Métodos de solución de la ecuación cuadrática

Matemáticas - Grado 9
2019

Ecuación cuadrática

Características

- Conocida por babilonios y Egipcios. Diofanto ofreció algunas soluciones.

Figura : Diofanto de Alejandría (s. III)

Ecuación cuadrática

Características

- Conocida por babilonios y Egipcios. Diofanto ofreció algunas soluciones.
- Es una función igualada a un único valor, por ejemplo: $x^2 - 3x + 5 = 5$.

Figura : Diofanto de Alejandría (s. III)

Ecuación cuadrática

Características

- Conocida por babilonios y Egipcios. Diofanto ofreció algunas soluciones.
- Es una función igualada a un único valor, por ejemplo: $x^2 - 3x + 5 = 5$.
- Pueden clasificarse como completas e incompletas.

Figura : Diofanto de Alejandría (s. III)

Ecuación cuadrática

Características

- Conocida por babilonios y Egipcios. Diofanto ofreció algunas soluciones.
- Es una función igualada a un único valor, por ejemplo: $x^2 - 3x + 5 = 5$.
- Pueden clasificarse como completas e incompletas.
- Toda ecuación cuadrática, es decir de segundo grado, tiene 2 raíces.

Figura : Diofanto de Alejandría (s. III)

Ecuación cuadrática

Características

- Conocida por babilonios y Egipcios. Diofanto ofreció algunas soluciones.
- Es una función igualada a un único valor, por ejemplo: $x^2 - 3x + 5 = 5$.
- Pueden clasificarse como completas e incompletas.
- Toda ecuación cuadrática, es decir de segundo grado, tiene 2 raíces.
- Aplicada en diferentes campos: astronomía, física, economía.

Figura : Diofanto de Alejandría (s. III)

Ecuación cuadrática

Clasificación

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ puede clasificarse según el valor de los coeficientes a, b y c.

1. *Completas.* Cuando a, b y c toman valores diferentes de cero.
2. *Incompletas.* Cuando alguno de los coeficientes toma el valor de cero.
   - De la forma $ax^2 = 0$; los coeficientes b y c valen cero.
   - De la forma $ax^2 + c = 0$; el coeficiente b vale cero, carece del término lineal.
   - De la forma $ax^2 + bx = 0$; el coeficiente c vale cero, carece del término constante.
3. Si el término a es igual a cero o no está presente no existe ecuación cuadrática.

Ecuación cuadrática

Clasificación

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ puede clasificarse según el valor de los coeficientes a, b y c.

1. *Completas.* Cuando a, b y c toman valores diferentes de cero.
2. *Incompletas.* Cuando alguno de los coeficientes toma el valor de cero.
   - De la forma $ax^2 = 0$; los coeficientes b y c valen cero.
   - De la forma $ax^2 + c = 0$; el coeficiente b vale cero, carece del término lineal.
   - De la forma $ax^2 + bx = 0$; el coeficiente c vale cero, carece del término constante.
3. Si el término a es igual a cero o no está presente no existe ecuación cuadrática.

Ecuación cuadrática

Clasificación

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ puede clasificarse según el valor de los coeficientes a, b y c.

1. *Completas.* Cuando a, b y c toman valores diferentes de cero.
2. *Incompletas.* Cuando alguno de los coeficientes toma el valor de cero.
   - De la forma $ax^2 = 0$; los coeficientes b y c valen cero.
   - De la forma $ax^2 + c = 0$; el coeficiente b vale cero, carece del término lineal.
   - De la forma $ax^2 + bx = 0$; el coeficiente c vale cero, carece del término constante.
3. Si el término a es igual a cero o no está presente no existe ecuación cuadrática.

Ecuación cuadrática

Clasificación

La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ puede clasificarse según el valor de los coeficientes a, b y c.

1. *Completas.* Cuando a, b y c toman valores diferentes de cero.
2. *Incompletas.* Cuando alguno de los coeficientes toma el valor de cero.
    - De la forma $ax^2 = 0$; los coeficientes b y c valen cero.
    - De la forma $ax^2 + c = 0$; el coeficiente b vale cero, carece del término lineal.
    - De la forma $ax^2 + bx = 0$; el coeficiente c vale cero, carece del término constante.
3. Si el término a es igual a cero o no está presente no existe ecuación cuadrática.

Propiedades de las raíces

Propiedad 1: suma de raíces

En la ecuación cuadrática (ordenada) $ax^2 + bx + c = 0$ las raíces x_1 y x_2 cumplen:

Suma de las raíces

La suma de las raíces es igual al coeficiente del segundo término con el signo cambiado, dividido el coeficiente del primer término.

es decir:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \tag{1}$$

Propiedades de las raíces

Propiedad 2: producto de raíces

En la ecuación cuadrática (ordenada) $ax^2 + bx + c = 0$ las raíces x_1 y x_2 cumplen:

Producto de las raíces

El producto de las raíces es igual al coeficiente del tercer término con su propio signo, dividido el coeficiente del primer término.

es decir:

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \tag{2}$$

Solución de la ecuación cuadrática

Resolviendo la ecuación cuadrática

Las raíces x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ pueden hallarse mediante 3 métodos, teniendo en cuenta que la ecuación puede tener ninguna, una o dos raíces:

1. *Método gráfico.* Las raíces son los puntos de corte con el eje x.
2. *Fórmula cuadrática.* Usada en aquellos casos complejos donde no es posible realizar una factorización.
3. *Factorización.* Según los coeficientes a, b, y c, por aplicación de un caso de factorización: trinomio cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados, trinomio con $a = 1$ o $a \neq 1$ y factor común.

Solución de la ecuación cuadrática

Resolviendo la ecuación cuadrática

Las raíces x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ pueden hallarse mediante 3 métodos, teniendo en cuenta que la ecuación puede tener ninguna, una o dos raíces:

1. *Método gráfico.* Las raíces son los puntos de corte con el eje x.
2. *Fórmula cuadrática.* Usada en aquellos casos complejos donde no es posible realizar una factorización.
3. *Factorización.* Según los coeficientes a, b, y c, por aplicación de un caso de factorización: trinomio cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados, trinomio con $a = 1$ o $a \neq 1$ y factor común.

Solución de la ecuación cuadrática

Resolviendo la ecuación cuadrática

Las raíces x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ pueden hallarse mediante 3 métodos, teniendo en cuenta que la ecuación puede tener ninguna, una o dos raíces:

1. *Método gráfico.* Las raíces son los puntos de corte con el eje x.
2. *Fórmula cuadrática.* Usada en aquellos casos complejos donde no es posible realizar una factorización.
3. *Factorización.* Según los coeficientes a, b, y c, por aplicación de un caso de factorización: trinomio cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados, trinomio con $a = 1$ o $a \neq 1$ y factor común.

Solución de la ecuación cuadrática

Resolviendo la ecuación cuadrática

Las raíces x_1 y x_2 de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ pueden hallarse mediante 3 métodos, teniendo en cuenta que la ecuación puede tener ninguna, una o dos raíces:

1. *Método gráfico.* Las raíces son los puntos de corte con el eje x.
2. *Fórmula cuadrática.* Usada en aquellos casos complejos donde no es posible realizar una factorización.
3. *Factorización.* Según los coeficientes a, b, y c, por aplicación de un caso de factorización: trinomio cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados, trinomio con $a = 1$ o $a \neq 1$ y factor común.

Fórmula cuadrática

Solución general de la ecuación cuadrática

- Es un método para hallar las raíces de la ecuación cuadrática.

x_1 y x_2

... resuelveme

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

Fórmula cuadrática

Solución general de la ecuación cuadrática

- Es un método para hallar las raíces de la ecuación cuadrática.
- Consiste en determinar y reemplazar los coeficientes de la ecuación.

x_1 y x_2

... resuelveme

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

Fórmula cuadrática

Solución general de la ecuación cuadrática

- Es un método para hallar las raíces de la ecuación cuadrática.
- Consiste en determinar y reemplazar los coeficientes de la ecuación.
- Es un método *prolijo* y de cuidado en el desarrollo de las operaciones.

x_1 y x_2

... resuelveme

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

Fórmula cuadrática

Solución general de la ecuación cuadrática

- Es un método para hallar las raíces de la ecuación cuadrática.
- Consiste en determinar y reemplazar los coeficientes de la ecuación.
- Es un método *prolijo* y de cuidado en el desarrollo de las operaciones.
- Aplicado en situaciones donde por falta conocimiento, no es posible hallar las raíces rápidamente.

x_1 y x_2

... resuelveme

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

Fórmula cuadrática

Expresión de la fórmula cuadrática

Fórmula general

En la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, la fórmula general para hallar las raíces es:

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{donde } \Delta = b^2 - 4ac \tag{3}$$

- El símbolo Δ se denomina discriminante de la ecuación cuadrática.
- El símbolo $\pm$ indica que la primera raíz se halla con una suma y la segunda con una resta de los términos.

Fórmula cuadrática

Expresión de la fórmula cuadrática

Fórmula general

En la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, la fórmula general para hallar las raíces es:

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{donde } \Delta = b^2 - 4ac \tag{3}$$

- El símbolo Δ se denomina discriminante de la ecuación cuadrática.
- El símbolo $\pm$ indica que la primera raíz se halla con una suma y la segunda con una resta de los términos.

Fórmula cuadrática

Expresión de la fórmula cuadrática

Fórmula general

En la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, la fórmula general para hallar las raíces es:

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{donde } \Delta = b^2 - 4ac \tag{3}$$

- El símbolo Δ se denomina discriminante de la ecuación cuadrática.
- El símbolo $\pm$ indica que la primera raíz se halla con una suma y la segunda con una resta de los términos.

Fórmula cuadrática

Discriminante y el carácter de las raíces

Según el valor que tome Δ se pueden considerar 3 casos:

1. $\Delta > 0$*, una cantidad positiva*. Las raíces son reales y desiguales; puede no obtenerse raíces exactas o racionales.
2. $\Delta = 0$*, es cero*. Las raíces son reales e iguales.
3. $\Delta < 0$*, una cantidad negativa*. No existen raíces reales; las raíces pertenecen a otro conjunto numérico ($\mathbb{C}$).

Fórmula cuadrática

Discriminante y el carácter de las raíces

Según el valor que tome Δ se pueden considerar 3 casos:

1. $\Delta > 0$*, una cantidad positiva*. Las raíces son reales y desiguales; puede no obtenerse raíces exactas o racionales.
2. $\Delta = 0$*, es cero*. Las raíces son reales e iguales.
3. $\Delta < 0$*, una cantidad negativa*. No existen raíces reales; las raíces pertenecen a otro conjunto numérico ($\mathbb{C}$).

Fórmula cuadrática

Discriminante y el carácter de las raíces

Según el valor que tome Δ se pueden considerar 3 casos:

1. $\Delta > 0$, *una cantidad positiva*. Las raíces son reales y desiguales; puede no obtenerse raíces exactas o racionales.
2. $\Delta = 0$, *es cero*. Las raíces son reales e iguales.
3. $\Delta < 0$, *una cantidad negativa*. No existen raíces reales; las raíces pertenecen a otro conjunto numérico ($\mathbb{C}$).

Fórmula cuadrática

Discriminante y el carácter de las raíces

Según el valor que tome Δ se pueden considerar 3 casos:

1. $\Delta > 0$, *una cantidad positiva*. Las raíces son reales y desiguales; puede no obtenerse raíces exactas o racionales.
2. $\Delta = 0$, *es cero*. Las raíces son reales e iguales.
3. $\Delta < 0$, *una cantidad negativa*. No existen raíces reales; las raíces pertenecen a otro conjunto numérico ($\mathbb{C}$).

Fórmula cuadrática

Discriminante y el carácter de las raíces

Según el valor que tome Δ se pueden considerar 3 casos:

1. $\Delta > 0$, *una cantidad positiva*. Las raíces son reales y desiguales; puede no obtenerse raíces exactas o racionales.
2. $\Delta = 0$, *es cero*. Las raíces son reales e iguales.
3. $\Delta < 0$, *una cantidad negativa*. No existen raíces reales; las raíces pertenecen a otro conjunto numérico ($\mathbb{C}$).

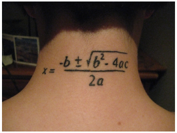


Figura : PARENTAL ADVISORY

Factorización

Solución de la ecuación cuadrática por factorización

Método de factorización

De acuerdo a los coeficientes de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, se factoriza (*si es posible*) según el caso a la forma:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \tag{4}$$

luego se iguala cada factor a cero y se despeja la incógnita

$$x - x_1 = 0 \quad x - x_2 = 0 \tag{5}$$

$$x = x_1 \quad x = x_2 \tag{6}$$

Factorización

Cuál técnica usar?

- Factor común: $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0$
- Diferencia de cuadrados: $ax^2 + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x + x_2) = 0.$
- Trinomio con $a = 1$: $x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0.$
- Trinomio con $a \neq 1$: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \frac{(ax - x_1)(ax - x_2)}{a} = 0.$
- Trinomio cuadrado perfecto: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)^2 = 0.$
- Si no es posible la factorización, usar la fórmula cuadrática.

Factorización

Cuál técnica usar?

- Factor común: $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0$
- Diferencia de cuadrados: $ax^2 + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x + x_2) = 0.$
- Trinomio con $a = 1$: $x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0.$
- Trinomio con $a \neq 1$: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \frac{(ax-x_1)(ax-x_2)}{a} = 0.$
- Trinomio cuadrado perfecto: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)^2 = 0.$
- Si no es posible la factorización, usar la fórmula cuadrática.

Factorización

Cuál técnica usar?

- Factor común: $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0$
- Diferencia de cuadrados: $ax^2 + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x + x_2) = 0.$
- Trinomio con $a = 1$: $x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0.$
- Trinomio con $a \neq 1$: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \frac{(ax - x_1)(ax - x_2)}{a} = 0.$
- Trinomio cuadrado perfecto: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)^2 = 0.$
- Si no es posible la factorización, usar la fórmula cuadrática.

Factorización

Cuál técnica usar?

- Factor común: $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0$
- Diferencia de cuadrados: $ax^2 + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x + x_2) = 0.$
- Trinomio con $a = 1$: $x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0.$
- Trinomio con $a \neq 1$: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \frac{(ax - x_1)(ax - x_2)}{a} = 0.$
- Trinomio cuadrado perfecto: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)^2 = 0.$
- Si no es posible la factorización, usar la fórmula cuadrática.

Factorización

Cuál técnica usar?

- Factor común: $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0$
- Diferencia de cuadrados: $ax^2 + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x + x_2) = 0.$
- Trinomio con $a = 1$: $x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0.$
- Trinomio con $a \neq 1$: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \frac{(ax - x_1)(ax - x_2)}{a} = 0.$
- Trinomio cuadrado perfecto: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)^2 = 0.$
- Si no es posible la factorización, usar la fórmula cuadrática.

Factorización

Cuál técnica usar?

- Factor común: $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0$
- Diferencia de cuadrados: $ax^2 + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x + x_2) = 0.$
- Trinomio con $a = 1$: $x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0.$
- Trinomio con $a \neq 1$: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \frac{(ax - x_1)(ax - x_2)}{a} = 0.$
- Trinomio cuadrado perfecto: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)^2 = 0.$
- Si no es posible la factorización, usar la fórmula cuadrática.

Factorización

Cuál técnica usar?

- Factor común: $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0$
- Diferencia de cuadrados: $ax^2 + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x + x_2) = 0.$
- Trinomio con $a = 1$: $x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0.$
- Trinomio con $a \neq 1$: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \frac{(ax - x_1)(ax - x_2)}{a} = 0.$
- Trinomio cuadrado perfecto: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (x - x_1)^2 = 0.$
- Si no es posible la factorización, usar la fórmula cuadrática.

Aplicaciones

Problemas Clásicos

- La suma de dos números es 17 y su producto es 42. Hallar los números.
- La suma de un número positivo con su cuadrado es 72. Hallar el número.

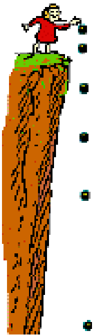
Aplicaciones

Geometría

- El área de un cuadrado es 16. Hallar el lado.
- La base en un rectángulo excede en 2 cm a su altura y su área es de 15 cm^2. Hallar los lados del rectángulo.

Aplicaciones

Física: caída libre



- Se deja caer una piedra desde un risco de 75 m de altura sin velocidad inicial. Si se toma como nivel de referencia el suelo con $y = 0$, hallar el tiempo recorrido por la piedra (asumir una aceleración g=-10 m/s^2). Recordar que

$$y = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + h$$

Aplicaciones

Economía: punto de equilibrio

- Del estudio de mercadeo de un cierto libro se estableció que las funciones de oferta y demanda son:

  $$\text{O: } q = -150 + 10p, \ \text{D: } q = 450 - p^2$$

  donde q expresa el número de unidades y p el precio en miles de pesos. Hallar el precio de equilibrio del libro y el número de unidades para dicho precio.

Ejemplos

...

Actividad

Ejercicio 1

Trasponer y reducir términos en cada situación igualando cada ecuación a cero; luego clasificar la ecuación cuadrática, según sus coeficientes.

- $3x^2 - 5x + 2 = 0$
- $6x^2 = -5x + 32$
- $x^2 + 3x = 5x + 3$
- $9r - 6 = (r - 4)(r + 4)$
- $\frac{6}{r^2} - \frac{9}{r} = -\frac{4}{3}$
- $(t - 3)^2 - 5(t^2 - 1) = -4t^2$
- $5q^2 - 9 = 46$
- $(p - 5)(p + 5) = -7$
- $4y^2 = -32y$
- $x^2 - 3x = 3x^2 - 4x$

Actividad

Ejercicio 2

a) Determinar por las propiedades de las raíces, si:

- 2 y -3 son raíces de $x^2 + x - 6 = 0$.
- 1 y 5 son raíces de $x^2 - 4x - 5 = 0$.
- 1 y $-\frac{1}{2}$ son raíces de $2x^2 - x - 1 = 0$.
- -5 y $-\frac{1}{5}$ son raíces de $5x^2 + 24x - 5 = 0$.
- 4 y -7 son raíces de $x^2 + 3x - 28 = 0$.

b) Hallar la ecuación cuyas raíces son:

- 3 y 4.
- -5 y -7.
- 1 y $\frac{1}{2}$.
- -2 y $-\frac{1}{5}$.
- 4 y -8.

Actividad

Ejercicio 3

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas mediante algún método (usando el más adecuado):

- $3x^2 + 5x - 2 = 0.$
- $15 = 4x + 4x^2.$
- $2r^2 - 4r + 2 = 1.$
- $y^2 + y + 1 = 0.$
- $(x+5)(x-5) = -9.$
- $3z^2 = 75.$
- $m^2 - 3m + 2 = 0.$
- $x^2 - 2x - 15 = 0.$
- $t^2 + 6t + 9 = 0.$
- $49x^2 - 70x + 25 = 0.$
- $4x^2 = -32x.$
- $x^2 - 3x = 3x^2 + 4x.$

Actividad

Ejercicio 4

- La suma de dos números es 23 y su producto es 130. Hallar los números.
- La resta de un número con su cuadrado es -4. Hallar los números que satisfacen la igualdad.
- El cuadrado de un número es igual al doble del número. Hallar los números que satisfacen la igualdad.
- En un rectángulo la base sobrepasa en 5 m a la altura, si el área es de 84 m^2 hallar los lados.
- Un triángulo tiene un área de 30 pul^2 y su altura es 4 pul menor a su base. Hallar los lados.

Actividad

Ejercicio 5

- Se deja caer una moneda desde una altura de 20 m sin velocidad inicial. Hallar el tiempo para llegar al suelo asumiendo una aceleración de -10 m/s^2.
- Si la misma moneda se lanza hacia abajo con una velocidad inicial de -15 m/s, siendo su ecuación de movimiento $y = -(5t^2 + 15t - 20)$, hallar el el tiempo para llegar al suelo.
- Las funciones de oferta y demanda de una determinada marca de dulces son: O: $q = -200 + \frac{1}{4}p^2$ y D: $q = 520 - \frac{1}{5}p^2$; q indica el número de unidades y p el precio en pesos. Hallar el precio de equilibrio y la cantidad de unidades para dicho precio.