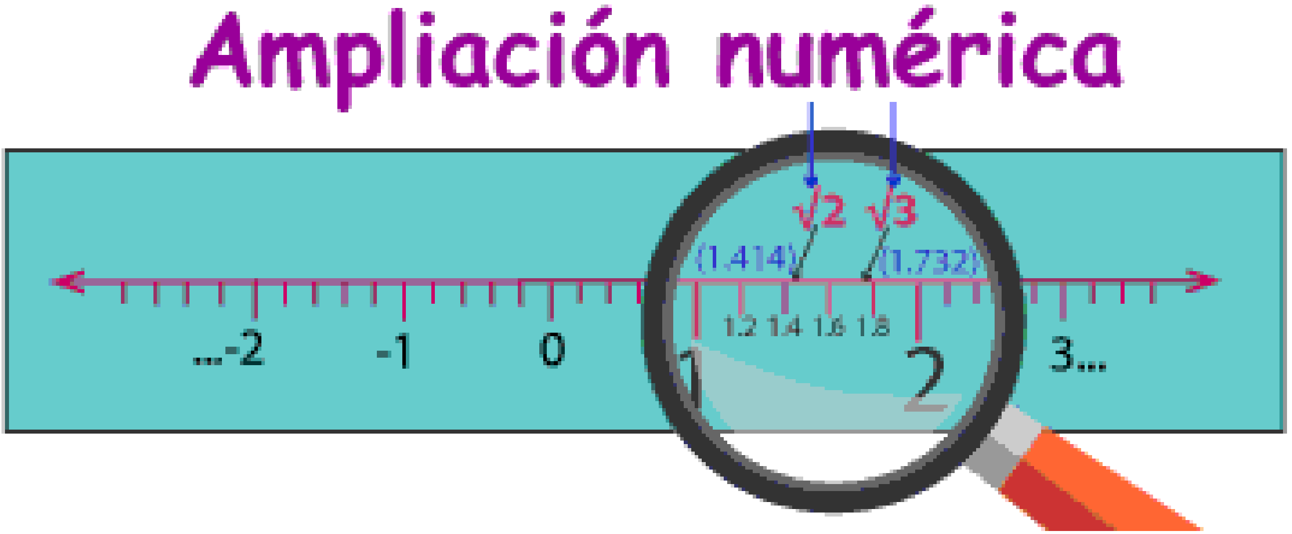
Números Irracionales y el gran conjunto de los Números Reales



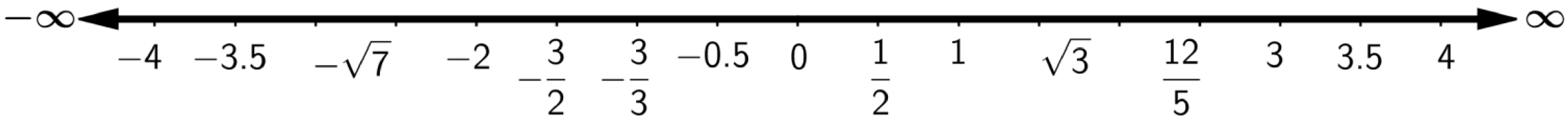
Matemáticas – Grado 8
2022

Contenidos

i. Introducción: Otros números
ii. Números irracionales: definición
iii. Números irracionales: manejo
iv. Números reales
v. Actividades

Objetivos

- Identificar y manejar los números irracionales.
- Reconocer el conjunto de los números reales y su relación con conjuntos ya conocidos.



Todos los números conocidos se pueden representar en la recta numérica (Imagen de *Real Numbers*).

Otros numéros: una cuestión de cifras

Hallar la diferencias o similitudes en el par de números:

$$\frac{43}{30} = 1{,}43333333333333\ldots$$

$$\pi = 3{,}14159265358979\ldots$$

Diferencias | Similitudes

¿Cómo caracterizarlos? ¿Cómo manejarlos?
¿Cuántas cifras son necesarias?

Otros numéros: una cuestión de cifras

¿Cómo caracterizarlos?

Existe un recurso en análisis matemático denominado...

Fracción continua: una secuencia anidada, repetitiva de suma y división de fracciones.

$$\frac{43}{30} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \boxed{\frac{1}{4}}}}$$

Secuencia finita: un racional

$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{9}{7 + \cfrac{16}{9 + \cfrac{25}{11 + \cfrac{36}{\boxed{\ddots}}}}}}}}$$

Secuencia infinita: un NO racional o ...

Otros numéros: una cuestión de cifras

¿Cómo manejarlos?

Hay métodos de aproximación:

$$\frac{43}{30} \approx 1{,}433$$

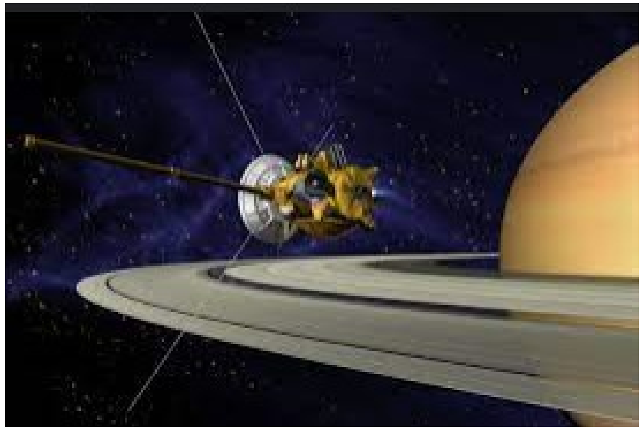
$$\pi \approx 3{,}1416$$

Símbolo de aproximación: $\approx$

¿Cuántas cifras son necesarias?

Depende del contexto de aplicación.

P. ej., la NASA para el cálculo de navegación interplanetaria usa π con 15 decimales; para hallar el perimetro de una rueda basta dos decimales.



Números Irracionales

Los NO racionales ¿Qué son?

- Son números con infinitas cifras decimales no-periodicas (fracción continua infinita).
- No se pueden expresar como racional (a/b o fracción continua finita).
- Usualmente se expresan con un símbolo.
- Las operaciones son similares a los *racionales decimales*, aunque precisa conocer cuántos decimales se desean manejar en los cómputos.
- Algunos irracionales importantes:

$$\mathbb{I} \quad \pi \quad \sqrt{2} \quad e \quad \phi$$

Números Irracionales

Manejo de irracionales decimales

Para manejar las cifras decimales se decide cuántas cifras se mantienen hacia la derecha del separador decimal y un método.

- Truncamiento. Consiste en mantener las cifras hasta la cifra decidida y eliminar el resto. *Ejemplo:* truncar a las milésimas (3 cifras decimales),

$$\sqrt[3]{7} = 1{,}912931\ldots \rightarrow 1,912931\ldots \approx 1{,}912$$

- Redondeo. Se observa la siguiente cifra a la que se va aproximar:

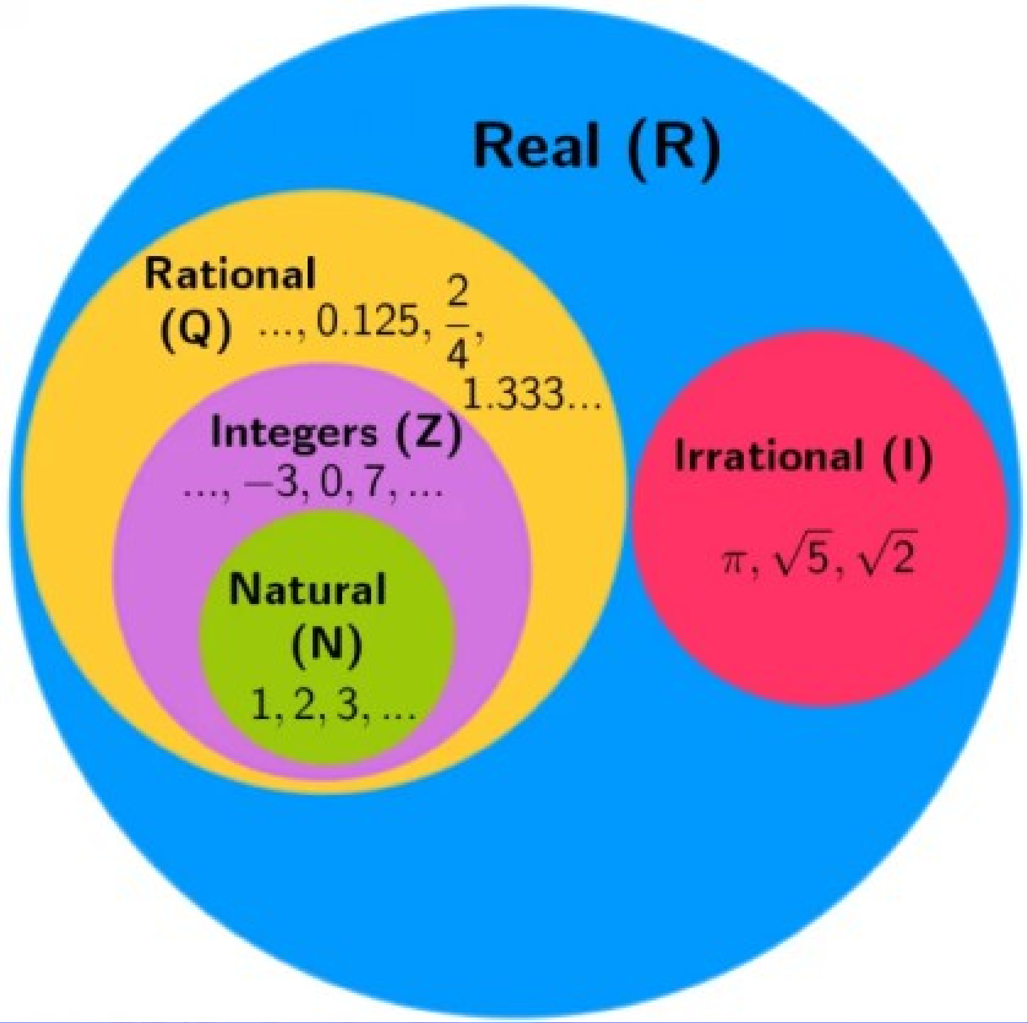
➔ Si es 5 o mayor a 5 se suma 1 a la última cifra decidida; el resto se elimina.

➔ Si es menor que 5, el resto se elimina.

Ejemplo: truncar a las milésimas (3 cifras decimales),

$$\sqrt[3]{7} = 1{,}912931\ldots \rightarrow 1,912931\ldots \approx 1{,}913$$

Números Reales



La Colección Mayor de números

- La unión de números racionales e irracionales forman el conjunto de los números reales (simbolizado *R*).
- Se usan para medir cantidades... *reales*.
- Con los reales se pueden realizar todas las operaciones básicas, excepto:

➔ No existen raíces de orden par (cuadradas, cuartas, etc.) de números negativos.

➔ La división entre cero no es posible.

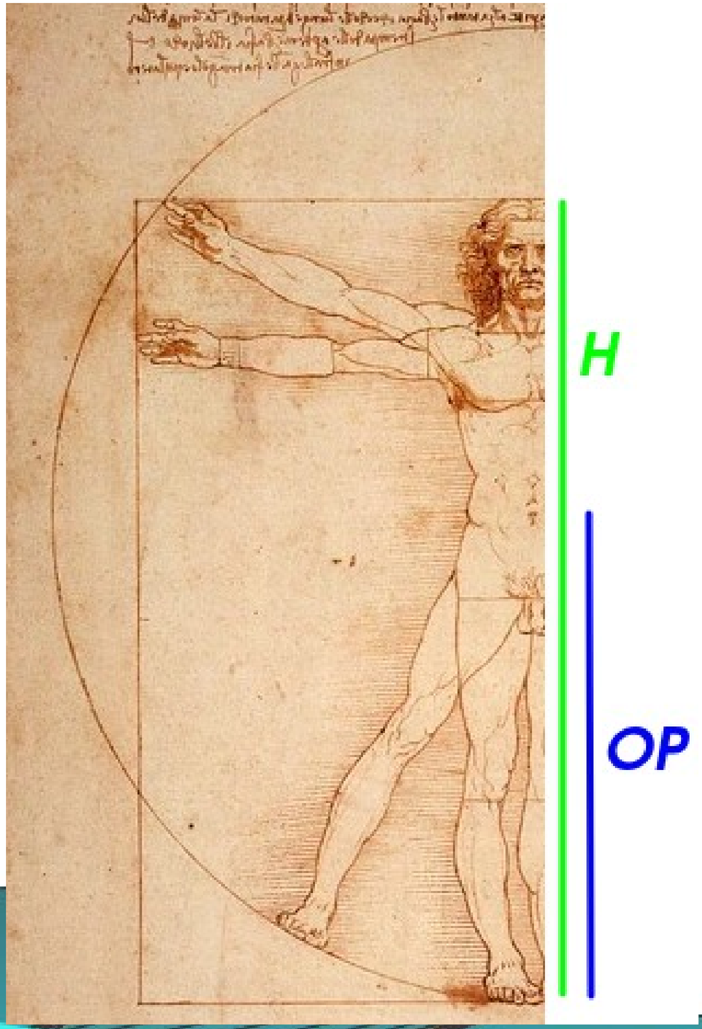
Actividad 14

(1) Según lo expuesto, ¿qué es una fracción continua?
(2) Una aproximación de la raíz cuadrada de 2 es:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$$

Resolver la fracción continua y expresar el resultado con tres cifras decimales por truncamiento.

Actividad 14



El hombre de Vitruvio, famoso dibujo de Leonardo da Vinci (1492). Imagen adaptada de *pixabay.com*.

(3) La razón áurea φ. Este es un número irracional famoso presente en distintas ramas del conocimiento y la naturaleza. En el cuerpo humano, la razón altura total (*H)* a distancia entre ombligo a planta de los pies (*OP)* se aproxima a este número.

(a) Medir su altura total H y distancia ombligo a planta pies OP en metros con dos cifras decimales; descuente 0,01 m por efecto de los zapatos.

(b) Realice la división *H*/*OP*, aproximando el resultado con dos cifras decimales por redondeo.

(c) Compare resultados entre sus compañeros.

Referencias

- *Fracciones continuas*, https://euler.us.es/~orthonet/orthonet16/notas/fracciones.pdf
- *Demostración de la irracionalidad de π*, https://es.wikipedia.org/wiki/Demostraci%C3%B3n_de_la_irracionalidad_de_%CF%80
- *How many decimals of π do we really need?*, https://www.jpl.nasa.gov/edu/news/2016/3/16/how-many-decimals-of-pi-do-we-really-need/
- *Número irracional*, https://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_irracional
- *Redondeo y truncamiento*, http://uapas2.bunam.unam.mx/matematicas/redondeo_y_truncamiento/
- *Real numbers*, https://www.rbjlabs.com/algebra-en/real-numbers/