

**Grado 9**

**Matemáticas**



# **Factorización algebraica**

**Técnicas de Factorización**

2023

# Contenidos I

- 1 Metas
- 2 Introducción
- 3 Concepto
- 4 P. Notables
- 5 Técnicas
  - Generalidades
  - Metodología
  - Factor común monomio/polinomio (I, II)
  - Factor común por agrupación (III)
- 6 Actividades
  - Actividad 9
  - Actividad 10
  - Actividad 12
  - Actividad 13
  - Actividad 15
  - Actividad 16
  - Actividad 17

# Metas a desarrollar

## Propósito

- Reconocer las técnicas de factorización de expresiones algebraicas y comprender su procedimiento.

## Desempeños

- Reconoce y caracteriza los distintos casos de factorización de expresiones algebraicas.
- Descompone expresiones algebraicas por medio de la factorización.

The diagram illustrates the algebraic identity  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  using area models. On the left, three separate shapes are shown: a yellow square labeled  $a^2$ , two green rectangles each labeled  $a.b$ , and a blue square labeled  $b^2$ . These are summed with plus signs. On the right, a large square is shown, partitioned into four regions: a yellow square labeled  $a^2$  in the top-left, two green rectangles labeled  $a.b$  in the top-right and bottom-left, and a blue square labeled  $b^2$  in the bottom-right. The total width of the large square is labeled  $a+b$  at the top, and the total height is labeled  $a+b$  on the left. Below the shapes, the equation is written in algebraic form:  $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ .

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

# La factorización: una herramienta algebraica

## Hechos y apuntes



- ❖ Una herramienta como el destornillador: “si no se tiene. . .”
- ❖ Una analogía de su propósito:  $120 = 12 \times 10 = 60 \times 2 = \dots$
- ❖ Usada en el ámbito científico puro
- ❖ Complemento para el desarrollo de expresiones algebraicas
- ❖ En Física: permite interpretar las expresiones que surgen de un modelo
- ❖ En Matemáticas: permite resolver (manualmente) algunos problemas
- ❖ Y que otro apunte. . .

# La factorización: una herramienta algebraica

## Descubrimiento de la antimateria

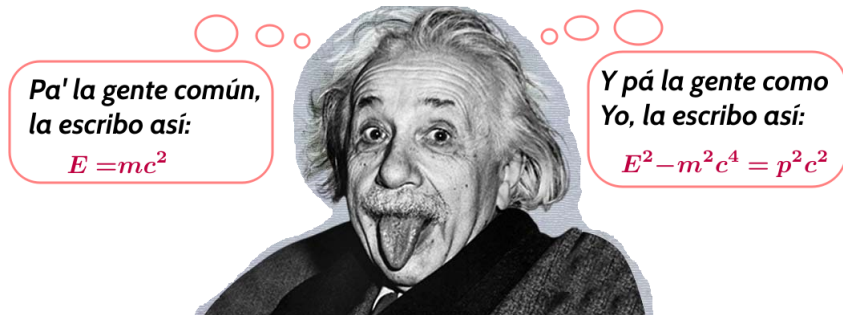


Figura: Albert Einstein y su famosa fórmula (1905) [Wikipedia, 2023].

# La factorización: una herramienta algebraica

## Descubrimiento de la antimateria



Figura: Paul Dirac, el físico que “profetizo” la antimateria (1928) [Wikipedia, 2022].

Según Dirac,

- ❖ La anti-materia es la misma materia pero con carga eléctrica opuesta.
- ❖ En contacto, anti-materia y materia se aniquilan mutuamente transformandose a otras formas de energía (luz, calor).

# La factorización: una herramienta algebraica

## Descubrimiento de la antimateria

$$\underbrace{(E - mc^2)}_{\text{Materia}} \underbrace{(E + mc^2)}_{\text{Antimateria}}$$

“Toda ley física ha de tener belleza matemática”, Paul Dirac

- ❖ En 1932, fue descubierto el *positrón*, la antipartícula del electrón.
- ❖ En la actualidad, ya se han sintetizado algunos anti-átomos.

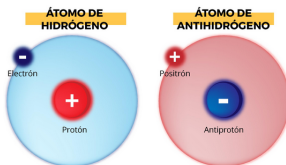


Figura: El átomo y anti-átomo de hidrógeno.

# El Concepto

- ❖ Factorizar una expresión algebraica (ExpAl), es el procedimiento que permite escribirla como un producto de factores [Baldor, 1980].
- ❖ Requiere el conocimiento/dominio de operaciones algebraicas (especial producto y división).
- ❖ Según la “forma” de la ExpAl se tienen técnicas o recetas para realizar la factorización [Baldor, 1980].
- ❖ En forma generalizada la secuencia del proceso es: *i)* observación, *ii)* verificación, *iii)* ajuste de factores y *iv)* escritura.



Figura: Ilustración de la factorización de un trinomio.



# Productos notables

- ❖ Son productos algebraicos cuyo resultado se obtiene desde una fórmula.
- ❖ Su uso simplifica y agiliza algunas multiplicaciones habituales.
- ❖ Cada producto notable corresponde a una técnica de factorización.
- ❖ Estos son resumidos en tablas, como aparece a continuación.
- ❖ Ampliación en [Reyes et al., 2012].

$b$	$bx$	$ab$
$x$	$x^2$	$ax$
	$x$	$a$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

Figura: Esquema gráfico del producto notable de dos binomios.

# Productos notables

Resumen de productos notables [Baldor, 1980, pág. 97]

Producto notable		Expresión algebraica	Nombre
$(a + b)^2$	=	$a^2 + 2ab + b^2$	Binomio al cuadrado
$(a + b)^3$	=	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	Binomio al cubo
$a^2 - b^2$	=	$(a + b)(a - b)$	Diferencia de cuadrados
$a^3 - b^3$	=	$(a - b)(a^2 + b^2 + ab)$	Diferencia de cubos
$a^3 + b^3$	=	$(a + b)(a^2 + b^2 - ab)$	Suma de cubos
$a^4 - b^4$	=	$(a + b)(a - b)(a^2 + b^2)$	Diferencia cuarta
$(a + b + c)^2$	=	$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	Trinomio al cuadrado

# Técnicas de factorización

## Generalidades

Número	Técnica factorización
I	$ax + bx + cx = x(a + b + c)$
II	$a(x + b) + y(x + b) = (x + b)(a + y)$
III	$ab + ay + xb + xy = (a + x)(b + y)$
IV	$ax^2 + bx + c = (mx + n)^2$
V	$ax^2 - by^2 = (mx + n)(mx - n)$
VI	$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$
VII	$ax^2 + bx + c = (kx + m)(lx + n)$
VIII	$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x + y)^3$

**Tabla:** Las técnicas más usadas en forma generalizada.  $x, y$  son las letras del problema;  $a, b, c, m, n, k, l$  son números enteros.

- ❖ En las ExpAl a factorizar, los números son enteros.
- ❖ Según la situación, las técnicas se pueden combinar.

# Técnicas de factorización

## Circuitos de enseñanza

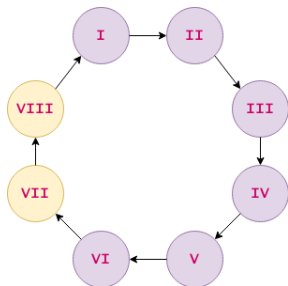


Figura: Grupos del circuito.

Circuito	Técnica
I	común monomio
II	común polinomio
III	común por agrupación de términos
IV	trinomio cuadrado perfecto
V	diferencia de cuadrados
VI	trinomio completo forma $a$ igual 1 ( $x^2 + bx + c$ )
VII	trinomio completo forma $a$ distinto 1 ( $ax^2 + bx + c$ )
VIII	cubo perfecto de binomios

Metodología de enseñanza: individual, cooperativo, par a par (P2P).

# Técnicas de factorización

## Factor común monomio/polinomio (I, II)

### Esquema general

$$ax + bx + cx = x(a + b + c)$$

Factor que está presente directa o indirectamente en cada término de la ExpAl;  $x$  puede ser un monomio o polinomio.

### Ejemplos

$$5a^2 - 15ab - 10ac = 5a(a - 3b - 2c)$$

$$12(a - b^2)x + 18(a - b^2)y - 24z(a - b^2) = 6(a - b^2)(2x + 3y - 4z)$$

# Técnicas de factorización

## Factor común por agrupación (III)

### Esquema general

$$ab + ay + xb + xy = (a + x)(b + y)$$

Proceso de factorización mediante doble factor común.

### Ejemplos

$$3am - 8bp - 2bm + 12ap = (3a - 2b)(m + 4p)$$

$$6ac - 4ad - 9bc + 6bd + 15c^2 - 10cd = (2a - 3b + 5c)(3c - 2d)$$

## Actividad 9

1. De acuerdo a la exposición, responder:
  - a) ¿Qué interpreta la famosa fórmula de Einstein,  $E = mc^2$ ?
  - b) ¿Qué interpreta la fórmula masa-energía completa de Einstein?
  - c) ¿Qué es la antimateria?
2. Resolver los productos notables.
  - a)  $(3p + 4q)^2$
  - b)  $(8 - 2y)^2$
  - c)  $(x + 2y + z)^2$
  - d)  $(5m + 3q)^3$
  - e)  $(13h + 11k)(-11k + 13h)$

## Actividad 10

1. Realizar una síntesis verbal y escrita sobre la técnica elegida. Ésta debe constar de su *i)* objetivo, *ii)* requisitos y/o condiciones, *iii)* desarrollo y *iv)* algunos ejemplos. Consultar la documentación suministrada.
2. Elaborar la siguiente tabla en su cuaderno

1	2	3	4	5	6

Esta tabla será diligenciada por el Profesor.

**Nota.** El Contenido escrito no debe superar los  $3/4$  de una página.



## Actividad 12

Una vez ajustados los grupos según la técnica elegida en esta sesión, el aprendizaje de las demás técnicas sera de forma cooperativa, colaborativa y **auto-responsable**.

- ❖ En la sesión presente, consulta el compañero del grupo que tiene los apuntes y conocimientos de otras técnicas de factorización.
- ❖ Redactar en el cuaderno y conocer el desarrollo de otras dos técnicas de acuerdo a la columna de la siguiente tabla de rotación.

Rotación	1	2	3	4	5	6
S1	2	1	4	3	6	5
S1	6	3	2	5	4	1
S1	Revisión					

Figura: Sesión 1.

- ❖ Antes de finalizar la sesión (o quizás en el inicio de la próxima) se realizara revisión calificable de apuntes.

## Actividad 13

Continuación de aprendizaje de forma cooperativa, colaborativa y **auto-responsable** sobre Técnicas de Factorización.

- ❖ En la sesión presente, consulta el compañero del grupo que tiene los apuntes y conocimientos de otras técnicas de factorización.
- ❖ Redactar en el cuaderno y conocer el desarrollo de otras dos técnicas de acuerdo a la columna de la siguiente tabla de rotación.

Rotación	1	2	3	4	5	6
S2	5	4	6	2	1	3
S2	3	5	1	6	2	4
S2	Revisión					

Figura: Sesión 2.

- ❖ Antes de finalizar la sesión (o quizás en el inicio de la próxima) se realizara revisión calificable de apuntes.

## Actividad 15

Continuación de aprendizaje de forma cooperativa, colaborativa y **auto-responsable** sobre Técnicas de Factorización.

- En la sesión presente, consulta el compañero del grupo que tiene los apuntes y conocimientos de otras técnicas de factorización.
- Redactar en el cuaderno y conocer el desarrollo de otras técnicas de acuerdo a la columna de la siguiente tabla de rotación.

Rotación	1	2	3	4	5	6
S3	4	6	5	1	3	2
S3	Recuperación					
S3	Revisión					

Figura: Sesión 3.

- Si aún están pendientes técnicas por conocer, el momento de recuperación es oportunidad para conocer dicho contenido. Al cierre de la sesión realizara revisión calificable de apuntes.

## Actividad 16

Resolver el problema propuesto de Factor Común Monomio y hallar las siguientes partes de la expresión algebraica factorizada:

- ❖ Coeficiente del monomio
- ❖ Letra del monomio
- ❖ Grado del monomio
- ❖ Los respectivos coeficientes de cada término del polinomio con/sin letra (incluyendo el signo).

Responder según las indicaciones de la actividad.

# Actividad 17

Resolver el problema propuesto de Factor Común por Agrupación y hallar las siguientes partes de la expresión algebraica:

- ❖ Los respectivos coeficientes de cada término del trinomio
- ❖ Grado del binomio
- ❖ Suma de valores absolutos de los coeficientes del binomio

Responder según las indicaciones de la actividad.

# Referencias I



Baldor, A. (1980).

*Álgebra.*

Ediciones y Distribuciones CODICE S.A., Madrid, España.



Reyes, J., Olivares, D., and Huerta, J. (2012).

Productos notables - el algebra en la vida cotidiana.

<https://sites.google.com/site/lasticsenusodelalgebra/unidad-2/productos-notables>.

Consultado May 2023.



Wikipedia (2022).

Paul dirac.

[https://es.wikipedia.org/wiki/Paul\\_Dirac](https://es.wikipedia.org/wiki/Paul_Dirac).

Consultado Abr 2023.

# Referencias II



Wikipedia (2023).

Albert einstein.

[https://es.wikipedia.org/wiki/Albert\\_Einstein](https://es.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein).

Consultado Abr 2023.