

Grado 9

Matemáticas



Factorización algebraica

Técnicas de Factorización

2023

Contenidos I

- 1 Metas
- 2 Introducción
- 3 Concepto
- 4 P. Notables
- 5 Técnicas
 - Generalidades
 - Metodología
 - Factor común monomio/polinomio (I, II)
 - Factor común por agrupación (III)
 - Factorización trinomio cuadrado perfecto (IV)
 - Factorización Diferencia de Cuadrados (V)
 - Factorización trinomio $x^2 + bx + c$ (VI)
 - Factorización trinomio $ax^2 + bx + c$ (VII)
- 6 Actividades
 - Actividad 9
 - Actividad 10
 - Actividad 12

Contenidos II

- Actividad 13
- Actividad 15
- Actividad 16
- Actividad 17
- Actividad 18
- Actividad 19
- Actividad 21
- Actividad 22

Metas a desarrollar

Propósito

- Reconocer las técnicas de factorización de expresiones algebraicas y comprender su procedimiento.

Desempeños

- Reconoce y caracteriza los distintos casos de factorización de expresiones algebraicas.
- Descompone expresiones algebraicas por medio de la factorización.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

La factorización: una herramienta algebraica

Hechos y apuntes



- ❖ Una herramienta como el destornillador: “si no se tiene. . .”
- ❖ Una analogía de su propósito: $120 = 12 \times 10 = 60 \times 2 = \dots$
- ❖ Usada en el ámbito científico puro
- ❖ Complemento para el desarrollo de expresiones algebraicas
- ❖ En Física: permite interpretar las expresiones que surgen de un modelo
- ❖ En Matemáticas: permite resolver (manualmente) algunos problemas
- ❖ Y que otro apunte. . .

La factorización: una herramienta algebraica

Descubrimiento de la antimateria

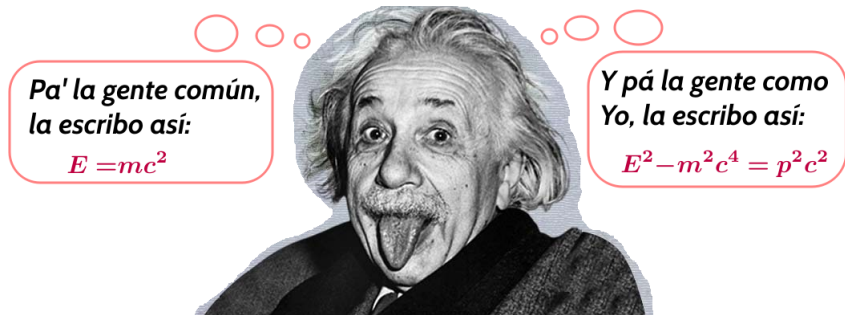


Figura: Albert Einstein y su famosa fórmula (1905) [Wikipedia, 2023].

La factorización: una herramienta algebraica

Descubrimiento de la antimateria

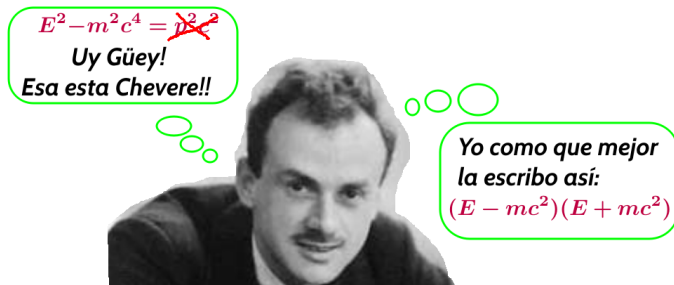


Figura: Paul Dirac, el físico que “profetizo” la antimateria (1928) [Wikipedia, 2022].

Según Dirac,

- ❖ La anti-materia es la misma materia pero con carga eléctrica opuesta.
- ❖ En contacto, anti-materia y materia se aniquilan mutuamente transformandose a otras formas de energía (luz, calor).

La factorización: una herramienta algebraica

Descubrimiento de la antimateria

$$\underbrace{(E - mc^2)}_{\text{Materia}} \underbrace{(E + mc^2)}_{\text{Antimateria}}$$

“Toda ley física ha de tener belleza matemática”, Paul Dirac

- ❖ En 1932, fue descubierto el *positrón*, la antipartícula del electrón.
- ❖ En la actualidad, ya se han sintetizado algunos anti-átomos.

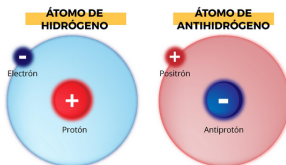


Figura: El átomo y anti-átomo de hidrógeno.

El Concepto

- ❖ Factorizar una expresión algebraica (ExpAl), es el procedimiento que permite escribirla como un producto de factores [Baldor, 1980].
- ❖ Requiere el conocimiento/dominio de operaciones algebraicas (especial producto y división).
- ❖ Según la “forma” de la ExpAl se tienen técnicas o recetas para realizar la factorización [Baldor, 1980].
- ❖ En forma generalizada la secuencia del proceso es: *i)* observación, *ii)* verificación, *iii)* ajuste de factores y *iv)* escritura.



Figura: Ilustración de la factorización de un trinomio.

Productos notables

- ❖ Son productos algebraicos cuyo resultado se obtiene desde una fórmula.
- ❖ Su uso simplifica y agiliza algunas multiplicaciones habituales.
- ❖ Cada producto notable corresponde a una técnica de factorización.
- ❖ Estos son resumidos en tablas, como aparece a continuación.
- ❖ Ampliación en [Reyes et al., 2012].

b	bx	ab
x	x^2	ax
	x	a

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

Figura: Esquema gráfico del producto notable de dos binomios.

Productos notables

Resumen de productos notables [Baldor, 1980, pág. 97]

Producto notable		Expresión algebraica	Nombre
$(a + b)^2$	=	$a^2 + 2ab + b^2$	Binomio al cuadrado
$(a + b)^3$	=	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	Binomio al cubo
$a^2 - b^2$	=	$(a + b)(a - b)$	Diferencia de cuadrados
$a^3 - b^3$	=	$(a - b)(a^2 + b^2 + ab)$	Diferencia de cubos
$a^3 + b^3$	=	$(a + b)(a^2 + b^2 - ab)$	Suma de cubos
$a^4 - b^4$	=	$(a + b)(a - b)(a^2 + b^2)$	Diferencia cuarta
$(a + b + c)^2$	=	$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	Trinomio al cuadrado

Técnicas de factorización

Generalidades

Número	Técnica factorización
I	$ax + bx + cx = x(a + b + c)$
II	$a(x + b) + y(x + b) = (x + b)(a + y)$
III	$ab + ay + xb + xy = (a + x)(b + y)$
IV	$ax^2 + bx + c = (mx + n)^2$
V	$ax^2 - by^2 = (mx + n)(mx - n)$
VI	$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$
VII	$ax^2 + bx + c = (kx + m)(lx + n)$
VIII	$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x + y)^3$

Tabla: Las técnicas más usadas en forma generalizada. x, y son las letras del problema; a, b, c, m, n, k, l son números enteros.

- ❖ En las ExpAl a factorizar, los números son enteros.
- ❖ Según la situación, las técnicas se pueden combinar.

Técnicas de factorización

Circuitos de enseñanza

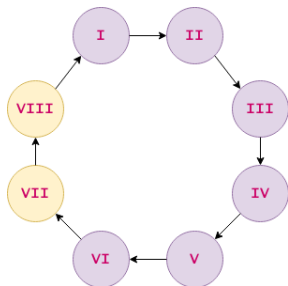


Figura: Grupos del circuito.

Circuito	Técnica
I	común monomio
II	común polinomio
III	común por agrupación de términos
IV	trinomio cuadrado perfecto
V	diferencia de cuadrados
VI	trinomio completo forma a igual 1 ($x^2 + bx + c$)
VII	trinomio completo forma a distinto 1 ($ax^2 + bx + c$)
VIII	cubo perfecto de binomios

Metodología de enseñanza: individual, cooperativo, par a par (P2P).

Técnicas de factorización

Factor común monomio/polinomio (I, II)

Esquema general

$$ax + bx + cx = x(a + b + c)$$

Factor que está presente directa o indirectamente en cada término de la ExpAl; x puede ser un monomio o polinomio.

Ejemplos

$$5a^2 - 15ab - 10ac = 5a(a - 3b - 2c)$$

$$12(a - b^2)x + 18(a - b^2)y - 24z(a - b^2) = 6(a - b^2)(2x + 3y - 4z)$$

Técnicas de factorización

Factor común por agrupación (III)

Esquema general

$$ab + ay + xb + xy = (a + x)(b + y)$$

Proceso de factorización mediante doble factor común.

Ejemplos

$$3am - 8bp - 2bm + 12ap = (3a - 2b)(m + 4p)$$

$$6ac - 4ad - 9bc + 6bd + 15c^2 - 10cd = (2a - 3b + 5c)(3c - 2d)$$

Técnicas de factorización

Factorización trinomio cuadrado perfecto (IV)

Esquema general

$$a^2x^2 + 2abx + b^2 = (ax + b)^2$$

Para esta técnica, los términos deben estar ordenados respecto a los grados (descendente) de una letra.

Proceso de factorización

- ❖ Extraer raíces cuadradas de primer y último término.
- ❖ Comprobar si la expresión es un trinomio cuadrado perfecto, esto es, se realiza el doble producto de las raíces.
- ❖ Si el resultado del producto es igual al segundo término del trinomio, entonces la ExpAl es factorizable y se escribe como el cuadrado de una suma o diferencia de las raíces halladas en su respectivo orden.

Técnicas de factorización

Factorización trinomio cuadrado perfecto (IV)

Ejemplos

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$$

$$x^4 - 10x^2y^2 + 25y^4 = (x^2 - 5y^2)^2$$

$$7m^2 - 14m + 49 = \text{No se puede; no hay raíz exacta para 7}$$

$$-198t^4p^3 + 81p^6 + 121t^8 = 81p^6 - 198t^4p^3 + 121t^8 = (9p^3 - 11t^4)^2$$

$$9r^2 - 6r + 4 = \text{No se puede; no cumple doble producto}$$

Técnicas de factorización

Factorización Diferencia de Cuadrados (V)

Esquema general

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Aquí, los *objetos algebraicos* a y b deben tener raíz cuadrada. Los coeficientes son números reales cualesquiera, pero se acostumbra a manejar enteros positivos.

Proceso de factorización

- ❖ La factorización es un producto de dos binomios conjugados.
- ❖ Hallar las raíces cuadradas de cada término.
- ❖ Con las raíces halladas, construir y escribir un producto de binomios conjugados.

Técnicas de factorización

Factorización Diferencia de Cuadrados (V)

Ejemplos

$$25 - b^2 = (5 - b)(5 + b)$$

$$36x^4 - 9y^2 = (6x^2 + 3y)(6x^2 - 3y)$$

$$5m^2 - 49z^4y^8 = (\sqrt{5}m + 7z^2y^4)(\sqrt{5}m - 7z^2y^4) \text{ Es raro, pero valido.}$$

$$\frac{25}{9}p^6 - t^8 = \left(\frac{5}{3}p^3 - t^4\right)\left(\frac{5}{3}p^3 + t^4\right)$$

$$9r^2 + 4 = \text{No se puede; no hay una diferencia}$$

$$4(y - 3)^2 - (y + 5)^2 = (y - 11)(3y - 1) \text{ (Uuy!??)}$$

Técnicas de factorización

Factorización trinomio $x^2 + bx + c$ (VI)

Esquema general

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$$

- ❖ El trinomio debe estar ordenado en forma descendente para la misma letra; b y c son números enteros.
- ❖ La factorización requiere un dominio de las operaciones elementales (suma, resta, multiplicación) y producto de signos.

Técnicas de factorización

Factorización trinomio $x^2 + bx + c$ (VI)

Proceso de factorización

- ❖ Escribir un par de binomios con la letra del trinomio: $(x \quad)(x \quad)$
- ❖ En el 1er paréntesis poner el signo del 2do término del trinomio; en el 2do paréntesis poner el producto de signos del trinomio.
- ❖ Proceder así:
 - ❖ si los signos son iguales, buscar los números m y n , tales que $m + n = b$ y $m \times n = c$.
 - ❖ si los signos no son iguales, buscar los números m y n , tales que $m - n = b$ y $m \times n = c$.
- ❖ Finalizar poniendo el número mayor en el 1er paréntesis y el menor en el segundo.

Técnicas de factorización

Factorización trinomio $x^2 + bx + c$ (VI)

Ejemplos

$$y^2 + 5y + 6 \rightarrow (y + \quad)(y + \quad) = (y + 3)(y + 2)$$

$$3 + 2 = 5, \quad 3 \times 2 = 6$$

$$p^2 - 8p + 15 \rightarrow (p - \quad)(p - \quad) = (p - 5)(p - 3)$$

$$5 + 3 = 8, \quad 5 \times 3 = 15$$

$$b^2 - 2b - 15 \rightarrow (b - \quad)(b + \quad) = (b - 5)(b + 3)$$

$$5 - 3 = 2, \quad 5 \times 3 = 15$$

$$h^2 + 5h - 14 \rightarrow (h + \quad)(h - \quad) = (h + 7)(h - 2)$$

$$7 - 2 = 5, \quad 7 \times 2 = 14$$

Técnicas de factorización

Factorización trinomio $ax^2 + bx + c$ (VII)

Esquema general

$$ax^2 + bx + c = (hx + m)(kx + n)$$

- ❖ El trinomio debe estar ordenado en forma descendente para la misma letra; a , b y c son números enteros.
- ❖ La factorización requiere el uso de las técnicas factor común monomio y polinomio.
- ❖ Es importante el concepto de suma y producto algebraico.

Técnicas de factorización

Factorización trinomio $ax^2 + bx + c$ (VII)

Proceso de factorización

- ❖ Una vez ordenado, multiplicar los términos 1er y 3er (**con su signo**).
- ❖ Hallar un par de monomios cuyo producto algebraico reproduzca el anterior resultado y cuya suma algebraica reproduzca el 2do término del trinomio.
- ❖ Re-escribir el 2do término como la suma algebraica de monomios encontrada.
- ❖ Proceder con la técnicas de factor común monomio y polinomio para factorizar la expresión.

Técnicas de factorización

Factorización trinomio $ax^2 + bx + c$ (VII)

Ejemplos

$$\begin{aligned} 2b^2 - 5b - 12 &\rightarrow (3b) + (-8b) = -5b, & (3b) \times (-8b) &= -24b^2 \\ &= 2b^2 + 3b - 8b - 12 \\ &= b(2b + 3) - 4(2b + 3) = (b - 4)(2b + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 21a^2 + 4a - 1 &\rightarrow (7a) + (-3a) = 4a, & (7a) \times (-3a) &= -21a^2 \\ &= 21a^2 + 7a - 3a - 1 \\ &= 7a(3a + 1) - 1(3a + 1) = (7a - 1)(3a + 1) \end{aligned}$$

Actividad 9

1. De acuerdo a la exposición, responder:
 - a) ¿Qué interpreta la famosa fórmula de Einstein, $E = mc^2$?
 - b) ¿Qué interpreta la fórmula masa-energía completa de Einstein?
 - c) ¿Qué es la antimateria?
2. Resolver los productos notables.
 - a) $(3p + 4q)^2$
 - b) $(8 - 2y)^2$
 - c) $(x + 2y + z)^2$
 - d) $(5m + 3q)^3$
 - e) $(13h + 11k)(-11k + 13h)$

Actividad 10

1. Realizar una síntesis verbal y escrita sobre la técnica elegida. Ésta debe constar de su *i)* objetivo, *ii)* requisitos y/o condiciones, *iii)* desarrollo y *iv)* algunos ejemplos. Consultar la documentación suministrada.
2. Elaborar la siguiente tabla en su cuaderno

1	2	3	4	5	6

Esta tabla será diligenciada por el Profesor.

Nota. El Contenido escrito no debe superar los $3/4$ de una página.

Actividad 12

Una vez ajustados los grupos según la técnica elegida en esta sesión, el aprendizaje de las demás técnicas sera de forma cooperativa, colaborativa y **auto-responsable**.

- ❖ En la sesión presente, consulta el compañero del grupo que tiene los apuntes y conocimientos de otras técnicas de factorización.
- ❖ Redactar en el cuaderno y conocer el desarrollo de otras dos técnicas de acuerdo a la columna de la siguiente tabla de rotación.

Rotación	1	2	3	4	5	6
S1	2	1	4	3	6	5
S1	6	3	2	5	4	1
S1	Revisión					

Figura: Sesión 1.

- ❖ Antes de finalizar la sesión (o quizás en el inicio de la próxima) se realizara revisión calificable de apuntes.

Actividad 13

Continuación de aprendizaje de forma cooperativa, colaborativa y **auto-responsable** sobre Técnicas de Factorización.

- ❖ En la sesión presente, consulta el compañero del grupo que tiene los apuntes y conocimientos de otras técnicas de factorización.
- ❖ Redactar en el cuaderno y conocer el desarrollo de otras dos técnicas de acuerdo a la columna de la siguiente tabla de rotación.

Rotación	1	2	3	4	5	6
S2	5	4	6	2	1	3
S2	3	5	1	6	2	4
S2	Revisión					

Figura: Sesión 2.

- ❖ Antes de finalizar la sesión (o quizás en el inicio de la próxima) se realizara revisión calificable de apuntes.

Actividad 15

Continuación de aprendizaje de forma cooperativa, colaborativa y **auto-responsable** sobre Técnicas de Factorización.

- En la sesión presente, consulta el compañero del grupo que tiene los apuntes y conocimientos de otras técnicas de factorización.
- Redactar en el cuaderno y conocer el desarrollo de otras técnicas de acuerdo a la columna de la siguiente tabla de rotación.

Rotación	1	2	3	4	5	6
S3	4	6	5	1	3	2
S3	Recuperación					
S3	Revisión					

Figura: Sesión 3.

- Si aún están pendientes técnicas por conocer, el momento de recuperación es oportunidad para conocer dicho contenido. Al cierre de la sesión realizara revisión calificable de apuntes.

Actividad 16

Resolver el problema propuesto de Factor Común Monomio y hallar las siguientes partes de la expresión algebraica factorizada:

- ❖ Coeficiente del monomio
- ❖ Letra del monomio
- ❖ Grado del monomio
- ❖ Los respectivos coeficientes de cada término del polinomio con/sin letra (incluyendo el signo).

Responder según las indicaciones de la actividad.

Actividad 17

Resolver el problema propuesto de Factor Común por Agrupación y hallar las siguientes partes de la expresión algebraica:

- ❖ Los respectivos coeficientes de cada término del trinomio
- ❖ Grado del binomio
- ❖ Suma de valores absolutos de los coeficientes del binomio

Responder según las indicaciones de la actividad. Adicionalmente, inventa un ejercicio de Factor Común por Agrupación con 4 términos cuya factorización sea un producto de binomios.

Actividad 18

Factorizar cada expresión algebraica usando la técnica del trinomio cuadrado perfecto.

1. Para la expresión factorizable hallar:
 - ❖ Coeficiente del primer término
 - ❖ Letra del primer término
 - ❖ Exponente del primer término
 - ❖ Signo del factor, redactado literalmente en inglés
 - ❖ Coeficiente del segundo término
 - ❖ Letra del segundo término
 - ❖ Exponente del segundo término
2. Para la expresión que NO es factorizable, hallar el coeficiente del segundo término del trinomio que hace posible la factorización (valor absoluto).

Actividad 19

Factorizar cada expresión algebraica usando la técnica de diferencia de cuadrados.

1. El estudiante **A** debe inventar tres ejercicios de diferencia de cuadrados que debe resolver el estudiante **B**. La expresión a factorizar debe ser de la forma $\triangle^2 - \square^2$ y cumplir con las siguientes condiciones:
 - ❖ El 1er. término (\triangle) debe tener por coeficiente un número mayor a 100 y como parte literal dos letras con exponente de número par.
 - ❖ El 2do. término (\square) debe tener por coeficiente un número menor o igual a 100 y como parte literal una letra distinta a las anteriores con exponente de número par.
2. Factorizar la expresión $\frac{36}{441}p^{10} - 11a^8z^6$.
3. Factorizar la expresión $9(x + 2y)^2 - 25(2x - y)^2$.

Actividad 21

Factorizar cada expresión algebraica usando la técnica del trinomio de la forma $x^2 + bx + c$.

1. Los estudiantes seleccionan un grupo de ejercicios para resolver en el cuaderno.
2. Factorizar cada una de las expresiones propuestas.
3. Para cada ítem hallar:
 - ❖ Letra del trinomio
 - ❖ Signo y número del primer binomio, redactados en inglés.
 - ❖ Signo y número del segundo binomio, redactados en inglés.

Actividad 22

Factorizar cada expresión algebraica usando la técnica del trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.

1. $15m^2 + m - 6$

2. $9a^2 + 10a + 1$

3. $21t^2 + 11t - 2$

4. $-6 + 12g^2 - g$

5. $3 + 11a + 10a^2$

Referencias I



Baldor, A. (1980).

Álgebra.

Ediciones y Distribuciones CODICE S.A., Madrid, España.



Reyes, J., Olivares, D., and Huerta, J. (2012).

Productos notables - el algebra en la vida cotidiana.

<https://sites.google.com/site/lasticsenusodelalgebra/unidad-2/productos-notables>.

Consultado May 2023.



Wikipedia (2022).

Paul dirac.

https://es.wikipedia.org/wiki/Paul_Dirac.

Consultado Abr 2023.

Referencias II



Wikipedia (2023).

Albert einstein.

https://es.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein.

Consultado Abr 2023.