

De Razones a Funciones Trigonométricas

Grado 10

Matemáticas

2020

Introducción

Generalidades del CG

Funciones Trigonométricas

Ejemplo

Actividad

Referencias

Del triángulo rectángulo a la circunferencia

Sección 1: introducción

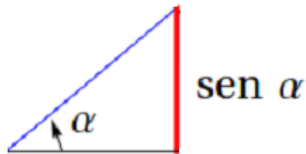


Figura 1: Razón trigonométrica seno en el triángulo rectángulo. El lado rojo es el cateto opuesto.

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{Cat. opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

Algunas limitaciones para calcular la razón seno en un triángulo rectángulo:

- ▶ Se puede calcular si se conocen las medidas de los lados.
- ▶ El ángulo debe estar entre 0° y 90° .
- ▶ No se puede interpretar $\text{sen } 0^\circ$ o $\text{sen } 90^\circ$, pues en esos ángulos no existe un triángulo.

Del triángulo rectángulo a la circunferencia

Sección 1: introducción

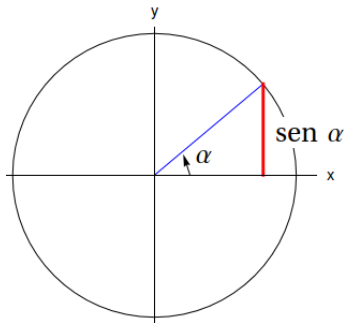


Figura 2: Razón trigonométrica seno en la circunferencia. La línea roja es el seno del ángulo α .

Para superar estas limitaciones conviene cambiar el triángulo por una circunferencia de radio 1. Así:

- ▶ El seno es simplemente la medida de la línea roja.
- ▶ Se puede extender para ángulos superiores a 90° , sin ningún límite.
- ▶ $\text{sen } 0^\circ$ o $\text{sen } 90^\circ$ se pueden interpretar.

De Razón a Función

Sección 1: introducción

- ▶ Ya que con la circunferencia se puede conocer el seno de cualquier ángulo y depende únicamente del ángulo, ya no se habla de razón sino de una **función**:

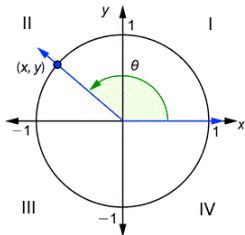
$$\overbrace{\underbrace{y}_{\text{Tamaño de línea roja}} = \underbrace{\text{sen } x}_{\text{Depende del ángulo } x}}^{\text{Función trigonométrica seno}}$$

- ▶ En trigonometría, a dicho círculo unitario sobre los ejes cartesianos se llama *Círculo Goniométrico* (abreviado CG) y sobre él, se pueden interpretar las restantes 5 funciones trigonométricas (cos, tan, ...).

El círculo goniométrico

Sección 2: Generalidades del CG

- ▶ El círculo se divide en 4 regiones y un ángulo se ubica en una sola región.



- ▶ Los ángulos se miden de preferencia en radianes (1 vuelta=360°=2π rad).

- ▶ Los ángulos son medidos desde eje x+.
- ▶ Los ángulos (+) tienen sentido antihorario.
- ▶ Los ángulos (-) tiene sentido horario.
- ▶ Es usual, que los ángulos se expresen en fracciones de π :

$$\begin{array}{llll} \pi & \rightarrow & \frac{1}{2} \text{ vuelta} & \rightarrow 180^\circ \\ \frac{\pi}{2} & \rightarrow & \frac{1}{4} \text{ vuelta} & \rightarrow 90^\circ \\ \frac{2\pi}{3} & \rightarrow & \frac{1}{3} \text{ vuelta} & \rightarrow 120^\circ \end{array}$$

Construcción de las funciones trigonométricas

Sección 3: Funciones trigonométricas

- ▶ El Circulo Goniométrico (CG) permite construir y analizar las funciones trigonométricas.
- ▶ Por ejemplo, para la función *seno* los ángulos se tabulan en el eje x y el valor del seno (línea roja) se tabula en el eje y hasta completar la vuelta al CG.
- ▶ Gráfica de la función seno construida con el (CG).

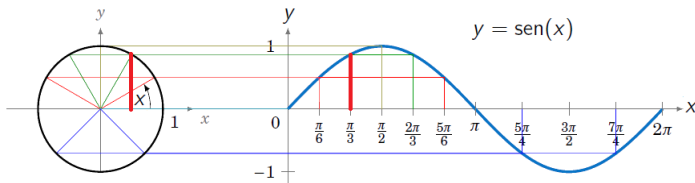


Figura 3: Una animación de la construcción se encuentra [aquí](http://mikemolina.github.io/repoedu).

El periodo

Sección 3: Funciones trigonométricas

- ▶ Puesto que los ángulos pueden repetirse sobre el círculo cualquier cantidad de vueltas, la gráfica de la función seno, también *tiende a repetirse* después de ciertos valores de los ángulos.
- ▶ Esta tendencia de repitencia se denomina el **periodo** de la función y es un número que indica cada cuanto se repite la función.
- ▶ Todas las funciones trigonométricas son periódicas.

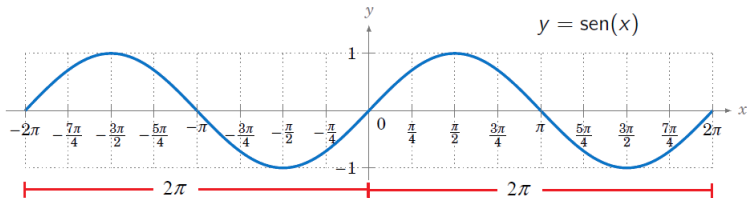


Figura 4: La función seno tiene un periodo de 2π rad (360°). En esta gráfica se muestran dos periodos de la función.

Partes en una función trigonométrica

Sección 3: Funciones trigonométricas

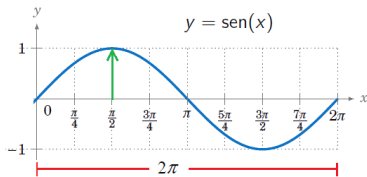


Figura 5: Gráfica función seno: $y = \sin x$. Esta función se conoce como la *forma básica*.

Ejemplo. La función de la figura 5 tiene periodo 2π y amplitud 1.

Partes principales.

Periodo. Indica cada cuánto se repite la función (ver línea roja).

Amplitud. Valor máximo de una “montaña” medida desde el eje x (ver línea verde)

Partes en una función trigonométrica

Sección 3: Funciones trigonométricas

- ▶ La *forma general* de la función seno se escribe como:

$$y = A \operatorname{sen}(\omega x)$$

- ▶ A denota la amplitud de la función; puede ser cualquier número.
- ▶ ω es un parámetro relacionado con el periodo de la función. Si T denota el periodo, este se determina por medio de la división

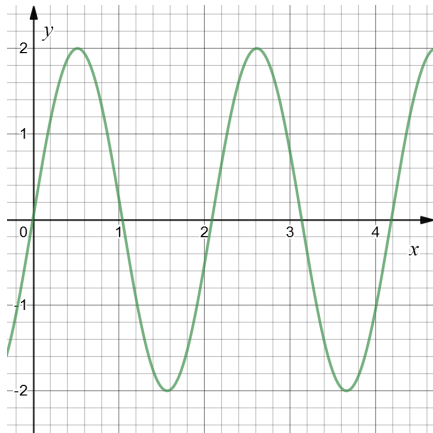
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

- ▶ Según el contexto científico de uso ω ¹ recibe un nombre particular. En física se conoce como *frecuencia angular*.

¹Esta es la letra omega del alfabeto griego.

Ejemplo: analizando una función trigonométrica

Sección 4: Ejemplo



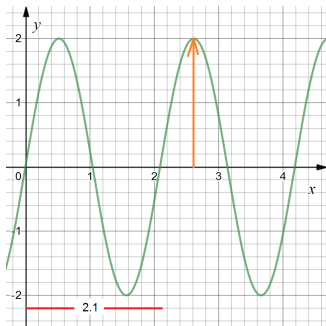
Según la gráfica, hallar:

- ▶ El periodo.
- ▶ La amplitud.
- ▶ Valores máximo y mínimo
- ▶ Para un periodo: el intervalo donde es positiva y el intervalo donde es negativa.
- ▶ Si es posible, escribir la función en forma general.

Ejemplo: analizando una función trigonométrica

Sección 4: Ejemplo

Solución.



De la gráfica se tiene:

- ▶ Periodo $T = 2,1$
- ▶ Amplitud $A = 2$
- ▶ Valores máximo: $+2$. Valor mínimo: -2 .
- ▶ Es positiva desde 0 hasta 1.1; es negativa desde 1.1 hasta 2.1.
- ▶ El valor ω se halla con

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6,28}{2,1} = 3,0$$

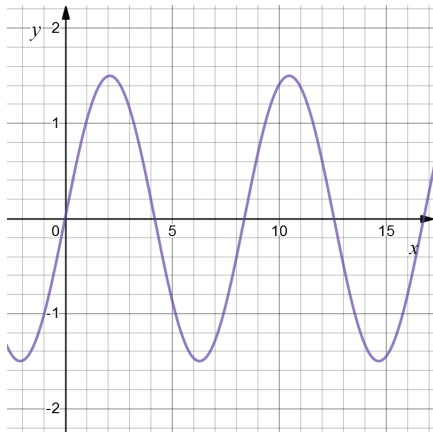
- ▶ Como el gráfico es similar a la forma básica del seno, la función es:

$$y = 2 \operatorname{sen}(3x)$$

Actividad 9

Sección 5: Actividad

Analizar la siguiente función trigonométrica y resolver en el cuaderno.



De acuerdo a la gráfica encontrar:

- ▶ El periodo.
- ▶ La amplitud.
- ▶ Valores máximo y mínimo
- ▶ Para un periodo: el intervalo donde es positiva y el intervalo donde es negativa.
- ▶ Si es posible, escribir la función en forma general $y = A \operatorname{sen}(\omega x)$.

Referencias

Aquí aparecen algunas fuentes de consulta bibliográficas si se tiene posibilidad de acceder a navegación en la red.

1. Isabel Daza, *Funciones Trigonométricas*.
<https://funcionestrigonometricas.weebly.com/>
2. Marina Uncos, *Construcción de la función seno*.
<https://www.geogebra.org/m/qAzBGS9x>
3. Math2me, *Gráfica de la funciones trigonométricas*.
<https://www.youtube.com/watch?v=S6-cqLqQRBU>