Trigonometría

Identidades Trigonométricas

Grado 10

http://mikemolina.github.io/repoedu

2019

Contenido

INTRODUCCIÓN

Movimiento Planetario

El movimiento de un planeta alrededor del Sol es debido a la fuerza de la gravedad.

Visiones diferentes de una misma mirada

Movimiento Planetario

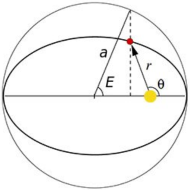
El movimiento de un planeta alrededor del Sol es debido a la fuerza de la gravedad.

Praga, 1609

Johannes Kepler

Deducción geométrica

$$r = a(1 - e\cos E)$$



E, Anomalía excéntrica

Movimiento Planetario

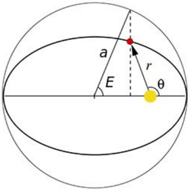
El movimiento de un planeta alrededor del Sol es debido a la fuerza de la gravedad.

Praga, 1609

Johannes Kepler

Deducción geométrica

$$r = a(1 - e\cos E)$$



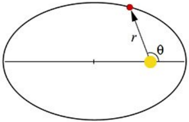
E, Anomalía excéntrica

Londres, 1687

Isaac Newton

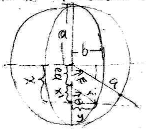
Deducción dinámica

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$$

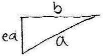


θ, Anomalía verdadera

- Ecuación de Kepler (Geométrica) $e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$



$$a^2=(ea)^2+b^2$$



$$x=a\cos E=ea+r\cos\theta \Rightarrow r\cos\theta=a(\cos E-e)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \therefore \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \therefore \frac{y}{b}=\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\sqrt{1-\cos^2E}=\operatorname{sen}E \Rightarrow \underset{\uparrow}{y}=b\operatorname{sen}E \quad y=y'$$

$$x'=r\cos\theta,\ y'=r\operatorname{sen}\theta,\quad r=\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{a^2(\cos E-e)^2+b^2\operatorname{sen}^2E}$$

$$=\sqrt{\cancel{a^2\cos^2E}-2a^2e\cos E+\cancel{a^2}+\cancel{a^2\operatorname{sen}^2E}-e^2a^2\operatorname{sen}^2E}=\sqrt{a^2-2a^2e\cos E+\cancel{a^2e^2}-\cancel{e^2a^2}+e^2a^2\cos^2E}$$

$$=\sqrt{a^2-2a^2e\cos E+e^2a^2\cos^2E}=\sqrt{(a-ea\cos E)^2}=a(1-e\cos E)$$

$$\frac{x}{y}=\frac{a\cos E}{b\operatorname{sen}E}=\frac{ea+r\cos\theta}{r\operatorname{sen}\theta} \therefore \frac{b}{a}\tan E=\frac{r\operatorname{sen}\theta}{ea+r\cos\theta}=\frac{\tan\theta}{\frac{ea}{r\cos\theta}+1}=\frac{\tan\theta}{\frac{ae}{a(\cos E-e)}+1}=\frac{\cos E-e}{\cos E}\tan\theta$$

$$\frac{b}{a}\tan E\frac{\cos E}{\cos E-e}=\tan\theta \therefore \frac{b}{a}\frac{\operatorname{sen}E}{1+\cos E}\frac{\cos E+1}{\cos E-e}=\tan\theta \therefore \sqrt{1-e^2}\tan\frac{E}{2}\frac{\cos E+1}{\cos E-e}=\tan\theta \therefore \sqrt{1-e^2}\tan\frac{E}{2}=\frac{\cos E-e}{\cos E+1}\tan\theta$$

$$\sqrt{1-e^2}\tan\frac{E}{2}=\frac{r}{a}\frac{\cos\theta\tan\theta}{\cos E+1}=\frac{r}{a}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos E+1}=\frac{1-e^2}{1+e\cos\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos E+1}=\frac{1-e^2}{1+e\cos\theta}\frac{\cos\theta+1}{\cos E+1}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta+1}=\frac{1-e^2}{1+e\cos\theta}\frac{\cos\theta+1}{\cos E+1}\tan\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{\sqrt{1-e^2}}{1+e}\tan\frac{E}{2}=\frac{1-e^2}{1+e}\frac{1+\cos\theta}{(1+e\cos\theta)(1+\cos E)}\tan\frac{\theta}{2} \therefore \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{E}{2}=\frac{(1-e)(1+\cos\theta)}{(1+e\cos\theta)(1+\cos E)}\tan\frac{\theta}{2};\quad \boxed{\frac{r}{a}=\frac{1-e^2}{1+e\cos\theta}}$$

$$\frac{(1-e)(1+\cos\theta)}{(1+e\cos\theta)\left(1+e+\frac{(1-e^2)\cos\theta}{1+e\cos\theta}\right)}=\frac{(1-e)(1+\cos\theta)}{(1+e)(1+e\cos\theta)+(1-e^2)\cos\theta}=\frac{(1-e)\cancel{(1+\cos\theta)}}{(1+e)[1+\cancel{e\cos\theta}+(1-e)\cos\theta]}=\frac{1-e}{1+e}$$

$$\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{E}{2}=\frac{1-e}{1+e}\tan\frac{\theta}{2} \therefore \tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\frac{E}{2}\right) \therefore \boxed{r=a(1-e\cos E),\ \tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\left(\frac{E}{2}\right)}$$

OBJETIVOS Y APLICACIONES

Objetivos y Aplicaciones

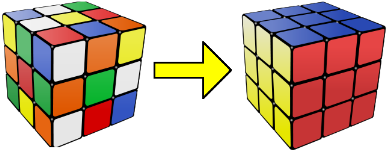


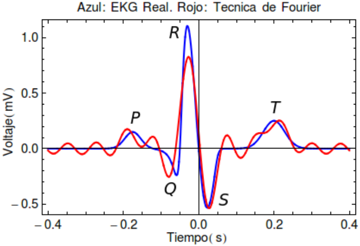
Figura. Algoritmo en el cubo de Rubik: secuencia de movimientos para obtener el cubo ordenado.

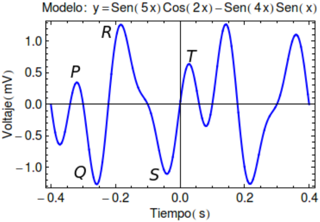
$$\frac{\cos^2\mu}{1+\operatorname{sen}\mu} \Longrightarrow 1-\frac{1}{\operatorname{cosec}\mu}$$

Algoritmo en la identidad: secuencia de transformaciones en un miembro (o ambos) para obtener la misma expresión a ambos lados de la igualdad.

Electrocardiograma (EKG)

Análisis gráfico de la actividad eléctrica del corazón en función del tiempo.





$$\frac{1}{2}(\operatorname{sen}(3x)+\operatorname{sen}(7x))+\frac{1}{2}(\cos(5x)-\cos(3x))=$$
$$\operatorname{sen}(5x)\cos(2x)-\operatorname{sen}(4x)\operatorname{sen}(1x)$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Concepto de identidad trigonométrica (ITG)

Una ITG es una igualdad valida para cualquier ángulo, excepto donde no están definidas las funciones.

Concepto de identidad trigonométrica (ITG)

Una ITG es una igualdad valida para cualquier ángulo, excepto donde no están definidas las funciones.

Demostración.

Es el proceso de efectuar transformaciones a través de recursos aritméticos (suma, productos, simplificaciones) y algebraicos (sustituciones, factorización, fórmulas) para obtener la misma expresión en ambos miembros de una igualdad. $\square$

Concepto de identidad trigonométrica (ITG)

Una ITG es una igualdad valida para cualquier ángulo, excepto donde no están definidas las funciones.

Demostración.

Es el proceso de efectuar transformaciones a través de recursos aritméticos (suma, productos, simplificaciones) y algebraicos (sustituciones, factorización, fórmulas) para obtener la misma expresión en ambos miembros de una igualdad. □

Clases de identidades

- Pitagóricas
- Recíprocas
- Cociente
- Paridad

Identidades trigonométricas básicas

- Pitagóricas

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= r^2 \\
\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} &= \frac{r^2}{r^2} \\
\cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi &= 1
\end{aligned}
$$

Identidades trigonométricas básicas

- Pitagóricas

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

$$\cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi = 1$$

- Recíprocas

$$\cos \phi = \frac{x}{r}$$

$$\cos \phi = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{r}{x}}$$

$$\cos \phi = \frac{1}{\sec \phi}$$

Identidades trigonométricas básicas

- Pitagóricas

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$
$$\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi = 1$$

- Recíprocas

$$\cos\phi = \frac{x}{r}$$
$$\cos\phi = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{r}{x}}$$
$$\cos\phi = \frac{1}{\sec\phi}$$

- Cociente

$$\tan\phi = \frac{y}{x}$$
$$\tan\phi = \frac{y}{x}\frac{r}{r} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}$$
$$\tan\phi = \frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi}$$

- Pitagóricas

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$
$$\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi = 1$$

- Recíprocas

$$\cos\phi = \frac{x}{r}$$
$$\cos\phi = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{r}{x}}$$
$$\cos\phi = \frac{1}{\sec\phi}$$

- Cociente

$$\tan\phi = \frac{y}{x}$$
$$\tan\phi = \frac{y}{x}\frac{r}{r} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}$$
$$\tan\phi = \frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi}$$

- Paridad

$$\operatorname{sen}(-\phi) = -\operatorname{sen}\phi, \qquad \cos(-\phi) = \cos\phi$$

No existe método general para demostrar identidades; se recurre a transformaciones sucesivas desde un miembro hasta obtener la misma expresión del otro miembro. A pesar de lo anterior, un esquema de razonamiento deductivo generalizado, permite aplicar a casos particulares.

No existe método general para demostrar identidades; se recurre a transformaciones sucesivas desde un miembro hasta obtener la misma expresión del otro miembro. A pesar de lo anterior, un esquema de razonamiento deductivo generalizado, permite aplicar a casos particulares.

Esquema

1. Transformar el miembro más complejo de la identidad:
   i) Por similitud con alguna fórmula.
   ii) Convertir a senos y cosenos.
   iii) Usando tablas de fórmulas (sustitución y despeje).
   iv) Realizando operaciones indicadas.
   v) Usando factorización.
2. Resolver operaciones aritméticas y algebraicas.
3. Mucha paciencia y menos pereza!

Breve tabla de fórmulas

- Suma y diferencia de ángulos

$$\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

- Ángulo doble

$$\operatorname{sen}(2a) = 2 \operatorname{sen} a \cos b$$
$$\cos(2a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 b$$

- Ángulo medio

$$\operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{2}$$
$$\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{2}$$

Muchos ejemplos

Ejemplo 1. Por similitud

Demostrar $\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi = \cos\phi \sec\phi$.

Ejemplo 2. Por conversión a sen y cos

Demostrar
$$\frac{\sec\phi}{1+\operatorname{cosec}\phi} = \frac{\tan\phi}{1+\operatorname{sen}\phi}.$$

Ejemplo 3. Usando tablas

Demostrar $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$.
Demostrar
$$\operatorname{sen} 2\sigma = 2\frac{\tan\sigma}{1+\tan^2\sigma}.$$

Ejemplo 4. Realizando operaciones

Demostrar

$$\frac{\cos\psi + \operatorname{sen}\psi\tan\psi}{\operatorname{sen}\psi\sec\psi}$$

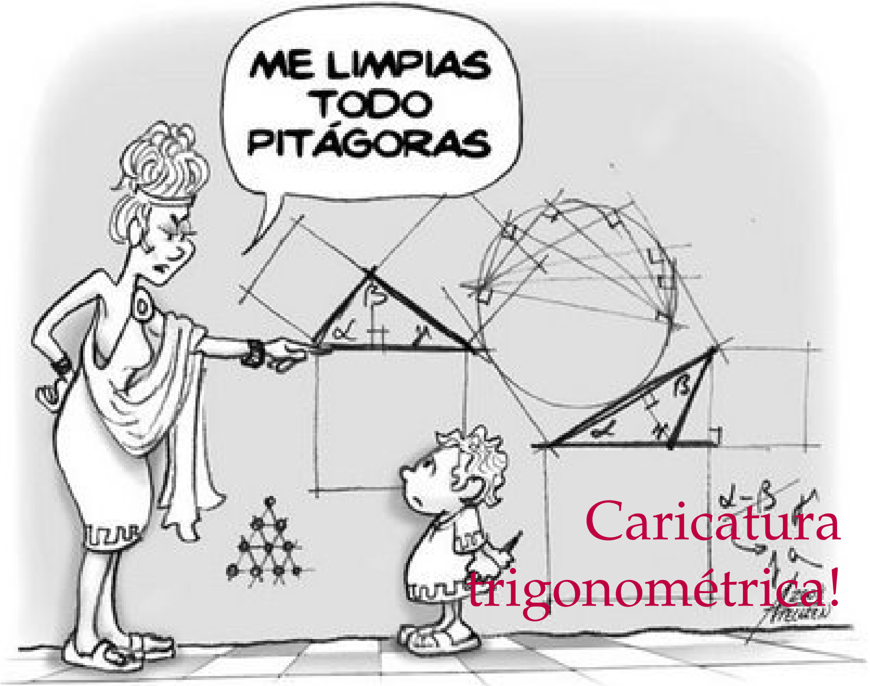
Ejemplo 5. Usando factorización

Demostrar

$$\frac{\cos^2\nu}{1+\operatorname{sen}\nu} = 1 - \frac{1}{\operatorname{cosec}\nu}.$$

ACTIVIDADES

1. Obtener las identidades fundamentales:
   a) Pitagóricas que relacionan tan – sec y cot – cosec.
   b) Recíproca que relaciona sen – cosec.
   c) Cociente y Paridad para la cot.
2. Resolver expresando el resultado en número no-decimal
   a) Si $\operatorname{sen}\psi = \frac{5}{13}$, hallar
   $$\frac{\cot^2\psi - \operatorname{cosec}^2\psi}{\operatorname{cosec}^2\psi + 3}$$
   b) Si $\cos\sigma = \frac{1}{2}$, hallar
   $$\frac{\tan^2\sigma - \operatorname{sen}^2\sigma}{\sec^2\sigma - \operatorname{cosec}^2\sigma}$$
3. Tarea!


ME LIMPIAS TODO PITÁGORAS
Caricatura trigonométrica!

Milton Abramowitz e Irene Stegun (1972). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. tenth. National Bureau of Standards. Cap. 4, pág. 71.

Marcos González, Fernando León y Mauricio Villegas (1990). *Matemática práctica 10*. tenth. Voluntad. Cap. 4, pág. 92.

Roland Larson y Robert Hostetler (1989). *Cálculo y Geometría Analítica*. third. McGraw-Hill. Cap. 1, pág. 52.