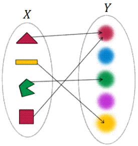
Relaciones y Funciones

Matemáticas - Álgebra

Grado 9

2023



Contenido I

Contenido II

- Actividad 26

1 Situaciones relacionadas . . .

Situaciones relacionadas . . .

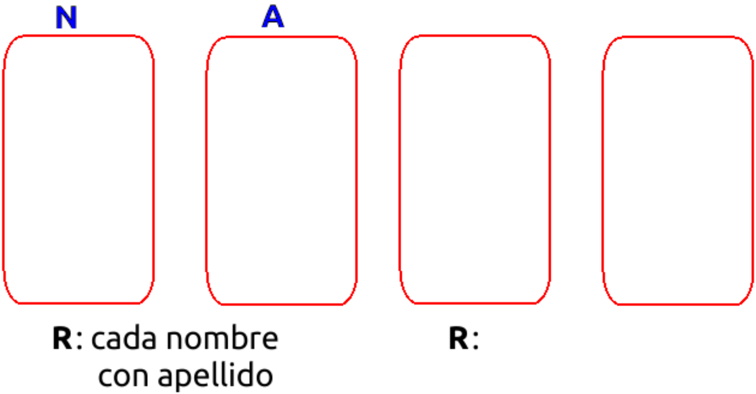


Figura: Usando algunos conjuntos y relaciones.

2 Metas

Metas del tema

Propósitos

- Emplear las propiedades de las funciones en la solución de situaciones cotidianas.
- Conocer las características y propiedades de las funciones más representativas para la modelación de situaciones.

Desempeños

- Interpreta, representa gráficamente y hace uso de las funciones para solucionar problemas cotidianos.
- Construye funciones o relaciones simples para situaciones reales desde expresiones algebraicas, poniendo a prueba sus conjeturas.

3 Relaciones

Concepto de relación
Definición

Definición de una relación (matemática)

Se denomina relación entre dos conjuntos de objetos como un nuevo conjunto que cumple una *condición* o *asociación* [Ramos et al., 2000].

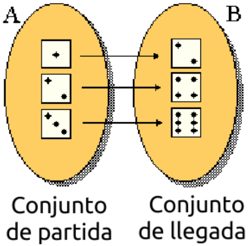


Figura: Esquema de una relación.

- Una relación necesita dos conjuntos: el de `partida` (A) y el de `llegada` (B) .
- Notación: $R = \{(a,b) / \ a$ le corresponde el doble en $b\}$.
- Los elementos de una relación se llaman *pares ordenados*. Así, las relaciones $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 4$, $3 \rightarrow 6$, se reúnen en el conjunto $R = \{(1,2), (2,4), (3,6)\}$.

Concepto de relación

Definición

Definición de una relación (matemática)

Se denomina relación entre dos conjuntos de objetos como un nuevo conjunto que cumple una *condición* o *asociación* [Ramos et al., 2000].

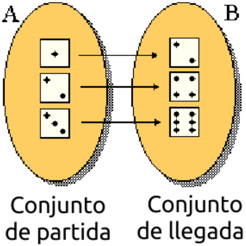


Figura: Esquema de una relación.

- Una relación necesita dos conjuntos: el de `partida` (A) y el de `llegada` (B) .
- Notación: $R=\{(a,b)/\ a$ le corresponde el doble en $b\}$.
- Los elementos de una relación se llaman *pares ordenados*. Así, las relaciones $1\rightarrow 2$, $2\rightarrow 4$, $3\rightarrow 6$, se reúnen en el conjunto $R=\{(1,2),\ (2,4),\ (3,6)\}$.

Dominio e Imagen en la relación

Conjuntos en la relación

Conjunto de dominio

Son los elementos usados en la relación en el conjunto de partida.

Conjunto de imagen

Son los elementos que cumplen con la relación en el conjunto de llegada.

Dominio e Imagen en la relación

Conjuntos en la relación

Conjunto de dominio

Son los elementos usados en la relación en el conjunto de partida.

Conjunto de imagen

Son los elementos que cumplen con la relación en el conjunto de llegada.

Ejemplo 1

Sean los conjuntos $R = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ y $Q = \{3, 6, 7\}$ y la relación $F = \{(r, q) /\ r$ es divisible por $q\}$. Hallar F, su dominio e imagen.

$F =$

dominio: $dom =$

imagen: $im =$

Representación de una relación

Formas de expresarla

Representación de una relación

Formas de expresarla

Una relación (*como acción*) se expresa como [La Gran Colombia, 2015]:

- Mediante una frase o enunciado (conciso, sin ambigüedades).
- Mediante una expresión algebraica (fórmula, ecuación).

Representación de una relación

Formas de expresarla

Una relación (*como acción*) se expresa como [La Gran Colombia, 2015]:

- Mediante una frase o enunciado (conciso, sin ambigüedades).
- Mediante una expresión algebraica (fórmula, ecuación).

Mientras que los elementos de la relación (*como desarrollo*) se expresan como [Blanco, 2010]:

- Mediante un diagrama sagital (propia de conjuntos).
- Mediante una tabla de valores (tabulación).
- Mediante una gráfica (representación cartesiana).

Representación de una relación

Formas de expresarla

Una relación (*como acción*) se expresa como [La Gran Colombia, 2015]:

- Mediante una frase o enunciado (conciso, sin ambigüedades).
- Mediante una expresión algebraica (fórmula, ecuación).

Mientras que los elementos de la relación (*como desarrollo*) se expresan como [Blanco, 2010]:

- Mediante un diagrama sagital (propia de conjuntos).
- Mediante una tabla de valores (tabulación).
- Mediante una gráfica (representación cartesiana).

Ejemplo 2: analizar la relación.

Ana Kelly trabaja en una tienda artesanal elaborando sombreros de cañamo; por renta fija gana al mes 500 $USD y en ocasiones gana una renta adicional de 100 $USD por cada docena de sombreros que le encargan.

Representación de una relación

Ejemplo 2

Representación de una relación

Ejemplo 2

La relación para la ganancia G:

- G={salario base de 500, agregando 100 por cada docena encargada}
- $G = \{(\text{s,d})/\ s = 500 + 100d\}$

Representación de una relación

Ejemplo 2

La relación para la ganancia G:

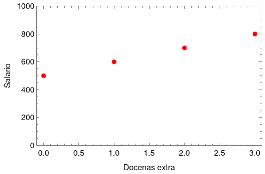
- G={salario base de 500, agregando 100 por cada docena encargada}
- $G = \{(\text{s,d}) / \ s = 500 + 100d\}$

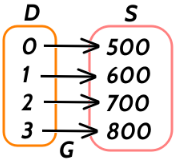
Asumiendo que un mes no recibe encargos, en otro mes realiza 1 encargo, en otro mes realiza 2, en otro mes realiza 3. Con estos elementos el desarrollo se expresa:

- Tabulación:

Docenas extra	0	1	2	3
Salario	500	600	700	800

- Representación cartesiana y sagital,





Representación de una relación

Plano cartesiano

- Cualquier relación puede representarse mediante un gráfico en el *plano cartesiano*.
- Consiste en un par de ejes horizontal y vertical: el horizontal indica conjunto de partida y el vertical el conjunto de llegada.
- Cada punto en el plano representa un par ordenado.
- Ejemplo:

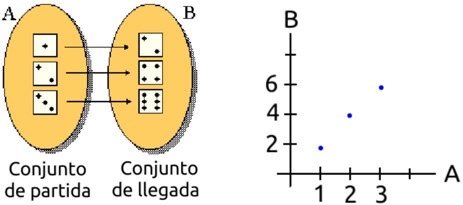


Figura: Relación A el doble de B.

4 Funciones

¿Qué es una función?

Conceptualización y Pensamiento

Analizar las relaciones y establecer diferencias

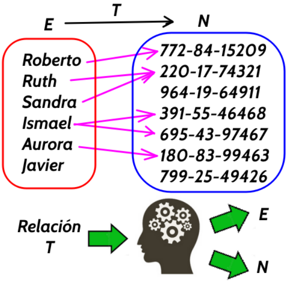


Figura: Relación T: cada estudiante y su(s) numéro(s) telefónico(s).

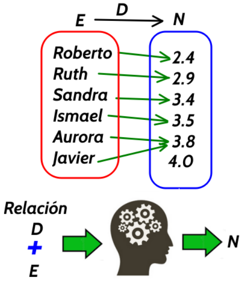


Figura: Relación D: el estudiante y su distancia recorrida para llegar al colegio.

¿Qué es una función?

Conceptualización y Pensamiento

Analizar las relaciones y establecer diferencias

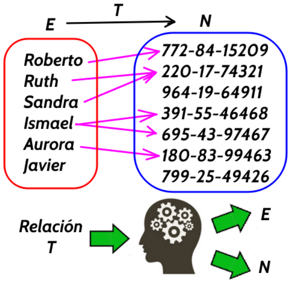


Figura: Relación T: cada estudiante y su(s) numéro(s) telefónico(s).

- Relación T NO es *función*.

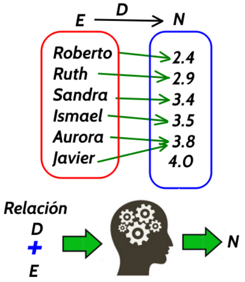


Figura: Relación D: el estudiante y su distancia recorrida para llegar al colegio.

¿Qué es una función?

Conceptualización y Pensamiento

Analizar las relaciones y establecer diferencias

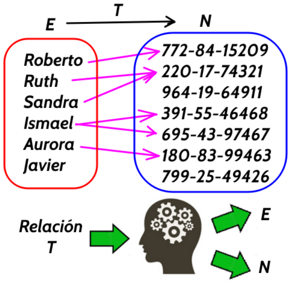


Figura: Relación T: cada estudiante y su(s) numéro(s) telefónico(s).

- Relación T NO es *función*.

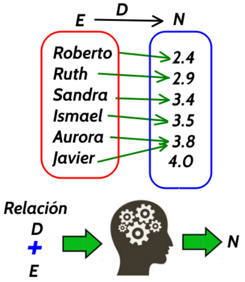


Figura: Relación D: el estudiante y su distancia recorrida para llegar al colegio.

- Relación D SI es *función*.

¿Qué es una función?

Definición

Definición de Función

Una *función* o *aplicación* es una relación que cumple la condición que para todo elemento del conjunto de partida hay una y solo una imagen en el conjunto de llegada [Ramos et al., 2000].

- Una *función* es un caso especial de relación.
- En una función el dominio contiene todo el conjunto de partida.
- Las funciones se usan para describir o modelar situaciones que **dependen** de una o más variables.
- En general, las funciones se usan para determinar la imagen a partir de un(os) dominio(s).

¿Qué es una función?

Definición

Definición de Función

Una *función* o *aplicación* es una relación que cumple la condición que para todo elemento del conjunto de partida hay una y solo una imagen en el conjunto de llegada [Ramos et al., 2000].

- Una *función* es un caso especial de relación.
- En una función el dominio contiene todo el conjunto de partida.
- Las funciones se usan para describir o modelar situaciones que **dependen** de una o más variables.
- En general, las funciones se usan para determinar la imagen a partir de un(os) dominio(s).

¿Qué es una función?

Definición

Definición de Función

Una *función* o *aplicación* es una relación que cumple la condición que para todo elemento del conjunto de partida hay una y solo una imagen en el conjunto de llegada [Ramos et al., 2000].

- Una *función* es un caso especial de relación.
- En una función el dominio contiene todo el conjunto de partida.
- Las funciones se usan para describir o modelar situaciones que **dependen** de una o más variables.
- En general, las funciones se usan para determinar la imagen a partir de un(os) dominio(s).

Elementos en una función

Variables independiente y dependiente

Elementos

En una función el dominio está constituido por las variables independientes y la imagen por las variables dependientes.

Elementos en una función

Variables independiente y dependiente

Elementos

En una función el dominio está constituido por las variables independientes y la imagen por las variables dependientes.

- Las funciones permiten *evaluar* la var. dependiente a partir de la var. independiente. Ellas expresan en forma matemática una dependencia entre cantidades que varían con cierta regularidad.

Elementos en una función

Variables independiente y dependiente

Elementos

En una función el dominio está constituido por las variables independientes y la imagen por las variables dependientes.

- Las funciones permiten *evaluar* la var. dependiente a partir de la var. independiente. Ellas expresan en forma matemática una dependencia entre cantidades que varían con cierta regularidad.

Ejemplos de comprensión

- El tiempo de recorrido de un bus depende que tan rápido avanza.
- El costo del recibo de la luz depende del consumo realizado en un mes.
- El costo de unos zapatos dependen del lugar, marca y material.

Aplicaciones de las funciones

Funciones son reglas

Aplicaciones de las funciones (I): concepto

Una función es una *regla* que permite determinar una imagen a partir de un dominio dado.

Aplicaciones de las funciones

Funciones son reglas

Aplicaciones de las funciones (I): concepto

Una función es una *regla* que permite determinar una imagen a partir de un dominio dado.

- ¿Cuál es la relación entre los siguientes pares ordenados? ¿La relación es una función?

$$-1 \to -1, \quad -2 \to -8, \quad 4 \to 64, \quad 5 \to 125$$

- De forma sencilla la relación es:
- El anterior ejemplo es un caso ideal de aplicación de las funciones.

Aplicaciones de las funciones

Funciones son reglas

Aplicaciones de las funciones (I): concepto

Una función es una *regla* que permite determinar una imagen a partir de un dominio dado.

- ¿Cuál es la relación entre los siguientes pares ordenados? ¿La relación es una función?

$$-1 \to -1, \quad -2 \to -8, \quad 4 \to 64, \quad 5 \to 125$$

- De forma sencilla la relación es:
- El anterior ejemplo es un caso ideal de aplicación de las funciones.

El anterior ejemplo es ahora...

- El anterior ejemplo se escribe como $f : X \to Y$ con $f(x) = x^3$ (o simplemente $y = x^3$) para el *dom* $=\{$-1, -2, 4, 5$\}$.

Evaluación de funciones

Usando y calculando funciones

Aplicaciones de las funciones (II): uso

Una función se evalúa a partir de un dominio dado (var. independiente); los valores obtenidos son la imagen de la función (var. dependiente).

$$\underbrace{x}_{\text{v. independiente}} \longrightarrow \underbrace{f(x)}_{\text{v. dependiente}}$$

Evaluación de funciones

Usando y calculando funciones

Aplicaciones de las funciones (II): uso

Una función se evalúa a partir de un dominio dado (var. independiente); los valores obtenidos son la imagen de la función (var. dependiente).

$$\underbrace{x}_{\text{v. independiente}} \longrightarrow \underbrace{f(x)}_{\text{v. dependiente}}$$

- Para usar una función es necesario conocer o construir la expresión algebraica que relaciona las variables (*fórmula*) [Baldor, 1980, p. 270].
- Se prefiere la expresión algebraica (ventajas) por simplicidad de escritura, "relativamente" fácil de usar (sustitución numérica) y evidenciar la relación de variables.
- Sin embargo (desventaja), requiere un lenguaje técnico para su comprensión.

Representación de funciones

Expresando funciones

Aplicaciones de las funciones (III): expresión

Una función (en modo extenso), junto con su dominio e imagen, se representa comúnmente de dos formas:

- **Tabulación:** las variables independiente y dependiente se escriben en una tabla.
- **Representación cartesiana:** las variables independiente y dependiente se escriben como una pareja ordenada

$$(\textit{var. independiente, var. dependiente}) \to \text{punto geométrico}$$

para luego representarse en el plano cartesiano.

Ejemplos

Evaluación y representación de funciones

Ejemplo 1. Escribir la función que exprese el peso de un objeto como el producto de su volumen por la densidad; determinar las variables independiente y dependiente.

Ejemplo 2. Un bus realiza un recorrido de 20 Km; la función para calcular el tiempo gastado en términos de su rapidez es $t = 20/v$, donde t es el tiempo en horas y v la rapidez en Km/h. Determinar las variables independiente y dependiente, estimar los tiempos de recorrido para el conjunto de rapideces $V = \{2, 5, 10, 20, 40\}$. Tabular los resultados.

Ejemplos

Evaluación y representación de funciones

Ejemplo 3. Un caracol asciende por una pared, recorriendo 30 cm por hora, descansa un momento y desliza 2 cm hacia abajo. Escribir la función matemática para el movimiento con sus respectivas variables y representarla en el plano cartesiano. ¿Cuánto ascenderá en metros para los tiempos 1 h, 2 h, 3 h, 40 min.

Actividades

Actividad 23

1. Sean los conjuntos C={Cali, Tunja, Pasto, Neiva, Quíndio}, D={Nariño, Boyaca, Cauca, Valle, Armenia, Villavicencio, Huila}.
   a) Escribir la relación T={*es la capital de*}.
   b) Escribir la relación U={*tiene por capital a*}.
   c) Dibujar la representación sagital en cada caso, junto con su Dominio e Imagen.
2. Sean los conjuntos A={1, 2, 3, 4, 5} y B={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.
   a) Hallar la relación definida por la regla R={(a, b)/ b es igual al doble de a más uno} y su representación cartesiana.
   b) Hallar la relación dada por S={(a, b)/ b es divisible por a} y su representación cartesiana.
   c) Hallar Dominio e Imagen de la relación.
3. Inventar una relación de alguna situación particular (individual) y realizar su representación cartesiana y sagital con al menos 4 elementos.

Actividad 25

1. Para cada relación hallar su dominio e imagen y determinar si es función o no.

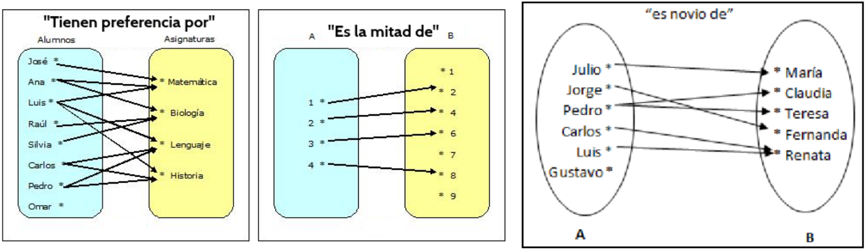


Figura: Problema 1.

Tarea. Consultar acerca de las tipos de funciones: inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.

Actividad 25

2. Escribir la función que representa cada enunciado y determinar la variable independiente y dependiente.
   a) El área de un triángulo es igual al producto de la base por la altura, dividido por dos.
   b) El perímetro de un rectángulo es el doble del largo más el doble del alto.
   c) El costo de un servicio público, por personas, por estratificación y con reducción por el subsidio es de 67700 $COP.
   d) El precio final de un artículo con un descuento del 25 % es multiplicar el precio inicial por 0.75.
3. Cuando el Profesor llama por su nombre a un estudiante (dominio), el alumno le da la media de los 10 números que obtuvo al lanzar diez veces un dado (rango). ¿La relación del estudiante con la media de los 10 números es o no una función? ¿Por qué?
4. Realiza un diagrama sagital de una situación de la vida real, en la que represente una función y otro en la que no.

Actividad 26

1. Escribir la función que expresa la distancia recorrida por un objeto que cae libremente como el producto del cuadrado del tiempo por la aceleración debida a la atracción terrestre dividido por 2; determinar las variables independiente y dependiente.
2. Un almacén de telas vendé cierto paño a un costo de \$17 500 por metro.
   a) Encontrar la expresión matemática que permite calcular el precio de la venta en términos de los metros comprados.
   b) Encontrar los precios para el conjunto de metros de tela $T = \{1,\ 3.25,\ \frac{7}{5}\}$.
3. En un trabajo de ornamentación, se necesitan diseñar ventanas donde el alto es los dos tercios del ancho.
   a) Hallar la función que permita calcular la cantidad de viga usada (es decir, el perímetro de la ventana) en términos del ancho.
   b) Determinar las variables independiente y dependiente.
   c) Representar en el plano cartesiano la función para ventanas de ancho en metros de $\frac{6}{5}$, 1.5, 2 y 6.

Referencias I

Baldor, A. (1980).
Álgebra.
Ediciones y Distribuciones CODICE S.A., Madrid, España.

Blanco, E. (2010).
Relaciones y funciones.
http://relacionesfunciones.blogspot.com/2010/06/relaciones-y-funciones-en-matematicas.html.
Consultado Ago 2023.

La Gran Colombia, U. (2015).
Conjuntos y relaciones.
https://repository.ugc.edu.co/bitstream/handle/11396/819/conceptodefuncion1.2.pdf?sequence=7&isAllowed=y.
Consultado Ago 2023.

Referencias II

Ramos, J., Peña, A., Franco, L., and Paéz, N. (2000).
Supermat 9.
Editorial Voluntad, Bogotá D.C., Colombia.

Wikipedia (2023).
Relación matemática.
https://es.wikipedia.org/wiki/Relaci%C3%B3n_matem%C3%A1tica.
Consultado Ago 2023.