



Facultad de Ciencias Exactas
Y Naturales



SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS DE ONDA-DIFUSIÓN

Niny J. Arcila, Carlos D. Acosta, Simeón Casanova

Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia.

Article Info

Article history:

Received: 30 Abril 2013

Received in revised: 8 Mayo 2013

Accepted: 16 Mayo 2013

Available online: 21 Mayo 2013

Keywords: Fractional derivative, Finite differences,
Diffusion-wave equation

ABSTRACT: This article presents a numerical development for the computation of fractional derivatives for the numerical solution of fractional wave-diffusion problem $u_t^\alpha = \varepsilon u_{xx} + f(x, t)$ with $1 \leq \alpha \leq 2$, using an implicit finite difference scheme. The performance of the method is illustrated with numerical examples.

RESUMEN:

En este artículo se presenta un desarrollo numérico para el cómputo de derivadas fraccionarias y la solución numérica de problemas fraccionarios onda-difusivos de tipo $u_t^\alpha = \varepsilon u_{xx} + f(x, t)$ con $1 \leq \alpha \leq 2$, utilizando un esquema implícito de diferencias finitas. El funcionamiento del método es ilustrado con ejemplos numéricos.

PALABRAS CLAVE: Derivada fraccionaria, Diferencias finitas, Difusión

1. INTRODUCCIÓN

El cálculo fraccionario es una generalización del cálculo tradicional a derivadas e integrales de orden no necesariamente entero (real e incluso complejo) [6].

Los estudios del cálculo fraccionario se iniciaron en el año 1700 debido a la pregunta de cómo entender el significado de la

derivada de orden $1/2$ de una función, razón por la cual la atención se centró principalmente en la derivada fraccionaria, originando varias definiciones de esta [5], entre ellas la definición en el sentido de Caputo la cual se trabaja en este artículo.

En las últimas décadas han aparecido muchas aplicaciones de esta rama del análisis, dado que los modelos de orden fraccionario resultan ser más apropiados para modelar diversos fenómenos físicos y químicos tales como la viscoelasticidad [8,9], la viscoplasticidad [7], la difusión anómala [10] y ciertos circuitos eléctricos [11].

De especial interés se tiene la ecuación de onda-difusión fraccionaria, obtenida de las ecuaciones clásicas de difusión y de onda al reemplazar la primera o segunda derivada en el tiempo por una derivada fraccionaria de orden $1 < \alpha < 2$, [1].

Este artículo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se realiza la discretización de la derivada fraccionaria de Caputo y de la segunda derivada espacial para generar un método de solución numérica de la ecuación de difusión fraccionaria $u_t^\alpha = \varepsilon u_{xx} + f(x, t)$. En la sección 3, se

hacen dos ejemplos numéricos. El primero para ilustrar la calidad de la aproximación de la derivada fraccionaria de Caputo de la función $g(t) = t^2$, ejemplo de prueba

sugerido en [13]. El segundo es inspirado en un problema estudiado en [1] pero con las condiciones iniciales en [14].

2. PRELIMINARES

2.1. Discretización de la Derivada de Caputo

Considere la derivada fraccionaria de Caputo de $g(t)$ de orden $\alpha \in (1, 2]$ dada por

$$\frac{d^\alpha g(t)}{dt^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{d^2 g(\xi)}{d\xi^2} \cdot \frac{d\xi}{(t-\xi)^{\alpha-1}}, & 1 < \alpha < 2 \\ \frac{d^2 g(t)}{dt^2}, & \alpha = 2 \end{cases}$$

Sea $P = \{t_0, \dots, t_M\}$ una malla uniforme del intervalo $[0, T]$, con $t_n = n\tau$ para todo $n = 0, \dots, M$ donde τ es el tamaño de paso y $T = M\tau$. Procediendo de manera análoga a [3], se utilizan diferencias finitas e integración de interpolante para aproximar la

derivada fraccionaria en el sentido de Caputo, así:

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha g(t_{n+1})}{dt^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} \frac{d^2 g(\xi)}{d\xi^2} \frac{d\xi}{(t_{n+1}-\xi)^{\alpha-1}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^n \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \frac{d^2 g(\xi_k)}{d\xi^2} \frac{d\xi}{(t_{n+1}-\xi)^{\alpha-1}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\sum_{k=0}^n \frac{g(t_{k+1}) - 2g(t_k) + g(t_{k-1}))}{\tau^2} \cdot \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} \frac{d\xi}{(t_{n+1}-\xi)^{\alpha-1}} \right) + c_n^\alpha O(\tau^2) \end{aligned}$$

donde $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$ para $k = 0, 1, \dots, (M-1)$ y

$$c_n^\alpha = \frac{\tau^{2-\alpha}}{2-\alpha} \sum_{k=0}^n (k+1)^{2-\alpha} - k^{2-\alpha}.$$

Entonces para $n \geq 1$ tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha g(t_{n+1})}{dt^\alpha} &= a_0 [g(t_{n+1}) - 2g(t_n) + g(t_{n-1}))] \\ &+ a_0 \sum_{k=1}^n b_k [g(t_{n-k+1}) - 2g(t_{n-k}) + g(t_{n-k-1}))] + c_n^\alpha O(\tau^2) \end{aligned} \quad (1)$$

y para $n = 0$,

$$\frac{d^\alpha g(t_{n+1})}{dt^\alpha} = \tau a_0 \left[\frac{dg(t_1)}{dt} - \frac{dg(t_0)}{dt} \right] + c_0^\alpha O(\tau^2) \quad (2)$$

donde $a_0 = \frac{1}{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)}$ y $b_k = (k+1)^{2-\alpha} - k^{2-\alpha}$.

2.2. Discretización de la Derivada Espacial

Sea $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ una malla uniforme para el intervalo $[a, b]$ con $x_1 = a$, $x_N = b$ y $\Delta x = \frac{b-a}{N-1}$. Se usan diferencias finitas centradas para aproximar

$$\frac{d^2 h(x_j)}{dx^2} = \frac{h(x_{j+1}) - 2h(x_j) + h(x_{j-1}))}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (3)$$

2.3. Modelo Numérico

Se considera la ecuación de onda-difusión

$$u_t^\alpha = \varepsilon u_{xx} + f(x, t),$$

$$1 < \alpha < 2, x \in [0, L], t > 0.$$

con condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0.$$

y condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \phi(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), x \in [0, L].$$

Aquí $f(x, t)$ representa el término fuente y ε el coeficiente de difusión.

Se utilizan las expresiones de (1), (2) y (3) para evaluar $u_t^\alpha = \varepsilon u_{xx} + f(x, t)$ en (x_j, t^{n+1}) . De esta manera reordenando los términos se define el método numérico

$$a_0 u_j^{n+1} - \varepsilon \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = v_j^n + f_j^{n+1}$$

donde u_j^n es la aproximación de $u(x_j, t^n)$, f_j^{n+1} representa $f(x_j, t^n)$. Para $n \geq 1$

$$v_j^n = a_0 [2u_j^n - u_j^{n-1}]$$

$$- a_0 \sum_{k=1}^n b_k [u_j^{n-k+1} - 2u_j^{n-k} + u_j^{n-k-1}] + f_j^{n+1}$$

$$+ c_n^\alpha O(\tau^2) + O(\Delta x^2),$$

y para $n = 0$ y $j = 1, \dots, (N-1)$ tenemos:

$$v_j^0 = a_0 u_j^0 + \tau a_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_j + f_j^1$$

Para $n = 0, \dots, (M-1)$ y $j = 1, \dots, (N-1)$ se reescribe lo anterior en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} B & A & 0 & \dots & 0 \\ A & B & A & \dots & 0 \\ 0 & A & B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & A \\ 0 & 0 & 0 & A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ u_4^{n+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2^n \\ v_3^n \\ v_4^n \\ \vdots \\ v_{N-1}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_2^n \\ f_3^n \\ f_4^n \\ \vdots \\ f_{N-1}^n \end{bmatrix}$$

Con $A = -\frac{\varepsilon}{\Delta x^2}$ y $B = a_0 - 2A$.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección se realizan dos ejemplos numéricos implementando los esquemas numéricos introducidos en la sección previa. Los errores relativos de la aproximación se

calculan con las normas l^1 , l^2 y l^∞ .

3.1. Cómputo de la derivada fraccionaria de orden $1 < \alpha < 2$ para la función $g(t) = t^2$.

Considérese la función $g(t) = t^2$ y el esquema numérico de la derivada fraccionaria de Caputo dada por las ecuaciones (1) y (2) para $\alpha \in \{1.25, 1.50, 1.75, 1.99\}$.

La derivada fraccionaria de Caputo exacta de la función $g(t) = t^2$ está dada por

$$\frac{d^\alpha(t^2)}{dt^\alpha} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2-\alpha},$$

$$1 < \alpha < 2, \quad 0 \leq t < 1$$

Los errores relativos de la aproximación de la derivada de Caputo de $g(t) = t^2$ en las normas l^1 , l^2 y l^∞ son respectivamente

$$\frac{\left\| \frac{d^\alpha(t^2)}{dt^\alpha} - D^\alpha(t^2) \right\|_r}{\left\| \frac{d^\alpha(t^2)}{dt^\alpha} \right\|_r}, \quad r = 1, 2, +\infty$$

donde $D^\alpha(t^2)$ es nuestra aproximación de $\frac{d^\alpha(t^2)}{dt^\alpha}$ y las normas son calculadas sobre la discretización.

Los errores relativos y orden de convergencia observados son mostrados en las tablas 1 a 4. Las gráficas de la derivada fraccionaria de Caputo numérica para $\alpha \in \{1.25, 1.50, 1.75, 1.99\}$ y $\tau = 1/256$ aparece en la Figura 1 y en la Figura 2 se

muestran los errores en dichas aproximaciones.

Tabla 1. Error relativo de la derivada fraccionaria de $g(t) = t^2$ con $\tau = 1/256$, variando α .

α	$l^1 - Er$	$l^2 - Er$	$l^\infty - Er$
1.01	0.0077	0.0067	0.0041
1.25	0.0066	0.0062	0.0093
1.50	0.0053	0.0061	0.0199
1.75	0.0034	0.0054	0.0317
1.99	1.8683e-4	4.2624e-4	0.0039

Tabla 2. Error relativo y orden de convergencia observado de la derivada fraccionaria de $g(t) = t^2$ con $\alpha = 1.01$.

M	$l^1 - Er$	$l^2 - Er$	$l^\infty - Er$
64	0.0296	0.0262	0.0160
128	0.0152	0.0133	0.0080
256	0.0077	0.0067	0.0041
512	0.0039	0.0034	0.0020
1024	0.0019	0.0017	0.0010

M	$O - l^1 Er$	$O - l^2 Er$	$O - l^\infty Er$
64	--	--	--
128	0.9615	0.9781	1
256	0.9811	0.9892	0.9644
512	0.9814	0.9786	1.0356
1024	1.0375	1	1

Tabla 3. Error relativo y orden de convergencia observado de la derivada fraccionaria de $g(t) = t^2$ con $\alpha = 1.50$.

M	$l^1 - Er$	$l^2 - Er$	$l^\infty - Er$
64	0.0191	0.0204	0.0397
128	0.0102	0.0112	0.0281
256	0.0053	0.0061	0.0199
512	0.0027	0.0032	0.0140
1024	0.0014	0.0017	0.0099

M	$O - l^1 Er$	$O - l^2 Er$	$O - l^\infty Er$
64	--	--	--
128	0.9050	0.8651	0.4986
256	0.9445	0.8766	0.4978
512	0.9730	0.9307	0.5073
1024	0.9475	0.9125	0.4999

Tabla 4. Error relativo y orden de convergencia observado de la derivada fraccionaria de $g(t) = t^2$ con $\alpha = 1.99$.

M	$l^1 - Er$	$l^2 - Er$	$l^\infty - Er$
64	5.3732e-4	8.5313e-4	0.0039
128	3.2135e-4	6.0434e-4	0.0039
256	1.8683e-4	4.2624e-4	0.0039
512	1.0640e-4	2.9998e-4	0.0038
1024	5.9648e-5	2.1089e-4	0.0038

M	$O - l^1 Er$	$O - l^2 Er$	$O - l^\infty Er$
64	--	--	--
128	0.7416	0.4974	0
256	0.7824	0.5037	0
512	0.8122	0.5068	0.0375
1024	0.8350	0.3830	0

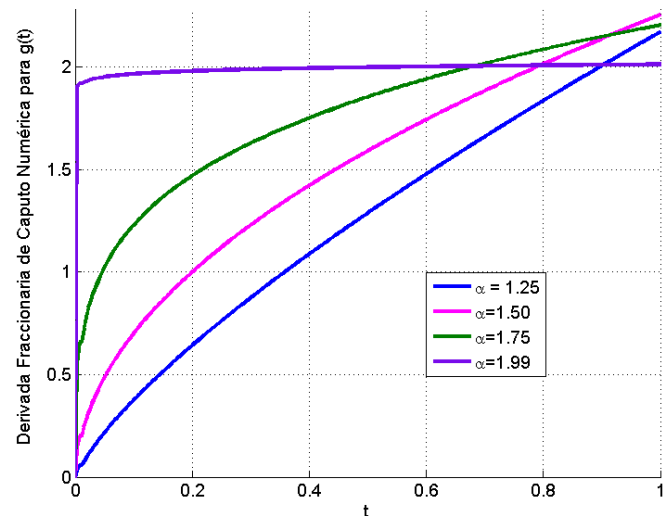


Figura 1. Derivada Fraccionaria de Caputo Numérica para $\alpha = 1.25, 1.50, 1.75, 1.99$ y $\tau = 1/256$.

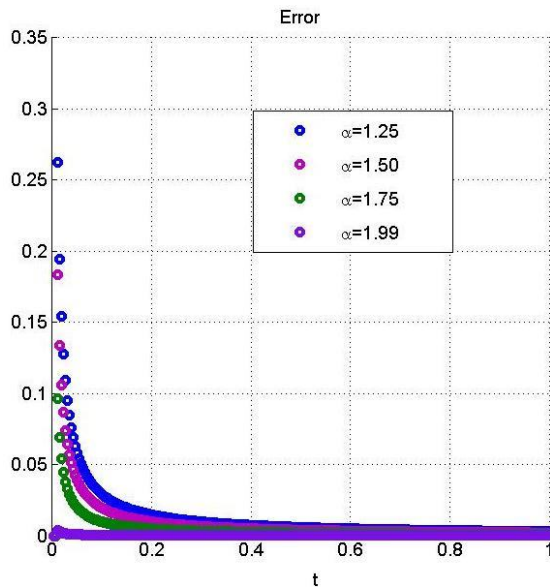


Figura 2. Errores relativos de la derivada fraccionaria de Caputo para $\alpha = 1.25, 1.50, 1.75, 1.99$ y $\tau = 1/256$.

3.2. Ecuación caso unidimensional

3.2.1 Ejemplo 1.

Considere el problema de difusión fraccionaria para $\varepsilon = 1$ y $f(x, t) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} &= \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq 1 \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \\ u(x, 0) &= \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

y el modelo numérico de la sección 2.3. para $\alpha = 1.5$.

La solución exacta del problema es

$$u(x, t) = \sin x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \quad (4)$$

$$1 < \alpha < 2, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq t < 1$$

Los errores relativos en la aproximación numérica a la solución $u(x, t)$ en las normas matriciales subordinadas l^1 , l^2 y l^∞ son respectivamente

$$\frac{\|v - U\|_r}{\|U\|_r}, \quad r = 1, 2, +\infty$$

donde el vector $V = [v_j^n]$ es nuestra aproximación al vector $U = [u(x_j, t^n)]$ y la norma es calculada sobre toda la discretización.

Los errores relativos mostrados en la Tabla 2 se calculan usando como solución de referencia, la versión truncada de (4) para $N=10$. Las gráficas de la solución numérica para $\alpha = 1.5$ se muestra en la Figura 3 y el error estimado en la Figura 4.

Tabla 2. Error relativo de la solución del ejemplo 3.2.1. con $\alpha = 1.5$.

τ	Δx	$l^1 - Er$	$l^2 - Er$	$l^\infty - Er$
1/8	1/8	0.0113	0.0134	0.0196
1/16	1/16	0.0072	0.0089	0.0164
1/32	1/32	0.0059	0.0084	0.0165
1/64	1/64	0.0012	0.0015	0.0025
1/128	1/128	6.6401e-4	7.9387e-4	0.0012

τ	Δx	$O - l^1 Er$	$O - l^2 Er$	$O - l^\infty Er$
1/8	1/8	--	--	--
1/16	1/16	0.6503	0.5904	0.2572
1/32	1/32	0.2873	0.0834	8.7702e-3
1/64	1/64	2.2977	2.4854	2.7225
1/128	1/128	0.8537	0.9180	1.0589

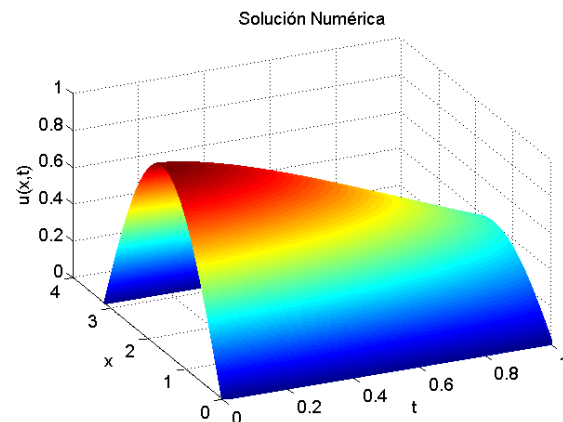


Figure 3. Solución numérica del ejemplo 3.2.1. con $\alpha = 1.5$ y $M = 500$.

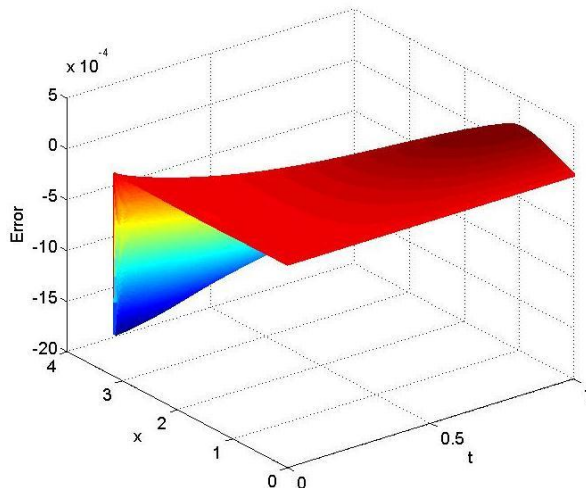


Figura 4. Errores relativos de la solución del ejemplo 3.2.1. con $\alpha = 1.5$ y $M = 500$.

4. CONCLUSIONES

Los ejemplos numéricos reflejan un orden de convergencia de $2 - \alpha$ para la aproximación de la derivada y un orden de convergencia de 1 para la aproximación del problema de valor inicial y valores en la frontera considerado, sin embargo experimentaciones posteriores y acotamientos más precisos deben adelantarse para corroborar este índice de convergencia.

Agradecimientos

Expresamos nuestro agradecimiento al Programa para financiación de semilleros de investigación en pregrado en la Universidad Nacional de Colombia – Sede Manizales, 2012 por el apoyo brindado a este trabajo.

REFERENCIAS

- [1] Al-Khaled K. and Momani S. (2005). An approximate solution for a fractional diffusion-wave equation using the decomposition method. *Applied mathematics and computation*, 165: 473-483.
- [2] R. Du, W.R. Cao and Z.Z. Sun (2010). A compact difference scheme for the fractional diffusion-wave equation. *Applied mathematical modeling*, 34: 2998-3007.
- [3] F. Liu, S. Shen, V. Anh and I. Turner (2005). Analysis of a discrete non-Markovian random walk approximation for the time fractional diffusion equation. *ANZIAM J.* 46 (E) pp. C488-C504

- [4] Podlubny I. (1990). Fractional differential equations. *Academic Press*.
- [5] Pierantozzi T. (2006). Estudio de generalizaciones fraccionarias de las ecuaciones estándar de difusión y de ondas. *Universidad Complutense de Madrid*.
- [6] <http://www.famaf.unc.edu.ar/spip/spip.php?article346>.
- [7] K Diethelm and A.D. Freed. (1999). On the solution of nonlinear fractional order differential equations used in the modelling of viscoplasticity. *In scientific computing in chemical engineering II: computational fluid dynamics, reaction engineering and molecular properties*, pp. 217-224, Springer-Verlag, Heidelberg.
- [8] A. Lion and C. Karelky. (2004). The Payne effect in finite viscoelasticity: constitutive modelling based on fractional derivatives and intrinsic time scales. *International Journal of Plasticity*, pp. 1313-1345, ELSEVIER.
- [9] F. C. Meral, T. J. Royston and R. Magin. (2010). Fractional calculus in viscoelasticity: An experimental study. *Communications in nonlinear science and numerical simulation*, pp. 939-945, ELSEVIER.
- [10] Wen Chen, Hongguang Sun, Xiaodi Zhang and Dean Korošac. (2010). Anomalous diffusion modeling by fractal and fractional derivatives. *Computers & mathematics with application*, pp. 1754-1758, ELSEVIER
- [11] Shantanu Das. (2011). Functional fractional calculus: Application of generalized fractional calculus in electrical circuit analysis and electromagnetics, chapter 8. *Springer*.
- [12] Chen W., Ye L. and Sun H. (2010). Fractional diffusion equations by the Kansa method. *Computers and mathematics with applications*, 59: 1614-1620.
- [13] Murio D.A. (2006). On the stable numerical evaluation of Caputo fractional derivatives. *Computers and mathematics with applications*, 51: 1539-1550.
- [14] AGRAWAL O. P. (2002). Solution for a Fractional Diffusion-Wave Equation Defined in a Bounded Domain, *Nonlinear Dynamics*, 29: 145-155.

