9} - \frac{17}{9}$$
2. Resolver la operación:
$$\frac{8}{12} + \frac{5}{8}$$
3. Si una libra de carne cuesta 7001/2 pesos ¿Cuánto cuestan 32/3 de libras?
4. Una persona caminando recorre una distancia de 3/4 de kilometro en 2/7 de hora. Si la velocidad es igual a la distancia dividida por el tiempo, hallar la velocidad de la persona cuando camina.

Nota: La sección referencias contiene fuentes de consulta bibliográficas si se tiene posibilidad de acceder a textos o navegación en la red. Estas aparecen en el contenido de este texto con paréntesis cuadrados [...].

Referencias

[1] Ticmas Educación, *Multiplicación y división de fracciones*, https://www.youtube.com/watch?v=_k7AzOiA3PQ, 2019, Consultado 29 oct 2020.

[2] Podemos Aprobar Matemáticas, *Multiplicar dos fracciones y simplificar el resultado*, https://www.youtube.com/watch?v=X4esQI1XiTo, 2016, Consultado 29 oct 2020.

[3] Matesfacil, *Sumar y restar fracciones*, https://www.matesfacil.com/ESO/fracciones/sumar/sumar-restar-fracciones-negativas-minimo-comun-multiplo-ejercicios-resueltos-quebrados-secunda html, 2019, Consultado 27 oct 2020.

[4] Vitual Preparatoria, *Suma de 3 fracciones con el mismo denominador*, https://www.youtube.com/watch?v=OCLwJC2arXM, 2015, Consultado 28 oct 2020.

[5] profeguille, *Suma de fracciones heterogéneas por mínimo común múltiplo*, https://www.youtube.com/watch?v=eXaHjM33dn0, 2018, Consultado 28 oct 2020.

[6] Jesús Ramos and Ludwig Ortiz, *Supermat 6*, Voluntad, 2000.