Abecé del límite de una función

Matemáticas

Grado 11

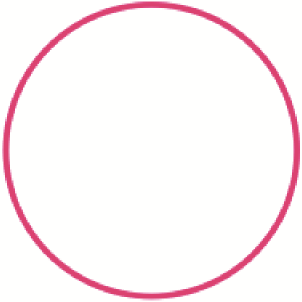
2021

Contenidos

Actividad inicial

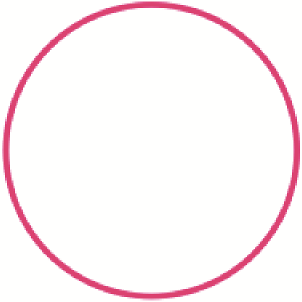
Responde muy brevemente:

¿Qué es la circunferencia?



Actividad inicial

Responde muy brevemente:
¿Qué es la circunferencia?



¿La circunferencia se puede considerar un polígono?

El concepto de límite: primera noción

El concepto aparece en las siguientes “acciones matemáticas”:

- Hay una tendencia a ...
- La variable ... se acerca a ...
- La ... tiene un límite cuando ...

Primera noción

Tomar el *límite de una función* consiste en analizar la función en las vecindades de un punto definido [5].

Ejemplo 1. Analizar la función $f(x) = 2 + 5x - 2x^2$ en las vecindades próximas de $x \to 2$.

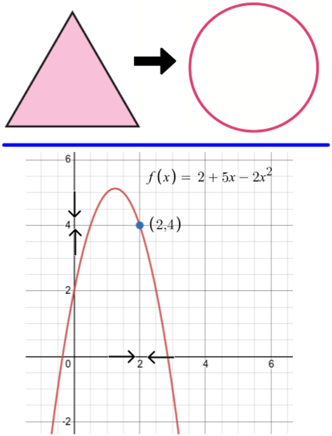


Figura: Un sinónimo de “límite matemático” es *tendencia a*.

El concepto de límite: definición

Definición informal: práctico

Se denomina límite de una función en un punto, al valor que toma la función cuando x se aproxima a ese punto [3].

Definición formal: A. Cauchy

Cuando los valores que toma una función $f(x)$ se aproximan a un único valor fijo, de manera que terminan por diferir tan poco como se quiera, a ese valor fijo se le llama el límite de la función cuando la variable x tiende a un valor fijo [1].

Definición moderna: K. Weierstrass

Click aquí! [4]

Figura: Izq.: Augustin Cauchy (Francés) desarrolló el primer concepto de límite, principios s. XIX. Der.: Karl Weierstrass (Alemán) formalizó el concepto moderno de límite, finales s.XIX.

El concepto de límite: definición

Si el límite corresponde con un único valor fijo L cuando x tiende a un valor fijo a, la anterior afirmación se escribe:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Ejemplo 1. Encontrar el límite de la función $f(x) = 2 + 5x - 2x^2$ cuando $x \to 2$.

$$\lim_{x \to 2} 2 + 5x - 2x^2 = 4$$

Características del límite de una función

Se habla propiamente de límite cuando [2]:

1. El límite existe y es único.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L, \quad L \text{ es un número finito}$$

2. Los limites laterales son iguales. Esto es, que los límites a la izquierda y derecha del punto a deben ser iguales.

$$\text{izquierda: } \lim_{x \to a^-} f(x) = L, \quad \text{derecha: } \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Cálculo del límite: cómo prodecer

En principio, hay dos modos de calcular un límite:

- Para calcular el límite de una función en un punto simplemente tenemos que sustituir el valor de ese punto en la función.
- Si el resultado del límite no es coherente, se busca alguna estrategia de solución: análisis gráfico, factorización, re-escritura de la función, herramientas de software.

Algunos ejemplos de https://www.funciones.xyz/limite-de-una-funcion/

Cálculo del límite: cómo prodecer

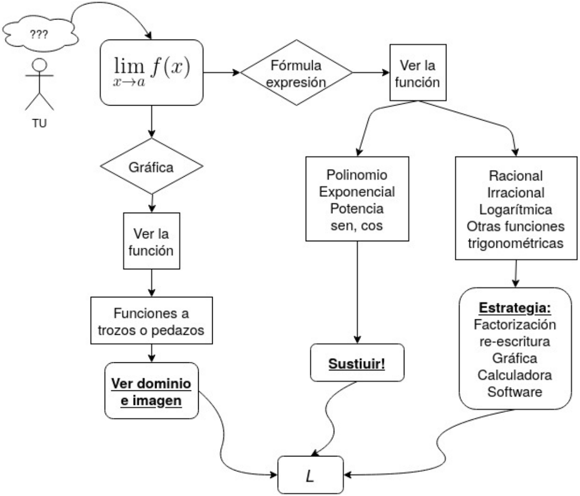


Figura: Ruta estratégica para evaluar un límite.

Cálculo del límite: análisis

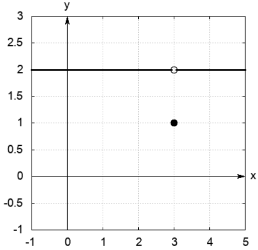


Figura: Límite de función a trozos.

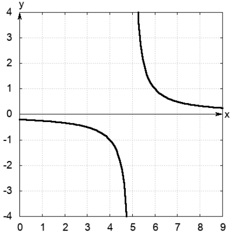


Figura: Límite en una función racional.

Ejemplo 2. Analizar el límite de la función $g(x)$ cuando x tiende a 3.

$$g(x) = \begin{cases} 2, & x \neq 3 \\ 1, & x = 3 \end{cases}$$

Ejemplo 3. Analizar el límite de la función $h(x)$ cuando x tiende a 5.

$$h(x) = \frac{1}{x-5}$$

Cálculo del límite: análisis

Ejemplo 4. Hallando el límite de una función con resultado incoherente: $0/0$. Evaluar:

$$\lim_{z \to 4} \frac{z-4}{z^2-5z+4}$$

Solución. Usando sustitución se llega al resultado

$$\lim_{z \to 4} \frac{z-4}{z^2-5z+4} = \frac{4-4}{(4)^2-5(4)+4} = \frac{0}{0}$$

El resultado incoherente $0/0$ se denomina una *indeterminación*, porque no aclara cual es el límite.

Cálculo del límite: análisis

La estrategia a seguir: re-escritura del límite mediante factorización

$$\lim_{z\to 4} \frac{z-4}{z^2-5z+4} = \lim_{z\to 4} \frac{z-4}{(z-1)(z-4)} =$$
$$\lim_{z\to 4} \frac{\cancel{z-4}}{(z-1)\cancel{(z-4)}} = \lim_{z\to 4} \frac{1}{z-1} = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$$

Por tanto,

$$\lim_{z\to 4} \frac{z-4}{z^2-5z+4} = \frac{1}{3}$$

el cual, es un resultado único y finito.

Actividad 8

Redactar en el cuaderno el contenido de las diapositivas 6 y 8, sobre el concepto y características de un límite, que se encuentran en este documento.

Actividad 9

En preparación ...

Referencias I

Víctor Espíritu Montiel and Catalina Navarro Sandoval.
Límites indeterminados mediante el uso de tablas de valores y gráficas.

Revista de Didáctica de las Matemáticas Números, 88:31–53, mar 2015.

Roland Larson and Robert Hostetler.
Cálculo y Geometría Analítica.
McGraw-Hill, third edition, jan 1989.

Funciones matemáticas.
Límite de una función.
https://www.funciones.xyz/limite-de-una-funcion/, 2021.
Consultado 1 ago 2021.

Referencias II

Wikipedia.
Límite de una función.
https://es.wikipedia.org/wiki/L%C3%ADmite_de_una_funci%C3%B3n, 2021.
Consultado 1 ago 2021.

Doris Álvarez et al.
Proyecto sé Matemáticas 11: libro del estudiante.
Ediciones SM, 2012.