

1. (А. Куканова) Вика составляет 4-буквенные слова из букв В, А, Й, Ф, У, причём слово не может начинаться с буквы Й и не должно содержать сочетаний ВФ и ФВ. Все буквы в слове различны. Сколько таких слов может составить Вика?
2. Петя составляет 6-буквенные слова из букв К, О, М, Е, Т, А. Каждую букву нужно использовать ровно 1 раз, при этом нельзя ставить подряд две гласные или две согласные. Сколько различных кодов может составить Петя?
3. Сергей составляет 6-буквенные коды из букв К, Л, Е, Й. Буква Й может использоваться в коде не более одного раза, при этом она не может стоять на первом месте, на последнем месте и рядом с буквой Е. Все остальные буквы могут встречаться произвольное количество раз или не встречаться совсем. Сколько различных кодов может составить Сергей?
4. Из букв слова КАРКАС составляются 6-буквенные последовательности. Сколько можно составить различных последовательностей, если известно, что в каждой из них содержится не менее 3 согласных?
5. Василий составляет 4-буквенные коды из букв М, О, И, С, Е, Й. Каждую букву можно использовать любое количество раз, при этом код не может начинаться с буквы Й и должен содержать хотя бы одну гласную. Сколько различных кодов может составить Василий?
6. Исполнитель Редактор получает на вход строку цифр и преобразовывает её. Редактор может выполнять две команды, в обеих командах  $v$  и  $w$  обозначают цепочки символов.

1. заменить ( $v$ ,  $w$ )
2. нашлось ( $v$ )

Первая команда заменяет в строке первое слева вхождение цепочки  $v$  на цепочку  $w$ . Если цепочки  $v$  в строке нет, эта команда не изменяет строку. Вторая команда проверяет, встречается ли цепочка  $v$  в строке исполнителя Редактор.

Дана программа для исполнителя Редактор:

```
НАЧАЛО
ПОКА нашлось (2222) ИЛИ нашлось (666)
    ЕСЛИ нашлось (2222)
        ТО заменить (2222, 6)
        ИНАЧЕ заменить (666, 2)
    КОНЕЦ ЕСЛИ
КОНЕЦ ПОКА
КОНЕЦ
```

Какая строка получится в результате применения приведённой выше программы к строке, состоящей из 79 идущих подряд цифр 2? В ответе запишите полученную строку.

7. Исполнитель Редактор получает на вход строку цифр и преобразовывает её. Редактор может выполнять две команды, в обеих командах  $v$  и  $w$  обозначают цепочки символов.

1. заменить ( $v$ ,  $w$ )
2. нашлось ( $v$ )

Первая команда заменяет в строке первое слева вхождение цепочки  $v$  на цепочку  $w$ . Если цепочки  $v$  в строке нет, эта команда не изменяет строку. Вторая команда проверяет, встречается ли цепочка  $v$  в строке исполнителя Редактор.

Дана программа для исполнителя Редактор:

```
НАЧАЛО
ПОКА нашлось (1111)
    заменить (1111, 2)
    заменить (22, 11)
КОНЕЦ ПОКА
КОНЕЦ
```

Известно, что исходная строка содержала более 100 единиц и не содержала других цифр. Укажите минимально возможную длину исходной строки, при которой в результате работы этой программы получится строка, содержащая минимально возможное количество единиц.

8. Исполнитель Редактор получает на вход строку цифр и преобразовывает её. Редактор может выполнять две команды, в обеих командах  $v$  и  $w$  обозначают цепочки цифр.

1. заменить ( $v$ ,  $w$ )
2. нашлось ( $v$ )

Первая команда заменяет в строке первое слева вхождение цепочки  $v$  на цепочку  $w$ , вторая проверяет, встречается ли цепочка  $v$  в строке исполнителя Редактор. Если она встречается, то команда возвращает логическое значение «истина», в противном случае возвращает значение «ложь».

Какая строка получится в результате применения приведённой ниже программы к строке, состоящей из 93 идущих подряд цифр 5? В ответе запишите полученную строку.

```
НАЧАЛО
ПОКА нашлось (333) ИЛИ нашлось (555)
    ЕСЛИ нашлось (555)
        ТО заменить (555, 3)
        ИНАЧЕ заменить (333, 5)
    КОНЕЦ ЕСЛИ
КОНЕЦ ПОКА
КОНЕЦ
```

9. (Е. Джобс) Исполнитель Редактор получает на вход строку цифр и преобразовывает её. Редактор может выполнять две команды, в обеих командах  $v$  и  $w$  обозначают цепочки символов.

1. заменить ( $v$ ,  $w$ )
2. нашлось ( $v$ )

Первая команда заменяет в строке первое слева вхождение цепочки  $v$  на цепочку  $w$ . Если цепочки  $v$  в строке нет, эта команда не изменяет строку. Вторая команда проверяет, встречается ли цепочка  $v$  в строке исполнителя Редактор. Дана программа для исполнителя Редактор:

```
НАЧАЛО
ПОКА НЕ нашлось (><)
    заменить(>1, 3>)
    заменить(>2, 2>)
    заменить(>3, 1>)
    заменить(3<, <1)
    заменить(2<, <3)
    заменить(1<, <2)
КОНЕЦ ПОКА
КОНЕЦ
```

На вход приведённой ниже программе поступает строка, начинающаяся с символа «>», содержащая 20 цифр 1, 15 цифр 2 и 40 цифр 3 и оканчивающаяся символом «<». Определите, в каком порядке должны располагаться цифры во входной строке, чтобы сумма цифр, получившаяся в результате выполнения программы, была максимально возможной. В ответе запишите эту максимально возможную сумму. Так, например, если результат работы программы представлял бы собой строку, состоящую из 50 цифр 4, то верным ответом было бы число 200.

**10.** Исполнитель Редактор получает на вход строку цифр и преобразовывает её. Редактор может выполнять две команды, в обеих командах  $v$  и  $w$  обозначают цепочки цифр.

1. заменить ( $v$ ,  $w$ )
2. нашлось ( $v$ )

Первая команда заменяет в строке первое слева вхождение цепочки  $v$  на цепочку  $w$ , вторая проверяет, встречается ли цепочка  $v$  в строке исполнителя Редактор. Если она встречается, то команда возвращает логическое значение «истина», в противном случае возвращает значение «ложь». Дана программа для исполнителя Редактор:

```
НАЧАЛО
ПОКА нашлось (>1) ИЛИ нашлось (>2) ИЛИ нашлось (>3)
    ЕСЛИ нашлось (>1)
        ТО заменить (>1, 22>)
    КОНЕЦ ЕСЛИ
    ЕСЛИ нашлось (>2)
        ТО заменить (>2, 2>1)
    КОНЕЦ ЕСЛИ
    ЕСЛИ нашлось (>3)
        ТО заменить (>3, 1>2)
    КОНЕЦ ЕСЛИ
КОНЕЦ ПОКА
КОНЕЦ
```

На вход приведённой ниже программе поступает строка, начинающаяся с символа «>», а затем содержащая 28 цифр 1, 18 цифр 2 и 35 цифр 3, расположенных в произвольном порядке. Определите сумму числовых значений цифр строки, получившейся в результате выполнения программы. Так, например, если результат работы программы представлял бы собой строку, состоящую из 50 цифр 4, то верным ответом было бы число 200.

**11.** Элементами множеств  $A$ ,  $P$  и  $Q$  являются натуральные числа, причём  $P = \{ 1, 12 \}$  и  $Q = \{ 12, 13, 14, 15, 16 \}$ . Известно, что выражение

$$\neg(x \in A) \rightarrow (\neg(x \in P) \wedge \neg(x \in Q))$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной  $x$ . Определите наименьшее возможное количество элементов множества  $A$ .

**12.** Введём выражение  $M \& K$ , обозначающее поразрядную конъюнкцию  $M$  и  $K$  (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(X \& 41 = 0) \rightarrow ((X \& 119 \neq 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $X$ )?

**13.** Введём выражение  $M \& K$ , обозначающее поразрядную конъюнкцию  $M$  и  $K$  (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное число  $A$ , такое что выражение

$$(X \& 53 = 0) \rightarrow ((X \& 19 \neq 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $X$ )?

**14.** На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [10, 80]$  и  $Q = [30, 50]$ . Найдите наибольшую возможную длину отрезка  $A$ , при котором формула

$$(x \in A) \rightarrow ((x \in P) \wedge \neg(x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любых  $x$ .

**15.** (Е. Джобс) Обозначим через ДЕЛ( $n$ ,  $m$ ) утверждение «натуральное число  $n$  делится без остатка на натуральное число  $m$ ». Для какого наименьшего натурального числа  $A$  формула

$$(\neg \text{ДЕЛ}(x, 84) \vee \neg \text{ДЕЛ}(x, 90)) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, A)$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной  $x$ )?

**16.** (Е. Джобс) Алгоритмы вычисления функций  $F(n)$  и  $G(n)$  заданы следующими соотношениями ( $//$  – операция деления нацело):

$$\begin{aligned} F(n) &= n, \text{ при } n < 50, \\ F(n) &= 2 \cdot G(50 - n // 2), \text{ при } n > 49, \\ G(n) &= 10, \text{ при } n > 40, \\ G(n) &= 30 + F(n + 600 // n), \text{ при } n < 41. \end{aligned}$$

Чему равно значение  $F(80)$ ?

**17.** Алгоритм вычисления значения функции  $F(n)$ , где  $n$  – целое неотрицательное число, задан следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} F(0) &= 8 \\ F(n) &= 5 + F(n / 3) \text{ если } n > 0 \text{ и } n \text{ делится на } 3 \\ F(n) &= F(n // 3) \text{ в остальных случаях} \end{aligned}$$

Здесь  $//$  означает деление нацело. Определите количество значений  $n$  на отрезке  $[1, 100\,000\,000]$ , для которых  $F(n) = 18$ .

**18.** (П. Волгин) Алгоритм вычисления значения функции  $F(n)$ , где  $n$  – целое неотрицательное число, задан следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} F(0) &= 1 \\ F(n) &= F(n-1), \text{ при } 0 < n \leq 10 \\ F(n) &= 2 \cdot 2^{F(n-3)}, \text{ при } 10 < n < 100 \\ F(n) &= 1,7^{F(n-2)}, \text{ при } n \geq 100 \end{aligned}$$

Чему равна сумма цифр целой части  $F(40)$ ?

**19.** Алгоритм вычисления значения функции  $F(n)$ , где  $n$  – натуральное число, задан следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} F(1) &= G(1) = 1 \\ F(n) &= 3 \cdot F(n-1) + G(n-1) - n + 5, \text{ если } n > 1 \\ G(n) &= F(n-1) + 3 \cdot G(n-1) - 3 \cdot n, \text{ если } n > 1 \end{aligned}$$

Чему равно значение  $F(14) + G(14)$ ?

**20.** (П. Волгин) Алгоритм вычисления значения функции  $F(n)$ , где  $n$  – целое неотрицательное число, задан следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} F(0) &= 3 \\ F(n) &= F(n-1), \text{ при } 0 < n \leq 15 \\ F(n) &= 2,5^{F(n-3)}, \text{ при } 15 < n < 100 \\ F(n) &= 3,3^{F(n-2)}, \text{ при } n \geq 100 \end{aligned}$$

С какой цифры начинается дробная часть значения функции  $F(100)$ ?

**21.** В файле [17-4.txt](#) содержится последовательность целых чисел. Элементы последовательности могут принимать целые значения от 0 до 10 000 включительно. Определите количество пар, в которых оба элемента меньше, чем среднее арифметическое всех чисел в файле, а их сумма оканчивается на 19. В ответе запишите два числа: сначала количество найденных пар, а затем – минимальную сумму элементов таких пар. В данной задаче под парой подразумевается два идущих подряд элемента последовательности.

**22.** В файле [17-1.txt](#) содержится последовательность целых чисел. Элементы последовательности могут принимать целые значения от -10 000 до 10 000 включительно. Определите количество троек, в которых хотя бы один из трёх элементов меньше, чем среднее арифметическое всех чисел в файле, и хотя бы два из трёх элементов делятся на 7. В ответе запишите два числа: сначала количество найденных троек, а затем – максимальную сумму элементов таких троек. В данной задаче под тройкой подразумевается три идущих подряд элемента последовательности.

**23.** В файле [17-243.txt](#) содержится последовательность целых чисел. Элементы последовательности могут принимать целые значения от 0 до 10 000 включительно. Определите количество пар чисел, в которых хотя бы один из двух элементов больше, чем наибольшее из всех чисел в файле, делящихся на 211, и хотя бы один элемент из двух содержит цифру 1. В ответе запишите два числа: сначала количество найденных пар, а затем – минимальную сумму элементов таких пар. В данной задаче под парой подразумевается два идущих подряд элемента последовательности.

**24.** В файле [17-243.txt](#) содержится последовательность целых чисел. Элементы последовательности могут принимать целые значения от 0 до 10 000 включительно. Определите количество пар чисел, в которых хотя бы один из двух элементов больше, чем наибольшее из всех чисел в файле, делящихся на 153, и в двоичной записи хотя бы одного элемента из двух содержится цепочка цифр 1111. В ответе запишите два числа: сначала количество найденных пар, а затем – минимальную сумму элементов таких пар. В данной задаче под парой подразумевается два идущих подряд элемента последовательности.

**25.** В файле [17-1.txt](#) содержится последовательность целых чисел. Элементы последовательности могут принимать целые значения от -10 000 до 10 000 включительно. Определите количество троек, в которых хотя бы два из трёх элементов меньше, чем среднее арифметическое всех чисел в файле, и десятичная запись хотя бы двух из трёх элементов содержит цифру 5. В ответе запишите два числа: сначала количество найденных троек, а затем – максимальную сумму элементов таких троек. В данной задаче под тройкой подразумевается три идущих подряд элемента последовательности.