

Trigonometría: ángulo y relaciones

Grado 10

Periodo 1

2020

- 1 Sección 1: Introducción
- 2 Sección 2: Ángulo y su unidad
- 3 Sección 3: Razones trigonométricas
- 4 Sección 4: Actividades

Introducción

Definición

Rama de las matemáticas que usa las relaciones entre ángulos y lados que se presentan en un triángulo o en la circunferencia. Las relaciones trigonométricas se basan en la propiedades de semejanza de triángulos por mantener constante el cociente entre dos lados correspondientes para un ángulo determinado [2].

Introducción



Figura 1: Aplicaciones

Las aplicaciones son amplias: Izq., históricamente, ha contribuido (continúa aún) al desarrollo de la astronomía para la ubicación de astros y elaboración de modelos para estudiar algunos fenómenos. Der., en medicina, la goniometría (medición de ángulos) permite realizar diagnósticos de la movilidad articular y posteriores tratamientos [3].

- 1 Sección 1: Introducción
- 2 Sección 2: Ángulo y su unidad**
- 3 Sección 3: Razones trigonométricas
- 4 Sección 4: Actividades

Concepto

El ángulo es una de las “herramientas de trabajo” de la trigonometría.

- La unidad de medida angular tiene su origen en la partición de la circunferencia (o un giro o vuelta) en finas divisiones proporcionadas.
- Sistemas de medida:
 - ▶ Sexagesimal: 1 vuelta \rightarrow 360 partes.
 - ▶ Cíclico: 1 vuelta \rightarrow 2 veces π (esto es, 6.283... partes).
 - ▶ Centesimal: 1 vuelta \rightarrow 400 partes.
- Un sistema de medida angular se transforma a otro con factores de conversión (regla de tres).

Sistemas de medición angular

Sistema sexagesimal

- Unidad: *el grado*.
- Símbolo: $^{\circ}$
- Es el sistema más usado.

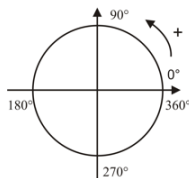


Figura 2: Sistema sexagesimal.

Sistema cíclico

- Unidad: *el radián*.
- Símbolo: rad.
- Es la división entre la longitud de arco de circunferencia (rojo) y el radio de la misma (verde).
- Es costumbre, expresar los ángulos en unidades o fracciones de π : 3π , $\frac{2\pi}{7}$.

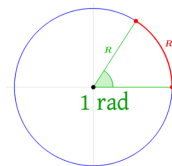


Figura 3: Sistema cíclico.

Factor de conversión

Sistema centesimal

- Unidad: *el gradián*.
- Símbolo: g
- No goza de popularidad respecto a los anteriores; sin embargo, es más preciso.

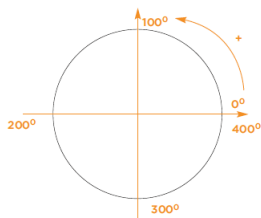


Figura 4: Sistema centesimal.

Factor de conversión

Fracción que multiplica un ángulo de un sistema para pasar a otro.

$$\text{ángulo sist. inicial} \times \underbrace{\frac{\text{vuelta sist. final}}{\text{vuelta sist. inicial}}}_{\text{Factor de conversión}} = \text{ángulo sist. final}$$

Ejemplos

Para convertir de un sistema a otro, hay que recordar la relación de 1 vuelta de cada sistema y usar un factor de conversión o regla de tres [1].

Ejemplo 1

Convertir 2.5 rad a grados.

$$\begin{aligned}
 2,5 \text{ rad} \cdot \underbrace{\frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}}}_{\text{Factor de conversión}} &= \\
 \frac{2,5 \cancel{\text{rad}} \cdot 360^\circ}{2\pi \cancel{\text{rad}}} &= \\
 143,24^\circ &
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Convertir 150^g a grados.

$$\begin{aligned}
 150^g \cdot \underbrace{\frac{360^\circ}{400^g}}_{\text{Factor de conversión}} &= \\
 \frac{150 \cancel{^g} \cdot 360^\circ}{400 \cancel{^g}} &= \\
 135^\circ &
 \end{aligned}$$

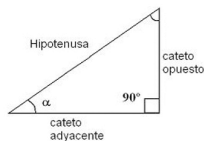
- 1 Sección 1: Introducción
- 2 Sección 2: Ángulo y su unidad
- 3 Sección 3: Razones trigonométricas**
- 4 Sección 4: Actividades

Razones trigonométricas

- **¿Qué son?** Son relaciones entre los lados del triángulo y alguno de sus ángulos.
- **¿Porqué se llaman razones?** Una razón matemática es una división; la razón entre dos lados del triángulo está vinculada a un ángulo de referencia.
- **¿En donde aparecen?** Únicamente para el triángulo rectángulo.

Concepto

Una razón trigonométrica hace referencia a la relación matemática (división) entre dos lados y un ángulo del triángulo rectángulo [1],[2].



Analizando una relación trigonométrica

Ejemplo 3. Razón cat. opuesto - hipotenusa

Dibujar diversos triángulos rectángulos, manteniendo fijo el valor del cateto adyacente (aquí la base, 4 cm), pero cambiando el valor del ángulo. Con una regla medir el cateto opuesto y la hipotenusa para resolver la razón (o división!)

$$r = \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Luego de graficar los triángulos y consignar las medidas, responder las siguientes preguntas.

- 1 ¿Qué pasa con el valor de la razón si se aumenta el ángulo?
- 2 ¿Qué relación hay entre el ángulo y el cateto en cuestión?

Ejemplo 3. Razón cat. opuesto - hipotenusa

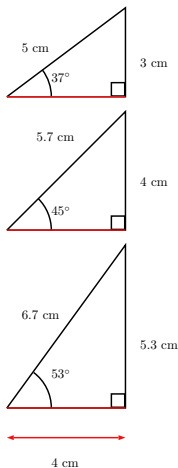


Figura 5: Triángulos.

áng. ($^{\circ}$)	c. op. (cm)	hip. (cm)	razón
37	3.0	5.0	0.6
45	4.0	5.7	0.7
53	5.3	6.7	0.8
64			

Tabla 1: Ángulos y lados medidos.

De la tabla de medidas se infiere:

- ❶ Cuando aumenta el valor ángulo también aumenta el valor de la razón.
- ❷ Hay una relación creciente: si aumenta el ángulo también aumenta la longitud del cateto opuesto.

- 1 Sección 1: Introducción
- 2 Sección 2: Ángulo y su unidad
- 3 Sección 3: Razones trigonométricas
- 4 Sección 4: Actividades**

Actividad 2

- ❶ Sean los ángulos $\angle y = 50^\circ$, $\angle z = \frac{2\pi}{3}$ rad. Convertir cada ángulo a grados y resolver la suma $\angle y + \angle z$; representar el resultado en el plano cartesiano y mencionar su clase.
- ❷ Completar la información faltante de la tabla 1 (dibujar y medir) para el ángulo de 64° .
- ❸ Repetir el ejemplo 3 y responder las mismas preguntas para analizar la razón:

$$r = \frac{\text{cat. adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Usar las mismas medidas y completar la tabla.

áng. ($^\circ$)	c. ady. (cm)	hip. (cm)	razón
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Nota: para reducir el número de imágenes en la entrega, presentar desarrollo del punto 1 y 2, tabla del punto 3.

Bibliografía

- [1] Marlady Bogota and Víctor Ardila, *Supermat 10*, Educactiva, sep 2000.
- [2] Roland Larson and Robert Hostetler, *Cálculo y geometría analítica*, third ed., McGraw-Hill, jan 1989.

Webgrafía

- [1] Ingemecánica, *Sistemas de medida de ángulos*,
https://ingemecanica.com/tutoriales/sistemas_de_medida_de_angulos.html, Consultado 13 abr 2020.
- [2] Academia Internet, *Razones trigonométricas*,
<https://www.youtube.com/watch?v=B3KXN5IFzs8>, 2017,
Consultado 13 abr 2020.
- [3] Wikipedia, *Trigonometría*,
<https://es.wikipedia.org/wiki/Trigonometr%C3%ADa>, 2020,
Consultado 7 abr 2020.