Elementos de funciones

Matemáticas - Grado 11

2021

1. Una situación elemental

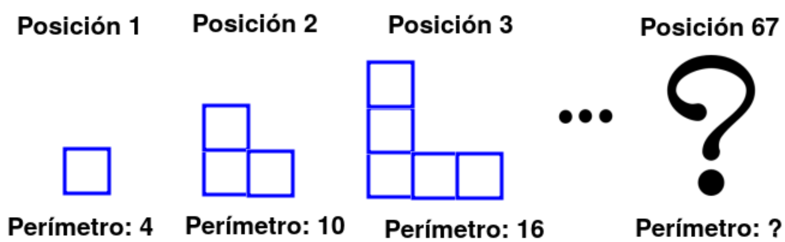


Figura 1: ¿Cuál será el perímetro del arreglo en la posición 67?

En la figura 1 se tiene una secuencia de arreglos de cuadrados cuyo perímetro es determinado para cada posición. Asumiendo que el lado de un cuadrado tiene valor 1, en la posición 1 el perímetro vale 4; en la posición 2 el perímetro vale 10 pues se han agregado 3 lados en el costado superior del cuadrado y otros 3 al lado derecho del mismo; ya en la posición 3, el perímetro vale 16. Pero, ¿cuál será el perímetro del arreglo en la posición 67? Por supuesto la respuesta se puede podría elaborar por conteo manual de lados luego de dibujar el arreglo en una posición dada. Sin embargo, esta estrategia tomaría algún tiempo ... largo. Además, no permitiría hallar el perímetro para una posición dada, por ejemplo el perímetro en la posición 10 000.
Otra estrategia puede ser elaborar una “fórmula” que permita encontrar el perímetro a partir de una posición dada (más práctico!). Analizando los perímetros se aprecia que aumenta en un valor de 6 de una posición a la siguiente. Simbolizando por L el perímetro y por p la posición se observa que para $p = 1$, $L = 4$ o también $L = 6 - 2$; para $p = 2$, $L = 10 = 6 + 4$ o también $L = 6 + 6 - 2$; para $p = 3$, $L = 16 = 6 + 6 + 6 - 2$. Abreviando cada suma de 6 con una multiplicación “por pura coincidencia” se tiene:

$$\begin{aligned} p = 1, &\quad L = 6 \times 1 - 2 = 4 \\ p = 2, &\quad L = 6 \times 2 - 2 = 10 \\ p = 3, &\quad L = 6 \times 3 - 2 = 16 \end{aligned}$$

Los anteriores resultados muestran que en los cálculos numéricos algunos números se mantienen inalterables para una posición dada, mientras que los demás varían según la posición y el perímetro hallado. Las operaciones halladas permiten generalizar la fórmula para el computo del perímetro como;

$$L = 6p - 2 \tag{1}$$

la cual es válida para cualquier posición siempre cuando p sea mayor o igual a 1. Usando la fórmula, la pregunta central se puede responder inmediatamente:

$$p = 67, \quad L = 6 \times 67 - 2 = 400$$

La fórmula 1 a parte de agilizar los cálculos, también permite relacionar el conteo del perímetro del arreglo a partir de una posición dada a través de una instrucción o *algoritmo*:

> *Algoritmo.* Para un número de posición específico del arreglo, el perímetro se evalúa como el producto de la posición por 6 disminuido en dos.

Desde el punto de vista formal de las matemáticas, los aspectos mencionados alrededor de una situación tan "elemental", como el de la figura 1, se pueden condensar con el concepto de **función**, concepto que se abordará en las siguientes secciones empezando desde su definición hasta su representación y tipos de funciones.

2. Concepto de función

2.1. Evolución del concepto

El concepto de función viene con evolución vertiginosa desde el siglo XVII. La primera noción se debe a R. Descartes (1596-1650) al mostrar que las curvas se pueden representar por dos variables relacionadas en una expresión. I. Newton (1642-1727) ya hacia distinción de la dependencia mutua entre las variables que intervienen en una función. W. Leibniz (1646-1716) usa por primera vez el término "Función", como aquella expresión conformada por constantes, variables y parámetros. Así, el término "Función", adoptado con el propósito de representar cantidades dependientes de una variable tomaría popularidad a finales del siglo XVII.
L. Euler (1707-1793), habla de funciones como expresiones analíticas compuestas de variables y constantes. Esta concepción de función, aunque con imprecisiones en su definición se mantuvo hasta el siglo XIX. La ampliación y mejoramiento del concepto de función surgió de forma paralela con el estudio de algunos problemas de la *Física Matemática* como el flujo de calor en un cuerpo material o las vibraciones de una cuerda. Es a J. Dirichlet (1805-1859) al que se le debe una definición precisa tal y como se usa en la actualidad:

> Una función es una relación entre dos variables tales que para cada valor de la variable independiente, está asociado uno y solo un valor para la variable dependiente.

Ya en el siglo XX, el concepto de función fue extendida para incluir relaciones que se cumplen entre conjuntos numéricos o no-numéricos; fruto de está extensión se ve reflejada en la Teoría Computacional donde las funciones se perciben como reglas aplicadas. Desde el punto de vista científico, el uso de función es inseparable de la ciencia pues ella permiten modelar, inferir y hasta predecir alguna situación particular. Un ejemplo particular se menciona en la Segunda Ley de Newton que establece la relación entre la fuerza aplicada F a un objeto con masa m y el cambio de su movimiento manifestado a través de una aceleración a. Las cantidades variables, F y a, están relacionadas a través de la función $F = ma$ siendo m una cantidad constante [3].

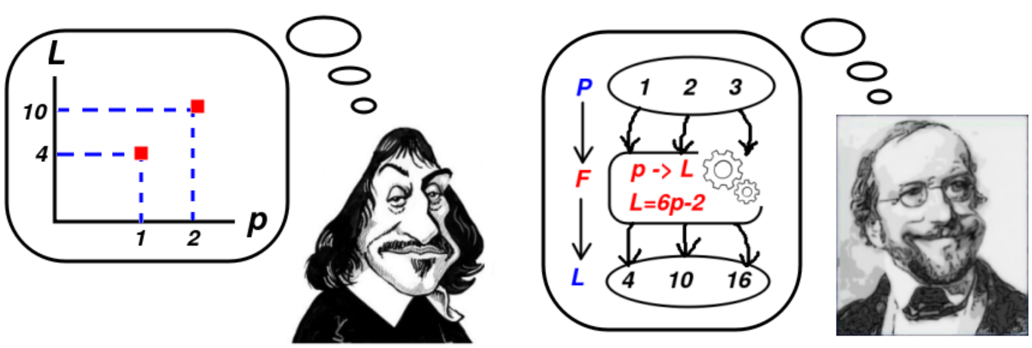


Figura 2: El concepto de función aplicado a la secuencia de arreglos de la figura 1, desde la visión de: R. Descartes (izq.) en el s. XVII y J. Dirichlet (der.) en el s. XIX.

2.2. Definición

Una **función** es una correspondencia o regla entre dos conjuntos de elementos, de modo tal que a **cada elemento** del conjunto de partida se le asigna **exactamente un sólo elemento** en el conjunto de llegada. Un elemento del conjunto de partida es denominado la **variable independiente** (usualmente representado con la letra x). Cuando la variable independiente es aplicada con la función se obtiene un elemento del conjunto de llegada denominado la **variable dependiente** (usualmente representado con la letra y o la notación $f(x)$ y leída como "f de x") [2].
La anterior definición no hace distinción precisa acerca de los conjuntos de partida y llegada. En principio, los elementos usados pueden ser "cualquier objeto", pero en el campo científico o matemático se usa de manera privilegiada el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ para ambos conjuntos, por supuesto con restricciones o condicionamientos propios a una situación particular. Debido al uso de los números reales, la funciones aplicadas se llaman *funciones reales de variable real*.

2.3. Dominio e imagen

Según la definición de función, ella usa un elemento del conjunto de partida para obtener un único elemento del conjunto de llegada. Sin embargo, no todos los elementos de cada conjunto participan en la aplicación de la función o regla. Los conceptos de dominio e imagen precisan sobre los elementos usados por la función [2].

- **Dominio.** Es el subconjunto de elementos usados por la función en el conjunto de partida. Es decir, los valores que puede tomar la variable independiente. La notación para simbolizar el dominio de una función es $D[f]$ o $\mathrm{Dom}[f]$ y se lee como "dominio de f".

- **Imagen.** Es el subconjunto de elementos que resultan luego de usar la función y que aparecen en el conjunto de llegada. Es decir, los valores de la variable dependiente. También es conocido como recorrido o rango. La notación para simbolizar la imagen de una función es $I[f]$, $R[f]$ o $\mathrm{Im}[f]$ y se lee como la "imagen de f".

2.4. Ejemplos de conceptos de función

Ejemplo 1. Caracterizar la función para la secuencia de arreglos de la figura 1, $f: L = 6p - 2$.

Solución. De acuerdo al contexto expuesto, la posición del arreglo y el perímetro usan números enteros. A partir de una posición dada la función permite encontrar el perímetro del arreglo de cuadrados. Por tanto:

- *Variable independiente:* la posición del arreglo, denotado por p.

- *Variable dependiente:* el perímetro del arreglo, denotado por L.

- *Dominio:* si bien en la función hallada se puede usar cualquier número real (p. ej., 2.25 o $-\frac{5}{2}$), solo tienen sentido lógico aquellos números que denotan una posición contable, esto es, p puede valer 1, 2, 3, ... Lo cual indica que en el conjunto de partida se usan números enteros positivos igual o mayores a 1. Este análisis numérico de la variable independiente constituye el dominio de la función y es escrito como se usa en Teoría de Conjuntos usando llaves $\{\dots\}$. Usando la notación descriptiva:

$$D[f] = \{p \,\text{es un número entero positivo igual o mayor a 1}\}$$

o en notación equivalente por comprensión:

$$D[f] = \{p : \ p \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{donde} \quad p \geq 1\}$$

- *Imagen:* en el conjunto de llegada los elementos de la imagen L son aquellos números que surgen de reemplazar y calcular la variable independiente en la función. Usando la notación por extensión con las posiciones calculadas:
$$I[f] = \{4, \quad 10, \quad 16, \quad 400\}$$

Ejemplo 2. Caracterizar la función enunciada por la regla: a cada número real se le puede asociar su raíz cuadrada.

Solución. Aquí la función es expresada en forma literal. Aunque el enunciado de la regla es simple no proporciona mayor información acerca de las variables. Así que la caracterización se analizará a partir de las nociones elementales de los números reales.

- *Variable independiente:* se menciona que es cualquier número real; aquí se denotará por x.

- *Variable dependiente:* dado un número real x se le asocia su raíz cuadrada, es decir $f(x) = \sqrt{x}$. Teniendo en cuenta que la operación $\sqrt{x}$ solamente es posible si x es un número positivo, la regla solo sirve cuando la variable independiente es $x \geq 0$. Sin embargo, con los números reales sucede un hecho particular: si p. ej., $x = 9$ su raíz es $\sqrt{9} = 3$ porque $3 \times 3 = 9$, pero también $\sqrt{9} = -3$ porque $(-3) \times (-3) = 9$. Es decir, para un elemento del conjunto de partida, $x = 9$, se tienen dos elementos en el conjunto de llegada, 3 y -3. Esto contradice el concepto de función, luego la regla enunciada *no es una función*.

3. Representación de una función

Una función se puede "mostrar" de varias maneras [6]:

Fórmula. La manera más común de relacionar un número cualquiera de un dominio con su imagen, es a través de expresiones algebraicas. La basta mayoría de funciones reales usan este modo. P. ej., $f(x) = x^3 + 1$. Para calcular o evaluar el valor numérico de una función, la letra x se sustituye por un número dado en la fórmula y luego se realizan las operaciones indicadas para hallar la imagen $f(x)$. Así, en el ejemplo anterior si $x = 3$, entonces $f(3) = 28$.

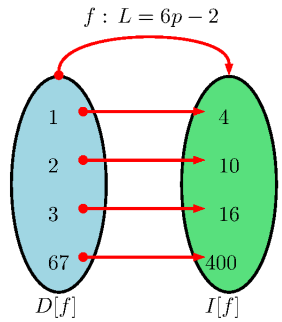
Tabla. La función es mostrada con valores numéricos tanto para la variable independiente como la dependiente. En la columna izquierda se ponen los valores x del dominio y en la derecha los resultados de la imagen $f(x)$. No necesariamente tiene que cubrir todos los valores del dominio. Si la función $f(x) = x^3 + 1$ tiene por dominio $D[f] = \{x : 2 \leq x \leq 5\}$={números reales entre 2 y 5}, bastaría con calcular la función para 2, 3, 4 y 5; si se necesita 3.4 una aproximación podría calcularse con ayuda de la tabla.

Gráfica. Si se dispone de la fórmula o de la tabla de la función, ella se puede representar en un plano cartesiano. El eje horizontal se asocia con la variable independiente (trilladamente notado x) y el eje vertical se asocia con la variable dependiente (trilladamente notado y o $f(x)$). La pareja (x, y) dibujada como un punto en el plano denota el valor de la función. Como se menciono, si se dispone de la fórmula es fácil hallar la gráfica, pero lo contrario a cambio, a veces es bastante difícil.

Enunciado o regla. Es la manera menos frecuente de expresar una función, pero si agotan las maneras anteriores se acude a una expresión literal con la mayor claridad y de ser posible, con el dominio de la función. P. ej., la técnica de redondeo numérico por truncamiento usa la función "para cualquier número real decimal se redondea a un número real entero removiendo la parte decimal". Si $x = -3.780$, la imagen del número truncado es $y = -3$.

Diagrama sagital. Es una representación propia de la Teoría de Conjuntos. La función se relaciona con flechas del dominio hacia su respectiva imagen. La función se indica en la parte superior con una flecha curva.

p	L
1	4
2	10
3	16
67	400



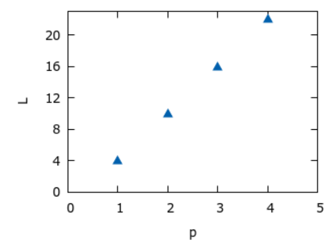


Tabla 1: Diferentes representaciones de función para la secuencia de arreglos de la figura 1. En su orden de izquierda a derecha: tabla, diagrama sagital y gráfica.

Ejemplo 3. Representar de varias maneras la función de la figura 1, $f:\ L = 6p - 2$.

Solución. En está situación fue simple hallar la fórmula, luego está representación ya se tiene. La tabla 1 muestra otras representaciones. En el ejemplo 3 la gráfica aparece con puntos puesto que el dominio de la función usa números enteros. Si el dominio fueran los números reales se tendría un continuo de puntos o simplemente una línea recta.

4. Tipos de funciones

En está sección se abordarán funciones reales de variable real las cuales son de uso frecuente en matemáticas y ciencias. Aunque no hay un acuerdo o consenso común para clasificar las funciones, algunas fuentes de referencia distinguen dos grandes categorías: las *funciones elementales* y las *funciones no-elementales*. En modo simple, las **funciones elementales** son aquellas que se pueden enunciar con una fórmula o con un conjunto finito de operaciones. Las **funciones no-elementales** son aquellas que no pueden ser caracterizadas con una fórmula y que necesitan una condición especial en su dominio; también son denominadas como **funciones a trozos**.
Dentro de las funciones elementales se puede hacer dos clasificaciones generales a partir de las características de funciones ya conocidas por el Estudiante de grado undécimo:

- *Funciones algebraicas.* Conformadas por expresiones con números y variables vinculados por operaciones aritméticas ($+, -, \times, \div, \square^{\square}, \sqrt{\quad}$) que en teoría se pueden resolver con lápiz y papel.
- *Funciones trascendentales.* Aquellas que no se pueden resolver con lápiz y papel y requieren un instrumento de cómputo (calculadora o antiguamente una tabla de valores) como las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

La tabla 2 resume (o repasa) algunas funciones elementales donde se aprecia la fórmula general y su gráfica [4, 5]. En cada función de la tabla x es la variable independiente[1] y y es la variable dependiente; las diferentes letras como m, b, c, a_1, $\ldots$ son parámetros o números característicos de cada función. Las expresiones $P(x)$, $R(x)$ en la función racional o irracional indican que en ella se puede reemplazar por cualquier otra función.

5. Evaluando una función

Un hecho notoriamente importante del concepto de función es la de facilitar la representación de un fenómeno a través de una fórmula o ecuación que liga a las variables dependiente e independiente. La idea de representar

[1] Aunque es muy común usar la letra x para la variable independiente, f o y para la función, se puede usar cualquier letra o símbolo.

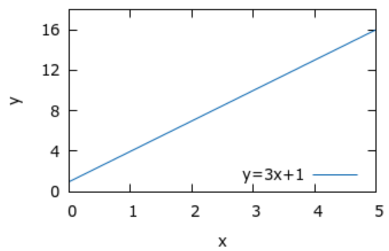
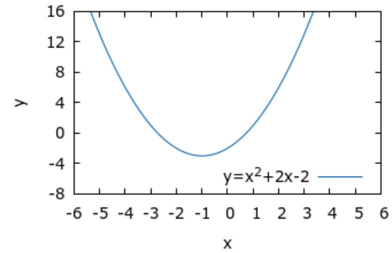
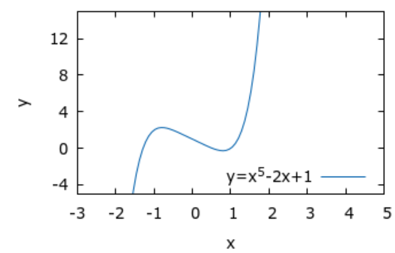
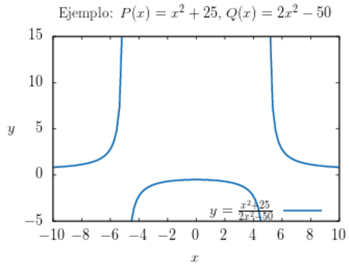
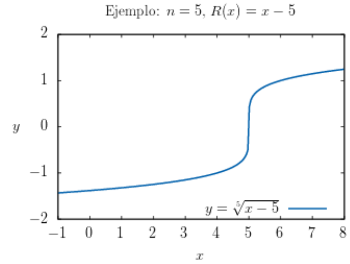
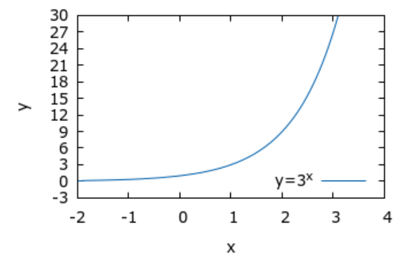
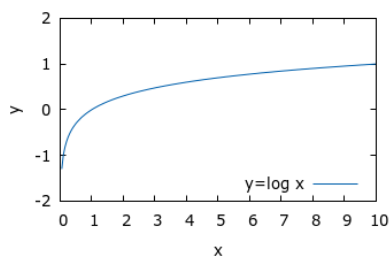
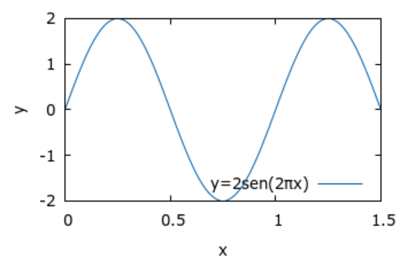
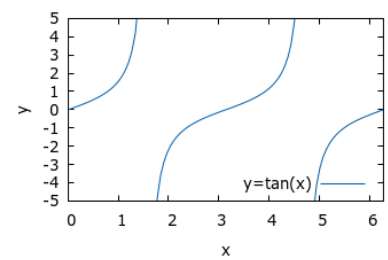
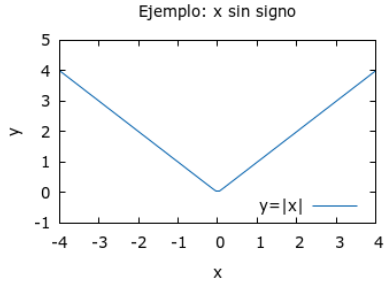
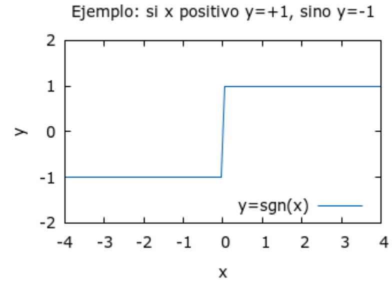
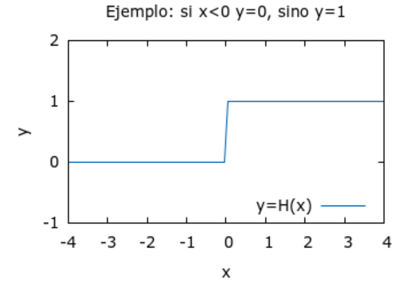
Lineal	Cuadrática	Polinómica
$y = mx + b$ Ejemplo: m=3, b=1 	$y = ax^2 + bx + c$ Ejemplo: a=1, b=2, c=-2 	$y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ Ejemplo: a_0=1, a_1=-2, a_2=a_3=a_4=0, a_5=1 
Racional	**Irracional**	**Exponencial**
$y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ Ejemplo: $P(x) = x^2 + 25$, $Q(x) = 2x^2 - 50$ 	$y = \sqrt[n]{R(x)}$ Ejemplo: $n = 5$, $R(x) = x - 5$ 	$y = a^x$ Ejemplo: a=3 
Logarítmica	**Trigonométrica**	**Trigonométrica**
$y = \log x$ Ejemplo: Base 10 	$y = A\,\mathrm{sen}(bx)$ Ejemplo: A=2, b=2π 	$y = A\tan(bx)$ Ejemplo: A=1, b=1 
Valor absoluto	**Función signo**	**Función escalón o de Heaviside**
$y = \lvert x \rvert$ Ejemplo: x sin signo 	$y = \frac{\lvert x \rvert}{x}$ Ejemplo: si x positivo y=+1, sino y=-1 	$y = H(x)$ Ejemplo: si x<0 y=0, sino y=1 

Tabla 2: Tabla de funciones elementales y no-elementales. Las funciones de la última fila son funciones no-elementales de mayor uso.

un fenómeno en una fórmula es una invención relativamente joven en el campo científico: su uso vertiginoso se remonta desde principios del siglo XX. Dada la importancia de la representación de una función a través de una fórmula esta sección muestra como calcular o **evaluar** una función.

Para evaluar una función primero se identifican las variables dependiente e independiente; en seguida se revisa que la variable dependiente se encuentre aislada al lado izquierdo del igual para identificar la forma o tipo de función. El valor numérico de la función se calcula reemplazando la variable independiente por el número requerido, luego de efectuar las operaciones de la fórmula. El resultado se escribe como una pareja de dos números en una tabla o en una gráfica [2].

Ejemplo 4. Se ha analizado las propiedades físicas de un gas a partir de mediciones de volumen y presión. El análisis inicial muestra que el volumen y presión están relacionados por la expresión:

$$\left(P + \frac{3}{V^2}\right)(3V - 1) = 4$$

donde P es la presión y V el volumen. Se requiere calcular la presión en función del volumen cuando toma valores de 1, 1.2, 3 y $\frac{2}{3}$.

Solución. La fórmula del enunciado no muestra con claridad las variables dependiente e independiente. Sin embargo, la expresión "... presión en función del volumen" orienta que la presión P es la variable dependiente y el volumen V la independiente. Al interpretar este lenguaje indica que se debe despejar la letra P: para ello el factor $(3V - 1)$ pasa a dividir al miembro derecho y el término $\frac{3}{V^2}$ pasa al lado derecho con su signo cambiado. Es decir, la función en términos del volumen es:

$$P(V) = \frac{4}{3V - 1} - \frac{3}{V^2}$$

La función $P(V)$ consta de la resta de dos funciones racionales (ver tabla 2). Una vez despejada se procede a evaluar la función para $V = 1$, 1.2, 3, 6. Reemplazando V por 1 y efectuando operaciones se tiene:

$$P(1) = \frac{4}{3(1) - 1} - \frac{3}{(1)^2} = \frac{4}{3 - 1} - \frac{3}{1} = \frac{4}{2} - \frac{3}{1} = \frac{4 - 6}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

Para $V = 1.2$ conviene realizar algunos cómputos con calculadora, teniendo en cuenta que primero se resuelven los productos y que las fracciones son equivalentes a la operaciones de división,

$$P(1.2) = \frac{4}{3(1.2) - 1} - \frac{3}{(1.2)^2} = \frac{4}{3.6 - 1} - \frac{3}{1.44} = \frac{4}{2.6} - \frac{3}{1.44} = 1.54 - 2.08 = -0.54$$

Para $V = 3$,

$$P(3) = \frac{4}{3(3) - 1} - \frac{3}{(3)^2} = \frac{4}{9 - 1} - \frac{3}{9} = \underbrace{\frac{4}{8} - \frac{3}{9}}_{\text{Simplificando}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3 - 2}{6} = \frac{1}{6}$$

Y para $V = \frac{2}{3}$, teniendo en cuenta la multiplicación y división de fracciones,

$$P(\frac{2}{3}) = \frac{4}{3(\frac{2}{3}) - 1} - \frac{3}{(\frac{2}{3})^2} = \frac{4}{\frac{6}{3} - 1} - \underbrace{\frac{3}{\frac{4}{9}}}_{\text{Regla oreja}} = \frac{4}{2 - 1} - \frac{27}{4} = \frac{4}{1} - \frac{27}{4} = \frac{16 - 27}{4} = -\frac{11}{4}$$

Finalmente, la tabla siguiente reúne los resultados anteriores.

V	P
1	-1
1.2	-0.54
3	$\frac{1}{6}$
$\frac{2}{3}$	$-\frac{11}{4}$

Nota: La sección referencias contiene fuentes de consulta bibliográficas si se tiene posibilidad de acceder a textos o navegación en la red. Estas aparecen en el contenido de este texto con paréntesis cuadrados [...].

6. Actividad 4

1. Para el siguiente enunciado:

   > cuando x vale un número real entre -5 y 2, la función $g(x)$ vale -3; si x es más grande que 2 y a su vez más pequeño que 4, $g(x)$ se sustituye por la expresión $2x - 7$.

   Responder las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuál es el conjunto de dominio de la función?

   b) ¿Se cumple la condición de que a cada número real del dominio tiene un sólo valor numérico en la imagen? Explique.

   c) ¿Cuál es el conjunto imagen de la función?

2. La función $f(x) = 4x - x^2$ tiene como dominio $D[f] = \{x : x \in \mathbb{R} \quad \text{donde} \quad 0 < x < 4\}$, o de manera equivalente $D[f] = \{x \quad \text{es un número real entre 0 y 4}\}$. Encontrar la imagen $I[f]$ de la función.

3. Una función no-elemental de uso frecuente es la *función redondear a número entero*. Está función se puede enunciar así:

   > si x es un número con una parte decimal, x se aproxima o se redondea a un número entero así: si la primera cifra decimal (después del separador decimal) es menor a 5, el número se redondea manteniendo la parte entera del número. Si la primera cifra decimal es mayor o igual a 5, el número se redondea sumando uno a la parte entera.

   Algunos ejemplos para comprender la función redondeo: si $x = 67.4$, al ser la cifra decimal menor a 5, la imagen es $y = 67$; si $x = 2.569$, al ser la primera cifra decimal igual a 5, la imagen es $y = 3$. Asumiendo que el dominio de la función es $0 \leq x \leq 10$ siendo x un número real, realizar:

   a) Gráfica de la función.

   b) Imagen de la función para el dominio mencionado.

7. Actividad 5

1. Para la función

$$f(x) = \frac{4x - 2}{2x + 9}$$

   evaluar los siguientes valores de x: -3, 5, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$, 9. Dejar evidencia de los procedimientos matemáticos realizados y organizar los resultados en una tabla.

2. Un procedimiento preliminar para modelar una situación a través de una función matemática consiste en reunir una tabla de datos, realizar la gráfica y proceder a comparar la curva obtenida con alguna función elemental (ver tabla 2) y así poder emitir los primeros análisis del comportamiento de la situación en estudio.
   La tabla 3 exhibe el tamaño de la población de Colombia en el periodo 1905-2005 con algunas proyecciones hasta el 2025 . A partir de la tabla resolver:

   a) Realizar una gráfica de la tabla nombrando apropiadamente cada eje. Una con un trazo cada uno de los puntos de la tabla.

   b) Según la curva obtenida y comparando con alguna de las funciones de la tabla 2, justifique cuál sera la función que mejor se ajusta para describir el comportamiento de la población colombiana en el periodo mencionado.

Año	Población (millones hab.)
1905	4,74
1912	5,39
1918	6,12
1938	8,70
1951	11,55
1964	17,48
1973	22,86
1985	30,06
1990	33,32
1995	36,57
2000	39,76
2005	42,89
2010	45,92
2015	48,83
2020	51,63
2025	54,28

Tabla 3: Evolución de la población colombiana en el periodo 1905-2025. Tomado de la Revista Biomédica.

Referencias

[1] Jaime Carmona Fonseca, *Cambios demográficos y epidemiológicos en Colombia durante el siglo XX*, Biomédica **25** (2005), nº 4, 464–480.

[2] Roland Larson y Robert Hostetler, *Cálculo y Geometría Analítica*, third ed., McGraw-Hill, jan 1989.

[3] João Pedro Ponte, *The history of the concept of function and some educational implications*, The Mathematics Educator **3** (1992), nº 2, Traducción al español Gian Franco Ontivero, 2018. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/322754157.

[4] Michael Spivak, *Cálculo Infinitesimal*, second ed., Editorial Reverté, 1996.

[5] Wikipedia, *Anexo: Funciones matemáticas*, https://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Funciones_matem%C3%A1ticas, 2019, Consultado 24 abr 2021.

[6] Doris Álvarez y cols., *Proyecto sé Matemáticas 11: libro del estudiante*, Ediciones SM, 2012.