Aplicación del límite: razones de cambio, derivadas

Matemáticas - Grado 11
2019

Introducción: un límite importante
Cociente incremental

Una aplicación importante del límite se muestra bajo la figura del cociente incremental; tal límite no es más que

$$\text{Cociente incremental} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\text{incremento var. dependiente}}{\text{incremento var. independiente}}$$

Introducción: un límite importante

Cociente incremental

Una aplicación importante del límite se muestra bajo la figura del cociente incremental; tal límite no es más que

$$\text{Cociente incremental} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\text{incremento var. dependiente}}{\text{incremento var. independiente}}$$

Definición del cociente incremental

Es el límite de la división entre el cambio de la variable dependiente y el cambio de la variable independiente, pero cuando se consideran pequeñas variaciones en la variable independiente:

$$\text{c. i. f(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Introducción: un límite importante

Cociente incremental

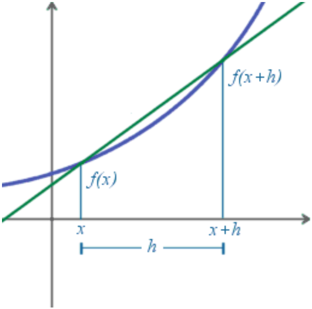


Figura : Cociente incremental en una función $f(x)$.

1. Análisis de razones cambio en funciones.
    - Física: distancia, velocidad, aceleración.
    - Economía: costos, utilidades, rendimiento de capital.
2. La recta tangente a una curva.
3. Valores extremales en el modelamiento de una situación.

Interpretación geométrica del c. i.

Cociente incremental en el límite nulo

Cuando el cociente incremetal es llevado al extremo $h \to 0$, este se denomina *la derivada de la función en el punto* x, es decir

$$\text{derivada f(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Interpretación geométrica del c. i.

Cociente incremental en el límite nulo

Cuando el cociente incremetal es llevado al extremo $h \to 0$, este se denomina *la derivada de la función en el punto* x, es decir

$$\text{derivada f(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Interpretación del cociente incremental

Geométricamente, el cociente incremental mide la pendiente de una recta que pasa por un punto de la curva $f(x)$.

Demostración función lineal.

Interpretación geométrica del c. i.

Hallando la derivada vía c.i.

Ejemplo 1

Dada la función $y = x^2$, hallar la derivada para todo su dominio.

$$\text{c. i. } x^2 = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}}_{\text{Triángulo de Pascal}}$$

Interpretación geométrica del c. i.

Hallando la derivada vía c.i.

Ejemplo 1

Dada la función $y = x^2$, hallar la derivada para todo su dominio.

$$\text{c. i. } x^2 = \lim_{h\to 0} \frac{y(x+h)-y(x)}{h} = \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}}_{\text{Triángulo de Pascal}}$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}}_{\text{Operaciones}} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h}$$

Interpretación geométrica del c. i.

Hallando la derivada vía c.i.

Ejemplo 1

Dada la función $y = x^2$, hallar la derivada para todo su dominio.

$$\text{c. i. } x^2 = \lim_{h\to 0} \frac{y(x+h)-y(x)}{h} = \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}}_{\text{Triángulo de Pascal}}$$

$$= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}}_{\text{Operaciones}} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h}$$

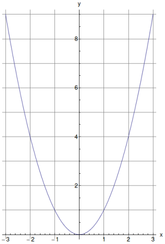
$$= \underbrace{\lim_{h\to 0} [2x+h]}_{\text{Calculando límite}} = 2x$$

Interpretación geométrica del c. i.
El problema de la recta tangente

Consiste en encontrar la (*ecuación*) recta rasante a un punto de una curva $f(x)$.

Ejemplo 2

Para la función $f(x) = x^2$, encontrar la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(x, y) = (2, f(2))$.



Derivada de una función

Notación para la derivada

Notación

El proceso de hallar el cociente incremental de una función se llama *derivada de una función*.

$$\frac{dy}{dx}, \quad y'(x), \quad y', \quad D_x[y]$$

La notación se lee "la derivada de y respecto a x".

En resumen, tal operación se interpreta como:

1. La pendiente de la gráfica de y en un punto x (p. ej., problema de la recta tangente).
2. La razón de cambio de y respecto a x (p. ej., posición y velocidad).

Derivada de una función

Derivada de funciones algebraicas elementales

El procedimiento usual para calcular una derivada es a través de reglas y no por medio del (tedioso!) cociente incremental.

Regla para función	Derivada	Resultado
Constante	$\frac{d}{dx}(c)$	$= 0$
Potencia	$\frac{d}{dx}(x^n)$	$= nx^{n-1}$
Lineal	$\frac{d}{dx}(x)$	$= 1$

El proceso de derivar tiene la secuencia: re-escribir, derivar y simplificar.

Muchos ejemplos

Obtener la derivada de...

Derivada de una función

Reglas para sumas, múltiplos constantes, productos y cocientes

Aplicando el c.i. para funciones $f(x)$, $g(x)$ y un número c se deducen las siguientes reglas importantes.

Regla para función	Derivada	Resultado
Múltiplo constante	$\frac{d}{dx}(cf)$	$= cf'$
Suma(Resta)	$\frac{d}{dx}[f \pm g]$	$= f' \pm g'$
Producto	$\frac{d}{dx}(fg)$	$= f'g + fg'$
Cociente ($g \neq 0$)	$\frac{d}{dx}(\frac{f}{g})$	$= \frac{f'g - fg'}{g^2}$

El proceso de derivar tiene la secuencia: re-escribir, derivar y simplificar.

Y más ejemplos

Obtener la derivada de...

Actividad 1

Analizar el cociente incremetal para una simple situación cinemática. Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba en alguna localidad bogotana, la cual le tarda 1.3 segundos para alcanzar su máxima altura; ella es lanzada con una velocidad inicial de 13 m/s desde el suelo. Asuma la aceleración gravitacional para Bogotá de -9.79 m/s^2.
La (física) cinemática para modelar el movimiento de la piedra se describe con:

Actividad 1

Analizar el cociente incremetal para una simple situación cinemática. Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba en alguna localidad bogotana, la cual le tarda 1.3 segundos para alcanzar su máxima altura; ella es lanzada con una velocidad inicial de 13 m/s desde el suelo. Asuma la aceleración gravitacional para Bogotá de -9.79 m/s^2.

La (física) cinemática para modelar el movimiento de la piedra se describe con:

- Posición: $y(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + y_0$
- Velocidad: $v(t) = at + v_0$
- Aceleración: $a(t) = a$

Actividad 1

1. Calcular numéricamente la variación entre posición y velocidad; analizar los resultados.
   a) A partir de la funciones cinemáticas calcule el movimiento para $t = 0.4$ segundos.

$$y(0.4) = \_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$v(0.4) = \_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$a(0.4) = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

   b) Completar la tabla según indicaciones (Oiga! Ponga Atención!) para $t = 0.4$ segundos y comparar el cociente incremetal de la posición con la fórmula de la velocidad.

$$\text{c. i. } y(t) = \frac{y(0.4 + \Delta t) - y(0.4)}{\Delta t}$$

Actividad 1

Variación	Tiempo	Altura	Límite	Velocidad	Error
Δt	$t + \Delta t$	$y(t)$	c. i.	v(t)	%
0.1					
0.01					
0.001					
0.0001					

2. Repetir idéntico procedimiento para $t = 1.2$ segundos.

Usar truncamiento decimal a 3 cifras.

Actividad 2

1. Hallar la derivada vía cociente incremental para las respectivas funciones.
   a) $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$.
   b) De las derivadas anteriores y de forma deductiva (sin usar el cociente incremental), hallar la derivada de $y = x^{12}$.
2. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^3$ que pasa por el punto $(3, f(3))$.

Actividad 3

Hallar las derivadas de la función dada (en construcción!).

1. $y = 3.1416$
2. $f(d) = -\frac{3}{4}$
3. $f(x) = 3x - 1$
4. $f(t) = -2t^2 - 2t + 4$