

1 Обозначим через $\text{ДЕЛ}(n, m)$ утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$\text{ДЕЛ}(45, A) \wedge ((\text{ДЕЛ}(x, 30) \wedge \text{ДЕЛ}(x, 12)) \rightarrow \text{ДЕЛ}(x, A))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

2 Элементами множеств A , P и Q являются натуральные числа, причём $P=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ и $Q=\{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$. Известно, что выражение

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (\neg(x \in Q) \rightarrow \neg(x \in A))$$

истинно (т.е. принимает значение 1 при любом значении переменной x). Определите наибольшее возможное количество элементов в множестве A .

3 (Е. Дзобс) Для какого наименьшего целого неотрицательного числа A выражение

$$(x - 2y < 3A) \vee (2y > x) \vee (3x > 50)$$

тождественно истинно, т.е. принимает значение 1 при любых целых положительных x и y ?

4 Введём выражение $M \& K$, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное число A , такое что выражение

$$(X \& 29 \neq 0) \rightarrow ((X \& 9 = 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной X)?

5 На числовой прямой даны два отрезка: $P=[14,44]$ и $Q=[26,52]$. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка A , что формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in \neg Q) \equiv (x \in P))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

6 Алгоритм вычисления значения функции $F(n)$, где n – целое число, задан следующими соотношениями:

$$F(n) = 1, \text{ при } n < 2,$$

$$F(n) = F(n/3) - 1, \text{ когда } n \geq 2 \text{ и делится на } 3,$$

$$F(n) = F(n - 1) + 17, \text{ когда } n \geq 2 \text{ и не делится на } 3.$$

Назовите минимальное значение n , для которого $F(n)$ равно 110.

7 (Е. Дзобс) Алгоритм вычисления значения функции $F(n)$, где n – целое неотрицательное число, задан следующими соотношениями:

$$F(n) = 3 \cdot n, \text{ если } n < 3$$

$$F(n) = F(n - 2) \cdot F(n - 1) - n, \text{ если } n > 2 \text{ и число } n \text{ чётное},$$

$$F(n) = F(n - 1) - F(n - 2) + 2 \cdot n, \text{ если } n > 2 \text{ и число } n \text{ нечётное}.$$

Определите последние две цифры значения $F(30)$.

8 (Е. Дзобс) Алгоритм вычисления значения функции $F(n)$, где n – натуральное число, задан следующими соотношениями:

$$F(n) = F(n+2) + 2 \cdot F(3 \cdot n), \text{ при } n \leq 70$$

$$F(n) = n - 50, \text{ при } n > 70.$$

Чему равно значение $F(40)$?

9 Алгоритм вычисления значения функции $F(n)$, где n – натуральное число, задан следующими соотношениями:

$F(n) = 1$, при $n \leq 1$
 $F(n) = n \cdot F(n-1)$, при чётном $n > 1$;
 $F(n) = n + F(n-2)$, при нечётном $n > 1$;

Определите значение $F(84)$.

10 Определите, сколько символов * выведет эта процедура при вызове $F(140)$:

Паскаль	Python	C++
<pre> procedure F(n: integer); begin write('*'); if n >= 1 then begin write('*'); F(n-1); F(n div 2); end; end; </pre>	<pre> def F(n): print('*') if n >= 1: print('*') F(n-1) F(n//2) </pre>	<pre> void F(int n) { cout << '*'; if(n >= 1) { cout << '*'; F(n-1); F(n/2); } } </pre>

11 (М. Шагитов) В файле [17-328.txt](#) содержится последовательность целых чисел. Элементы последовательности – четырёхзначные натуральные числа. Найдите все тройки элементов последовательности, для которых все суммы пар, составленные из всех чисел тройки – представляют собой палиндром, а наибольшая из этих сумм меньше, чем максимальный элемент последовательности кратный 50. В ответе запишите количество найденных троек, затем максимальную из сумм элементов таких троек. В данной задаче под тройкой подразумевается три идущих подряд элемента последовательности.

12 В файле [17-1.txt](#) содержится последовательность целых чисел. Элементы последовательности могут принимать целые значения от $-10\,000$ до $10\,000$ включительно. Определите количество троек, в которых хотя бы один из трёх элементов больше, чем среднее арифметическое всех чисел в файле. В ответе запишите два числа: сначала количество найденных троек, а затем – максимальную сумму элементов таких троек. В данной задаче под тройкой подразумевается три идущих подряд элемента последовательности.

13 (М. Шагитов) В файле [17-304.txt](#) содержится последовательность целых чисел. Элементы последовательности могут принимать целые значения от 0 до $10\,000$. Найдите все пары элементов последовательности, в которых ровно одно число делится на сумму цифр восьмеричной записи другого числа в паре, а сумма чисел пары делится на минимальный элемент последовательности. В ответе запишите количество найденных пар, затем максимальную из сумм элементов таких пар. В данной задаче под парой подразумевается два идущих подряд элемента последовательности.

14 В файле [17-243.txt](#) содержится последовательность целых чисел. Элементы последовательности могут принимать целые значения от 0 до $10\,000$ включительно. Определите количество пар чисел, в которых хотя бы один из двух элементов больше, чем наибольшее из всех чисел в файле, делящихся на 111, и хотя бы один элемент из двух оканчивается на 7. В ответе запишите два числа: сначала количество найденных пар, а затем – минимальную сумму элементов таких пар. В данной задаче под парой подразумевается два идущих подряд элемента последовательности.

15 В файле [17-1.txt](#) содержится последовательность целых чисел. Элементы последовательности могут принимать целые значения от $-10\,000$ до $10\,000$ включительно. Определите количество троек, в которых хотя бы два из трёх элементов меньше, чем среднее арифметическое всех чисел в файле, и десятичная запись хотя бы одного из трёх элементов оканчивается на 14. В ответе запишите два числа: сначала количество найденных троек, а затем – максимальную сумму элементов таких троек. В данной задаче под тройкой подразумевается три идущих подряд элемента последовательности.