Sólidos: cálculo del volumen y superficie

Geometría - Grado 7

2021

1. Mediciones en sólidos

Para comprender los conceptos de *volumen* y *superficie* en un sólido a continuación se presentan estas situaciones.

- **Medición del volumen.** Usualmente la definición de *volumen* es la capacidad que ocupa un sólido en el espacio tridimensional o de forma equivalente, *volumen* es el número de unidades cúbicas que contiene el sólido [6]. Aunque son definiciones formales, aún son ambiguas porque están soportadas en otros conceptos no intuitivos como “capacidad” y “unidades cúbicas”. En realidad, ambos conceptos se fundamentan en una sola acción: “medir o comparar con algo”.

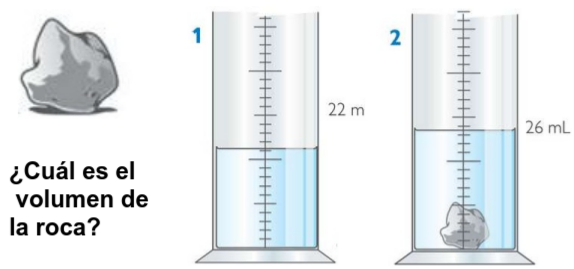


Figura 1: Experimento para comprender el concepto de volumen.

Como se observa en la figura, para determinar el volumen de la roca se puede efectuar un experimento similar al realizado por el célebre científico de la cultura griega Arquímedes. Un día, cuando él tomaba un baño en una tina se percató de que el agua subía cuando él se sumergía. Mientras que se sumergía desplazaba una cantidad de agua equivalente al espacio ocupado por su cuerpo. Esa cantidad de agua desplazada por el espacio de su cuerpo da entender el concepto de *capacidad*. Por tanto, al sumergir la roca en un recipiente con agua es de esperar una variación en el desplazamiento del agua. Para medir ese desplazamiento del agua se usa un vaso con graduaciones calibradas con respecto a un patrón de medida. A su vez, ese patrón de medida usa como sólido de comparación el sólido más simple, esto es el cubo y por eso se habla de *unidades cúbicas*. Finalmente, el volumen de la roca se obtiene por la resta de las graduaciones después y antes de la sumersión [3].

- **Medición de superficie.** La definición de superficie para un sólido reposa en la afirmación: es la suma de las áreas de cada una de las caras del sólido [7]. La interpretación se propone en la siguiente situación: se requiere forrar con plástico un tanque para almacenar agua con las medidas que aparecen en la figura. Por supuesto, surge la pregunta ¿Cuánto plástico se necesita? El modo práctico de responder, consiste en “desbaratar” cada una de las caras del sólido y extenderlas sobre el plástico.

Así, las bases se convierten en círculos y la pared lateral en un rectángulo. Para determinar la cantidad de plástico a gastar se puede usar una cuadricula imaginaria donde cada cuadrito es el patrón de medida para estimar la cantidad de "unidades cuadradas" que se requieren.

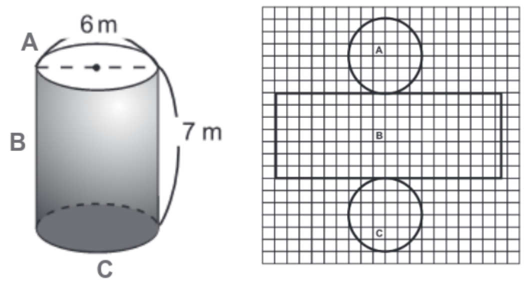


Figura 2: El concepto de superficie en sólidos.

El procedimiento de desbaratar el sólido, en geometría se denomina *efectuar el desarrollo del sólido* mientras que medir en unidades cuadradas se refiere al *concepto de área* como el proceso de medir una extensión delimitada sobre el espacio bidimensional [2].

2. Cálculo de volumen y superficie en un sólido geométrico

Los apartes mencionados en la sección anterior no constituyen un estrategia práctica para calcular una medida sobre un sólido. En su lugar, se acude al siguiente procedimiento estructurado:

1. Identificación y visualización del sólido; esto es, determinar su forma (esfera, pirámide, etc.).
2. Búsqueda de la fórmula de volumen y/o superficie, para calcular lo requerido por el problema o situación; para ello se acude a tablas de fórmulas.
3. Identificar los elementos geométricos o parámetros requeridos por la fórmula (altura, base, radio, etc.) y reemplazarlos en ella.
4. Desarrollar operaciones; esto es, efectuar sumas, multiplicaciones, etc.

Como un procedimiento complementario para el cálculo de la superficie de un sólido, la idea general es realizar el desarrollo del sólido y la suma de áreas de cada cara:

$$\text{Superficie} = \underbrace{\text{Área bases}}_{\text{área caras apoyo}} + \underbrace{\text{Área lateral}}_{\text{área caras pared}}$$

El éxito del cálculo depende de la identificación de la figura y de los desarrollos de las operaciones. Por tanto, en las siguientes secciones se repasaran las fórmulas de área para figuras planas y en la subsiguiente sección se expondrán las fórmulas de superficie y volumen para algunos sólidos.

3. Unidades de medida

La unidad de medida de volumen o superficie suele estar reglamentada bajo una norma o un sistema para evitar ambigüedades al afirmar "unidades cúbicas" o "cuadritos" respectivamente. En el Sistema Internacional de Unidades la unidad de volumen es el metro cúbico (m^3) y para superficie es el metro cuadrado (m^2), ambas derivadas del metro usado como unidad de longitud. Estas unidades se ajustan en múltiplos y submúltiplos para usar apropiadamente en alguna situación. Por ejemplo, se habla de centímetros cúbicos para medir el volumen de un recipiente de cocina o de decímetros cuadrados para el área de extensión de una mesa [5].

4. Fórmulas de área para algunas figuras planas (2D)

La siguiente tabla muestra la fórmula del área de algunos polígonos planos comunes. En algunas de ellas aparece el *perímetro*, recordando que es la suma de los lados del polígono [1].

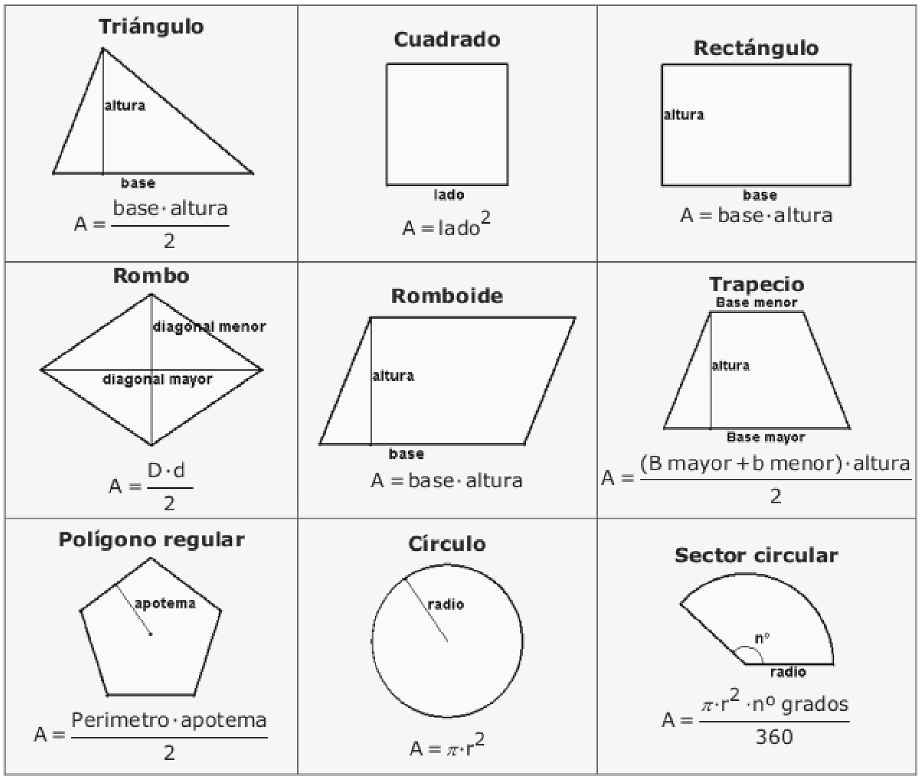


Figura 3: Área de algunos polígonos.

5. Fórmulas de volumen y superficie para algunos sólidos (3D)

La siguiente tabla muestra la fórmula de volumen y superficie de algunos sólidos geométricos comunes. En algunas fórmulas de superficie intervine el *perímetro* de la base, esto es, la suma de los lados de la base del sólido [1].

- **Nota sobre el símbolo π.** Es frecuente encontrar el símbolo π en las fórmulas de volumen y superficie, casualmente en los sólido clasificados como cuerpos redondos. Este símbolo (el cual es la letra griega *pi*) se trata de un número inconmensurable en sus cifras, o sea equivale al número decimal

  $$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399\ldots$$

  y representa la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. Por supuesto, al momento de usar en una fórmula se usa con unas cuantas cifras o con *cierta aproximación* según lo exija la situación. Normalmente se usa con tres cifras como 3,14 o en una aproximación fraccionaria como $\frac{355}{113}$ debida a los antiguos chinos.

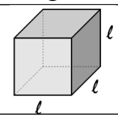
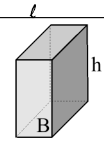
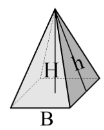
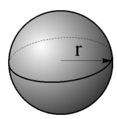
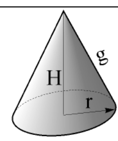
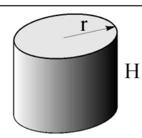
Sólido	Figura	Parámetros	Volumen (V)	Superficie (S)
Cubo		l=lado	l^3	$6l^2$
Prisma		B=área base P=perímetro base h=altura	Bh	$2B+Ph$
Pirámide		B=área base P=perímetro base H=altura h=apotema	$\frac{1}{3}BH$	$\frac{1}{2}Ph+B$
Esfera		r=radio	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$4\pi r^2$
Cono		r=radio H=altura g=generatriz	$\frac{1}{3}\pi H r^2$	$\pi r^2+\pi r g$
Cilindro		r=radio H=altura	$\pi H r^2$	$2\pi r^2+2\pi r H$

Tabla 1: Áreas y volúmenes de algunos sólidos.

6. Ejemplos de aplicación

6.1. Ejemplo 1

Se requiere forrar con plástico un tanque para almacenar agua con las medidas que aparecen en la figura 4. Hallar la cantidad de plástico requerido.

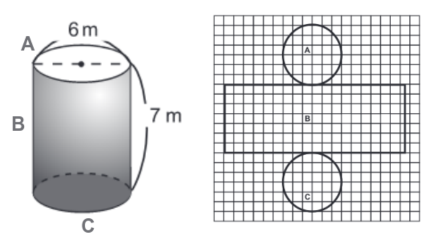


Figura 4: Ejemplo 1.

- **Solución.** Acudiendo a la estrategia de cálculo mencionada anteriormente, se razona:

  1) El sólido se trata de un cilindro al cual hay determinar la superficie.
  2) La fórmula de superficie es (ver tabla 1): $2\pi r^2 + 2\pi rH$
  3) Cómo parámetros se requiere radio y altura. Como el diámetro es el doble del radio $r = 3$ m y $H = 7$ m. Por sencillez se usará $\pi = 3$
  4) Reemplazando y resolviendo operaciones se tiene

  $$S = 2\pi r^2 + 2\pi rH = 2 \cdot 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 54 + 126 = 180 \text{ m}^2$$

  Se requieren 180 metros cuadrados de plástico.

6.2. Ejemplo 2

Encontrar el volumen y la superficie de la pirámide de la figura 5.

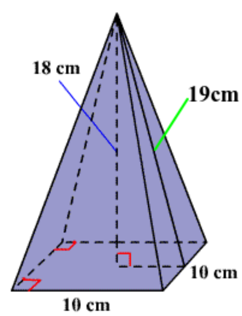


Figura 5: Ejemplo 2.

- **Solución.** El razonamiento es:

  1) El sólido se trata de una pirámide con base cuadrada ya que sus lados son iguales.
  2) La fórmula de volumen es $\frac{1}{3}BH$ y la fórmula de superficie es $\frac{1}{2}Ph + B$ (ver tabla 1).
  3) Cómo parámetros se requieren la altura H, el apotema h que es la altura del triángulo en su cara lateral, el área la base B y su perímetro P que corresponde a un cuadrado. Luego $H = 18$, $h = 19$. Recurriendo a la tabla de polígonos el área de un cuadrado es lado^2, por tanto el área de la base es $B = 10^2 = 100$; el perímetro es la suma de los cuatro lados o mejor $P = 4 \cdot 10 = 40$.
  4) Reemplazando y resolviendo operaciones, el volumen es:

  $$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 18 = \frac{1800}{3} = 600 \text{ cm}^3$$

  y para la superficie:

  $$S = \frac{1}{2}Ph + B = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 19 + 100 = \frac{760}{2} + 100 = 380 + 100 = 480 \text{ cm}^2$$

6.3. Ejemplo 3

El tamaño máximo de una gota de lluvia (agua) es de 6 mm de diámetro. Hallar el volumen de una gota asumiendo que tiene forma esférica (ver figura 6).

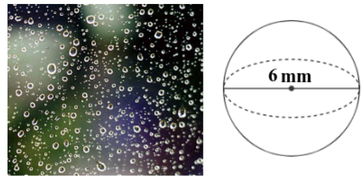


Figura 6: Ejemplo 3.

- **Solución.** El razonamiento es:

  1) El sólido se trata de una esfera.
  2) La fórmula de volumen es $\frac{4}{3}\pi r^3$ (ver tabla 1).
  3) Cómo parámetro se requieren el radio r. Como el diámetro es el doble del radio $r = 3$; se asume $\pi = 3$.
  4) Reemplazando y resolviendo operaciones, el volumen es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 3^3 = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 27 = \frac{324}{3} = 108 \text{ mm}^3$$

7. Actividad 5

Resolver en el cuaderno cada problema propuesto con un procedimiento estructurado.

1. Se va a restaurar la parte lateral y superior de una torre con forma de prisma octagonal de 12 m de alta. La base es un octágono regular de 3 m de lado y 4 metros de apotema. Una empresa contratada para su restauración cobra 226 euros por metro cuadrado restaurado.

   a) Realizar un dibujo a mano alzada del sólido de la situación y ubicar los respectivas elementos o parámetros con sus medidas.
   b) Hallar el área superficial que se va restaurar.
   c) Asumiendo que 1 euro equivale a 4200 pesos colombianos, ¿cuál será el precio de la restauración?

2. Una lata de conservas tiene forma cilíndrica con 17 cm de altura y 8 cm de radio en su base.

   a) ¿Qué cantidad de hoja lata se necesita para su construcción?
   b) ¿Qué cantidad de papel se necesita para la etiqueta?

   Asumir $\pi = 3$.

Nota: La sección referencias contiene fuentes de consulta bibliográficas si se tiene posibilidad de acceder a textos o navegación en la red. Estas aparecen en el contenido de este texto con paréntesis cuadrados [...].

Referencias

[1] Stanley Clemens, Phares O'Daffer, and Thomas Cooney, *Geometría*, first ed., Addison Wesley, México, 1998.

[2] Jesús Antonio Ocampo Sua, *Áreas y superficies*, https://sites.google.com/site/matematicasgradoseptimo/areas-y-superficies, 2013, Consultado 30 mar 2021.

[3] María Estela Raffino, *Volumen*, https://concepto.de/volumen/, 2020, Consultado 27 mar 2021.

[4] Hermenegildo Rodríguez Galbarro, *Áreas, perímetros y volúmenes de figuras geométricas*, https://ingemecanica.com/tutoriales/areas.html, Consultado 9 abr 2021.

[5] Blanca Torres et al., *Supermat 7*, Voluntad, Bogotá, Colombia, 2000.

[6] Wikipedia, *Volumen*, https://es.wikipedia.org/wiki/Volumen, 2021, Consultado 9 abr 2021.

[7] ______, *Área*, https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81rea#%C3%81rea_de_superficies_curvas, 2021, Consultado 9 abr 2021.