Problemas de aplicación con relaciones trigonométricas

Matemáticas - Grado 10

2020

1. Aplicaciones de las relaciones trigonométricas

La Trigonometría, quizás sea una de las ramas de las Matemáticas con mayor aplicación que van desde de la astronomía hasta la medicina por solo hacer mención. Si una situación particular es ajustada a manera de triángulo, de seguro involucra el uso de una relación trigonométrica. Por esta razón, en las líneas siguientes se profundizara en el *razonamiento* y *resolución* de esta clase de situaciones teniendo como esquema básico de solución el mencionado en el apartado *2.3 Usando las relaciones trigonométricas* de la clase anterior[1] [4].

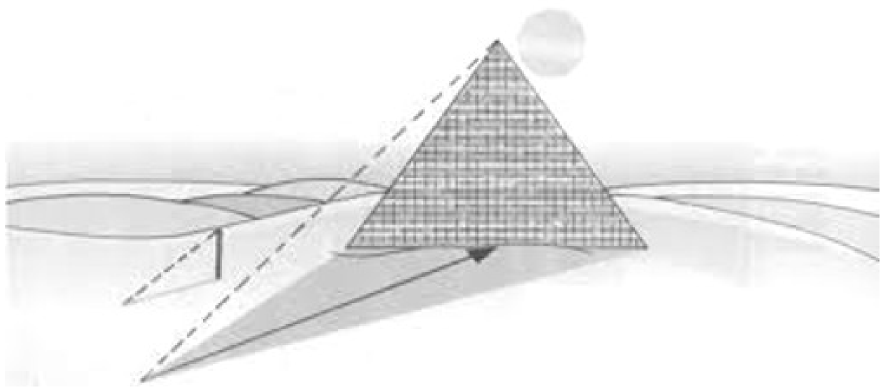

Figura 1: El análisis de Tales de Mileto (siglo IV a. C.) para calcular la altura de las pirámides egipcias.

Antes de entrar al tema en cuestión, aquí se aclara las fases de *razonamiento* y *resolución* para desarrollar la solución de un problema de aplicación. Cuando se aborda un problema de trigonometría la fase de razonamiento implica el conocimiento y el análisis del problema: en la vida real no todos los problemas se presentan directamente en modo de un triángulo, pero la imaginación y la inteligencia permiten crear un triángulo imaginario como punto de partida de la solución. Como ejemplo considere la leyenda de Tales de Mileto y su problema de calcular la altura de las pirámides egipcias (figura 1); no más comprendiendo la pregunta *¿Cómo medir la altura de un objeto?* se aprecia que en ella no aparece nada similar a un triángulo. Sin embargo, el repasar varias veces la situación y el aprovechamiento de sus recursos técnicos y matemáticos disponibles, le presumió a usar la longitud de una sombra y una línea de visón hacia la punta de la pirámide como elementos geométricos para construir un triángulo imaginario. La fase de resolución es donde se realiza el planteamiento matemático y la solución de operaciones: la toma de medidas, el reconocimiento de variables conocidas y desconocidas conducen a usar el recurso matemático pertinente para redactarlo en forma de ecuaciones y finalmente hallar la solución de la situación. Según las recopilaciones históricas, Tales de Mileto ya reconocía los triángulos rectángulos y la semejanza de triángulos, recursos que le permitieron plantear la solución: cuentan los relatos que Tales midió la altura de las pirámides desde sus sombras, justo en el momento en que la sombra de una vara era igual a su altura. Claramente

[1] Ver documento *Usos de las relaciones trigonométricas* del archivo `raztrig_apln-txt.pdf`.

esto corresponde a la construcción de un triángulo rectángulo con ángulos de 45° y lados iguales. Usando la semejanza de triángulos y el argumento anterior, la longitud de la sombra de la pirámide medida desde el centro de ella ha debido coincidir con su altura [5].
Con un enfoque similar a continuación se instruirá en el razonamiento y resolución de problemas que apliquen las relaciones trigonométricas, seguida de una actividad.

2. Metodología

El procedimiento para resolver esta clase de problemas requiere una excelente comprensión lectora y un desarrollo ordenado en la escritura. Como recomendaciones secuenciales, se mencionan los siguientes pasos [2].

Lectura del problema. No hacer una lectura "a la carrera y con prisa" del enunciado. Re-leer varias veces para extraer los datos y la incógnita del problema. Si Ud. se lo propone, la buena lectura debe concluir con la elaboración de un gráfico o caricatura de la situación.

Análisis. Realizar indagaciones o preguntas acerca de las variables conocidas y desconocidas para asociarlas con alguna relación trigonométrica.

Planteamiento y solución. En este paso se escriben las ecuaciones y se resuelven las operaciones pertinentes. También vale la pena aquí revisar la solución encontrada; esto es, que tenga un sentido lógico y proporcionado. Por ejemplo, puede suceder que la solución hallada para el lado incógnito del triángulo supere en tamaño a la suma de los lados propuestos o que un ángulo sea mayor a 180°.

Tanto en los ejemplos siguientes como los ejercicios propuestos se usan únicamente triángulos rectángulos y ángulos medidos en el sistema sexagesimal (grados). En lo posible, lados y ángulos mantendrán la misma convención de letras designados en la tabla de definiciones de la clase anterior. Esto con el objeto de mantener un fácil seguimiento al planteamiento y despeje de ecuaciones (se recomienda tener esa tabla a la mano para el desarrollo de ejemplos y ejercicios) [1]. Quizás las explicaciones de cada ejemplo sean un poco extensas, pero esto no indica que al momento de realizar una actividad también debe tratarse del mismo modo. Tan sólo se aclara la metodología del razonamiento y la resolución de cada situación particular. De hecho en la práctica, una vez comprendido la situación se elabora un esquema gráfico identificando lo datos e inmediatamente planteando las ecuaciones, para dar paso final a la solución numérica. Es de recordar, tener una calculadora debidamente configurada para los cómputos numéricos.

> **Ejemplo 1.** *Aplicación a la geometría.* Encontrar el perímetro de un triángulo isósceles cuya base mide 9 cm y los ángulos de la base miden 37°.

1) El triángulo isósceles se caracteriza por dos lados y dos ángulos iguales, ademas este triángulo no es rectángulo ya que el tercer ángulo es 180°-37°-37°=106°. Como el objetivo es hallar el perímetro es necesario conocer los 3 lados; por la cualidad del triángulo hace falta conocer un sólo lado, puesto que los lados son iguales. Sin embargo, las herramientas conocidas hasta ahora sólo aplican a un triángulo rectángulo; no para este triángulo. A pesar de este hecho, es posible dividir el isósceles en dos triángulos rectángulos iguales a través de la altura (linea a trazos) perpendicular a la base.

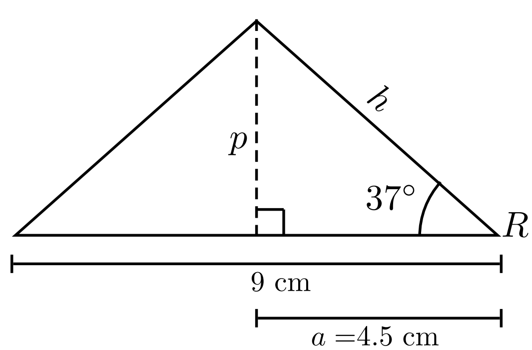

Figura 2: Ejemplo 1.

2) Un sólo triángulo rectángulo basta para hallar la solución (p. ej., el derecho de la figura 2). La hipotenusa h es desconocida, el cateto adyacente es la mitad de la base, a =4.5 y el ángulo entre ellos es de 37°; esta información encaja para usar la relación coseno. El planteamiento y despeje es por tanto,

$$\cos R = \frac{a}{h}, \quad \cos 37^\circ = \frac{4.5}{h}, \quad h = \frac{4.5}{\cos 37^\circ} = \frac{4.5}{0.79} = 5.69 \text{ cm}$$

3) El perímetro es la suma de todos los lados,

$$P = 9 + 5.69 + 5.69 = 20.38 \text{ cm}$$ ■

Ejemplo 2. *Aplicación a la física (cinemática).* Una pequeña avioneta logra desarrollar una rapidez media de 250 Km/h. En un cronograma de vuelo debe realizar dos recorridos: el primero, partir desde su ciudad Origen hasta la ciudad A y el segundo, desde ciudad A hasta la ciudad B. La ciudad A se encuentra 415 Km de distancia de la ciudad Origen formando un ángulo de 53° en sentido noreste. La ciudad B está justamente al Norte de la ciudad Origen y al occidente de la ciudad A. Encontrar el tiempo de vuelo desde ciudad A hacia B.

1) Problemas habituales de cinemática requieren una ubicación abstracta (p. ej., en un papel) y espacial (en sentido geográfico) definida. Sobre una hoja de papel, la ubicación abstracta se representa en modo similar al plano cartesiano: el norte (N) hacia arriba, sur hacia abajo (S), este u oriente (E) hacia a la derecha y oeste u occidente (O) hacia la izquierda. Lo anterior facilita la construcción del triángulo rectángulo: los vértices son las tres ciudades, trayecto A-B (incógnita) es cateto opuesto y el trayecto Origen-A (415 Km) es la hipotenusa; el ángulo de 53° está en el vértice de la ciudad Origen girando hacia la derecha. Todo lo anterior se simplifica en la figura 3.

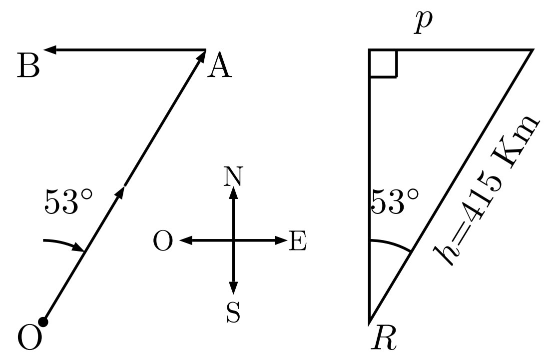

Figura 3: Ejemplo 2.

2) Según la figura, la información encaja para usar la función seno. En efecto, hipotenusa es conocida ($h = 415$), cateto opuesto es incógnita (p =?) y ángulo de referencia conocido ($R = 53°$). Planteamiento y despeje son

$$\operatorname{sen} R = \frac{p}{h}, \quad \operatorname{sen} 53^\circ = \frac{p}{415}, \quad p = 415 \cdot \operatorname{sen} 53^\circ = 415 \cdot 0.79 = 327.85 \text{ Km}$$

3) Puesto que la velocidad media es la divisón entre distancia recorrida y tiempo ($v = \frac{d}{t}$), el tiempo gastado por la avioneta es:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{327.85 \text{ Km}}{250 \text{ Km/h}} = 1.31 \text{ h}$$

es decir, aproximadamente tarda 1 hora y 18 minutos que corresponde a un resultado lógico ya que la información inicial menciona que en 1 hora recorre 250 kilómetros. ■

Ejemplo 3. *Aplicación a la topografía.* Para determinar la altura de un edificio un topógrafo encuentra un ángulo de elevación de 41° cuando línea visual apunta al techo. Tanto teodolito como línea horizontal están nivelados respecto al suelo a 1.5 metros y el instrumento se encuentra a 56 metros del edificio. Calcular la altura del edificio.

1) Antes de la lectura y el análisis se aclararan unos aspectos de compresión lectora. Según el área de aplicación, cada disciplina usa su propio lenguaje y terminología. En este ámbito, *línea visual* se refiere a la línea recta que va desde el ojo-instrumento hasta el objeto de interés. *Línea horizontal* es una línea recta paralela a un suelo plano. Y *ángulo de elevación (o de depresión)* al ángulo formado entre la línea horizontal y línea visual localizada por encima (o por debajo) línea horizontal. El teodolito es un instrumento portátil para la medición de ángulos con gran precisión.

El problema solicita la altura del edificio, entendida como la medida desde el suelo hasta el techo. Sin embargo, el ángulo de elevación proporcionado por el teodolito es una medida obtenida por encima del suelo a una distancia efectiva de L =1.5 m y que la distancia entre teodolito y edificio es d =56 m. Es decir, el mismo teodolito no entrega directamente la altura del edificio A; el instrumento entrega indirectamente una medida desde la línea visual hasta al techo y se habla de indirecta puesto que hay que usar una relación trigonométrica. Considerando lo anterior se tiene: cateto adyacente a =56 m, ángulo de referencia $R = 41°$ y cateto opuesto p desconocido (ver figura 4).

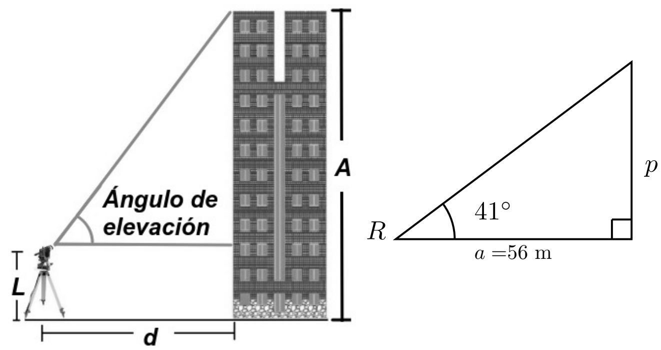

Figura 4: Ejemplo 3.

2) El análisis indica que la relación a encajar es la tangente. El lado desconocido se halla con

$$\tan R = \frac{p}{a}, \quad \tan 41^\circ = \frac{p}{56}, \quad p = 56 \tan 41^\circ = 56 \cdot 0.86 = 48.16 \text{ m}$$

3) La altura del edificio es la suma de la altura efectiva del teodolito y la altura indirecta del teodolito

$$A = L + p = 1.5 + 48.16 = 49.66 \text{ m}$$

■

Los ejemplos mostrados muestran la metodología de razonamiento y resolución para solución de problemas con triángulos rectángulos en algunas disciplinas donde la incógnita se encuentra en un lado del triángulo. Situaciones donde hay encontrar un ángulo incógnito también se resuelven con la misma metodología y adecuado manejo de la calculadora; la referencia [3] expone el procedimiento para un problema afín.

3. Actividad Número 5

Resolver cada ejercicio en el cuaderno. Se aclara que el procedimiento de solución no necesariamente debe seguirse como en los ejemplos solucionados: luego de la comprensión lectora, se procede con un gráfico que oriente la estrategia de solución para el planteamiento de ecuaciones y finalmente la solución. Unos parámetros a tener en cuenta en la revisión serán el orden y la escritura.

1. El ángulo congruente de un triángulo isósceles mide 28° y el lado congruente mide 45 milímetros. Hallar *a)* la longitud de la base y *b)* su perímetro.

2. Si una carretera sube 12 metros en una distancia horizontal de 200 metros, hallar el ángulo que forma la carretera con la horizontal.

3. A una determinada hora del día el ángulo de elevación del Sol es de 37°. Encontrar en metros la altura de un poste cuya sombra es de 15 metros.

Nota: La sección referencias contiene fuentes de consulta bibliográficas si se tiene posibilidad de acceder a textos o navegación en la red. Estas aparecen en el contenido de este texto con paréntesis cuadrados [...].

Referencias

[1] Milton Abramowitz and Irene Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, tenth ed., p. 78, National Bureau of Standards, dec 1972, disponible en http://people.math.sfu.ca/~cbm/aands/page_78.htm.

[2] Marlady Bogota and Víctor Ardila, *Supermat 10*, Educactiva, sep 2000.

[3] Asesorías de Mate, *Problemas razonados y configuración de calculadora*, https://www.youtube.com/watch?v=G7Cqy6-PzFo, 2016, Consultado 25 jun 2020.

[4] Ronald González, *Usos y aplicaciones de las razones trígonométricas.*, https://sites.google.com/site/razones1883/usos-y-aplicaciones-de-las-razones-trigonometricas, Consultado 13 jun 2020.

[5] Wikipedia, *Thales of miletus*, https://en.wikipedia.org/wiki/Thales_of_Miletus, 2020, Consultado 25 jun 2020.