Operaciones superiores con los números naturales

Matemáticas - Grado 6

2020

1. Introducción: otras operaciones con números naturales

Anteriormente se estudiaron (a manera de repaso) las operaciones básicas con números naturales: suma, resta, multiplicación y división. Ellas constituyen operaciones indispensables que cualquier persona debe manejar de manera aceptable para el análisis matemático en el día a día del mundo actual. Aún así, no son las únicas pues existen otras operaciones requeridas en campos de conocimiento específico que facilitan el avance y desarrollo de dicho campo, tal y como ocurre en el campo científico (medicina, economía, astronomía por mencionar). En Matemáticas básicas tales operaciones se llaman *superiores*, ya que son operaciones que simplifican algoritmos (esto es, procedimientos) repetitivos y permiten agilizar ciertos cálculos[1]. Estas operaciones tienen una simbología, la cual es necesaria que el estudiante se familiarice pues es de uso común en grados superiores y a su vez, excelente dominio de la multiplicación (tablas) y división pues estas son las herramientas básicas requeridas por las operaciones superiores.
La clase tiene por objetivos:

- Reconocer las operaciones superiores: potenciación, radicación y logaritmación.
- Identificar los símbolos de cada operación.
- Calcular y proponer soluciones a problemas que usen operaciones superiores con números naturales.

A continuación se desarrolla el tema iniciando con el reconocimiento de las partes, profundización de cada operación y por último una actividad aplicada.

2. Operaciones superiores

2.1. Partes y su significado

Las tres operaciones que se estudiaran son las potencias, radicales o mejor conocidas como las "raíces" y los logaritmos. Casualmente, cada operación tiene 3 partes bien definidas que están cercanamente relacionadas, manejadas con símbolos diferentes para representar cada operación, pero con el objetivo puntual de encontrar una parte desconocida a partir de dos partes conocidas [3]. Ellas son:

Base: El número de *trabajo* o de aplicación. Por ejemplo, nuestro sistema numérico habitual es el de base 10 (hay 10 dígitos 0,...,9); en informática el sistema numérico es de base 2 (dígitos 0 y 1).

Exponente: Indica la cantidad de veces que se opera la base (multiplicación por ejemplo).

Resultado: El número final que se obtiene luego de realizar el procedimiento; tiene nombre diferente en cada operación.

Es importante tener claro las anteriores conceptos, y de seguro al momento de la actividad será necesario volver a consultar estas descripciones.

[1] Estas operaciones casi no hacen parte del común cultural de las personas y su computo por lo general se realiza con una calculadora.

2.2. Potenciación

Operación que consiste en hallar un resultado denominado **potencia** a partir de multiplicar tantas veces la base como lo indique el exponente [3, 2, 1]. Se escribe como aparece en la figura 1.

$$\textbf{Base} \leftarrow \overset{\overset{\textbf{Exponente}}{\uparrow}}{2^{3}} = 8 \rightarrow \textbf{Resultado}$$

Figura 1: Partes de la potencia.

La base se escribe de forma normal y el exponente se escribe más pequeño en la parte superior derecha. La potenciación usa como herramienta básica la multiplicación sucesiva de la base y es la manera abreviada de expresar la multiplicación de factores iguales. En efecto,

$$2^3 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{\text{Multiplicar 3 veces}} = 8$$

Se lee "2 elevado a la 3" o "tercera potencia de 2".

Ejemplo 1. Resolver cada potencia: 1) 3^4. 2) 1^5. 3) 10^4. 4) 6^8.

1) 3 elevado a la 4,

$$3^4 = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{\text{Multiplicar 4 veces}} = 81$$

2) Quinta potencia de 1,

$$1^5 = \underbrace{1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1}_{\text{Multiplicar 5 veces}} = 1$$

3) 10 elevado a la 4,

$$10^4 = 10000$$

4) Octava potencia de 6,

$$6^8 = 1679616$$

Ejemplo 2. Otras situaciones con la potenciación. 1) 7^0. 2) 23^1. 3) y 4) Errores comunes.

1) Cuando el exponente es 0, sin importar la base la potencia vale 1.

$$7^0 = 1$$

2) Cuando el exponente es 1, la potencia vale la misma base.

$$23^1 = 23$$

3) No se debe confundir la potencia con una multiplicación:

$$2^4 = 2 \times 4 = 8, \quad \text{Incorrecto! Muy mal!}$$
$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16, \quad \text{Correcto! Muy bien!}$$

4) Tampoco se debe confundir con una suma:

$$2^4 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8, \quad \text{Incorrecto! Muy mal!}$$

Puesto que la potenciación es de uso frecuente, existen algunas "ayudas" o propiedades que facilitan el desarrollo de potencias múltiples. En resumen, tratan de manejar los exponentes según la situación. La tabla 1 muestra algunas de ellas.

Propiedad	Ejemplo
Producto con la misma base: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ Al multiplicar potencias de la misma base, se deja la misma base y se suman los exponentes.	$6^3 \cdot 6^5 = 6^{3+5} = 6^8$
División con la misma base: $a^m \div a^n = a^{m-n}$ Al multiplicar potencias de la misma base, se deja la misma base y se suman los exponentes.	$5^8 \div 5^2 = 5^{8-2} = 5^6$
Potencia de una potencia: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ La potencia de una potencia es otra potencia con la misma base y se multiplican los exponentes.	$(4^5)^3 = 4^{5\cdot 3} = 4^1 5$
Producto con base diferente y mismo exponente: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ El producto de potencias con el mismo exponente, es otra potencia con las bases multiplicadas y el mismo exponente.	$6^3 \cdot 2^3 = (6 \cdot 2)^3 = 12^3$
División con base diferente y mismo exponente: $a^n \div b^n = (a \div b)^n$ El cociente de potencias con el mismo exponente, es otra potencia con la división de bases y el mismo exponente.	$9^5 \div 3^5 = (9 \div 3)^5 = 3^5$

Tabla 1: Propiedades de las potencias. Aquí, "$\cdot$" es equivalente al símbolo de multiplicar "$\times$". Aprecie que en cada resultado de los ejemplos no se calcula la potencia, simplemente las potencias se han transformado a una potencia más simple.

2.3. Radicación

Esta operación consiste en hallar un <u>resultado</u> denominado **raíz** cuando son conocidas una potencia y el exponente. Equivale a resolver la pregunta dada una potencia ¿cuál es la base que luego de multiplicar varias veces como *indica* el exponente, origina dicho número?; algunos textos y páginas web mencionan que esta operación es inversa a la potencia [3, 2, 1]. El símbolo para reconocer esta operación es $\sqrt{}$ y se llama *radical*.

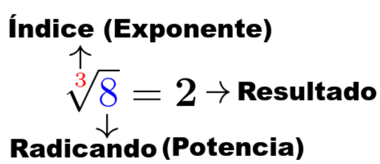

Figura 2: Partes de la radicación.

La figura 2 muestra las partes de la radicación y entre paréntesis se muestra el nombre relacionado con la potencia. El índice (exponente) muestra la cantidad de veces que necesita multiplicar la base (el resultado) para originar la potencia (el radicando). En la figura, se lee "raíz tercera de 8". Por costumbre, si el índice es dos (raíz cuadrada o segunda) este no se escribe, así por ejemplo, se entiende que $\sqrt{9} = 3$ puesto que $3^2 = 9$.

Ejemplo 3. Resolver cada raíz: 1) $\sqrt[4]{81}$. 2) $\sqrt[5]{1}$. 3) $\sqrt[4]{10000}$. 4) $\sqrt[7]{823543}$.

1) Raíz cuarta de 81,

$$\sqrt[4]{81} = 3, \quad \text{porque } 3^4 = 81$$

2) Raíz quinta de 1,

$$\sqrt[5]{1} = 1, \quad \text{porque } 1^5 = 1$$

3) Raíz cuarta de 10000,

$$\sqrt[4]{10000} = 10$$

4) Raíz séptima de 823543,

$$\sqrt[7]{823543} = 7$$

Muchos números naturales no tienen raíz exacta. En tal caso, se calcula la raíz con el natural más próximo junto con un resto. Por ejemplo, para $\sqrt{80}$ no tiene raíz cuadrada exacta porque $8^2 = 64$ y $9^2 = 81$. Así, la raíz cuadrada más próxima de 80 es 8 y el resto es $80 - 64 = 16$; lo anterior se escribe $\sqrt{80} = 8$ con resto 16. Para un resultado exacto, la consulta con una calculadora deja el resultado 8,9, pero este número no es un natural. Así que, para hallar raíces por tanteo se buscarán números naturales que al elevarlos al índice se aproximen al radicando junto con el resto necesario.

2.4. Logaritmación

La última operación superior consiste en hallar un resultado denominado **logaritmo** cuando son conocidas la potencia y la base, esto es, en otras palabras, a encontrar el exponente [3, 2, 1]. El símbolo usado en esta operación es **log**.

$$\log_{\underset{\textbf{Base}}{\underset{\downarrow}{2}}} \overset{\textbf{Potencia}}{\overset{\uparrow}{8}} = 3 \rightarrow \textbf{Resultado}$$

Figura 3: Partes de un logaritmo.

La figura 3 muestra las partes de esta operación y se observa que están relacionadas con la potencia. En efecto, puesto que $2^3 = 8$. Se lee "el logaritmo de 8 en base 2" con resultado (exponente) 3. Puesto que no todos tenemos una amplía memoria numérica, ni mucho menos un cuaderno con las tablas de multiplicar bajo el brazo, su computo se facilita con una calculadora. Por uso genérico y mundial, como se puede elegir cualquier número como base, entre los números naturales se prefiere el número 10 dando origen a los logaritmos vulgares o logaritmos de Briggs, en honor al matemático británico Henry Briggs del siglo XVII. Hoy en día, el uso de estos logaritmos es preferido por científicos e ingenieros.

Ejemplo 4. Resolver cada logaritmo: 1) $\log_3 81$. 2) $\log_2 16$. 3) $\log_{10} 10000$. 4) $\log_{13} 371293$.

1) Logaritmo de 81 en base 3,

$$\log_3 81 = 4, \quad \text{porque } 3^4 = 81$$

2) Logaritmo de 16 en base 2,

$$\log_2 16 = 4, \quad \text{porque } 2^4 = 16$$

3) Logaritmo de 10000 en base 10,

$$\log_{10} 10000 = 4$$

Cuando se usan los logaritmos vulgares, por convenio no se escribe el número de la base.

4) Logaritmo de 371293 en base 13,

$$\log_{13} 371293 = 5$$

3. Actividad Número 6

Resolver en el cuaderno los siguientes ejercicios. Recuerda que las operaciones superiores requieren un buen manejo de las multiplicaciones, así que la actividad es oportuna para mejorar esta operación básica.

1. Hallar las potencias; ordenar de mayor a menor los resultados y descubrir el nombre de un animal.

R	M	G	I	H	A	O
11^3	3^6	2^5	21^2	100^2	1^8	15^3
=	=	=	=	=	=	=

Tabla 2: Actividad de potencias.

2. Hallar las raíces y logaritmos; ordenar de menor a mayor los resultados y descubrir el nombre de un animal.

T	V	A	E	R	S	Z	U
$\sqrt[4]{625}$	$\log_{13} 169$	$\sqrt[10]{1}$	$\log_9 729$	$\sqrt[3]{216}$	$\log_8 4096$	$\sqrt{400}$	$\log 100000000\dagger$
=	=	=	=	=	=	=	=

Tabla 3: Actividad de raíces y logaritmos. † Este es un logaritmo de Brigss.

3. Inventar un ejemplo (sólo 1) que use una propiedad de las potencias de la tabla 1.

Nota: La sección referencias contiene fuentes de consulta bibliográficas si se tiene posibilidad de acceder a textos o navegación en la red. Estas aparecen en el contenido de este texto con paréntesis cuadrados [...].

Referencias

[1] Jeison Cárdenas, *Potencia, radicación y logaritmo*, https://www.youtube.com/watch?v=v60PN7XQpVQ, 2015, Consultado 5 jun 2020.

[2] Mates Fáciles, *Radicacion, logaritmacion y potenciacion*, https://lasmatesfaciles.com/2019/09/11/radicacion-logaritmacion-y-potenciacion/, 2019, Consultado 2 jun 2020.

[3] Jesús Ramos and Ludwig Ortiz, *Supermat 6*, Voluntad, 2000.